

## DEI ET EDUCATION MATHÉMATIQUE : NECESSITE ET VIABILITE DANS LES PRATIQUES DE CLASSE ORDINAIRES

LAI Sebastiana\*\* - POLO Maria\*

**Résumé** – Ce travail contribue à la discussion sur la conception d’une épistémologie pour les DEI en mathématiques. Dans cette perspective, nous présentons et analysons les choix de natures épistémologique et didactique sous-jacents à notre travail théorique sur la *Démarche expérimentale*. Un exemple concernant mathématiques et astronomie est présenté et discuté par rapport aux résultats des expériences menées ces dix dernières années au niveau du primaire et du collège.

**Mots-clés** : Démarche expérimentale, pratiques ordinaires, mathématiques, enseignant, élève.

**Abstract** – This paper aims to discuss some epistemology's bases of the IBE in mathematics. With this purpose, we present and analyze the choices of an epistemological and didactic nature underlying our theoretical work on the Experimental Approach. An example concerning mathematics and astronomy is presented and discussed in relation to the results of the experiments carried out for the last ten years at the level of the primary and the college.

**Keywords**: experimental approach, traditional practices, mathematics, teacher, student.

### I. INTRODUCTION

Cette contribution développe l’intervention du GT9 de EMF 2012 où nous avons présenté le cadre théorique de la *Démarche expérimentale* issu du travail de thèse de Lai (2009). Nous avons montré certaines caractéristiques de rupture avec les pratiques habituelles, au niveau primaire et collège, dans deux activités (une en Astronomie et une en Mathématiques), ayant certaines caractéristiques d’une démarche d’investigation. A cette occasion, nous n’avons pas traité le lien entre les DEI (Démarches d’Enquêtes et d’Investigations) et le modèle théorique de la *Démarche expérimentale*. Le thème spécifique et les questions posées dans ce GT10 nous ont menées à reprendre notre modèle théorique<sup>1</sup> pour développer l’analyse et interroger ainsi le processus de transposition didactique, où les DEI, en tant qu’innovations, trouvent leur origine. De notre point de vue, les DEI sont la réponse institutionnelle des systèmes scolaires de nombreux pays à des contraintes et des exigences de nature différente : *épistémologique*, en particulier relativement à la pertinence des mathématiques<sup>2</sup> et des savoirs scientifiques à enseigner et enseignés ; *cognitive*, en ce qui concerne le rôle, plus important que dans le passé, attribué aux composantes sociales et émotionnelles dans l’apprentissage ; *sociopolitiques et culturels* en ce qui concerne l’accroissement de l’autonomie et des compétences transversales nécessaires à l’individu aujourd’hui. En fait, la démarche d’investigation<sup>3</sup> est l’une des recommandations majeures dans l’enseignement des disciplines scientifiques dans plusieurs pays depuis les années 2000, mais la diffusion de cette pratique dans les systèmes scolaires n’a aucune systématisme, au moins pour les cas de la France et de l’Italie et notamment dans la classe de Mathématiques.

---

\*\* Osservatorio Astronomico – INAF di Cagliari – Italie – [tania@oa-cagliari.inaf.it](mailto:tania@oa-cagliari.inaf.it)

\* Dipartimento di Matematica e Informatica – Italie – [mpolo@unica.it](mailto:mpolo@unica.it)

<sup>1</sup> Le terme *modèle* est ici utilisé en tant que *schéma/prototype* par lequel on peut représenter (expliquer, prévoir,...) une classe entière des phénomènes didactiques/épistémologiques concernant différents contextes disciplinaires.

<sup>2</sup> Dans le but de “rapprocher” les mathématiques des chercheurs aux mathématiques “scolaires”.

<sup>3</sup> Le terme *démarche d’investigation* devient *Inquiry-based science education*, dans la terminologie anglaise et “*didattica laboratoriale*” selon l’un des locutions les plus diffusées en Italie.

Sans la prétention d'exhaustivité ni de comparaison avec l'ampleur du travail de Maass, Artigue et al. (2013), nous essayons de placer la *Démarche expérimentale* en tant que modèle théorique des pratiques de DEI. Nous nous appuyons sur les expériences menées ces dix dernières années sur l'innovation du curriculum des mathématiques de l'école primaire et du collège. L'interaction des mathématiques avec l'astronomie, et d'autres disciplines scientifiques, dépasse, dans ce travail, les aspects propres à l'interdisciplinarité pour étudier ceux spécifiques aux choix de nature épistémologique et d'organisation didactique sous-jacents à notre travail théorique sur la *Démarche expérimentale*.

