Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

Actes du colloque EMF 2015

Coordonnés par

Laurent Theis

Université d'Alger 10-14 octobre 2015

Comité Scientifique

L.	Theis (Président)	Université de Sherbrooke , Canada
A.	Djebbar (Vice-Président)	Université de Lille, France
F.	Arzarello (Président de la CIEM)	Università di Torino , Italie
M.	Abboud-Blanchard	Université de Cergy-Pontoise et Université Paris Diderot , France
R.	Bebbouchi	Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene , Algérie
S.	Bridoux	Université de Mons , Belgique
F.	Chellougui	Université de Carthage , Tunisie
S.	Coppé	Université de Lyon , France
M. E.	Dia	Université Cheikh Anta Diop , Sénégal
J. -L.	Dorier	Université de Genève , Suisse
C.	Lajoie	Université du Québec à Montréal , Canada
F.	Malonga	Université Marien Ngouabi , Congo-Brazzaville
M.	Maschietto	Università di Modena e Reggio Emilia , Italie
S.	Mehaddene	Association Algérienne pour le Développement de l'Enseignement des Mathématiques et des Technologies de l'Information , Algérie
N.	Metref	Université M'hamed Bougara de Boumerdès , Algérie
É.	Roditi	Université Paris Descartes , France
M.	Sangaré	Souleymane École Normale Supérieure de Bamako , Mali
A.	Semri	Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene , Algérie
H.	Squalli	Université de Sherbrooke , Canada
M.	Zaki	Faculté des sciences Dhar el Mehraz , Maroc

Comité d'Organisation

R. Bebbouchi (Président)	USTHB
M. Aider	USTHB
A. Ainouz	USTHB
T. Ali-Ziane	USTHB
N. Badache	CERIST
S. Bakouk	INRE
H. Belbachir	USTHB et DGRSDT
M. Benabidallah	USTHB
F. Bencherif	USTHB
R. Boudjerada	USTHB
M. Bouzari	ENS Kouba
F. Chafa-Mekideche	USTHB
O. Cherikh	USTHB
A. Kessi	USTHB
M. Menceur	USTHB
C. Mezoued	USTHB
L. Terfasse	USTHB
M. Yahi	USTHB
A. Zeglaoui	USTHB
A. Zekiri	USTHB

Le colloque EMF2015

Alger, Algérie

Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Société Mathématique d'Algérie

samedi 10 octobre – mercredi 14 octobre 2015

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage.

Une des forces des mathématiques tient dans le caractère universel de leurs résultats. Cependant, avant d'atteindre ce statut d'universalité, chaque concept mathématique a d'abord émergé dans un contexte culturel particulier, puis s'est enrichi par les apports de diverses civilisations qui ont contribué à son développement et sa diffusion. Ainsi, selon les périodes, diverses civilisations ont pu avoir un rôle moteur dans les découvertes mathématiques et la diffusion de concepts plus anciens. Le Maghreb (et plus particulièrement le territoire qui constitue aujourd'hui l'Algérie) a été, à une période charnière de l'histoire, un des lieux importants de développement et de diffusion des connaissances mathématiques à travers les pays de la Méditerranée. Les exemples les plus célèbres sont la popularisation du système décimal positionnel au 9^{e} siècle et sa circulation à travers le Maghreb et l'Europe, mais aussi le développement d'une symbolisation pour la notation des fractions et l'écriture d'équations, ou encore le développement de la combinatoire.

Ce mouvement entre la pluralité des racines culturelles et l'universalité des mathématiques se retrouve sous plusieurs aspects dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, qui sont au cœur de la thématique du colloque Espace Mathématique Francophone 2015.

D'une part, dans la construction du savoir par l'élève, la rencontre du concept dans des situations particulières est suivie d'une nécessaire décontextualisation / dépersonnalisation, aboutissant à l'institutionnalisation d'un savoir.

D'autre part, les savoirs universels ne sont pas enseignés directement, mais subissent des transformations à différents niveaux de la chaîne de la transposition didactique. Jusqu'à quel point les racines culturelles sont-elles prises en compte dans ces transformations ? Est-il nécessaire de les considérer et comment ? Dans quelle mesure la contextualisation des concepts mathématiques dans leur dimension culturelle permettrait-elle éventuellement de favoriser l'apprentissage des élèves ?

Au plan international, nous assistons depuis un certain nombre d'années à une harmonisation des structures éducatives et des attentes à l'égard des élèves. Dans ce mouvement d'harmonisation, comment sont pris en compte les différents contextes culturels dans lesquels s'insère l'enseignement des mathématiques? L'uniformisation internationale du système Licence / Maîtrise / Doctorat est un exemple de l'harmonisation des structures éducatives, comme l'implantation récente par de nombreux pays de programmes basés sur une approche par compétences. Par ailleurs, les évaluations internationales des élèves et des enseignants, telles PISA et TIMMS, renforcent l'uniformisation des attentes. Cependant ces évaluations peuvent-elles alors prétendre pouvoir évaluer les compétences en mathématiques indépendamment des spécificités culturelles du contexte dans lequel les élèves évoluent ? L'harmonisation des structures éducatives peut-elle néanmoins permettre la prise en compte de pluralités culturelles ?

A un autre niveau, la généralisation des technologies de l'information fait que les ressources pour l'enseignement se mutualisent et se diffusent plus facilement, que ce soit sous forme de formations à distance, de forums d'enseignants, de manuels scolaires, etc. Dans cet accroissement des échanges, se pose à nouveau la question du possible "transfert" d'un contexte culturel à un autre des différentes ressources.

Enfin, le problème du contraste entre l'universalité et les différences culturelles peut être posé par rapport aux outils de la didactique des mathématiques. En effet, on peut se demander comment les résultats de recherche, obtenus dans des cadres culturels spécifiques peuvent vivre dans des environnements culturels différents. Comment la didactique comme science peut-elle tenir compte des spécificités culturelles dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ? Et jusqu'à quel point les cadres théoriques développés en didactique des mathématiques permettent-ils une prise en compte de la dimension culturelle des mathématiques ?

Ce sont là les questions principales qui seront abordées lors du colloque Espace Mathématique Francophone 2015, notamment à travers des conférences plénières, des groupes de travail et des projets spéciaux.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

emf 2015

حول تعليم وتعميم الرياضيات

USTHB
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Laboratoire Systèmes Dynamiques
U.S.T.H.B

HITECH MD
INFORMATIQUE - BUREAUTIQUE
Tel: 021 38 40 45
Mob: 0556 29 81 81
email: info@hitech-md.net

LA3C

Faculté de Mathématiques

RECITS LAB

INSTITUT FRANÇAIS
ALGERIE

S.M.A.

Cfem

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
AMBASSADE DE FRANCE EN ALGERIE

cerist

DGRSDT

LAROMAD - DGRSDT

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LES MATHEMATIQUES ARABES DES VIIIE-XVE SIECLES : PASSERELLES ENTRE LES CULTURES

Ahmed DJEBBAR*

I. INTRODUCTION

Les activités mathématiques sont souvent perçues comme des pratiques individuelles et solitaires sans liens ou presque avec leur environnement, sans échanges féconds avec les acteurs de la production philosophique, littéraire, artistique et idéologique, c'est-à-dire sans interaction avec les différentes cultures au sens large. Elles sont également appréhendées comme un ensemble de discours très techniques, donc hermétiques pour les non initiés et, par nature, fermés à tout échange. Elles sont enfin considérées, le plus souvent, et pour toutes les raisons qui viennent d'être évoquées, comme incapables de produire de la culture scientifique.

Pourtant, à quelque niveau que l'on se place, l'Histoire des disciplines mathématiques contredit ou, à tout le moins, relativise fortement ces idées reçues. Et cela est encore plus vrai pour la période qui s'étend entre le VIII^{e} et le XV^{e} siècle, c'est-à-dire ce qu'il est convenu d'appeler la « *phase arabe des mathématiques* », même si, au cours de cette phase, d'autres traditions scientifiques étaient actives : celles de la Chine, de l'Inde et de l'Europe.

C'est cette réalité, rapportée partiellement par les sources anciennes, aujourd'hui accessibles, qui nous permettent d'abord d'affirmer l'existence, à toutes les époques, du développement des sciences en pays d'islam, d'échanges interculturels favorisés par les activités mathématiques elles-mêmes. Elles nous permettent aussi de décrire la forme de ces échanges, leurs contenus et les implications que cela a pu induire tant à l'intérieur de la tradition scientifique elle-même qu'au niveau des relations qui se sont tissées entre les différents groupes culturels de la cité islamique ou bien entre l'espace musulman pris dans son ensemble et les trois espaces « *mitoyens* » que nous avons déjà évoqués.

Dans cette courte présentation, nous allons distinguer quatre phases d'interculturalité correspondant aux quatre moments de l'activité mathématique entre le VIII^{e} et le XV^{e} siècle: La phase des savoir-faire locaux, celle de l'appropriation des héritages préislamiques (où la partie grecque est prépondérante), celle de la créativité dans les foyers scientifiques de l'empire musulman et celle de la diffusion, consentie ou non par ses détenteurs, du patrimoine ancien récupéré, assimilé puis enrichi par les apports nouveaux produits en pays d'islam.

Djebbar A. (2015) Les mathématiques arabes des VIII^{e}-XV^{e} siècles : passerelles entre les cultures. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Plénières, pp. 1-16.

II. LE CONTENU DES MATHEMATIQUES ARABES

Du point de vue de leur contenu, les activités mathématiques de l'empire musulman se présentent essentiellement sous trois aspects. Historiquement parlant, il y eut d'abord l'élaboration d'un savoir-faire en prise directe avec la vie au quotidien, c'est-à-dire avec les problèmes que l'on pourrait qualifier de transactionnels, au sens juridique du terme. La plupart du temps, ils impliquent plusieurs individus dans le cadre de leurs liens familiaux, comme la répartition des héritages, ou dans le cadre d'un contrat commercial ou administratif, comme les répartitions des bénéfices, le paiement des soldes et des salaires ou la détermination de l'assiette de l'impôt. Ce savoir-faire est généralement défini comme l'ensemble des objets, des outils, des procédures techniques, des méthodes et des résultats permettant de fournir des solutions acceptables à chaque type de situations que nous venons d'évoquer. A partir du IX^e^ siècle, cet ensemble de connaissances et de pratiques dispersées a commencé à alimenter des écrits mathématiques très variés : manuels de calcul digital et mental, épîtres sur la géométrie du mesurage, ouvrages sur les problèmes de transaction[1].

Avec le développement des différents aspects de la vie citadine et la multiplication des besoins qui en a découlé, cet ensemble de savoir-faire mathématiques va s'enrichir considérablement avec la constitution d'un savoir théorique. Ce nouveau corpus s'est d'abord nourri des contenus de sources écrites préislamiques (essentiellement grecques et indiennes) avant de se développer dans différentes directions : élaboration d'outils et de résultats originaux dans les disciplines anciennes (géométrie, théorie des nombres, astronomie, mécanique), constitutions de chapitres nouveaux (algèbre, trigonométrie, combinatoire, science du temps)[2].

Cette première rupture dans le processus de constitution du savoir mathématique a eu lieu avec la naissance puis le développement de recherches « *désintéressées* », c'est- à-dire sans sollicitations préalables, exprimées par des demandes de la société, et sans but «*utilitaire*», du moins immédiat, fixé par les promoteurs de ces recherches. Les auteurs de cette rupture, d'une grande portée historique et même culturelle, ont été les mathématiciens, appréhendés non plus comme individus isolés mais comme membres des premières communautés scientifiques. Dans ce nouveau contexte, l'activité mathématique, sans cesser d'être une « *prestation de service* » pour les deux catégories d'utilisateurs que nous avons évoqués, devient aussi une pratique au service de ses propres acteurs et promoteurs, en tant que groupes structurés. Les membres de cette communauté seront seuls habilités à définir les orientations de leurs recherches dans la mesure où ils se considèraient, à juste titre, les seuls aptes à se poser de nouvelles questions, à partir de ce qui est considéré par eux comme admis ou comme déjà établi.

Le résultat de cette rupture a été le développement discontinu, et selon deux démarches distinctes, d'un savoir savant supposant des structures d'enseignement, des supports matériels pour la préservation des acquis et des rapports différents entre les acteurs de cette activité, c'est-à-dire les apprenants et ceux qui détiennent le savoir. La première de ces démarches, qualifiée d'algorithmique, privilégie la procédure de calcul ou de résolution et sa vérification

---

[1] - A. Djebbar : *Les transactions dans les mathématiques arabes : classification, résolution et circulation*, Actes du Colloque International « Commerce et mathématiques du Moyen âge à la Renaissance, autour de la Méditerranée » (Beaumont de Lomagne, 13-16 mai 1999), Toulouse, Editions du C.I.H.S.O., 2001, pp. 327-344.

[2] - M.-Th. Debarnot : *Trigonométrie*. In R. Rashed (édit.) : *Histoire des sciences arabes*, Paris, Seuil, 1997, vol. 2, pp. 163-198 ; A. Djebbar : *L'algèbre arabe, genèse d'un art*, Paris, Vuibert-Adapt, 2005 ; A. Djebbar : *Islamic Combinatorics*. In R. Wilson & J.-J. Watkins (édit.) : *Combinatorics, Ancient and Modern*, Oxford, Oxford University Press, 2013, pp. 82-107.

par la technique du test. L'exemple le plus simple qui illustre cette démarche est celui de la multiplication avec la « *preuve par 9* » qui l'accompagne. Cette manière de faire des mathématiques est caractéristique des traditions savantes, de l'Egypte pharaonique, de la Mésopotamie, de l'Inde et de la Chine.

La seconde démarche, qualifiée d'hypothético déductive, est présente, sous certaines formes peu développées, dans les traditions que nous venons d'évoquer. Mais elle caractérise plutôt un vaste champ des pratiques mathématiques grecques, depuis le V^{e} siècle avant J. C. jusqu'aux dernières productions alexandrines puis byzantines des V^{e}-VI^{e} siècles.

Mais, si ces deux démarches se sont effectivement développées dans le cadre de cultures différentes, elles n'en sont pas restées prisonnières. Comme on le verra par la suite, le phénomène d'interculturalité a favorisé leur diffusion, leur juxtaposition puis leur synthèse harmonieuse dans une démarche unificatrice qui a caractérisé les pratiques mathématiques de la tradition scientifique arabe, héritière des prestigieuses traditions antérieures.

Il faut enfin remarquer, à propos de ce même savoir mathématique de type savant, que grâce à l'approfondissement de cette rupture dans la manière d'élaborer le savoir et grâce au développement parallèle d'autres activités intellectuelles, et plus particulièrement la philosophie, une troisième orientation a vu le jour, essentiellement dans l'aire culturelle grecque. Il s'agit de l'élaboration d'un ensemble de discours sur le contenu et la nature des pratiques mathématiques, c'est-à- dire sur leurs objets, leurs outils, leurs méthodes et sur la pertinence des éléments constitutifs de leurs fondements. Cet aspect est très important dans la mesure où il a évité d'enfermer les mathématiques dans une simple activité technique et il leur a procuré un discours sur elles-mêmes qui a éclairé leurs pratiques[3].

III. LA PHASE D'APPROPRIATION DES PRATIQUES MATHEMATIQUES LOCALES

Cette phase correspond à la période des conquêtes au nom de l'islam qui s'achèvent vers le milieu du VIII^{e} siècle, puis à celle de la consolidation du nouveau pouvoir au cours des premières décennies de la dynastie abbasside. Les pratiques mathématiques de cette époque ont lieu dans des environnements culturels encore fortement cloisonnés et elles s'expriment dans les différentes langues des populations du nouvel empire. Les deux disciplines les plus sollicités sont le calcul et la géométrie. La première est pratiquée, suivant les régions, sous forme de calcul indien, alphabétique, ou mental. La seconde se limite aux techniques d'arpentage, de découpage et de décoration.

En dehors du système décimal, dont l'origine est clairement identifiée, les autres techniques ne sont rattachées, explicitement, à aucune des traditions mathématiques antérieures à l'islam. Elles appartiennent donc à un fond commun qui s'est probablement constitué, au cours des siècles, comme savoir-faire produits dans différentes aires culturelles, avant de « *migrer* » d'une aire à l'autre. La plus connue de ces « *migrations* » est celle du calcul indien, apparu au VI^{e} siècle, au plus tard, et dont la présence est attestée au Proche Orient au VII^{e} siècle, comme le confirme le précieux témoignage du savant syriaque Sévère Sebokht (m. 667)[4].

L'interculturalité, au cours de cette première phase des pratiques mathématiques en pays d'islam, se situe, en particulier, au niveau de l'appropriation, à travers l'arabe (qui n'avait

---

[3] - M. Caveing : *La figure et le nombre, Recherches sur les premières mathématiques des Grecs*, Lille, Editions du Septentrion, 1997.
[4] - F. Nau : Notes d'astronomie syrienne, *Journal Asiatique*, Série 10, t. 16 (1910), p. 225.

encore aucune tradition scientifique), d'un savoir-faire produit en grande partie dans d'autres aires culturelles et qui va conserver des traces de ses origines dans des termes techniques ou dans des procédures de calcul. Ce sera le cas, par exemple, lorsque certains mots désignant des objets géométriques ne trouveront pas d'équivalents en arabe. Ils seront conservés tels quels, mais dans une transcription approximative[5]. On observera ce même phénomène quelques siècles plus tard, lorsque les traducteurs européens seront amenés à rendre en latin des concepts nouveaux découverts pour la première fois dans des textes scientifiques arabes. Ce sera aussi le cas de certaines techniques qui circuleront avec leurs «*marques*» culturelles, comme ce fut le cas pour le procédé persan utilisé pour la détermination des gains et des pertes à l'issue d'une transaction[6].

IV. LA PHASE D'APPROPRIATION DES MATHEMATIQUES SAVANTES

Cette phase, qui a duré plus d'un siècle et demi, a connu une première impulsion officielle à la fin du VIII[e] siècle lorsque le calife al-Mansûr (754-775) a pris la décision de financer la traduction d'un ouvrage astronomique écrit en sanskrit. Il est intéressant de constater que ce premier acte, hautement symbolique, est toujours présenté dans son contexte interculturel qui est l'arrivée, à Bagdad, nouvelle capitale de l'empire, d'une délégation indienne venue rendre hommage au détenteur du nouveau pouvoir et lui offrir des présents exprimant la créativité scientifique et culturelle de l'Inde.

Il est également bien connu qu'à partir de ce fait avéré, et dans le but de magnifier la dynastie abbasside à travers certains de ses représentants, d'autres faits, en partie imaginaires ceux-là, ont été « *fabriqués* » par certains membres de l'élite bagdadienne pour promouvoir l'interculturalité et son rôle dans l'appropriation des sciences « *étrangères* ». A titre d'exemple, on peut évoquer ici le fameux rêve au cours duquel le calife al-Ma'mûn (813-833) aurait eu, au cours d'un rêve, un échange avec Aristote (m. 322 av. J.C.) sur la notion de « *bien* ». A l'issue de cet échange ésotérique, le calife aurait pris la décision de financer toute action permettant de récupérer le savoir savant grec en vue de le redynamiser dans le contexte culturel arabe de l'empire musulman[7]. Et, de fait, on assiste à partir de la fin du VIII[e] siècle, à une dynamique nouvelle au cours de laquelle, transcendant les conflits latents, les obstacles culturels et linguistiques, des citoyens de toute confession et de toute origine culturelle se sont transformés en passeurs de savoirs et, en particulier, de savoirs mathématiques.

Sur le plan des faits, et en nous limitant aux mathématiques, il est bon de rappeler que, à quelques exceptions près, tous les écrits mathématiques grecques accessibles ont été traduits : Les *Eléments* et les *Données* d'Euclide (III[e] s. av. J.C.), les *Coniques* d'Apollonius (III[e] s. av. J.C.), la *Mesure du cercle* et la *Sphère et le cylindre* d'Archimède (m. 212 av. J.C.), les *Arithmétiques* de Diophante (II[e] s.) et l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque de Gérase (II[e] s.). A ce corpus imposant qui va puissamment nourrir les pratiques mathématiques arabes des IX[e]-XII[e] siècles, il faut ajouter quelques écrits apocryphes attribués abusivement à Pythagore et à Archimède.

Par ailleurs, il faut insister sur le fait que cette opération de transfert n'était pas exclusivement technique. Elle a mobilisé des centaines de personnes. D'abord celles qui étaient parties à la recherche des manuscrits, puis celles qui se sont chargées de traduire leurs contenus. Enfin, l'armée des copistes qui allaient permettre à ces travaux solitaires de circuler

---

5- C'est le cas de « *jayb* » (= sinus), transcription du mot sanskrit « *jiva* », ou de « *ibarbola* », transcription du mot grec « *hyperbole* ».

6 - Al-Baghdadi : *Al-Takmila fî l-hisâb* [La complétion en calcul], Koweit, Publications de l'Institut des Manuscrits Arabes, 1985, pp. 263-264.

7 - D. Gutas : *Pensée grecque, culture arabe*, Paris, Aubier, 1998, pp. 156-160.

dans le milieu des chercheurs puis dans celui des enseignants et de leurs étudiants. Même si les témoignages sur les aspects interculturels de ce phénomène sont rares, il n'est pas pensable que la mobilisation de toutes ces compétences aux profils culturels et confessionnels si différents, et au cours d'une période si longue (fin VIII^e^ s.- début X^e^ s.), n'a pas été l'occasion de contacts et d'échanges favorisant une meilleure connaissance mutuelle. A titre d'exemple, on peut évoquer le cas du musulman al-Hajjâj ibn Yûsuf (VIII^e^-IX^e^ s.). Il avait fait partie d'une délégation multiconfessionnelle envoyée par le calife al-Ma'mûn à Byzance pour en rapporter des ouvrages scientifiques et philosophiques[8]. Par la suite, il réalisera deux traduction en arabe des *Eléments* d'Euclide. Au début du IX^e^ siècle, et probablement en réponse à une demande de membres de la nouvelle communauté des mathématiciens, c'est au tour d'Ishâq Ibn Hunayn (m. 873), un chrétien maîtrisant mieux qu'al-Hajjâj la langue scientifique grecque, et au courant des évolutions récentes de la langue arabe, de proposer une nouvelle traduction des *Eléments*. C'est enfin Thâbit Ibn Qurra (m. 901), un païen d'origine sabéenne, féru de grec et expert dans les mathématiques de son temps, qui a réalisé une révision complète de la troisième traduction. Il est d'ailleurs intéressant de noter qu'aucune préférence culturelle ou confessionnelle n'est intervenue lorsqu'il a fallu choisir parmi les quatre versions des *Eléments* qui circulaient alors. Les spécialistes ont manifestement préféré, pour ses seules qualités scientifiques, la version d'Ishâq Ibn Hunayn révisée par Thâbit Ibn Qurra[9].

La traduction des *Coniques* d'Apollonius a également été l'occasion d'une collaboration qui a transcendé les particularismes culturels et confessionnels. Ce sont les trois frères Banû Mûsâ (IX^e^ s.), musulmans d'origine probablement persane par leur père mais un pur produit du milieu culturel arabe de Bagdad, qui ont financé la recherche, l'achat puis la traduction d'ouvrages grecs qui intéressaient directement leurs travaux en géométrie. S'étant procuré une copie très défectueuse des *Coniques* puis le précieux commentaire d'Eutocius (VI^e^ s.) sur cet ouvrage, ils ont d'abord recruté un premier traducteur, un musulman de Homs, Hilâl Ibn Abî Hilâl, qui s'est acquitté de la tâche pour seulement les quatre premiers chapitres. Puis, pour une raison qui nous est encore inconnue, ils ont demandé au sabéen Ibn Qurra d'achever le travail en traduisant les trois chapitres restants.

L'arrivée en force, à Bagdad, de ces mathématiques « *étrangères* » et des sciences grecques et indiennes d'une manière générale, puis la dynamique multiforme qui s'en est suivie, dans le cadre du processus de traduction et d'assimilation, ont eu deux conséquences au niveau de l'interculturalité. La première est la diffusion, bien au-delà des cercles scientifiques, d'une opinion très favorable aux sciences des « *Anciens* », c'est-à-dire celles qui avaient été produites dans les cultures païennes de l'Inde, de la Perse et, surtout, celles de la Grèce, avec son prolongement byzantin. Ce fait n'est pas anodin quand on sait que, dès le IX^e^ siècle puis aux XII^e^-XIII^e^ siècles, de fortes personnalités, appartenant à des courants théologiques dogmatiques, ont adopté une attitude d'enfermement culturel en s'opposant à l'enseignement de certaines sciences rationnelles parce qu'elles avaient été élaborées par des païens[10]. Mais plusieurs facteurs liés aux différents aspects du développement de la civilisation arabo-musulmane ont fini par avoir raison de la vision exclusivement religieuse de l'activité scientifique. Parmi ces facteurs, il y avait la dynamique des sciences, l'élaboration de solutions mathématiques aux trois grands problèmes de la pratique religieuse (la direction de la Mecque, les cinq moments des prières quotidiennes et la visibilité du croissant de lune pour l'établissement du calendrier), ainsi que les encouragements constants

8 - F. Sezgin : *Geschichte des Arabischen Schrifttums*, Leide, Brill, 1974, pp. 83-96.
9 - Th. L. Heath : *Euclid, The Thirteen Books of the Elements*, New York, Dover, 1956, vol. 1, pp. 75-90.
10 - I. Goldziher : Stellung der Alten Islamischen Orthodoxie zu den Antiken Wissenschaften, *Abhandlungen der Koniglisch Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin, n° 18 (1915), pp. 3-46.

de la plupart des califes et des détenteurs du pouvoir dans les différentes régions de l'empire[11].

La seconde conséquence touche les mathématiques elles-mêmes. Elaborées à partir d'apports provenant d'aires culturelles différentes, qui ont fini par se fondre dans une grande synthèse, et pratiquées dans les environnements cosmopolites des foyers scientifiques de l'empire, les mathématiques de cette époque n'avaient plus comme spécificité que la langue qui les exprimait. Pour le reste, on était devant une activité totalement profane à caractère universel, transcendant les particularismes culturels.

V. LA PHASE D'INNOVATION DES MATHEMATIQUES ARABES

Cette phase correspond à la période qui s'étend du début du IX^e siècle à la fin du XIV^e, avec des rythmes différents, d'un siècle à l'autre et d'une région à l'autre, dans la dynamique scientifique et dans sa créativité. Au cours de cette période, une communauté scientifique a rapidement émergé, avec un premier noyau à Bagdad dont le modèle a essaimé aux quatre coins de l'empire, au fur et à mesure que des métropoles régionales naissaient et se développaient. La caractéristique essentielle de ces communautés a été la multiculturalité au sens large, avec deux dénominateurs communs : L'activité scientifique partagée et la langue arabe qui exprimait son contenu.

C'est dans ce contexte, et avec ces données, que s'est développée une puissante tradition mathématique qui a transcendé les spécificités confessionnelles et culturelles. Parmi les éléments qui pourraient expliquer ce phénomène, il y a le caractère universel du contenu des mathématiques pratiquées, en particulier les méthodes et les démarches qui ont permis de les élaborer. Il y a aussi la collaboration de chercheurs de tous horizons culturels, à la fois dans l'enrichissement de son contenu, dans son enseignement et dans sa diffusion selon des formes d'expression qui ne laissaient que peu de place aux spécificités régionales (comme les graphies différentes des chiffres d'Orient et d'Occident pour exprimer un même système de numération hérité de l'Inde, ou la représentation symbolique des fractions qui n'était pas la même à Bagdad et à Cordoue, ou bien des différences terminologiques dans la dénomination de certaines figures géométriques que les usages locaux avaient consacrées).

Parmi les conséquences du développement des sciences, parallèlement à celui de la philosophie et des sciences humaines de l'époque, une sorte de besoin s'est manifesté dans les milieux cultivés pour une connaissance « *culturelle* » du contenu des savoirs en vogue, et en particulier des mathématiques. Il en a découlé la publication de trois catégories d'ouvrages : Des biobibliographies, des encyclopédies et des classifications des sciences. Le plus ancien ouvrage de la première catégorie n'est autre que « *Le Catalogue* » d'Ibn al-Nadîm (m. 995)[12]. Il est en fait le premier représentant d'une série d'ouvrages dont la rédaction s'est étalée du XI^e siècle jusqu'au XVIII^e, avec parfois des publications consacrées à une seule discipline, comme la médecine et ses chapitres annexes. Dans la seconde catégorie, il y a deux ouvrages du X^e siècle représentant deux orientations tout à fait complémentaires, l'une que l'on pourrait qualifier de « *culturelle* », au sens large, et l'autre plutôt « *philosophique* ». Le premier est le « *Livre des clés des sciences* » d'Abû Abdallah al-Khwârizmî. Il réserve aux mathématiques un chapitre où est exposé ce que devait retenir un homme cultivé du contenu d'une discipline réputée hermétique pour les non initiés. Il est intéressant de noter que, dans le même ouvrage,

[11] - D. A. King : *Astronomy in the Service of Islam*, Variorum, Ashgate Publishing, Aldershot, 1993.
[12] - Ibn al-Nadîm : *Al-Fihrist* [Le catalogue], G. Flügel (édit.), Leipzig, Verlag von Vogel, 1871-1872.

se côtoient des développements sur le Droit, la grammaire, la chimie, l'astronomie, l'astrologie et les sciences religieuses[13].

Le second ouvrage, intitulé « *Epîtres des Frères de la sincérité* », est une œuvre collective réalisée par les Ikhwân al-Safâ', un groupe d'intellectuels de Bagdad. C'est un pur produit de la culture du X^e^ siècle, imprégnée de conviction philosophique et de sensibilité chiite. Les mathématiques y ont une place de choix à la fois comme savoir et comme outils dans l'exposé argumenté des conceptions des auteurs[14].

Ces deux ouvrages, et d'autres moins connus, illustrent en fait une situation où la diffusion d'une certaine culture mathématique dans les milieux lettrés les plus variés ne pouvait que favoriser les échanges et les étendre à des domaines jugés souvent incompréhensibles à cause de la technicité ou le caractère ésotérique de leurs discours.

A dire vrai, le phénomène avait commencé à se développer dès la seconde moitié du IX^e^ siècle avec la publication d'un texte important appartenant à la catégorie que nous n'avons pas encore évoquée, celle des classifications des sciences. Il s'agit de « *L'Epître sur le recensement des sciences* » du grand philosophe al-Fârâbî (m. 950). Son contenu ne s'adressait manifestement pas aux praticiens des différentes disciplines qui y sont évoquées, mais plutôt à ce milieu multiculturel de Bagdad dont les membres étaient friands de débats de haut niveau.

Il nous est d'ailleurs parvenu quelques témoignages de ces échanges entre spécialistes de disciplines différentes ou entre défenseurs de conceptions du monde ou de visions culturelles éloignées les unes des autres. Un premier exemple est fourni par le biobibliographe du XIII^e^ siècle, Ibn Abî Usaybi^c^a (m. 1285), qui évoque un salon de Bagdad qui était tenu par une dame de la haute société de la ville et qui s'appelait Oum Ja^c^far. Cette dernière recevait, régulièrement, des mathématiciens et des médecins pour les faire débattre sur différents sujets[15]. Un autre exemple, plus significatif encore, nous est fourni par un texte du IX^e^ siècle qui évoque des débats théologiques entre des intellectuels de confessions différentes et auxquels a participé le grand mathématicien païen Thâbit Ibn Qurra. Au cours d'une discussion qui portait sur la nature finie ou infinie du nombre des âmes, différents arguments ont été exposés et discutés. Parmi ces arguments, il y avait une justification mathématique de l'infinitude du nombre des âmes. Mais pour que l'argumentation soit compatible avec l'infinitude de Dieu, son auteur a introduit une notion toute nouvelle pour l'époque : celle d'une relation d'ordre entre différents types d'infinis permettant de les comparer et de les ordonner en infinis « *plus petits* » ou « *plus grands* » que d'autres[16].

Il faut enfin évoquer l'un des résultats les plus importants de l'interculturalité qui a caractérisé les pratiques mathématiques et, d'une manière générale, toutes les activités scientifique. Il s'agit des discours des mathématiciens sur leur discipline et sur le métier de producteurs de savoirs. Il se dégage des rares textes qui nous sont parvenus une vision humaniste qui situe les savoirs mathématiques et leur élaboration dans un processus historique qui transcende les horizons d'une seule communauté, d'une seule culture ou même d'une seule civilisation. Parmi les prises de position les plus significatives et les plus emblématiques dans ce domaine, il y a celle d'al-Samaw'al (m. 1175), un bagdadien du XII^e^

---

13 - A. Al-Khwârizmî : *Kitâb mafâtîh al-^c^ulûm* [Livre des clés des sciences], G. Van Vloten (édit.), Leide, Brill, 1968.

14 - Ikhwân al-Safâ : *Rasa'il* [Epîtres], Beyrouth, Dar Sadir, 1957.

15 - Ibn Abî Usaybi^c^a : *^c^Uyûn al-anbâ' fî tabaqât al-atibbâ'* [Les sources de l'information sur les catégories de médecins], Beyrouth, Maktabat al-hayât, non datée, pp. 192-193.

16 - S. Pines : *Thabit Ibn Qurra's Conception of Number and Theory of the Mathematical Infinite*, Actes du XI^e^ Congrès International d'Histoire des Sciences, Varsovie, III, pp. 160-166.

siècle dont le père était un rabbin maghrébin de Fez qui avait émigré à Bagdad. Ce mathématicien est un parfait représentant du scientifique novateur puisqu'il a, à son actif, le développement d'une nouvelle théorie algébrique, celle des polynômes abstraits avec une extension à leur domaine de toutes les opérations arithmétiques classiques qui ne concernaient, auparavant, que les nombres entiers et les fractions. C'est également lui qui a élaboré, de la manière la plus développée, la première théorie des fractions décimales, qui sera redécouverte, quelques siècles plus tard, par le mathématicien belge Stevin (m. 1620). Mais la hauteur de vue de ce savant, acquise dans le quotidien de ses investigations et de ses interrogations, n'est pas étrangère à ses activités pluridisciplinaires et interculturelles. En effet, al-Samaw'al a exercé deux métiers, celui de mathématicien et celui de médecin, et il a adhéré, successivement, à deux religions : Le judaïsme et l'islam. A l'exception d'un ouvrage de circonstance, très polémique, publié après sa conversion et dans lequel il fustige son ancienne religion, ce sont des réflexions d'une grande ouverture d'esprit et une large vision de la pratique scientifique qu'il nous livre dans son évocation des sciences et de leur développement à travers l'Histoire. Dans un écrit peu connu, intitulé « *Livre sur les travers des astrologues* », et qui s'adressait manifestement à un lectorat plus large que celui des spécialistes de la communauté scientifique de son époque, il dit, en évoquant une opinion dominante en faveur des traditions mathématiques des civilisations antiques : « *La majorité [des gens] s'imagine que les Anciens ont produit tout ce qui était possible de connaître en science et qu'il n'est plus possible à personne de connaître autre chose que ce que connaissaient les Anciens (…). Cela vient soit du fait que, pour eux, ce qui peut être accessible en science rationnelle est fini et que les esprits ne peuvent en composer autre chose (…), soit du fait de leur croyance qu'il y avait chez les Anciens un degré d'infaillibilité et d'intelligence qui n'a pas d'équivalent chez ceux qui sont venus après eux.*

Pour ce qui est de l'infaillibilité, elle n'appartient à aucun être humain, hormis les prophètes. Quant aux sciences, si l'excès de dogmatisme et d'admiration ne les pousse pas à les considérer comme le résultat d'une révélation, les faits les obligent à admettre leur accroissement et leur clarification à chaque époque. Et c'est d'ailleurs ce dont témoignent le mouvement général des sciences et les biographies des mathématiciens »[17].

VI. LES MATHEMATIQUES AU CŒUR DES ECHANGES ENTRE LE IX^E ET LE XVIII^E SIECLES

C'est à la fin du X^e siècle que des phénomènes de circulation en persan et, surtout, en arabe, du savoir mathématique produit en pays d'islam sont observés dans quatre aires culturelles aux antipodes les unes des autres, celles de la Chine, de l'Inde, de l'Afrique subsaharienne et de l'Europe chrétienne. Mais, ces types de transferts n'ont eu ni la même nature ni la même durée ni, surtout, les mêmes effets sur les traditions scientifiques de chacune de ces grandes régions du monde.

VII. MATHEMATIQUES ET ASTRONOMIE PERSANES ET ARABES EN CHINE

A partir du IX^e siècle, les références à la Chine se multiplient dans les écrits arabes. Les premiers auteurs qui se sont intéressés à cette région sont d'abord des marchands qui y ont séjourné un certain temps[18]. Ils en ont rapporté quelques informations sur les technologies de ce pays et sur son savoir-faire en médecine ou en astronomie. Mais peu d'informations nous

---

[17] - Al-Samaw'al : *Livre sur le dévoilement des travers des astrologues*, Ms. Leiden University Library, n° Or. 98, f. 1b.

[18] - P. Charles-Dominique (trad.) : *Documents sur la Chine et sur l'Inde*, Paris, Gallimard, 1995, pp. 3-24.

sont parvenues au sujet de la circulation de certains habitants de cette région vers l'espace musulman. Les seuls témoignages ayant trait à la présence de chinois en pays d'islam concernent précisément le domaine des sciences : au IX^e^ siècle, un étudiant est signalé dans l'équipe du grand médecin Abû Bakr al-Râzî (m. 935)[19]. Au début du XIII^e^ siècle, l'astronome chinois Yelü Chucaï accompagne Gengis Khan (1197-1227) dans ses expéditions en territoires musulmans. Au cours de son séjour en Asie centrale, et plus précisément à Samarkand, il apprend le persan et a des échanges avec des astronomes musulmans de la ville. Par leur intermédiaire, il a accès à des ouvrages et à des tables astronomiques. Il s'initie à leurs contenus et il intègre, dans au moins deux de ses ouvrages, un certain nombre d'outils, comme l'utilisation de méthodes géométriques ou trigonométriques « *islamiques* » pour réaliser la conversion entre coordonnées écliptiques et coordonnées équatoriales, ou comme l'application de procédés permettant de déterminer les moments des éclipses[20]. Le troisième témoignage est également du XIII^e^ siècle : après la prise de Bagdad par les Mongols, en 1258, un important observatoire est construit à Maragha. Sa direction est confiée au grand savant persan Nasîr al-Dîn al-Tûsî (m. 1274). Ce dernier s'entoure d'un certain nombre d'astronomes très qualifiés parmi lesquels il y avait un chinois dénommé Fu Meng Chi (ou Fao Mun Ji)[21]. Mais ces trois exemples ne suffisent pas pour conjecturer l'existence d'une circulation régulière d'hommes de sciences chinois vers les foyers scientifiques des pays d'islam.

Dans l'autre sens, cette circulation est également attestée même si, là aussi, la rareté des informations ne permet pas de décrire, dans le détail, le contenu et les caractéristiques des échanges qui ont eu lieu. Les quelques informations qui concernent les IX^e^-XII^e^ siècles témoignent de la présence d'hommes de sciences musulmans en Chine. Le plus ancien témoignage concerne le IX^e^ siècle. Il est associé à l'avènement de la dynastie des Song (960-1127). Un astronome et astrologue musulman, originaire de Samarkand, nommé Ma Yize (X^e^ s.), aurait été recruté en 961 pour travailler au service de l'empereur de l'époque, Song Taysu (960-976). A la demande de ce dernier, il aurait réalisé un nouveau calendrier, intitulé *Yingtian li*, qui serait devenu, de 964 à 982, le calendrier officiel de la dynastie[22].

Le second moment favorable à la circulation d'écrits mathématiques arabes ou persans en Chine a commencé avec l'avènement de la dynastie mongole des Yuan (1279-1368). En 1271, à la demande du grand Khan Kubilaï (1260-1294), un bureau astronomique musulman est fondé à Pékin. Il est dirigé par Jamâl al-Dîn al-Zaydî, un scientifique de Boukhara. Une quarantaine de personnes travaillent dans cette nouvelle structure. Des tables et des instruments astronomiques y sont réalisés. Le bureau en question serait resté en activité jusqu'au XVII^e^ siècle. Parmi les travaux qui ont découlé de ces échanges, il y a le *Huihuili,* une traduction chinoise de tables astronomiques réalisées en persan vers 1383. Cet ouvrage aura une longue histoire en Chine, avec des prolongements en Corée et au Japon[23].

