

# OUTILLER LES ENSEIGNANTS POUR LA SELECTION DE TACHES MATHEMATIQUES DANS LES MANUELS

CASTELA\* Corine

**Résumé** – Nous présentons des outils issus de deux cadres théoriques, la Théorie Anthropologique du Didactique et la Double Approche, pour analyser les exercices et problèmes mathématiques. Nous montrons que ce style d'analyse peut aider l'enseignant à concevoir un parcours basé sur la résolution de problèmes visant à développer et évaluer les capacités mathématiques des élèves. Ceci est illustré par des exemples qui se réfèrent à la capacité 'Utiliser le théorème de Thalès' du programme français en 4<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup>.

**Mots- clefs** : Programme du second degré, analyse de tâche, praxéologie, moments de l'étude

**Abstract** - We present tools coming from two theoretical frameworks, the Anthropological Theory of Didactics and the Double Approach, to analyze mathematical exercises and problems. We show that this style of analysis will support the teacher's work in designing a program based on problem solving to enhance and assess students' mathematical skills development. This is illustrated through examples which refer to the skill 'Being able to use the Intercept theorem' from the French curriculum for Grades 8 and 9.

**Keywords**: Secondary school curriculum, task analysis, praxeological study process.

## I. INTRODUCTION

Suivant en cela la tendance internationale encouragée par l'OCDE, le gouvernement français a initié en 2006 une importante réforme éducative aux niveaux primaire et secondaire avec l'objectif principal de passer d'une centration sur les disciplines académiques à une priorité donnée au développement de compétences clés. La nature transdisciplinaire de la notion de compétence est alors particulièrement mise en avant, ainsi que la nécessité de prendre appui, pour développer les compétences sur des situations diverses et complexes, aussi proches de la vie réelle que possible. Pour le collège (Niveaux 6 à 9), les programmes de mathématiques sont réécrits et publiés en 2008<sup>1</sup>. Cependant, sauf pour quelques déclarations générales sur la contribution de la discipline au développement des compétences, les changements sont limités et les objectifs d'apprentissage restent structurés par les connaissances et capacités mathématiques. En d'autres termes, les enseignants de mathématiques ont à mettre en œuvre ce qu'ils peuvent considérer comme un programme en deux parties : d'une part, développer les compétences transversales, une mission pour laquelle ils ne se sentent pas vraiment préparés ; d'autre part, enseigner les mathématiques. Ceci peut expliquer que ceux des enseignants qui avaient toujours enseigné les mathématiques avec une pédagogie plutôt classique ont poursuivi dans la même voie, restant par exemple peu enclins à organiser des séances collectives de résolution de problèmes complexes. Ainsi, l'introduction dans l'épreuve de mathématiques du Brevet des Collèges (examen de fin de cycle, en 3<sup>e</sup> - niveau 9) d'une tâche complexe (contexte quotidien, autonomie requise dans l'utilisation des mathématiques) s'est traduite par un échec important chez les élèves et des protestations de la part des enseignants.

Une nouvelle réforme a été initiée en 2015 et implémentée en 2016, les programmes étant une nouvelle fois réécrits<sup>2</sup>. En ce qui concerne les compétences, l'approche adoptée diffère de la précédente en ce que deux niveaux de compétences mathématiques sont explicitement considérés : des compétences générales, qui sont la contextualisation en mathématiques de

\* LDAR (Laboratoire de Didactique André Revuz), Universités de Rouen, Paris Diderot, Paris-Est Créteil, Artois et Cergy Pontoise- France-Corine.Castela@univ-rouen.fr

<sup>1</sup> BO Spécial n°6 du 28-08-2008. Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques.

<sup>2</sup> BO Spécial n°11 du 26-11-2015. Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4).

compétences transversales ; des compétences locales (capacités dans le programme de 2008) reliées à des compétences générales et à des connaissances mathématiques.

*Exemples de contextualisation en mathématiques de la compétence transversale 'Raisonnement' (Programmes 2015, p. 369 -Cycle 4 - Niveaux 7 à 9) :*

Résoudre des problèmes mettant en jeu des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions.

Démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion.

*Exemples de compétences mathématiques locales liées à la compétence Démontrer (ibidem, p. 378) :*

Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture. Par exemple, prouver que deux droites sont parallèles. Exemples de connaissances associées : caractérisation angulaire du parallélisme, parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales, théorème de Thalès et sa réciproque.