Une prémisse de nature culturelle et théorique s'impose, par rapport à la recherche dans le domaine de la didactique des disciplines scientifiques. Il est nécessaire d'éclaircir l'analyse de différentes finalités de la communication et de la diffusion des savoirs mathématiques et scientifiques. En effet, aujourd'hui, on assiste à un renforcement médiatique global de la vulgarisation de ces savoirs (par exemple, avec l'astrophysique, la génétique, etc...). Il s'agit souvent d'une divulgation menée selon la *logique* d'une communication *charmeuse* de la science, l'objectif étant de *faire connaître* ce qu'on *fait* dans la science, en superposant au sens de *connaître* celui d'*être informé*. Transformer en spectacle la science n'est selon nous pas suffisant pour s'opposer aux obstacles que les sciences rencontrent à se placer en position symétriquement *central* aux sciences humaines. Au contraire, faire *spectacle* de la science favorise l'idée que les sciences sont « fascinantes » et « faciles », alors que les échecs scolaires montrent une difficulté réelle<sup>4</sup> à faire apprendre les mathématiques et les sciences aux élèves en Italie, et pas seulement. Le système scolaire risque aussi de céder le pas à la divulgation, car de plus en plus d'agences et d'institutions de formation « proche » de l'Ecole (musées, sites de divulgation, etc...) proposent des expositions et des parcours d'innovation de ce type. Ce phénomène pose une question cruciale de viabilité à l'Ecole relativement à des savoirs ou des connaissances<sup>5</sup> proches de questions vivantes de la recherche dans tout domaine scientifique, y compris les mathématiques. Comprendre pour maîtriser et prévoir les retombées de ce phénomène sur l'apprentissage, sur les mathématiques enseignées et sur l'épistémologie des enseignants est une question d'actualité. Une étude didactique des processus de *transposition quand la finalité est didactique plutôt que divulgatrice* est nécessaire si l'on veut répondre à la question de l'enseignabilité des savoirs c'est à dire : quelles mathématiques pour l'enseignement à l'Ecole ?

Notre travail, concernant l'étude de processus de *transposition à finalité didactique*, part de l'hypothèse que l'Ecole et l'apprentissage scolaire qui se réalise dans cette institution, est une nécessité des sociétés. Cet apprentissage est soumis à des contraintes de fonctionnement notamment celles des pratiques, institutionnellement exigées, d'évaluation des apprentissages. De plus, l'hypothèse à la base de l'existence même de la Didactique Disciplinaire en tant que domaine de recherche est : des régularités existent dans le fonctionnement de l'apprentissage, et certaines sont spécifiques à l'apprentissage scolaire, donc on peut les étudier. Il faut pour cela une approche de nature systémique des relations réciproques d'au moins quatre éléments : savoir, élève, enseignant, milieu. Nous utiliserons dorénavant le sigle DEI, selon l'acceptation donnée dans ce GT10, en référence à toute pratique basée sur une activité/démarche scientifique avec une classe. Le paragraphe II est consacré au cadre théorique de notre travail. Les paragraphes III et IV précisent les caractères généraux du modèle de la *Démarche expérimentale* et les détails d'une utilisation dans une expérience sur l'Orientation menée au niveau du collège. La discussion des résultats et quelques questions ouvertes sont données en conclusion.

<sup>4</sup> Voir les résultats statistiques de l'enquête OCSE-PISA de ces trois dernières années.

<sup>5</sup> La distinction connaissance et savoir est utilisé selon Brousseau 1998.

## II. PARADIGMES ET CADRE THEORIQUE

Plusieurs questions se posent, pour la plupart encore ouvertes : sur une épistémologie pour les DEI, sur le fonctionnement du système didactique (dévolution, institutionnalisation, évaluation – temps didactique) dans la mise en place de telles démarches et sur les contraintes de viabilité des DEI dans les pratiques habituelles. Comme souligné dans Mercier (2012), dans Calmette B., Matheron Y., (coord. 2015) et dans le compte-rendu du GT de 2012, la construction ou l'analyse de pratiques de DEI pose en premier plan les questions sur *les ingénieries didactiques et les substrats théoriques sur lesquels les DEI sont bâties* et celles sur *le rôle de l'enseignant* dans ces activités. Nous nous plaçons selon les paradigmes de la TSD et de la TAD postulant que l'élève apprend par adaptation en interaction avec un milieu et, dans une perspective Vygotskienne, en ce qui concerne le rôle fondamental attribué au langage et à l'interaction sociale dans tout processus d'apprentissage. Plus généralement, dans la communication enseignant-élève, avec Watzlawick (1971), nous considérons l'importance de l'aspect pragmatique de la communication (Lai, 2003), dans tout processus de transposition à finalité didactique. Ce processus nécessite une fiction didactique tant par rapport aux transformations des savoirs que d'une ou plus séquentialisations possibles visant la chronogène d'un savoir<sup>6</sup>. Cette fiction est constitutive de la genèse du système didactique concernant ce même savoir. Or, suivant la TAD, on considère un système didactique  $S(X; Y; Q)$  formé autour d'une question  $Q$  par une classe  $X$  et le professeur  $Y = \{y\}$  qui en dirige l'étude. Il y a là une première distinction à faire pour la recherche d'une épistémologie ou d'un cadre théorique pour les DEI : le savoir  $S$ , autour duquel se noue un système didactique est remplacé par une question  $Q$ . Encore, avec Chevallard (2008 et 2011), dans le paradigme de la TAD l'enseignant joue le rôle de médiateur et

(...), le milieu n'est pas donné ou produit par le professeur, sa production fait partie du *processus de l'étude*. Cela signifie que le *topos* de l'élève s'agrandit individuellement et collectivement, tandis que le professeur doit assumer une position de directeur de l'étude qui « *décidera en dernier ressort, non sans en expliciter les attendus, si la classe verra ou non son milieu d'étude être augmenté de telle ou telle œuvre* ». (Chevallard, 2011, p. 94).