Quant aux livres de mathématiques consignés dans le catalogue de la bibliothèque de ce « *bureau musulman* », on relève, dans une transcription chinoise, un certain nombre de titres de manuels anonymes ou de traités connus. C'est le cas des *Eléments* d'Euclide, d'un « *Livre de calcul* », d'un « *Livre de problèmes mathématiques avec figures* », d'une « *Epître sur le*

---

[19] - Ibn al-Nadîm : *Al-Fihrist*, op. cit., pp. 16-17.

[20] - K. Yabuuti & B. van Dalen : Islamic Astronomy in China during the Yuan and Ming Dynasties, *Historia Scientiarum*, (1997), vol. 7-1.12 ; B. Van Dalen : *Islamic and Chinese Astronomy under the Mongols: a Little-Known Case of Transmission,* Dold-Samplonius Y, Dauben J W, Folkerts M et al. (édit.) : *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*, Stuttgart: Steiner, 2002, pp. 331-333.

[21] - A. Sayili : *The Observatory in Islam and its Place in the General History of the Observatory*, Ankara, Türk Tarih Kurumu Basimevi, 1960, pp. 205-207.

[22] - L. Xianglin : *Revue Bibliographique de Sinologie*, Paris, 1968-70, 14^e^ -15^e^ années, notice n° 18.

[23] - Y. Shi : The Korean Adaptation of the Chinese-Islamic Astronomical Tables, *Archive for History of Exact Sciences*, n° 57 (2003), pp. 25-60.

compas parfait », etc. Aucune copie chinoise de ces ouvrages ne nous est parvenue. Mais il est possible, à partir de quelques un des titres du catalogue de faire des conjectures sur la nature des mathématiques contenue dans ces ouvrages.

Quant à la connaissance précise de ce qui a pu circuler comme objets, outils et procédures mathématiques de l'espace musulman vers la Chine, seule l'analyse comparative nous permet aujourd'hui de donner quelques réponses ou d'avancer des hypothèses. C'est également la comparaison des contenus et la prise en compte de la chronologie des publications réalisées dans ces deux aires culturelles qui nous permettent de repérer une éventuelle circulation vers l'espace musulman d'une partie du savoir mathématique chinois.

Pour prendre l'exemple du calcul élémentaire, on constate que, dans les deux traditions, les étapes des procédures classiques de la multiplication et de la division sont les mêmes. Compte tenu de l'antériorité des pratiques chinoises dans ce domaine, on peut conjecturer une circulation des méthodes d'Est en Ouest. En ce qui concerne la multiplication par la « *méthode du grillage* » ou de la « *jalousie* », la similitude entre les deux traditions est frappante. Mais, cette fois, et compte tenu de l'Histoire de cette technique dans le cadre des pratiques calculatoires islamiques, il semble que la circulation se soit faite d'Ouest en Est.

Dans l'arithmétique des fractions, les notations chinoises sont semblables à celle que l'on trouve dans les écrits persans et dans ceux qui ont été produits en Orient. Elles sont différentes de celles qui sont apparues au XII^e siècle en Andalus avant de circuler au Maghreb. Ces dernières se caractérisent par l'utilisation de la « *barre de fraction* » et de symboles particuliers pour écrire différents types de fractions[24].

Dans le prolongement de ces procédures, il y a la méthode dite de « *double fausse position* » qui permet de résoudre, arithmétiquement des problèmes linéaires. La plus ancienne trace de ce procédé se trouve dans le célèbre traité chinois du I^e siècle, intitulé *Jiuzhang suanshu* [Neuf chapitres sur l'art du calcul]. Cette méthode est présente dans les ouvrages arabes d'Orient sous le nom de « *méthode des deux erreurs* ». Dans ceux du Maghreb, elle est appelée « *méthode des deux plateaux* »[25].

En théorie des nombres, il y a le fameux « *problème chinois* » qui consiste à déterminer un nombre dont la division par des nombres donnés fournit des restes donnés. La version la plus ancienne est traitée dans le *Sunzi suanjing* [Classique arithmétique de Sunzi] daté du IV^e ou du V^e siècle. Une formulation semblable a circulé en pays d'islam, d'abord comme un problème récréatif, dans le chapitre des « *nombres pensés* » qui s'est développé à Bagdad, à partir du IX^e siècle. Puis comme un sujet de recherche qui a abouti à des résultats théoriques nouveaux établis par Ibn al-Haytham (m. après 1040)[26].

Un troisième domaine où la circulation est attestée est celui des problèmes de type algébrique qui aboutissent aujourd'hui à des systèmes d'équations indéterminées. Dans les ouvrages arabes, comme celui d'Abû Kâmil (m. 930), ils portent le nom de « *Problèmes de volatiles* ». Les spécimens les plus anciens sont dans le *Zhang Qiujian suanjing* [Classique arithmétique de Zhang Qiujian], un ouvrage du V^e siècle. On en trouve aussi dans des écrits indiens publiés avant l'avènement de l'islam. C'est probablement par cette voie et par celle de la tradition scientifique persane qu'ils ont circulé vers l'Ouest.

---

[24] - A. Djebbar : *Le traitement des fractions dans la tradition mathématique arabe du Maghreb*, Actes du Colloque International sur l'Histoire des fractions (Paris, 30-31 Janvier 1987), P. Benoit, K. Chemla & J. Ritter (édit.) : *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Berlin, Birkhäuser Verlag, 1992, pp. 223-245.

[25] - Ibn al-Bannâ : *L'Abrégé des opérations du calcul*, M. Souissi (édit.), Tunis, 1969, pp. 87-90.

[26] - R. Rashed : *Entre arithmétique et algèbre*, Paris, Les Belles Lettres, 1984, pp. 227-243.

Le dernier domaine mathématique, qui permet des rapprochements entre les traditions de Chine et des pays d'islam, est celui des algorithmes d'extraction de la racine n$^{\text{ième}}$ d'un nombre. A titre d'exemple, on peut évoquer la méthode, dite « *de Hörner* » qui est présente dans des écrits chinois depuis la première moitié du XI^{e} siècle et que l'on retrouve, au XII^{e} siècle, chez al-Samaw'al, dans son ouvrage intitulé « *Le Qîwâmî en calcul* »[27].

VIII. MATHEMATIQUES ET ASTRONOMIE ARABES EN INDE

La seconde aire culturelle asiatique qui a été constamment en contact avec celle de l'empire musulman, par terre mais surtout par mer, est celle du sous-continent indien. L'apport de cette région à la tradition scientifique arabe dès sa naissance, en particulier en science du calcul et en trigonométrie, est bien connu. Mais, avec le développement des sciences arabes, à partir du IX^{e} siècle, c'est une circulation des savoirs en sens inverse qui a été observée. Ainsi, dès le X^{e} siècle, des éléments de l'astronomie mathématique arabe se retrouvent dans les écrits de Munjala. Aux XI^{e}-XII^{e} siècles, on constate le même phénomène chez Sripati et Bashkara II. Au XV^{e} siècle, des tables et des instruments astronomiques réalisés en pays d'islam se retrouvent en Inde. Cette circulation se poursuivra entre le XVI^{e} et le XVIII^{e} siècle. Pour cette dernière période, les informations sont plus précises puisque nous connaissons une partie des ouvrages qui ont été traduits en sanskrit. Certains sont d'origine grecque, comme l'*Almageste* de Ptolémée et les *Sphériques* de Théodose. D'autres appartiennent à la tradition scientifique des pays d'islam, comme le « *Livre du rappel* » de Nasîr al-Dîn al-Tûsî (m. 1274) et les *Table*s d'Ulug Beg (m. 1441)[28].

Mais pour tous les exemples qui viennent d'être donnés, il nous manque des informations sur la nature des contacts et des échanges qui ont permis cette diffusion du savoir pendant des siècles. En dehors des noms des hommes de sciences qui ont bénéficié de ces transferts, aucun autre acteur, parmi les simples vendeurs de livres, les copistes, les traducteurs, n'est mentionné par les auteurs indiens. Du côté musulman, nous disposons d'un seul témoignage, celui du grand mathématicien et astronomie des X^{e}-XI^{e} siècle al-Bîrûnî (m. 1051). En tant que membre de la cour du roi Mahmûd al-Ghaznawî (971- 1030) il a accompagné ce dernier dans son expédition militaire qui a abouti à la conquête du nord de l'Inde. Au cours de son séjour forcé dans cette région, il a appris le sanskrit et l'a suffisamment maîtrisé pour pouvoir accéder, directement, à toute une partie du savoir indien qui n'avait pas été traduit aux VIII^{e}-XI^{e} siècles. Après cela, et dans une démarche totalement désintéressée, il a traduit de l'arabe au sanskrit, pour les scientifiques indiens, deux ouvrages majeurs de la science grecque, l'*Almageste* de Ptolémée et les *Eléments* d'Euclide.

IX. MATHEMATIQUES ET ASTRONOMIE ARABES EN AFRIQUE SUBSAHARIENNE

L'espace géographique qui nous intéresse ici correspond aujourd'hui à la zone subsaharienne de l'Afrique de l'Ouest. Nous savons que dès l'installation des premiers Etats musulman au Maghreb, d'anciennes routes commerciales aboutissant à cette région ont été réactivées et de nouvelles ont été ouvertes. Parmi ces dernières, il y a les itinéraires du pèlerinage annuel qui aboutissaient tous à Fustât la métropole de l'Egypte puis au Caire après sa fondation par les Fatimides (969-1171). C'est par ces axes qu'on circulé les premiers écrits arabes qui allaient

---

[27] - Op. cit., pp. 93-128.

[28] - D. Pingree : *History of Mathematical Astronomy in India*, In Ch. Gillispie (édit.) : *Dictionary of Scientific Biography*, New York, Scribner's Sons, vol. 15, suppl. 1, pp. 625-629.

diffuser la nouvelle religion. Dans une seconde phase, les autres productions, en particulier mathématiques, suivront les mêmes voies.

Parmi les foyers d'échanges qui vont connaître un certain développement dans cette région, à différentes époques de son Histoire, il y a les villes d'Awdaghost, de Tadmakka, de Kumbi Saleh, de Gao, de Walata, de Takrur et de Tombouctou. Au cours de la longue période qui s'étend de la fin du VIII^e^ siècle au milieu du XV^e^, Certains itinéraires ont fini par disparaître. D'autres ont résisté au temps et aux évènements. C'est le cas de la voie reliant Tombouctou à Kairouan et qui faisait sa jonction avec la route maghrébine du pèlerinage. Longtemps, elle est restée l'une des voies les plus fréquentées par les marchands et par les hommes de religion, de culture ou de science. Une seconde voie, plus directe, reliait Ghana à Fustât en passant par Agades et Gao. C'est cette route qu'a empruntée, pour aller à la Mecque, le fameux le roi Mansa Mûsâ du Mali (1307-1332)[29].

Parallèlement aux échanges commerciaux, les pratiques religieuses seront les premières activités qui favoriseront la circulation d'un savoir mathématique et astronomique. Les premiers ouvrages ont d'abord servi à la formation des enfants des commerçants originaires du Maghreb qui contrôlaient l'économie des grands carrefours caravaniers, comme Sijilmassa, Ghana, Gao et Takrur. Puis, avec l'islamisation des élites et de certains chefs politiques autochtones, l'arabisation va progresser et, avec elle, l'enseignement des éléments de base de la science du calcul et de l'astronomie. Malheureusement, nous n'avons pas d'informations sur le contexte social dans lequel ont eu lieu ces échanges. Il faudra attendre le XIV^e^ siècle pour que des témoignages écrits confirment la présence d'une communauté de lettrés et d'hommes de religion. Ce qui suppose aussi un enseignement ou une utilisation, au moins par une élite, d'un certain savoir mathématique indispensable aux pratiques cultuelles, aux transactions commerciales et à la répartition des héritages. Ces aspects sont confirmés par le grand voyageur Ibn Battûta (m. 1369) qui a séjourné dans la région vers le milieu du XIV^e^ siècle[30], et par le témoignage des biographes qui ont évoqué la grande quantité de livres achetés par le roi Mansa Mûsâ, à l'occasion de son séjour au Caire[31].

Pour la période postérieure au XVI^e^ siècle, les sources accessibles nous fournissent des informations sur deux hommes de sciences qui ont manifestement été formés, en arabe, dans des villes subsahariennes. Le niveau de ces deux scientifiques était suffisamment bon pour leur permettre de poursuivre leurs études au Caire, l'une des métropoles de l'islam qui était à l'avant-garde de l'enseignement scientifique. Le premier s'appelle Sa^c^îd al-Tinbuktî al-Ganawî. C'était un astronome qui a publié un ouvrage sur la science du temps, intitulé *Les phénomènes d'Amad à propos du commentaire sur 'la Brise parfumée'*[32]. Le second scientifique est Muhammad al-Katsinâwî (m. 1741). D'après le chroniqueur du Caire al-Jabartî (m. 1825), ce savant maîtrisait déjà, à son arrivée dans la capitale égyptienne, le contenu de plusieurs disciplines religieuses, littéraires et scientifiques. En mathématique, en plus de sa formation de base, il s'était perfectionné dans la science du calcul, la science du temps et la construction des carrés magiques[33]. Dans ce dernier domaine, il a publié un ouvrage intitulé « *Le livre de la splendeur des horizons et de la clarification de l'ambigüe et*

---

[29] - D. T. Niane : *Le Mali et la deuxième expansion manden.* In D. T. Niane (dir.) : *Histoire générale de l'Afrique, IV. L'Afrique du XII^e^ au XVI^e^ siècle*, Paris, Unesco-INA, 1985, pp. 141-196.
[30] - P. Charles-Dominique : *Voyageurs arabes*, Paris, Gallimard, 1995, p. 1030.
[31] - D. T. Niane : *Le Mali et la deuxième expansion manden*, op. cit., p. 145.
[32] - B. A. Rosenfeld & E. Ihsanoğlu : *Mathematicians, Astronomers & other Scholars of Islamic Civilisation and their works (7th-19th c.)*, Istanbul, I.R.C.I.C.A., 2003, p. 382.
[33] - Al-Jabartî : *^c^Ajâ'ib al-âthâr fî l-tarâjim wa l-akhbâr* [Les merveilles des vestiges sur les biographies et les chroniques], A. A. Al-Rahîm (édit.), Le Caire, Dâr al-kutub al-misriya, 1997, vol. 1, p. 271.

de l'hermétique dans la science des signes et des <nombres> harmonieux ». Il a également commenté l'ouvrage de l'un de ses contemporains, intitulé « *Le livre des perles et de la thériaque sur la science des <nombres> harmonieux* »[34].

X. LA CIRCULATION DES MATHEMATIQUES EN EUROPE

Malgré tous les éléments dont pouvait disposer un observateur musulman du XII^{e} siècle et qui pouvaient lui faire apparaître la Chine ou l'Inde comme des relais naturels aptes à recevoir l'héritage scientifique gréco-arabe, c'est l'Occident chrétien qui réunissait en fait les facteurs nécessaires à la réception de la science écrite en arabe et à sa fécondation dans un contexte nouveau.

Au niveau des faits, ce sont probablement des contacts commerciaux ou intercommunautaires qui ont permis la circulation des premiers savoirs mathématiques à l'occasion de transactions régulières ou par l'intermédiaire d'instruments astronomiques, comme l'astrolabe. Des traces écrites situent ces échanges au plus tard dans la seconde moitié du X^{e} siècle. Puis, il y eut l'épisode de Constantin l'Africain (XI^{e} s.) qui ne concerne que le transfert de textes médicaux arabes mais qui a préfiguré peut-être d'autres initiatives moins spectaculaires et qui ont concerné les savoirs mathématiques et astronomiques. En effet, ce personnage haut en couleur illustre bien, à travers sa vie et ses activités, ce profil d'intermédiaires et de passeurs actifs entre deux aires culturelles enfermées dans leurs certitudes idéologiques et s'étant déjà engagées, depuis quelques décennies, dans des affrontements violents[35].

Moins romantique mais aussi efficace, il y a tous ces praticiens de la science, de confession juive, qui ont fait de leur particularisme (un vécu linguistique, culturel et religieux dans le contexte arabe et musulman d'al-Andalus et du Maghreb) un formidable atout qui a transformé le discours mathématique de l'époque en un instrument de dialogue et d'échange d'une grande fécondité. Deux scientifiques des XI^{e}-XII^{e} siècles sont représentatifs de ce courant qui s'est prolongé jusqu'au XV^{e} siècle au hasard de la disponibilité des manuscrits. Le premier est Abraham Bar Hiya, citoyen de la ville de Saragosse, qui semble avoir exercé une fonction importante puisqu'il est surnommé *Savasorda*, transcription approximative de *Sâhib al-shurta* [Responsable de la police]. Il est l'auteur d'un manuel de géométrie pratique qui puise essentiellement dans la matière mathématique arabe d'al-Andalus. Le manuel ayant été rédigé en hébreu, il n'était donc pas destiné à ses coreligionnaires arabisés de la péninsule ibérique mais, plus vraisemblablement, à ceux du Sud de l'Europe. Il est à noter, chose encore rare à l'époque, que ce livre a bénéficié d'une traduction latine, intitulée *Liber Embadorum*[36].

Le second exemple illustre encore mieux le rôle de « *passeur* » de ces scientifiques que l'origine, la formation et le statut destinaient naturellement à devenir des hommes de dialogue et d'échange. Il s'agit d'Abraham Ibn Ezra qui a, non seulement publié des manuels semblables à celui de Bar Hiya, mais qui s'est déplacé dans différentes villes d'Europe pour les diffuser et pour faire connaître, directement certains aspects de la tradition mathématique d'al-Andalus[37].

---

[34] - Op. cit., vol. 1, p. 272-273.

[35] - D. Jacquart & F. Micheau : *La médecine arabe et l'Occident médiéval*, Paris, Maisonneuve & Larose, 1990, pp. 113-124.

[36] - Abraham Bar Hiya : *Llibre de geometria, Hibbur hameixihà uehatixbòret*, J. Millas Vallicrosa (trad.), Barcelone, Editorial Alpha, 1931.

[37] - T. Levy : Hebrew and Latin Versions of an Unknown Mathematical Text by Ibn Ezra, *Aleph*, 1 (2001), pp. 295-305 ; T. Levy & R. Burnett : Sefer ha-Middot : A Mid-Twelfth-Century Text on Arithmetic and Geometry Attributed to Abraham Ibn Ezra, *Aleph* 6 (2006), pp. 57-238.

C'est à la même époque que des « *passeurs* » de l'aire culturelle latine entrent en scène et initient une tradition qui a été peut-être plus importante que ne le révèlent les textes aujourd'hui accessibles. Deux profils concernent les activités mathématiques. Le premier est celui d'un mathématicien anonyme d'origine ibérique ou ayant vécu dans une des villes reconquises par les Castillans à la partir de la fin du XI^e^ siècle. Il était manifestement très versé dans les mathématiques pratiques en usage en Andalus et qu'il a probablement acquises en arabe. C'est en tout cas ce qui se dégage d'une lecture, même rapide, de son important ouvrage où l'influence arabe se voit déjà dans le titre, *Liber Mahameleth*, qui renvoie à un titre identique « *Livre des transactions* », déjà utilisé par les mathématiciens andalous du XI^e^ siècle, comme al-Zahrâwî et Ibn al-Samh. Le second exemple est encore plus significatif dans la mesure où on est en présence d'un habitant de Pise qui, par le hasard de la vie, se retrouve enfant dans la ville de Bejaïa, dans le Maghreb central, alors centre économique prospère et l'un des principaux foyers scientifiques de l'Occident musulman. Il s'agit du fameux Leonardo Pisano, connu également sous le nom de Fibonacci (m. après 1240). D'après son propre témoignage, il a eu sa première formation en mathématique auprès d'un marchand de Bejaïa avant de profiter de ses déplacements commerciaux en Egypte, en Syrie et à Byzance pour se perfectionner en algèbre et en géométrie. L'analyse comparative du contenu de certains de ses ouvrages, comme la *Practica Geometriae* et, surtout, le *Liber Abaci*, confirme leur lien étroit avec le contenu des deux traditions mathématiques arabes de l'Orient et de l'Occident musulman avec, parfois, des indices terminologiques renvoyant à l'une ou l'autre de ces deux traditions[38].

Le troisième et dernier aspect du phénomène de circulation des mathématiques d'une aire culturelle à une autre est plus important quantitativement et sa durée a été plus longue. Le mode opératoire qui le caractérise est également différent de ce que nous avons déjà décrit. Ici, il s'agit de personnes qui ne sont pas spécialement qualifiées en mathématique ou en une quelconque autre discipline scientifique. Leur premier objectif a été de s'initier à la langue arabe dans les seuls espaces chrétiens d'interculturalité et de relative convivialité de l'époque. Il s'agit de Palerme et Tolède qui avaient été reconquises respectivement par les Normands en 1072 et par les Castillans en 1085. Ces deux villes avaient été soustraites définitivement à la domination des pouvoirs musulmans mais elles avaient conservé, pendant de nombreuses décennies, la forte empreinte de la culture arabe et, surtout, la disponibilité de nombreux ouvrages scientifiques. Or ces ouvrages intéressaient au plus haut point tous ces jeunes qui, au XII^e^ siècle, s'étaient déplacés d'Angleterre, comme Adelard de Bath et Robert de Chester, d'Italie, comme Gérard de Crémone et Platon de Tivoli, de la Péninsule Ibérique, comme Jean de Séville et Hugo de Santalla, de Croatie même, comme Hermann de Carinthie.

On assiste alors à une intense activité de traduction où la part des mathématiques n'a pas été négligeable puisque, en plus des *Eléments* d'Euclide et des *Coniques* d'Apollonius, on a traduit, en latin et parfois en hébreu, des livres d'algèbre, comme *L'Abrégé* d'al-Khwârizmî (m. 850), le « *Livre sur la mesure des figures planes et sphériques* » des frères Banû Mûsâ, le « *Livre sur la figure sécante* » de Thâbit Ibn Qurra, le « *Livre de la démonstrations et du rappel* » d'Abû Bakr al-Hassâr (XII^e^ s.), etc.

Ce fut là un grand moment d'interculturalité parce que les nécessités de la traduction ont permis parfois des échanges directs à travers des travaux de groupes. En effet, le manque de maîtrise, par une même personne, des deux langues de la traduction a amené certains

[38] - A. Djebbar : *La circulation de l'algèbre arabe en Europe et son impact.* Actes du colloque international sur « *The Impact of Arabic Sources in Europe and Asia* » (Erlangen, 21-23 janvier 2014). In *Micrologus* XXIV, Florence, Sismel-Edizioni Galuzzo, 2016, pp., pp. 109-110.

traducteurs à s'orienter vers une solution originale : L'intervention d'une langue intermédiaire, le roman, comprise à la fois par le latiniste et l'arabisant.

Ce fut également le moment d'une interculturalité initiée et financée par des souverains chrétiens. C'est ainsi qu'au XII^e^ siècle, à Palerme, le roi Roger II de Sicile (1130-1154) met la géographie arabe au service de sa politique en sollicitant les services du meilleur spécialiste maghrébin en la matière, al-Idrîsî (m. 1165). Au XIII^e^ siècle, à Palerme encore, l'empereur Frédéric II (1194-1250), un monarque féru de science, participe lui-même à des échanges et à des dialogues interculturels. Il entretient des correspondances à contenu philosophique, avec le mystique maghrébin Ibn Sab^c^în (m. vers 1271), et scientifique avec le mathématicien oriental Ibn Yûnus (m. 1242). A la même époque, mais à Tolède cette fois, le roi de Castille Alphonse X le sage (1221-1284) crée une structure originale où des scientifiques de confessions différentes collaborent à la réalisation de tables astronomiques dans le prolongement des travaux des astronomes et des mathématiciens andalous de la période antérieure.

Le résultat de toutes ces initiatives, et de celles que la recherche révèlera peut-être un jour, a été la diffusion d'un savoir mathématique produit dans différents espaces culturels et qui est parvenu à l'Europe dans un discours scientifique profane et universel. Ce discours rigoureux et précis a été exprimé par une langue arabe qui s'était enrichie, au cours des siècles, d'un important lexique technique dont les traces sont encore visibles dans les mathématiques enseignées aujourd'hui, en Europe et ailleurs.

Parallèlement à la diffusion de savoirs, il y a eu aussi et surtout celle de méthodes et de démarches scientifiques non réductibles à telle ou telle spécificité culturelle même si, à l'origine, certaines étaient grecques, d'autres indiennes. La synthèse arabe des IX^e^-XI^e^ siècles avait fondu tous ces apports originaux dans une sorte de « *norme internationale* » que les scientifiques européens ont adoptée pour en faire un puissant outil d'investigation et de découverte dans les domaines déjà explorés par leurs prédécesseurs et dans d'autres qui étaient totalement nouveaux.

Il n'est donc pas étonnant que soient apparus ici où là, dans la communauté européenne du savoir, des opinions et des discours respectueux, parfois même très élogieux, sur la science qui avait été produite en pays d'islam et sur les acteurs de cette science dont les noms circulaient, dans leurs transcriptions latines, sur les couvertures des ouvrages traduits. Au XII^e^ siècle, Daniel de Morlay (m. 1210) écrivait, à propos de la science arabe : «*La passion de l'étude m'avait chassé d'Angleterre (...). Aussi comme de nos jours c'est à Tolède que l'enseignement des Arabes, qui consiste presque entièrement dans les arts du quadrivium, est dispensé aux foules, je me hâtai de m'y rendre pour y écouter les leçons des plus savants philosophes au monde*». A la même époque, Adelard de Bath (m. 1160), un traducteur éminent, répondait à un de ses détracteurs en ces termes : « *Moi, j'ai en effet appris de mes maîtres arabes à prendre la raison pour guide, toi tu te contentes de suivre en captif la chaîne d'une autorité affabulatrice* »[39].

On a même observé la diffusion de ces opinions, favorables aux scientifiques des pays d'islam, à travers des « *images d'Epinal* » destinées au grand public ou sur des couvertures de certains écrits scientifiques comme celle d'un ouvrage de 1647 qui traite de la Lune et sur laquelle on voit, sous forme d'hommage, mais hautement symbolique sur le plan de l'interculturalité, la juxtaposition délibérément anachronique de deux représentants éminents de deux traditions scientifiques : L'irakien du XI^e^ siècle al-Hasan Ibn al-Haytham, acteur principal, par ses découvertes et ses avancées théoriques, de la rénovation de l'optique

[39] - J. Le Goff : *Les intellectuels au Moyen Âge*, Paris, Seuil, 1985, p. 59.

géométrique, et l'italien Galilée (m. 1642), symbole du nouvel élan de la physique mathématique en Europe. L'auteur de cette illustration était en fait en harmonie, mais sans le savoir, avec ce que disait déjà, au XIIe siècle, le grand mathématicien al-Samaw'al à propos de la marche inexorable de la science qui puise dans l'universel des différentes cultures et qui fait fi de leurs particularismes lorsqu'ils deviennent un frein à la recherche de la vérité.

MATHÉMATIQUES EN MÉSOPOTAMIE: ÉTRANGES OU FAMILIÈRES?

Christine PROUST[*1]

Résumé – Les mathématiques de Mésopotamie sont les plus anciennes qui soient parvenues jusqu'à nous. Ces textes, écrits en écriture cunéiforme sur des tablettes d'argile, traitent d'objets mathématiques qui nous sont familiers, tels que des nombres, des unités de mesure, des aires, des volumes, des opérations arithmétiques, des problèmes linéaires et quadratiques, ou encore des algorithmes. Cependant, à y regarder de plus près, ces objets familiers se présentent dans les tablettes d'argile sous des aspects étranges. Au travers de quelques exemples simples, cette présentation montre le décalage, parfois subtil, entre les notions anciennes et modernes de nombre, de multiplication, de division et de démonstration.

Mots-clefs : Mésopotamie, mathématiques cunéiformes, notation sexagésimale positionnelle flottante, écoles de scribes, Nippur

Abstract – The oldest mathematical texts that are come down to us come from Mesopotamia. These texts, written in cuneiform script on clay tablets, exhibit mathematical objects such as numbers, measurement units, areas, volumes, linear and quadratic problems or algorithms, which seem to us very familiar. However, looking at the texts more closely, these familiar objects are featured in the clay tablets in strange ways. Through some simple examples, this presentation shows the shift, sometimes subtle, between ancient and modern notions of numbers, multiplication, division and demonstration.

Keywords: Mesopotamia, cuneiform mathematics, floating sexagesimal place value notation, scribal schools, Nippur

Les mathématiques de Mésopotamie sont les plus anciennes qui soient parvenues jusqu'à nous. Plus de 2000 tablettes d'argile à contenu mathématique, provenant d'Irak, de Syrie et d'Iran, ont été déchiffrées à ce jour. Quand le mathématicien Otto Neugebauer et l'assyriologue François Thureau-Dangin, les premiers déchiffreurs de ces mathématiques très anciennes, les ont fait connaître dans les années 1930, les débuts de l'histoire des mathématiques, qui, dans l'imaginaire de l'époque, commençaient avec Thalès, Pythagore et Euclide, reculaient dans le temps de plus de mille ans, et se déplaçaient dans l'espace de plus de mille kilomètres vers l'est.

[1] Je remercie chaleureusement les organisateurs du colloque « Espace Mathématique Francophone 2015 » de m'avoir offert l'occasion de présenter à Alger ces bribes de mathématiques étranges et familières, et les participants de les avoir accueillies avec bienveillance. Cet exposé est en partie basé sur des recherches menées dans le cadre du Projet SAW (dir. K. Chemla, ERC n. 269804, 7e Programme de l'*European Research Council* FP7/2007-2013). Les photos des tablettes dont il est question dans cette présentation sont presque toutes accessibles par la base de données internationale des sources cunéiformes, le *Cuneiform Digital Library Initiative* (cdli, http://cdli.ucla.edu/). Il sera systématiquement précisé le numéro de la tablette dans cette base de données et le lien vers sa fiche descriptive, qui fournit des informations historiques, archéologiques et muséographiques, ainsi que, souvent, des photos, une copie, la translitération et la traduction.

Proust C. (2015) Mathématiques en Mésopotamie: étranges ou familières? In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Plénières, pp. 17-39.

Ces pionniers avaient reconnu des objets mathématiques qui nous sont familiers, tels que des nombres, des unités de mesure, des aires, des volumes, des opérations arithmétiques, des problèmes linéaires et quadratiques, ou encore des algorithmes. Cependant, à y regarder de plus près, ces objets familiers se présentent dans les tablettes d'argile sous des aspects étranges. En effet, nous y rencontrons des nombres qui ne sont pas des quantités, des unités de mesure qui sont en même temps des nombres, des multiplications qui ont de multiples visages, des volumes qui se comptent en briques, des démonstrations que nous ne reconnaissons pas, et bien d'autres bizarreries. De plus, l'immense aire géographique du Proche Orient ancien, et le temps très long temps de son histoire, n'ont pas produit un savoir uniforme, mais une constellation de cultures locales. Cette diversité foisonnante contribue à brouiller encore un peu plus nos repères. Et pourtant, nous percevons ces mondes si lointains comme authentiquement mathématiques. Ils touchent notre sensibilité et ils nous semblent finalement très proches. Comment est-ce possible ? Les quelques exemples simples qui suivent montrent le décalage, parfois subtil, entre les notions anciennes et modernes de nombre, de multiplication, de division et de démonstration. Mais avant d'approcher de près ces exemples, jetons un bref regard sur le panorama.

I. MATHEMATIQUES EN MESOPOTAMIE

La Mésopotamie est le nom qui avait été donné par les Grecs à la grande plaine située entre le Tigre et l'Euphrate. La basse vallée de ces fleuves s'étend dans ce qui est aujourd'hui le sud de l'Irak, et une partie de la moyenne et haute vallée occupe le nord de l'Irak. L'ensemble des régions où ont été écrits des textes cunéiformes savants, notamment mathématiques, est plus vaste encore, et inclut l'est de la Syrie, le sud de la Turquie et l'Elam, une région située à l'ouest de l'Iran actuel.

Au début du XXe siècle, les paysages de la plaine mésopotamienne n'avaient guère changé depuis l'antiquité. Les éléments dominants y sont l'eau des grands fleuves, les roseaux, et l'argile, le matériau de base utilisé dans toutes sortes d'activités, en particulier les constructions, comme les fameuses tours à étage, ou « zigurrats » qui dominaient les grands temples. Ce sont les matériaux de base qui furent utilisés par les inventeurs de l'écriture, et par leurs lointains descendants qui écrivirent des textes mathématiques.

Le Proche Orient Ancien, c'est non seulement une aire géographique immense, mais c'est aussi plus de trois mille ans d'histoire, tout au moins si l'on considère que l'histoire commence avec l'écriture. En première approche, très grossière, les historiens distinguent trois grandes périodes : les quatrième et troisième millénaires, le deuxième millénaire, et le premier millénaire avant notre ère. Ce découpage, bien qu'il relève d'une part d'arbitraire, structure profondément le milieu des assyriologues, qui se partagent en spécialistes de ces trois « périodes ». Le dialogue entre ces trois groupes de spécialistes n'est pas toujours facile étant donnée l'énorme quantité de sources à traiter pour chacune d'entre elles, et la grande hétérogénéité des documentations concernées. Les deux grands repères chronologiques qui méritent d'être soulignés dans cette introduction sont la naissance de l'écriture, vers le milieu du quatrième millénaire avant notre ère, et le développement des écoles de scribes dans tout le Proche Orient Ancien, au début du deuxième millénaire avant notre ère. C'est de cette dernière période, appelée paléo-babylonienne (environ 2000-1600 avant notre ère[2]) qu'il est question dans cette conférence.

Les quelque 3500 ans de l'histoire du Proche Orient Ancien sont documentés par une abondance de sources écrites. Plus de 500 000 tablettes d'agile contenant des textes variés ont

[2] Dans la suite, toutes les dates sont avant notre ère.

été trouvées à ce jour. Mais cette documentation est très inégalement répartie : elle est riche pour certains contextes, pauvre ou absente pour d'autres. Par exemple, la fin du 3e millénaire est la plus documentée, avec plus de 100 000 tablettes contenant des documents administratifs. Le début du deuxième millénaire a fourni plus de 50 000 tablettes contenant des textes de toutes sortes, administratifs, économiques, politiques, littéraires, mathématiques, et bien d'autres. En contraste avec ces siècles prolifiques, la fin du 2e millénaire ne nous a livré que peu de sources écrites. Les tablettes les plus tardives, celles des derniers siècles avant notre ère, contiennent principalement des textes d'astronomie, alors que l'astronomie n'est pas documentée avant le premier millénaire. Concernant les mathématiques, les textes les plus anciens datent du milieu du 3e millénaire, et les plus récents de la fin du 1er millénaire, mais la répartition est, là encore, très inégale. L'immense majorité des textes connus datent de la période paléo-babylonienne, celle qui nous intéresse ici. Le diagramme ci-dessous (figure 1) illustre la très grande hétérogénéité des sources mathématiques.

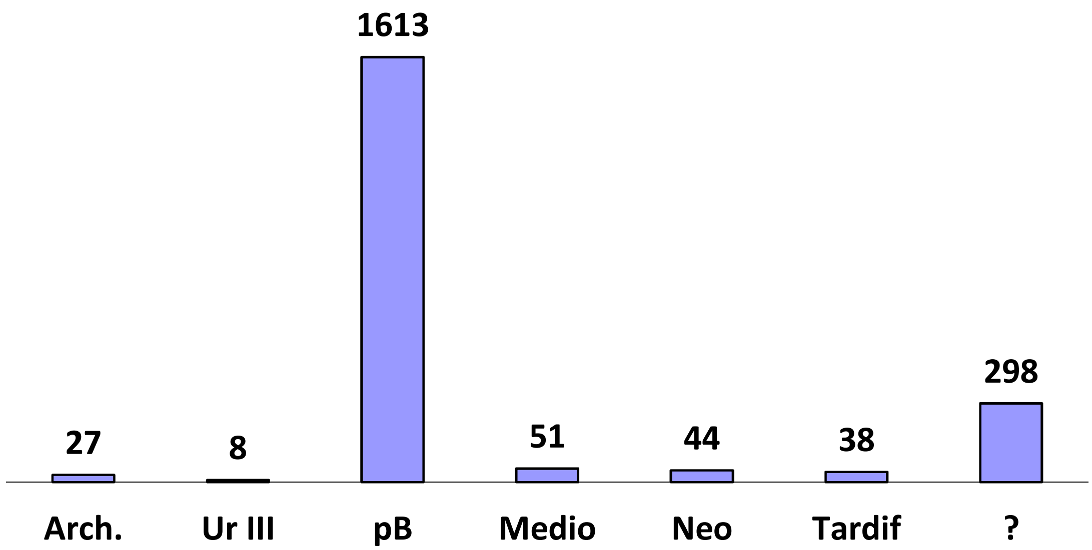


Figure 1. *– Répartition des tablettes mathématiques selon les périodes*

Données fournies par le *CDLI*, consulté en septembre 2015

Légende : Arch. = périodes archaïques (2500-2100) ; Ur III = 3e dynastie d'Ur (2100-2000) ; pB = période paléo-babylonienne (2000-1600) ; Medio = périodes médio-babylonienne et médio-assyrienne (1600-1100) ; Néo = périodes néo-babylonienne et néo-assyrienne (911-539) ; Tardif = périodes achéménide et hellénistique (547-63) ; ? = datation non identifiée par le cdli, en très grande majorité à rattacher à la période paléo-babylonienne).

II. LE CURRICULUM DANS LES ECOLES DE SCRIBES

Les écoles de scribes portent un nom en sumérien, ce sont les *Edubba*, ou, littéralement, les « maisons des tablettes ». Elles sont probablement apparues en Mésopotamie dès les débuts de l'écriture. Mais peu de documents relatifs à l'enseignement datant des 4e et 3e millénaires ne nous sont parvenus. En revanche, une abondante documentation nous renseigne sur des écoles ayant fonctionné à l'époque paléo-babylonienne. Ces écoles sont attestées dans tout l'Orient cunéiforme, non seulement en Mésopotamie du sud, par exemple à Ur, Uruk, Larsa et Nippur, mais aussi en Mésopotamie centrale, à Babylone, Kiš et Sippar, ou plus au nord dans la vallée des affluents du Tigre, par exemple à Ešnunna, ou encore dans la moyenne vallée de l'Euphrate à Mari, ainsi qu'en Syrie, en Iran, ou en Anatolie.

