INVESTIGATION MATHÉMATIQUE À TRAVERS UN ENSEIGNEMENT PAR RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : PISTES INITIALES

PROULX, Jérôme*

Résumé – Cette communication présente une approche d'enseignement centrée sur l'enseignement des mathématiques par l'investigation et la résolution de problèmes. À partir d'un extrait de séance menée au secondaire, diverses caractéristiques sont déclinées, offrant des éléments initiaux d'analyse.

Mots-clefs : Didactique ; Mathématiques ; Enseignement par problèmes ; Explorations mathématiques

Abstract – This paper presents an approach focused on teaching mathematics through problems and inquiry. Using extracts from a session conducted in a secondary-level classroom, a number of characteristics are outlined, offering an initial layer for subsequent analyses.

Keywords: *Didactique*; Mathematics; Teaching through problems; Mathematical explorations

I. INTRODUCTION AU CONTEXTE DE LA RECHERCHE

Cette communication offre un aperçu des travaux conduits au sein du Laboratoire épistémologie et activité mathématique (www.epistemo.math.uqam.ca), centrés sur l'étude de différentes façons de travailler en contexte de résolution de problèmes (pris au sens large) dans une classe de mathématiques. Ces approches axent sur l'investigation et l'exploration mathématiques, à travers la résolution de divers problèmes, et donc sur un enseignement des mathématiques pensé à travers les résolutions, explorations et investigations de ces divers problèmes par les élèves. Ce contexte de recherche nous amène à intervenir dans plusieurs classes de différents niveaux, allant de l'élémentaire à l'université, où avec des enseignants collaborateurs nous choisissons divers types de problèmes à faire résoudre aux élèves. La nature de ces problèmes est variée, allant de problèmes simples à des problèmes plus complexes, en passant par du calcul mental. Cette variété de problèmes est pensée, par exemple, à travers la classification offerte par Borasi (1986). Cette dernière décline une diversité possible de types de problèmes en mathématiques : exercice, problème en mots, énigme, démonstration, situation-problème, situation de la vie réelle, situation ouverte (voir aussi Proulx (2019) pour une opérationnalisation de cette variété de problèmes en enseignement des mathématiques et en contexte de formation des enseignants).

L'objectif du travail de recherche est, dans un premier temps, de mettre en route cette approche d'enseignement et, dans un deuxième temps, d'étudier son apport didactique, soit la façon avec laquelle celle-ci permet de faire avancer les mathématiques de la classe. Dans le but d'offrir une description de cette approche d'enseignement, quelques assises théoriques sont présentées et un exemple du travail fait avec les élèves est détaillé. L'exemple choisi et utilisé dans cette communication est relatif à l'exploitation de tâches dites simples, tels des exercices ou des problèmes en mots (Proulx, en préparation; un exemple supplémentaire est offert dans la communication de Maheux (2018) dans ces mêmes actes de colloque) Cet ancrage et cet exemple offrent une illustration du type d'exploration et d'investigation mathématique dans lequel les élèves sont plongés, à l'intérieur de nos travaux de recherche, menant par la suite à une analyse initiale de diverses dimensions qui caractérisent l'approche.

* Laboratoire épistémologie et activité mathématique – Un. du Qc à Mtl – Qc., Canada – proulx.jerome@uqam.ca

II. LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES COMME PROCESSUS DYNAMIQUE

Ancrées dans la théorie cognitive de l'enaction et du *faire|mathématique* (Maheux & Proulx, 2014, 2015), qui conçoit l'activité mathématique de résolution de problèmes comme un processus non-linéaire et évolutif, nos recherches s'inspirent fortement des travaux de Borasi (1992) et de Lampert (1990 a,b) sur l'investigation en classe de mathématiques, centrés sur l'immersion des élèves en situations authentiques d'investigation et d'exploration mathématiques. Dans leurs travaux, de façon analogue au développement des mathématiques elles-mêmes comme discipline (Davis & Hersh, 1981 ; Wilder, 1984), la résolution de problèmes est conçue en tant que processus émergent qui ne suit pas un plan pré-décidé et à travers lequel de nombreuses questions et nouvelles productions jaillissent en cours de résolution ; celles-ci redirigeant parfois l'exploration en devenant le nouvel objet d'investigation (Cobb et al., 1994), ce à quoi Grenier et Payan (2002) réfèrent comme étant le critère de « non-fin » d'une situation, où la résolution « renvoie très souvent à une nouvelle question. La situation n'a pas de "fin". Il n'y a que des critères de fin locaux. » (p. 192).