Dans la TAD, l'évolution d'un système didactique  $S(X; Y; Q)$  est résumé par le schéma herbartien :  $[S(X; Y; Q) \rightarrow \{R_1, R_2, R_n, O_{n+1}, O_m\}] \rightarrow R^\heartsuit$  où une réponse de la classe  $R^\heartsuit$  se construit à partir du milieu  $M = \{R_1, R_2, \dots, R_n, O_{n+1}, \dots, O_m\}$  produit par le système didactique comme le bilan de la dynamique née de la mise en œuvre de la dialectique des médias et des milieux. En termes de structuration des milieux (Margolinas, 2002), dans Artigue et al. 2002, l'hypothèse suivante avait été avancée : *par rapport aux différents savoirs en acte dans la pratique, une analyse de la contingence nécessite l'identification de l'évolution de différents systèmes didactiques (les différents projets et trajets de l'enseignant et de l'élève) par rapport à différents savoirs*. De plus, nous avons montré (Lai-Polo, 2002) comment un écart peut se produire entre le projet de l'enseignant par rapport au savoir et le projet de l'élève ou de la classe. Cet écart peut se formaliser en termes de *différents niveaux de milieu apparaissant en contemporanéité* : par exemple, l'enseignant est en position  $P_1$  par rapport à un savoir  $s_i$ , l'élève est en position  $E_0$  ou  $E_{-1}$  par rapport à un autre savoir  $s_j$  (étant, dans certains cas,  $i=j$ ).

Par rapport à une question donnée  $Q$  enjeu d'étude, pour expliquer (comprendre, prévoir, ...) la dialectique des médias et des milieux produisant une réponse à la question  $Q$ , il est donc nécessaire, à notre avis, de considérer la coexistence de différents savoirs avec des statuts

<sup>6</sup> Pour la mise en place d'un processus de transposition en situation scolaire, ce savoir doit être séquentialisable, doit circuler masqué, et son apprentissage doit être « mesurable ».

différents. Un système didactique  $S^7$  est pour nous tissé autour d'une question  $Q$  et de plusieurs savoirs  $s_i$  ; à la fin du processus de l'étude, la réponse  $R^\heartsuit$  est liée à plusieurs  $s_j$  :

$$[[S(X; Y; Q, s_i) \rightarrow \{R_1, R_2, R_n, O_{n+1}, O_m\}] \rightarrow R^\heartsuit] \rightarrow s_j \quad (i \neq j \text{ ou } i=j)$$

Dans notre cadre théorique, nous avons croisé la TAD avec la structuration des milieux, pour préciser les liens entre les procédés évolutifs de la topogénèse, mésogénèse et chronogénèse et leurs interactions avec les différents niveaux des situations  $S_i$ . **La topogénèse relativement à un savoir**, caractérisée par un fonctionnement non linéaire, peut être prévue *a priori* au niveau  $S_1$ , ou identifiée en acte dans une activité, au niveau de la situation  $S_0$  et  $S_{-1}$  ou  $S_{-2}$ . **La mésogénèse** peut être analysée en acte ou *ex post* au niveau  $S_0$ , ou conçue *a priori* au niveau  $S_1$  ; différents milieux existent par rapport aux savoirs en jeu aux niveaux  $S_0$ ,  $S_{-1}$  et  $S_{-2}$ . **La chronogène** au niveau  $S_2$  est linéaire et il y a au niveau  $S_1$  une première genèse non linéaire qui garde en acte ce caractère aux niveaux  $S_0$ ,  $S_{-1}$  et  $S_{-2}$ . L'avancement de la topogénèse, de la mésogénèse et de la chronogénèse est caractérisé par la dialectique préconstruit-construit, avec une toujours nécessaire fiction didactique d'isolabilité et de (ré)construction de savoirs. Ces savoirs, selon les processus de transposition didactique, sont ceux accrédités dans la communauté de chercheurs dans les différents domaines scientifiques, y compris les mathématiciens. Les DEI, comme tout autre mouvement d'innovation, permettent l'entrée d'autres savoirs, en tant qu'enjeu didactique, non prévus à certains niveaux scolaires (tels que les savoirs relatifs à l'astronomie, au moins en Italie). La DEI insiste sur la nécessité que l'élève (individuellement ou en collaboration avec les autres en classe) soit le seul à diriger l'« enquête » sur l'objet d'étude posé en classe. Mais, *qui identifie les nœuds épistémologiques et méthodologiques caractéristiques de la question Q à étudier ? Et comment fonctionnent les DEI ?* Le modèle de la *Démarche expérimentale*, objet du paragraphe III est notre réponse à ces questions.

