DE L'ANALYSE D'UN DISPOSITIF D'ENSEIGNEMENT DU CALCUL SOUSTRACTIF EN CE2 A L'ANALYSE DES CONNAISSANCES REQUISES EN NUMERATION

RINALDI* Anne-Marie –CHAMBRIS** Christine

Résumé – Cette contribution s'intéresse à certaines difficultés des élèves dans l'apprentissage du calcul soustractif dans un dispositif expérimental d'enseignement de la soustraction. Il s'attarde sur les connaissances de numération en jeu dans les calculs mobilisés par les élèves, l'enseignant, et dans le scénario proposé. Il montre l'importance de préciser les justifications relevant de la numération décimale, notamment des alternatives à la récitation de la comptine numérique de dix en dix.

Mots-clefs : calcul soustractif ; numération ; justification ; comptine numérique

Abstract – This contribution focuses on some of the difficulties students have in learning subtractive computation in an experimental design for teaching subtraction. It focuses on the numeration knowledge involved in the calculations mobilized by the students, the teacher, and in the proposed scenario. It shows the importance of clarifying the justifications for decimal counting, including alternatives to reciting the ten-in-ten list of numbers.

Keywords: subtractive calculation; numeration; justification; list of numbers

I. INTRODUCTION

Notre contribution relève du groupe de travail n°9 consacré aux liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages dans le sens où nous nous appuyons sur l'évaluation d'un dispositif d'enseignement en calcul pour revenir sur des questions relatives à l'enseignement de la numération.

Le calcul soustractif mental et posé est un enjeu majeur de l'enseignement des mathématiques au vu des difficultés d'apprentissages persistantes des élèves notament en début de cycle 3. En effet si on se réfère aux résultats des évaluations TIMS (2016), aux travaux Maurel et Sackur (2010), les calculs soustractifs posés ne sont pas maîtrisés par tous les élèves : « Ils font la soustraction dans le sens où c'est possible, en retranchant le plus petit au plus grand, quelle que soit sa place dans la soustraction posée, en haut ou en bas. » (p.48) C'est ainsi que pour effectuer $53-27$, ils vont effectuer $7-3$ et trouver 34 à la place de 26. Par ailleurs, en calcul mental, pour Butlen et Charles-Pézard (2007), les élèves à qui on n'a pas appris à faire autrement « privilégient en premier lieu l'algorithme posé dans la tête, en second lieu des procédures mobilisant des décompositions canoniques des nombres. » (p. 9) Cela est sans conséquence pour effectuer par exemple $53-21=50-20+3-1$ mais problématique pour effectuer le calcul proposé ci-dessus $53-27$.

Dans ce contexte, Rinaldi (2016) a conçu et expérimenté un dispositif d'enseignement du calcul soustractif en CE2 qui vise à relier calcul mental et calcul posé et à agréger l'étude de la numération décimale et l'étude des techniques de calcul soustractif. Les résultats obtenus dans deux classes de CE2 permettent d'évaluer les effets positifs d'un travail régulier et progressif à partir des écritures arithmétiques sur les apprentissages de bon nombre d'élèves, les deux tiers d'entre eux. Pour le tiers restant, il semble que, les difficultés se cristallisent dans un calcul comme 137-50. Ces élèves ne parviennent pas à soustraire un multiple de dix.

* ESPE Amiens, CAREF – France – anne-marie.rinaldi@u-picardie.fr
**Université de Cergy-Pontoise, LDAR (EA 4434), UA, UCP, UPD, UPEC, URN – France – christine.chambris@u-cergy.fr

Dans le dispositif mis en œuvre dans deux classes de CE2, les premières difficultés sont apparues quand les élèves ont eu à calculer □□□−□0. Elles se sont manifestées dans les productions écrites des élèves car ils ne trouvaient pas le résultat exact du calcul et, pour l'enseignant, pendant les phases de restitution car les élèves choisissaient des techniques peu économiques. Dans cette contribution, nous analysons les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des élèves qui n'arrivent pas à adapter leurs techniques en fonction des nombres en jeu ou à conduire un calcul jusqu'au bout. Nous sommes amenées à présenter des éléments du dispositif et à conduire des analyses supplémentaires, pour comprendre ce qui pose problème. Nous interrogeons les connaissances requises en numération décimale pour arriver à effectuer un tel calcul soustractif.