Ramenés à la classe de mathématiques, soit en contexte d'enseignement, Remillard et Kaye Geist (2003) conçoivent ces investigations non-linéaires, ces événements émergents, comme offrant des « ouvertures » dans le curriculum, où des occasions d'investigation (supplémentaires) se présentent et redirigent (potentiellement) le déroulement de la séance de classe. On pense à l'idée d'attraper la balle au bond, sur-le-champ, relativement à ce qui se produit en classe : on est ici directement dans un contexte d'exploitation du problème et des solutions fournies en relançant le travail suite à ce qui est fait, en construisant sur les réponses d'élèves (Van Zoest et al., 2016). Borasi (1992) aborde ces idées en termes de flexibilité nécessaire lorsqu'un espace de travail authentique d'investigation est proposé en classe :

> The open-endedness that characterizes inquiry requires extreme flexibility in terms of curriculum content and choices. A teacher will often need to deviate from the original lesson plan in order to follow a new lead, pursue valuable questions raised by the students, or let the class fully engage in a debate stimulated by difference in opinion or different solutions (p. 202)

Ceci amène les intervenants dans les classes à travailler avec les solutions, stratégies et productions des élèves qui surviennent en cours de résolution, en les questionnant, en établissant des liens entre elles, en relançant les élèves par des interrogations diverses, etc., et en encourageant en retour les élèves à faire de même (générer d'autres stratégies, les justifier, argumenter, émettre des conjectures, les valider, etc.). Ceci implique que toute investigation est initiée par la résolution d'une tâche donnée aux élèves à résoudre et à exploiter dans l'action de la classe mais sans avoir une idée pré-fixée du déroulement mathématique qui sera suivi. Ce contexte d'exploration et d'investigation mathématiques implique de se retrouver dans une approche dite d'émergence (Proulx, 2007), où l'avancement des mathématiques suit son propre cours et n'est pas tracé d'avance ou pré-fixé. La Figure 1 rend de façon imagée cette différence.

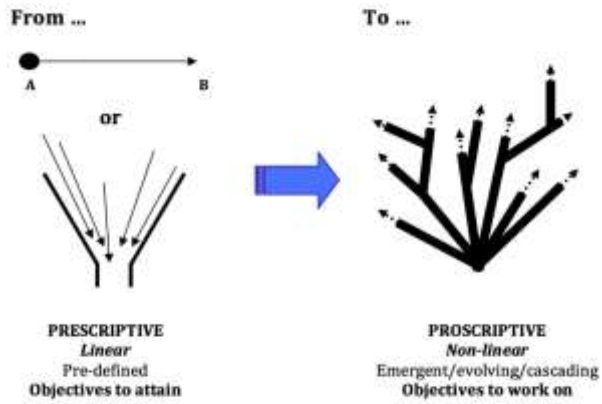


Figure 1 *– Distinctions entre une approche pré-tracée et une d'émergence (tiré de Proulx, 2007)*

Dans ce contexte, un problème se définit autant par ce qui est donné aux élèves, que par son investigation et les questions qui émergent en cours de route : le problème est une entité dynamique, qui évolue et se transforme au fil de la séance. Pour English et Gainsburg (2015), un problème *devient* un problème en fonction de ce qui est demandé à l'élève et de ce qui en découle, et non uniquement en fonction de son « énoncé ». C'est en ce sens que la classification de Borasi est intéressante, où toute tâche, quelle que soit sa nature « initiale », a le potentiel de devenir un problème ou encore d'être réduit à un exercice sans envergure : même la travail d'une preuve mathématique, lorsque mémorisé, perd son intérêt mathématique. Ce sont donc ce qui est demandé à l'élève et son activité en retour qui participent à la création du problème à investiguer, de l'investigation mathématique elle-même et de son déroulement. Les problèmes donnés aux élèves ne sont pas conçus, tel que décrits par Stanic et Kilpatrick (1988), en tant que véhicules ou transmetteur de connaissances mathématiques pré-décidées, à acquérir par la résolution dudit problème. Les problèmes ont plutôt le rôle de déclencheurs de l'activité mathématique des élèves, dans le but de faire émerger des stratégies et concepts à travers leurs exploration et investigation, que l'enseignant prend en compte et réinvestit pour son projet didactique, soit pour faire avancer les mathématiques de la classe. Ainsi, mis à part les thèmes mathématiques globaux (e.g., opérations, algèbre, estimation, géométrie, fractions, mesure), le contenu mathématique précis qui est abordé durant les séances de résolution de problème n'est pas totalement anticipé : il prendra forme à travers la résolution, l'exploration et l'investigation des problèmes, les stratégies développées, les questions posées, etc., le tout se développant dans l'action même de la classe à partir des échanges, des partages, des questionnements et des explorations diverses. C'est à travers cette perspective, axée sur l'émergence des mathématiques en cours d'investigation, que les objectifs de recherche sont abordés.