En utilisant le modèle praxéologique développé par la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD dans la suite, Chevallard, 1999), nous dirons que ce programme est structuré par une liste relativement limitée de praxéologies mathématiques, l'horizon éducatif étant que les élèves deviennent capables de les employer à leur propre initiative dans des situations problématiques mathématiques ou non. Le terme 'horizon' signifie ici que cet objectif très ambitieux ne sera pas atteint par certains élèves pour certaines des praxéologies en question (voir plus loin). Cependant, les enseignants sont supposés accepter cette mission impossible, l'hypothèse institutionnelle étant peut-être que, ce faisant, ils vont favoriser le développement des compétences transversales clés. Cette hypothèse demanderait à être confirmée. Toutefois, en ce qui concerne l'éducation mathématique, les recherches ont apporté des preuves solides du fait qu'une pédagogie basant l'étude des mathématiques sur leur caractère outil pour répondre à des questions et mettant l'accent sur l'activité des élèves, favorise, dans certaines conditions, l'apprentissage. Ces résultats pourraient aider les enseignants français à faire face aux exigences de la réforme de 2015, du moins pour ce qui concerne les mathématiques.

Dans la suite, nous situant à l'interface entre la sphère de la recherche et celle de l'enseignement, nous cherchons à montrer comment des outils produits par la TAD (Chevallard, 1999 ; Castela, 2008) et par la Double Approche des pratiques enseignantes (DA dans la suite, Vandebrouck, 2008)<sup>3</sup> peuvent aider les enseignants à réaliser les types de tâches didactiques que les programmes de 2008 prétendent traiter en décrivant les objectifs en termes de capacités :

La définition de ces capacités vise donc à clarifier les attentes, à préciser les priorités et à fournir des repères dans le but d'aider les enseignants dans leur travail de programmation et de mise au point des évaluations qui permettent d'en baliser la réalisation. (p.12)

Les auteurs de manuels sont chronologiquement les premiers concernés par ces types de tâches didactiques. Puis, à leur tour, les enseignants utilisent les ressources mises à disposition par les manuels pour planifier leurs séquences d'enseignement et concevoir leurs évaluations.

<sup>3</sup> Le cadre théorique global de notre réflexion est la TAD, nous ne faisons qu'emprunter à la DA ses outils d'analyse des tâches sans adopter pour cela l'approche cognitive de la théorie de l'activité qui est la sienne.

Notre texte sera centré sur un item du programme de troisième (2008, p.37), en deux parties :

Connaissances : Configuration de Thalès ; Capacités : ( $C_1$ ) Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux droites sécantes (théorème de Thalès dans la suite) ; ( $C_2$ ) Connaître et utiliser un énoncé réciproque.

## II. CLARIFIER LES ATTENTES : QUELLE PRAXEOLOGIE LOCALE EST EN JEU ? À QUEL NIVEAU DE MAÎTRISE ?

En dépit de la citation précédente, le texte des programmes n'explicite pas du tout l'étendue du champ de problèmes dans lequel les élèves sont supposés utiliser les théorèmes considérés. Donc les auteurs de manuels et les enseignants doivent déterminer pour quels types de problèmes ces résultats produisent une technique et décider si les élèves sont supposés ou non devenir capables d'utiliser chacune d'entre elles. Dans les termes de la TAD, il s'agit de décrire une praxéologie locale, c'est-à-dire une organisation mathématique obtenue en intégrant un certain ensemble de praxéologies ponctuelles justifiées par le même discours technologique.

Quatre types de tâches sont classiquement incluses dans l'organisation locale relative au théorème de Thalès et sa réciproque : ( $T_1$ ) Calculer la longueur d'un segment ou d'un rapport de longueurs, ( $T_2$ ) Prouver que deux droites sont sécantes, ( $T_3$ ) Prouver que deux droites sont parallèles, ( $T_4$ ) Prouver que deux longueurs ou deux rapports de longueurs sont différents. Certaines conditions, associées aux hypothèses des théorèmes, doivent être vérifiées dans le contexte de la tâche : présence de deux triplets de points alignés ( $O, A, B$ ) et ( $O, A', B'$ )<sup>4</sup> avec des hypothèses sur les droites ( $AB$ ) et ( $A'B'$ ) (parallèles ou sécantes) ou sur des rapports de mesures algébriques faisant intervenir ces points (égaux ou différents).

