LA PENSEE FONCTIONNELLE : UNE ANALYSE PRAXEOLOGIQUE DU POTENTIEL DE SON DEVELOPPEMENT PRECOCE

ROBERT[*] Virginie — SQUALLI[**] Hassane — BRONNER[***] Alain

Résumé – La pensée fonctionnelle, en tant que forme de la pensée mathématique, a fait l'objet de peu d'étude en didactique des mathématiques. Or, il ne semble pas encore exister de consensus chez ces chercheurs sur ce que recouvre la pensée fonctionnelle. Dans cet article, nous présentons une caractérisation de cette dernière en plus de l'exploiter dans notre projet de maîtrise pour analyser le potentiel des manuels scolaires québécois du 3e cycle du primaire pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle.

Mots-clefs : Pensée fonctionnelle, pensée mathématique, fonctions, activités fonctionnelles.

Abstract – Functional thinking, as a form of mathematical thinking, hasn't been the object of many studies in mathematics education. There seems to be no consensus among researchers on what functional thinking entails. We therefore provide a characterization of the latter in addition to using it in our master's project to analyze the potential of Québec's elementary school textbooks for the early development of functional thinking.

Keywords: Functional thinking, mathematical thinking, functions, functional activities.

I. INTRODUCTION

1. *La pensée mathématique*

En didactique des mathématiques, l'intérêt porté à la pensée mathématique et à ses diverses formes prend de plus en plus d'ampleur et se constate notamment par les différents groupes de recherche nationaux et internationaux qui se penchent sur leur développement et leur importance. Porté par plusieurs chercheurs, un mouvement international visant le développement de la pensée algébrique avant l'introduction formelle de l'algèbre a vu le jour : Early Algebra. Ce dernier, qui réfère à la fois à un domaine de recherche, à une approche curriculaire et à un domaine de formation des enseignants (Squalli, 2015) a initié des changements dans les programmes qui bonifient maintenant leurs contenus pour favoriser le développement d'une pensée algébrique sur tout le curriculum primaire et secondaire. Parmi les recherches d'Early Algebra, certaines mettent en lumière l'importance d'une autre forme de la pensée mathématique : la pensée fonctionnelle. Bien que cette dernière soit plus souvent utilisée pour le développement des compétences algébriques dans les recherches, c'est à la pensée fonctionnelle en elle-même que nous portons notre intérêt de recherche. Pour nous, la pensée fonctionnelle se caractérise par une manière de penser dans des activités faisant intervenir le concept de fonction (activités fonctionnelles) de manière explicite ou implicite à travers les différents sens de la fonction. Dans cet article, nous présentons trois résultats de recherche importants réalisés dans le cadre de notre maîtrise. Notre première contribution est une caractérisation de ce qu'est, pour nous, la pensée fonctionnelle. Ensuite, une seconde contribution est la construction de praxéologies de références relatives à chacune des activités, que nous appelons fonctionnelles, qui nous permettent de procéder à l'analyse de ressources didactique comme les manuels scolaires. Finalement, notre dernière contribution concerne les résultats d'analyse des manuels scolaires québécois qui révèlent le potentiel de ces derniers pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle chez les élèves québécois.

[*] Université de Sherbrooke – Canada – Virginie.Robert2@usherbrooke.ca
[**] Université de Sherbrooke – Canada – Hassane.Squalli@usherbrooke.ca
[***] Université de Montpellier 2 – France – alain.bronner@fde.univ-montp2.fr