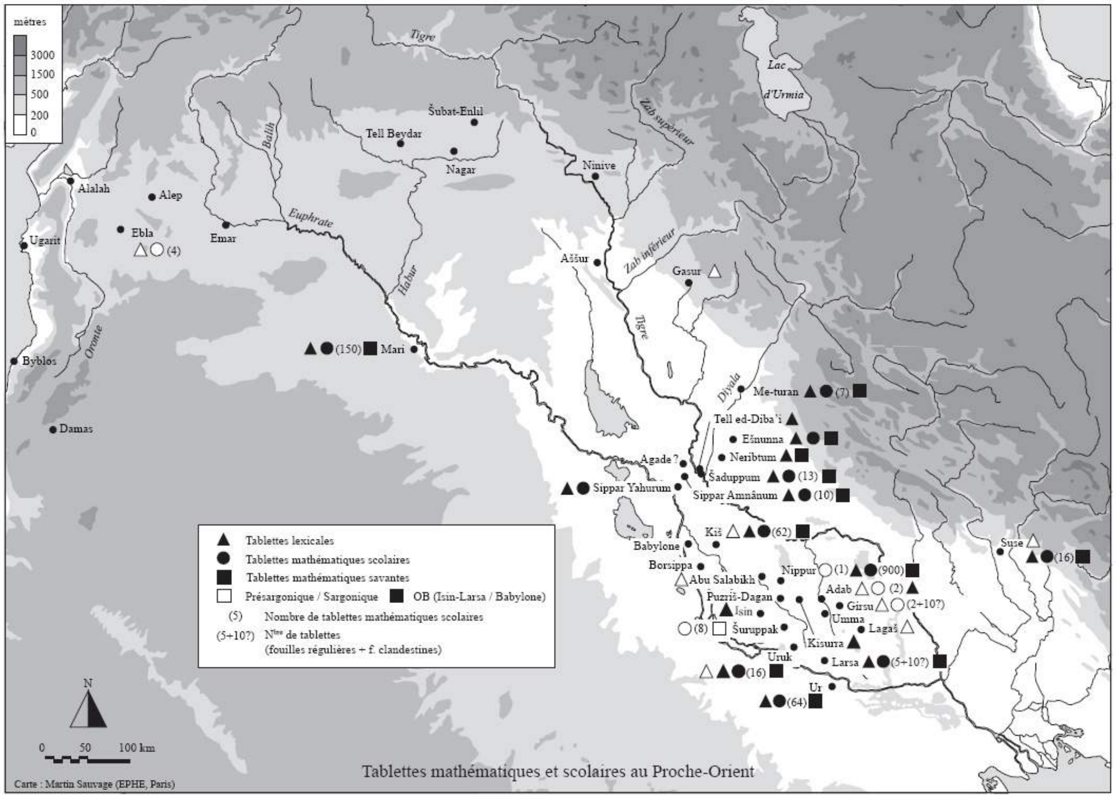


Figure 2. *– L'expansion des écoles de scribes à l'époque paléo-babylonienne (carte dressée par Martin Sauvage et publiée dans Proust 2007, p. 281)*

Les écoles les plus prestigieuses se situaient à Nippur, la grande capitale religieuse et culturelle de la Mésopotamie antique. Nippur était le lieu par excellence de la transmission de l'héritage culturel sumérien. On y a appris à parler le sumérien longtemps après que cette langue a disparu des usages courants au profit l'akkadien[3].

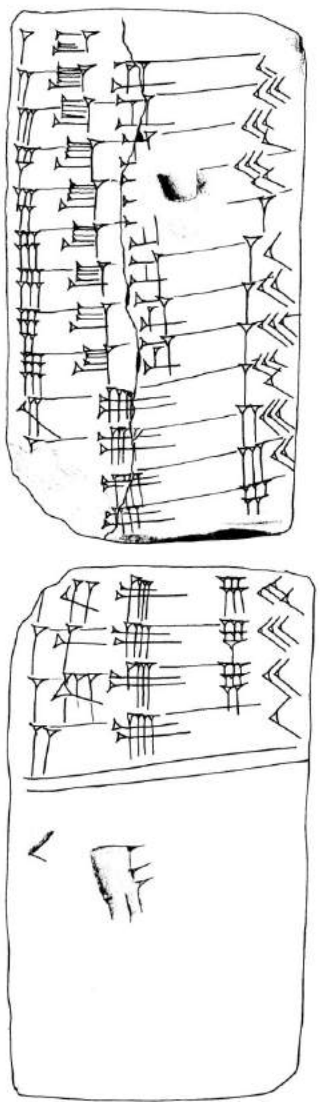
Les principales sources qui nous renseignent sur les écoles sont les exercices écrits par les écoliers eux-mêmes. Cette documentation a été étudiée, entre autres, par Niek Veldhuis et Eleanor Robson (Veldhuis 1997, Robson 2001). J'ai pour ma part étudié environ un millier de tablettes mathématiques conservées à Istanbul, Iéna, Chicago, et Philadelphie. L'analyse à la fois des textes et des tablettes qui les contiennent a permis de reconstituer avec une assez grande précision le curriculum dans les écoles de Nippur. On y enseignait essentiellement l'écriture, la langue sumérienne et les mathématiques. L'enseignement se déroulait en plusieurs phases, qu'on distingue très nettement par l'aspect physique et le contenu des tablettes scolaires. Dans un premier niveau, appelé « élémentaire » par les assyriologues, les jeunes scribes apprenaient de longues listes par cœur, aussi bien dans le domaine de l'écriture que des mathématiques. L'apprentissage de l'écriture commençait par des signes simples, puis des syllabaires, puis des listes de vocabulaire sumérien, puis des lis281tes de signes

[3] Le sumérien est une langue de type agglutinant, sans parenté avec une langue connue, et l'akkadien est une langue sémitique. Le lecteur intéressé par l'histoire du déchiffrement du sumérien et de l'akkadien, ainsi que des autres langues anciennes qui ont été transcrites en écriture cunéiforme dans l'antiquité, pourra consulter Lion and Michel 2007.

complexes. Dans un deuxième niveau, dit « intermédiaire », les élèves apprenaient la grammaire sumérienne au moyen d'extraits de « proverbes », et les bases des techniques de l'administration au moyen de formulaires type, les "modèles de contrats", ainsi que les mathématiques grâce à des exercices de calcul. Ensuite, commençait une formation avancée axée sur la littérature sumérienne et, sans doute pour une petite minorité, les mathématiques.

Dans le domaine des mathématiques, l'enseignement consistait à apprendre des listes interminables : il s'agissait de les assimiler et de savoir les restituer à l'écrit par cœur. Ces listes consistaient tout d'abord en des énumérations de mesures de capacité, poids, surface et longueur qui permettaient d'apprendre les systèmes d'unité de mesure, leur écriture, les facteurs qui définissent chaque unité par rapport à ses multiples et sous-multiples, et les systèmes numériques associés. Ces listes ont été baptisées "listes métrologiques" par les assyriologues. Ensuite, ou peut-être en même temps, les scribes devaient mémoriser des tables métrologiques, qui permettaient de transformer les différentes mesures en nombres sexagésimaux positionnels. Ces listes permettaient ainsi d'introduire la numération sexagésimale positionnelle. L'image de la figure 3 est une copie de table métrologique de mesure de longueur (1 doigt, 1 *šu-si* en sumérien, représente environ 1,5 cm[4]). Enfin, un ensemble de tables numériques comprenait des tables d'inverses, de multiplication, et parfois de carrés, de racines carrées et de racines cubiques.

[4] Dans la transcription qui accompagne la copie, j'ai choisi des notations qui me paraissent adaptées à un public scolaire : j'ai traduit en français le nom des unités de mesure (ce que je ne fais pas dans les articles de nature philologique), et j'ai séparé les positions sexagésimales des nombres sexagésimaux positionnels par le signe « : », qui évoque, utilement me semble-t-il, le système sexagésimal moderne (voir explications plus loin).



Face	
1 doigt	10
2 doigts	20
3 doigts	30
4 doigts	40
5 doigts	50
6 doigts	1
7 doigts	1:10
8 doigts	1:20
9 doigts	1:30
1/3 coudée	1:40
½ coudée	2:30
2/3 coudée	3:20
5/6 coudée	4:10
1 coudées	5
Revers	
1 1/3 coudée	6:40
1 ½ coudée	7:30
1 2/3 coudée	8:20
2 coudées	10

Figure 3. *– Table métrologique de mesures de longueur (tablette scolaire de Nippur, HS 241 http://www.cdli.ucla.edu/P388160, copie de l'auteur)*

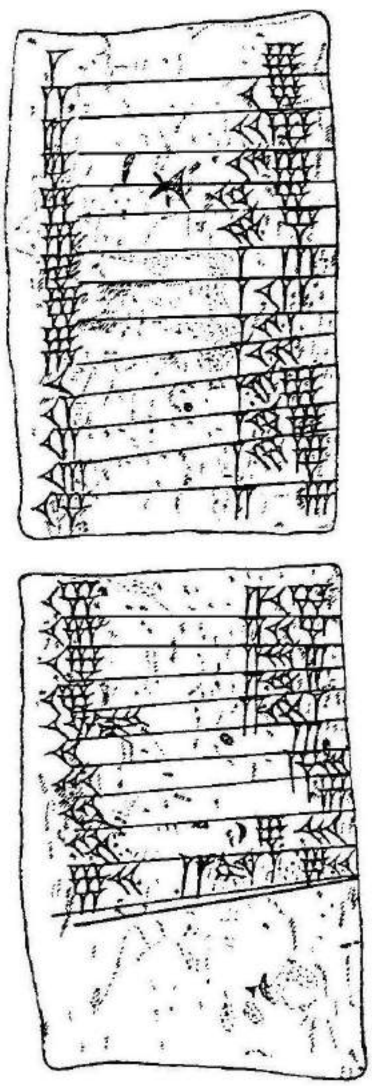
Dans un deuxième niveau, les jeunes scribes étaient entraînés au calcul numérique au travers d'un ensemble d'exercices assez stéréotypés portant sur la multiplication, l'inversion et le calcul des aires de carrés. Des exercices de géométrie plus variés, par exemple calculer l'aire d'un disque, sont attestés dans d'autres sites que Nippur. A un niveau plus avancé, les exercices portaient sur des problèmes linéaires et quadratiques. Parmi les problèmes de géométrie courants, citons les problèmes de partage du trapèze, probablement inspirés des pratiques d'arpentage et d'héritage (Proust 2012b).

Sur ce socle déjà riche, des groupes érudits, sans doute dans certains cas les maîtres des écoles de scribes, ont développé des traditions mathématiques élaborées. Aussi variées et originales soient-elles, toutes ces traditions s'appuyaient sur les notions fondamentales concernant les nombres et les quantités qui étaient enseignées dans les écoles de scribes.

En examinant les textes scolaires de plus près, nous allons découvrir le visage étrange des nombres positionnels, des multiplications, des divisions, des aires et des preuves.

III. NOTION DE NOMBRE: LA NOTATION SEXAGESIMALE POSITIONNELLE

Ce qui fait la spécificité des textes mathématiques cunéiformes est l'usage d'une notation dite sexagésimale positionnelle. Pour faire comprendre cette notation à des auditeurs modernes, la meilleure méthode est de regarder les exercices scolaires qui étaient destinés à la faire comprendre aux écoliers de l'époque paléo-babylonienne. Regardons par exemple cette l'exercice scolaire de la figure 4.



Face		
	1	9
	2	18
	3	27
	4	36
	5	45
	6	54
	7	1:3
	8	1:12
	9	1:21
	10	1:30
	11	1:39
	12	1:48
	13	1:57
	14	2:6
Revers		
	15	2:15
	16	2:24
	17	2:33
	18	2:42
	20-1	2:51
	20	3
	30	4:30
	40	6
	50	7:30
	8:20	a-ra$_2$ 1 8:20

Figure 4. *– table de multiplication par 9 (tablette scolaire de Nippur, (HS 217a http://www.cdli.ucla.edu/P254585, copie Hilprecht 1906 pl. 7)*

Sur chaque face, on distingue deux colonnes. En observant la colonne de gauche, on voit un clou, deux clous, …, neuf clous, un chevron, un chevron et un clou, etc. Il est facile de deviner que le clou vertical (𒁹) représente le nombre un, et que le chevron (𒌋) représente le nombre dix. On remarque que dans chaque chiffre, les clous sont écrits par rangées de trois, ce qui facilitait une lecture rapide. Il en est de même des chevrons. On peut maintenant déchiffrer la colonne de droite. En face de 1, on lit 9, en face de 2, on lit 18, en face de 3, on lit 27, etc. Il s'agit donc d'une table de multiplication par 9. Continuons la lecture. En face de 7, on attend le nombre 63. Cependant, à la place de 63, on lit un nombre formé d'un clou, et plus loin, de trois clous (𒁹 𒐈). On a compris que le “60” de 63 est représenté par un clou en deuxième position, exactement de la même façon que sur un compteur de temps ; par exemple pour un lecteur de vidéo, 63 secondes est représenté par 1:3, ce qui signifie, une minute et 3 secondes (ou 1 heure et 3 minutes selon le contexte). La notation est donc sexagésimale positionnelle.

L'analogie avec notre système de compte des temps et des angles saute aux yeux. Cependant, il y a des différences avec la notation sexagésimale positionnelle moderne. J'y reviendrai. Pour le moment, continuons la lecture de notre table de 9. En face de 20, nous attendons 9 fois 20, c'est-à-dire 180, c'est-à-dire 3×60, que nous écririons 3:0 en notation moderne. En fait, nous voyons seulement trois clous (𒐈). Cela signifie que 3×60 est noté avec exactement le même signe que le “3” de la troisième ligne. Les 3 clous (𒐈) dénotent aussi bien le nombre 3 que le produit 3×60. D'une façon générale, dans les tables de multiplication, et la plupart du temps dans les textes mathématiques, un clou représente aussi bien une unité, qu'une soixantaine, ou un soixantième, ou n'importe quelle puissance de soixante, d'exposant entier positif ou négatif. Autrement dit, la notation sexagésimale positionnelle des textes cunéiformes est une notation flottante.

La notation sexagésimale positionnelle nous est familière puisque nous l'utilisons quotidiennement pour exprimer des temps, des durées, ou des géo-localisations (voir des exemples figure 5). C'est du reste de l'antiquité mésopotamienne que nous avons hérité de ce système, qui nous a été transmis principalement par les traités d'astronomie. Mais les systèmes ancien et moderne sont-ils identiques? Dans les deux cas, la base est soixante et le principe est positionnel. Cependant, il y a des différences.

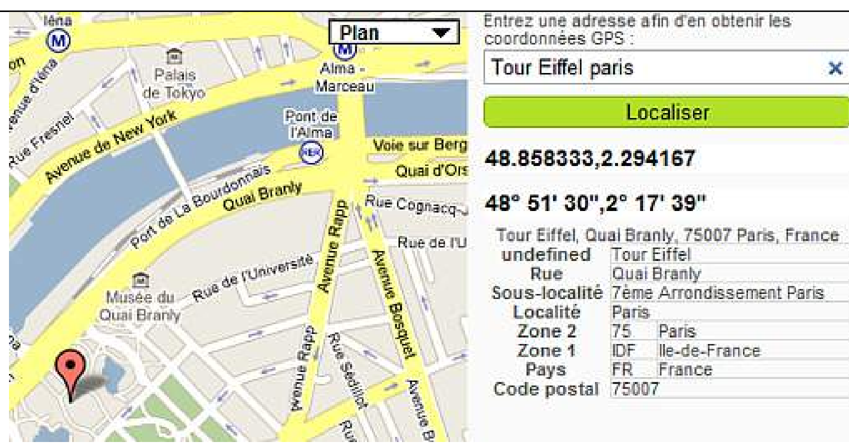


Figure 5 *– trois exemples de notation sexagésimale positionnelle moderne : localisation GPS, chronomètre et compteur de vidéo*

1ère différence: Le nombre de positions du système moderne est limité à trois (heure ou degré, minute, seconde). Au delà, le système décimal prend le relai (on dira par exemple 200 heures, ou 2/10 de seconde). Dans le système ancien, le nombre de positions est potentiellement illimité et de fait, dans les textes cunéiformes, il peut atteindre 9 positions à l'époque paléo-babylonienne, et bien plus à l'époque hellénistique.

2e différence: La notation moderne permet de savoir si un chiffre donné représente des heures, des minutes ou des secondes, et ce par divers moyens. Par exemple, les signes pour degré, minute et seconde apparaissent sur les localisations du GPS; les secondes sont écrites en plus petit sur le chronomètre ou la montre à écran; ou des zéro indiquent les positions initiales manquantes sur les compteurs vidéo. La notation moderne est absolue, alors que la notation ancienne est flottante.

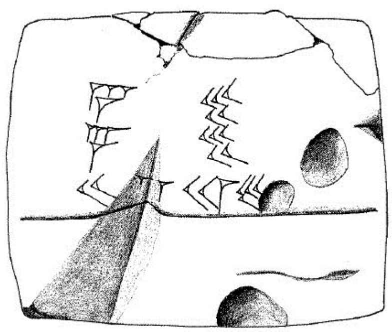
3e différence: Les seules opérations effectuées sur les nombres sexagésimaux modernes sont l'addition et la soustraction (la multiplication par un entier, généralement petit, est une sorte d'addition itérée). Il ne nous viendrait pas à l'idée de multiplier, et encore moins de diviser, un nombre sexagésimal par un autre. A l'inverse, les anciens scribes utilisaient les nombres sexagésimaux positionnels principalement pour effectuer des multiplications et des divisions.

Ces différences ne sont pas anodines. Elles reflètent de profondes différences de nature entre les nombres sexagésimaux modernes et anciens. Les premiers sont utilisés pour exprimer des quantités (une durée, par exemple) ou des positions (un instant, ou une localisation). Les seconds, on va le voir, représentaient non pas des quantités, mais un instrument de calcul. A l'époque paléo babylonienne, la notation sexagésimale positionnelle n'était jamais utilisée pour exprimer des quantités. A l'époque hellénistique, en revanche, on l'utilise en astronomie pour représenter des positions dans le ciel.

Les nombres sexagésimaux anciens ne sont pas moins "mathématiques" que les nombres modernes, mais ils sont différents, et fonctionnent dans des univers différents. Il est important de garder à l'esprit ces différences entre les nombres sexagésimaux anciens et modernes lorsqu'on entreprend d’utiliser les mathématiques cunéiformes dans l’enseignement. En effet, gommer ces différences ne rend pas la tâche plus facile et vide les textes anciens d’une part de leur contenu, et donc d’une part de leur intérêt.

IV. NOTION DE MULTIPLICATION

Observons cet exercice (figure 6). Visiblement, il s'agit d'effectuer une multiplication. En effet, on y lit deux nombres écrits l'un sous l'autre, 4:50 et 4:50. Le troisième nombre qui apparaît sous les deux premiers est 23:21:40, leur produit (pour le vérifier, le lecteur pourra effectuer cette opération au moyen de la calculatrice mésopotamienne MesoCalc développée par Baptiste Mélès[5]).



71 (HS 232)

```
4   50
4   50
-----------------------
23      21   40
```

***Figure 6** – multiplication (tablette scolaire de Nippur, HS 232 http://www.cdli.ucla.edu/P368277 copie Proust 2008 pl. 42)*

Deux détails attirent l'attention. Tout d'abord, le troisième nombre n'est pas disposé par rapport aux deux facteurs comme nous le ferions si nous effectuions la multiplication à la main sur papier, par exemple comme ceci :

```
     4       50
     4       50
-----------------------
     41      40
3    20
3    20
16
-----------------------
23   21      40
```

Ensuite, le détail du calcul n'apparaît pas. Seul le résultat est noté sur la tablette. Ces observations, ainsi que d'autres indices provenant d'autres textes, ont conduit certains historiens à penser que les opérations n'étaient pas effectuées par écrit, mais étaient exécutées sur un instrument de calcul (Proust 2000, Høyrup 2002). La forme des chiffres et la découverte de jetons de forme similaire aux signes cunéiformes suggèrent que cet instrument

[5]Mélès software created in 2013.

de calcul était basé sur la manipulation de jetons d'argile. Nous avons là un indice du fait que la notation sexagésimale positionnelle cunéiforme représente un instrument de calcul.

Il est possible, et assez amusant, d'essayer de reconstituer un tel instrument. Cette reconstitution a fait l'objet de recherches dans le groupe de recherche SAW et d'expériences d'activités en classe. Par exemple, imaginons un abaque constitué de colonnes et de jetons en forme de bâton pour les unités, et de billes pour les dizaines. La disposition des jetons sur l'abaque ne nécessite rien d'autre que l'application de la règle d'échange 60 pour 1, qui en fait est décomposée en 10 bâtons pour 1 bille, puis de 6 billes pour 1 bâton (figure 7a). On pose le nombre à multiplier, le multiplicande, 4:50, sur l'abaque, et on multiplie chaque chiffre successivement par les chiffres du multiplicateur 4:50, c'est-à-dire par 50, puis par 4 (en décalant les produits partiels d'un rang sexagésimal).

On pose 4 :50, le nombre à multiplier.

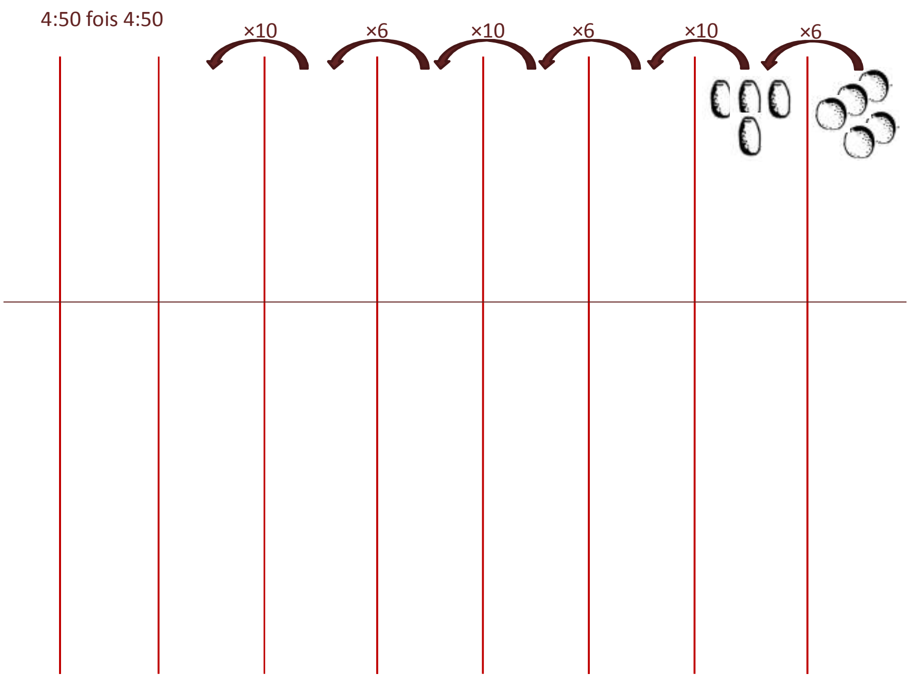
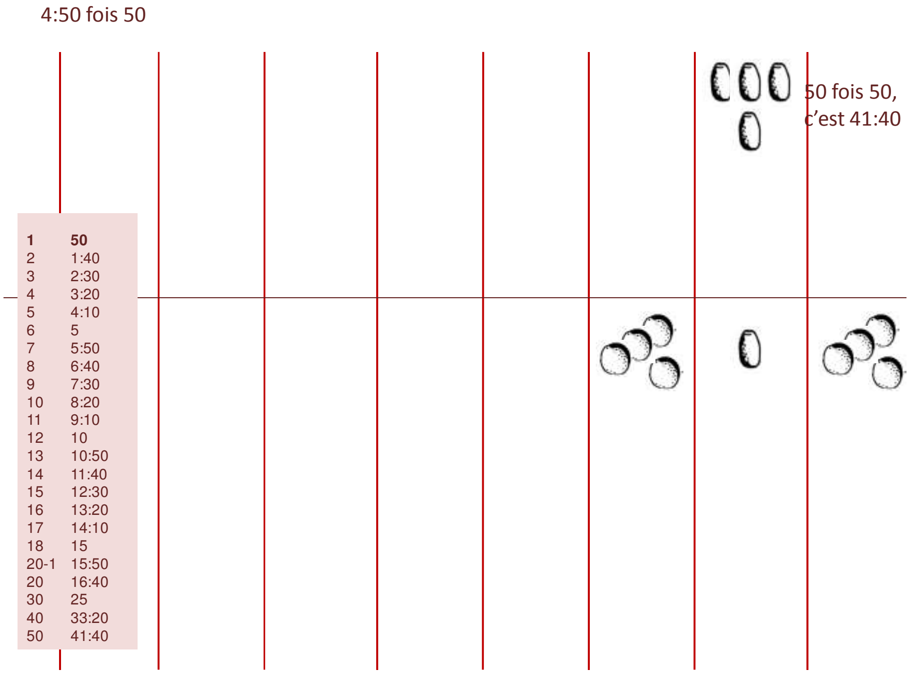


Figure 7a

On multiplie par 50, donc on utilise la table de multiplication par 50. On calcule les produits partiels et on les place sur l'abaque au fur et à mesure.



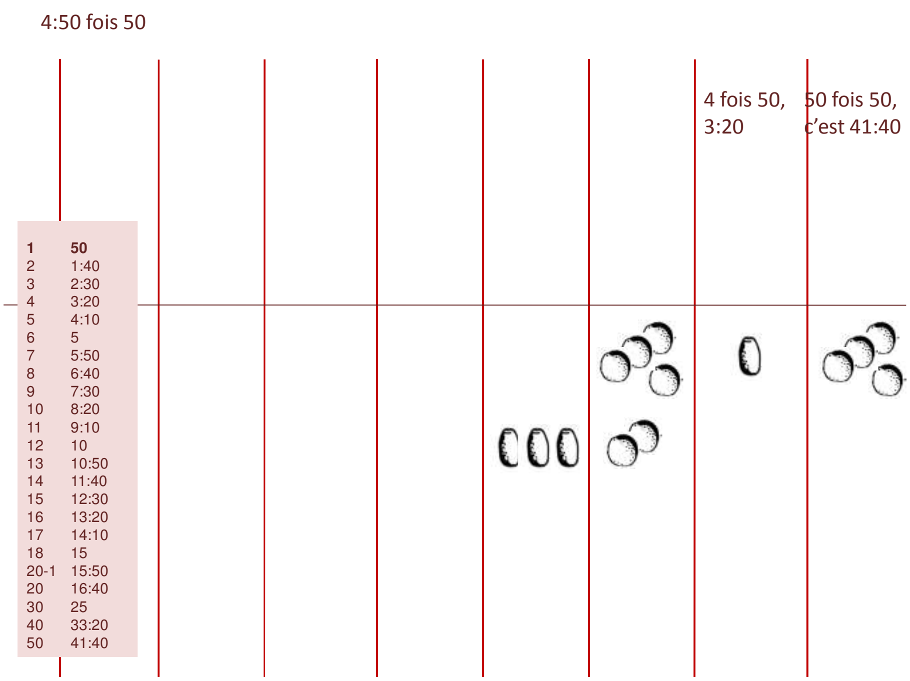


Figure 7b

On applique les règles d'échange.

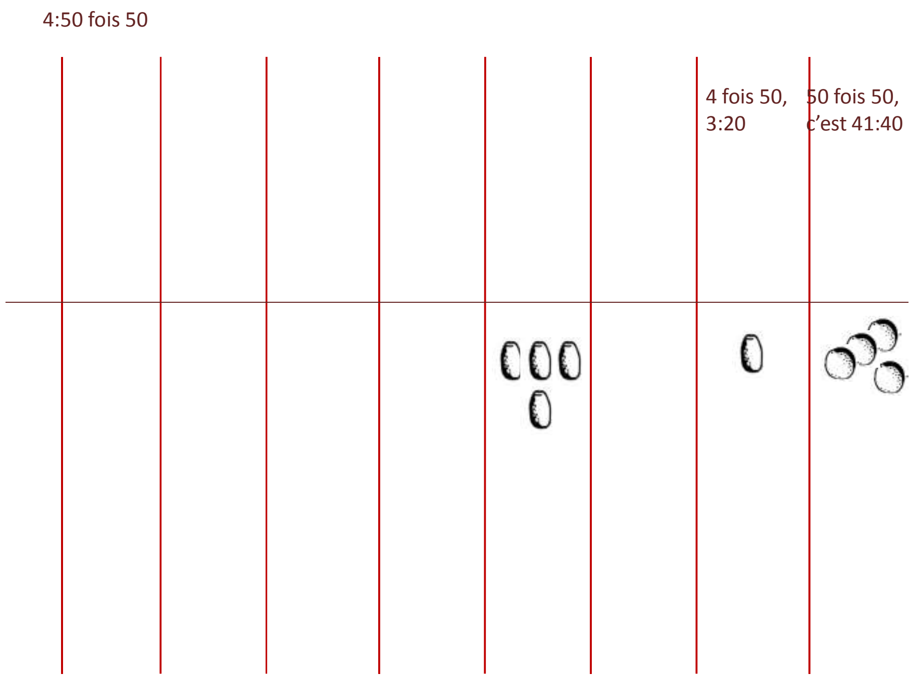


Figure 7c

On multiplie par 4 (le décalage d'une position sexagésimale peut être représenté par un décalage du nombre à multiplier).

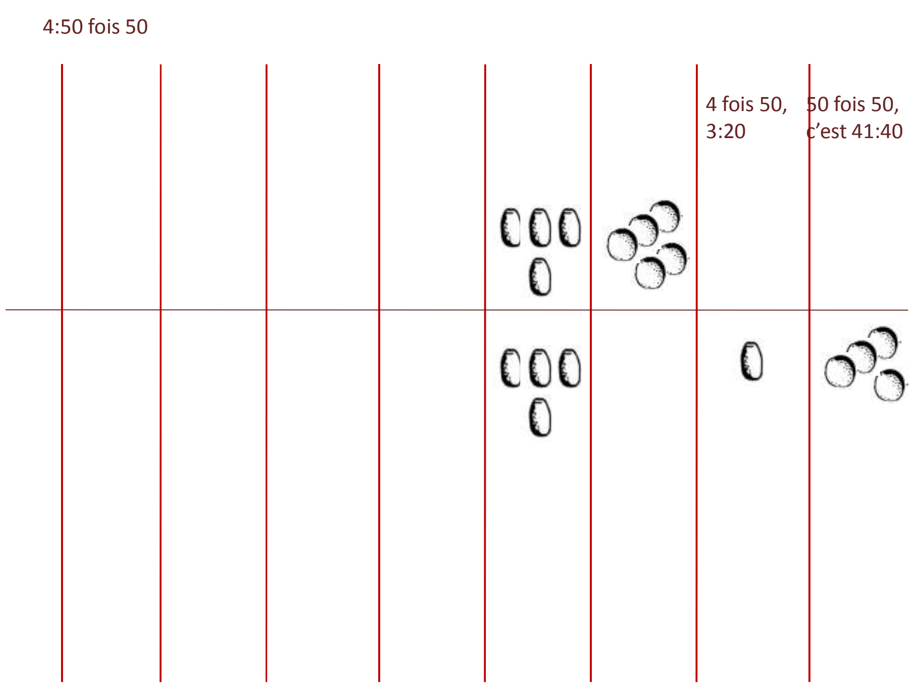
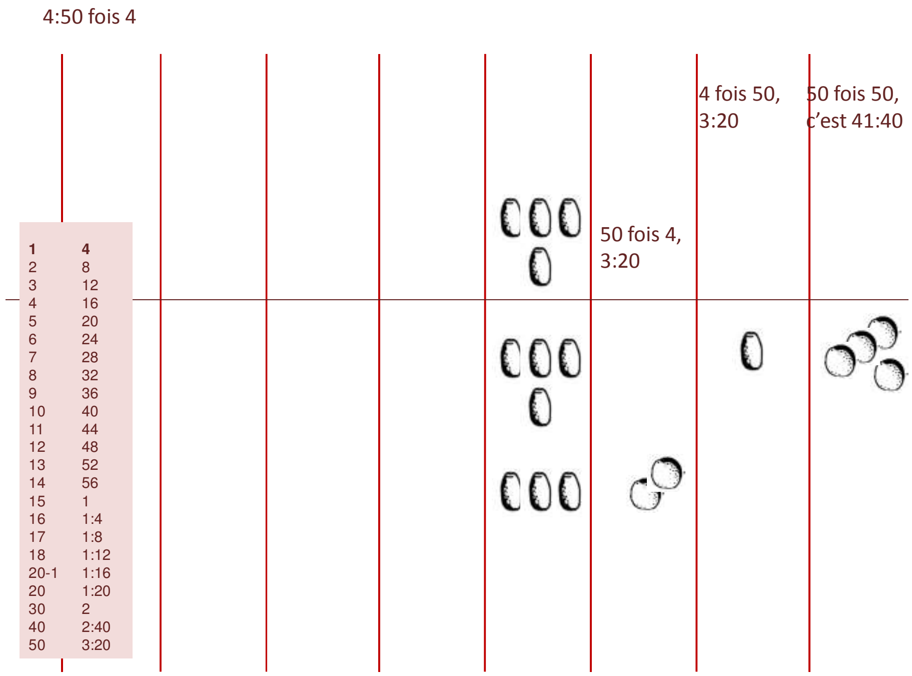


Figure 7d

On utilise la table de multiplication par 4



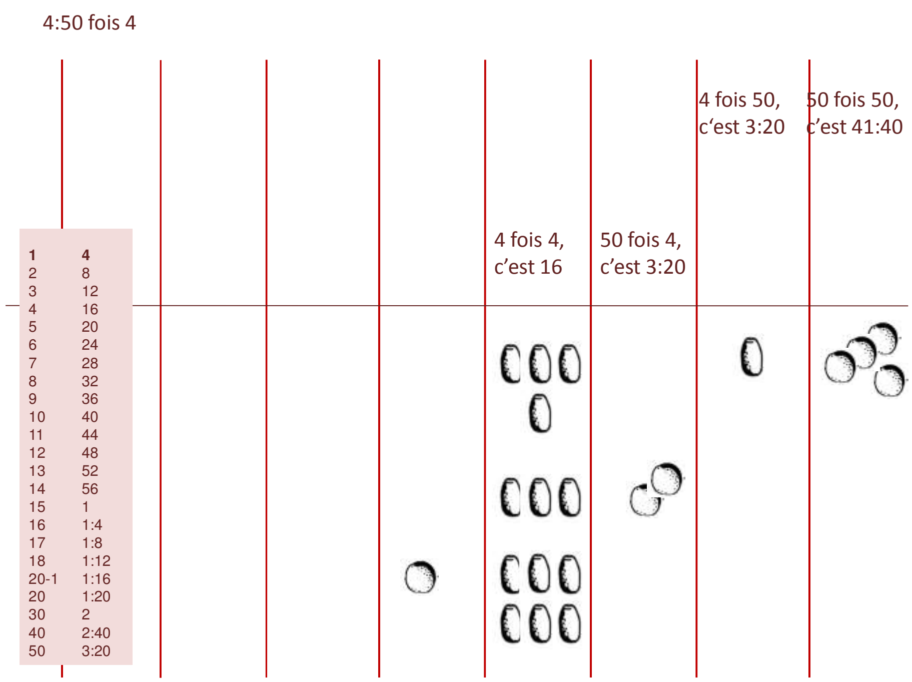


Figure 7e

On applique les règles d'échange, et on trouve bien le produit 23:21:40 indiqué sur la tablette.

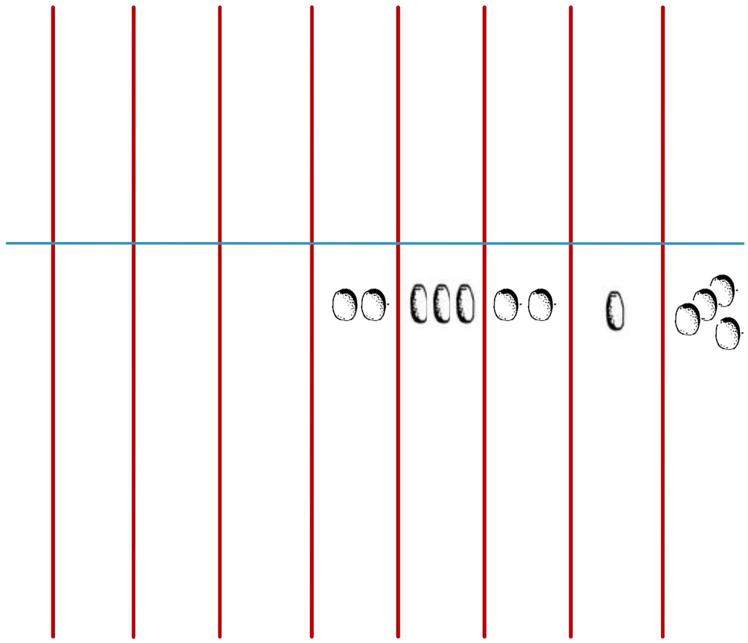


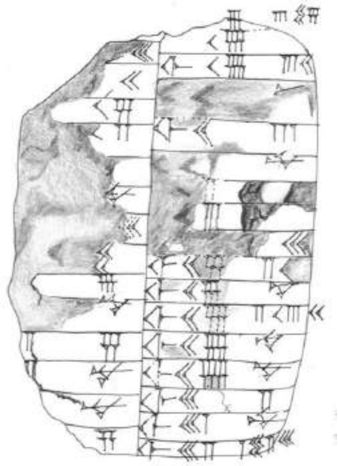
Figure 7f

Selon ce scénario, la multiplication agit sur des nombres positionnels flottants comme si ces nombres étaient des objets. L'algorithme de multiplication n'est pas un algorithme écrit, mais un processus matériel, qui consistait probablement à manipuler des jetons.

V. NOTION DE DIVISION

Il n'y a pas dans les textes mathématiques paléo-babyloniens d'opération de division à proprement parler. Lorsque, dans un problème, un nombre devait être divisé par un autre, le scribe multipliait le dividende par l'inverse du diviseur. La notion d'inverse est donc une notion fondamentale dans l'arithmétique paléo-babylonienne.

La première des tables numériques qui était apprise dans les écoles était la table d'inverse. Expliquons-en le principe à partir d'un exemplaire datant de la fin du 3^{e} millénaire, c'est-à-dire de quelques génération avant celle des maîtres des écoles paléo-babylonienne (la figure 8 ne représente que la face de la tablette, mais la table continue sur le revers ; voir le site du CDLI pour une translitération de la tablette complète).



		[igi] 16	3:45
[1-da igi	2	igi 17	[nu]
gal$_2$-bi]	30	igi 18	3:20
[igi 3]	20	[igi 19	nu]
[igi 4]	15	igi 20	3
[igi 5]	12	igi 21	nu
[igi 6]	10	igi 22	[nu]
[igi 7]	nu	[igi] 23	[nu]
[igi 8	7]:30	[igi 24	2]:30
[igi 9	6]:40	igi 25	2:24
[igi 10]	6	igi 26	nu
[igi 11]	nu	igi 27	2:13:20
[igi 12]	5	igi 28	nu
[igi 13]	nu	igi 29	nu
[igi 14]	nu	igi 30	2
[igi 15]	4	igi 31	nu
		igi 32	1:52:30

Figure 8 – *Table d'inverse d'époque Ur III (tablette scolaire de Nippur, Ist Ni 374, face http://www.cdli.ucla.edu/P257557 copie Proust 2007 pl. 1)*

Cette table établit que:

L'inverse de 2 est 30

L'inverse de 3 est 20

L'inverse de 4 est 15

L'inverse de 5 est 12

L'inverse de 6 est 10

L'inverse de 7 n'existe pas

Etc.

On peut comprendre les premières lignes de plusieurs façons. On peut par exemple penser au système moderne: l'inverse de 2 est 1/2, et 1/2 heure est 30 minutes ; l'inverse de 3 est 1/3, et 1/3 d'heure est 20 minutes, etc. On peut aussi, de façon plus abstraite, raisonner ainsi: 2 fois 30 égal soixante en valeur absolue, c'est-à-dire 1 en notation flottante ; 3 fois 20 égal soixante en valeur absolue, c'est-à-dire 1 en notation flottante etc. Autrement dit, deux nombres forment une paire d'inverses si leur produit est 1 en notation flottante. Cette formulation fait apparaître une relation symétrique entre un nombre et son inverse. Une autre particularité du système sexagésimal positionnel apparaît ici: l'inverse de 2 n'est pas un nombre fractionnaire, mais un nombre, 30, ni entier, ni fractionnaire. La notation flottante abolit la distinction entre entier et non entier.

Mais qu'en est-il de l'inverse de 7? La tablette nous répond: "igi 7 nu", ce qui signifie: 7 n'a pas d'inverse. En langage moderne, cela signifie que l'inverse de 7 ne peut pas s'écrire avec un nombre fini de positions sexagésimales. Nous lisons de même: igi 11 nu, igi 13 nu, igi 14 nu, etc. Les nombres 7, 11, 13, 14, etc. n'ont "pas d'inverse" au sens babylonien car leur décomposition contient des facteurs comme 7, 11, 13 qui ne sont pas des diviseurs de 60, la base. En langage moderne, les nombres qui ont un inverse au sens babylonien, comme 2, 3, 4, etc., sont dits "réguliers" en base 60. Les autres, comme 7, 11, 13, 14, sont non réguliers, ou irréguliers en base 60, « igi nu » en sumérien.