II. CADRE THEORIQUE, HYPOTHESE ET METHODOLOGIE

Dans cette section, nous présentons le cadre théorique et des résultats préalables sur le dispositif de calcul soustractif étudié et l'enseignement de la numération avant d'énoncer notre hypothèse et de présenter notre méthodologie.

1. Cadre théorique

De la Théorie Anthropologique du Didactique, nous exploitons le concept d'*organisation mathématique* (ou *praxéologie mathématique)* qui permet de caractériser l'activité mathématique (Chevallard, 1999). Une praxéologie est constituée de quatre composantes : un *type de taches* –un ensemble de problèmes similaires-, une *technique* –une façon de faire pour traiter toutes les tâches du type, une *technologie* qui justifie la technique et qui est justifiée par la *théorie*.

2. Organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif

Nous utilisons le concept d'*organisation mathématique de référence* (Chevallard, *1999*). Dans la thèse de Rinaldi (2016), cette organisation mathématique de référence autour du calcul soustractif a servi pour construire une organisation mathématique du dispositif conforme à la référence. L'organisation propre au calcul soustractif sur les entiers naturels est fédérée autour de quatre organisations mathématiques locales :

- ✓ La première organisation OM1 regroupe les types de tâches propres à la production de calcul. Tâches qui permettent essentiellement à l'école élémentaire de modéliser les situations additives en référence aux travaux de Vergnaud (1990). Exemple : J'avais 137 € avant de dépenser 50 €, combien me reste-t-il ?
- ✓ La seconde organisation OM2 regroupe les types de tâches qui consistent à associer ou transformer des représentations sémiotiques. Parmi ces représentations sémiotiques, nous retenons les écritures arithmétiques, les schémas et les expressions langagières. Cette organisation est motivée par OM1 et OM3. Traduire *la différence entre cent-trente-sept et cinquante* par une écriture arithmétique.
- ✓ La troisième organisation OM3 regroupe les types de tâches qui vont consister à effectuer un calcul. Exemple : Calculer $137 - 50$
- ✓ La dernière organisation OM4 est associée à la réécriture de calculs. C'est celle qui va permettre de montrer quelles sont les propriétés des nombres et des opérations qui sont mobilisée donc de développer la valence épistémique du calcul au sens d'Artigue (2005). Réécrire $137 - 50$ en décomposant le nombre 50.

L'étude de l'organisation propre à l'effectuation de calculs (OM3) a conduit à identifier différents types de tâches. Ces types de tâches sont soustraire un nombre à un chiffre (Ta−□), soustraire un multiple de dix (Ta−□0), soustraire un nombre à deux chiffres (Ta−□□) puis soustraire un nombre à trois chiffres (Ta−□□□). Pour chaque type de tâches, les techniques potentielles ont ensuite été recensées en appui sur (Fuson et al., 1997 ; Carpenter et al., 1998 ; Klein et al., 1998 ; Thompson, 1999), puis regroupées autour de quatre technologies savantes.

La première technologie Θ_{DD} met en jeu la décomposition des deux nombres, la recomposition d'un nombre, les répertoires additifs et soustractifs, les aspects décimalité et position (Serfati, 2005) de la numération chiffrée, les propriétés de la soustraction sur N. Elle génère deux techniques de décomposition τ_{1010}, (τ_{1010})'.

Technologie Θ_{DD}	Technique de décomposition τ_{1010}	Exemple de calcul : $168-23=(100+60+8)-(20+3)$ $=(100)+(60-20)+(8-3)$
	Technique de décomposition (τ_{1010})'	Exemple de calcul : $165-27=(100+50+15)-(20+7)$ $=(100)+(50-20)+(15-7)$

La seconde technologie Θ_D s'appuie sur les mêmes propriétés que la première. Elle nécessite de décomposer un seul des deux nombres (le plus petit). Elle génère trois techniques séquentielles τ_{N10}, τ_{A10} et τ_{N10C}.

Technologie Θ_D	Technique séquentielle τ_{N10}	Exemple de calcul : $125-23=125-(20+3)=(125-20)-3$
	Technique séquentielle τ_{A10}	Exemple de calcul : $125-27=125-(25+2)=(125-25)-2$ Ou $123-27=123-(20+7)=(123-20)-7$
	Technique séquentielle τ_{N10C}	Exemple de calcul : $125-47=(125-50)+3$

τ_{N10} est une technique séquentielle qui consiste à décomposer canoniquement le nombre à soustraire. τ_{A10} et τ_{N10C} sont deux techniques séquentielles qui consistent à décomposer le nombre à soustraire afin d'obtenir des calculs soustractifs intermédiaires plus simples à effectuer.