2. La pensée fonctionnelle

Notre intérêt de recherche prend donc sa place dans la pensée fonctionnelle. Cette dernière, ne reposant non pas sur un domaine de contenu, mais bien sur le concept de fonction qui unifie et transcende tous les domaines de la mathématique (Denbel, 2015), est indispensable pour la formation de la pensée mathématique. En effet, pour Freudenthal (2002), la modélisation fonctionnelle nous permet de comprendre et de décrire notre monde saturé de changements. Stölting (2008) avance pour sa part que « la capacité de gérer des situations fonctionnelles et de prendre des décisions fondées est une condition nécessaire pour être un citoyen constructif, impliqué et réfléchi » (p. 7). De grands concepts mathématiques comme la variation, la dépendance, la covariation et la correspondance prennent tout leur sens par l'apprentissage des fonctions. Or, bien qu'il soit important, le concept de fonction est complexe et apporte son lot de difficultés (Sierpinska, 1992) autant au secondaire que pour les études supérieures. Pour Warren et Cooper (2005), en se faisant de manière graduelle et sur une longue période de temps, le développement de la pensée fonctionnelle pourrait favoriser une transition fluide vers le concept de fonction. Pour nous, la pensée fonctionnelle pourrait notamment permettre d'approfondir les raisonnements fonctionnels, d'établir un meilleur rapport aux concepts fonctionnels et améliorer la manière de communiquer et de représenter les fonctions. Ainsi, pour favoriser l'apprentissage et viser une compréhension approfondie du concept de fonction, il importe de s'intéresser au développement précoce d'une pensée fonctionnelle.

Il peut sembler ambitieux de vouloir développer la pensée fonctionnelle dès le primaire puisque le concept de fonction ne fait son apparition qu'en 3^{e} année du secondaire dans le programme québécois. Pourtant, certaines recherches d'Early Algebra ont vérifié la capacité des élèves à étudier et à comprendre des relations fonctionnelles dès les premières années du primaire (voir notamment Blanton et Kaput (2004 ; 2011) et Blanton *et al*., 2015). L'une des conclusions de ces recherches est qu'il faut remettre en question la croyance selon laquelle les élèves ne peuvent commencer à étudier les relations fonctionnelles dès les premières années de leur parcours sans avoir longuement étudié les suites et leur régularité (Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey et Newman-Owens, 2015).

Au Québec, la pensée fonctionnelle n'est pas mentionnée de manière explicite et le programme de formation ne promeut pas une trajectoire d'apprentissage qui viserait implicitement son développement comme le font le programme ontarien de 2005 et les propositions curriculaires du NCTM de 2000. Malgré tout, ceci ne veut pas dire que les élèves ne développent pas certains aspects de leur pensée fonctionnelle pendant leur parcours scolaire. En effet, pour nous, la pensée fonctionnelle se déploie lors d'activités faisant intervenir le concept de fonction de manière implicite ou explicite. Conséquemment, dans leur quotidien, les élèves sont possiblement confrontés à des activités mathématiques qui favorisent le développement de leur pensée fonctionnelle, et ce, à leur insu.

Pour accéder à ce quotidien des classes québécoises, l'étude des manuels scolaires s'avère intéressante. En effet, ces derniers nous offrent une vitrine privilégiée et facile d'accès sur les activités que les enseignants proposent. Approuvés par le Ministère de l'Éducation, les manuels sont des ressources qui donnent une interprétation du programme de formation en plus de proposer des pratiques possibles d'enseignement (Tavignot, 1995). Ils se retrouvent donc à la jonction du curriculum réel et du curriculum formel (Lebrun et Niclot, 2009) ; entre les contenus prescrits et les contenus réellement enseignés. Toutefois, avant de pouvoir formuler un cadre d'analyse des activités, nous commencerons par bien cerner ce que nous entendons par pensée fonctionnelle.

II. CADRE DE RÉFÉRENCE

Définir la pensée fonctionnelle n'est pas chose simple. À notre connaissance, très peu de chercheurs ont tenté l'exercice. Pour faire notre caractérisation de la pensée fonctionnelle, nous nous sommes appuyés sur quatre facteurs importants : sur la manière d'approcher la pensée invoquée dans les textes de Radford de 2011, 2013 et 2015 ; sur l'opérationnalisons de la pensée fonctionnelle à partir du modèle épistémologique de référence de la pensée algébrique proposé par certains membres de l'Observatoire International de la Pensée Algébrique (OIPA) ; sur les quelques définitions proposées par les recherches d'Early Algebra et sur les fondements conceptuels de la notion de fonction.