### III. UNE EPISTEMOLOGIE POUR LES DEI

Ce paragraphe essaye de montrer notre hypothèse : le modèle théorique de la *Démarche expérimentale* est l'une des épistémologies possibles d'interprétation/analyse/construction des pratiques de DEI. En particulier, dans nos recherches, il s'avère pertinent pour expliquer des DEI où l'enjeu de l'apprentissage est un savoir scientifique. Lai (2009) a montré la nécessité de la dialectique expérience/théorie/expérience pour la mise en place du **processus de modélisation de phénomènes du réel** et la place des mathématiques dans ce processus. En effet, pour caractériser le processus de modélisation il faut préciser la signification de **modèle mathématique** en tant que *représentation* d'un phénomène. Ce modèle n'est pas descriptif, discursif, mais formel, c'est-à-dire exprimé dans le langage mathématique. En d'autres termes, le phénomène spécifique étudié ne détermine pas "sa" représentation mathématique ; ce que l'on fait est de traduire en formules des *idées* et des *connaissances* relatives au phénomène. Un flux circulaire relie les nœuds du processus de modélisation d'un **phénomène du réel** (enjeu d'apprentissage ou enjeu d'étude pour une classe) : la proposition du problème et la reconnaissance de l'expérience, sa prise en compte en tant qu'objet d'étude dans la classe (*contextualisation*) ; la pratique de la mesure par l'emploi d'une théorie mathématique, ce qui permet la *décontextualisation* de l'expérience ; l'*algorithmisation* (situation de résolution des problèmes posés en théorie, retour vers une pratique), la *vérification ou validation efficace* du

<sup>7</sup> Notations :  $S_i$  = Systèmes didactiques ;  $s_i$  savoirs enjeu d'apprentissage ;  $\overline{s_i}$  savoir préconstruit ;  $\underline{s_i}$  savoir construit disponible.

modèle (usage routinier du modèle). La complexité du passage expérience/modèle/expérience est montrée dans le schéma suivant (Lai, 2009).

Problématique	Mathématisation	Reproblématisation	Typologie de Situations
Contextualisation Expérience Validation pratique	→ Théorisation	→ Décontextualisation de l'expérience par une Théorie Preuve formelle	Situation de formulation production de représentations
Non contextuelle Théorie Validation formelle	← Déthéorisation	← Recontextualisation <b>Algorithmisation</b> Vérification pratique	Situation de validation résolution de problèmes
Algorithmisée Routine Validation efficace	← Décontextualisation	← Expérience Epreuves d'efficacité	Situation routinière production d'expérience

Tableau 1 – Modèle théorique de la *Démarche expérimentale*

Dans le schéma, la première colonne est explicative d'une démarche théorique spécifique des disciplines scientifiques ; la deuxième concerne le processus de mathématisation ; la troisième rend compte d'une dialectique théorie-expérience, et la dernière colonne est explicative de la différente nature des activités, en termes de typologie des situations.

Ici, nous avons choisi de développer seulement deux points liés à ce schéma : la *Problématique*, caractérisée par la dialectique Enseignant/Élèves dans la phase de *Contextualisation* (proposition du problème, émergence des hypothèses des élèves, et leur autonomie dans l'observation et l'organisation des données), et l'*Algorithmisation* où l'autonomie des élèves prévaut dans la recherche de la réponse à la question ou au problème posé. Dans Lai-Polo (2017), nous avons expliqué les raisons épistémologiques impliquées dans la *Démarche expérimentale*, qui représente et permet une modélisation du réel phénoménique, et aussi la construction de savoirs fondés sur l'*observation*. Dans cette perspective, il faut penser la construction du curriculum d'astronomie, finalisé à la modélisation du réel, en lien avec le curriculum des mathématiques ; sans l'apport des mathématiques, il ne peut pas y avoir une construction du *modèle* expliquant les phénomènes. Le *modèle* étant autant *l'enjeu* que *l'outil* de la pratique de la *démarche expérimentale*<sup>8</sup>. Sur cette base, au niveau S<sub>3</sub>, S<sub>2</sub> et S<sub>1</sub> nous avons conçu différents parcours. Parmi ceux expérimentés avec des enseignants du niveau de l'Ecole Primaire et du Collège, nous analysons ici une partie du parcours d'étude et de recherche (PER) initié à partir de la question de l'Orient. L'étude des ombres pour arriver à l'orientation et la détermination du Méridien local sur la Terre est ici schématisée dans les trois étapes principales de la chonogenèse réalisée : 1. L'étude des ombres : récits et expériences. La nature physique et géométrique des ombres, considérées par trois aspects : causale, matériaux et perceptifs. 2. Les ombres en Astronomie : l'horizon astronomique, la ligne méridienne, l'orientation. L'observateur local. La ligne fixe et les points cardinaux. Le rapport ontologique le moi/et le monde. 3. De l'horizon astronomique à la Terre sphérique. La mappemonde parallèle : simulation et réalité. Un modèle homothétique, entre la géométrie et l'expérience concrète. Le méridien local.

Selon la *Démarche expérimentale*, dans la construction du Méridien local, on peut envisager plusieurs phases. Le passage de l'observation de l'ombre à la mesure et à l'action d'introduire les données de la mesure dans le *modèle Terre*, nécessite une *règle de correspondance* entre entité théorique et objet concret. Notamment, il faut réaliser le passage

<sup>8</sup> Dans Lai-Polo 2012, sont analysées deux activités ayant le caractère d'une DEI réalisées aux niveaux équivalents à la troisième et à la seconde.

de l'expérience concrète de mesure à l'horizon astronomique à la sphère (simulation avec une orange) sur laquelle on doit reproduire ce qui a été fait dans le monde réel.