Considérons maintenant le problème suivant :

Soit un triangle  $ABC$  et trois points  $P, Q$  and  $R$  des droites  $(BC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$  respectivement, distincts de  $A, B$  et  $C$ , démontrer que si  $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$ , alors  $P, Q$  et  $R$  sont alignés.

Ce problème peut être résolu en utilisant le théorème de Thalès. Dans les limites de l'organisation praxéologique locale incluant les quatre types de tâches précédents, cette solution nécessite un très haut niveau de maîtrise de la capacité  $C_1$ . Pourquoi ? La tâche à traiter ne renvoie à aucun des types  $T_i$  inclus dans la praxéologie locale, il n'y a pas de droites parallèles dans la configuration et les rapports de mesures algébriques impliqués font intervenir six points. Notre expérience est que la plupart des étudiants qui se préparent à devenir enseignants de mathématiques au secondaire, après une licence de mathématiques, n'utilisent pas spontanément le théorème de Thalès pour résoudre ce problème et que, si on le leur suggère, ils éprouvent des difficultés à le faire. Ceci est peut-être dû au fait que le corollaire direct du théorème qui permet de montrer que, sous certaines hypothèses, trois points sont alignés, n'est pas enseigné en France au lycée et, qu'à l'université où la géométrie est abordée dans un cadre vectoriel et affine, la praxéologie locale relative au théorème de Thalès perd son intérêt.

À ce stade, clarifiant ainsi le texte des programmes, nous considérons que la praxéologie locale que les élèves de troisième sont supposés s'approprier réunit au plus quatre types de tâches ( $T_4$  étant souvent négligé). Puis nous définissons le plus haut degré de maîtrise de cette organisation mathématique comme d'être capable d'utiliser le théorème de Thalès ou sa

<sup>4</sup> La conservation des rapports de longueur par projection parallèle n'est pas enseignée en France au secondaire.

réciroque pour résoudre une tâche ne relevant directement d'aucun des  $T_i$ , et ce dans un contexte non typique, i.e. dont sont absents les objets et hypothèses cruciales. Il est raisonnable de penser que ce niveau de maîtrise n'est pas visé au secondaire et que les attentes relatives aux capacités  $C_1$  and  $C_2$  renvoient strictement aux types de tâches  $T_{1 \rightarrow 4}$  : il s'agit de savoir utiliser l'un des théorèmes pour résoudre une tâche appartenant visiblement à l'un de ces quatre types.

### III. QUELQUES ELEMENTS DE CADRE THEORIQUE

La TAD considère l'enseignant comme le directeur du processus d'étude que les élèves réalisent pour créer ou recréer une praxéologie mathématique. Ce processus est organisé en six moments, chacun d'entre eux remplissant une fonction spécifique ; toutes sont essentielles pour la pleine réussite de l'apprentissage : le moment de la première rencontre avec la praxéologie en jeu ( $M_1$ ), le moment exploratoire ( $M_2$ ) au cours duquel une technique  $\tau$  émerge de la rencontre avec plusieurs tâches du même type  $T$ , le moment technologico-théorique ( $M_3$ ) consacré au développement d'un discours rationnel relatif à  $\tau$ , le moment du travail de la technique ( $M_4$ ), le moment de l'institutionnalisation ( $M_5$ ) et le moment de l'évaluation de la technique et des acquis des élèves ( $M_6$ ). Dans ce texte, nous sommes particulièrement concernés par  $M_4$  : selon Chevallard (1999, p. 253),  $M_4$  doit « à la fois améliorer la technique en la rendant plus efficace et plus fiable (ce qui exige généralement de retoucher la technologie élaborée jusque-là), et accroître la maîtrise qu'on en a ».