1. Une proposition de modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle

D'abord, tout comme Radford (2011), nous optons pour une conception non mentaliste de la pensée. Celle-ci ne constitue pas un processus exclusivement intracérébral, puisque le cerveau humain dépend des ressources culturelles pour son activité. Chercher à comprendre la pensée revient donc à considérer à la fois la pensée du sujet pensant (la pensée subjective) et la pensée historico-culturelle. Dans le cadre de cette recherche, nous nous intéressons à la pensée historico-culturelle puisque « c'est au cours de l'acquisition des formes culturelles de réflexion que l'élève parvient à donner du sens aux objets matériels et conceptuels qu'il rencontre dans sa culture » (Radford, 2011, p. 64). Ainsi, la pensée mathématique, tout comme la pensée fonctionnelle, ne peut se réduire à un individu : elle le transcende. De plus, les activités servent de médiation entre les connaissances et le fait de connaître (Radford, 2011). Elles sont donc indispensables et indissociables de la pensée.

Sans être exhaustifs, nous considérons que les **activités fonctionnelles essentielles** sont 1) la modélisation fonctionnelle, 2) la généralisation fonctionnelle et 3) l'étude de relations fonctionnelles. Dans le cadre de notre recherche, nous considérons la modélisation fonctionnelle comme un processus à travers lequel une situation réelle est étudiée afin d'établir le modèle fonctionnel le plus approprié possible qui traduit la relation fonctionnelle en jeu. Ce modèle fonctionnel offre une représentation simplifiée d'une relation fonctionnelle complexe du monde réel. Pour sa part, la généralisation fonctionnelle est conçue comme un processus à travers lequel une régularité entre quelques instanciations (des couples) des variables est pressentie, une hypothèse est formulée puis vérifiée sur des valeurs d'un certain domaine. Elle se termine par la justification de la relation fonctionnelle généralisée. Finalement, l'étude d'une relation fonctionnelle est une activité pour laquelle la relation fonctionnelle est déjà connue. Elle sert notamment à mieux comprendre une fonction, qui est ici considérée comme un objet mathématique en soi, par l'étude de ses différentes facettes.

2. Notre caractérisation de la pensée fonctionnelle

La pensée fonctionnelle est une manière de penser dans des activités faisant intervenir la notion de fonction (activités fonctionnelles ci-haut mentionnées) de manière explicite ou implicite à travers les différents sens de la fonction. Sur le plan opératoire, elle se concrétise par :

1. Un ensemble de raisonnements particuliers dans ce type d'activité ;
2. Un rapport particulier aux concepts en jeu dans ces activités ;
3. Une manière de communiquer et de représenter.

3. L'opérationnalisation de la pensée fonctionnelle

Dans cette section, nous examinerons rapidement chacune des composantes de la pensée fonctionnelle sans toutefois chercher à être exhaustifs.

Premièrement, la pensée fonctionnelle se concrétise en partie par les différents raisonnements particuliers qu'elle mobilise. Pour nous, quatre raisonnements sont essentiels pour la pensée fonctionnelle et permettent de caractériser cette manière de penser.

1. Modéliser fonctionnellement ;
2. Généraliser fonctionnellement ;
3. S'intéresser à la covariation entre deux quantités variables ;
4. S'intéresser à la relation de correspondance entre deux quantités variables.

La pensée fonctionnelle s'opérationnalise aussi par un rapport particulier aux concepts qu'elle englobe : la variable, la dépendance, les relations fonctionnelles, la relation d'équivalence, la covariation et la correspondance. Ces concepts seront appelés des concepts fonctionnels. Pour Dreyfus et Eisenberg (1982), la fonction ne peut être un concept en soi que si tous ses sous-concepts fondamentaux sont pris en considération. Cet aspect est donc indispensable pour le développement de la pensée fonctionnelle et se concrétise notamment ainsi :

1. Concevoir une ou plusieurs valeurs spécifiques comme une instanciation d'une variable ;
2. Percevoir la dépendance entre deux quantités et tenter de bien comprendre ce lien ;
3. Concevoir une expression algébrique prioritairement comme une relation fonctionnelle ;
4. Voir une équation comme une relation d'équivalence entre deux règles fonctionnelles ;
5. Percevoir la covariation entre deux variables et déterminer le sens de la variation ;
6. Percevoir la relation de correspondance entre deux quantités.