III. ENSEIGNEMENT PAR RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : UN EXEMPLE

1. *Quelques éléments du contexte de la recherche*

Nous collaborons avec des enseignants qui nous invitent sur une base régulière dans leurs classes afin d'expérimenter différentes approches de résolution de problèmes et pour interagir, analyser et réfléchir avec nous sur l'enseignement qui a cours durant ces séances. Comme ils prennent place dans diverses classes, nos travaux de recherche s'insèrent dans les planifications prévues des enseignants : les tâches données aux élèves sont choisies par et avec les enseignants (provenant la plupart du temps de leur propre matériel). Les séances menées en classe suivent normalement le même format, démarrant avec une tâche présentée aux élèves, écrite au tableau ou donnée oralement selon la nature de la tâche et pour laquelle les élèves ont un temps variable pour résoudre (seul ou en équipe). Par la suite, en plénière, les élèves sont invités à partager leurs stratégies et solutions à la classe, en s'assurant de bien expliquer et de justifier leurs raisonnements. Tel que mentionné, les élèves sont aussi invités à interagir entre eux au niveau des stratégies et solutions mathématiques offertes, à se questionner, à compléter les idées, à faire des liens entre les solutions, etc. À l'occasion, ces nombreuses interactions provoquent en retour de nouvelles investigations, où les élèves sont invités à creuser des idées et questions supplémentaires (Cobb et al., 1994), ici encore seuls ou en équipe. Les données recueillies sont centrées sur les discussions et interactions en classe, autant verbales, écrites au tableau que gestuelles, de la part des élèves et de l'enseignant, prises sous forme de notes de terrain par des assistants de recherche et/ou enregistrées sous format audiovidéo. Ces données sont complétées par des notes écrites à chaud par le chercheur, ainsi que des rencontres d'équipe (enseignants, chercheur et assistants) suivant les séances pour discuter de divers événements s'étant produits (permettant en retour de bonifier les notes de terrain).

2. Un exemple d'exploration et d'investigation mathématiques

Pour illustrer la nature du travail réalisé avec les élèves, un extrait d'une séance menée dans une classe de mathématiques de secondaire IV comptant une trentaine d'élèves (15-16 ans, période de 75 minutes) est détaillé. Cet extrait a été choisi pour sa capacité à bien illustrer la nature des investigations réalisées avec les élèves dans la majorité des séances conduites/expérimentées dans nos recherches.

L'enseignant de la classe avec qui nous avons travaillé s'intéressait précisément à nos travaux menés en contexte de calcul mental avec des tâches courtes et à résoudre sans papier-crayon, pour voir la façon avec laquelle ses élèves s'engageraient et le type de stratégies qu'ils déploieraient. Le thème retenu pour la séance d'où l'extrait est tiré est la géométrie analytique des distances dans le plan (points de croisement, de partage, distance entre deux points, etc.), pour laquelle les élèves avaient déjà abordé les formules algébriques usuelles. La tâche proposée aux élèves dans l'extrait concerne la distance entre deux points dans le plan cartésien, soit : *Trouvez la distance entre les points (0,0) et (4,3)* (avec un plan cartésien affiché au tableau contenant les deux points tracés). Parce qu'ils avaient déjà abordé les formules de distance entre deux points (D=$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$), l'intention derrière la tâche n'était pas de faire découvrir ladite formule, mais plutôt de plonger les élèves en contexte de résolution avec un court laps de temps pour faire émerger leurs compréhensions à ce stade sur la distance entre deux points. En d'autres mots, l'idée était de voir comment les élèves s'engageraient, quelles stratégies mathématiques seraient développées, et quel type d'interactions, de questions et d'explorations seraient provoquées par cette tâche, c'est-à-dire quelles productions mathématiques seraient développées par les élèves en classe. Dans ce cas-ci, les élèves disposaient d'une quinzaine de secondes pour résoudre la tâche, sans recours au support papier-crayon ni à d'autres aides matérielles. Après le temps écoulé, ceux-ci ont été invités à partager leurs solutions (complètes ou non) et la façon dont ils y sont parvenus. Le chercheur principal du projet (J. Proulx) est celui qui gère le travail de classe avec les élèves en proposant la tâche et organisant les discussions. Cette tâche de distance représente la première donnée aux élèves durant la séance, et le travail qui en a suivi s'est étalé sur 40 minutes. Voici dans ce qui suit un déroulement synthétique et chronologique des explorations menées.