Ce modèle n'est pas lié à un style pédagogique particulier, notre texte ne l'est pas non plus. Dans le style classique, le processus d'étude peut commencer par  $M_3$  (présentation d'un théorème), suivi de  $M_1$ - $M_2$  sous l'intitulé 'Applications'. Une telle chronologie est inversée quand le processus d'étude est inspiré par des approches constructivistes. Qu'en est-il de  $M_4$  ? Il faut reconnaître que la TAD ne fournit guère d'outils permettant aux enseignants d'organiser ce moment qui est particulièrement concerné par les questions didactiques relatives au développement des capacités : Quelle est l'étendue visée du type de tâches ? Est-il possible de définir des critères de différenciation entre les tâches, qui puissent servir de base à la conception d'un parcours progressif de résolution de problèmes et à l'évaluation des acquis des élèves ? Pour répondre à ces questions, nous nous tournons vers la Double Approche (DA dans la suite), laquelle, se référant à la Théorie de l'Activité, s'intéresse particulièrement aux activités des élèves, sous l'hypothèse que leurs apprentissages résultent des activités qu'ils développent en réponse aux tâches mathématiques. La DA a développé des outils pour analyser ce qu'un élève devrait faire avec ses connaissances pour résoudre un exercice ou un problème donné. Les éléments pris en compte sont les suivants : quelles sont les solutions possibles au niveau scolaire considéré ? Quelles connaissances mathématiques y sont impliquées ? Ont-elles été enseignées récemment ou pas ? Y a-t-il des indices concernant la technique à utiliser dans l'énoncé du problème, et à la suite, dans le discours de l'enseignant ? Et enfin, quelles sont les adaptations que la tâche spécifique impose à la technique générique ? La DA propose une caractérisation de telles adaptations (par ex. Vandebrouck, 2008 ; Horoks & Robert, 2007) : reconnaissance des éléments rendant possible l'utilisation du théorème, de la formule, de la définition ou de la technique à utiliser ; mélange avec d'autres connaissances mathématiques ; introduction de nouveaux objets, notations, points, etc. ; changement de cadres, de registres de représentation, de points de vue ; introduction d'étapes dans la solution ; utilisation des résultats de questions antérieures ; existence de choix relatif à la procédure de résolution ; déficit de connaissances.

Notons bien que ce style d'analyse n'est pas de nature psychologique. L'analyse n'est pas basée sur les hypothétiques connaissances mathématiques d'un élève donné, mais sur le

contexte institutionnel de la résolution, depuis les programmes officiels au niveau scolaire considéré jusqu'à son implémentation effective par un manuel ou un enseignant. C'est pourquoi il n'est pas anormal que ce travail puisse être importé dans le cadre de la TAD pour répondre aux questions que nous avons soulevées à propos du moment du travail de la technique.

Dans la suite, nous nous centrons sur la praxéologie ponctuelle relative à la technique produite par le théorème de Thalès pour le type de tâches  $T_1$  'Calculer la longueur d'un segment ou d'un rapport de longueurs' (notée  $OM_1$  dans la suite).

#### IV. QUELLE DOIT ETRE L'ETENDUE DU TYPE DE TACHES ?

Nous avons vu dans la partie II que la capacité  $C_1$  (connaître et utiliser le théorème de Thalès) ne pourrait certainement pas être aussi étendue dans l'enseignement secondaire qu'elle pourrait l'être avec l'énoncé qu'en donne le texte du programme. Il reste aux auteurs de manuels et aux enseignants à expliciter quel est le plus haut degré de maîtrise visé, c'est-à-dire caractériser les tâches de  $T_1$  que l'on considèrera comme envisageables à un niveau donné.