Finalement, la dernière composante indispensable de la pensée fonctionnelle est la manière de communiquer et de représenter les fonctions. Selon Duval (1993), un objet mathématique n'est pas et ne doit pas être associé uniquement à l'une de ses représentations. Il doit être reconnaissable en chacune d'elles. Le concept de fonction doit donc passer par toutes ses représentations sémiotiques pour favoriser une compréhension approfondie. Pour Duval (1993), les représentations sémiotiques sont « des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement » (p. 39). Dans le cadre de notre recherche, nous nous intéressons plus particulièrement aux élèves du primaire. Or, pour ceux-ci, les registres de représentations accessibles sont notamment la table de valeurs, la représentation graphique, le langage oral et le dessin. Lorsqu'un individu déploie sa pensée fonctionnelle, il :

1. Articule et recours à divers registres de représentation pour représenter et opérer sur les variables et les relations fonctionnelles.

En résumé, nous caractérisons la pensée fonctionnelle comme une manière de penser dans des activités fonctionnelles. Elle s'observe à travers différentes composantes, dont un ensemble de raisonnements fonctionnels particuliers, un rapport particulier aux concepts fonctionnels et une manière de communiquer. Pour nous, ces composantes n'ont pas à toutes être convoquées dans une activité fonctionnelle. Elles devraient être construites tout au long de l'apprentissage.

Dans le cadre de cette recherche, nous considérons que la pensée ne se déploie pas dans le vide, mais bien à travers l'activité. Pour décortiquer l'activité mathématique et en dégager le potentiel pour le développement de la pensée fonctionnelle, c'est à la théorie anthropologique du didactique développée par Chevallard que nous ferons d'abord référence.

4. Éléments de la théorie anthropologique du didactique (TAD)

Le lecteur sait déjà que nos travaux de recherche se situent dans le domaine de la didactique des mathématiques. Or, pour étudier et analyser les pratiques sociales, les rapports aux savoirs et les savoirs, une notion clé apparaît dans la TAD : la praxéologie (Chevallard, 1998). Une praxéologique consiste en un modèle unique qui permet de décrire et d'analyser toute activité humaine régulièrement accomplie. L'activité mathématique peut alors être décomposée par le modèle général praxéologique proposé par la TAD, représenté par le quadruplet $[t, \tau, \theta, \Theta]$. Selon ce modèle, les pratiques institutionnelles peuvent être analysées par un découpage en un système de tâches (t) appartenant à des types de tâches (T) (Bosch et Chevallard, 1999). Toute tâche t est accomplie au moyen d'une technique τ : une manière de faire. Chaque technique est justifiée à son tour par une technologie θ. Celle-ci correspond à un discours rationnel qui permet d'expliquer la technique. Finalement, toute technologie repose elle-même sur les fondements d'une théorie Θ (Chevallard, 1998). Cette décomposition en praxéologies permet ainsi de modéliser l'activité mathématique pour en favoriser l'analyse. Dans le cadre de notre recherche, elle permet de décomposer les activités proposées par les manuels scolaires québécois et d'en dégager le potentiel pour le développement précoce d'une pensée fonctionnelle.

5. Analyse a priori : nos praxéologies de références

Pour étudier les praxéologies mathématiques relatives au développement précoce de la pensée fonctionnelle se retrouvant dans les manuels scolaires, il importait d'expliciter notre modèle épistémologique de référence puisque celui-ci nous a servi de grille de lecture pour interpréter nos observations (Wozniak, 2012). Or, c'est à travers une analyse *a priori* que se dévoile davantage ce modèle puisque dans celle-ci, nous avons construit les praxéologies de références à partir desquelles les manuels scolaires ont été étudiés. Dans cette analyse *a priori*, nous avons émis des hypothèses quant aux genres de tâches, aux types de tâches, aux techniques et aux discours technologico-théoriques qui favorisent le développement de la pensée fonctionnelle précoce à l'intérieur de chaque activité fonctionnelle (modélisation fonctionnelle, généralisation fonctionnelle et étude d'une relation fonctionnelle). Comme nous nous intéressons au développement précoce de la pensée fonctionnelle, les types de tâches évoqués sont adaptés à des niveaux d'étude équivalents à la fin du primaire et au début du secondaire.