3. Les stratégies et investigations mathématiques

Une fois la tâche donnée et le temps écoulé, le chercheur invite les élèves à expliquer leurs solutions. Différentes stratégies sont alors partagées pour résoudre la tâche demandée.

Une première stratégie offerte concerne l'utilisation de la formule usuelle, donnant 5 comme mesure de la distance. Une deuxième stratégie implique de tracer un triangle dans le plan et par la suite d'utiliser la relation de Pythagore (Figure 2a), en comptant le nombre de « carrés » d'un point à l'autre pour établir la mesure des côtés de 3 et 4.

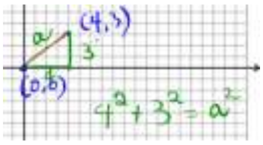


***Figure 2a** – Le dessin du triangle rectangle*

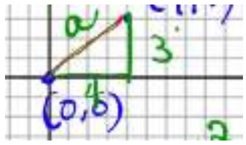


***Figure 2b** – Plan rapproché du triangle rectangle*

Une élève propose une troisième stratégie, expliquant qu'il est possible de compter directement les points entre (0,0) et (4,3). Venant au tableau, elle fait un trait rouge de (0,0) à (4,3) sur l'hypoténuse du triangle (Figure 2b). Partant de (0,0), elle compte alors sur ce trait pour obtenir le nombre de « points de croisement » parcourus jusqu'à (4,3), soit les points de coordonnées entières. Elle s'arrête toutefois et affirme que puisque le trait ne passe pas directement par les « croisements » des carrés, alors le comptage est difficile à réaliser. L'enseignant trace alors sur le tableau un autre segment entre deux points fictifs, qui montre le passage d'un point à un autre à travers les diagonales des carrés. De cette façon, le nombre de points de coordonnées entières franchies par la droite, ici 4, peut être compté directement (Figure 3).

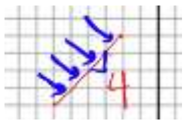
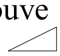


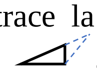
***Figure 3** – Exemple de segment de droite croisant les diagonales des carrés unités en lien avec la 3e stratégie*

L'enseignant demande alors si la mesure obtenue avec les diagonales du carré est la même que celle obtenue avec le côté de ce même carré (il dessine  au tableau).

> Une élève affirme que les deux longueurs ne sont pas les mêmes, car la diagonale d'un carré n'est pas de même longueur que le côté. Un autre élève dit qu'il est certain que ces deux longueurs sont différentes, car l'hypoténuse est toujours le plus grand côté d'un triangle. Une élève explique que la diagonale est plus grande, car elle est en face de l'angle le plus grand du triangle.

L'enseignant demande alors aux élèves si cette affirmation est toujours vraie, soit que le côté le plus grand dans un triangle se retrouve en face de l'angle le plus grand (il dessine un triangle rectangle quelconque au tableau ).

> L'élève précédente, pointant le dessin fait, affirme que l'angle face au grand côté est justement plus grand. Une autre élève explique que, dans un triangle, plus l'angle est grand plus la longueur opposée sera grande. Pointant le dessin, elle affirme que si le côté/hypoténuse avait été plus long, il aurait en retour donné un plus grand angle. Il ajoute que puisque la somme des angles d'un triangle donne 180^{o}, alors l'angle droit est toujours l'angle le plus grand du triangle (parce qu'il ne reste que 90^{o} à partager entre deux angles).