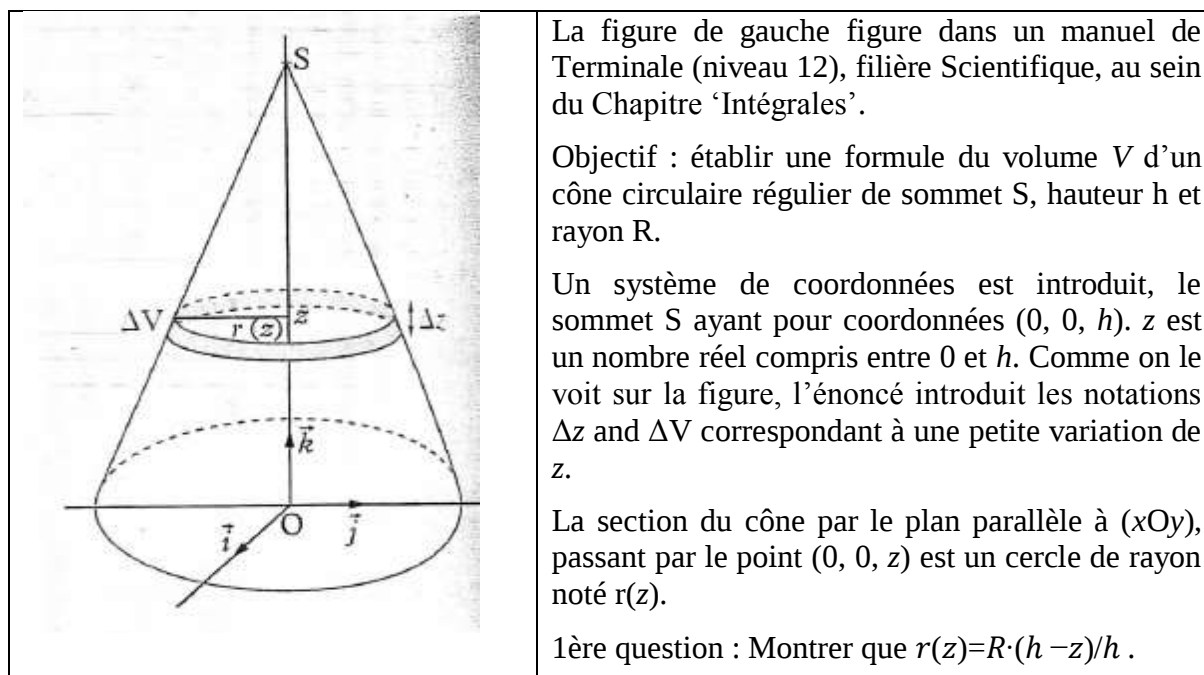


Figure 1- Un énoncé de Terminale S (Math'x- 2006- Didier, p.200)

##### 1. Première analyse de la tâche : éléments concernant la façon dont $OM_1$ est impliquée

La tâche se trouve dans un chapitre d'Analyse, centré sur le concept d'intégrale, nouveau et difficile, et sur les types de tâches et techniques associées. Reconnaître que la tâche à traiter dans la question 1 relève du type  $T_1$  suppose d'abord une extension du sens du terme Calculer (Calculer une longueur ...) d'un point de vue numérique à un point de vue littéral. À ce niveau scolaire, plusieurs techniques ont été enseignées pour ce type (par ex., les théorèmes de Thalès et Pythagore, la trigonométrie, etc.). Une technique doit être choisie mais l'énoncé ne contient aucun indice orientant clairement vers l'emploi du théorème de Thalès, particulièrement parce que la configuration typique de ce théorème n'est pas présente dans la figure.

Concernant les adaptations de la technique, nous relevons que : elle doit être mélangée avec des calculs littéraux et avec une notation fonctionnelle (deux significations pour les parenthèses) ; de nouveaux points doivent être introduits ainsi que des notations pour les sommets des triangles ; le parallélisme des côtés des triangles doit être établi ; les longueurs manquantes de certains segments doivent être obtenues à partir des données littérales.

## 2. *Notre réponse provisoire à la question de l'étendue du type de tâches $T_1$*

Considérons cet exemple comme une introduction au travail que les auteurs de manuels en particulier doivent réaliser, au sein des mathématiques et en dehors, pour évaluer l'étendue visée pour un type de tâches et en déduire le plus haut niveau de maîtrise attendu des élèves à la fin de l'enseignement secondaire. Il est très probable que pour des élèves d'une filière scientifique, l'exploration des tâches présentes en physique convergera avec notre exemple. Mais, puisque la géométrie élémentaire est souvent utilisée dans une gamme étendue de secteurs professionnels, nous oserons supposer que, même en Troisième et Seconde (Niveau 9 et 10), l'étude du type des tâches  $T_1$  devra inclure des tâches ne contenant aucune allusion particulière à  $OM_1$ , conduisant les élèves à mélanger la technique correspondante avec d'autres connaissances, mathématiques ou non. En particulier,  $T_1$  doit être étendue du calcul numérique de longueurs à l'établissement de formules littérales et de relations fonctionnelles.

De fait, des problèmes satisfaisant ces exigences apparaissent dans de nombreux manuels de Seconde (Niveau 10), au cours des chapitres consacrés à l'algèbre et aux fonctions, comme à la géométrie dans l'espace et à la trigonométrie. Ceci signifie que, dans ces manuels, le moment  $M_4$  pour  $OM_1$  se prolonge au sein du processus d'étude de nouvelles praxéologies locales. Ceci crée les conditions d'un emploi de la technique sous la responsabilité des élèves.