Puisque l'objectif de ce travail est de montrer la mise en place de l'autonomie des élèves dans une DEI, nous analysons seulement les passages plus significatifs de la *Démarche expérimentale* : la Problématique ou *Problématisation* et l'*Algorithmisation*. La *Problématique* est caractérisée par la dialectique Enseignant/Élèves dans la phase de *Contextualisation* (proposition du problème, émergence des hypothèses des élèves, et autonomie dans l'observation et l'organisation des données. Dans la *Problématique*, se concentre l'activité d'« appropriation » d'un objet d'étude (phénomène /problème/question) de la part de l'élève. Mais, le problème et le phénomène, lorsqu'ils sont introduits dans l'ordre inverse que produit l'apprêt didactique, ne sont pas liés de manière évidente : en effet, mesurer l'ombre du gnomon à midi n'a pas grand-chose à voir, au premier abord, avec la détermination du Méridien local. La reconnaissance de l'expérience et la nécessité de mesurer, pour les élèves, ne vont donc pas de soi. Dans cette phase, on doit donc engager la *dévolution*, ce qui permet qu'une question scientifique devienne une donnée didactique. Comment stimuler la floriture des hypothèses personnelles sur des problèmes « obscurs » (parce qu'ils sont *nouveaux*), dont le lien avec le phénomène à observer est lui-même obscur, et ne fait pas partie d'un modèle disponible parmi les connaissances déjà acquises ? Par ailleurs, la Problématisation se pose avant des actions comme *expérimenter* (Grenier, 2012) ou *regarder et observer* (Chevallard, 2008 ; Wozniak, 2015), puisque le système didactique rapporté au milieu à ce moment-là doit encore s'établir. Pour cela, une phase de familiarisation<sup>9</sup>/problématisation est nécessaire. L'enseignant et l'élève sont liés par la dialectique entre la relation didactique, liée aux savoirs, et la relation pédagogique. Mettre en place *le processus de familiarisation est une attribution de l'enseignant*, qui dissémine le terrain *pédagogique et didactique*<sup>10</sup>, par les paroles disponibles dans le langage partagé en classe, les mémoires et les vécus des élèves, qui légitiment les observations systématiques à faire. Les questions posées par les élèves dans la familiarisation étant souvent du niveau pédagogique, l'enseignant doit gérer le deux. Une activation de la créativité en classe peut provenir de questions et réponses de natures différentes. Par exemple, dans notre expérience, nous avons utilisé parfois la narration du mythe qui apporte l'existence de *formes symboliques* provenant du passé. Dans le tableau présenté en Annexe, nous avons synthétisé les séquences des activités visant la construction de *la ligne méridienne* et du *Méridien local*. De plus, nous avons mis en évidence la *position* Professeur /Élèves et leurs relations mutuelles, le *rebondir* en classe avec les différentes idées et hypothèses dans la réalisation des ces activités. Dans ce tableau sont signalés aussi les passages spécifiques de la *Démarche expérimentale* par rapport aux savoirs en jeu. En particulier, dans l'activité sur les ombres, cruciale pour la *familiarisation/problématisation*, la *Théorisation*, se réalise par la mobilisation de savoirs mathématiques, pour décrire et nommer la pratique de l'identification de la *ligne méridienne* et de la *perpendiculaire* à cette ligne d'où se produisent les autres points cardinaux. Dans l'*Algorithmisation* où l'autonomie des élèves prévaut dans la recherche de la réponse à la question ou au problème posé, les mathématiques permettent une *validation formelle* non contextuelle, c'est-à-dire non plus assujettie au contexte de la précédente expérience de l'observation du phénomène réel pour résoudre la question de l'orientation.

<sup>9</sup> Cette phase est fondamentale pour ce qui suit, parce que le milieu doit se modifier pour mettre en place les savoirs construits et pré-construits. Sa durée est variable ; dans les parcours que nous avons expérimenté en sixième, dans l'année scolaire 2016/17, elle a occupé 3 heures sur 8 heures de travail prévues (Lai-Polo, 2017).

<sup>10</sup> La DE ne modélise ni les dynamiques de l'ordre de la relation pédagogique ni la dialectique entre les deux relations.

#### IV. LA QUESTION DE L'ORIENTATION : ARTICULATION DES MILIEUX POUR L'APPRENTISSAGE DU MERIDIEN LOCAL

Nous analysons ici les phases de *Problématisation* et d'*Algorithmisation* par le schéma herbatien pour expliciter le statut des savoirs en termes d'interaction des milieux. **La question Q à étudier est l'Orientation** ; par rapport aux savoirs  $s_i$  concernés dans l'expérience réalisée, nous décrivons le choix *a priori* au niveau  $S_2$  et  $S_1$  des variables potentiellement dédiées au maintien de la dévolution par rapport au savoir  $s_1$  : **le méridien local**. Il est évident qu'à partir de la même question, l'orientation, au niveau  $S_1$ , la dévolution par rapport à d'autres savoirs pouvait être prévue et donc une différente gestion de la phase de *familiarisation/Problématisation*. Le schéma herbatien modélisant nos choix *a priori* pour cette phase est le suivant :

$[ [S(X; Y; Q, s_i = \text{le méridien local}) \rightarrow \{R_1, R_2, R_n, O_{n+1}, O_m\}] \rightarrow R_{\heartsuit}] \rightarrow s_j = \text{la ligne méridienne}$   
 $s_i = \{\text{la connaissance de la montre, les angles, le méridien locale, la rotation, le champ magnétique, ...}\}$ ;  $R_i = \{\text{l'ombre du soleil, le bussole, le GPS, ...}\}$ ;  $R_{\heartsuit} = \text{la direction de l'ombre la plus courte (N/S) et sa perpendiculaire dans l'horizon local.}$