Reprenant le dessin du triangle rectangle, l'enseignant fait varier l'angle droit vers un angle obtus et trace la longueur de côté associée, montrant que ce côté deviendrait plus long (dessinant  au tableau). Il fait par la suite varier l'angle à nouveau vers un angle aigu, demandant aux élèves si, avec cet angle aigu, leur « théorie » du côté opposé à l'angle est toujours valide.

> Un élève dit que tout fonctionne pour le triangle isocèle, avec deux côtés égaux face à deux angles égaux. Un autre élève souligne que c'est la même chose pour le triangle équilatéral, alors que « c'est partout pareil », mêmes angles et mêmes longueurs de côtés.

Suite aux explications des élèves que la diagonale du carré est plus grande que le côté du même carré, l'enseignant souligne que la stratégie du comptage des diagonales revient finalement à compter le nombre de diagonales franchies par le segment d'un point à l'autre. Il ajoute que ceci représente une mesure possible, qui donnerait 4 diagonales dans l'exemple de la Figure 3. Il écrit alors au tableau qu'il est possible d'exprimer la distance entre les deux points avec la valeur de 4 diagonales ou celle de 5 unités, donnant deux mesures différentes pour la même distance. Un élève ajoute que si on connait la valeur en carrés unités de la diagonale, alors on peut trouver le nombre de carrés unités pour ce segment en le multipliant par ce « facteur ».

Un élève offre une autre stratégie en voulant procéder par la loi des sinus, affirmant que l'angle du triangle est de 45°. L'enseignant demande alors à l'élève comment ce dernier sait-il que l'angle vaut 45°. L'élève ne pouvant pas offrir de justifications, certains élèves acceptent l'affirmation alors que d'autres ont des réticences. Face à ces divergences, l'enseignant demande aux élèves de prendre quelques minutes, seuls ou en équipe et avec leur matériel scolaire au besoin, pour explorer si l'angle du triangle est de 45°. Après 5-6 minutes de travail, l'enseignant invite les élèves à partager leurs trouvailles avec la classe.

> Une élève explique que sur sa feuille aide-mémoire donnée pour les aider durant leurs examens, on voit un triangle rectangle isocèle qui possède des angles de 45°. Et qu'ici, avec ce triangle de 4 et 3 pour mesures de côté, on ne peut pas affirmer directement si la valeur de l'angle est de 45°, car ce n'est pas un triangle isocèle puisqu'il n'a pas les mêmes mesures de côté.
>
> Une autre élève s'avance au tableau et, à partir du triangle initial formé des points (0,0) et (4,3), complète un rectangle (voir Figure 4a). Elle explique que l'hypoténuse est la diagonale de ce rectangle, qui le coupe en deux et donc coupe en même temps l'angle de 90° en deux angles égaux de 45°.

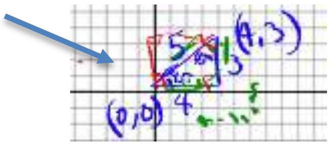


Figure 4a *– Le rectangle « complété »*

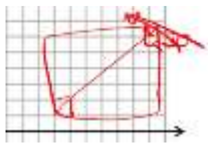


Figure 4b *– Le rectangle « contre-exemple »*

Alors que l'enseignant souligne que les deux arguments s'opposent, une élève affirme son désaccord et dessine au tableau un rectangle avec une diagonale en disant que bien qu'elle divise le rectangle en deux *rien n'assure* que l'angle soit lui aussi divisé en deux (Figure 4b). Une autre élève ajoute à cette idée que puisque les côtés du triangle ne sont pas de même mesure (soit de 3 et de 4), alors la diagonale ne coupera pas l'angle de 90° en 2 parties égales de 45°.

L'enseignant explique que l'élève a réutilisé l'argument précédent, accepté par tous, que le plus grand côté du triangle fait face au plus grand angle du même triangle. Donc, ici, un côté plus grand ferait face à un angle plus grand. Un contre-exemple est alors offert.

> L'élève ayant fait référence à sa feuille aide-mémoire affirme qu'il leur arrive tous dans un examen de voir des triangles rectangles qui n'ont pas des angles de 45°, par exemple des angles de 32° et 58°. Elle trace alors au tableau un exemple de ce triangle rectangle, qu'elle complète pour former un rectangle (Figure 5), expliquant que la diagonale coupe en deux le rectangle mais sans que les angles obtenus soient de 45°.