## V. DES JALONS POUR UNE PROGRESSION DU TRAVAIL DE LA TECHNIQUE

Revenons maintenant à la classe de quatrième (niveau 8) où le théorème de Thalès est enseigné pour la première fois dans le cas particulier de deux demi-droites  $[OA)$  et  $[OA')$  coupées par deux droites parallèles. Nous présentons ci-dessous des repères basés sur les outils d'analyse de la DA que l'enseignant pourra utiliser, quel que soit son style pédagogique, pour concevoir le parcours d'exercices et problèmes qu'il proposera pour développer la connaissance du théorème et la maîtrise de la technique de tous ses élèves. Notons que, comme les moments, ces phases ne doivent pas être interprétées comme une chronologie : le parcours d'étude pourra enchaîner des tâches relevant des unes et des autres sans s'en tenir à un ordre de A à D. C'est pourquoi, ci-dessous au terme de phase nous préférons celui de zone, considérant ainsi que nous proposons aux auteurs de manuels et aux enseignants une cartographie mathématique et didactique du champ des tâches relevant du type  $T_1$ .

Dans la suite, on se reportera à l'annexe pour les exemples illustrant chaque zone.

### 1. *Zone A : observation active du théorème*

Nous considérons ici de petits exercices au sein desquels le théorème est pris comme objet, dans l'intention d'aider les élèves à étudier, en cherchant à répondre aux questions, la structure du théorème, par exemple dans leur travail à la maison. On peut considérer qu'ils relèvent du moment technologico-théorique ( $M_3$ ).

## 2. Zone B : utiliser la technique dans des tâches simples et isolées du type

Selon les termes de la DA, il s'agit d'exercices dans lesquels la technique est efficace sans aucune adaptation et où les autres connaissances mathématiques en jeu sont familières aux élèves. Notons toutefois que, pour certains élèves, les tâches de cette zone ne sont pas d'emblée simples. Elles le deviennent après un premier entraînement à utiliser la technique avec de très légères variations sur les notations, l'orientation des triangles dans la feuille, la nature des nombres impliqués (entiers et décimaux sont supposés bien maîtrisés), le segment dont la longueur est à calculer (dans le plus petit triangle ou le plus grand, sur les parallèles ou pas).

Ces exercices peuvent être considérés comme relevant du moment  $M_2$  ou du moment  $M_4$ . L'observation du théorème commencée dans la phase A se poursuit ici.

## 3. Zone C : Poursuivre l'exploration du type de tâches et travailler les adaptations de la technique

Cette phase du parcours est cruciale : les élèves savent que les tâches proposées se traiteront en utilisant la technique en cours d'apprentissage ; cependant son utilisation n'est pas simple parce qu'une ou plusieurs adaptations sont nécessaires. Selon notre expérience en formation initiale d'enseignants, les débutants sous-estiment ces difficultés, particulièrement ceux qui ont un très bon niveau mathématique. Comme nous l'avons vu précédemment, une grande variété d'adaptations est possible. Nous faisons l'hypothèse que, en étant confrontés à cette diversité, les élèves développeront leur maîtrise de la technique. C'est le rôle de l'enseignant de sélectionner un ensemble suffisamment riche de tâches pour développer cette phase.

Nous analysons brièvement le second exemple. Cette tâche apparaît dans le chapitre où est étudié le théorème de Thalès, donc les élèves s'attendent à devoir l'utiliser dans les exercices du chapitre. Cependant dans ce cas une autre solution est disponible. Il s'agit de prouver que TON est isocèle en utilisant plusieurs résultats disponibles sur les angles puis de calculer NT avec le théorème de Pythagore déjà présenté dans ce manuel. La technique de  $OM_1$  est elle aussi efficace avec quelques adaptations dont l'introduction de plusieurs étapes : prouver que (ON) et (EJ) sont parallèles, déterminer TE et enfin calculer TJ en utilisant le théorème de Pythagore.

Cette tâche est un exemple très intéressant du point de vue de l'étude de la praxéologie  $OM_1$  puisque presque tous les types d'adaptation sont présents. De plus, nous y rencontrons à propos du théorème de Pythagore une tâche relevant de la zone D que nous présentons maintenant.

## 4. Zone D : des tâches laissant à la responsabilité des élèves la convocation de la technique

Ceci correspond au plus haut degré de maîtrise visé au secondaire que nous avons déterminé dans la partie IV, à partir de l'exemple du calcul du volume du cône. Il est pratiquement impossible d'atteindre ce niveau dans le cadre du chapitre consacré à la praxéologie à l'étude, ceci à cause du contrat didactique le plus courant. Mais, dans les séquences suivantes, au cours desquelles de nouvelles techniques sont étudiées, l'enseignant peut choisir quelques tâches qui poursuivent le moment du travail de techniques antérieures.

Comme nous l'avons vu à la fin de la section V.3., de telles tâches relèvent alors de la zone C de la nouvelle technique à l'étude.