La troisième technologie $\Theta_{SOU/ADD}$ s'appuie sur la définition de la soustraction comme opération inverse de l'addition sur les entiers naturels et génère la technique $\tau_{SOU/ADD}$.

Technologie $\Theta_{SOU/ADD}$	Technique $\tau_{SOUS/ADD}$	Exemple de calcul : Pour calculer $125-47$, on cherche le complément de 47 à 125

La dernière technologie Θ_{AN} s'appuie la propriété de conservation des écarts. Elle génère une technique de calcul mental τ_{AN} et l'algorithme de la soustraction par compensation qui consiste à ajouter aux deux termes du calcul si, besoin est, une ou plusieurs puissances de dix.

Technologie Θ_{AN}	Technique τ_{AN}	Exemple de calcul : $125-47=(125+3)-(47+3)$.

Parallèlement, nous avons cherché quels ostensifs, objets sensibles permettant d'évoquer les concepts (Bosch & Chevallard, 1999), pouvaient être utilisés pour mettre en avant les différentes fonctions des technologies (expliquer, évaluer, valider, motiver) (Castela et Romo Vasquez, 2011). En nous basant sur les études de Teppo et Van den Heuvel-Panhuizen (2014), Ernest (1985), Gravemeijer (1994), Bobis et Bobis (2005), Van den Heuvel-Panhuizen (2008), nous avons émis plusieurs hypothèses :

- ✓ La Droite Numérique Vide (DNV) aiderait à visualiser les différentes étapes d'un calcul donc à expliquer le mode d'emploi des techniques séquentielles ;
- ✓ la Droite Numérique Graduée (DNG) aiderait à visualiser l'écart dans le cadre de la mesure ;
- ✓ les Ecritures Chiffrées (EC) et les arbres permettraient de valider toutes les techniques.

3. *Résultats sur l'enseignement de la numération, en France*

Nous appelons *unités de numération* (Chambris, 2008) les unités (de nombre) utilisées en numération. Nous abrégeons les mots centaines, dizaines et unités par c, d et u.

Dans le tournant de la réforme des mathématiques modernes en France, les savoirs de référence pour l'enseignement de la numération décimale ont été modifiés. La théorie classique formulée avec les unités de numération a été remplacée par la théorie savante reposant sur le théorème d'existence et d'unicité de la décomposition polynomiale d'un entier *n* dans une base donnée a (i.e. $n = \sum_{i=0}^{p} r_i a^i$, $0 \leq r_i < a$).

Au-delà de la composante théorique, cette modification majeure a eu des effets sur les autres composantes de plusieurs praxéologies de numération. En effet, sans ces unités, il devient difficile d'exprimer la dépendance entre les chiffres de l'écriture chiffrée (e.g. 1 dizaine = 10 unités ou 1 centaine = 10 dizaines), ce que Serfati (2005) appelle la *décimalité* de la numération positionnelle. De fait, ces relations sont omises dans certains manuels. Cependant du fait du phénomène de transposition didactique (Chevallard 1985), d'autres praxéologies se sont développées et / ou sont devenues dominantes. Elles reposent sur les autres ostensifs de la numération : les noms des nombres (une correspondance naturalisée entre l'écrit et l'oral, la récitation des comptines de un en un, dix en dix, cent en cent, etc.) et les écritures chiffrées des puissances de dix –liées au nouveau savoir de référence- (notamment les décompositions du type 300+40+5 qui se calculent soit en référence à l'oral, soit « en colonnes ») (Chambris, 2008, 2014, 2018, Mounier, 2013).

4. *Hypothèse*

Les difficultés rencontrées par un tiers des élèves pour soustraire un multiple de dix (Ta−□0) ($137 - 50$) puis -par voie de conséquence- soustraire un nombre à deux chiffres (Ta−□□), peuvent s'expliquer (au moins en partie) par la situation actuelle de l'enseignement de la numération, certaines praxéologies alternatives à celles impliquant les unités de numération vivent dans les classes et sont inadaptées pour certains apprentissages en calcul.

5. *Méthodologie*

Pour étudier notre hypothèse, la méthodologie suivante est mise en œuvre. L'étude est centrée sur les tâches problématiques du type : $137 - 50$. Sont reconstruites la praxéologie locale de calcul soustractif associée à ce type de tâche dans le scénario élaboré par le chercheur (après étude des pratiques des enseignants auxquels il sera communiqué) et les praxéologies de numération qui sont engagées dans cette praxéologie locale. Nous analysons, sur le plan des praxéologies de numération, les données dont nous disposons (scénario élaboré par le chercheur, productions d'élèves sur les calculs de ce type dans l'ingénierie, extraits et transcription de séances de classe pour les calculs de ce type).