Brièvement, voici les genres de tâches ainsi qu'un exemple de type de tâches (écrit entre parenthèses) de nos praxéologies de références pour nos différentes activités fonctionnelles. D'abord, pour la modélisation fonctionnelle, nous avons relevé six genres de tâches :

- T_I : Identifier les différentes données de la situation réelle (identifier les variables en jeu dans la situation) ;
- T_G : Générer des données (générer des données à partir d'une expérimentation) ;
- T_O : Organiser les données (organiser les données dans le registre tabulaire) ;
- T_D : Déterminer la relation fonctionnelle (modèle fonctionnel) entre les quantités variables (déterminer la relation de covariation entre les quantités variables) ;

- T_R : Représenter la relation fonctionnelle (représenter les données dans le registre graphique) ;
- T_P : Prédire des données à partir du modèle fonctionnel établi ou le comportement du modèle (prédire le comportement du modèle fonctionnel en fonction de la situation réelle).

En ce qui concerne la généralisation fonctionnelle, nous avons identifié quatre genres de tâches :

- T_I *:* Identifier la relation fonctionnelle (identifier une régularité à partir de dessins) ;
- T_F : Formuler la relation fonctionnelle généralisée (formuler la relation fonctionnelle généralisée à l'aide d'un langage symbolique) ;
- T_R : Rechercher un autre couple de valeurs (rechercher un couple de valeurs éloigné) ;
- T_J : Justifier la relation fonctionnelle établie (justifier la relation fonctionnelle généralisée à l'aide d'un exemple générique).

Finalement, pour la praxéologie de référence relative à l'étude d'une relation fonctionnelle, nous avons également relevé quatre genres de tâches :

- $T_{DÉT}$ *:* Déterminer différentes composantes de la relation fonctionnelle (déterminer les caractéristiques de la relation fonctionnelle) ;
- $T_{DÉC}$: Décrire le lien de covariation ou de correspondance entre les quantités variables (décrire la relation de covariation entre les quantités variables) ;
- T_R : Représenter la relation fonctionnelle dans divers registres de représentation (représenter la relation fonctionnelle donnée sous sa forme graphique ou tabulaire dans le registre algébrique) ;
- T_O : Opérer sur les relations fonctionnelles (opérer sur les fonctions par l'addition de fonctions).

Pour chaque type de tâche identifié, nous avons détaillé une technique générique ainsi qu'un bloc technologico-théorique permettant de justifier la technique de résolution proposée. Par exemple, pour la modélisation fonctionnelle, une technique générique pour le type de tâches $T_{D\text{-}COV}$ *: Déterminer la relation de covariation entre les quantités variables,* une technique générique (appelée τ_{TD-COV}) est la suivante : (1) faire varier la valeur de la variable indépendante et observer l'effet de cette variation sur la variation de la variable dépendante ; (2) vérifier si cet effet est le même pour différentes valeurs ; (3) convoquer des symboles (des lettres, des mots, etc.) pour généraliser cette relation de covariation. Cette technique repose sur le processus associé à la modélisation et sur les divers fondements relatifs au concept de covariation de la théorie des fonctions analytiques. Pour l'entièreté de nos praxéologies de référence, se référer à notre mémoire (Robert, 2018).

La construction de notre caractérisation de la pensée fonctionnelle et de nos praxéologies de références nous a fourni les outils pour répondre à l'objectif spécifique de notre maîtrise qui était de dégager le potentiel des situations d'apprentissage proposées par les manuels scolaires du 3e cycle du primaire pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle. Dans la section suivante, nous proposons donc la méthodologie relative à l'analyse de situations d'apprentissage.