On peut se demander s'il est possible de concevoir des tâches de la zone D dans lesquelles, hormis la technique à l'étude, toutes les connaissances en jeu seraient anciennes et bien maîtrisées. Dans l'organisation classique de l'enseignement des mathématiques en France, cela semble difficile (Castela, 2008) puisque les problèmes proposés par les manuels apparaissent au sein de chapitres structurés selon les connaissances mathématiques. Mais, dans le cadre de la dernière réforme qui inclut explicitement des compétences mathématiques générales au sein des objectifs d'apprentissage, on peut espérer que les manuels fourniront aux enseignants de nouvelles tâches pour la zone D, sans liens explicites avec des connaissances nouvelles.

## VI. CONCLUSION

Pour finir, nous résumerons le travail réalisé dans ce texte en empruntant à Chaachoua et Bessot (à paraître) l'idée d'importer dans la TAD la notion de variable didactique. Notons d'abord que la réalité d'un type de tâches  $T$  ne se réduit pas à un descriptif de la tâche générique à accomplir (« Calculer la longueur d'un segment »), c'est aussi un ensemble de tâches, qu'il convient de déterminer et d'analyser. Nous distinguerons deux étapes dans ce processus d'exploration. La première vise à déterminer du point de vue des mathématiques académiques et de leurs applications scientifiques et professionnelles, la variété des formes sous lesquelles se rencontre le type  $T$ . Cette variété peut être décrite de manière systématisée grâce à la définition d'un certain nombre de variables, ayant trait soit aux objets de savoir impliqués dans les tâches, soit aux raisons qui font qu'apparaît une tâche relevant de  $T$ . Par exemple, pour le type « Calculer la longueur d'un segment », quelle est la nature de la mesure visée : un nombre, une lettre (inconnue, variable), un paramètre de la situation ? Quelle est la dimension de l'espace géométrique auquel appartiennent les objets ? À quoi sert de calculer cette longueur : à calculer une aire, un volume ; à résoudre une équation, à optimiser cette longueur, etc. Ces variables ont pour but de décrire l'étendue du type, elles ne concernent pas le processus d'étude de la tâche. Nous dirons que ce sont des variables épistémo-pratiques qui permettent de définir l'ensemble des tâches relevant de la composante  $T$  d'un modèle praxéologique  $[T, \tau, \theta, \Theta]$  qui servira de référence pour l'enseignement. A ce niveau d'analyse, deux énoncés traitant la même question sous les mêmes hypothèses ne seront pas différenciés selon les indications données.

La deuxième étape du processus d'exploration consiste à définir la praxéologie à enseigner, ce qui conduit généralement à réduire l'ensemble des tâches relevant du type et ce par deux mécanismes : d'une part, une limitation des valeurs prises par les variables épistémo-pratiques (par exemple, on ne fera intervenir en quatrième que des valeurs décimales ou fractionnaires des mesures) ; d'autre part, la prise en compte de variables permettant d'analyser le processus d'étude de la tâche dans le contexte spécifique où il se déroule, c'est pourquoi nous les qualifions de variables didactiques. Nous trouvons ici les critères d'analyse développés par la DA, qui différencient les zones de notre cartographie.

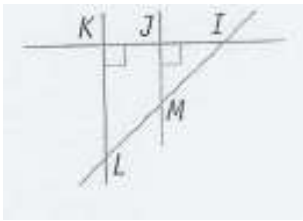
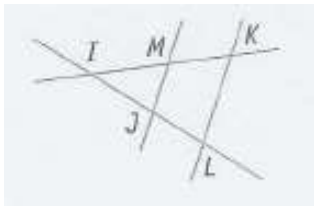
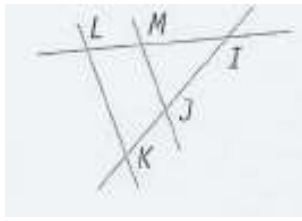
On aura reconnu dans le passage de la praxéologie de référence à la praxéologie à enseigner la première étape du processus de transposition didactique, processus qui agit donc aussi sur les types de tâches et leur étendue. Il en est de même de la deuxième étape de la transposition, celle par lequel l'enseignant définit la praxéologie qu'il enseigne à ses élèves, dont la composante  $T$  dépendra des choix, conscients ou inconscients, appliqués aux valeurs des différentes variables.