Cette table d'inverse nous montre donc qu'il existe deux sortes de nombre sexagésimaux positionnels, ceux qui sont réguliers et ceux qui ne le sont pas. Les grandes catégories de nombres se sont construites dans l'histoire des mathématiques sur les oppositions entre "entiers" et "non entiers", ou bien "rationnels" et "irrationnels". Ici, ce ne sont pas ces oppositions qui sont pertinentes, mais l'opposition entre nombres réguliers et non réguliers. Les nombres pris en considération dans l'univers scolaire sont ceux dont le développement sexagésimal est fini, c'est-à-dire les nombres sexagésimaux, avec une prédilection pour ceux qui sont réguliers et permettent d'effectuer des divisions.

Les tables d'inverses d'époque paléo-babylonienne présentent de légères mais intéressantes différences avec leur précurseurs d'Ur III (voir figure 9). En effet, dans les tables paléo-babyloniennes, les entrées sont 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, etc. : les nombres "igi nu" sont éliminés. D'une façon générale, l'arithmétique scolaire paléo-babylonienne opère dans le monde des nombres sexagésimaux réguliers. La liste des tables de multiplication, par exemple, en témoigne. Seule la table de 7 est une table de multiplication par un nombre non régulier. Ce détail ainsi que l'ordre décroissant dans lequel sont données les tables de multiplication (tables de 50, 45, 44:26:40, 40, etc., indique que ces tables sont en fait aussi des tables de division (tables de division par 1:12, 1:20, 1:21, etc.).

Table d'inverses paléo-babylonienne		Liste des tables de multiplication à l'époque paléo-babylonienne
2	30	50
3	20	45
4	15	44:26:40
5	12	40
6	10	36
8	7:30	30
9	6:40	25
10	6	24
12	5	22:30
15	4	20
16	3:45	18
18	3:20	16:40
20	3	16
24	2:30	15
25	2:24	12:30
27	2:13:20	12
30	2	10
32	1:52:30	9
36	1:40	8:20
40	1:30	8
45	1:20	7:30
48	1:15	7:12
50	1:12	7
54	1:6:40	6:40
1	1	6

1:4	56:15	5
1:21	44:26:40	4:30
		4
		3:45
		3:20
		3
		2:30
		2:24
		2
		1:40
		1:30
		1:20
		1:15

Figure 9 *– Table d’inverses (à gauche) et liste des tables de multiplication (à droite)*

En conclusion, la division n’est pas une des quatre opérations élémentaires, comme dans les arithmétiques usuelles auxquelles nous sommes habitués. La division dérive d’une autre opération, l’inversion, qui, elle, peut être considérée comme une opération élémentaire.

VI. NOTION D'AIRE

Mais comment les nombres sexagésimaux flottants pouvaient-ils être utilisés pour calculer des quantités? Examinons le cas du calcul des aires, qui occupait une place particulièrement importante dans la formation mathématique. Une dizaine d'exercices du genre de celui de la figure 10 ont été trouvés à Nippur.

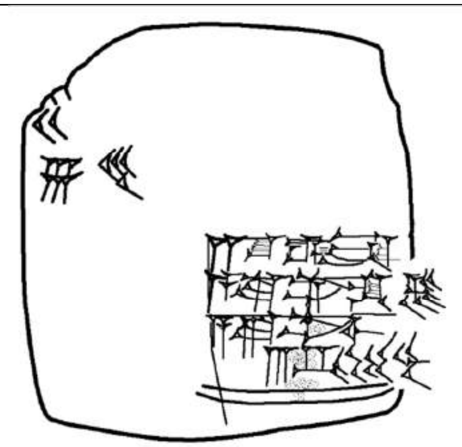
	[20] 20 6:40 2 doigts le côté d’un carré Sa surface combien? Sa surface est 1/3 grain.

Figure 10 *– Calcul d’aire (tablette scolaire de Nippur, UM 29-15-192, face http://www.cdli.ucla.edu/P254900, copie de l’auteur)*

Tous ont la même mise en page: en haut à gauche on voit une multiplication en notation sexagésimale positionnelle, posée exactement de la même façon que dans l'exercice de multiplication que nous venons de voir (figure 6): trois nombres notés l'un sous l'autre, deux facteurs (20 et 20) et leur produit (6:40). En bas à droite, on trouve un petit texte de problème, avec l'énoncé et la réponse.

2 doigts le côté d’un carré

Sa surface combien?

Sa surface est 1/3 grain.

La relation entre les nombres écrits en haut à gauche et les mesures de longueur et de surface écrites en bas à droite est exactement celle qui est établie par les tables métrologiques (voir figure 3). Le processus comportait ainsi trois étapes :

Première étape : Les mesures de longueur sont transformées en notation sexagésimale positionnelle flottante grâce à une table établie pour les longueurs

1 doigt	10
2 doigts	**20**
3 doigts	30
4 doigts	40
5 doigts	50
6 doigts	1

Deuxième étape : Le nombre obtenu, ici 20, est multiplié par lui-même en utilisant les tables de multiplication.

Troisième étape : le produit, ici 6:40, est transformé à nouveau en mesure de surface grâce à une table établie pour les surfaces, et à un contrôle mental des ordres de grandeur.

1/3 grain	**6:40**
1/2 grain	10
1 grain	20
2 grains	40
2 ½ grains	50
3 grains	1

Ce processus repose sur une dissociation entre la mesure des grandeurs, ici longueurs et surfaces, et le calcul. Ce ne sont pas les mêmes sortes de nombres qui sont utilisés dans les différentes étapes. Le passage par la notation sexagésimale positionnelle flottante, extérieure au domaine de la quantité, est un artifice qui permet de résoudre les problèmes de changement de dimension posés par la métrologie paléo-babylonienne. En effet, dans cette métrologie, les unités de surface ne sont pas systématiquement des carrés d'unités de longueur. Il est même possible que la notation sexagésimale positionnelle ait été inventée précisément dans le but de résoudre ce problème (Proust à paraitre).

VII. NOMBRE ET QUANTITE

Les exercices scolaires nous ont fait rencontrer deux types de nombres :

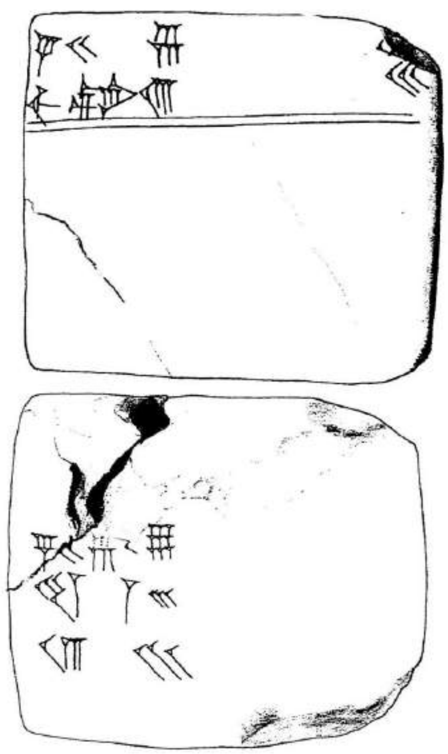
- Des nombres non positionnels toujours suivis d’unité de mesure ou du nom d'éléments dénombrés, sont utilisés pour exprimer des quantités (mesures, nombre de choses)
- Des nombres sexagésimaux positionnels, jamais suivis d’unité de mesure ou du nom d'éléments dénombrés, sont utilisés uniquement pour les calculs, plus précisément pour les multiplications et les inversions.

La pratique des nombres dans l'enseignement élémentaire à Nippur témoigne de la dissociation de deux fonctions distinctes : quantifier et calculer. La quantification est prise en charge par des nombres de principe additif, dont l'ordre de grandeur est parfaitement défini. La fonction de calcul (pour la multiplication) est prise en charge par des nombres sexagésimaux positionnels flottants et isolés (non suivis d'unité de mesure).

VIII. UN ALGORITHME ET SA PREUVE : CALCULER UN INVERSE

Une fois que ce système sophistiqué de numérations spécialisées avait été mise en place, sans doute à la fin du 3e millénaire pour résoudre des problèmes posés par l'évaluation des champs et des domaines, les maîtres des écoles s'en sont emparés pour des buts qui leur étaient propres. Le monde des nombres sexagésimaux positionnels flottant offrait à la spéculation mathématique un terrain de jeu particulièrement stimulant. De nouvelles questions, purement mathématiques, ont émergé. L'une de ces questions est la suivante: comment trouver l'inverse d'un nombre qui n'est pas donné dans les tables d'inverses standard, c'est-à-dire les tables qui étaient apprises par cœur dans les écoles?

De nombreux exercices scolaires montrent la réponse astucieuse que les maîtres avaient donnée à cette question. Une tablette scolaire trouvée à Nippur, Ist Ni 10241, en montre un exemple. Sur la face, se trouve un nombre, 4:26:40, et la réponse à une question implicite, "son inverse est 13:30". Sur le revers, se trouve le détail du calcul. Examinons ce calcul.



face

4:26:40

son inverse 13:30

==============

revers

4:26:40 9

40* 1:30

13:30

*On lit écrit 41 au lieu de 40, le nombre attendu, à moins que le clou représentant le « 1 » ne soit qu'une éraflure accidentelle de l'argile

Figure 11 *– Calcul d'inverse (tablette scolaire de Nippur, Ist Ni 10241, face http://www.cdli.ucla.edu/P368962, copie de Proust 2007, pl. 48)*

Tout d'abord, observons que le nombre 4:26:40 est régulier. Nous pouvons le vérifier en utilisant des méthodes de calcul modernes, par exemple en décomposant ce nombre en produit de facteurs, par exemple avec la calculatrice MesoCalc. Comment les scribes anciens savaient-ils que ce nombre est régulier? J'y reviendrai dans la suite.

4:26:40 se termine par le nombre régulier 6:40, donc 4:26:40 est « divisible » par 6:40. Pour diviser 4:26:40 par 6:40, on multiplie 4:26:40 par l'inverse de 6:40. L'inverse de 6:40 est 9. Ce nombre 9 est posé à droite. Le produit de 4:26:40 par 9 est 40, donc 40 est le quotient de 4:26:40 par 6:40 ; ce nombre est posé à gauche. L'inverse de 40 est 1:30. Le nombre 1:30 est posé à droite. Pour trouver l'inverse de 4:26:40, on n'a plus qu'à multiplier les inverses des facteurs de 4:26:40, c'est-à-dire les nombres 9 et 1:30 posés à droite. Ce qui donne 13:30, l'inverse cherché.

Cette procédure revient à décomposer le nombre à inverser en produit de facteurs réguliers élémentaires, c'est-à-dire appartenant au répertoire connu par cœur (ceux qui figurent dans la table d'inverses, voir figure 9):

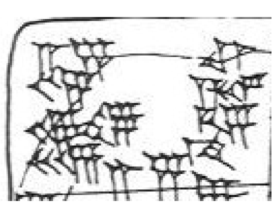
$$4{:}26{:}40 = 6{:}40 \times 40$$

Les inverses de ces facteurs ont été posés dans la colonne de droite, qui donne ainsi la décomposition de l'inverse cherché:

$$9 \times 1{:}30 = 13{:}30$$

Cette technique d'inversion par factorisation a été théorisée d'une certaine manière par les anciens scribes. La preuve en est un texte comme celui qu'on trouve sur la tablette conservée à l'Université de Philadelphie sous le numéro CBS 1215, où cette méthode est développée de façon systématique (Sachs 1947). Le texte est composé de 21 sections. L'entrée de la première section est 2.5, de la deuxième 4.10, de la troisième 8.20, etc. Chaque entrée est le double de la précédente. Le nombre 2.5 étant régulier (2.5 est égal à 5^3, un nombre bien connu des scribes), toutes les entrées sont régulières. Le nombre 4:26:40 de l'exercice précédent correspond à la huitième entrée de notre texte, ce qui garantit le fait qu'il est régulier.

Dans chaque section, le nombre écrit en entrée est inversé. La méthode d'inversion est celle que nous venons de voir. Prenons par exemple la première section, dont l'entrée est 2.5.



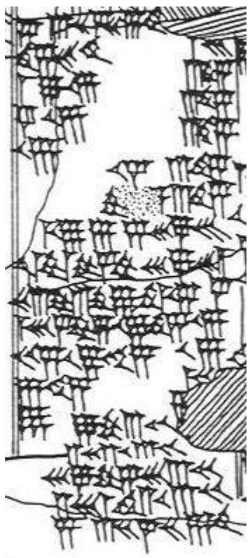
2:5		12
25		2:24
28:48		1:15
36		1:40
	2:5	

Figure 12 – *Calcul d'inverse, première section de la tablette CBS 1215 (face http://www.cdli.ucla.edu/P254479, copie de Robson 2000, p. 237)*

On reconnait le même algorithme d'inversion. Le nombre 2:5 se termine par 5, qui appartient à la table d'inverses, donc 5 est un facteur régulier élémentaire de 2:5. L'inverse de 5 est 12 ; on pose 12 à droite. Le produit de 2:5 par 12 est 25. Le nombre 25 est donc un deuxième facteur et il est régulier ; on pose 25 à gauche, et son inverse 2:24 est posé à droite. Le nombre 2:5 se décompose donc en produit de deux facteurs réguliers élémentaires, 5 et 25. L'inverse de 2:5 est le produit des inverses de ces deux facteurs, c'est-à-dire des nombres posés à droite : 12 et 2:24. Le produit de 2:24 par 12 est 28:48. Le nombre 28:48 est l'inverse cherché.

Mais, contrairement à ce que montre l'exercice précédent (figure 11), le processus ne s'arrête pas là. La méthode de factorisation est appliquée à nouveau à l'inverse trouvé, si bien que le résultat final n'est autre que le nombre initial, écrit en entrée. Il en est de même dans toutes les sections: le nombre écrit en entrée est inversé, et l'inverse trouvé est inversé à son tour, ce qui produit le nombre initial.

Si on avance dans le texte, un autre phénomène se produit. Le quotient trouvé après la première factorisation n'est pas un nombre dont l'inverse est connu. Il faut donc itérer le processus. Dans la 20e section, on trouve quatre itérations.



5.3.24.26.40		[9]
45.30.40	1.30	
1.8.16		3.45
4.16		3.45
16		3.45
	14.3.45	
	5[2.44].3.45	
	1.19.6.5.37.30	
11.51.54.50.37.30		2
23.43.49.41.15		4
1.34.55.18.45*		16
25.18.45*	16	
6.45		1.20
9		6.[40]
	8.53.20	
	2.22.13. 20	
	37.55.33.20	
	2.31.42.13.20	
	5.3.24.26.40	

Figure 13 – *Calcul d'inverse, 20e section de la tablette CBS 1215 (copie de Robson 2000, p. 237)*

Ce texte nous montre plusieurs choses. Tout d'abord, il montre comment fabriquer des nombres réguliers : ici, un nombre régulier, 2:5, est multiplié par 2 de façon répétée. Plusieurs autres textes de la même époque contiennent des listes de nombres analogues, engendrées par la multiplication répétée d'un nombre régulier par 2, par 3 ou par 5. Ensuite, ce texte met en évidence deux règles arithmétiques fondamentales: 1) l'inverse de l'inverse d'un nombre est ce nombre lui-même; 2) l'inverse d'un produit de facteurs est le produit des inverses de ces facteurs. Ces deux règles sont montrées au moyen d'exemples paradigmatiques. D'une certaine manière, ce texte peut être considéré comme une tentative d'établir la validité de l'algorithme d'inversion, c'est-à-dire une forme de démonstration d'un algorithme (Pour plus de détails, voir Proust 2012a).

IX. ENTRER DANS DES MONDES DIFFERENTS

Cette balade dans le monde des mathématiques des écoles paléo-babyloniennes nous montre des objets mathématiques déroutants et des relations entre ces objets inattendues. On croit reconnaître un paysage familier, et pourtant, en y regardant de plus près, on découvre une constellation de détails étranges. Cela signifie-t-il que nous ayons affaire à des spéculations qui ne sont pas véritablement mathématiques, ou qu'on pourrait qualifier de pré-mathématiques? Faut-il corriger les détails étranges pour rendre ces textes accessibles à des lecteurs modernes, par exemple à des élèves de collège ou de lycée? C'est une approche possible. Mais on peut en proposer une autre: prendre ces textes pour ce qu'ils sont, et essayer d'en comprendre les finesses[6]. Bref, respirer le parfum des écoles de scribes, comme le recommandait un ancien maître de l'une des écoles de Nippur.

> Les petits doivent humer le parfum de Nippur! […] Ne sais-tu pas que l'école à Nippur est incomparable?
>
> (Attinger 2013/2015)

REFERENCES

Attinger P. (2013/2015) ANL 9: Nabi-Enlil-Anum-pīšu (3.3.18). *Institut für Archäologische Wissenschaften* http://www.iaw.unibe.ch/ueber_uns/amm_amp_va_personen/prof_dr_attinger_pascal#pane122850.

Hilprecht, H. V. (1906) *Mathematical, Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur*. Philadelphia: University of Pennsylvania.

Høyrup, J. (2002) "A note on Old Babylonian computational techniques." *Historia Mathematica* 29:193-198.

IREM de Grenoble (2015) *Les Mathématiques en Mésopotamie - Niveaux 6eme et 5eme*.

Lion B., Cécile M. (2007) Les écritures cunéiformes et leur déchiffrement. *Travaux de la Maison René-Ginouvès* 4.

Mélès B. (2013) *MesoCalc: a Mesopotamian calculator*. Software Open source (URL http://baptiste.meles.free.fr/site/mesocalc.html).

Proust C. (2000) La multiplication babylonienne : la part non écrite du calcul. *Revue d'Histoire des Mathématiques* 6, 1001-1011.

Proust C. (2007) *Tablettes mathématiques de Nippur*. Istanbul: Institut Français d'Etudes Anatoliennes, De Boccard.

Proust C. (2012a) Interpretation of Reverse Algorithms in Several Mesopotamian Texts. In Chemla K. (Ed.) *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions* (pp. 384-422). Cambridge: Cambridge University Press.

Proust C. (2012b) Problèmes de partage : des cadastres à l'arithmétique. *CultureMath (ENS Ulm) - http://culturemath.ens.fr/*.

Proust C. (à paraitre) Early-Dynastic tables from Southern Mesopotamia, or the multiple facets of the quantification of surfaces. In Chemla K., Michel C. (Eds.) *Mathematical practices in the context of administration.*

Proust C. (with the collaboration of M. Krebernik and J. Oelsner). 2008. *Tablettes mathématiques de la collection Hilprecht.* Leipzig: Harrassowitz.

Robson E. (2000) Mathematical cuneiform tablets in Philadelphia. Part 1 : problems and calculations. *SCIAMVS* 1, 11-48.

Robson E. (2001) The Tablet House: A Scribal School in Old Babylonian Nippur. *Revue d'Assyriologie* 95, 39-66.

Sachs A. J. (1947) Babylonian Mathematical Texts 1. *Journal of Cuneiform Studies* 1, 219-240.

Veldhuis N. (1997) *Elementary Education at Nippur, The Lists of Trees and Wooden Objects.* Thèse de doctorat de l'Université de Groningen, Pays-Bas.

[6] C'est le choix qui a été fait par des professeurs de mathématiques et d'histoire d'un collège de Grenoble (IREM de Grenoble 2015).

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DIMENSIONS CULTURELLES DANS LA CONCEPTION, LA DIFFUSION ET LES USAGES DES RESSOURCES DANS L'ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE

Table ronde EMF2015

Maha ABBOUD-BLANCHARD[*] – France CARON[**]
Jean-Luc DORIER[***] – Moustapha SOKHNA[****]

Résumé – En relation avec la thématique générale du colloque, ce texte traite de la question de l'ancrage culturel d'une ressource à destination des enseignants de mathématiques ou de leurs élèves, en examinant à quel point la dimension culturelle d'une ressource apparaît dans la conception, la diffusion et les usages dans d'autres cultures. Nous nous appuyons à cette fin sur un sondage mené entre avril et juin 2015 auprès de mille cinq cents enseignants de la francophonie (enseignant à des élèves âgés d'environ 11 à 19 ans), pour en dégager des constantes à travers les pays et les spécificités culturelles de chacun.

Mots-clefs : Ressources, Conception, Diffusion, Usages, Culture

Abstract – In relation to the general theme of the congress, this text deals with the question of the cultural anchoring of a resource made for mathematics teachers or their students, by analysing to what extent the cultural dimension of a resource appears in the design, dissemination, and uses in other cultures. The analysis is based on a survey conducted between April and June 2015 among one thousand five hundred teachers of French speaking countries (with students aged around 11-19 years) in order to draw out patterns across countries and cultural specifics.

Keywords: Resources, Design, Dissemination, Uses, Culture

I. INTRODUCTION

Depuis plusieurs années, la problématique des ressources est au cœur de plusieurs recherches aussi bien au niveau de la communauté des chercheurs francophones qu'au niveau international (Adler 2000, Davis & Krajcik 2005, Gueudet & Trouche 2010). Le mot « ressource » fait partie de la terminologie actuelle du monde éducatif tant au niveau de l'institution - des institutions qu'au niveau des individus. De plus les facilités de diffusion via les dispositifs numériques font émerger une grande variété de ressources à la disposition de l'élève et de l'enseignant. Ce dernier est de fait confronté à la nécessité de savoir sélectionner

[*] Université de Cergy-Pontoise – France – maha.blanchard@u-cergy.fr
[**] Université de Montréal – Canada – france.caron@umontreal.ca
[***] Université de Genève – Suisse – Jean-Luc.Dorier@unige.ch
[****] Université Cheikh Anta Diop de Dakar – Sénégal – moustapha.sokhna@ucad.edu.sn

Abboud-Blanchard M., Caron F., Dorier J.-L., Sokhna M. (2015) Ressources dans l'espace mathématique francophone. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Plénières, pp. 40-66.

dans une masse exponentiellement croissante de ressources. Toutefois, persiste une certaine illusion qu'il suffirait de concevoir une « bonne » ressource, de la mettre en ligne, pour qu'en découle un accès facile et un usage de qualité. Nous sommes cependant à un moment où ce processus soulève nombre de questions qui méritent d'être traitées à l'intérieur de la francophonie : quels types de ressources sont généralement à disposition des enseignants de mathématiques ? Qui les produit ? Avec quels objectifs ? Selon quels formats ? Quelle évaluation et quel contrôle avant la diffusion ? Quelles utilisations ?

Ce texte rend compte des travaux que nous avons effectués pour préparer une table ronde en lien avec la thématique générale du colloque et dont l'objectif était d'organiser une réflexion autour de ces différents aspects. Nous avons en effet effectué un sondage auprès d'enseignants de la francophonie afin de dresser un état des lieux sur les ressources existantes et leur intégration dans les pratiques enseignantes. Nous rendons compte dans ce qui suit d'abord des résultats globaux de ce sondage et nous détaillons ensuite les cas de certains pays.

II. PRÉSENTATION SYNTHÉTIQUE DU QUESTIONNAIRE

1. *La phase de conception*

Le point de départ de notre travail a été la conception d'un questionnaire général autour de quatre axes :

- Qui produit les ressources utilisées par les enseignants ?

- Comment les ressources sont-elles diffusées à l'intérieur de la francophonie (aux niveaux à la fois inter et intra culturels) ?

- Quels usages en font les enseignants/les élèves (usages en développement et/ou usages routiniers) ?

- Y a-t-il un impact (et si oui, lequel ?) sur les pratiques des enseignants ?

La phase de conception a pris du temps et a nécessité plusieurs allers-retours pour qu'on arrive à comprendre les différentes approches que nous avions chacun de ce thème, pour débattre, trouver des dénominateurs communs, etc. Un exemple en est ce qu'on entend par «ressource» et ce que cette acception inclut ou exclut au-delà de la définition classique due à Adler (2000) : une ressource est tout ce qui « re-source » le travail de l'enseignant.

Les questions se sont affinées au fil de la conception et une première version du questionnaire a été testée sur des échantillons d'enseignants de différents pays. S'en sont suivis des réajustements permettant en particulier une meilleure clarté dans les formulations et un élargissement de certaines questions pour une meilleure adaptabilité à des contextes culturels et institutionnels variés.

La version finale, accompagnée d'une note explicative des objectifs du sondage a été diffusée le plus largement possible dans l'espace mathématique francophone pendant une période de deux mois.

2. *Le questionnaire*

Le questionnaire est constitué de 3 grandes parties et les questions qui y figurent sont de deux types : QCM et questions ouvertes. La première partie est classique de tout sondage et a pour but de situer le contexte d'enseignement (âge de l'enseignant, ancienneté dans le métier, âge moyen des élèves, etc.). La deuxième partie s'intéresse aux ressources pour l'élève, alors que la troisième s'intéresse aux ressources pour l'enseignant.

A noter que suite au débat que nous avions eu concernant la signification du mot ressources et pour accéder à l'éventail le plus large de réponses, nous avons intégré au début du questionnaire la définition suivante :

> Par « ressource » nous entendons tous les manuels, moyens d'enseignement, ouvrages de mathématiques, textes pédagogiques ou didactiques, etc… sous forme papier ou numérique : livres, fichiers, encyclopédies, articles de revue, de magazines ou de journaux, brochures, CD, DVD, vidéos, sites web, polycopiés (faits par vous, un collègue ou un collectif dont vous faites partie ou non)…

Présentation de la deuxième partie

Dans cette deuxième partie, il est demandé à l'enseignant de citer des ressources (maximum trois et hiérarchisées) dont disposent ses élèves pour l'apprentissage des mathématiques. Pour chacune de ces ressources, une série de questions est posée.

9. Type de la ressource :

- manuel scolaire
- journal
- dvd ou vidéo
- autre type de livre
- polycopié
- site web
- revue ou magazine
- cdrom
- Autre (veuillez préciser)

10. Comment vos élèves se procurent-ils cette ressource ?

- Ils doivent l'acheter.
- Elle leur est fournie gratuitement.

11. Qui a participé à l'une ou l'autres des étapes du développement de cette ressource (conception, écriture, validation, diffusion) ? (plusieurs réponses possibles)

- Vous
- Un collectif d'enseignants
- Un éditeur privé
- Un collègue
- Un organisme officiel de l'état
- Autre (veuillez préciser)

12. Qui l'a choisie?

- Vous
- Un collectif régional
- Un collectif lié à l'établissement
- Un collectif national
- Autre (veuillez préciser)

13. Cette ressource est-elle utilisée par les élèves de façon autonome ?

- Souvent
- Parfois
- Jamais
- Je ne sais pas

14. Cette ressource vous semble-t-elle adaptée au contexte culturel dans lequel vous enseignez ?

- Parfaitement
- Plutôt
- Pas tout à fait
- Pas du tout

***Figure 1** – Deuxième partie du questionnaire*

Les trois premières questions servent à identifier la ressource (nom et type) et son accessibilité aux élèves. Les deux questions qui suivent renseignent sur la conception et le choix de cette ressource. Deux questions terminent cette partie, une sur l'utilisation qu'en font les élèves et l'autre sur l'adaptation de la ressource au contexte culturel de l'enseignement.

Présentation de la troisième partie

La troisième partie s'intéresse aux ressources qu'utilisent l'enseignant, directement ou indirectement pour préparer son enseignement. Elle est composée de quatre sous-parties avec régulièrement des questions en champ ouvert afin de laisser à l'enseignant la possibilité de rajouter des commentaires ou de donner son avis.

L'enseignant se prononce d'abord sur le rôle des ressources institutionnelles dans la préparation et la planification de son enseignement. Ensuite, il met en avant les ressources qui lui servent d'appui pour planifier/préparer les enseignements et pour enrichir les connaissances ou inspirer l'enseignement (cf. annexe 1).

Un ensemble de question sur la conception, la diffusion et le partage des ressources est alors proposé :

35. Vous arrive-t-il d'utiliser des ressources provenant d'autres pays ou d'autres cultures ?

Systématiquement Souvent Parfois Jamais

Le cas échéant, citez des exemples

36. Dans ce cas, les adaptez-vous au contexte dans lequel vous enseignez?

Systématiquement Souvent Parfois Jamais

Précisez pourquoi.

37. Consultez-vous des ressources sous forme de cdrom ou en ligne pour préparer vos cours ?

Systématiquement Souvent Parfois Jamais

Le cas échéant, citez des exemples :

38. Diriez-vous que la variété importante des ressources sous forme de cdrom ou en ligne a changé votre pratique, de façon :

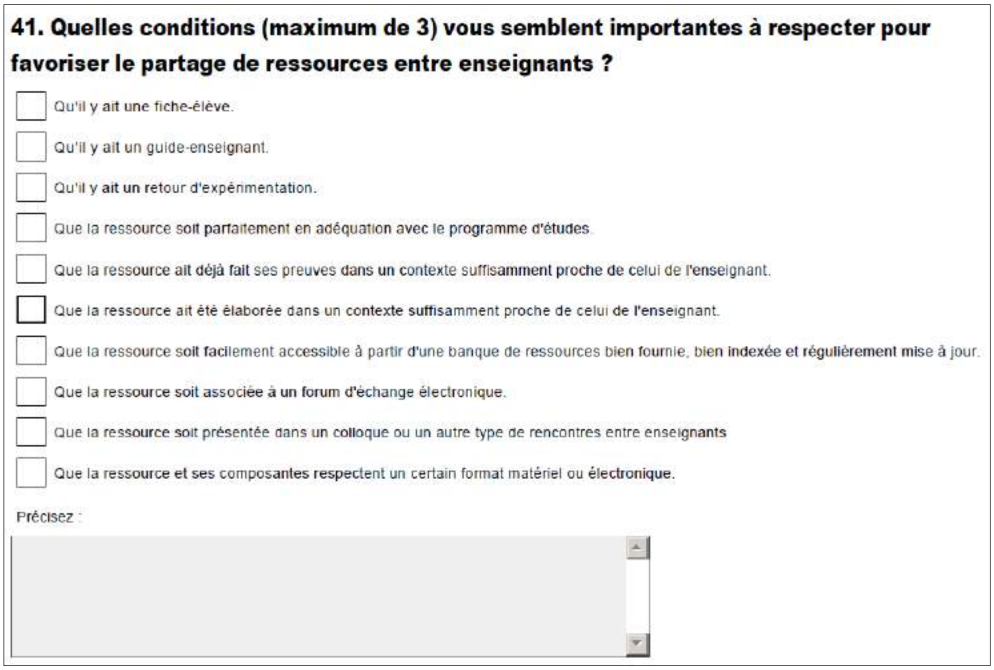
Importante Non négligeable Négligeable Nulle

Précisez:

Figure 2 *– Questions sur la diffusion et partage des ressources*

En plus du niveau et de la fréquence d'utilisation, il est attendu que l'enseignant donne des exemples de ressources consultées et de leur impact sur ses pratiques.

Enfin la dernière rubrique pose la question du partage des ressources et des conditions qui semblent importantes à respecter pour favoriser ce partage entre enseignants. Ainsi la dernière question est la suivante :



41. Quelles conditions (maximum de 3) vous semblent importantes à respecter pour favoriser le partage de ressources entre enseignants ?

- Qu'il y ait une fiche-élève.
- Qu'il y ait un guide-enseignant.
- Qu'il y ait un retour d'expérimentation.
- Que la ressource soit parfaitement en adéquation avec le programme d'études.
- Que la ressource ait déjà fait ses preuves dans un contexte suffisamment proche de celui de l'enseignant.
- Que la ressource ait été élaborée dans un contexte suffisamment proche de celui de l'enseignant.
- Que la ressource soit facilement accessible à partir d'une banque de ressources bien fournie, bien indexée et régulièrement mise à jour.
- Que la ressource soit associée à un forum d'échange électronique.
- Que la ressource soit présentée dans un colloque ou un autre type de rencontres entre enseignants
- Que la ressource et ses composantes respectent un certain format matériel ou électronique.

Précisez :

Figure 3 *– Dernière question*

Les différents choix qu'on propose ici à l'enseignant sont basés d'une part sur notre propre consultation de nombreuses ressources en ligne, et d'autre part sur plusieurs débats qui animent la recherche sur le thème de la fiabilité et l'utilisabilité des ressources (voir par exemple, les travaux du groupe « Ressources et développement professionnel des enseignants » paru dans les actes d'EMF 2012 (Hitt et al. 2012)).

III. VUE GLOBALE DES RÉSULTATS

1. Les participants

1450 personnes enseignant les mathématiques au secondaire ont participé au sondage : 54% étaient des femmes et 46% des hommes. Cumulant une expérience moyenne d'enseignement de 14,9 ans, leur âge moyen était de 41,4 ans, face à des élèves âgés en moyenne de 15,1 ans.

Près de 40% des participants venaient de France (572 participants), et 20% du Québec (281 participants). Les autres pays les plus représentés de façon absolue en nombre de participants sont dans l'ordre le Sénégal (130 participants), la Tunisie (111 participants), la Suisse (71 participants), la Côte d'Ivoire (63 participants), la Belgique (49 participants), le Maroc (28 participants), le Viet Nam (25 participants), le Canada francophone hors-Québec (24 participants).

En raison du fort poids des enseignants français et québécois dans l'ensemble des participants (près de 60% des participants), nous avons choisi de confronter d'emblée les pourcentages globaux à un sous-ensemble contrasté de six pays. En tenant compte de la taille de la population dont les contingents étaient issus, nous avons gardé dans ce premier lot les six pays suivants : la France, le Québec, la Suisse, la Tunisie, le Sénégal et le Viet Nam. Nous examinerons aussi, au moment de zoomer sur les continents, les données recueillies pour la Belgique, le Maroc, le Canada francophone hors-Québec et la Côte d'Ivoire, qui sont les pays pour lesquels la représentativité relative ramenée au nombre d'habitants de ces pays reste assez bonne (voir Tableau 1).

Pays/Région	*Participants*	*Population (M)*	*(Part/Pop)*100 000*
Canada francophone (Québec)	**281**	**7,6**	**3,70**
Suisse francophone	**71**	**2**	**3,55**
Canada francophone (hors Québec)	24	1,1	2,18
Belgique francophone	49	3,5	1,40
Tunisie	**111**	**11**	**1,01**
Sénégal	**130**	**14**	**0,93**
France	**572**	**64**	**0,89**
Vietnam francophone	**25**	**5**	**0,50**
Côte d'Ivoire	63	20	0,32
Congo-Brazzaville	8	4,5	0,18
Maroc	28	33	0,08
Mali	9	15,3	0,06

Tableau 1 - *Répartition des participants selon les pays, en fonction de leur poids démographique*

La vaste majorité des participants au sondage (93%) enseignent au public. Cela se reflète également dans les six pays considérés pour le survol initial, où la proportion de ceux qui enseignent au privé se situe entre 3,2% (au Québec) et 8,6% (en France). La proportion de femmes parmi les répondants varie considérablement au sein de cet échantillon de six pays : de 18% au Sénégal à 62% au Québec, avec une parité à peu près atteinte en Suisse (47%) et légèrement dépassée en France (53%). Le Viet Nam et la Tunisie sont à 44% et 27%, respectivement.

2. *L'accès pour les élèves à des ressources pour l'apprentissage des mathématiques*

Chez 89% des enseignants ayant participé au sondage, l'accès pour leurs élèves à des ressources pour l'apprentissage des mathématiques est une réalité ; mais cet accès ne paraît pas acquis d'emblée. Cela est particulièrement vrai en Tunisie où 39 % des enseignants interrogés déclarent que leurs élèves ne disposent pas de ressources pour l'apprentissage des mathématiques ; 22 % des participants du Sénégal font le même constat. Ce pourcentage est de 7,5% au Québec, 5% au Vietnam et en France, et moins de 3% en Suisse.

L'universalité de l'accès aux ressources est notamment liée à la nature de ces ressources ainsi qu'aux règles et modalités entourant leur production, leur choix et leur achat. L'examen de la ressource la plus utilisée pour chacun des six pays permet d'appréhender cette complexité.

Ainsi, alors que tous les enseignants suisses interrogés déclarent sans exception que la première ressource utilisée par les élèves leur est fournie gratuitement, l'accès à la ressource la plus utilisée exige un déboursé des élèves et de leurs parents chez 11% des enseignants français interrogés, 32% des québécois, 46% des sénégalais, 87% des vietnamiens et 89% des tunisiens.

C'est un manuel scolaire qui constitue la première ressource utilisée par leurs élèves chez 77% des enseignants interrogés. 13% d'entre eux ont plutôt recours à un polycopié tandis que 4% font appel à un site web. On retrouve à peu près les mêmes pourcentages chez les enseignants de France, du Sénégal, de Suisse et de Tunisie ; entre 76% et 83% des enseignants de ces pays utilisent un manuel scolaire comme première ressource. Dans notre sous-ensemble de six pays, c'est chez les enseignants du Vietnam qu'on fait le plus appel au manuel comme première ressource (93% des enseignants) et au Québec le moins : moins de 63% des enseignants le déclarent comme première ressource, lui préférant d'autres ressources pour leurs élèves (cahiers d'apprentissage, polycopiés, etc.). Les sites web y sont aussi un peu plus utilisés (6,5 %) ; c'est aussi le cas au Vietnam (par 7% des enseignants) et en Tunisie.

3. L'origine et le choix des ressources pour les élèves

Un regard comparatif sur les six pays permet d'apprécier des différences importantes dans les modalités entourant la conception et le choix des ressources pour les élèves. Ainsi, alors que la majorité des enseignants du Québec et la France (68% et 56% respectivement) déclarent utiliser comme première ressource pour leurs élèves un produit développé par un éditeur privé, ce pourcentage est beaucoup moindre dans les quatre autres pays (entre 0% et 14%), où l'on observe essentiellement, pour le développement de la première ressource, un partage ou une collaboration entre un organisme officiel de l'état et les enseignants. C'est au Vietnam où la première ressource est le plus associée à l'état, comme en témoignent 88% des enseignants ayant répondu à la question.

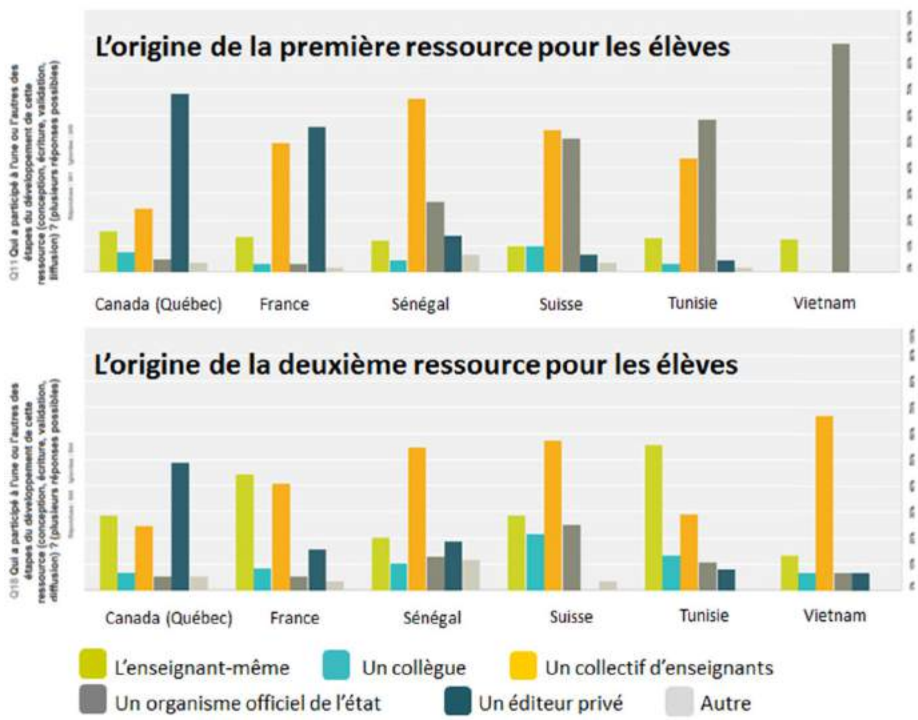


***Figure 4** – Origine des premières ressources utilisées par les élèves*

Le portrait est différent pour la seconde ressource, souvent développée par l'enseignant lui-même ou un collectif d'enseignants. L'état y est beaucoup moins impliqué et les éditeurs privés n'occupent aussi qu'une place marginale, à l'exception du Québec, où ils détiennent encore une « part importante de marché » (près de 50%).