III. RÉSULTATS DE NOS TRAVAUX DE MAÎTRISE

L'objectif premier de notre recherche de maîtrise était d'identifier et de décrire le potentiel des situations d'apprentissage pour le développement d'une pensée fonctionnelle. Nous avons donc opté pour une recherche exploratoire et qualitative à partir de laquelle nous avons étudié le manuel scolaire *Défi mathématique* (Lyons et Lyons, 2005) du 3e cycle du primaire.

1. Éléments du protocole de recherche

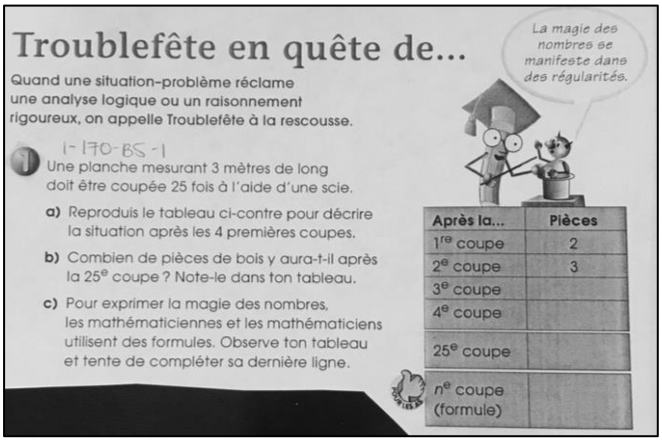
Pour procéder à l'analyse des situations d'apprentissage et des tâches, nous avons d'abord établi un protocole d'analyse qui repose à la fois sur le modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle proposé ainsi que sur l'analyse praxéologique de Chevallard. Pour tous les détails concernant le protocole de recherche et l'analyse réalisée, se référer directement à notre mémoire (Robert, 2018).

Après avoir fait une lecture attentive de chacune des 803 situations d'apprentissage du manuel scolaire, nous avons d'abord distingué 80 situations d'apprentissage qui ont été identifiées comme étant potentiellement fonctionnelles. Parmi celles-ci, nous avons ensuite identifié les 64 situations d'apprentissage comportant des tâches fonctionnelles qui ont été analysées à l'aide de l'analyse praxéologique afin notamment d'identifier les **situations d'apprentissage fonctionnelles**. Pour nous, ces dernières sont définies comme comportant tous les ingrédients gagnants pour favoriser le développement de la pensée fonctionnelle : leur contexte réfère à une activité fonctionnelle, leurs tâches sont fonctionnelles et les techniques proposées pour leur résolution font appel au concept de fonction de manière directe ou indirecte.

Il est important de préciser que dans le cadre de notre recherche, nous avons étudié à la fois le manuel scolaire et le guide de l'enseignant pour analyser les techniques suggérées par les auteurs. Nous tenons également pour acquis que les enseignants se fient sur les indications du guide de l'enseignant pour guider leur pratique.

2. Exemple d'analyse partielle d'une situation d'apprentissage

Pour exemplifier les différentes étapes d'une partie de l'analyse réalisée, regardons l'exemple de la situation d'apprentissage 1-170-B5-1.


Troublefête en quête de...

Quand une situation-problème réclame une analyse logique ou un raisonnement rigoureux, on appelle Troublefête à la rescousse.

La magie des nombres se manifeste dans des régularités.

1 1-170-B5-1
Une planche mesurant 3 mètres de long doit être coupée 25 fois à l'aide d'une scie.

a) Reproduis le tableau ci-contre pour décrire la situation après les 4 premières coupes.

b) Combien de pièces de bois y aura-t-il après la 25e coupe ? Note-le dans ton tableau.

c) Pour exprimer la magie des nombres, les mathématiciennes et les mathématiciens utilisent des formules. Observe ton tableau et tente de compléter sa dernière ligne.