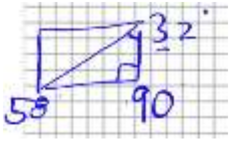


***Figure 5** – Le triangle contre-exemple avec angles de 32^o et 58^o, et le rectangle coupé de la diagonale*

Alors que l'enseignant affirme que l'élève a ici offert un contre-exemple à la proposition de 45^o, un élève propose ensuite d'utiliser la loi des sinus avec les données actuelles du triangle, soit sin90/5=sin?/4 donnant un angle de 58,1^o [corrigé par la suite à 53,1^o et 36,9^o]. Suite à toutes ces explorations, l'enseignant demande alors comment chacun se positionne sur le 45^o.

> Un élève affirme que puisque les trois côtés du triangle en question sont différents, alors leurs angles associés seront différents, reprenant de plus l'argument concernant le plus grand côté faisant face au plus grand angle et donc que des côtés différents entraînent des angles différents.

L'enseignant souligne qu'un élève a dessiné un carré pour évaluer le 45^o. À partir d'un triangle de 3, 4 et 5 de côté, il prolonge la cathète de 3 vers une de 4 pour former un carré de 4x4. En reliant ce dessin au carré unité utilisé auparavant pour comparer la mesure de la diagonale et celle du côté du carré, l'enseignant explique qu'on retrouve ce même dessin dans le carré de 4x4 (Figure 6). Comparant les deux triangles, il illustre que le triangle initial de 3 et 4 de côté a un angle différent de celui de 4 et 4 de côté, qui a un angle de 45^o. Les élèves confirment alors leur accord avec le fait que l'angle n'est pas de 45^o. L'investigation se termine à ce moment.

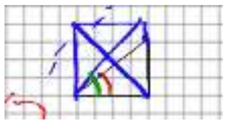


***Figure 6** – La comparaison des triangles à partir du carré ayant 4 comme mesure de côté*

IV. QUELQUES PAS SUPPLÉMENTAIRES POUR CARACTÉRISER L'APPROCHE

Dans ce qui suit, trois dimensions au cœur de l'approche sont discutées, offrant des pistes pour les analyses subséquentes à tenir sur cette approche d'enseignement des mathématiques.

1. Les tâches : des déclencheurs pour l'activité mathématique

Tout comme pour l'approche du problème ouvert (Arsac et al., 1988), qu'ils soient simples ou complexes, les énoncés offerts sont généralement assez courts, n'induisent pas directement une solution et permettent aux élèves de s'engager immédiatement dans sa résolution. Tel que le montre l'extrait, ce type de tâche exige un travail d'exploration et d'investigation mathématiques importants *dans l'action*, en fonction des réponses, stratégies et questions des élèves (celles-ci pouvant en retour provoquer de nouvelles explorations (Cobb et al., 1994), comme pour la diagonale du carré ou l'angle de 45^o). C'est en ce sens que les tâches servent de déclencheurs pour l'activité mathématique des élèves (et en retour de l'enseignant), car elles ne sont pas des véhicules des connaissances à atteindre par leur résolution et sont uniquement choisies sur la base d'un thème mathématique à explorer. Pour la tâche de distance, l'objectif *n'était pas de faire découvrir* la notion de distance entre deux points ou d'y aboutir, mais plutôt *de faire travailler* la notion de distance, de l'explorer, de lui donner un sens, de faire ressortir et relier des compréhensions et concepts mathématiques qui s'y rattachent, de près ou de loin, etc. Relativement à l'activité des élèves, des contenus différents peuvent être abordés et des mathématiques différentes peuvent être produites. Ceci influence l'orientation à adopter pour aborder l'objectif de la recherche : l'analyse de l'apport didactique de cette approche, relatif à l'avancement des mathématiques en classe, est contingente à l'activité d'investigation se déroulant sur-le-champ ; et non en fonction de l'atteinte d'un savoir mathématique prédécidé (i.e., fixé avant la séance).