Les différences notables entre pays paraissent notamment liées à l'instance responsable du choix des ressources. Ainsi, au Québec et en France, là où la première ressource provient typiquement d'un éditeur privé, c'est au niveau de l'établissement scolaire que se fait le choix de cette ressource. Ailleurs, la décision relève plutôt d'un collectif national (au Sénégal, en Tunisie ou au Vietnam), ou d'un collectif régional (en Suisse). Le choix de la deuxième ressource se fait généralement de façon plus locale, en se rapprochant de l'enseignant ou de son établissement.

Certaines ressources développées par l'état (ou avec lui) paraissent favoriser une utilisation autonome par les élèves. Ce serait particulièrement le cas en Tunisie et au Vietnam où entre 50% et 60% des participants considèrent que leurs élèves utilisent « souvent » leur première ressource de façon autonome, alors que cette même mesure n'est que de 28% en Suisse.

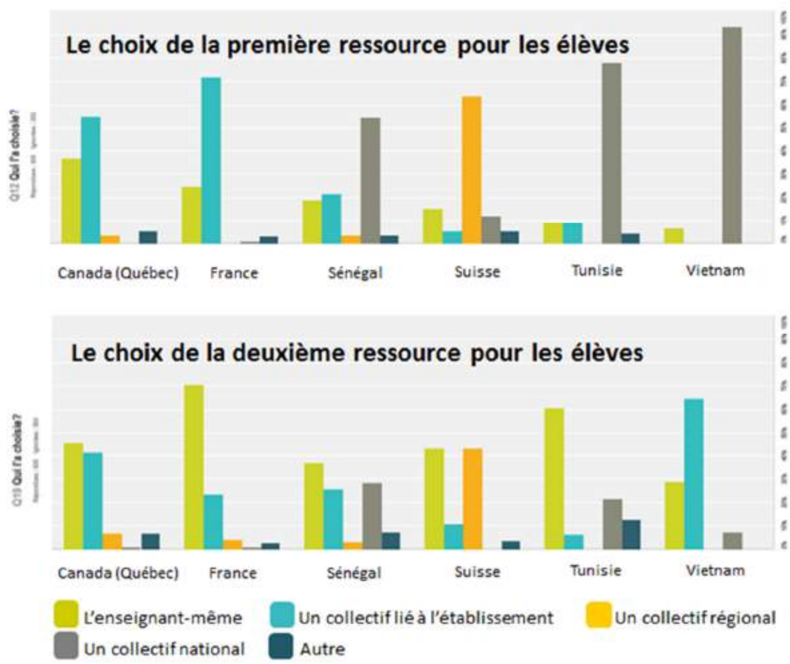


Figure 5 *– Les responsables du choix des ressources pour les élèves*

Quant à l'adéquation de la ressource au contexte culturel de la classe, les pourcentages varient considérablement d'un pays à l'autre ; si la totalité des participants vietnamiens jugent la première ressource parfaitement ou plutôt bien adaptée au contexte culturel de leur classe, l'appréciation est beaucoup plus mitigée dans les deux pays africains de notre échantillon : 32% des enseignants sénégalais et 49% de leurs homologues tunisiens se déclarent plutôt ou totalement insatisfaits à l'endroit de l'adaptation pour leurs élèves de la première ressource utilisée ; ils sont un peu moins sévères à l'endroit de la deuxième ressource, laquelle, rappelons-le, est typiquement conçue et choisie à un niveau plus local.

4. Les ressources utilisées par l'enseignant pour orienter et organiser son cours

Les programmes officiels jouent un rôle très important dans le travail de planification du cours de l'enseignant, et cela pour l'ensemble des pays considéré : 78% des enseignants ayant répondu déclarent en tenir compte « systématiquement » et 19% « souvent ». Les documents d'accompagnement au programme sont perçus comme étant utiles mais moins essentiels : on les consulte « souvent » ou simplement « parfois ». Le poids des épreuves d'évaluation officielles se situe entre les deux : 42% les consultent « systématiquement », 38 % « souvent » et 14% « parfois ».

De façon générale, on consulte « parfois » des ressources provenant d'autres pays ou cultures. On le fait plus « souvent » (ou même « systématiquement ») au Sénégal (42%) et en Suisse (35%). Ceux qui déclarent ne « jamais » le faire sont plus nombreux au Vietnam (67%), en France (61%) et au Québec (53%).

5. *Le partage de ressources entre enseignants*

Si pour les enseignants, la conception et le partage de ressources avec des collègues du même pays constitue une pratique assez courante, à cheval entre le « parfois » et le « souvent », l'extension de cette pratique avec des collègues d'autres pays ou cultures demeure plutôt rare, avec 80% de « jamais » dans les réponses. Selon les enseignants, les principales conditions susceptibles de favoriser le partage de ressources entre enseignants seraient les suivantes :

- Que la ressource soit en parfaite adéquation avec le programme d'études (50%)
- Que la ressource soit facilement accessible à partir d'une banque de ressources bien fournie, bien indexée et régulièrement mise à jour (58%).

IV. LE CAS DE LA FRANCE

1. *Les participants*

La majorité des participants français au sondage sont des femmes (53%). La moyenne d'âge est de 42 ans. Ce sont des enseignants du secondaire dont l'expérience s'étale de la première année d'exercice jusqu'à la retraite, dont la plupart (91%) exerce dans un établissement public. En comparant ces répartitions avec celles publiées en 2014-2015 par la DEPP (Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance du ministère de l'éducation), on se rend compte que la part des femmes dans notre échantillon est supérieure à celle des enseignantes dans le secteur public (44,8%) mais que la moyenne d'âge est équivalente (soit 43%). Toutefois, bien que le nombre de répondants français à notre sondage soit assez important par rapport aux autres pays, ramené à un niveau national, il ne représente que 1.04% de l'ensemble des enseignants de mathématiques du secondaire (secteur public et privé confondus). Les résultats que nous énonçons ci-après sont donc à relativiser en prenant en compte les voies de diffusion que nous avons utilisées pour notre sondage (nous reviendrons sur ce biais méthodologique dans la dernière partie de ce texte).

Quant à l'âge des élèves, la répartition est équilibrée entre enseignants devant élèves de 11 à 14 ans (niveau collège) et enseignants devant élèves de 15 à 18 ans (niveau lycée).

2. *L'accès pour les élèves à des ressources pour l'apprentissage des mathématiques*

Rejoignant la tendance générale, la première ressource utilisée par les élèves est le manuel scolaire. Ce manuel est très souvent gratuit (prêté par l'établissement pour la durée de l'année scolaire) et utilisé d'une façon régulière par les élèves. Les deux tiers des répondants citent une deuxième ressource qui est essentiellement sous forme de polycopiés, des documents « locaux » conçus par le professeur lui-même ou par un collectif de l'établissement. Encore une fois, cette deuxième ressource est fournie gratuitement aux élèves qui s'en servent d'une façon régulière. Enfin, la majorité des enseignants proposant une deuxième ressource en propose aussi une troisième. Il s'agit quasi exclusivement d'une ressource numérique site web ou logiciel (libre) qui est plutôt utilisée d'une façon épisodique.

3. L'origine et le choix des ressources pour les élèves

En France, il n'y a pas d'organisme officiel qui conçoit des manuels, ce sont plutôt des éditeurs privés qui font appel à des équipes constituées d'enseignants, de conseillers pédagogiques, d'inspecteurs… pour le faire conformément aux programmes en vigueur. Les manuels sont mis à la disposition des élèves à l'issu d'un choix fait généralement par l'équipe des enseignants de l'établissement. Le choix de la deuxième et troisième ressource est plutôt personnel, parfois collectif, mais reste local. Souvent l'enseignant choisi parmi les ressources en ligne celles qui sont conçues par des enseignants ou des collectifs d'enseignants qui les mettent à la disposition des collègues dans un esprit collaboratif et parfois coopératif. L'ensemble de ses ressources est jugé globalement adéquat au contexte culturel.

4. Les ressources utilisées par l'enseignant pour orienter et organiser son cours

Les ressources utilisées pour penser, préparer et planifier l'enseignement sont de différentes natures. D'abord, les enseignants français déclarent prendre en compte régulièrement les programmes pour planifier leurs cours (97,4 %) rejoignant ainsi la tendance générale. Le recours aux évaluations officielles est aussi régulier (75%). Quant aux documents d'accompagnement, produits et diffusés par l'institution, leur utilisation est régulière mais pas systématique, près de 30 % n'y ont recours que de façon épisodique. Toutefois, lorsqu'ils sont plus précisément interrogés sur les ressources qu'ils utilisent effectivement pour préparer leurs cours, ils placent les manuels scolaires en première position (92%), qu'il s'agisse du manuel utilisé par les élèves ou d'autres manuels du même niveau ou d'autres niveaux. Les sites web occupent aussi une position importante, suivis par la formation continue (également dispensée par l'institution).

A noter que près du quart des enseignants interrogés font aussi usage des cours des collègues et 8,4% de ceux qui répondent « autres » citent en premier des documents produits par des collectifs professionnels comme les groupes IREM (Instituts de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques) ou encore l'APMEP (Association des professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public). On constate ainsi une centration sur les associations professionnelles et les lieux où les professeurs se rencontrent et se forment.

5. Le partage de ressources entre enseignants

Interrogés sur leur utilisation de ressources venant d'autres pays/cultures, les enseignants français répondent « jamais » pour 61% d'entre eux. Pour ceux qui en utilisent, ils les adaptent au contexte dans lequel ils enseignent (traduction du vocabulaire, ajustement de la formulation, des notations…) pour améliorer la compréhension pour l'élève, pour les mettre au niveau des élèves ou en adéquation avec le programme. Quand il n'y a pas d'adaptation c'est parce que : soit le choix a été fait en amont pour qu'il n'y ait pas d'adaptation majeure à faire, soit la ressource a été choisie pour son intérêt culturel « *L'idée est précisément de faire découvrir les différences culturelles au travers de cet enseignement* », ou bien « *L'idée est de montrer une "internationalité" des notions mathématiques. Essentiellement quand un élève invite son correspondant en cours* ».

Quant à la conception et le partage de ressources avec des collègues, on constate que c'est une pratique répandue mais pas régulière. Les deux premiers critères qui favoriseraient ce partage sont : l'accessibilité de la ressource et l'adéquation avec le programme. Ces deux premiers critères rejoignent la tendance générale. A partir du troisième rang il y a une différence, alors que la France met le poids sur « le retour d'expérience » et ensuite sur la présence de fiches élève/ guide enseignant. La tendance générale met la présence d'un guide enseignant en troisième critère suivi par un « contexte proche de celui de l'enseignant ». En plus du critère d'accessibilité qui revient souvent « *L'enseignant doit savoir où trouver rapidement et facilement la ressource qu'il cherche pour sa préparation* » et de celui de présence d'éléments nécessaire pour la facilité d'utilisation « *Un guide-enseignant pour permettre une analyse a priori […] et un accès facilité à la ressource afin de n'avoir qu'à la mettre en page*», nous pouvons regrouper les autres critères en trois catégories :

- Une source fiable : « *Que la ressource soit présentée par un site "sérieux" comme un site d'académie ou d'autre comme IREM...* »

- Une ressource efficace contenant un retour d'expérience : « *Le retour d'expérimentation est essentiel car il me permet de savoir comment adapter. S'il n'y en a pas je ne peux pas juger la qualité de la ressource et en général je ne l'utilise pas* »

- Une ressource libre et modifiable : « *Il faut pouvoir exploiter les documents mis en ligne, tout en pouvant les modifier comme bon nous semble* »

6. L'impact de la variété des ressources numériques sur les pratiques

Les participants français au sondage déclarent majoritairement que la variété et l'accessibilité des ressources a eu un impact non négligeable sur leurs pratiques, parfois même important (28%). Trois raisons principales sont citées pour expliquer cet impact. La première est relative à une idée de modernité, « être en phase avec son temps », et d'ouverture au monde (pour soi et pour les élèves). On peut à ce propos lire : « *L'espace des possibles s'est soudainement ouvert* » ou bien *« J'utilise beaucoup les sites d'exercices interactifs avec les élèves et ils adorent ce changement de support qui correspond plus à quelque chose de leur époque* ». La deuxième raison invoquée est plus axées sur le besoin de diversifier ses pratiques. On peut par exemple relever la citation : « *Les sites internet permettent de se tenir informer de ce qui existe et se fait afin de varier le plus possible mes pratiques pédagogiques* ». Enfin la dernière raison revient sur la notion de partage et d'échange avec les autres : « *Possibilité d'échanger rapidement avec des collègues, tester ses idées, les mettre en perspective* ».

Notons pour terminer qu'on peut relever de l'ensemble des réponses à la fois un respect des directives institutionnelles et une liberté pédagogique assumée mais aussi un besoin d'un changement de « culture enseignante » un peu diffus dont les contours restent à définir !

V. LES CAS DU QUÉBEC ET DU RESTE DU CANADA FRANCOPHONE

1. Particularités du Canada et du Québec

Au Canada, l'éducation est une « compétence provinciale » ; cela se traduit par le fait qu'il y a autant de Ministères (ou départements) de l'éducation qu'il y a de provinces (ou territoires). Si au Québec, l'éducation se fait principalement en français, avec un secteur anglophone minoritaire, on retrouve en contrepartie un secteur francophone minoritaire dans chacune des autres provinces et dans les territoires, ainsi que des programmes d'immersion française en forte croissance.

Depuis une vingtaine d'années, sont apparus des regroupements interprovinciaux dans la définition de cadres pour le curriculum scolaire, comme le *Programme d'études pour l'enseignement des mathématiques au Canada atlantique* (regroupant le Nouveau-Brunswick, la Nouvelle Écosse, l'Ile-du-Prince-Édouard et Terre-Neuve) ainsi que le *Protocole de l'Ouest et du Nord canadiens* (avec pour cosignataires la Colombie-Britannique, l'Alberta, le Manitoba, la Saskatchewan, les Territoires du Nord-Ouest, le Yukon et le Nunavut).

Certaines provinces se sont retirées de ces accords, mais le Protocole de l'Ouest et du Nord canadien tend à devenir la référence à travers les provinces à majorité anglophone. L'Ontario et le Québec continuent de faire cavaliers seuls dans la définition de leurs programmes respectifs. Avec cette pluralité de systèmes d'éducation et en l'absence d'une volonté de coordination de ces systèmes au niveau fédéral, on constate à travers les programmes une influence non négligeable du regroupement américain que constitue le *National Council of Teachers of Mathematics* et de ses *Principles and Standards for School Mathematics*, autant dans les buts visés que dans les approches préconisées.

Parmi les spécificités du Québec, l'ordre secondaire y est plus court que dans les autres provinces, d'une durée de 5 ans après 6 ans au primaire ; les épreuves ministérielles certificatives ont lieu en quatrième secondaire. Vient ensuite un ordre collégial, technique de 3 ans ou préuniversitaire de 2 ans.

La mise en place d'un programme « défini par compétences », démarrant au primaire et ayant touché le secondaire en 2005, a créé un besoin de développement de nouvelles ressources et en particulier, de situations d'apprentissage et d'évaluation. Tout cela a d'abord donné lieu à un vaste chantier pour les maisons d'édition, mais de formidables initiatives d'enseignants ou de conseillers pédagogiques ont aussi contribué au développement de ressources. Pour donner une vue d'ensemble de la liste des savoirs au programme du secondaire et préciser les attentes relatives à leur apprentissage, le Ministère a publié en 2010 la *Progression des apprentissages ;* si l'on peut y dénoter un certain retour à une décomposition du savoir en micro-objectifs, l'impression en est renforcée par le retour de questions à choix multiples ou à réponse courte dans une section des épreuves ministérielles. Ces changements et précisions ont constitué une nouvelle occasion pour les maisons d'édition de développer des ressources pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Du côté des secteurs francophones des autres provinces, la diversité des systèmes d'éducation rend difficile l'établissement d'un portrait unique. Les manuels sont tantôt traduits du secteur anglophone, tantôt « importés » du Québec.

2. *Les participants*

On note une majorité importante (62,6%) de femmes parmi les 281 répondants québécois. Cette majorité grimpe à 75% chez les 24 enseignants des autres provinces ayant répondu au questionnaire. L'âge (41,1 ans) et l'expérience (14,8 ans) des enseignants québécois sont comparables aux valeurs moyennes pour l'ensemble des données, alors que les répondants des autres provinces sont un peu plus jeunes (38,8 ans), avec une expérience (10,9 ans) en conséquence.

Si chez les enseignants québécois participants, la durée réduite du secondaire peut expliquer un âge moyen des élèves (14,6 ans) inférieur à la moyenne à travers les pays (15,1 ans), l'âge moyen des élèves (15,2) des enseignants issus des autres provinces est comparable à cette moyenne générale.

3. *L'accès pour les élèves à des ressources pour l'apprentissage des mathématiques*

Le manuel est à nouveau la première ressource identifiée par la majorité des enseignants pour l'apprentissage de leurs élèves. Cela est vrai pour 94% des enseignants du Canada francophone hors Québec, mais ce pourcentage n'est que de 63% au Québec, alors que 20% des enseignants déclarent plutôt recourir, comme première ressource, à des « polycopiés », à un site web (6,5%) ou à un autre type de ressource (10%). Un examen plus détaillé des données montre que si plusieurs de ces polycopiés et autres types de ressources sont des notes de cours ou des cahiers d'exercices « faits maison » par l'enseignant ou une équipe-école, d'autres participants ont associé ces catégories aux « cahiers d'apprentissage » produits par les maisons d'édition; ce sont ces cahiers qui sont en train de changer le paysage de l'édition scolaire en mathématiques au Québec.

Les trois quarts des enseignants québécois ayant déclaré une première ressource en déclarent une deuxième, mais c'est moins de la moitié chez les enseignants des autres provinces. Les sites web constituent environ le tiers des deuxièmes et troisièmes ressources utilisées par les élèves des enseignants québécois et canadiens. Deux sites sont particulièrement utilisés au Québec: l'exerciseur en ligne NetMaths (avec suivi automatique des élèves) est relevé comme l'une des 3 ressources principales par 24% des participants québécois, alors que 10% mentionnent le site de cours en ligne « Allô Prof ». Ces deux sites sont aussi mis à contribution dans le reste du Canada francophone où 10% des enseignants mentionnent l'un ou l'autre de ces sites parmi les 3 ressources utilisées par leurs élèves.

Les enseignants canadiens à l'extérieur du Québec sont généralement moins satisfaits de l'adéquation culturelle des ressources qu'ils font utiliser à leurs élèves. Alors que pour chacune des ressources considérées, moins de 10% des enseignants québécois la considèrent comme mal adaptée à leur contexte d'enseignement, le taux d'insatisfaction chez leurs collègues canadiens se situe entre 17% et 33% selon la ressource considérée.

Une autre différence majeure entre le Québec et les secteurs francophones des autres provinces a trait aux modalités d'accès aux ressources pour les élèves. Si 94% des enseignants du Canada francophone hors Québec déclarent que la première ressource est fournie gratuitement aux élèves, ce pourcentage n'est que de 68% au Québec. On observe aussi des écarts pour la gratuité d'accès à la deuxième ressource (73% au Québec contre 89% dans le reste du Canada francophone). Comme nous le verrons plus loin, ce phénomène semble en partie attribuable à l'offre nouvelle de « cahiers d'apprentissage », spécifique au Québec.

4. *L'origine et le choix des ressources pour les élèves*

Dans l'ensemble du Canada francophone, incluant le Québec, le secteur privé est souvent impliqué dans les ressources retenues par les enseignants pour l'apprentissage de leurs élèves. Cela est particulièrement vrai au Québec où 68% des premières ressources déclarées proviennent du privé, 50% des deuxièmes ressources et 37% des troisièmes ressources. Dans les secteurs francophones des autres provinces, ces pourcentages sont respectivement de 50%, 33% et 50%. Les enseignants en secteur francophone minoritaire dans les autres provinces paraissent pouvoir compter davantage sur des ressources développées par un organisme officiel du gouvernement provincial ; on en retrouve la trace dans 20% à 30% des ressources déclarées.

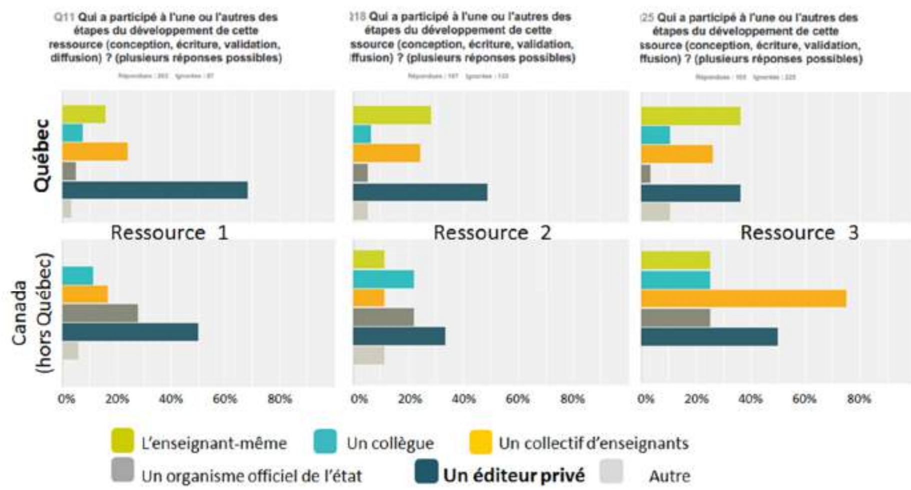


Figure 6 *– Origine des premières ressources utilisées par les élèves québécois et canadiens*

En principe, l'accès aux ressources pour les élèves est tout aussi gratuit au Québec. Les manuels sont achetés par les commissions scolaires parmi ceux qui ont reçu l'approbation ministérielle. Cette approbation porte sur différents aspects : pédagogiques (adéquation aux exigences du programme de formation), socioculturels (avec notamment une représentation démocratique et pluraliste de la société et une présentation égalitaire des rapports homme-femme), matériels (qualité de présentation et durabilité du matériel), et même confessionnels (respect des valeurs morales et religieuses). Ces manuels constituent une composante importante des « ensembles didactiques » lesquels comprennent aussi des corrigés, cahiers d'exercices, guides d'enseignement, matériel reproductible et autres ressources (imprimées ou numériques). Pour chaque degré scolaire, chaque école a typiquement le choix entre deux ou trois collections (issues de maisons d'édition différentes) de manuels approuvés. Afin de protéger les livres ainsi achetés, les manuels demeurent bien souvent dans la classe de l'enseignant de mathématiques ; l'élève n'y a accès typiquement que pour la durée du cours de mathématiques.

Le matériel dit « périssable », qu'on ne peut réutiliser d'une année à l'autre, n'est pas soumis à l'approbation ministérielle. Dans les cinq dernières années, cette disposition de la loi a donné lieu à une croissance importante d'un pan de l'édition scolaire avec la multiplication de « cahiers d'apprentissage », qui se déclarent conformes à la *Progression des apprentissages*, sans avoir fait l'objet d'une évaluation externe. Intégrant aux séries d'exercices et de problèmes, une section cours qui en fait de nouveaux concurrents des manuels, ces cahiers ont aussi souvent leur pendant numérique pour le tableau interactif, la tablette et même le web, avec des sites d'exercices, de correction en ligne et de suivi automatique des élèves. S'ils ont l'avantage d'appartenir à l'élève, ils ont aussi pour effet de mettre la charge financière sur les parents, tout au moins partiellement.

5. Les ressources utilisées par l'enseignant pour orienter et organiser son cours

Autant au Québec que dans le reste du Canada, 95% des enseignants prennent en compte systématiquement (65%) ou souvent (30%) le programme officiel dans leur enseignement. Les documents d'accompagnement au programme sont aussi régulièrement consultés, par 55% des enseignants québécois et par 72% des enseignants des autres provinces ; 10% des enseignants québécois mentionnent explicitement la *Progression des apprentissages* comme ressource utile à leur planification. Les évaluations officielles constituent des ressources régulièrement sollicitées pour orienter l'enseignement, par 85% des enseignants du Québec et par 77% des enseignants du reste du Canada. Contrairement à ce qu'on aurait pu croire, l'importance accordée à ces évaluations paraît indépendante de l'âge des élèves, laissant inférer que l'année de certification ne change pas vraiment la donne pour celui qui enseigne à ce niveau.

Cela dit, tous ces documents officiels paraissent relégués au troisième rang lorsqu'on demande explicitement aux enseignants de choisir les ressources principales sur lesquelles ils s'appuient pour planifier et organiser leur enseignement. Les manuels sont mentionnés par plus de 90% des enseignants canadiens ou québécois, suivis des sites web (près de 60%) et des documents officiels (50%). En revanche, lorsqu'il s'agit d'approfondir leurs connaissances ou d'inspirer leur enseignement, 80% des enseignants des deux secteurs déclarent se tourner vers les sites web, la moitié vers la formation continue et le tiers vers des revues, magazines ou journaux. Le manuel demeure un outil de référence pour aller plus loin pour la moitié des enseignants interrogés. Si près de 30% des enseignants au Québec incluent l'appel à un cours d'un collègue, seuls 3 des 24 participants hors Québec ont coché pareil emprunt dans leurs ressources.

6. Le partage de ressources entre enseignants

Environ la moitié des enseignants québécois ou canadiens (53% dans les deux cas) déclarent ne jamais utiliser de ressources venant d'autres pays ou cultures. Et lorsqu'ils le font, c'est typiquement « parfois », en procédant la plupart du temps à une adaptation. Les aspects sur lesquels porte une telle adaptation sont les suivants : la langue, la terminologie, le vocabulaire, les unités de mesure ou monétaires, un besoin ressenti de (re)contextualisation qui rejoigne les élèves, les savoirs en jeu ou le degré de difficulté (en fonction du curriculum et des connaissances des élèves), l'approche, la façon d'expliquer, de verbaliser, la mise en page.

Les ressources étrangères mentionnées le plus fréquemment proviennent de la France (ex. SesaMath, MathenPoche), de la Belgique (ex. enseignons.be) ou des États-Unis (ex. Khan Academy, Dan Meyer). Ont été aussi mentionnées des ressources du Canada anglais, de la Suisse, du Royaume-Uni, de la Finlande et de la culture autochtone, ainsi que du site international GeoGebraTube.

Le partage de ressources avec des collègues d'autres pays ou d'autres cultures est encore très peu répandu; plus de 80% des enseignants canadiens ou québécois répondent ne jamais en avoir fait l'expérience. Le partage avec des collègues du pays est quant à lui plus courant, un peu plus au Québec où 47% des enseignants déclarent le faire souvent ou de façon systématique, contre 38% dans le reste du Canada francophone.

Comme première condition à un partage de ressources, les enseignants québécois ou canadiens évoquent une adéquation pédagogique, culturelle et curriculaire. Les autres conditions relevées par les uns et les autres s'opposent parfois dans leurs modalités. Ainsi, alors que plusieurs souhaitent une interactivité, un dynamisme des ressources et des tutoriels vidéos, d'autres cherchent à assurer une viabilité technique, en dépendant le moins possible d'internet par exemple. De même si d'aucuns souhaitent une facilité d'accès aux ressources et la possibilité d'adapter et de modifier les fichiers, d'autres rappellent la nécessité de protéger les droits d'auteurs et d'assurer une certaine équité de traitement entre ceux qui développent des ressources et ceux qui ne font que les utiliser.

7. L'impact de la variété des ressources numériques sur les pratiques

Les participants québécois et canadiens sont plutôt partagés au regard de l'impact des ressources numériques sur leur pratique. Si ceux qui qualifient de « nul » cet impact sont typiquement ceux qui ont grandi et toujours travaillé avec ces technologies, d'autres expriment une certaine réserve à l'endroit de ces ressources en qualifiant leur impact de « négligeable ». Les raisons invoquées renvoient au temps requis pour chercher, explorer et faire le tri, à la réduction des technologies à de simples outils de présentation qui ne sont là que pour appuyer le discours de l'enseignant et la compréhension de l'élève. Ceux qui voient dans ces ressources un apport « non négligeable » à l'enseignement des mathématiques insistent sur le dynamisme des animations et des représentations et sur les possibilités de communication, d'échange et de collaboration que ces outils permettent. Les plus enthousiastes qui n'hésitent pas à qualifier d' « important » l'impact de ces ressources numériques sur les pratiques, évoquent des changements plus en profondeur, avec le développement de nouvelles tâches, l'enrichissement ou la différentiation des contenus, la mise en place d'une pédagogie inversée, la possibilité d'être créatif, etc.

8. Conclusion

Dans un contexte nord-américain, face à une population francophone d'un peu plus de 7 millions d'habitants et un programme de formation qui lui est propre, les éditeurs privés du Québec produisent une grande variété de manuels, cahiers d'apprentissage et autres ressources pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, et le choix en revient typiquement aux écoles. Cela donne lieu à une économie de marché où la concurrence est vive, où chaque éditeur essaie de se distinguer en intégrant notamment une dimension technologique et un suivi automatique des élèves, où l'accès gratuit aux ressources pour les élèves n'est plus la règle d'or, et où le rôle de l'état paraît aller en s'estompant.

Le reste du Canada francophone compte un million d'habitants répartis dans les 9 autres provinces, les territoires et autant de systèmes d'éducation. Une telle configuration en fait un « marché » moins attirant pour les éditeurs privés. Au-delà des partages entre collègues et de ce que peuvent produire les organismes liés à l'état, lesquels paraissent encore bien impliqués, on recourt à la traduction des ressources des systèmes anglophones ou à l'utilisation de ressources développées au Québec. Cela peut expliquer la perception plus mitigée qu'ont les enseignants de l'adéquation culturelle des ressources dont ils disposent pour leurs élèves.

VI. LES CAS CONTRASTÉS DE LA SUISSE ROMANDE ET DE LA BELGQIUE FRANCOPHONE

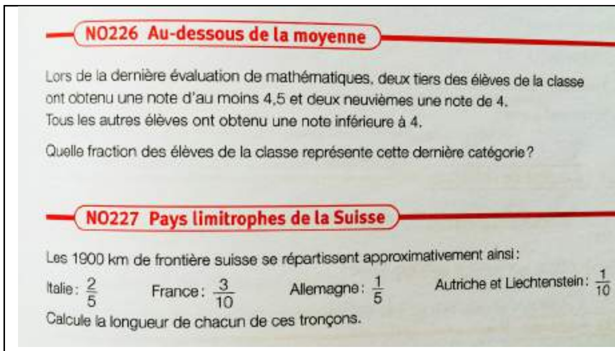
1. Particularité de la Suisse romande

Depuis 5 ans la Suisse romande[1] a une scolarité primaire obligatoire de 8 ans pour des élèves de de 4 à 12 ans, des niveaux 1P à 8P. Le secondaire 1 dure 3 ans, pour les élèves de 13 à 15 ans, classe de 9^{e}, 10^{e} et 11^{e}. Le secondaire 2 est très contrasté à la fois à l'intérieur d'un même canton, avec aux deux extrémités une voie gymnasiale, qui forme les meilleurs élèves en trois ou quatre ans selon les cantons et une voie d'apprentissage très développée.

[1] Partie de la Suisse où les habitants parlent français (environ 2M d'habitants sur les 8M de la totalité de la Suisse) : cantons de Genève, Jura, Neuchâtel, Vaud, et partie de Berne, Fribourg et Valais

Le secondaire 1 est régi par un plan d'études romand, des épreuves d'évaluation annuelles cantonales et des moyens d'enseignement officiels romands uniques conçus par un collectif d'auteurs supervisé par une instance inter-cantonale: la CIIP *Conférence Inter-cantonale de l'Instruction Publique de Suisse romande et du Tessin*. Pour chaque niveau 9^{e}, 10^{e} et 11^{e} il y a un livre pour l'élève et un fichier, dans lequel il peut écrire. Ils comprennent une collection d'activités assez ouvertes, rangées dans 4 grands domaines. Selon un choix résolument socio-constructiviste, les seuls éléments de théorie (cours) sont consignés dans un livre qui suit l'élève sur les 3 ans, intitulé *Aide mémoire*. Le livre du maitre est en ligne et comprend des corrigés, des fiches imprimables mais aussi quelques éléments de réflexion d'ordre didactique et des activités à faire sur ordinateur.

Figure 7 *– Les moyens d'enseignement du secondaire 1 en Suisse romande*



NO226 Au-dessous de la moyenne

Lors de la dernière évaluation de mathématiques, deux tiers des élèves de la classe ont obtenu une note d'au moins 4,5 et deux neuvièmes une note de 4.
Tous les autres élèves ont obtenu une note inférieure à 4.

Quelle fraction des élèves de la classe représente cette dernière catégorie?

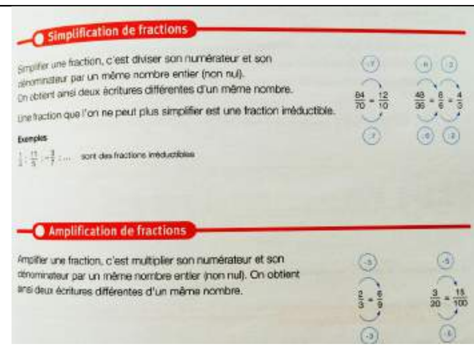
NO227 Pays limitrophes de la Suisse

Les 1900 km de frontière suisse se répartissent approximativement ainsi:

Italie: $\frac{2}{5}$ France: $\frac{3}{10}$ Allemagne: $\frac{1}{5}$ Autriche et Liechtenstein: $\frac{1}{10}$

Calcule la longueur de chacun de ces tronçons.

Figure 8 *– Extrait du livre de 9^{e}*



Simplification de fractions

Simplifier une fraction, c'est diviser son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier (non nul).
On obtient ainsi deux écritures différentes d'un même nombre.

Une fraction que l'on ne peut plus simplifier est une fraction irréductible.

Exemples

$\frac{1}{2}$; $\frac{11}{5}$; $-\frac{3}{7}$; … sont des fractions irréductibles

$\frac{84}{70} = \frac{12}{10}$ $\frac{48}{36} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Amplification de fractions

Amplifier une fraction, c'est multiplier son numérateur et son dénominateur par un même nombre entier (non nul). On obtient ainsi deux écritures différentes d'un même nombre.

$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ $\frac{3}{20} = \frac{15}{100}$

Figure 9 *– Extrait de l'Aide mémoire*

Au secondaire 2, au contraire, les plans d'études sont cantonaux, et très peu détaillés avec peu de coordination inter-cantonale. Il n'y a souvent pas de manuel, mais un polycopié (voire un site web) par établissement. L'examen final est la Maturité (éventuellement professionnelle), qui est reconnue au niveau fédéral mais qui demeure un examen local passé en classe et supervisé par les enseignants. Il y a une forte culture d'établissement et souvent peu de coordination entre les établissements.

2. *Particularités de la Belgique francophone*

En Belgique, la scolarité primaire obligatoire est de 6 ans, pour les élèves de 6 à 12 ans et le secondaire 1 dure 3 ans. Hormis les deux années de classes enfantines obligatoires en Suisse les deux situations sont donc identiques et différentes de la France, où le primaire ne dure que 5 ans et le secondaire 1, 4.

Le secondaire 2 dure 3 ans plus un an pour préparer l'entrée dans le supérieur. On a donc une situation très proche de la Suisse romande... En apparence...

Par contre, il n'y a pas de manuel officiel, mais l'on retrouve plusieurs manuels commerciaux belges agréés par l'état ou parfois l'enseignant utilise un polycopié. Le manuel ou le polycopié est gratuit ou payant, cela dépend des établissements. 22% des enseignants belges interrogés disent que leurs élèves ne disposent pas d'une ressource pour l'apprentissage des mathématiques.

3. Les participants

En Suisse l'ancienneté moyenne (11,7) des enseignants qui ont répondu est inférieure à la moyenne globale (14,9) alors qu'en Belgique elle est plus élevée (17,4). Pourtant les âges moyens des enseignants et des élèves sont très proches dans les deux pays et très proches des âges moyens de l'ensemble. Ceci tendrait donc à montrer que les enseignants interrogés en Suisse romande ont commencé leur carrière plutôt tardivement que la moyenne des participants alors que c'est l'inverse pour les Belges. On trouve une légère majorité d'hommes parmi les participants suisses (53.5 %) et de femmes parmi les belges (53.1%).

4. L'accès pour les élèves à des ressources pour l'apprentissage des mathématiques

Pour la première ressource, sans surprise en Suisse romande les réponses sont contrastées entre enseignants du secondaire 1 (83%), lesquels annoncent que la première ressource pour leurs élèves est un manuel, et ceux du secondaire 2 (17%) qui disent que c'est un polycopié. Ceci corrobore ce que nous présentions plus haut.

En Belgique, outre les 22% qui disent que leurs élèves n'ont pas accès à une ressource, les autres se divisent à peu près moitié-moitié entre un polycopié et un manuel, quel que soit le niveau d'enseignement. Il semble donc que la situation belge soit très variée d'autant qu'il existe un nombre impressionnant de manuels (vu la taille du pays), certains sont adaptés de manuels français, mais beaucoup sont des produits locaux.

Concernant la deuxième ressource, le taux de non réponse est très élevé : Suisse (87%) Belgique (90%), nous ne prendrons donc en compte que la première ressource dans la suite.

5. L'origine et le choix des ressources pour les élèves

Interrogés pour savoir qui a produit la ressource, les Suisses répondent très majoritairement un collectif d'enseignants et un organisme officiel ce qui est la situation des moyens d'enseignement romands du secondaire 1. Les Belges eux se partagent très majoritairement en trois tiers à peu près égaux entre un enseignant isolé (qui fait son propre polycopié), un collectif d'enseignants et un éditeur privé. Du coup, en Romandie, le choix incombe à la région linguistique, alors qu'en Belgique, c'est pour moitié un choix individuel de chaque enseignant ou de l'établissement. On voit donc une très nette différence dans l'origine et le choix de la ressource entre les deux régions linguistiques de ces deux pays. Par contre, dans les deux cas, les élèves semblent utiliser cette ressource de façon autonome souvent à environ 30% ou parfois à environ 50% et la ressource semble bien ancrée culturellement puisque très rares sont les enseignants qui disent qu'elle nécessite un adaptation. Donc malgré le grand voisin français, la Belgique francophone et la Suisse romande ont développé, chacune selon un mode différent, une culture propre des ressources pour les élèves.

6. Les ressources utilisées par l'enseignant pour orienter et organiser son cours

Dans les deux pays, les enseignants déclarent faire référence au programme de façon très forte (quasi systématique en Suisse romande). Les documents d'accompagnement et les évaluations officielles semblent avoir un impact très fort en Suisse romande et au contraire assez faible en Belgique. Pour planifier et préparer l'enseignement, dans les deux pays le manuel scolaire arrive largement en tête, suivi par les documents officiels et les sites web, puis les cours des collègues ou des polycopiés. La seule différence vient de ce que les Belges semblent plus utiliser des cours universitaires et des formations continues, là où les Suisses se réfèrent très majoritairement aux documents officiels. Au niveau des ressources utilisées pour enrichir les connaissances ou inspirer l'enseignement, on retrouve les mêmes tendances, en particulier le recours plus marqués des enseignants belges aux livres universitaires et aux formations continues.

7. Le partage de ressources entre enseignants

Pour ce qui est des ressources venant d'autres pays, les situations sont assez semblables et caractéristiques de deux régions francophones de pays limitrophes de la France où l'influence française se fait sentir dans une proportion raisonnable. Les sites web et des manuels québécois (ou belges pour les Suisses, mais jamais l'inverse) sont aussi cités assez souvent. Cependant, malgré la proximité avec la France le besoin d'adaptation est fort dans les deux pays : conformité aux programmes, notations, indicateurs culturels à adapter (monnaie, vocabulaire, ...). Même dans ces pays riches les ressources sont assez peu consultées sous formes numériques, toutefois les suisses semblent plus sensibles à la variété et l'accessibilité des ressources numériques. Bien entendu les enseignants les plus jeunes sont plus utilisateurs des ressources en ligne, qui leur donnent un accès plus immédiat à l'information et une plus grande variété, mais sont aussi un moyen de proposer des exercices d'entrainement en autonomie pour leurs élèves, ou tout simplement d'avoir accès à des corrigés !