Dans la phase d'*Algorithmisation*, l'organisation didactique cherche à garantir l'autonomie des élèves et leur socialisation dans la recherche de la solution du problème posé : tracer le Méridien local sur la surface de la Terre à partir de la ligne méridienne observée et déterminée dans la réalité. Il faut ici une mathématisation faisant appel à d'autres savoirs. Le schéma herbatien modélisant nos choix *a priori* est le suivant :

$[ [S(X; Y; Q, s_i = \text{le méridien local}) \rightarrow \{R_1, R_2, R_n, O_{n+1}, O_m\}] \rightarrow R_{\heartsuit}] \rightarrow s_i = \text{le méridien local}$   
 $s_i = \{\text{la ligne méridienne, N/E/W/O, la forme de la Terre, sphère, plan, droite perpendiculaire, ...}\}$  ;  $R_i = \{\text{position sur l'orange du lieu d'observation, le plan de l'horizon, ...}\}$ ;  $R_{\heartsuit} = \text{la ligne qui relie les points Nord/Sud et le pied de la verticale du lieu d'observation.}$

Dans notre expérience, le plan de l'horizon, la forme de la terre, la sphère et son intersection par un plan, sont restés préconstruits. Les nombres décimaux, le mesurage étaient des savoirs construits, disponibles aux élèves. Aucun savoir mathématique n'était au niveau  $S_2$  et  $S_1$  enjeu d'apprentissage<sup>11</sup>. En effet, par rapport aux différents savoirs en jeu, on peut prévoir ou analyser, aux niveaux  $S_0$  et  $S_{-1}$  et  $S_{-2}$ , différents milieux par rapport au statut de construit ou préconstruit de ces savoirs dans les différentes classes.

$$[ [S_{k^*}(X; Y; Q, s_i = s^*) \rightarrow \{R_1, R_2, R_n, O_{n+1}, O_m\}] \rightarrow R_{\heartsuit}] \rightarrow s_j, \text{ où } k^* = s^*, \overline{s_i} \text{ ou } \overline{\overline{s_i}}$$

Ce schéma herbatien représente l'évolution de différents système didactiques  $S_k$  concernant les trois statuts d'un même savoir, d'où la complexité de l'analyse de toute activité où nécessairement plusieurs systèmes didactiques sont, en acte, en même temps.

#### V. DISCUSSION DES RESULTATS ET CONCLUSION

Les DEI sont une nécessité des pratiques de classe, non parce qu'institutionnellement exigées, mais surtout pour l'importance qu'elles assignent aux pratiques expérimentales et à

<sup>11</sup> Une analyse des travaux des élèves à ce propos, ainsi que l'interprétation en termes de représentation épistémologique, selon la *Théorie générale de la représentation* de Wittgenstein, a été donnée dans (Lai-Polo, 2017).

l'autonomie aux élèves. Cela fait des DEI une modalité de travail (potentiellement) pertinente pour l'apprentissage d'un phénomène et plus généralement d'une connaissance ou d'un savoir scientifique. Cet apprentissage est constitué par la construction/formulation d'un modèle explicatif et prédictif du réel phénoménique, où les mathématiques jouent un rôle de nature épistémologique crucial ; condition *sine qua none* pour aboutir à un changement stable de l'enseignement tant des mathématiques que des savoirs scientifiques. Le modèle théorique de la *Démarche expérimentale*, que fournit une représentation du processus de modélisation du réel phénoménique, est une des possibles épistémologies pour les DEI. Nous avons expérimenté plusieurs parcours ayant les caractéristiques d'une DEI. Les savoirs mathématiques en jeu ont eu le statut de préconstruit ou construit selon les différentes classes concernées. Certains aspects des phénomènes d'astronomie ont eu, par contre, le rôle d'enjeu d'apprentissage et donc des milieux a-didactiques par rapport à ces savoirs étaient potentiellement aménagés dans ce but. L'enjeu de l'enseignement, notamment par la mise en place des méthodologies des DEI, est modifié aujourd'hui avec l'exigence institutionnelle d'enseigner des compétences transversales. Nous avançons l'hypothèse qu'on ne peut pas enseigner des compétences sans savoirs. Par exemple, les DEI font émerger, en acte, dans la pratique, des compétences de travail en groupe. La compréhension du processus d'enseignement et d'apprentissage de ces compétences nécessite une analyse d'ordre pédagogique, épistémologique et une vigilance didactique complexe dans le choix des tâches à concevoir pour les élèves. Notre recherche montre aussi comment l'innovation des pratiques, par les DEI, est viable pour les savoirs mathématiques en tant qu'outils de modélisation de phénomènes astronomiques ou d'autres disciplines scientifiques (chimie, géographie, physique,...)<sup>12</sup>. Elle confirme, en particulier, l'hypothèse de viabilité et de nécessité, au niveau de la scolarité obligatoire, de l'enseignement des savoirs de l'astronomie classique, ainsi que leur pertinence pour donner du sens à certains savoirs du curriculum des mathématiques officiel. Reste posée et ouverte la question du manque de connaissances en astronomie des enseignants. La carence de formation initiale des enseignants se révèle cruciale, aussi dans la question de l'enseignabilité des savoirs scientifiques les plus proches à la recherche en acte, par exemple dans le cas de l'astrophysique. En d'autres termes, compte-tenu du contexte technologique et théorique des problèmes astrophysiques, à quel niveau est-il possible, pour l'enseignant, de prévoir, et pour l'élève, de reconnaître le type de tâches et les organisations mathématiques utiles pour mener à bien la résolution des problèmes ? La demande d'innovation vient avec force de l'école aussi, mais la réponse ne peut pas se limiter à l'introduction d'experts qui n'interviennent que sur les savoirs hors curriculum. La viabilité d'un enseignement avec une composante expérimentale est prouvée par notre expérience. Il reste cependant à étudier la question des modalités et des contenus d'une formation<sup>13</sup> de l'enseignant, des mathématiques ou d'autres disciplines, favorisant une pratique scolaire habituelle de DEI centrées sur la modélisation des phénomènes scientifiques.