2. Le rôle de la classe : une communauté de validation mathématique

Dans cette résolution émergente, le groupe-classe agit comme une mini-communauté mathématique (Boaler, 1998 ; Borasi, 1992) qui produit et valide les stratégies, arguments et justifications mathématiques. Dans cette communauté, tel que l'explique Lampert (1990 a,b), l'enseignant représente le membre le plus expérimenté au niveau mathématique et assume le rôle de *gate-keeper* de la présence, qualité et intelligibilité des justifications et argumentations mathématiques proposées, en plus d'insister sur la négociation de sens et non l'imposition autoritaire des idées. L'autorité réside dans les mathématiques, tel que le dit Schoenfeld (1994) : elle n'est pas externe, décidée à l'avance, ni dans les personnes qui l'affirment, mais bien dans les mathématiques qui sont faites. L'enseignant sert alors de pont entre la communauté mathématique plus large et cette mini-communauté : non pas pour imposer la voix de la communauté mathématique externe, mais pour faire le lien entre les deux communautés et donner un sens aux productions mathématiques développées, voire les faire avancer et les approfondir. C'est en ce sens que l'enseignant fait partie de la mini-communauté mathématique de la classe, où il se questionne constamment sur les sens et productions mathématiques développés : lui-même explore et investigue les idées proposées et les productions mathématiques. L'analyse à conduire sur l'avancée des mathématiques en classe se centre alors sur les productions mathématiques de la communauté de classe, incluant l'enseignant.

3. Les rôles et buts de l'enseignant : le maître d'œuvre des explorations mathématiques

L'enseignant n'est pas ici perçu comme un technicien reproduisant une marche à suivre venant de l'extérieur, mais plutôt comme un acteur central du fonctionnement de la classe. Le matériau de travail de l'enseignant est en premier lieu la tâche qui sert de déclencheur et ensuite les productions des élèves (stratégies, questions, affirmations, liens établis, etc.). C'est à partir de ces propositions d'élèves que l'enseignant intervient et relance la classe sur une question, une nouvelle idée, voire une nouvelle tâche pour pousser l'exploration et l'investigation mathématiques. Il doit fréquemment clarifier ces mêmes propositions d'élèves, les répéter pour la classe, les redire/reformuler en d'autres mots plus accessibles ou mathématiquement adéquats (ce que Forman & Ansell, 2001, nomment le *revoicing*). Mais il doit surtout être alerte face aux productions mathématiques partagées pour souligner et insister sur celles qui sont importantes : le travail mathématique de la classe n'est pas laissé en plan, il est d'une certaine façon institutionnalisé, constamment rendu public et « officialisé », pour montrer l'avancement mathématique réalisé (voir Proulx, 2018, sur cette dimension de l'enseignement en contexte de résolution de problèmes). Ces avancées mathématiques ne sont toutefois pas totalement pré-décidées face à la tâche à résoudre : l'enseignant se doute bien de certaines idées centrales ou façons de faire qui seront partagées (e.g., ici concernant la distance entre deux points), ou encore de liens qui seront tissés, mais beaucoup d'autres productions mathématiques sont générées et partagées en temps réel durant l'investigation et celles-ci ont une forte légitimité mathématique. L'enseignement est alors vu comme processus dynamique, qui émerge au cœur des interactions entre élèves et enseignant. Ce dernier, tout comme l'élève ou le groupe qui résout un problème, doit déployer une expertise dans l'action, pendant l'enseignement, en réaction aux événements de la classe : il rencontre des imprévus, il doit agir sur le champ, il se questionne et gère des questions, il anticipe certaines possibilités, il fait des essais, etc. C'est en ce sens que Curcio et Artzt

(2004) affirment que l'enseignant se retrouve lui aussi, d'une certaine façon, en contexte d'investigation, en situation de résolution de problèmes. Ceci résonne avec ce que Grenier et Payan (2002) affirment concernant leurs travaux sur les de situations de recherche en classe, où « l'enseignant est en double position de chercheur et de gestionnaire de la situation » (p. 196). Bien qu'à un stade préliminaire de la recherche, il semble important de continuer à creuser cette dimension relative au rôle de l'enseignant pour l'avancée des mathématiques en classe.

V. REMARQUES FINALES ET TRAVAUX EN COURS

L'investigation et l'exploration mathématiques à travers la résolution de problèmes est centrale aux approches d'enseignement développées au sein de notre Laboratoire, mettant l'accent sur le processus de production mathématique lui-même. Les mathématiques sont ici vécues comme une activité, générée à travers les problèmes résolus et prenant racine à travers eux. Tout ce travail de recherche n'est toutefois qu'à un stade initial et se poursuit de façon régulière dans diverses classes. En ce sens, diverses dimensions sont étudiés par les membres de l'équipe du Laboratoire, relatif à ces séances de classes axées sur l'exploration et l'investigation mathématiques : la nature des idées mathématiques abordées (e.g., Proulx et al., 2018), la place des erreurs (e.g., Mégrourèche, en préparation), la nature de l'activité mathématique des élèves (e.g., L'Italien-Bruneau, en préparation; Savard, en préparation), la nature des questionnements de l'enseignant (e.g., Van Moorhem & Proulx, 2018), les pratiques d'institutionnalisation (e.g., Proulx, 2018), le rôle des tâches (e.g., Proulx, en préparation), etc. Ces études sont des occasions d'explorer plus en profondeur le potentiel didactique de cette approche d'enseignement, soit ce qu'elle implique pour l'avancement des mathématiques en classe.