Dans les deux pays, partager ou concevoir des ressources avec des collègues proches est une pratique fréquente, elle est par contre exceptionnelle avec des collègues d'autres pays. Enfin parmi les conditions favorables au bon partage des ressources, l'adéquation au programme et l'accessibilité sont largement données en tête, suivies du fait d'avoir fait ses preuves, de pouvoir disposer d'un fiche élève et un guide pour l'enseignant et de retours d'expérience.

8. Conclusions

La Belgique francophone et la Suisse romande sont deux régions linguistiques de deux petits pays bordant la France avec des cultures scolaires fortes. Elles sont à la fois très différentes entre elles mais aussi de la France, avec laquelle il y a un attachement certain mais pas de dépendance, ni de mimétisme. La Belgique francophone se caractérise par une culture d'établissement ou de petites communautés avec comme ressources principales pour les élèves des manuels commerciaux ou des polycopiés, choisis par les enseignants ou au niveau des établissements. Les enseignants semblent attachés à une forte culture universitaire. En Suisse romande, le secondaire 1 se caractérise par un moyen d'enseignement officiel unique et forte référence, au moins dans les déclarations, aux instructions officielles, alors que le secondaire 2 a une culture d'établissement avec souvent un polycopié.

VII. LES CAS CONTRASTÉS DE LA TUNISIE ET DU MAROC

1. Contextes

Dans ces deux pays du Maghreb, la scolarité primaire est de 6 ans pour les élèves de 6 à 12 ans, suivie du collège qui dure trois ans en Tunisie et 4 ans au Maroc et complète la scolarité dite de base. Le secondaire 2 (lycée) dure 3 ans dans les deux pays.

2. Les participants

En Tunisie, les enseignants interrogés sont en moyenne plus âgés (44.9) que la moyenne globale (41.5) avec plus d'ancienneté (18.4 contre 14,9 ans) et des élèves dans la moyenne (15,6 contre 15,1).

Au Maroc, au contraire, les enseignants interrogés sont en moyenne plus jeunes (33.6) avec moins d'ancienneté (10.5 contre 14,9 ans) et des élèves plus vieux (16,3 contre 15,1).

Dans les deux cas, il y a une majorité écrasante d'hommes : 96,4% au Maroc et 73% en Tunisie.

3. L'accès pour les élèves à des ressources pour l'apprentissage des mathématiques

Dans les deux pays, l'accès des élèves à des ressources est un problème, en effet, 39% en Tunisie, 29% au Maroc disent que leurs élèves ne disposent pas d'une ressource.

En Tunisie la première ressource citée par les enseignants interrogés est à 77% un manuel qui est un manuel national officiel payant, 7% un site web, 6% un autre type de livre, 6% un polycopié, et 4% autres. 12% donnent en plus un polycopié et 12% font acheter un autre livre. Quelques-uns seulement se réfèrent à un site web, plus des 2/3 ne citent pas de deuxième ressource.

Au Maroc 90% des enseignants qui ont répondu, citent comme première ressource pour leurs élèves un manuel scolaire et 10% un autre type de livre. Presque la moitié donne en plus un polycopié personnel aux élèves, les autres ne citent pas de deuxième ressource.

Dans les deux pays, dans tous les cas, les élèves doivent acheter le manuel.

Au vu du très faible pourcentage de réponse pour la deuxième ressource, nous ne prendrons en compte que la première ressource dans la suite.

4. L'origine et le choix des ressources pour les élèves

Dans les deux pays, le manuel a été conçu dans le cadre d'un organisme officiel par un collectif d'enseignants. Au Maroc un très faible pourcentage cite des manuels du privé. Par contre si en Tunisie le choix du manuel est inexistant du fait d'un manuel unique d'état, au Maroc, la situation est un peu plus contrastée, le choix national ne représente que la moitié ; l'autre moitié se partageant de façon équitable entre le collectif régional, l'établissement et l'enseignant seul. Cette ressource semble être utilisée assez souvent par les élèves en autonomie en Tunisie. C'est un peu moins vrai au Maroc. En Tunisie, la ressource est considérée comme pas tout à fait adaptée au contexte culturel par un tiers des enseignants, mais cette proportion atteint plus des deux tiers au Maroc, où même 10% disent qu'elle ne l'est pas du tout.

5. Les ressources utilisées par l'enseignant pour orienter et organiser son cours

Dans les deux pays, les enseignants déclarent faire référence au programme de façon très forte en Tunisie, et dans une moindre mesure au Maroc. Les documents d'accompagnement et surtout les évaluations officielles semblent avoir un impact assez fort dans les deux pays. Pour planifier et préparer l'enseignement, dans les deux pays le manuel scolaire arrive largement en tête : Au Maroc, les sites web sont cités avant les documents officiels et les cours universitaires occupent une place importante, alors qu'en Tunisie site web, documents officiels, polycopiés et cours des collègues ont des pourcentages d'apparition assez semblables, les cours universitaires étant très faiblement représentés. Au niveau des ressources utilisées pour enrichir les connaissances ou inspirer l'enseignement, Ce sont cette fois les Tunisiens qui plébiscitent les sites web et citent assez souvent (30%) les cours universitaires et surtout les formations continues (plus de 50%). Les Marocains citent à égalité (environ 45%) les sites web les documents officiels et les livres universitaires, peu les formations continues.

6. *Le partage de ressources entre enseignants*

Pour ce qui est des ressources venant d'autres pays, l'utilisation n'est pas massive puisque seuls 5% des tunisiens (et aucun marocain) disent les utiliser systématiquement, 20-25% disent les utiliser souvent, mais 45% de tunisiens et 75% des marocains disent en utiliser parfois, 25% des tunisiens et seuls 5% des marocains avouent ne jamais en utiliser. En fait, cela reflète des cas très différents révélateurs d'un changement de génération : alors que les plus âgés utilisent des manuels français, les plus jeunes eux utilisent des sites web internationaux. Dans tous les cas, ces utilisations nécessitent des adaptions : conformité aux programmes, problème de langue, notations, indicateurs culturels à adapter (monnaie, vocabulaire, ...).

Au global les ressources sont assez peu consultées sous des formes numériques, toutefois les marocains semblent plus utilisateurs, et avouent un plus fort impact sur leurs pratiques, même si c'est de façon sporadique.

Dans les deux pays, partager ou concevoir des ressources avec des collègues proches est une pratique assez fréquente, elle est par contre exceptionnelle avec des collègues d'autres pays. Enfin parmi les conditions favorables au bon partage des ressources, l'adéquation au programme et l'accessibilité domine.

7. *Conclusions*

En Tunisie comme au Maroc l'accès et l'utilisation des ressources pour les élèves restent en partie problématiques. Le modèle tunisien du manuel d'état semble avoir des limites en termes à la fois d'adéquation au contexte culturel et d'accessibilité. Dans ces deux pays on peut percevoir quelques résidus du passé colonial français, mais surtout chez les jeunes, l'accès des ressources en ligne semble ouvrir vers un autre partage des cultures.

VIII. LES CAS CONTRASTÉS DU SÉNÉGAL ET DE LA COTE D'IVOIRE

Dans ce chapitre, l'étude sur les ressources dans l'espace francophone prend le pari d'interroger, dans la sous-région Afrique francophone au sud du Sahara, les types de ressources mathématiques à disposition des élèves et des enseignants, leur nature, leur origine, les usages et les dimensions culturelles. Elle sera introduite par une description du contexte de l'enseignement des mathématiques au Sénégal et s'appuiera sur les résultats de l'enquête pour exposer quelques perspectives.

1. *Le contexte*

Au Sénégal, le système scolaire et universitaire est organisé en différents cycles, fixés selon l'âge des enseignés et le type de formation recherché : un cycle fondamental (2 ans à 15 ans) ; un cycle secondaire et professionnel (16 à 18 ans) ; un enseignement supérieur. Le cycle fondamental est subdivisé en une éducation préscolaire (2 à 5 ans) et un enseignement polyvalent unique, comprenant successivement un enseignement élémentaire (6 à 11 ans) et un enseignement moyen (12 à 15 ans). Il faut souligner qu'au Sénégal, comme dans la plupart des pays de l'Afrique au Sud du Sahara, l'école dans sa forme actuelle n'est pas très ancienne. La première école du Sénégal est ouverte à Saint Louis en 1817. Saint-Louis était alors la capitale de l'Afrique Occidentale Française qui regroupait outre le Sénégal, le Soudan (le Mali actuel), la Haute-Volta devenue le Burkina Fasso, le Dahomey devenu le Benin, la Mauritanie, le Niger, la Guinée et la Côte d'Ivoire. Ce passé colonial fait que, à part la Mauritanie qui a institué l'Arabe comme seule langue officielle du pays, tous les autres pays ont le Français comme langue officielle d'enseignement au collège et au lycée (12- 18 ans) et ont des systèmes éducatifs très proches de celui de la France. En particulier, il y a obligation scolaire jusque la fin du collège (15-16 ans) et le lycée en 3 ans. Mis à part le Mali qui a le collège en trois ans, les autres pays ont maintenu l'héritage du système français avec le collège en quatre ans. Il faut attendre 1962 pour trouver une structure de formation d'enseignants du cycle moyen et du secondaire : le *Centre Pédagogique Supérieur*. Cette structure qui est devenue la *Faculté des Sciences et Technologie de l'Education et de la Formation* en plus de la formation des enseignants a également pour mission la conception, la production et l'évaluation des matériels didactiques. On peut donc dire que la problématique des ressources a toujours été au cœur des politiques d'éducation dès qu'il s'est agi de l'enseignement moyen et secondaire.

Au Sénégal, la population est essentiellement jeune (plus de 50 % sont âgés de moins de 20 ans). Avec un taux d'accroissement annuel de 2,7 %, la population des élèves en âge du préscolaire passera de à peine 1,5 millions en 2011 à plus de 2 millions en 2025. En s'appuyant sur la population scolarisée, on constate que cette évolution démographique ne s'est pas forcément accompagnée d'une performance du système éducatif (tableau 2 ci-dessous)[2]. La faible qualité de l'enseignement est, selon les autorités politiques, fortement liées à l'insuffisance des manuels et matériels didactiques mis à la disposition des élèves et des personnels.

Cycles	Age des élèves	Nombre d'élèves	Nombre d'élèves filles	Nombre de personnes enseignant les mathématiques	Nombre de femmes enseignant les mathématiques
Elémentaire	[6, 12[	1 805 170	929 209	45 286	13 669
Moyen	[12, 16[	711 710	356 337	4 543	589
Secondaire	[16, 19[	359 956	111 447	1 010	82

Tableau 2 – *Effectif par cycle des élèves et des professeurs de mathématiques du Sénégal*

Cette faible performance est encore plus criante en mathématiques. Les statistiques du Ministère de l'Education Nationale, nous montrent que les effectifs des élèves dans les séries scientifiques, qui sont déjà très faibles, diminuent de la 2nde Science à la terminale et passent de 27 819 à 20 267. Cette baisse des effectifs se manifeste également au baccalauréat : les candidats des séries Sciences et Techniques représentent moins de 23 % des effectifs des élèves. Cette faible performance est partagée par la plupart des pays de l'Afrique au Sud du Sahara[3].

[2] Données statistiques du Ministère de l'Education Nationale http://www.education.gouv.sn/root-fr/upload_pieces/Rapport%20National%202013.pdf

[3] Ce rapport fait suite à l'Ecole de Didactique et des mathématiques de Bamako. Il fait le point sur la situation de l'enseignement des mathématiques en Afrique francophone au sud Sahara en s'appuyant sur la situation du Burkina Faso, de la Côte d'Ivoire, du Mali, du Niger et du Sénégal.

2. Les participants

Au Sénégal comme en Côte d'ivoire, compte tenu de la faible participation des enseignants à l'enquête, une grande prudence s'impose quant aux conclusions qu'il faille tirer de leur réponse (130 au Sénégal et 63 en Côte d'Ivoire). Malgré tout on peut noter deux indications intéressantes :

- La faible représentation de femmes (18% pour le Sénégal et 27 % pour la Côte d'Ivoire) ne fait que confirmer les faibles effectifs des femmes professeurs de mathématiques dans la sous-région. Au Sénégal par exemple, les femmes professeurs de mathématiques représentent moins 12% des professeurs de mathématiques (764 sur les 6939). Ce taux faible pousse à interroger sur les représentations que les sociétés se font des mathématiques et des femmes professeurs de mathématiques (Kanda & al 2014).
- Un second constat est l'âge moyen des enseignants qui reflète en partie la jeunesse de la population (38,5 ans pour les sénégalais et 38 ans pour les ivoiriens contre 43 ans pour les français). Les réponses montrent aussi que les sénégalais bien que plus âgés sont moins expérimentés que les Ivoiriens (11,5 ans pour le sénégalais contre et 12 ans pour les ivoiriens). Etant donné que les deux pays ont les mêmes dispositifs de formation et de recrutement, cette différence pourrait s'expliquer par le fait que les sénégalais, après leur diplôme, ne vont directement dans l'enseignement au Sénégal. Les jeunes sénégalais préféraient parfois aller en Côte d'Ivoire, y enseigner pendant quelques années avant de repartir dans leur pays. L'inverse est rare voire inexistant. Les raisons de cette « attractivité » de la Côte d'Ivoire sont à chercher dans les traitements salariaux.

3. L'accès pour les élèves à des ressources pour l'apprentissage des mathématiques

La question de l'accès aux ressources est très sensible en Afrique. Elle est très complexe lorsqu'il s'agit de ressources pour l'apprentissage des mathématiques. En effet, si au Sénégal l'enquête montre que 45 % des élèves disposent gratuitement de la première ressource choisie par le professeur, en Côte d'Ivoire, seulement 2% des élèves en disposent. Cependant, en Côte d'Ivoire, en dépit de la non gratuité, 90% des élèves disposent de ressource contre 78% pour les jeunes Sénégalais. Pourquoi les élèves sénégalais n'ont pas de ressources à leur disposition malgré la « gratuité »? La réponse à cette question est à rechercher dans les choix faits par les enseignants Sénégalais de ne pas utiliser les manuels dits de l'« USAID » qui sont gratuits. Ils les considèrent très loin de la culture scolaire sénégalaise, et leur préfèrent souvent les manuels « Excellence » qui ne sont pas gratuits.

Il faut souligner qu'en Afrique au Sud du Sahara, le manuel est la principale ressource pour l'apprentissage des mathématiques, or il n'existe pas actuellement de manuels conformes aux programmes d'enseignement. Parmi les manuels les plus utilisés, ceux de la Collection Interafricaine de Mathématique « CIAM » qui date des années 90 demeure, malgré les changements de programmes, la ressource de référence. Ce qui pose un problème d'obsolescence. Si pour Choppin (2005) les quatre fonctions essentielles du manuel sont : *référentielle, instrumental, idéologique et culturelle, documentaire*, on comprend pourquoi en Côte d'Ivoire, sur les 68 % des usagers des manuels CIAM plus de 62% n'en sont pas satisfaits.

---

http://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/docs/Rapport_final._10_2012_website.pdf .

4. *L'origine et le choix des ressources pour les élèves*

Les origines et les choix des ressources utilisées par les élèves du Sénégal et de la Côte d'Ivoire sont diverses (voir figure 10 et 11 ci-dessous). 53% des répondants sénégalais et 43% des répondants ivoiriens attribuent à un collectif national le choix de la première ressource utilisée par les élèves ; dans le cas de la Côte d'Ivoire, ce pourcentage peut être doublé, car tous les répondants ayant choisi la réponse « autre » l'associent au Ministère, à l'Inspection générale ou à un autre regroupement lié à l'État. Il demeure néanmoins possible qu'il y ait ici des écarts entre les réponses des enseignants et la situation de terrain.

Les deux-tiers des enseignants ivoiriens interrogés estiment que les ressources ont été conçues par un organisme officiel d'état. Or, la plupart d'entre eux utilisent les manuels de la collection CIAM qui, pour Touré (2002) ont été rédigés par des équipes d'enseignants, de chercheurs et de responsables pédagogiques africains, belges et français. Seulement, ayant l'impression de travailler avec des ressources imposées par l'autorité, 71% enseignants ivoiriens jugent ainsi la première ressource de leurs élèves « pas tout à fait adaptée » (56%) ou même « pas du tout adaptée » (15%) au contexte culturel dans lequel ils enseignent. Ces pourcentages sont respectivement de 28% et 1% au Sénégal, là où les enseignants et l'école sont davantage impliqués dans le choix de la première ressource.

Alors que, la maison d'édition qui a conçu tous les manuels et guide pour les enseignants est EDICEF, seulement 5% des Ivoiriens et 14% des Sénégalais estiment que l'éditeur est privé.

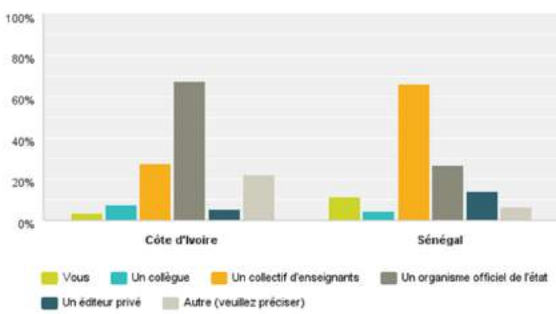


***Figure 10** – Origine de la première ressource utilisée par les élèves ivoiriens et sénégalais*

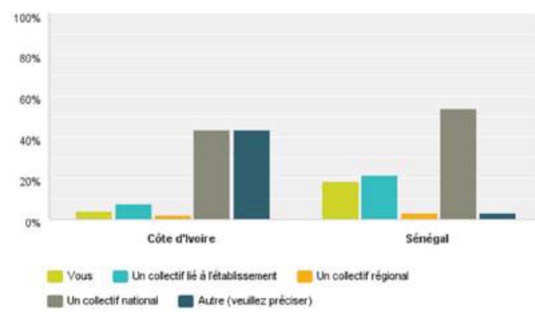


***Figure 11 –** Responsables du choix de la première ressource pour les élèves ivoiriens et sénégalais*

5. *Les ressources utilisées par l'enseignant pour orienter et organiser son cours*

A la question, « pour préparer vos cours prenez-vous en compte le programme officiel ? » 98% des Ivoiriens et tous les Sénégalais disent le consulter souvent ou même systématiquement. S'agissant des évaluations officielles, 81% des Ivoiriens et 87% des Sénégalais disent en tenir compte souvent ou systématiquement pour la préparation de leur cours, mais les Ivoiriens paraissent s'y référer plus systématiquement (57% contre 48% pour le Sénégal).

A la question, si un autre document officiel joue un rôle important dans la planification de votre enseignement, 17 enseignants sénégalais sur les 130 ont mentionnés les guides du programme de collège et un seul a cité ses anciens cours en formation initiale. Ces résultats poussent à s'interroger sur l'impact de la formation initiale et des sessions de formation continue sur le travail documentaire de l'enseignant.

6. Le partage de ressources entre enseignants

Pour ce qui est de l'utilisation des ressources venant d'autres pays, les Ivoiriens, plus que les Sénégalais, utilisent souvent ou systématiquement des ressources venant d'autres pays (59 % contre 41 %) et en même temps, les adaptent au contexte dans lequel ils enseignent : 56 % des Ivoiriens interrogés disent qu'ils adaptent souvent les ressources venant d'autres pays alors seulement 28% des Sénégalais le font. Sénégalais et Ivoiriens estiment que l'impact de la variété des ressources numériques sur les pratiques est non négligeable (46 % des Sénégalais et 41 % des Ivoiriens).

Concernant les conditions qui favoriseraient le partage de ressources entre enseignants, Sénégalais et Ivoiriens disent qu'ils partagent leurs ressources plus avec leurs compatriotes (65 % des Sénégalais et 56 % des Ivoiriens le font souvent ou systématiquement) qu'avec des collègues d'autres cultures ou d'autres pays (11 % des Sénégalais et 19 % des Ivoiriens). On comprend dès lors, pourquoi Sénégalais et Ivoiriens s'accordent, pour le partage de ressources, sur l'adéquation des ressources aux programmes d'enseignement. Ils accordent une place non négligeable à l'accessibilité des ressources (plus de 65 % des sénégalais) et à la de la pertinence pédagogique. Il faut noter que l'accessibilité avec la réutilisabilité, l'adaptabilité, la collaboration, la reconnaissance, la durabilité et l'interopérabilité et la pertinence pédagogique sont les principales caractéristiques d'une ressource de qualité (CREPUQ - Novasys 2003, p. 3).

7. Conclusions

L'étude sur les ressources est très opportune dans l'espace francophone, elle l'est encore plus en Afrique au sud du Sahara. Dans l'espace francophone les facilités de diffusion actuelles via les dispositifs numériques que l'on retrouve dans certains pays ne doivent pas se confondre avec une disponibilité des ressources à la disposition de l'élève et de l'enseignant. Même si la question de l'accessibilité se pose presque partout, suivant les catégories d'enseignants et les pays d'origine, les significations peuvent être différentes. Au Sénégal comme dans la plupart des pays de l'Afrique au sud du Sahara, l'accessibilité se pose en termes de connectivité et de disponibilité du matériel informatique. En Mauritanie, comme en Algérie, la langue d'enseignement au collègue et au lycée étant l'arabe très peu d'enseignants de ces deux pays ont répondu à l'enquête. Dans ces deux pays, le problème d'accessibilité peut se poser en termes de langue d'enseignement.

L'étude montre également comment les défis sur l'éducation pourraient être amplifiés par une poussée démographique. Avec deux milliards d'habitants en 2050, les dispositifs numériques pourraient apparaitre en Afrique subsaharienne comme une solution aux difficultés liées au manque de ressources suffisantes et adéquates pour les élèves et les professeurs. Cependant, ces dispositifs numériques feront naître d'autres interrogations : comment solutionner de façon urgente et durable les questions relatives à la conception et à l'usage de ressources de qualité, si les questions relatives à l'électricité et à la connectivité ne sont pas résolues ? Comment encourager l'usage ou la conception de ressources si l'on ne labélise pas des sites et de leur accorder par exemple le statut site reconnu d'intérêt pédagogique. Les fonctions essentielles du manuel et les principales caractéristiques d'une ressource mentionnées plus haut pourraient être retenues parmi ces critères de labélisation.

IX. DISCUSSION

Le travail que nous avons mené à travers ce sondage et l'analyse des résultats visait à obtenir des informations, les plus précises possibles, concernant les ressources à disposition des élèves et des enseignants, leur nature, les conditions et les acteurs de leur réalisation et de leur diffusion. Nous voulions également repérer des éléments permettant d'informer sur les pratiques liées à leurs utilisations. Lors des analyses, nous avons essayé de comprendre et d'interpréter ces données en faisant référence aux contextes culturels des différents pays participant au sondage.

Nous ne reviendrons pas dans cette dernière partie sur les conclusions que nous avons tirées pour chacune des cas étudiés ci-dessus, nous préférons plutôt mettre en avant les questions qui sont restées ouvertes à l'issue de ce travail et les pistes qu'elles ouvrent pour de nouvelles recherches. Toutefois, avant de présenter ces questions, il est important de souligner que notre sondage reste modeste sur le plan quantitatif, puisque notre enquête n'a touché qu'un faible pourcentage des enseignants des pays de l'espace francophone et que leur répartition est très inégale selon les pays et ne reflète pas toujours leur taille. De plus, nous pouvons supposer que les enseignants auprès desquels le questionnaire ait été diffusé ont parfois un profil particulier, du fait qu'ils se trouvaient sur des listes de diffusion auxquelles nous, chercheurs et formateurs, avions accès. Ceci, d'un point de vue méthodologique introduit un biais quant à la généralisation de nos résultats. Cependant, d'une part, la concordance des résultats concernant plusieurs thèmes du sondage parmi tous les pays concernés et d'autre part, les comparaisons que nous avons effectuées entre des pays, culturellement proches, procurent une validation interne qui peut prétendre à une généralisation !

Le parcours et la comparaison des analyses des différents pays ont donné lieu à des questions qui ont été soumises à la discussion à la fin de la table ronde. Ces questions peuvent être regroupées en différentes catégories. Nous les donnons ici en conclusion, sans toutefois rendre compte des débats qui ont lieu, tant ils sont restés à l'état d'esquisses de réponses qui pourraient faire l'objet d'investigations plus poussées au sein de l'EMF, à exposer lors des prochains colloques.

La première concerne la nature des ressources et leurs impacts sur les pratiques enseignantes :

- En quoi le format des documents officiels conditionne-t-il le travail de l'enseignant?
- Quels sont les impacts des contextes économiques sur le rapport enseignant-ressource ?
    - Effets de la non-disponibilité des manuels sur les pratiques des enseignants
    - Effets d'un marché hautement concurrentiel sur les choix des enseignants

La deuxième catégorie s'intéresse à la question de la diffusion et de l'appropriation par les enseignants

- Quel accompagnement pour la ressource (document officiel ou manuel de l'élève) ?
- Quel degré de liberté/créativité pour l'enseignant ?
- Y a-t-il des ressources qui nécessitent un accompagnement particulier ?
- Sous forme de document ou de formation ?

La dernière catégorie se situe dans une démarche prospective :

- Les ressources en ligne doivent-elles être conçues *avec* les enseignants ?
- Quels rôles pour les plateformes collaboratives ?
- Quels contenus et formats privilégiés pour une meilleure transférabilité ?

A l'issue de ce travail, nous souhaiterions terminer par une question qui nous paraît devenir une évidence au regard de la recherche en didactique : Le triangle didactique classique (enseignant, élève, savoir) devrait-il être modifié pour intégrer plus systématiquement une quatrième composante, celle des ressources pour l'élève et pour l'enseignant ? Ce serait reconnaître l'importance et la variété croissantes de ces ressources, lesquels agissent autant comme outil de médiation que comme constituant du milieu didactique. Et, face aux possibilités accrues de collaboration, de développement et de partage de ressources entre enseignants, il conviendrait sans doute d'examiner le caractère pluriel de ce « nouvel enseignant » !

REFERENCES

Adler J. (2000) Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, 205-224.

Davis E.A., Krajcik J.S. (2005) Designing Educative Curriculum Materials to Promote Teacher Learning. *Educational Researcher* 34, 3-14.

Choppin, Alain (2005) L'édition scolaire française et ses contraintes : une perspective historique, in Bruillard (2005).

Gueudet G., Trouche L. (2010) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Presses Universitaires de Rennes.

Hitt F., Maschietto M., Trgalová J., Sokhna M. (2012) Ressources et développement professionnel des enseignants – Compte-rendu du Groupe de Travail n°6, in Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle. Actes du colloque EMF 2012, Genève, 3-7 février 2012* (pp. 772–782). Actes électroniques : https://www.emf.unige.ch/index.php/actes-emf-2012/groupe-de-travail-6/

Kanda J., Kane A., Fall M., Diarra A., Faye O. (2014) *Etude des représentations que les élèves ont des Mathématiques et des Professeurs de Mathématiques Femmes*. Mémoire de fin d'étude à la fastef-ucad de Dakar, Département de mathématiques.

Touré S (2002) *L'enseignement des mathématiques dans les pays francophones d'Afrique et de l'Ocean Indien*. ZDM, The International Journal on Mathematics Education 34(4), 175-178.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ARTICULATIONS, DIALECTIQUES ET INTERACTIONS ENTRE MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUE EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES: ORIGINES ET ÉTATS DU DOMAINE D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

Compte-rendu du Groupe de Travail n°1

Lalina COULANGE[*] – Christine DEL NOTARO[**] – Jérôme PROULX[***]

I. INTRODUCTION

Le thème de ce groupe de travail était relativement nouveau. L'articulation des connaissances mathématiques et didactiques avait certes été au cœur du travail du GT1 d'EMF 2012 mais uniquement dans sa dimension liée la formation mathématique des enseignants (Clivaz, Proulx & Sangaré, 2012). Il nous est apparu intéressant d'adopter dans le cadre de ce nouvel EMF 2015 une perspective plus ouverte sur les articulations, les dialectiques et les interactions entre mathématiques et didactiques, qui ne soit pas uniquement relative à des problématiques de formation d'enseignants, et qui soit à même de problématiser des questions épistémologiques sur le domaine de recherche en didactique des mathématiques, sur sa genèse et/ou ses évolutions.

Un total de 9h de travail suivant 5 séances ont permis à un petit groupe de participants (d'une dizaine de personnes sur la première séance) de travailler dans un esprit collaboratif. La première plage de travail a été consacrée à une relecture (par binôme) de textes et à une élaboration de questions aux communicants dont ils pouvaient se saisir lors de leurs présentations. Ce dispositif de travail de questions a semble-t-il été globalement apprécié par les participants et/ou les communicants (qui ont vraiment joué le jeu de participer à rédiger des questions et/ou d'apporter des éléments de réponse aux questions posées à l'occasion de leurs présentations). Cinq présentations de travaux ont ensuite été faites sur la base des communications acceptées dans le groupe de travail. Si on a pu regretter que les participants aient été assez peu nombreux, la diversité des profils représentés dans ce petit groupe de travail (7 didacticiens, 2 mathématiciens, 1 historienne) ont permis des échanges

[*] Université de Bordeaux et ESPE d'Aquitaine – France – lalina.coulange@espe-aquitaine.fr
[**] Université de Genève – Suisse – christine.delnotaro@unige.ch
[***] Université du Québec à Montréal – Canada – proulx.jerome@uqam.ca

Coulange L., Del Notario C., Proulx J. (2105) Articulations, dialectiques et interactions entre mathématiques et didactique en didactique des mathématiques: origines et états du domaine d'étude et de recherche - *Compte rendu du Groupe de Travail n°1.* In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*– Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 67-72.

particulièrement riches en réaction aux présentations et/ou plus généralement sur la thématique annoncée du GT1.

II. L'APPEL DE TEXTES INITIAL ET SA REALISATION

La question de l'articulation entre mathématiques et didactique nous semblait pouvoir intéresser la communauté internationale de didactique des mathématiques (mais aussi d'autres chercheurs, tels des mathématiciens et des historiens des mathématiques). Trois axes de travail complémentaires ont été projetés en amont de ce groupe.

Le premier axe très large concernait la nature de la didactique des mathématiques (son origine, sa source, son émergence, ses contextes institutionnels, etc.). En plus d'offrir un point de vue épistémologique sur ce champ d'étude et de recherche, pour mieux saisir son (ou ses) identité(s), cette entrée quelque peu historico-culturelle avait pour but de discuter les interactions entre didactique des mathématiques et mathématiques et le rôle de ces interactions dans l'émergence du champ de recherche didactique. Le deuxième axe abordait la question de la didactique des mathématiques « aujourd'hui », soit sa nature, ses intentions, ses enjeux et ses orientations contemporaines. Ce deuxième axe concernait également les interactions entre des dimensions mathématiques et didactiques dans les travaux de recherche actuels en didactique des mathématiques. Le troisième axe (davantage en continuité du GT1 de EMF 2012) abordait la question des incidences des interactions entre mathématiques et didactique des mathématiques pour la formation des enseignants.

Dans les faits, les contributions qui ont nourri le travail du groupe ne s'inscrivent pas de manière explicite dans un axe donné. Quatre communications se situent davantage à l'articulation des axes 1 et 2 (sur l'épistémologie et les évolutions du champ de recherche en didactique), tout en recouvrant une diversité d'apports.

La contribution de Mopondi & al. se centre *a priori* sur un objet de savoir mathématique précis (les équations) à enseigner au niveau du secondaire : la présentation a offert l'occasion d'échanger sur des descriptions possibles didactiques et/ou mathématiques de cet objet, et même plus généralement du thème d'étude afférent (l'algèbre). Qu'est-ce qui caractérise l'algèbre et/ou les savoirs algébriques selon différents points de vue : en didactique, en mathématiques et/ou en histoire des mathématiques ?

Les contributions d'Artigue et de Dorier se situent toutes deux à une autre échelle (plus macro-didactique), avec un point de vue davantage surplombant. La communication de Dorier questionne les relations possibles entre l'épistémologie des mathématiques, les mathématiques et certains des courants fondateurs théoriques de la didactique des mathématiques (ce qui a permis de revenir aux « origines du champ didactique »). La présentation a permis d'ouvrir sur des échanges pour de nouvelles articulations possibles. Celles-ci pourraient prendre appui sur l'actualité des recherches en histoire des mathématiques qui tend à rapprocher ce champ de recherche davantage de la didactique (avec des études en histoire des mathématiques à même de nourrir une étude en didactique et/ou inversement) du fait de questions de recherche communes dans l'étude du développement des connaissances mathématiques ou des conditions de leur développement (sociétales ou institutionnelles).

La communication d'Artigue retrace un historique éclairant des configurations et reconfigurations des paysages des communautés de recherche en didactique et en mathématiques. Sa présentation a permis d'ouvrir sur la possibilité d'envisager de nouvelles relations entre les mathématiques et la didactique des mathématiques qui tiendraient compte des évolutions des recherches (en didactique, en mathématiques, en histoire des mathématiques). Il s'agit d'investir des recherches sur des objets communs qui occasionnent des pratiques partagées de mathématiciens, d'historiens des mathématiques et de didacticiens et qui permettent d'expérimenter la valeur ajoutée des complémentarités de ces champs de recherche. Par exemple, des questions liées à la popularisation et/ou la vulgarisation des mathématiques, à l'enseignement ou l'apprentissage des mathématiques dans la transition lycée – université (y compris dans des filières non scientifiques) peuvent représenter des thématiques de recherche porteuses dans ce sens. Pour que de telles pratiques collaboratives voient le jour, la communauté des chercheurs didacticiens doit veiller à renforcer la communication de ses travaux de recherche à l'extérieur du seul champ de la didactique des mathématiques.

Deux communications s'inscrivent davantage dans le troisième axe thématique annoncé. Les communications de Coulange & Robert et de Deruaz & Buenzli renouvellent des questions abordées dans le GT1 précédent en envisageant sous un jour nouveau les relations entre les mathématiques et la formation des enseignants du primaire et du secondaire. Elles ont permis aux participants du groupe de formuler des questions communes au regard des contextes différents de formation évoqués de formation initiale d'enseignants du secondaire et du primaire. La réflexion théorique engagée dans la contribution de Coulange & Robert et le dispositif de formation initiale élaboré et mis en œuvre dans Deruaz & Buenzli reposent sur un pari commun : celui d'un enrichissement réciproque entre mathématiques et didactique des mathématiques dans la formation. La didactique fournit ainsi des outils à la fois théoriques et méthodologiques à même de fonder des dialectiques productives entre les mathématiques et la didactique dans la formation des futurs enseignants du primaire ou du secondaire. Les discussions qui ont suivi les présentations ont porté sur ce qui pouvait fonder de tels cercles vertueux et, par là-même, de conforter la part des mathématiques dans l'activité enseignante.

III. AU FIL DES ECHANGES…

Il serait difficile de retracer les échanges particulièrement riches dans le cadre de ce « petit » groupe de travail. Toutefois, nous pouvons citer quelques-unes des questions qui se sont posées « au fil des échanges » et qui illustrent selon nous la richesse des discussions au sein du GT :

- L'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre : en quoi les situations de dénombrement et/ou géométriques peuvent-elles constituer des « bons objets » pour le développement des connaissances algébriques (à la fois d'un point de vue historique et didactique) ? En quoi le « retournement » de formules algébriques, qui convoque le caractère réversible de certaines opérations numériques, représente-t-il un saut conceptuel dans l'activité mathématique ? Comment caractériser les relations entre les opérations (comme la multiplication) et des lois de composition externes ou internes, des dimensions d'espaces vectoriels, et ce, à la fois d'un point de vue mathématique et didactique ?
- L'évolution des pratiques sociales ou mathématiciennes des mathématiques : par exemple en géométrie, comment prendre en compte des changements probables de pratiques sociales d'appréhension et de modélisation de l'espace ? Comment prendre en charge ces évolutions des pratiques mathématiques ou mathématiciennes dans la recherche en mathématiques et en didactique des mathématiques ?
- Les pratiques enseignantes et la formation des enseignants : en quoi des éléments relatifs aux différents raisonnements mathématiques et à la mise en forme de ces raisonnements peuvent-ils se constituer en obstacle dans l'activité enseignante (avec

des phénomènes de tension entre la « forme » et le « fond » au sein de la classe de mathématiques) ? Quelles sont les conditions nécessaires (voire suffisantes) pour une formation initiale (ou continue) d'enseignants à même de conforter ou de renforcer la part mathématique des pratiques enseignantes ?

IV. CONCLUSIONS : PERSPECTIVES POUR UN FUTUR ESPACE DE TRAVAIL COLLABORATIF

Ce groupe de travail nous a semblé très attendu au sein d'un colloque tel que EMF 2015, qui offre la possibilité de temps de travaux communs pour les chercheurs didacticiens, historiens ou mathématiciens, formateurs ou enseignants de mathématiques. Malgré un petit nombre de participants, il a de fait permis des échanges très intéressants et prometteurs que nous avons essayé de retracer brièvement ci-avant. Pour autant, au regard du projet ambitieux que recouvrait l'appel à contribution, on peut en retirer l'impression qu'on « l'attend toujours »…

L'intérêt du travail conduit lors des différentes séances a résidé, en partie, dans les croisements de points de vue entre didacticiens, mathématiciens et historiens des mathématiques sur des objets d'étude possiblement partagés. Plus qu'un espace visant à interroger les articulations entre mathématiques et didactique dans le champ de recherche en didactique des mathématiques, ou pour interroger l'épistémologie de ce champ, c'est peut-être un espace de travail plus ouvert et collaboratif entre les différentes communautés de recherche (en mathématiques, en didactique et en histoire des mathématiques, voire en philosophie des sciences) qu'il s'agit de projeter pour le prochain colloque d'EMF. Les participants du groupe semblaient converger sur ce point. Toutefois, un tel espace de travail partagé ne prend pas nécessairement la forme d'un GT avec appel à communication, du fait de l'absence de travaux de recherche centrés à ce jour sur de telles questions. Cela semble nécessiter d'identifier en amont des chercheurs didacticiens, mathématiciens, historiens ou philosophes potentiellement intéressés et se situant déjà soit de par des premiers travaux collaboratifs, soit de par leurs engagements (par exemple, au sein d'associations) à la croisée de différents champs de recherche en lien avec les mathématiques et leur diffusion, et à même d'impulser ou de coordonner ce type de collaborations. Ces regards croisés peuvent davantage prendre la forme d'une table ronde ou d'un projet spécial, avec un travail à mener en amont pour poser les jalons d'une discussion à venir sur cette thématique, dans le contexte de l'Espace Mathématique Francophone. Une enquête préalable visant à renseigner les collaborations existantes à ce jour ou permettant d'identifier des axes communs de recherche à la croisée de ces différents champs de recherche peut également constituer une voie intéressante. Précisons, enfin, que rien n'empêche en parallèle de ce travail collaboratif de projeter un Groupe de Travail qui se situe davantage en continuité des précédents GT1 : sur l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques des enseignants dans les pratiques enseignantes et dans leur formation.

LISTE DES CONTRIBUTIONS

Artigue, M. : Didactique des mathématiques et mathématiques : des relations à la fois cruciales et problématiques, culturellement situées.

Coulange, L., Robert, A. : Les mathématiques dans les activités du professeur – conséquences pour la formation.

Deruaz, M., Buenzli, L-O. : L'utilisation des degrés de certitude comme outil de professionnalisation en formation des maîtres du premier degré.

Dorier, J-L. : Dimensions épistémologique de la didactique des mathématiques.

Hategekimana Luanda, E. : De la contextualisation à la décontextualisation des connaissances mathématiques en milieu scolaire.

Mopondi Bendeko Mbunbu, A.., Moleka Batumbi, O., Mugaru Dawa, B.: Évolution de l'enseignement de la notion d'équation en République Démocratique du Congo : établissement de la capitale Kinshasa

REFERENCES

Artigue M., Douady R. (1986) Histoire de la didactique des mathématiques en France. *Revue française de pédagogie* 76, 69-88.

Bednarz N. (2001) Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 1(1), 61- 80.

Bloch I. (1997) Connaissances mathématiques de l'enseignant pour l'enseignement. *Petit x*, 45, 5-24, IREM de Grenoble.