Après la...	Pièces
1re coupe	2
2e coupe	3
3e coupe	
4e coupe	
25e coupe	
ne coupe (formule)	

***Figure 1** : Situation d'apprentissage 1-170-B5-1*

La situation d'apprentissage et son contexte font appel à une activité de généralisation fonctionnelle. Quatre tâches fonctionnelles ont été identifiées dans cette activité : rechercher le nombre de pièces de bois après 3 coupes, rechercher le nombre de pièces de bois après 4 coupes, rechercher le nombre de pièces de bois après 25 coupes et rechercher une formule pour le nombre de pièces de bois après *n* coupes. Pour la réalisation de ces différentes tâches, la technique fournie par le guide de l'enseignant s'appuie sur les indications suivantes : (1)

invitez les élèves à compléter le tableau de données pour les 3e et 4e coupes ; (2) demandez aux élèves de chercher la régularité ; (3) aidez les élèves à rédiger une formule qui permet de prédire tous les cas possibles. Pour le choix des variables, nous suggérons d'utiliser la première lettre des mots ; (4) invitez les élèves à compléter la donnée pour la 25e coupe. Cette technique est fonctionnelle et elle suit la technique générique que nous avions proposée dans notre analyse *a priori*. L'élève pressent d'abord une régularité puis il tente de la formuler avec l'aide de l'enseignant. La technique offre même un conseil pour le choix des variables à utiliser. Dans le cadre de notre recherche, cette situation d'apprentissage a donc été identifiée comme favorisant le développement précoce de la pensée fonctionnelle.

IV. PRESENTATION ET DISCUSSION DU POTENTIEL DU MANUEL SCOLAIRE POUR LE DEVELOPPEMENT PRECOCE DE LA PENSEE FONCTIONNELLE

L'analyse des 64 situations d'apprentissage potentiellement fonctionnelle a révélé que 29 d'entre elles n'étaient accompagnées d'aucune technique suggérée. Pour nous, ces situations restent toutefois potentiellement fonctionnelles puisque l'enseignant pourrait choisir de les exploiter à l'aide du concept de fonction.

Selon les auteurs du manuel, sur les 35 situations d'apprentissage restantes, près de la moitié (17/35) devraient être réalisées à partir de techniques non-fonctionnelles. En effet, pour 17 situations d'apprentissage, les techniques suggérées reposent sur des concepts et des raisonnements ne faisant pas appel au concept de fonction. Par exemple, pour 9 situations relatives à une activité d'étude de relation fonctionnelle, les techniques suggérées réfèrent à des stratégies de calcul et visent ainsi le développement de compétences de calcul efficace. Ce ne sont donc que 18 situations d'apprentissage qui sont accompagnées de techniques fonctionnelles. Or, bien que ces 18 situations d'apprentissage ne représentent que 2,2% de toutes les situations du manuel scolaire, nous considérons qu'elles ont un potentiel pour le développement de la pensée fonctionnelle qui est non négligeable. En effet, il faut se rappeler que les fonctions et les concepts fonctionnels ne sont pas des prescriptions ministérielles pour le programme du primaire. Ainsi, en utilisant des concepts fonctionnels plutôt que de privilégier des approches axées sur l'arithmétique, ces techniques ouvrent la porte au développement précoce de la pensée fonctionnelle.

En menant nos analyses, nous avons pu constater que les activités fonctionnelles fournissent des contextes riches pour donner du sens aux apprentissages de plusieurs domaines de la mathématique et qu'elles ont une place significative dans le manuel scolaire étudié. En effet, les situations d'apprentissage de ce dernier mettent de l'avant à la fois la modélisation fonctionnelle, la généralisation fonctionnelle et l'étude de relation fonctionnelle, ce qui enrichit potentiellement la portée du développement de la pensée fonctionnelle. Toutefois, dans les activités fonctionnelles, les techniques fonctionnelles établies dans nos praxéologies de références sont peu exploitées par la modélisation fonctionnelle (4/18) et par l'étude d'une relation fonctionnelle (2/18). Toutefois, elles représentent plus de 50% des techniques suggérées pour la généralisation fonctionnelle. Cette dernière est donc l'activité fonctionnelle la plus exploitée par son aspect fonctionnel par les auteurs du manuel scolaire qui mettent en valeur des techniques qui insistent sur la relation de dépendance fonctionnelle entre les quantités variables ainsi que sur la recherche de la régularité par l'étude de la covariation ou de la correspondance. Ces activités initient également les élèves à observer une table de valeurs de diverses manières afin de découvrir des régularités.