## REFERENCES

- Artigue M., Lai S., Polo M., Veillard L. (2002) Le Milieu : groupe d'étude avancé di cours. In *Actes de la XIème Ecole d'Eté De Didactique de Mathématique*, Corps, 21 – 30 Août 2001 (pp.157-166). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

<sup>12</sup> L'exemple d'un projet italien ayant le but de diffuser l'Inquiry Based Science Education – IBSE en Italie avec la collaboration du programme *La main à la pâte*, sera développée pendant les travaux du GT.

<sup>13</sup> Un point de vue sur les connaissances de l'enseignant, didactiques, pédagogiques et sur les savoirs, est analysé dans Polo, 2017.

- Calmette B., Matheron Y. (Eds) (2015) Les démarches d'investigation et leurs déclinaisons en mathématiques, physique, sciences de la vie et de la Terre. *Recherches en Éducation* 21.
- Chevallard Y. (2008) Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In G. Gueudet, G. & Y. Matheron (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007* (pp. 344-366). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.
- Chevallard Y. (2011) La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck, F. Wozniak. (Éds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 81-108). Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Grenier D. (2012) La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SiRC). In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1354–1364). Université de Genève.
- Lai S. (2003) Phénomènes didactiques et dynamiques relationnelles : une intégration possible. L'étude d'un cas d'observation de classes ordinaires. In Actes de la *XIIème Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*, Corps, 20 – 29 Août 2003.
- Lai S. (2009). *La construction d'un curriculum d'Astronomie et Astrophysique, étude de son écologie mathématique dans le système scolaire italien*. Thèse, Université Aix-Marseille I- Université de Provence.
- Lai S. & Polo M. (2002) Un outil théorique d'analyse de la contingence : le concept de milieu à l'épreuve. In *CD annexe aux actes de la XIème Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*, Corps, 21 – 30 Août 2001. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Lai S. & Polo M. (2012) Construction d'une culture scientifique pour tous : engagement de l'enseignant et de l'élève dans la rupture de pratiques habituelles. In J.-L. Dorier. & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1213–1226). Université de Genève.
- Lai S. & Polo M. (sous presse, 2017) *Démarche expérimentale et curriculum des mathématiques dans la transition primaire collège*. Communication présentée à l'école d'été de didactique des mathématiques, Paris 2017.
- Maass K., Artigue M., Doorman L.M., Krainer K., Ruthven K. (Eds) (2013) Implementation of Inquiry-Based Learning in Day-to-Day Teaching. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 45(6), 779-795.
- Margolinas C. (2002) Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Ed.), *Actes de la 11ème Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Mercier A. (2012) Suivre une démarche d'investigation pour enseigner les relatifs, au collège : une proposition pragmatique et une expérimentation, en France. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle, Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1423–1431). Université de Genève.
- Polo M. (2017) The Professional Development of Mathematics Teachers: Generality and Specificity. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzinni, U. Gellert (Eds.), *Mathematics and Technology*. Advances in Mathematics Education, Springer International Publishing.
- Vygotsky L. S. (1990/1934) *Pensiero e linguaggio: ricerca psicologica* (ed. L. Mecacci), Bari: Laterza.
- Watzlawick (1971). *Pragmatica della comunicazione umana*, Astrolabio, Roma.
- Wozniak F. (2015) La démarche d'investigation depuis la théorie anthropologique du didactique : les parcours d'étude et de recherche. *Recherches en Éducation* 21, 152-166.