Bulf C., Coulange L. (2012) Usages de la théorie des situations didactiques dans la formation en mathématiques de futurs professeurs des écoles. In Elalouf M., Robert A., Belhadjin A., Bishop M.-F. (Eds.), *Les didactiques en question(s), Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation*. De Boeck, Coll. Perspectives en éducation et formation.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Didactique des mathématiques 1970-1990. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brun J. (1994) Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1981) *La Transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Clivaz S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner : analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire*. Thèse de doctorat, Université de Genève.

Clivaz S, Proulx J., Mamadou S. S. (2012). Synthèse du GT#1 – Articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement : pratiques et formation. In *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF2012)*. Genève, Suisse. http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Conne F. (1992) Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Didactique des mathématiques*. Delachaux et Niestlé, Lausanne, Paris, 1996.

Del Notaro C. (2013) Colloque *Circulation des savoirs entre recherche et formation* - IUFM de Saint-Germain-en-Laye, 29-30 mai 2013 « Quelle circulation des savoirs entre une tâche issue de la recherche et son application en formation initiale ? »

Houdement C. (2013) *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherches en didactique des mathématiques*. Note de synthèse en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches. Paris Diderot.

tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/95/71/66/PDF/Houdement_hdr.pdf

Martinand J.-L. (1993) Organisation et mise en oeuvre des contenus d'enseignement. *Actes de colloque Recherches en didactiques: contribution à la formation des maîtres, 13-15 février 1992* (pp. 25-26). Paris: Éditions Jacques Colomb.

Moon B. (1986) *The 'new maths' curriculum controversy: An international story*. London : Falmer Press.

Proulx J., Corriveau C., Squalli H. (2012) *Formation mathématique pour l'enseignement des mathématiques. Pratiques, orientations et recherches.* Presses de l'Université du Québec.

Proulx J. (2012) De l'existence de mathématiques de la didactique : Réflexions sur l'articulation entre mathématique et didactique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF-2012*. Genève, Suisse : EMF.

Proulx J. (2013) *De la didactique des mathématiques au Québec : entretiens avec ses bâtisseurs.* Québec : Presses de l'Université du Québec.

Sierpinska A. (2002) Perspectives sur les recherches en didactique des mathématiques. ZDM: *The international journal on mathematics education* 34(4), 164-174.

Sierpinska A., Kilpatrick J. (1992) *Mathematics education as a research domain : in search for identity*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht, Netherlands.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATIQUES : DES RELATIONS À LA FOIS CRUCIALES ET PROBLÉMATIQUES, CULTURELLEMENT SITUÉES

Michèle ARTIGUE

Résumé : Dans cette contribution, je m'appuierai d'abord sur mon expérience personnelle pour réfléchir aux relations entre didactique des mathématiques et mathématiques en France, à partir de la vision interne que j'ai de leur histoire depuis les années 70, et des conditions et contraintes qui les ont façonnées. J'essaierai ensuite d'élargir la perspective, en m'appuyant sur mon expérience internationale, pour montrer que cette histoire, bien que singulière, partage avec d'autres des éléments communs, mais aussi que la comparaison avec d'autres contextes peut aider chacun d'entre nous à mieux comprendre sa communauté didactique, avec ses forces et ses faiblesses.

Mots-clefs : Mathématiques, Didactique des mathématiques, Interactions mathématiques-didactique, histoire de la didactique des mathématiques

Abstract – In this contribution, I will use first my personal experience to reflect the relationships between mathematics education and mathematics in France, relying on the internal vision I have of their history since the 70s, and of the conditions and constraints that have shaped them. Then I will try to broaden the perspective, using my international experience, to show that this history, although unique, shares some similarities with others, but also that the comparison with other contexts can help each of us to better understand her didactic community, with its strengths and weaknesses.

Keywords: Mathematics, Didactics of Mathematics, Mathematics education, Interaction between mathematics and didactics, history of mathematics education

I. INTRODUCTION

La question des rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques est une question complexe car ces rapports comme leur évolution au cours du temps mettent en jeu de nombreux déterminants, scientifiques, institutionnels et humains. Ils sont souvent perçus comme difficiles parce que rabattus sur leur dimension humaine, perçus à travers les rapports de communautés dont les relations sont souvent empreintes d'incompréhension mutuelle, de méfiance, et parfois ouvertement conflictuelles. Dans cette contribution, sans nier cette composante humaine et son influence, je souhaite aussi ne pas me laisser piéger par elle, car cela me semble nécessaire pour apporter une contribution utile aujourd'hui à la réflexion. Je m'appuierai fortement sur mon expérience personnelle et la réflexion sur ce vécu pour faire un certain nombre d'observations et poser un certain nombre de questions. Je me limiterai dans un premier temps à la vision de ces rapports que nous donne à voir l'histoire de la communauté de didactique des mathématiques française à laquelle j'appartiens quasiment depuis ses débuts. Il s'agit là d'une histoire intéressante, riche d'enseignements mais aussi

Artigue M. (2015) Didactique des mathématiques et mathématiques : des relations à la fois cruciales et problématiques, culturellement situées. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 73-80.

d'une histoire particulière. C'est pourquoi dans un second temps, j'élargirai la perspective en essayant de situer cette histoire dans un panorama plus large. Je m'appuiera pour cela, outre sur mon expérience de chercheuse, sur mon expérience au sein de l'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) et de son comité exécutif qui m'a amenée à approcher ces questions sous un angle plus international, plus politique aussi. Cette mise en perspective me permettra de montrer que le cas français, bien que singulier, partage avec d'autres bien des éléments communs, mais aussi que la comparaison avec d'autres contextes peut aider chacun d'entre nous à mieux comprendre sa communauté didactique, ses forces et ses faiblesses.

II. MATHEMATIQUES ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES : UNE HISTOIRE PARTICULIERE

La question des rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques est une question sur laquelle j'avais déjà eu à travailler pour l'étude ICMI concernant la recherche en éducation mathématique dont les résultats ont été publiés en 1998 (Artigue 1998). Je m'étais déjà penchée à l'époque sur la situation française. J'expliquais que, pour la comprendre, il fallait prendre en compte l'engagement historique dans les questions d'enseignement mathématique de mathématiciens français de premier plan tels Borel, Hadamard, Lebesgue, Poincaré, pour ne citer que quelques noms emblématiques, ensuite la structure si particulière des IREMs (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) qui, dès le début des années 70, ont soutenu l'émergence d'une recherche didactique proche des institutions mathématiques, des collaborations, des migrations, qui ont fait de notre communauté didactique pendant longtemps une communauté considérée comme particulièrement mathématisée[49].

A quelques notables exceptions près, et on ne peut manquer de penser ici à Gérard Vergnaud, l'ancrage disciplinaire des fondateurs de la didactique française était l'ancrage mathématique et, même si dès le départ, ils ont porté l'ambition de constituer la didactique des mathématiques comme un champ scientifique autonome, cet ancrage ne pouvait manquer d'influer sur leur façon de penser la constitution de cette science autonome. En est symptomatique, par exemple, l'inspiration que Guy Brousseau a trouvé dans la logique dialogique de Lorenzen et la théorie mathématique des jeux pour fonder la théorie des situations didactiques. En témoigne aussi à mes yeux l'importance prise dans les travaux de cette communauté didactique par des analyses épistémologico-mathématiques approfondies, ou par des thématiques comme celle de la logique et de la preuve avec des travaux réellement pionniers dans ce domaine, comme les travaux bien connus de Balacheff (1988) et Durand-Guerrier (2005).

Cette communauté didactique a évolué bien sûr mais elle est l'héritière de cette histoire qui a façonné ses modes de pensée, ses cadres théoriques, et a conduit à essayer de préserver des liens institutionnels forts avec la communauté mathématique. En témoigne l'inscription de laboratoires au sein d'UFR[50] de mathématiques, comme c'est le cas par exemple pour le Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) qui accueille un pourcentage important des didacticiens et doctorants français, ou le rattachement de nombreux chercheurs à la section 26 de mathématiques appliquées et applications des mathématiques, où leur spécialité est aujourd'hui bien reconnue.

---

[49] Le lecteur trouvera sur le portail des IREM une présentation réflexive du réseau des IREM et de son histoire réalisée dans le cadre de la candidature du réseau à la médaille Emma Castelnuovo récemment créée par l'ICMI qui met ces caractéristiques en évidence (http://www.univ-irem.fr/spip.php?article1154).

[50] UFR : Unités de formation et de recherche.

Cette proximité entre mathématiques et didactique des mathématiques reste cependant relative. L'usage de la théorie des jeux par les utilisateurs de la théorie des situations didactiques est resté, à quelques exceptions près faisant partie de l'environnement proche de Brousseau dont Ratsimba-Rajohn (1981) est un parfait exemple, un usage purement métaphorique. Par ailleurs, si l'on excepte l'exemple tout à fait intéressant de l'analyse implicative, la didactique des mathématiques a eu peu de retombées proprement mathématiques. J'ai personnellement beaucoup bénéficié dans mon travail de recherche, tout particulièrement en didactique de l'analyse, d'interactions avec des mathématiciens comme Adrien Douady et Marc Rogalski. En revanche, le travail que j'ai mené pour mon doctorat d'état sur la reproductibilité des situations didactiques (Artigue 1986), que Freudenthal avait qualifié à l'époque de premier travail de mathématiques de la didactique, est resté un travail isolé. J'y avais utilisé des modèles mathématiques probabilistes, d'une part pour montrer les limitations de la vision de la reproductibilité des situations didactiques véhiculée explicitement mais surtout implicitement par les textes didactiques, d'autre part pour simuler des dynamiques possibles, à partir de certaines données d'observation, m'interroger sur le champ des possibles et interroger en retour les dynamiques observées et ce qui avait pu les contraindre par rapport à cet ensemble de dynamiques possibles. Aujourd'hui que j'ai eu, pour d'autres raisons, à me frotter à la modélisation mathématique, je vois bien à quel point ces constructions étaient bricolées, ce qu'aurait pu leur apporter l'interaction avec des spécialistes de modélisation aléatoire, et je me prends à penser que cette interaction aurait pu peut-être me permettre de poursuivre dans une voie pour laquelle j'étais mathématiquement et méthodologiquement insuffisamment outillée.

Ces limites étant soulignées, il n'en demeure pas moins que les rapports bougent avec à la fois des évolutions qui rendent des rapprochements possibles et des évolutions qui les rendent plus difficiles. Parmi les évolutions qui rendent des rapprochements possibles, il y a, à mes yeux, indéniablement, même si l'on ne peut que le regretter, les difficultés croissantes auxquelles font face l'enseignement des mathématiques et la formation des enseignants dans notre pays, le regard que nous renvoient sur notre système éducatif des enquêtes internationales comme PISA[51] pour ce qui est des élèves ou TALIS[52] pour ce qui est des enseignants. Ces difficultés ne peuvent plus être ignorées, quel que soit le niveau auquel on enseigne et il devient de plus en plus audible, malgré la méfiance que suscite toujours le didactique dans de nombreuses sphères, que pour y faire face, il y a besoin de connaissances spécifiques sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, mais aussi qu'il existe de telles connaissances, même si elles sont encore très limitées, trop éparses et parcellaires. En témoigne par exemple l'esprit de collaboration qui porte aujourd'hui certaines actions de la CFEM (Commission Française de l'Enseignement Mathématique) et que met bien en évidence son bulletin mensuel (cf. www.cfem.asso.fr). Il faut cependant bien comprendre que cette évolution génère aussi des demandes et des questions sur ce que la didactique des mathématiques a réellement à offrir à ceux qui voudraient en exploiter les résultats.

Mais il existe aussi des évolutions qui rendent les rapprochements difficiles. Parmi elles, paradoxalement, il y a le développement même du champ didactique qui s'est traduit par l'existence et l'institutionnalisation d'une communauté de spécialistes, et d'une recherche

---

[51] PISA : Programme for International Student Assessment (http://www.oecd.org/pisa/). Ce programme, mis en place par l'OCDE en 2000, est un programme triennal d'évaluation des systèmes éducatifs via celle des compétences et connaissances des élèves âgés de 15 ans.

[52] TALIS : Teaching and Learning International Study (www.oecd.org/edu/school/**talis**.htm). TALIS est une vaste enquête lancée par l'OCDE auprès des enseignants sur leur formation initiale et les activités de formation continue auxquelles ils participent, sur les commentaires qui leur sont adressés concernant leur travail d'enseignant, sur le climat en classe et dans l'établissement, sur leur satisfaction professionnelle et sur leur sentiment quant à leurs propres capacités professionnelles.

dont le développement se nourrit des questions du terrain, d'un questionnement du monde au sens de Chevallard, mais aussi de besoins plus internes d'organisation, de structuration du champ. Je pense par exemple aux travaux qui se sont développés ces dernières années en termes de 'networking' de cadres théoriques pour contenir les effets de l'explosion théorique observée et auxquels j'ai participés. Ils ne font vraiment sens qu'à l'intérieur de la communauté d'éducation mathématique elle-même. Cette progression du didactique s'est de plus inévitablement accompagnée de la construction d'un discours spécialisé avec sa terminologie, ses codes, ses formes spécifiques d'argumentation, ses implicites aussi. S'est ainsi progressivement créée une distance discursive, en un sens naturelle, mais dont l'utilité et la nécessité sont difficilement compréhensibles par les non didacticiens, et en premier lieu par ceux qui ont un rapport professionnel aux mathématiques et s'estiment en droit de comprendre tout ce qui est dit sur leur apprentissage et leur enseignement. Il y a aussi, me semble-t-il, en sens inverse une insuffisante sensibilité de la communauté didactique à l'investissement que demande l'accès à ce discours spécialisé, et donc un investissement insuffisant, par rapport à d'autres communautés, dans l'élaboration collective de niveaux de discours permettant une réelle communication.

Au-delà de ces facteurs d'éloignement, il y a ceux liés à l'évolution des problématiques au sein du champ didactique. Il ne fait pas de doute par exemple que, dans beaucoup de travaux aujourd'hui, même si les mathématiques sont présentes, elles n'apparaissent pas nécessairement comme centrales au questionnement, mais plutôt comme un domaine dans lequel s'inscrit un questionnement plus général, concernant par exemple les pratiques enseignantes ou certaines dimensions de ces pratiques, par exemple leurs pratiques documentaires pour ne citer qu'une des problématiques qui attire une attention croissante, du fait de l'évolution actuelle de ces pratiques. Et je ne saurais bien sûr passer sous silence l'émergence du champ de la didactique comparée portée par l'Association pour les Recherches Comparatistes en Didactique (ARCD), qui en questionnant les rapports entre les différentes didactiques, interroge aussi les rapports entre celles-ci et leurs disciplines respectives. Dans le cadre de ce champ, les rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques font l'objet de discussions approfondies, comme le montrent bien les articles publiés régulièrement sur ce thème par la revue *Education & Didactique*, depuis ses débuts.

Au vu de cette situation particulière, il semble bien que mathématiques et didactique des mathématiques entretiennent des relations complexes et qui ne sont en rien figées. Il semble bien aussi que l'on ne peut comprendre cette complexité et les dynamiques associées sans faire intervenir de nombreuses dimensions, épistémologiques, scientifiques, institutionnelles, identitaires, sociétales, les rapports entre divers acteurs et communautés, envisager des conditions et contraintes qui, au sens de la théorie anthropologique du didactique, mettent en jeu l'ensemble des niveaux sur-didactiques. En quoi cette situation particulière est-elle singulière ou non ? C'est la question que j'aborderai dans la partie suivante, en adoptant une perspective plus internationale.

III. MATHEMATIQUES ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES : UNE PERSPECTIVE INTERNATIONALE

L'histoire de l'éducation mathématique montre que la situation française est moins singulière que l'on ne pourrait le croire. L'investissement très tôt de mathématiciens de premier plan dans les questions d'enseignement par exemple n'est pas propre à la France. Il est à l'origine de la création en 1908 de la CIEM (Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique, aujourd'hui ICMI) au cinquième congrès international des mathématiciens, et c'est le mathématicien allemand Felix Klein, lui-même très investi dans la formation des enseignants et la réforme curriculaire Meran en Allemagne, promoteur des premières chaires universitaires de didactique des mathématiques dans ce pays, qui en prendra la présidence. Quand, après la seconde guerre mondiale, la commission sera refondée, c'est grâce à l'action volontariste de son président, Hans Freudenthal, un mathématicien reconnu, que s'imposera dans cette institution la nécessité de soutenir le développement d'une recherche spécifique, que sera créée la revue *Educational Studies in Mathematics* en 1969 et que sera organisé à Lyon le premier congrès international d'enseignement mathématique, le premier ICME. Quand on consulte les actes de ces premiers congrès, Lyon (1969), Exeter (1972), Karlsruhe (1976), on ne peut qu'être frappé par le nombre de mathématiciens de premier plan qui y interviennent et montrent leur implication dans les questions d'enseignement des mathématiques, particulièrement vives à cette époque marquée par les enthousiasmes, turbulences, puis désillusions de la période des mathématiques modernes. Les mathématiciens sont aussi très présents dans la CIEAEM[53] (Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques) créée en 1959, et ils sont aussi à l'origine, dès 1962, après un colloque à Bogota, de la première organisation régionale sur l'enseignement des mathématiques, la CIAEM[54] (Commission Inter-Americaine d'Education Mathématique) dont le cinquantenaire célébré à Recife en juin 2012 a permis de retracer l'histoire. Je n'insisterai pas plus sur ce point renvoyant à l'ouvrage issu du symposium organisé pour le centenaire d'ICMI (Menghini, Furinghetti, Giacardi & Arzarello 2009) pour plus de détails.

En revanche, il ne fait pas de doute que suivant les pays, les contextes, les dynamiques des communautés didactiques ont été sensiblement différentes, avec un impact sérieux sur les relations entre mathématiques et didactique. De ce point de vue, l'existence de la structure des IREM en France, la capacité de la communauté didactique française à se doter relativement tôt, dès 1980, de structures collectives comme la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques*, le séminaire national et les écoles d'été bi-annuelles de didactique des mathématiques, l'énergie collective déployée pour les faire fonctionner, le combat aussi mené pour conserver des liens avec la communauté mathématique, notamment pour les questions de recrutement et de promotion, via le CNU (Conseil National des Universités), ont certainement créé une différence. Quand j'ai été élue par l'assemblée générale de l'IMU (Union Mathématique Internationale), vice-présidente de l'ICMI, en 1998, dans une période de tensions fortes entre l'ICMI et son organisation mère, j'ai pu très vite mesurer à quel point, les relations entre communautés, même si elles n'avaient rien d'idéal en France, étaient différentes de celles vécues dans beaucoup d'autres pays, par exemple aux Etats-Unis où l'on allait jusqu'à parler de Math Wars. Comme je l'ai expliqué dans (Artigue 2009), la question même de la persistance du maintien de l'ICMI au sein de l'IMU était alors posée par nombre de membres de la communauté ICMI qui ne supportaient plus la défiance, voire le mépris, dont ils faisaient l'objet. Dix ans après, en 2008, comme je l'expliquais dans le même texte, la situation avait déjà substantiellement changé, et elle n'a cessé depuis de s'améliorer. Mais je reste bien consciente que les relations entre communautés restent fragiles, sans cesse à consolider, à adapter aux mouvements du monde.

La question des rapports entre mathématiques et éducation mathématique fait souvent l'objet de déclarations mais il est extrêmement rare qu'elle soit prise comme objet d'étude. Cela avait été le cas dans l'étude ICMI déjà citée sur la recherche en éducation mathématique pilotée par Anna Sierpinska et Jeremy Kilpatrick et ce thème avait constitué la sixième et dernière partie de l'ouvrage qui en était résulté (Sierpinska & Kilpatrick 1998). Plus récemment, c'est tout un colloque organisé en l'honneur de Ted Eisenberg qui lui a été

[53] http://www.cieaem.org
[54] http://www.ciaem-iacme.org

consacré et l'ouvrage qui en résulte, nourri de contributions et dialogues de mathématiciens, de chercheurs en éducation mathématique et d'historiens des mathématiques, est donc particulièrement intéressant à considérer (Fried & Dreyfus 2014). En fait, dès le départ de l'ouvrage, ce qui est posé, c'est l'éloignement croissant des communautés auquel Eisenberg, lui-même mathématicien et chercheur en éducation mathématique, était particulièrement sensible, regrettant que le développement de ce champ en un champ académique l'éloigne progressivement des mathématiques, et ayant de plus en plus de mal à se reconnaître dans les approches et problématiques qui y devenaient dominantes. Fried, dans le chapitre introductif, reprend ce point de vue, en ne limitant pas la question à celle des rapports entre communautés de chercheurs, et en citant tout particulièrement les approches relevant de l'éducation mathématique critique qui donnent comme priorité à l'éducation mathématique l'accroissement de la participation démocratique, de l'équité et de la justice sociale, et pour lesquelles chaque notion mathématique doit être examinée dans sa fonction socio-politique. A la recherche de collaborations possibles, et se référant à des sociologues comme Weber, il insiste sur la nécessité de dépasser une vision de la recherche en éducation mathématique comme sous-domaine des mathématiques ou comme mathématique appliquée, pour reconnaître et accepter son inscription dans le champ des sciences humaines et sociales, et donc la spécificité de ses questionnements et méthodologies (p.15). Et il conclut en ces termes :

> It should not be our mission to 'convert' mathematicians to what they cannot be as it would not be theirs to determine what mathematics education researchers should research. And yet, to reiterate what has been said in different ways in this introduction, this cannot be a formula to go in separate ways : the common focus on mathematics, one way or another, will not allow for that. Cooperation begins when there is at the same time the recognition that each side is looking in the same direction but with very different complementary eyes (Fried 2014, p. 15).

De tels exemples de coopération sont présents dans le livre, notamment dans la section à laquelle j'ai contribué, coordonnée par Pat Thompson. Mais l'ouvrage reflète aussi, au fil des chapitres, les tensions qui, de façon plus générale, marquent toujours les relations entre communautés, des tensions qui étaient aussi visibles lors du colloque. Appelé à commenter cet ouvrage dans le dernier chapitre, Jeremy Kilpatrick fait le lien avec l'étude ICMI déjà mentionnée et revient, pour la contester, sur l'idée de distance croissante. Il s'interroge d'abord à juste titre sur ce que recouvrent exactement les différents termes utilisés : mathématicien, « mathematics educator », chercheur, soulignant la difficulté de séparer les catégories, et expliquant aussi qu'en français l'existence du terme didacticien rend les choses un peu plus claires. Ensuite, il défend la thèse que plus qu'un éloignement, ce qui est en jeu c'est une expansion forte du champ d'éducation mathématique avec par exemple un doublement en cinq ans, depuis 2008, du nombre de références fournies par Google Scholar, une expansion qui déplace les centres de gravité et les éloigne peut-être effectivement, mais que ceci ne signifie pas pour autant que les champs s'éloignent. Il donne à titre d'exemple le cas des préparations doctorales dans les deux plus gros programmes doctoraux d'éducation mathématique aux Etats-Unis (à Colombia University et à l'University of Georgia) et des exigences mathématiques formulées pour les thèses. Pour lui, mathématiques et éducation mathématique sont reliées comme le sont le yin et le yang par leur mutuelle attention à l'enseignement. Et, se référant à l'historien des mathématiques Jens Høyrup, il voit la source de cette situation dans la caractéristique propre aux mathématiques de s'être constituées à travers leur enseignement :

> Teaching is not only the vehicle by which mathematical knowledge and skill is transmitted from one generation to the next ; it belongs to the essential characteristics of mathematics to be constituted through teaching. (Høyrup 1994, p. 3)

Dans ces conditions, pour lui, plus que de chercher des terrains communs aux mathématiques et à la didactique des mathématiques, il s'agit de cultiver le terrain commun que nous partageons, celui de l'enseignement des mathématiques.

IV. COMMENTAIRE ET PERSPECTIVES

Dans ce texte réflexif, je me suis interrogée sur les rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques, d'abord à travers le filtre de ma propre communauté, puis en élargissant le regard à une perspective plus internationale. J'avais annoncé mon intention de ne pas me laisser piéger par la seule composante humaine, en fait j'y ai sans cesse été ramenée. Les mathématiques, la didactique des mathématiques sont constituées par des pratiques humaines ; comprendre leurs rapports ne peut se faire sans interroger ces pratiques, sans mettre en scène leurs acteurs, et ce qui détermine leurs actions. La référence à la Théorie anthropologique du didactique pourrait s'avérer sur ce point utile comme elle l'a été pour analyser les pratiques de networking (Artigue & Bosch 2014). Cette perspective nous inciterait à poser la question des rapports entre mathématiques et didactique des mathématiques en termes de rapports entre des praxéologies, et à relier les collaborations à construire à la construction de praxéologies hybrides, nouvelles, qui dépassent les caractéristiques et possibilités de celles qui nous sont aux uns et aux autres familières, mais qui en respectent l'essence et permettent d'en exprimer les potentialités, comme ce fut le cas pour les méta-praxéologies développées dans le cadre du networking. Car, comme le soulignent à juste titre Michael Fried et Jeremy Kilpatrick, nous avons bien des sensibilités et des objets communs.

REFERENCES

Artigue M. (1986) Etude de la dynamique d'une situation de classe: une approche de la reproductibilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7.1., 5-62.

Artigue M. (1998) Research in mathematics education through the eyes of mathematicians, in Sierpinska A., Kilpatrick J. (Eds.) *What is research in mathematics education and what are its results ?* (pp. 477-490). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Artigue M. (2009) ICMI: A century at the interface between mathematics and mathematics education. In Menghini M., Furinghetti F., Giacardi L., Arzarello F. (Eds.) *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*, pp. 185-198. Istittuto della enciclopedia Italiana. Roma.

Artigue M., Bosch M. (2014) Reflection on Networking through the praxeological lens. In, Bikner-Ahsbahs A., Prediger S. (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 249-266). New York: Springer.

Balacheff N. (1988) *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège.* Thèse d'état. Université Joseph Fourier. Grenoble.

Bikner-Ahsbahs A., Prediger S. (Eds.) (2014) *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education.* New York: Springer.

Durand-Guerrier V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique.* HDR. Université Claude Bernard - Lyon I.

Fried M..N., Dreyfus T. (Eds.) (2014) *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground.* Dordrecht : Springer Science.

Høyrup J. (1994) Measure, numbers, and weight : Studies in mathematics and culture. Albany: State University of New York Press.

Kilpatrick J. (2014) We Must Cultivate our Common Ground. In Fried M.N., Dreyfus T. (Eds.) *Mathematics and Mathematics Education : Searching for Common Ground* (pp. 337-343). Dordrecht : Springer Science.

Menghini M., Furinghetti F., Giacardi L., Arzarello F. (Eds.) (2009) *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education.* Istittuto della enciclopedia Italiana. Roma.

Ratsimba Rajohn R. (1981) *Etude de deux méthodes de mesure rationnelle : la commensuration et le fractionnement de l'unité, en vue de l'élaboration de situations didactiques.* Thèse de troisième cycle. Université de Bordeaux 1.

Sierpinska A., Kilpatrick J. (Eds.) (1993) *What is research in mathematics education and what are its results?* (pp. 477-490). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Thompson P. (2014) Collaboration between Mathematics and Mathematics Education. In Fried M.N., Dreyfus T. (Eds.) *Mathematics and Mathematics Education : Searching for Common Ground* (pp. 313-333). Dordrecht : Springer Science.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LES MATHÉMATIQUES DANS LES ACTIVITÉS DU PROFESSEUR CONSÉQUENCES POUR LA FORMATION

Lalina COULANGE[*] - Aline ROBERT[**]

Résumé – En nous plaçant dans le cadre de la double approche ergonomique et didactique (Robert et Rogalski 2002), nous nous attachons à spécifier les mathématiques impliquées dans les activités d'un professeur de mathématiques. Cela demande d'une part, une description spécifique et appropriée des mathématiques pour les pratiques enseignantes. Cela nécessite aussi des transformations des usages que les étudiants et futurs enseignants peuvent avoir de ces mêmes mathématiques apprises pendant leurs études. Cela conduit enfin à élaborer des formations propices à outiller efficacement les débutants pour ces nouveaux usages des mathématiques.

Mots-clefs : activités et pratiques enseignantes, professeur de mathématiques, formation initiale

Abstract – By using the double ergonomic and didactic approach (Robert and Rogalski 2002), we specify the part of mathematics that feeds the activities of a mathematics teacher. This requires specific and appropriate description of mathematics for the *teaching* profession. This also requires changes in the uses of the mathematics that students and future teachers have learned during their studies. Finally, this leads to the development of initial training that allows future mathematics teachers to tackle such new uses of mathematics.

Keywords: Teacher activity and practice, mathematics teacher; initial training

Dans cette contribution nous nous attachons à spécifier les mathématiques impliquées dans les activités d'un enseignant du secondaire dans l'exercice de son métier. Cela demande d'une part, une description spécifique, appropriée, y compris des mathématiques elles-mêmes, comme nous le montrons dans la première partie de ce texte. Cela nécessite aussi des transformations des usages que les étudiants et futurs enseignants pouvaient avoir de ces mêmes mathématiques apprises pendant leurs études, ce que nous illustrons par quelques exemples dans la deuxième partie de notre contribution. Cela conduit enfin à élaborer des formations propices à outiller efficacement les débutants pour ces nouveaux usages des mathématiques, c'est l'objet de la troisième et dernière partie. L'ensemble de la réflexion conduite se place dans un cadre théorique et méthodologique visant l'étude des pratiques enseignantes, la double approche ergonomique et didactique, dont nous rappelons les fondements dans la partie introductive de ce texte.

[*] E3D-LACES, Université de Bordeaux – France – lalina.coulange@espe-aquitaine.fr
[**] LDAR, Université Paris Diderot – France – aline.robert@iufm.u-cergy.fr

Coulange L., Robert A (2015) Les mathématiques dans les activités du professeur – Conséquences pour la formation. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 81-94.

I. INTRODUCTION

La double approche ergonomique et didactique (Robert & Rogalski 2002, Vandebrouck & al. 2008) conjugue le mot « activité » au pluriel. Les recherches qui s'inscrivent dans cette approche attribuent une place centrale aux activités que les sujets développent en situation que ce soit du point de vue des apprentissages des élèves ou des pratiques enseignantes. Nous nous intéressons ici aux relations entre les mathématiques et les activités du professeur de mathématiques. Dans le cadre de la double approche, la façon d'appréhender les activités du professeur a ceci de spécifique que l'on considère que le professeur travaille, exerce un métier et qu'on ne peut étudier ses activités sans en tenir compte. Notamment, les activités de l'enseignant sont appréhendées par des finalités variées, qui ne peuvent être réduites à ce qui est directement lié aux apprentissages des élèves ou aux savoirs mathématiques à enseigner. Les pratiques enseignantes renvoient de fait à tout ce que l'enseignant pense, dit ou ne dit pas, fait ou ne fait pas, sur un temps long, que ce soit avant, pendant ou après les séances de classe (Robert 2008a). L'étude des pratiques enseignantes amène dès lors à prendre un point de vue global, qui comprend à la fois les activités précises du sujet (considérées sur plusieurs échelles) et les contraintes imposées par le métier de professeur qui pèsent sur ces activités (en relation avec les déterminants institutionnels, sociaux et personnels, liés aux programmes et aux conditions d'exercice du métier d'enseignant). Autrement dit, pour le chercheur, il s'agit à partir des activités précises du professeur et des contextes de ces activités, d'avoir accès à une description complexe des pratiques, à même d'en restituer la cohérence. Quelles mathématiques sont impliquées dans cette description qui se veut « holistique » des pratiques enseignantes ? Comment décrire ou apprécier le (ou les) rôle(s) joué par les mathématiques dans les pratiques enseignantes sans pour autant en réduire la complexité ? Par exemple, comment éviter de découper artificiellement des contenus mathématiques bien répertoriés ou d'isoler des usages des mathématiques en classe qui risquent de les approximer ou de les modifier ? La conception des pratiques inhérente à la double approche implique que les relations entre mathématiques et activités du professeur sont complexes et ne peuvent être appréhendées par une simple « superposition » des connaissances et savoirs mathématiques dont on recueillerait des traces, même outillées par les descriptions des processus d'enseignement et d'apprentissages que certaines recherches en didactique des mathématiques proposent. C'est là que réside l'intérêt de la méthodologie proposée par la double approche ergonomique et didactique dont l'objectif est non seulement de postuler la complexité des pratiques, mais encore de donner les moyens aux chercheurs d'appréhender cette complexité à partir de descriptions selon plusieurs dimensions (les composantes), à recomposer, et selon différents niveaux d'organisation du travail de l'enseignant (à la fois micro, local et macro).

Notre contribution vise à étayer l'hypothèse de travail de la spécificité de la part des mathématiques dans les activités enseignantes, en développant cette hypothèse *via* l'entrée théorique et méthodologique de la double approche ergonomique et didactique. Nous voulons aussi illustrer le travail à accomplir pour y arriver à partir d'une formation universitaire adressée aux futurs enseignants de mathématiques, en documentant notre propos par quelques exemples. Nous listons ensuite des conséquences que nous en tirons pour penser de nouvelles orientations dans la formation initiale des professeurs de mathématiques du second degré.

II. I . PENSER DES DESCRIPTIONS DES MATHEMATIQUES POUR APPRECIER LA PART MATHEMATIQUE DES ACTIVITES DU PROFESSEUR - LE CAS DES DEBUTANTS

1. Descriptions des mathématiques en didactique

Les recherches en didactique des mathématiques donnent des outils pour décrire les mathématiques dans leurs relations avec les apprentissages des élèves et l'enseignement par les professeurs. Les descriptions des mathématiques dans le domaine de la recherche en didactique des mathématiques sont adaptées aux questions et aux orientations de recherche qui les fondent et les pilotent, ce qui leur confère une certaine pluralité.

Ces descriptions peuvent en effet, s'avérer différentes selon ce que le chercheur en didactique des mathématiques cherche à appréhender ou suivant la perspective dans laquelle ses travaux de recherche s'inscrivent. Par exemple, le modèle d'organisation praxéologique mathématique issu de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1997, Bosch & Chevallard 1999) constitue une modélisation des pratiques des sujets en lien avec les savoirs mathématiques à enseigner et enseignés au sein d'une institution didactique, dans une perspective liée à la transposition didactique. De la même façon les situations mathématiques à usage didactique (Brousseau 1997) peuvent être considérées comme une modélisation des savoirs et des connaissances mathématiques : elles permettent de décrire des causes pertinentes des connaissances, par rapport aux raisons de ces savoirs (Bessot 2011).

2. Les mathématiques dans les activités du professeur

La double approche ergonomique et didactique a ceci de spécifique que les notions de connaissances et de savoirs ne constituent pas un point de départ de son développement théorique. A l'instar d'autres approches, pour la plupart relativement récentes en didactique des mathématiques (voir par exemple, Maheux & Proulx 2014), elle accorde une place centrale aux activités des sujets élèves ou professeurs, appréhendés comme des sujets psychologiques et sociaux. C'est la part mathématique des activités du professeur qui va nous intéresser plus particulièrement ici. Les pratiques du professeur ont ceci de particulier que seule une part de ses activités ont trait aux mathématiques et ce, de façon inextricablement liée aux multiples composantes de ses pratiques. D'ailleurs la double approche ne distingue pas à proprement parler une composante « mathématique » dans l'activité du professeur. Les mathématiques sont intégrées à et nourrissent, de manières variées, les différentes composantes retenues pour caractériser les pratiques enseignantes dans le cadre de la double approche : médiative, cognitive, institutionnelle, sociale et personnelle (Robert & Rogalski 2002, Robert 2008a). Elles imprègnent aussi les différents niveaux d'organisation des pratiques (Masselot & Robert 2007), global (avec les projets et conceptions générales des enseignants, local avec l'attention mathématique aux élèves pendant les déroulements, micro avec ce à quoi s'attachent les gestes automatisés). Dans ce point de vue, les mathématiques jouent sans doute un rôle différent de celui qu'elles jouent dans les activités des élèves et/ou des étudiants en mathématiques. Donnons un exemple un peu simpliste : autant les étudiants peuvent être motivés par la résolution d'un problème un peu difficile pour eux, qui va les préparer aux examens, autant les enseignants se restreignent en général à proposer en classe des problèmes qu'ils savent bien résoudre. Nous essayons ci-après de cerner un peu systématiquement certaines de ces différences qui peuvent outiller le chercheur pour appréhender les transformations d'usages des mathématiques qu'implique potentiellement une entrée dans le métier d'enseignant de mathématiques, notamment *via* la formation initiale.

Les *composantes médiative et cognitive* sont renseignées par et renseignent sur l'organisation et les contenus mathématiques des séances prévues par le professeur ainsi que sur ses actions pendant les déroulements de celles-ci. C'est la manière dont le professeur prévoit et élabore une succession de tâches mathématiques que modélise la composante *cognitive*. Ce type d'activités suppose de positionner ces tâches par rapport aux connaissances visées, mais aussi les unes par rapport aux autres, pour penser une succession cohérente, appréhender différentes dynamiques des connaissances mathématiques à la fois anciennes et nouvelles (relatives aux notions enseignées), prévoir précisément les moments d'exposition des connaissances ; ceci suppose aussi de reconnaître les adaptations de connaissances que recouvre une telle succession de tâches, etc. Jamais un étudiant en mathématiques n'a à envisager l'élaboration d'un texte « complet » du savoir lié à différentes notions, ni à réfléchir, par exemple, à ce qui pourrait représenter une bonne introduction d'une notion nouvelle : ceci représente donc potentiellement une « nouveauté » pour le futur enseignant de mathématiques. Il s'agit également pour le professeur d'anticiper différentes activités possibles d'élèves (et même, de *ses* élèves), en lien avec l'accomplissement de ces tâches mathématiques. Là encore, l'étudiant a classiquement à résoudre des problèmes qu'on lui propose, en lien avec des cours de mathématiques qu'on lui a dispensés, « tout prêts » à l'emploi. Il peut compléter en utilisant des manuels mais dans une perspective simplement cumulative. L'enseignant, lui, choisit les énoncés à proposer, en relation avec les mises en fonctionnement des mathématiques attendues, leur durée probable liée aux difficultés – mais il s'agit de ne pas trop lasser les élèves, les contrôles qu'il prévoit… L'entrée dans le métier d'enseignant recouvre bien un changement de point de vue sur les énoncés de problèmes ou d'exercices, liés aux tâches, mais mettant en jeu des choix importants, liés aussi aux déroulements anticipés. De la même manière, la composante *médiative* des pratiques est renseignée par et renseigne sur les choix du professeur dans les déroulements associés aux énoncés ; cela suppose que le professeur observe et interprète des observables des activités effectives (possibles) des élèves pour inférer sur les connaissances mises en jeu pendant ces activités. Cela le conduit à repérer ce que les élèves arrivent à faire et ce qui ne marche pas – c'est ce qui peut guider le choix de ses aides, procédurales pour débloquer et permettre un début d'activité de certains élèves, ou constructives pour s'appuyer sur ce qui a déjà été fait ou vu en classe, afin de le valider et le généraliser (Pariès & al. 2008, Robert 2008b). Ce n'est plus pour lui-même que l'enseignant fait des mathématiques, pour progresser, ou pour réussir (en tant qu'étudiant ou élève) : ce sont les mathématiques que font ses élèves dans la classe qu'il doit saisir, exploiter et développer, quitte à imaginer des connexions originales.