V. CONCLUSION

Bien que l'importance du développement des différentes formes de la pensée mathématique ne soit plus à revendiquer, la pensée fonctionnelle reste peu étudiée. Cet article nous a permis de mettre de l'avant un modèle épistémologique de référence de la pensée fonctionnelle basé à la fois sur l'importance de l'activité mathématique et sur l'importance des raisonnements fonctionnels et des concepts fonctionnels. Nous avons également discuté du potentiel du manuel que nous avons étudié pour le développement précoce de la pensée fonctionnelle. À l'aide de notre modèle épistémologique de référence, nous croyons qu'il serait notamment possible d'identifier des balises pour la création de situations d'apprentissage fonctionnelles ou pour la création d'une trajectoire d'apprentissages qui favoriserait le développement précoce de la pensée fonctionnelle pour différents niveaux scolaires.

RÉFÉRENCES

Blanton, M. et Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. Dans *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, p. 135–142). Bergen : Norway.

Blanton, M., et Kaput, J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. Dans J. Cai et E. Knuth (dir.), *Early Algebraization : A Global Dialogue from Multiple Perspectives* (p. 5‑23). Verlag Berlin Heidelberg: Springer.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K. et Newman-Owens, A. (2015). A Learning Trajectory in 6-Year-Olds' Thinking About Generalizing Functional Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511‑558.

Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19* (1), 77-124.

Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique*. Actes de l'université d'été de la rochelle, juillet 1998 (p. 1-29).

Denbel, D. G. (2015). Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum. Journal of Education and Practice, 6(1), 77‑ 81.

Dreyfus, T. et Eisenberg, T. (1982). Intuitive Functional Concepts : A Baseline Study on Intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *13*(5), 360‑80.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, (5), 37‑65.

Freudenthal, H. (2002). Functions. Dans *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (p. 491–578).

Gouvernement de l'Ontario. (2005). *Le curriculum de l'Ontario de la 1er à la 8e année : Mathématiques*. Toronto : ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Gouvernement du Québec (2016). Programme de formation québécoise : mathématique 2e Freudenthal, H. (2002). Functions. Dans Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (p. 491–578).

Lebrun, J. et Niclot, D. (2009). Les manuels scolaires : réformes curriculaires, développement professionnel et apprentissages des élèves. *Revue des sciences de l'éducation*, *35* (2), 7‑14.

Lyons, M. et Lyons, R. (2005). *Défi Mathématique : 3e cycle, 1, manuel de l'élève*. Québec : Les éditions de la Chenelière inc.

National Council of Teachers of Mathematics (dir.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Radford, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. Dans les actes du colloque *Espace Mathématique Francophone (EMF) sur les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum*. Alger.

Radford, L. (2013). Three Key Concepts of the Theory of Objectification : Knowledge, Knowing, and Learning. *Journal or Reasearch in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Radford, L. (2011). *Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation.* Toulouse : Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques de Toulouse.

Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois: une analyse praxéologique*. Mémoire de maîtrise, Université de Sherbrooke, Québec.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding The Notion of Function. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (dir.). The Concept of Function : Aspects of Epistemology and Pedagogy (p. 25‐58). Washington, DC : MAA Notes.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans les actes du colloque *Espace Mathématique Francophone (EMF) sur les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum*. Alger.

Stölting, P. (2008). La pensée fonctionnelle des élèves de 10 à 16 ans — Analyse comparative et études empiriques de son enseignement en France et en Allemagne. Thèse de doctorat, Université Denis Diderot et Universität Regenseburg.

Tavignot, P. (1995). À propos de la transposition didactique en didactique des mathématiques. *Spirale–Revue de Recherches en Éducation*, *15*, 31–60.

Warren, E. et Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2: a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, *6*(2), 150‐162.

Wozniak, F. (2012). Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématique à l'école : une étude de cas. *Éducation et didactique, 6*(2), 65 88.