Les outils présentés dans ce texte explicitent les variables didactiques dont dépend l'extension du type  $T$  des praxéologies à enseigner. Former les enseignants à leur utilisation nous paraît de nature à aider les enseignants à assumer en pleine conscience leur part du processus transpositif, c'est-à-dire à décider de l'extension du type impliqué dans la praxéologie qu'ils veulent enseigner et à construire un parcours d'étude permettant à leurs élèves de reconstruire cette praxéologie. Dans cette perspective, nous avons conçu dans le cadre de la formation initiale des enseignants de mathématiques au secondaire (deuxième année de master) un module de neuf heures. À la fin de ce module, chaque enseignant stagiaire devait élaborer un choix d'exercices parcourant les quatre zones pour l'étude d'une praxéologie librement choisie en lien avec la classe dont il était responsable. Il s'agissait là d'un travail a priori, non suivi d'implémentation en classe. Or, les recherches réalisées dans le cadre de la DA ont mis en évidence les effets sur la tâche des interventions de l'enseignant pendant la résolution de problèmes. C'est pourquoi Horoks et Robert (2007) ont expérimenté un autre processus de formation des enseignants, basé sur des analyses régulières de vidéos réalisées en classe. Ces deux approches sont complémentaires.

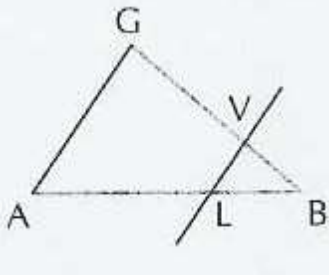
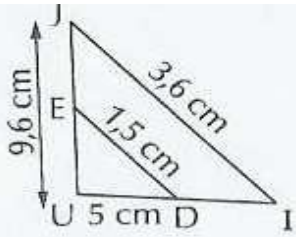
### RÉFÉRENCES

- Castela, C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(2), 135-182.
- Chaachoua, H., Bessot A. (à paraître) Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. *Actes du 5e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Castro-Urdiales, Espagne. 2016.
- Chevallard, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Horoks, J., Robert, A. (2007) Tasks designed to highlight task-activity relationship. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4), 279-287.
- Vandebrouck, F. (Éd.), (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes*. Toulouse : Octarès Editions.

### ANNEXE

|                                                                                                                                                                                                |                                                                                                          |                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>6.</p>                                                                                                   | <p>7. (JM)//(LK)</p>  | <p>8. (LK)//(MJ)</p>  |
| <p>Dans les exercices 6 à 8, quatre droites sont tracées. Est-il possible d'utiliser le théorème de Thalès pour prouver que : <math>\frac{IJ}{IK} = \frac{IM}{IL} = \frac{JM}{KL}</math> ?</p> |                                                                                                          |                                                                                                           |

**Figure 2-** Zone A : exemples issus d'un manuel de quatrième (Phare 4e -2007-Hachette, p. 226)

|                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>(GA)//(VL), AB=9cm,<br/>BL=3cm, VB=2,5cm,<br/>VL=2cm. Calculer GB et AG.</p> | <p>GLE est un triangle tel que <math>GL=6\text{cm}</math>, <math>GE=10\text{cm}</math> and <math>LE=15\text{cm}</math>. <math>A \in [GL]</math> tel que <math>GA=2\text{cm}</math>. La parallèle à (LE) passant par A coupe (GE) en B</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Faire une figure à main levée.</li> <li>2. Calculer AB</li> </ol> | <p>Sachant que les segments verts ([ED] et [JI]) sont parallèles, calculer les longueurs manquantes.</p>  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Figure 3-** Zone B : exemples issus d'un manuel de quatrième (Horizon 4e- 2011-Didier, p.245)

|                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Tracer un triangle FUT tel que : <math>FU=7,5\text{cm}</math> ; <math>UT = 5\text{cm}</math> et <math>FT = 4\text{cm}</math>. Placer le point R sur [FU] tel que <math>FR=3\text{cm}</math>. Tracer la parallèle à (RT) passant par U. Elle coupe (FT) en I. Calculer FI.</p> | <p>Tracer un triangle JET isocèle rectangle en E, tel que <math>JE = 6\text{ cm}</math>. Placer le point O de [ET] tel que <math>TO=2\text{cm}</math>. Tracer la perpendiculaire à (ET) passant par O. Elle coupe (JT) en N. Calculer NT au mm près.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Figure 4-** Zone C : exemples issus d'un manuel de quatrième (Horizon 4e- 2011-Didier, pp. 247-248)