## ANNEXE : Tableau Interactions - Problématisation

Activité	Position Professeur (P)	Position Élève (É.)	Le « rebondir » Professeur/Élèves
La mémoire de la classe activée par un questionnaire sur des connaissances supposées connues : les points cardinaux et les ombres. <b>Familiarisation :</b> <b>lancement des questions</b>	<b>P.</b> Énonce le problème à étudier : déterminer les points cardinaux à l'extérieur. Pose la question : « comment nous nous orientons dans une île déserte sans la montre ni la boussole » ? <b>P.</b> Recueille les suggestions des Élèves sur les ombres	<b>E.</b> Donnent des réponses « scolastiques » sur les points cardinaux. Chaque élève s'interroge et élabore sa propre expérience par un récit imaginaire avec le titre : « Raconte la fois où tu as perdu ton ombre ». <b>É.</b> dessinent l'ombre.	Discussion sur les différents moyens de s'orienter et les points cardinaux. <b>Co-construction de l'idée</b> des ombres du Soleil comme une piste pour arriver à la réponse à la question d'orientation.
Les Ombres. Travail sur le mythe de la Caverne (Platon) Expériences scientifiques sur les ombres : aspect épistémologique du savoir en jeu. <b>Familiarisation :</b> <b>Lancement des questions</b>	<b>P.</b> Lit le mythe de la Caverne adapté à la classe. <b>P.</b> gère le retour sur les ombres <b>P :</b> relance la question « Pourquoi étudier les ombres pour l'orientation ? À quoi sert la boussole qui permet de nous orienter ? »	<b>É.</b> racontent leurs récits, leurs suggestions sur le mythe de la caverne et posent des questions ; observent, dessinent et rédigent les rapports sur les résultats des expériences scientifiques, relatifs à la relation : position de la source de la lumière /longueur ombres.	L'interaction des hypothèses de la classe conduit à une nouvelle question : « Que sont les ombres ? » <b>Co-construction de l'idée</b> de l'ombre en tant que phénomène du réel
<b>Observations et mesurage à l'extérieur : la pratique</b> Définition de l'horizon astronomique. Mesure des ombres avec le gnomon. <b>Contextualisation</b>	<b>P.</b> Organise les expériences scientifiques et les observations de l'ombre du soleil à midi. Questionnement sur l'horizon sensible et astronomique, le gnomon, le mesurage, etc.	<b>É.</b> Dans la cour et pendant une période autour du midi solaire, par équipe avec des taches explicitées, ils recueillent les données : traces ombres/ mesures/tables/ dessins/photo.	On discute des résultats scientifiques des expériences d'où vient l'hypothèse d'enquête : s'orienter par les ombres du Soleil. <b>Co-construction de l'idée</b> des ombres produites par le soleil en tant que phénomène observable
<b>Observations et mesurage à l'extérieur : la pratique</b>  Détermination de la ligne méridienne dans l'horizon astronomique. <b>Mathématisation de l'expérience</b>	<b>P.</b> Contrôle le travail des élèves, dans la cour pour les mesures des ombres. Pour l'identification de l'ombre, <i>la plus courte, et ensuite les points cardinaux.</i> Cette action est à la genèse du rapport ontologique le moi/et le monde.	<b>E.</b> notent l'ombre la plus courte qui <i>identifie la ligne méridienne et le Soleil en méridien.</i> Toute la classe participe à l'activité en autonomie et coopération.	<b>Co-construction de la ligne méridienne</b> , fixe dans l'espace, qui identifie le Nord, Sud et de la perpendiculaire pour les autres points cardinaux Est, Ouest.

## Tableau Interactions – Algorithmisation

Simulation de l'horizon astronomique sur la Terre (parallèle à la cour) et orientation sur la « sphère ». (avec une orange et des cure-dents) <b>Lancement des questions et activité pratique.</b>	<b>P.</b> par une orange/Terre pose les questions suivantes : <i>« Avec deux cure-dents orienter la sphère selon le Nord/Sud. Où sommes-nous (lieu d'observation) sur la surface de la Terre ? Marquez-les avec un point ».</i> <b>P.</b> guide les tentatives des élèves.	<b>E.</b> ont dans la main une orange et des cure-dents. Ils essayent en autonomie de marquer le Nord et le Sud, par rapport à l'orientation déjà établie à la cour et de placer l'observateur sur la Terre. Ils discutent et argumentent leurs choix.	Dans la discussion, on réalise une interaction P/É qui permet un aller et retour avec l'expérience d'observation vécue et conduit à la réponse recherchée. <b>Co-construction de la position de l'observateur dans le point le plus en haut dans la sphère (parallèle à la cour).</b>
Tracer la ligne méridienne Identifier le Méridien local.  Passage de l'expérience concrète (mesure dans l'horizon astronomique) à la sphère.	<b>P.</b> demande de <i>reconstruire la ligne méridienne</i> locale sur l'orange/Terre pour représenter ce que l'on a fait sur l'horizon astronomique, à midi solaire. Après questionnement et prévisions : <b>« Quels sont les points sur la Terre ayant le "midi" au même instant ? »</b>	<b>E.</b> Positionnent le triangle : gnomon ligne méridienne, direction des rayons du soleil sur l'orange/Terre Les élèves ont dans la main une orange et des cure-dents. Ils essayent en autonomie de marquer les points. Au départ ils tracent ces points au hasard. Mais quelques-uns tracent le bon point, discutent et argumentent leurs choix.	Par l'interaction P/É, on revient sur l'expérience d'observation vécue, qui permet de dépasser les tâtonnements des élèves, jusqu'à la bonne réponse.
<b>Modélisation :</b> mobilisation par l'élève des concepts mathématiques et référence à l'expérience concrète. <b>Recontextualisation</b>	<b>P.</b> Guide les tentatives des élèves, qui tour à tour essaient de marquer ces positions, se rapportant au signifié du midi solaire. Tous ceux qui observent le Soleil en méridien <b>"au même instant</b> ont la <b>même position espace-temporel</b> ».	<b>E.</b> identifient le Méridien local et tracent la ligne qui relie les pôles Nord/Sud et le pied de la verticale.  Ils dessinent la Terre avec le Méridien local.	<b>Co-construction</b> et Institutionnalisation du Méridien local ligne section de la sphère/Terre avec le plan qui relie les pôles Nord/Sud et la verticale du lieu.