III. ELEMENTS D'ANALYSE PROPRES AUX DIFFICULTES RELATIVES A UNE TACHE DE TYPE TA−□0 ET RESULTATS, LIMITES

1. Analyse des techniques des élèves en échec : un point sensible pour les apprentissages

Pour soustraire un multiple de dix, par exemple effectuer le calcul $137-50$ les élèves en échec choisissent 100 comme nombre pivot, utilisent : $137-37=100$, restent $(50-37)$ à enlever à 100. Autrement dit plutôt que d'enlever 5 dizaines, et se ramener au calcul de 13-5, les élèves sont confrontés à deux calculs mentaux relativement complexes (50-37 et 100-13).

Dans le scénario, l'étape antérieure proposée est l'élaboration de techniques pour les calculs du type : $130-50$. Les élèves faibles ne transfèrent pas cette connaissance, qu'ils semblent pourtant avoir acquise, au calcul de $137-50$.

2. Analyse du scénario

Pour les calculs du type □□0−□0, le scénario propose plusieurs techniques (en fonction des nombres en jeu) et en particulier : revenir au nombre de dizaines □□ d - □ d et calculer sans les zéros. Le scénario ne propose pas de technologie pour justifier ces techniques de calcul.

Pour les calculs du types □□□−□0, si le scénario indique qu'il s'agit de transférer la technique des calculs précédents : □□□−□0=□□0−□0 + □, les techniques proposées pour ces calculs ne montrent pas explicitement le transfert pour trois des deux calculs qui ont des « retenues ». En particulier, le scénario ne propose pas d'institutionnaliser la 3e des techniques indiquées dans le calcul corrigé juste avant dans le scénario : $125-30=12\mathrm{d}-3\mathrm{d}+5$ qui se traduirait ici en $137-50=13\mathrm{d}+7-5\mathrm{d}=8\mathrm{d}+7$. La technique proposée pour le calcul de $137-50$ (et pour l'autre calcul du même type, à savoir $418-20$) est une technique séquentielle qui s'appuie sur le pivot 107 (et pour l'autre calcul sur 408 ou 400). L'appui sur $137=130+7$ n'est pas explicite (pas plus que $410+8$ qui serait d'ailleurs à questionner : $420-2$ serait peut-être plus adapté). Dans les deux cas, la DNV est un ostensif qui est proposé, avec les écritures arithmétiques (ou un discours séquentiel).

Avec la DNV, comme avec les écritures arithmétiques ou un discours séquentiel, il faut calculer $107-20$. La technique pour calculer $107-20$ n'est pas indiquée (ni travaillée dans le scénario). On peut considérer que c'est une faiblesse du scénario mais c'est ainsi. Par suite le professeur doit faire appel à ses ressources personnelles s'il souhaite expliquer ce calcul à ses élèves (tout du moins celles qu'il pense adaptées à ces élèves qui ne savent pas).

Quelles sont les techniques pour calculer cette différence ? En appui, sur les unités de numération, on peut voir 107 comme $100=100+7$, puis 1 centaine dans 100 qui font 10 dizaines, puis $10\mathrm{d}-2\mathrm{d}=8\mathrm{d}$, $8\mathrm{d}+7=87$; en appui sur les écritures chiffrées de puissances de dix (ou des connaissances naturalisées en numération) : $100-20=80, 80+7=87$. La propriété de la troncature permet de trouver :$10\mathrm{d}+7-2\mathrm{d}=8\mathrm{d}+7$. Toutes ces techniques reposent sur une décomposition de 107 en $100+7$ (ou 1 c 7 u) et se justifient par les relations entre unités et le calcul en unités. Le scénario ne les propose pas, pas plus que la décomposition de 107 en $100+7$.