REFERENCES

Arsac G., et al. (1988) *Problème ouvert et situation-problème*. IREM-Lyon : Lyon.

Boaler J. (1998) Open and closed mathematics: student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education 29*(1), 41–62.

Borasi R. (1986) On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics 17*, 125-141.

Borasi R. (1992) *Teaching mathematics through inquiry*. Heineman: US.

Cobb P., Perlwitz M., & Underwood D. (1994) Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation 20*(1), 41-61.

Curcio F., & Artzt A. (2004) Reflecting on teaching mathematics through problem solving. *Teaching mathematics through problem solving* (pp. 127-141). NCTM: Reston, VA.

Davis P.J., & Hersh D. (1981) *The mathematical experience*. Boston: Birkhauser.

English L., & Gainsburg J. (2015) Problem solving in a 21st century mathematics curriculum. *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 313-35). Routledge: UK.

Forman E., & Ansell E. (2001) The multiple voices of a mathematics classroom community. *ESM 46*, 115-142.

Grenier D., & Payan C. (2002) Situation de recherche en « classe » : essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques.* Paris VII.

Lampert M. (1990a) When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal 27*, 29-63.

Lampert M. (1990b) Connecting inventions with conventions. In L.P. Steffe & T. Wood (Eds.), *Transforming children's mathematics education* (pp. 253-265). Hillsdale: Erlbaum.

L'Italien-Bruneau R.-A. (en préparation) *Étude des liens entre l'activité des élèves en résolution de problèmes et celle du mathématicien*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, Canada.

Maheux J.-F. (2018) Invitation à la pluralité du *faire|mathématique*. *Actes du colloque EMF-2018*.

Maheux J.-F., & Proulx J. (2014) Vers le *faire mathématique* : essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques. *Annales did. et sc. cognitives 19*, 17-52.

Maheux J.-F., & Proulx J. (2015) Doing|mathematics: analysing data with/in an enactivist-inspired approach. *ZDM 47*(2), 211-221.

Mégrourèche C. (en préparation) *L'erreur en classe de mathématiques : Repenser son rôle, étudier son potentiel*. Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, Canada.

Proulx J. (2007) *(Enlarging) secondary-level mathematics teachers' mathematical knowledge*. Thèse de doctorat, Université de l'Alberta, Alberta, Canada.

Proulx J. (2018) On teaching actions in mathematical problem-solving contexts. *Proceedings of PME-NA 40* (pp. 1060-1067). Greenville, South Carolina: PME-NA.

Proulx J. (2019) Faire vivre une formation à l'enseignement des mathématiques *par* résolution de problèmes. *Canadian J. of Science, Mathematics and Technology Ed*.

Proulx J. (en préparation) *From routine tasks to non-routine problems*.

Proulx J., Champagne, K., L'Italien-Bruneau, R.-A., & Mégrourèche, C. (2018) Emergent ideational network. *Proceedings of PME-42* (vol. 1, pp. 169-175). Umea, Suède: PME.

Remillard J.T., & Kaye Geist P. (2002) Supporting teachers' professional learning by navigating openings in the curriculum. *Journal of Mathematics Teacher Education 5*, 7-34.

Savard A. (en préparation) *Interactions entre stratégies d'élèves en contexte de résolution de problèmes.* Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal, Canada.

Schoenfeld A. (1994) Reflections on doing and teaching mathematics. In A.Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stanic G., & Kilpatrick J. (1988) Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). NCTM: Reston, VA.

Van Moorhem A., & Proulx J. (2018) Questionnement enseignant en contexte de résolution de problèmes par calcul mental. *Actes du colloque EMF 2018*.

Wilder, R. L. (1981) *Mathematics as a cultural system*. Pergamon Press: UK.