3. Analyse des phases de restitution dans la classe B (calculs de $125-30$ et $137-50$)

Calcul de $137-50$: Un premier élève propose de calculer $137-37$, puis $100-13$. Le professeur indique que c'est compliqué. Le professeur demande une autre solution. Un deuxième élève propose la même solution. Vient ensuite : cent-trente-sept moins trente, cent-sept[1]. Il faut ensuite enlever vingt à cent-sept. L'élève hésite, puis répond quatre-vingt-sept. Le professeur donne alors une explication : « Si on ne sait pas faire quatre-vingt-dix-sept moins vingt, on peut faire quatre-vingt-dix-sept moins dix, moins dix. Quatre-vingt-dix-sept, quatre-vingt-sept. C'est compliqué. Vous avez encore du mal à retirer dix ou vingt quand on passe de cent-sept à quatre-vingt-dix- sept. » puis il interpelle le chercheur : « C'est compliqué ils ont encore un peu de mal quand il faut passer de cent-sept à quatre-vingt-dix-sept ».

Quels sont les savoirs en jeu dans ces discours du professeur ? Moins vingt est interprété comme moins dix, moins dix (un comptage de dix en dix), la soustraction s'effectue par un décomptage de dix en dix en appui sur la numération orale. C'est la comptine numérique qui permet de traiter le problème. L'interpellation du chercheur par le professeur laisse penser que le professeur ne semble pas imaginer d'autre solution que passer par la connaissance de la comptine pour effectuer cette soustraction. Ceci confirme le rôle de la comptine comme clé de voute des technologies pour la numération. Signalons que l'utilisation de la comptine n'incite pas à passer par des « nombres ronds » dès qu'on sait la réciter à partir de n'importe où, en faisant des sauts qui sont des puissances de dix. Signalons aussi que cette technologie, qui repose sur l'oral (et les noms des nombres), est censée justifier des calculs qui demandent à être faits par écrit. Elle devient par ailleurs extrêmement coûteuse dès que le nombre de termes égaux à dix à retrancher devient un peu grand. Elle est particulièrement délicate dès que le chiffre des unités est entre 1 et 6 et qu'on passe dans la tranche 70-99 du fait des irrégularités de la numération orale.

Une alternative à cette technique est proposée par un élève, à la fin de la correction du calcul précédent :$125-30$. Il propose cent-vingt moins trente, quatre-vingt-dix et cinq, quatre-vingt-quinze. La technique consiste donc à décomposer le grand nombre en un multiple de dix et un petit nombre d'unités (inférieur à dix). Dans le scénario, comme on l'a vu, la décomposition apparaît dans les calculs précédents lorsqu'il n'y a « pas de retenue » et le calcul sur les multiples de dix dans les séances antérieures. Le professeur valide mais ne donne pas de technologie : ni sur le plan du choix de la décomposition, ni sur celui du calcul (il aurait pu faire référence aux calculs qui ont précédé, dans la même séance et dans les deux séances précédentes). D'ailleurs, il ne s'empare pas de la technique pour le calcul suivant comme on l'a montré.

Pour mettre en œuvre cette technique, il faut être capable, sur le plan de la numération, de décomposer un nombre en une somme (ou une différence) d'un multiple de dix et d'un petit nombre d'unités (et de pouvoir traiter chaque partie séparément, ce qui renvoie à la notion de unitizing (Steffe & Cobb, 1988)). Il faut donc savoir choisir un « bon » multiple de dix (un nombre entier de dizaines) et calculer avec ce nombre dizaines (ou bien à calculer sans les zéro), puis à ajouter (ou retrancher) « le reste ». Les multiples de dix inférieur et supérieur se repèrent dans l'encadrement entre deux dizaines (ou tronquer le nombre à la dizaine la plus proche), encore faut-il que cette connaissance ne se limite pas à un jeu d'écriture de zéros qui remplace le chiffre des unités. Ils sont liés aux décompositions qui s'appuient sur la numération ($130+7$;$13d+7$; $140-3$; voire $100+30+7$). Ces décompositions ne sont fondamentalement intéressantes que si on a compris qu'on calcule avec des dizaines comme on calcule avec les unités simples, ou bien qu'on peut « aligner les zéros » (dans sa tête ou sur le papier) et que, pour le calcul, on peut faire comme s'ils n'étaient pas là. La deuxième partie de la technique a été enseignée dans les séances précédentes mais elle nécessite d'être adaptée

[1] Les nombres utilisés dans les phases orales sont délibérément écrits en mots car l'écriture chiffrée ne constitue a priori pas un appui pour les techniques utilisées.

pour être transférée. L'adaptation requiert des connaissances sur les nombres, le unitizing, d'être capable de les « désarticuler » de façons variées en fonction des puissances de dix.

4. Limites liées aux données analysées

Les analyses des séances de classe, sur le plan de numération, se sont limitées aux phases de restitution de $137-50$ et $125-30$. Des analyses d'autres moments du dispositif pour les calculs du même type et du type $130-50$ permettraient peut-être d'affiner l'identification des praxéologies de numération qui sont enseignées. Plus généralement, les données dont nous disposons, productions d'élèves et transcriptions de séances, dans le cadre d'un dispositif d'enseignement du calcul soustractif (à partir de propositions de scénarii) ne permettent pas de connaitre les praxéologies enseignées dans le cours de numération par le professeur. Nous ne savons pas si les élèves ont eu ponctuellement ou régulièrement des tâches **de désarticulation des nombres** en fonction des puissances de dix à effectuer, si ces tâches sont attachées à des problèmes (par exemple du type « bons de commande ») ou posées pour se familiariser avec l'écriture chiffrée des nombres.

IV. CONCLUSION

Afin d'établir un lien entre les difficultés repérées des élèves pour soustraire des multiples de dix et les pratiques enseignantes, nous avons fait le choix de nous centrer sur les discours technologiques produits autour du calcul de 137-50. Les analyses montrent le rôle déterminant de l'utilisation de la comptine numérique (de dix en dix) dans l'enseignement du calcul lorsque des savoirs de numération sont en jeu. Ces résultats rejoignent les constats observés dans l'analyse de l'enseignement de la numération. Jusqu'à présent, ces constats se cantonnaient essentiellement à des constats internes à l'enseignement de la numération. Même si les liens avec le calcul étaient envisagés, ils n'étaient pas réellement mis en évidence. Cette étude permet de confirmer que ce qui est considéré comme un problème dans l'enseignement de la numération a effectivement un impact sur l'enseignement du calcul et probablement sur son apprentissage et permet d'envisager des moyens pour avancer. Le dispositif permet notamment de montrer une autre fonction des tâches de « désarticulation » des nombres : **calculer.** En l'état la proposition de scénario mériterait d'être complétée par les techniques et les technologies qui amènent à désarticuler les nombres. Resterait notamment à convaincre enseignants et élèves qu'il existe une alternative à l'utilisation de la comptine numérique pour calculer vite et bien.

REFERENCES

Bobis, J., & Bobis, E. (2005). The empty number line: Making children's thinking visible. *Making mathematics vital*, 66-72.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.

Butlen, D., & Charles-Pézard, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental entre sens et technique. *Grand N*, 79, 7-32.

Carpenter, T.-P., Franke, M.- L., Jacobs, V.-R., Fennema, E., & Empson, S.-B. (1997). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for research in mathematics education*, 29(1), 3-20.

Castela, C., & Romo Vazquez, R. (2011). Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en didactique des Mathématiques,* 31(1), 79-130.

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* (Thèse de doctorat).

Chambris, C. (2014). *Contribution à propos de la numération décimale*. http://cache.media.education.gouv.fr/file/CSP/23/3/Chambris_Christine_-_MCF-_CSP_363233.pdf.

Chambris, C. (2018). The influence of theoretical mathematical foundations on teaching and learning: A case study of whole numbers in elementary school. *Educational studies in mathematics.* DOI: 10.1007/s10649-017-9790-3

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 19(2), 221-265.

Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational studies in Mathematics, 16.* 411- 424.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., Olivier, A., Carpenter, T.-P., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25, 443-471.

Klein, A.-S., Beishuizen, M., & Treffers, A. (1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic versus Gradual Program Design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29, 443- 464.

Maurel, M., & Sackur, C. (2010). Il ne faut pas désarticuler un nombre. Mise en œuvre du dispositif Cesame en primaire. *Grand N, 85,* 43-59.

Mounier, E. (2013). Y a-t-il des marges de manœuvres pour piloter la classe durant une phase de bouclage ? *Recherches en didactique des mathématiques*, 33(1), 79–113.

Rinaldi, A.-M. (2016). Place et rôle des technologies *dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie.* Thèse de doctorat. Université Sorbonne Paris Cité. Université Paris Diderot. Disponible en ligne.

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique: la constitution de l'écriture symbolique mathématique* : Editions Petra.

Steffe, L. P. & COBB, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York, NY: Spinger

Teppo, A., & Van den Heuvel- Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis: the number line as an example. *ZDM: the International Journal on Mathematics Education,* 46(1), 45-58.

Van den Heuvel- Panhuizen, M. (2008). *Learning from ''didactikids'': an impetus for revisiting the empty number line.* Mathematics Education Research Journal, 20(3), 6–31.