Les *composantes personnelle, sociale et institutionnelle* jouent un rôle déterminant pour comprendre les pratiques enseignantes. Ces composantes permettent d'appréhender comment le professeur investit une partie des contraintes qui pèsent sur ses pratiques soit du point de vue du métier qu'il exerce (composantes sociale et institutionnelle), soit du point de vue de singularités individuelles (composante personnelle). Ces autres contraintes aussi ont leur part mathématique induite dans les activités du professeur. Par exemple, la composante *institutionnelle* renvoie en partie, à la façon dont le professeur s'approprie, interroge les contenus des programmes officiels ou des ressources mises à sa disposition (comme les manuels), entrevoit « entre les lignes » le *relief* des notions qu'il a à enseigner, leur spécificité (Robert 2007) et envisage des possibles liés à ce relief dans un espace institutionnel contraint (horaires d'enseignement, inspections…). De même la composante *sociale* correspond à l'empreinte de l'inscription des activités du professeur au sein de collectifs, établissement, équipes enseignantes, groupes d'élèves avec leurs spécificités sociales et /ou langagières…) ; cela peut induire des choix de tâches et de déroulements liés à des convictions « socialement partagées » sur l'enseignement et les apprentissages. Par exemple, ces choix peuvent être faits en fonction des potentialités et des limites cognitives attribuées à des publics d'élèves spécifiques (comme en collège ou lycée de Zones d'Education Prioritaire). Il se peut que ce soit des raisons plus liées aux déroulements qu'aux convictions sur les apprentissages qui amènent à réduire les difficultés des activités proposées en classe ou les durées des moments d'exposition des connaissances. Cela engage dans des choix particuliers, ne relevant pas toujours des mathématiques elles-mêmes. La composante *personnelle* peut quant à elle, renvoyer à la perception que l'enseignant a des mathématiques *via* ses expériences passées ou présentes d'enseignant mais aussi d'ex-élève ou étudiant en mathématiques. On voit à travers cette déclinaison dans les différentes composantes des pratiques enseignantes comment le rapport aux mathématiques des futurs enseignants se complexifie.

Toutes ces activités de l'enseignant analysées à l'aune des différentes composantes des pratiques ont bel et bien une part mathématique. Elles nécessitent de revisiter les notions, les connaissances et les savoirs mathématiques en vue de leur enseignement mais aussi de mettre en œuvre des activités mathématiques qui sont peut-être parfois difficiles à reconnaître et à (re-)convoquer car non strictement notionnelles ou convoquant une distance inhabituelle avec le savoir, permettant par exemple des commentaires « méta » sur les notions à enseigner (nous y reviendrons ci-après). Quoiqu'il en soit, il semble y avoir nécessité de réorganiser, réorienter ces « mathématiques » dans les activités du professeur. La double approche ergonomique et didactique permet, par le passage aux composantes, des descriptions originales de la part mathématique de ces activités, inextricablement liées aux différentes composantes des pratiques enseignantes, et dès lors imbriquées. En cela, elle nous permet, nous-semble-t-il, de nous saisir de la nécessité qu'il y a (re)penser les mathématiques pour exercer le métier de professeur, ou former à l'exercice de ce métier. Répétons à ce stade de notre propos que d'autres travaux pointent d'ailleurs cette nécessité. Par exemple, Bednarz et Proulx (2009) parlent de décisions mathématiques, didactiques et pédagogiques de l'enseignant, difficiles à démêler du fait d'une imbrication et d'une mobilisation simultanée de ces connaissances, ce qui conduit Proulx (2012) à parler quant à lui, de « connaissances mathématiques didactisées » ou de « connaissances didactiques mathématisées ».

3. *Besoins mathématiques des étudiants futurs professeurs*

Un postulat communément admis est qu'il est nécessaire que le professeur sache plus de mathématiques que celles qu'il a à enseigner. Mais que signifie ce « plus » ? N'y a-t-il pas plutôt à introduire un « autrement » ? On pourrait par exemple, considérer en l'état actuel du système institutionnel français de formation que, du seul point de vue des savoirs disciplinaires, tout (futur) enseignant de mathématiques a fréquenté des mathématiques pendant en moyenne « au moins trois années de plus » que ses (futurs) élèves. Mais dans quelle mesure et comment les mathématiques apprises par l'étudiant qu'il a été ou est toujours sont-elles nécessaires ou disponibles pour le professeur de mathématiques qu'il est ou sera dans un avenir relativement proche ?

En lien avec la spécificité de la part mathématique des pratiques enseignantes, défendue ci-avant d'un point de vue théorique, nous disposons de plusieurs exemples liés à des épisodes vécus en formation qui nous semblent illustrer que ces mathématiques apprises à l'université ne peuvent être *a priori* considérées d'emblée comme disponibles directement dans le travail du (futur) professeur de mathématiques. Ainsi a-t-on pu observer de manière récurrente des phénomènes de « non disponibilités » ou de cloisonnement de connaissances mathématiques (mais aussi didactiques[1]), de rigidification de postures (étudiantes ou enseignantes), de naturalisations parfois étonnantes.

a) un exemple emblématique

Ainsi, nous avons demandé à des étudiants (en première année de master lié à l'enseignement des mathématiques)[2] d'analyser la production ci-après d'une élève de collège français (classe de quatrième – élève de 13-14 ans) en réponse à la question suivante :

Vrai ou faux ? Prouvez-le ! Le produit de deux nombres impairs consécutifs est multiple de 5.

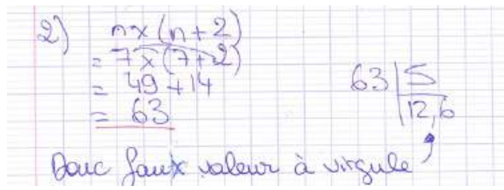


Figure 1 *– Enoncé d'exercice - Production d'élève*

La majorité des étudiants interrogés considèrent que la réponse donnée par cette élève était erronée, et ce, pour différentes raisons. Nous citons quelques extraits des productions écrites de ces étudiants recueillies lors de cet épisode de formation : « *faux car l'élève utilise un exemple numérique », « La réponse donnée est fausse. Elle montre les difficultés de cet élève dans le passage du numérique à l'algèbre », « l'élève aurait dû trouver une preuve qui utilise la lettre », « l'élève tente de résoudre une équation sans y arriver ».* Pourtant on peut considérer que la preuve produite par la collégienne concernée qui s'appuie sur l'usage d'un contre-exemple (7 et 9) est valide.[3] Qu'est-ce qui motive ces futurs enseignants à rejeter la dite production ? Les raisons avancées à l'écrit et/ou lors des échanges oraux qui ont suivi au cours de la formation sont de fait multiples. Par exemple, les étudiants se sont interrogés sur l'usage d'un contre-exemple numérique dans la preuve attendue. Certains ont même cherché à produire ou expliciter des attentes à l'égard d'une preuve « plus algébrique » de l'énoncé. Ce qui rend l'usage du contre-exemple difficilement acceptable pour ces étudiants qui se destinent au métier d'enseignant tient à différents éléments avancés de manière imbriquée et simultanée dans la discussion : confusion possible entre exemple et contre-exemple en algèbre pour cette (ou les) élève(s) (en gros « rien ne prouve » que l'élève reconnaît ou cible l'usage d'un contre-exemple) ; usage incorrect de l'écriture algébrique (*n* remplacé par 7) ; écriture numérique « naïve » (poser l'opération), etc. Les arguments avancés par les étudiants nous semblent typiques de ce qui pose question par rapport à la part mathématique du travail du professeur et de ce qui peut poser question, de manière récurrente, en formation initiale (voire continue ?) d'enseignants. Quels critères un futur professeur se donne-t-il (à la fois sur la forme et/ou sur le fond) pour évaluer les activités mathématiques de ses élèves ou les traces de ces activités ? Comment situe-t-il ces activités au regard de scénarios d'enseignement (globaux et/ou locaux) ? Comment appréhende-t-il la construction de tels scénarios ?

---

[1] Par connaissances didactiques, nous entendons connaissances sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, que celles-ci soient ou non directement liées à des savoirs produits par la recherche en didactique des mathématiques et diffusés en formation.

[2] Précisons que ces étudiants avaient déjà fait un stage de pratique accompagnée en binômes dans des classes de collège.

[3] L'usage de contre-exemples numériques dans la preuve en algèbre élémentaire avait pourtant été évoqué avec ces mêmes étudiants quelques semaines auparavant dans un cours de didactique. On peut par ailleurs raisonnablement penser que l'usage de contre exemples dans la démonstration représente un mode de raisonnement familier pour des étudiants en mathématiques de ce niveau..

b) D'autres constats

On assiste à des phénomènes liés à des exigences de ces étudiants et futurs enseignants qui peuvent ainsi *a priori* paraître étrangement positionnées relativement à l'exercice d'une rigueur en mathématique. La rigueur « de la forme » semble parfois l'emporter sur les exigences sur le fond ou être privilégiée lors d'épisodes observés en classe, y compris dans la production d'écrits intermédiaires d'élèves au tableau qui devraient d'emblée respecter certains canons conventionnels d'écriture mathématiques selon ces étudiants. On observe aussi des erreurs mathématiques et des abus de sens ou de langage, liés à des objets de savoirs qui semblent être transparents ou « naturalisés » chez certains futurs professeurs : comme par exemple, le fait de rabattre la nature d'un nombre (décimal ou fraction) à son écriture (décimale ou fractionnaire), le fait de dénommer des points liés à la représentation graphique d'une suite sur un graphique donné par u_0 ; u_1 ; u_2...au lieu d'indiquer la correspondance attendue entre ordonnées et les termes de la suite. La naturalisation des savoirs mathématiques peut également se traduire par des implicites dans le discours des enseignants débutants : concernant par exemple des changements de point de vue sur des notions (comme le passage subreptice, non explicité, de l'existence –connue - d'un angle droit dans un triangle rectangle à l'énoncé de la perpendicularité des droites supports des côtés), ou encore dans l'absence de distinction entre ce qui relève du sens ou de la technique, etc. De tels phénomènes parfois interprétés comme le seul fait d'une « ignorance mathématique » (ou d'une absence de maîtrise des savoirs mathématiques) nous semblent plus complexes qu'il n'y paraît. En effet, ils pourraient être révélateurs d'obstacles liés à la décontextualisation et à la recontextualisation des *mathématiques* en formation (initiale ou continue) d'enseignants. En disant « mathématiques » ici, nous ne voulons d'ailleurs pas uniquement parler de savoirs mathématiques, mais bien de la part mathématique d'activités d'élèves, d'étudiants et d'enseignants (ou futurs enseignants). C'est bien ce qui nous paraît au cœur du débat ! Il est intéressant de noter que ces obstacles concernent au moins autant, si ce n'est plus, ce qui n'est pas strictement notionnel comme des modes de raisonnement (par disjonction de cas, par l'absurde, par l'utilisation de contre-exemples, etc.), des modes de représentation (liés à l'usage de différents cadres et/ou à des changements de cadres[4]) ou à des aspects sémiotiques (systèmes d'écritures symboliques, figure/dessin en géométrie, etc.). Ils semblent renvoyer souvent à ce que l'une d'entre nous a appelé des niveaux de conceptualisation « non identifiés » ou qui se « brouillent » (Robert 2003), voire à des notions non encore formalisées ou formalisables à un niveau scolaire donné (Pouyanne 2004).

Il nous paraît dès lors nécessaire de (re)penser les descriptions des mathématiques, afin de les rendre disponibles en vue de leurs adaptations dans le métier d'enseignant, et de les (re) penser avec des outils didactiques : cela représente un pari d'enrichissement réciproque des mathématiques et de la didactique que nous pensons nécessaire dans le contexte actuel de la formation d'enseignants. Il s'agit en quelque sorte pour revenir au postulat « naïf » de départ, de penser le « plus » en mathématiques outillé par la didactique.

c) Quelques résultats de recherche sur les pratiques de professeurs débutants

Des travaux menés avec la double approche ont montré qu'une des difficultés des enseignants débutants tient au manque de repères globaux (vue d'ensemble d'un chapitre, d'une année, des élèves) et très fins (automatismes). C'est ce qu'on identifie comme une surcharge au niveau local (du « quotidien » de la classe) au sein des composantes médiatives et cognitives des pratiques enseignantes. Ces professeurs débutants sont « réduits » à élaborer au jour le

[4] Douady (1986)

jour, en partie à l'aveugle, leurs séances, et pendant la classe, ils ne disposent pas encore de moyens d'apprécier ce qui se passe globalement ni de réagir très localement. C'est, en particulier, lié au fait qu'ils ne peuvent pas transférer directement des dispositifs qu'ils ont appréciés comme élèves à des procédés didactiques qu'ils utiliseraient comme enseignants, vu la différence fondamentale de posture entre les deux positions. Par exemple ils ne reprennent pas le travail vécu en petits groupes dans un dispositif didactique à l'université (même s'ils en ont été très contents durant leur formation universitaire), peut-être parce que le gérer en tant qu'enseignant convoque d'autres activités mathématiques et que la simple expérience de ce dispositif en position d'étudiant ne suffit pas à s'y lancer. Des recherches montrent que certains passent tout leur temps à donner des aides individualisées aux élèves, perdant le fil de leur projet, tandis que d'autres restent figés sur leur projet sans tenir compte des activités effectives des élèves (Chesné 2008, Coulange 2012). Le lien entre les mathématiques fréquentées jusqu'ici et celles dont ils ont besoin se fait mal au quotidien, ce qui semble se cumuler avec des manques de repères au niveau de la gestion des activités des élèves. Les besoins ressentis par les enseignants débutants sont, en effet, d'abord liés à la gestion de la classe, charge aux formateurs de rétablir un équilibre entre déroulements et choix de contenus (Coulange & Train 2014). Les analyses didactiques des couples {tâches/déroulement}, privilégiées dans nos descriptions sont donc *a priori* un bon outil à cet égard, d'autant qu'elles s'appuient sur le niveau local de l'activité de l'enseignant et qu'elles permettent petit à petit d'engager dans des réflexions plus globales (sur un ensemble de tâches, un scénario, les programmes, la nature des notions enseignées…).

Compte tenu du contexte des stages, ces réflexions ne sont pas organisées à partir d'un contenu à enseigner, mais à partir d'exemples de pratiques en classe ; vu ce caractère opportuniste, inductif, on peut penser que ce n'est que petit à petit qu'elles permettent aux débutants de reconstituer quelque chose de plus général, cela se faisant d'autant mieux que les formateurs y veillent, aidés par les descriptions précédentes.[5]

d) Une prise en compte du travail de l'enseignant et de ses spécificités

Cette nécessaire remontée à un niveau global dans les pratiques de professeurs débutants va de pair avec la prise de conscience des spécificités du métier d'enseignant qui impose peu à peu ses contraintes mais aussi ses marges de manœuvre, en lien avec les composantes institutionnelles, sociales et personnelle des pratiques. Ainsi le travail de l'enseignant est-il individuel et libre apparemment, mais aussi collectif et contraint, de manière plus cachée. On ne peut pas « copier » des pratiques enseignantes[6] mais on peut bénéficier de l'observation des classes d'enseignants expérimentés (par exemple des tuteurs sur les terrains de stage), s'appuyer sur des éléments de pratiques comme les progressions et les devoirs communs pour s'en inspirer. On doit tenir compte des programmes et des habitudes d'un établissement. On peut être mis au courant de régularités liées aux contextes et aux contraintes, on peut apprendre sur quoi portent les diversités des pratiques, et là encore les descriptions évoquées y sont propices...

Le travail du professeur comporte différentes phases, en partie liées, mais aussi en partie indépendantes : préparation et déroulement des séances qui sous-entendent à la fois de l'anticipation et de l'improvisation, appréhendées par les composantes cognitive et médiative des pratiques enseignantes. D'autre part, les activités des élèves et leur transformation en apprentissages ne dépendent pas seulement du professeur avec le véritable deuil que cela peut représenter pour les professeurs débutants : il y a des phénomènes liés aux apprentissages

[5] D'où l'importance d'une culture commune des formateurs, de constituer des équipes, et de les former !

[6] Quand des enseignants novices tentent de "copier" des pratiques, cela peut conduire à des effets "caricaturaux" observés dans leurs pratiques (Chesné 2008).

mathématiques des élèves qui se passent nécessairement à son insu.[7] Nos descriptions des pratiques enseignantes permettent de travailler ces questions.

Enfin une spécificité importante du métier d'enseignant réside dans le fait qu'il n'y a pas vraiment d'évaluation directe possible du travail du professeur. Ceci est lié au fait qu'il n'y a pas d'experts reconnus en tant que tels, contrairement à beaucoup d'autres professions, ce qui tient à la très grande difficulté d'apprécier les effets sur les élèves d'un enseignement précis (on a une boucle). Cela contribue à conférer au métier de professeur un caractère incertain, dynamique, voire changeant, ce qui amène Durand et al. (2002) à parler d'une culture en action des enseignants. À la limite on peut apprécier ce qui ne va vraiment pas, et encore ! Cette absence de « pratiques enseignantes expertes » qui pourraient servir de références absolues nous amène à travailler plutôt en termes de palettes de choix possibles qu'en termes prescriptifs, et c'est une difficulté de plus – même si à terme c'est plutôt un avantage lié à une certaine liberté, et à des possibilités de renouvellement individuel. On peut s'entendre sur le fait que des pratiques adéquates sont associées à des apprentissages partagés par beaucoup d'élèves mais cela reste vague et hors de portée des recherches et peut-être plus encore, de la formation d'enseignants.

III. QUELLES DESCRIPTIONS DES MATHEMATIQUES POUR PENSER LES FORMATIONS D'ENSEIGNANTS : CONTINUITE ET SPECIFICITE

La réflexion que nous allons mener maintenant est très liée au système français de formation, où les futurs enseignants de mathématiques du secondaire ont à effectuer à l'Université, après leur licence, deux années d'études leur permettant d'obtenir un master tout en préparant un concours de recrutement. L'expression « formation professionnelle initiale » renvoie à ces deux seules années, dans la mesure où les étudiants qui s'engagent dans cette formation, le font pour devenir enseignant, après une formation en mathématiques de trois ans à l'université, avec d'autres étudiants. Ce système a évolué ces dernières années, mais il reste que ce concours comporte une partie écrite mathématique, classique, et une partie orale un peu plus liée à l'exercice futur de la profession, notamment limitée aux programmes scolaires. Divers stages en établissements sont proposés aux étudiants, et la deuxième année, pour la quasi-totalité d'entre eux, ils ont à effectuer un service d'enseignement partiel dans un établissement. Il y a beaucoup de variantes dans les parcours de formation possibles au sein des actuels masters en enseignement de mathématiques universitaires mais il y a une constante : l'existence de ces stages en responsabilité durant lesquels les « étudiants stagiaires » exercent le métier d'enseignant auprès d'élèves qui les considèrent comme tels. C'est une étape qui selon nous détermine un « avant » et un « après » dans la formation, en lien avec l'expérience du terrain.

Nous faisons l'hypothèse qu'à partir du moment où les étudiants sont confrontés à la réalité des classes en tant que professeurs, même si c'est bref, ils peuvent vraiment commencer à construire une posture professionnelle et à être perméables à des éléments sur les pratiques enseignantes. On rentre alors dans le domaine de la formation professionnelle des pratiques. Ce qui est fait « avant » alimente bien entendu cette partie de la formation mais reste la plupart du temps décalé par rapport aux pratiques réelles, enrichissant davantage les connaissances que directement les pratiques, de manière nécessaire évidemment mais non suffisante. Nous postulons qu'on peut travailler « après », à partir des stages, dans une certaine continuité avec ce qui a été fait avant, pour que ce qui a été acquis jusqu'aux stages soit prolongé, adapté en connaissance de cause, qu'il n'y ait pas rupture et ce, en vue d'une

[7] Les ergonomes disent que les enseignants gèrent de ce fait, un environnement dynamique et ouvert (Ria 2008).

plus grande efficacité de la formation. Et il nous semble que la didactique fournit des outils très précieux à ce titre, pour penser la continuité et expliciter les transformations en jeu, en ajoutant que l'élaboration et la mise en place de modalités adéquates de ce type d'interventions en formation restent fondamentales. Dans ce qui suit nous nous centrons sur la partie spécifiquement professionnelle de la formation initiale, qui commence avec les stages, pour illustrer ce postulat.

1. Des hypothèses générales

Les théories disponibles sur le développement des pratiques nous amènent à adopter pour cette partie « professionnelle » de la formation, portant sur les pratiques, une hypothèse générale, empruntée à Vygostki, à la psychologie ergonomique et à la didactique professionnelle : pour qu'un travail en formation enrichisse les pratiques – et pas seulement les connaissances, il est nécessaire de s'appuyer sur des pratiques, notamment en classe, au cœur du métier. Il ne s'agit pas seulement de développer par exemple des connaissances sur les mathématiques à enseigner[8] mais bien de partir des pratiques de l'enseignant en classe et de leur complexité, dans des séances effectives (qui peuvent être filmées), pour à terme enrichir les pratiques des formés. Tenir compte de la complexité des pratiques amène à faire travailler ensemble au moins ce qui relève du cognitif et du médiatif, contenus et déroulements, choix des tâches et gestion correspondante de la classe, tant ces éléments sont de fait imbriqués dans l'exercice quotidien du métier. Non seulement en effet dans les études antérieures il est peu tenu compte des programmes d'enseignement mais encore on ne fait travailler que les aspects cognitifs des savoirs, indépendamment de ce qui doit être ajouté si on prend en compte les déroulements. C'est cet ajout que nous visons, sauf qu'en réalité ce n'est pas un ajout mais bien une nouvelle façon d'interroger conjointement, simultanément, avec les étudiants, les choix de contenus et de déroulements. Il s'agit aussi d'aborder dès le début, et sans cacher la réalité, les contraintes liées au métier qui pèsent sur ces choix et de discuter des marges de manœuvre qui restent, liées davantage aux diversités des singularités individuelles en présence. C'est finalement à travers l'élaboration partagée d'une palette de contenus et de déroulements possibles qu'on y arrive, par exemple en faisant discuter les étudiants sur des alternatives proposées par eux (expérimentées ou non) pour une séquence précise.

Une autre hypothèse s'introduit, à la suite, qui concerne les modalités des formations. Pour qu'un tel travail enrichisse les pratiques individuelles, il est essentiel d'intervenir sur des éléments dont les débutants peuvent avoir conscience, sur lesquels ils ont des ressentis, voire des besoins – qu'ils peuvent « accrocher » à ou qui sont proches de leurs propres pratiques. C'est notre manière d'adapter les hypothèses de Vygotski sur la ZPD (zone Proximale de Développement), en introduisant l'idée de travailler en formation au plus près des ZPDP (Zone de Développement Proximal des Pratiques ou Professionnelle) des futurs enseignants. Pour cela le travail collectif est essentiel pour permettre la discussion, l'échange et la prise de conscience de ce qui est en jeu, aidé par des mots pour dire le professionnel introduits dans les formations. La formation consiste alors à organiser l'émergence de ces dires collectifs, par des questionnements systématiques, puis à s'appuyer sur les ressentis et les besoins exprimés des futurs enseignants pour introduire les ressources dont le formateur suppose que ces débutants ont besoin. Ressources qui, nous le pensons, enrichiraient leurs pratiques en remontant des tâches et déroulements précis discutés aux scénarios plus globaux, en passant par le relief sur les notions visés et les exigences du métier (Robert & al. 2012 ; Robert & Vivier 2013).

[8] A la fois mathématiques et didactiques.

2. *Une dernière hypothèse spécifique et une trajectoire possible dans le cadre de la formation initiale actuelle*

À l'évidence les futurs enseignants ont donc besoin de connaissances mathématiques (disponibles), de connaissances sur les mathématiques à enseigner – en lien avec les programmes, de connaissances didactiques pour bâtir des scénarios cohérents et gérer les déroulements, et d'expériences d'enseignement accompagnées et travaillées. Mais ce n'est pas d'une juxtaposition de ces connaissances dont ils ont besoin mais bien d'une appropriation combinée, cohérente, adaptable, qui leur convienne et qui s'insère de manière naturelle dans leurs premières expériences… Nous faisons l'hypothèse que la formation peut y contribuer à condition de respecter une certaine progressivité, sans tout mélanger non plus…

Le travail mathématique avec des outils didactiques[9] pour décrire les mathématiques peut participer à l'organisation nécessaire des connaissances à acquérir pour que l'enseignant s'engage dans ces activités mathématiques spécifiques. Cela concerne notamment la réflexion sur les méthodes, et le fait d'avoir des idées un peu synthétiques sur les mathématiques à enseigner, au fur et à mesure qu'on les fait (re-)travailler. Cela peut nourrir le besoin de disposer du relief sur les notions avant d'en envisager l'enseignement. Cela peut contribuer ainsi à une plus grande disponibilité des connaissances mathématiques à utiliser en participant à leur restructuration, et garantir des possibilités d'adaptations de ces connaissances, ultérieures, dans les classes. Cela peut enfin nourrir plus localement des choix des tâches et la possibilité d'en suivre le déroulement en classe, côté élèves, en disposant de repères issus du travail sur les tâches. Par exemple les types de problèmes en géométrie que Marion et Ovaert. (1980), Amalberti et al. (1988) avaient dégagés peuvent alimenter ce type de travail. D'autres exemples sont donnés dans Robert (1995). On peut aussi proposer quelques problèmes originaux pour donner du sens à une notion, du niveau des connaissances travaillées (avec l'hypothèse qu'il pourra y avoir transfert de ce qui joue alors, surtout si c'est explicité) : par exemple un travail sur les carrés magiques réels et les systèmes générateurs, présenté comme servant à « compter » l'infinité d'éléments d'un espace vectoriel. De manière continue, en commençant avant le début des stages et en continuant après, on peut habituer petit à petit les étudiants à repérer, dans les connaissances mathématiques qu'ils travaillent, non seulement celles qui sont à mettre en fonctionnement dans un exercice donné, mais aussi ce qui est objets, outils, cadres, registres (types d'écriture, de langage), types de raisonnement, niveaux de rigueur, comme dans Pian et Robert (1999) par exemple. Autant de repères permettant à la fois l'élaboration de tâches variées, riches, et la possibilité d'en suivre les déroulements en classe.

A l'occasion d'épisodes de formation dédiés à des anticipations plus précises sur le métier d'enseignant (temps de préparation de stage de pratiques accompagnées, travail sur des questions orales ou écrites à dimensions « professionnelles » posées au concours du CAPES) on peut commencer à faire analyser les adaptations de connaissances qui sont convoquées dans un exercice et les activités correspondantes potentielles d'élèves - que ce soit la reconnaissance de connaissances indiquées ou non, anciennes ou moins, ou le type de traitement à utiliser, avec des mélanges de cadres ou de points de vue par exemple, ou l'organisation des raisonnements qui est en jeu (par étapes)[10]. A un niveau plus global, on peut aussi chercher à faire identifier des niveaux de conceptualisation et des types de stratégie

[9] Comme les analyses de tâches par exemple.

[10] avec des outils comme des grilles d'analyse d'énoncés, inspirés de la double approche ergonomique et didactique (Coulange et Train 2014).

relatifs à ces niveaux en partant de problèmes « bien choisis » comme ceux cités pour la géométrie, dans Robert (2003).

Après le début des stages, on peut commencer à introduire en continuité les questions liées aux apprentissages et à la conceptualisation visée. Les outils déjà cités permettent également d'identifier des origines potentielles des difficultés des élèves, de repérer des malentendus, des implicites ignorés des effets de contrat, d'interroger des proximités supposées (mais erronées) entre les activités mathématiques des élèves et leurs apprentissages,... On introduit en situation l'idée d'apprendre à gérer ensemble tâches et déroulements, en tenant compte des activités des élèves (ou des traces, des observables liés à ces activités devenues effectives). Interviennent aussi des connaissances sur les liens entre les activités des élèves et leurs apprentissages, compte tenu de contextes de classe. L'objectif est d'assurer un rapprochement effectif entre les activités attendues des élèves et les activités que les élèves peuvent développer en classe (en vrai !) – compte tenu du choix fait de l'organisation prévue du travail des élèves. On peut introduire « naturellement », en continuité, des repères sur la mise des élèves en activité (et leur maintien dans l'activité), le type d'improvisation à penser (en s'appuyant sur la préparation et le repérage de ce que font les élèves), sur le type d'aides à donner : on a un objectif précis, coller le plus possible aux activités mathématiques prévues ou plus exactement, à leur potentiel au regard des apprentissages ou de la conceptualisation visée !

Contribuer à élaborer un rapport aux mathématiques riche, qui s'enrichit par l'expérience sur le terrain, qui nourrit leur enseignement et s'adapte aux nécessités des apprentissages des élèves et plus généralement du métier de professeur,[11] voilà ce qui pourrait résumer notre projet de description de l'intervention des mathématiques dans le cadre de la formation des enseignants. Il nous faut ici insister sur la difficulté qu'une telle trajectoire de formation initiale partant des pratiques enseignantes (et non des seules connaissances et savoirs mathématiques, ni même didactiques) peut recouvrir, du fait des mises en lien parfois délicates entre ce qui peut être travaillé avant, « juste avant », pendant et après les stages de ces futurs enseignants, dans différents contextes de formation (à teneur plus ou moins didactique ou mathématique, visant la préparation du concours, l'accompagnement des stages…) ou de stages (de pratique accompagnée, en responsabilité avec des tuteurs…) et avec différents acteurs de la formation (mathématiciens, didacticiens, enseignants intervenant dans la formation ou le tutorat). Les différences de postures (étudiants / enseignants), les différences d'univers de savoirs et de connaissances mathématiques fréquentés (au niveau du secondaire et/ou du supérieur), les « mathématiques » diffuses et imbriquées dans les composantes des pratiques enseignantes sont en cause, objectivement. De telles mises en lien nécessitent des allers-retours entre pratiques enseignantes et « mathématiques », un temps long, une progressivité (et un *timing*) dans la formation des étudiants / futurs enseignants de mathématiques, une mise en cohérence qui passe par un projet partagé et des arrière-plans didactiques et mathématiques communs pour les différents acteurs de la formation. Cela nécessite peut-être également d'éviter un modèle trop « successif » entre formation mathématique *stricto sensu* et professionnelle d'étudiants se destinant à devenir enseignants comme c'est peut-être le cas en France actuellement. C'est aussi un pari d'enrichissement réciproque entre mathématiques et didactique dans la formation des futurs enseignants qui nous paraît envisageable, et même souhaitable.

Notons enfin, en guise d'ouverture (qui nous semble adaptée à la thématique globale de ce colloque), que la nécessité que nous venons de pointer, d'élaborer des rapports spécifiques et

[11] Qui ne soit ni réduit aux seuls apprentissages mathématiques, ou à de « belles mathématiques » que l'on peut vouloir enseigner.

riches aux mathématiques, *via* des activités contextualisées et une remontée à partir de pratiques, ne concerne pas que la formation d'enseignants de mathématiques. Elle touche aussi à de « nouveaux » usages des mathématiques comme ceux liés nouvelles technologies ou relatives à d'autres types de formations professionnelles…. La didactique des mathématiques fournit des descriptions à même de prendre en compte et de renouveler, voire de contribuer à transformer les usages des mathématiques en (re-)contextualisant ces usages dans les activités, les pratiques qui les convoquent. C'est en tout cas ce qui nourrit nos projets.

REFERENCES

Bednarz N., Proulx J. (2009) Knowing and using mathematics in teaching: Conceptual and epistemological clarifications. *For the Learning of Mathematics* 29(3), 11-17.

BESSOT A. (2011) L'INGÉNIERIE DIDACTIQUE AU CŒUR DE LA RECHERCHE EN THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES. IN MARGOLINAS C. et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 29-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (1997) La théorie des situations didactiques (Cours donné lors de l'attribution du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal). *Interactions didactiques.* Genève.

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(1) 77–124.

Chevallard Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(3) 17-54.

Durand M., Ria L., Flavier E. (2002) La culture en action des enseignants. *Revue des sciences de l'éducation* XXVIII (1) 83-103.

Maheux J.-F., Proulx J. (2014) Vers le faire mathématique: essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques *Annales de didactique et de sciences cognitives* 19, 17-52.

Masselot P. et Robert A. (2007) Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de professeurs enseignant les mathématiques, *Recherche et formation* 56, 15-32.

Marion J., Ovaert J.L. (1980) Sur l'enseignement de la géométrie au lycée, *GREG IREM de Marseille,* 12.

Amalberti R., Arnal J.-P., Beniamino J.-C., Castelli A., Clou J.-P., Marion J., Ovaert J.-L., Proudhon D., Vernet J.-M. (1988) *Géométrie I.* Marseille : IREM d'Aix-Marseille.

Pariès M., Robert A., Rogalski J. (2008) Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré, *Educationnal studies of mathematics* 68, 55-80.

Pian J., Robert A. (1999) Comment élaborer des énoncés mathématiques? Un exemple. *Brochure de l'IREM Paris-Sud*, N°89. Paris.

Pouyanne N. (2012) Notions non encore formalisées. In Robert et al. (Eds.) *Une caméra au fond de la classe.* Besançon : Presses universitaires de Franche Comté.

Proulx J. (2012) De l'existence de mathématiques de la didactique – réflexions sur l'articulation entre mathématique et didactique, In Dorier et al. (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF 2012*. Genève, suisse : EMF.
http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Ria L. (2008) Ergonomie du travail enseignant. In Van Zanten A. (Ed.) *Dictionnaire de l'Education* (pp.282-284). Presses Universitaires de France.

Robert A. (1995) *L'épreuve sur dossier à l'oral du capes de mathématiques (Géométrie).* Paris : Ellipses.

Robert A. (2003) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation *Petit x,* 63, 7-29.

Robert A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse des inférences en formation, *Recherches en didactique des mathématiques* 27/3, 271-312.

Robert A. (2008a) Le cadre général de nos recherches en didactique des mathématiques. In Vandebrouk F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 11–22). Toulouse : Octarès Editions.

Robert A. (2008b) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouk F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45–54). Toulouse : Octarès Editions.

Robert A. (2008c) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In Vandebrouk F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 59–65). Toulouse : Octarès Editions.

Robert A., Lattuati M., Penninckx J. (1999) *L'enseignement des mathématiques au lycée*. Paris : Ellipses.

Robert A., Penninckx J., Lattuati M. (2012) *Une caméra au fond de la classe, (se) former au métier d'enseignant de mathématiques du second degré à partir d'analyses de vidéos de séances de classe.* Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignantes de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologie*s 2(4), 505–528.

Robert A., Vivier L. (2013) Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques, *Éducation et didactique 7-2,* 115-144.

Vandebrouk F. (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès Editions.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'UTILISATION DES DEGRÉS DE CERTITUDE COMME OUTIL DE PROFESSIONNALISATION EN FORMATION DES MAÎTRES DU PREMIER DEGRÉ

Michel DERUAZ* - Luc-Olivier BUENZLI**

Résumé – On attend des futurs enseignants du premier degré un changement de positionnement face aux mathématiques. Ils doivent, pendant leur formation, quitter le rôle d'élève qui attend une validation de son enseignant pour endosser celui moins confortable d'expert des mathématiques qui sera le sien dans sa classe. Pour favoriser cette transition, nous utilisons, dans un cours de formation initiale, des degrés de certitude lors de sondages construits à l'aide de QCM. Nous proposons, dans cette contribution, de présenter les premiers résultats d'une recherche qui a été menée pour évaluer les conséquences de l'utilisation de ces degrés de certitude sur la formation.

Mots-clefs: degrés de certitude, questions à choix multiples, mathématiques, formation des enseignants.

Abstract – On attend des futurs enseignants du premier degré un changement de positionnement face aux mathématiques. Ils doivent pendant leur formation quitter le rôle d'élève qui attend une validation de son enseignant pour endosser celui moins confortable d'expert des mathématiques qui sera le sien dans sa classe. Pour favoriser cette transition, nous utilisons dans un cours de formation initiale des degrés de certitude lors de sondages construits à l'aide de QCM. Nous proposons, dans cette contribution, de présenter les premiers résultats d'une recherche qui a été menée pour évaluer les conséquences de l'utilisation de ces degrés de certitude sur la formation.

Keywords: degrees of certainty, multiple-choice questions, mathematics, teacher training.

I. INTRODUCTION

1. *Notre positionnement didactique*

Pour commencer, nous allons, comme le demandent les coordinateurs, tenter d'expliciter notre vision de ce qu'est la didactique en disant quelques mots sur notre positionnement face à cette discipline, positionnement fortement lié à nos parcours professionnels. Avant d'intégrer l'équipe des formateurs de l'Unité de Recherche et d'Enseignement Maths Sciences (UER MS) de la Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud (HEP VD) pour participer à la formation des maîtres, nous avons une expérience d'enseignants; en mathématiques dans un Gymnase (Lycée) pour le premier auteur, à l'école primaire pour le second. Assez rapidement, nous avons éprouvé le besoin de compléter notre formation pour mieux comprendre les

* HEP Vaud – Suisse – michel.deruaz@hepl.ch
** HEP Vaud – Suisse – luc-olivier.bunzli@hepl.ch

Deruaz M, Bünzli L.-O. (2015) L'utilisation des degrés de certitude comme outil de professionnalisation EN formation des maîtres du premier degré. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 95-107.

enjeux de la formation et essayer d'intégrer des éléments plus théoriques dans les cours; en suivant le *Master en didactique des disciplines Spécialité Professionnelle : Formation des formateurs* en mathématiques de l'Université Paris Diderot pour le premier auteur, un *Master en Sciences de l'Education* à l'Université de Genève pour le second. À la suite de ces formations, nous participons à des colloques et contribuons à des recherches, mais essentiellement avec un regard de formateur.

2. *Le contexte de cette contribution*

Cette contribution se situe dans la continuité de celle que nous avions présentée dans le groupe de travail GT1 à EMF 2012 (Deruaz & Clivaz 2012). Nous avions alors décrit la mise en place d'un cours de savoir disciplinaire dans le cadre de la formation initiale des maîtres du premier degré à la HEP VD.

En automne 2012, un nouveau plan d'études a été mis en œuvre pour la formation de ces maîtres. L'UER MS a reçu le mandat de proposer deux modules spécifiques à l'enseignement des mathématiques, l'un au deuxième et l'autre au cinquième semestre de formation. Lors de la conception de ces deux modules, nous avons essayé d'intégrer les conclusions des travaux du GT1 et plus particulièrement les remarques qui ont suivi notre présentation. Nous avons aussi évidemment tenu compte d'autres résultats obtenus dans le cadre d'une recherche dont l'objectif était d'évaluer la mise en oeuvre de notre cours de savoirs disciplinaires. En particulier en ce qui concerne l'utilisation d'une plateforme en ligne pour les exercices et l'utilisation de questions à choix multiples lors de la certification du module (Deruaz 2015).

Dans leurs conclusions, les coordinateurs du GT1 mettaient en évidence l'importance de l'articulation entre connaissances didactiques et connaissances mathématiques:

> Dans les analyses de pratiques d'enseignants, autant en contexte de formation (Deruaz, Passaro, Proulx) qu'en contexte d'enseignement (Clivaz), il n'était pas toujours facile de distinguer ce qui relevait d'une connaissance didactique ou d'une connaissance mathématique.
>
> À cet égard, les discussions ont fait ressortir l'intérêt de dissocier ces deux types de connaissances pour ensuite les faire fonctionner et les articuler. Il s'agit également de clarifier le rôle de la formation pour permettre cette articulation. (Clivaz, Proulx, Sangaré, & Kuzniak 2012, pp. 156-157)

Pour permettre à nos étudiants de faire plus facilement des liens entre les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement et l'enseignement des mathématiques, nous proposons un module qui met en évidence cette articulation avec une partie *cours en amphithéâtre* sur les savoirs mathématiques spécifiques à l'enseignement au sens de Ball et de son équipe (Ball, Thames & Phelps 2008), mais en intégrant le plus souvent possible des liens avec des tâches issues des moyens d'enseignement officiels (manuels). La partie *séminaires* (20 à 30 étudiants) a elle été construite à partir d'éléments estimés propices à faire des liens entre les contenus du cours et l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Nous avons aussi décidé d'évaluer les contenus mathématiques et les contenus didactiques lors d'un seul examen construit à l'aide de QCM et en utilisant des degrés de certitude (Deruaz & Clivaz 2012). Dans cette contribution, nous allons essayer de montrer comment l'utilisation de degrés de certitude pendant le cours et lors de l'examen peut agir sur le positionnement des futurs enseignants du premier degré face aux mathématiques.

II. LA DESCRIPTION DU MODULE

Les objectifs de ce module et l'utilisation des degrés de certitude ont déjà été présentés dans des travaux antérieurs (Deruaz 2015, à paraître). Pour faciliter la lecture de cette contribution, nous avons estimé qu'il était important de les faire figurer dans ce texte, mais ce chapitre reprend très largement les textes cités ci-dessus.

1. Les objectifs de la formation

La plupart des étudiants qui choisissent cette formation viennent de filières non scientifiques du Gymnase. Leur posture est donc souvent celle d'un élève qui répond à une question qui lui a été posée et qui attend que sa réponse soit validée par un expert, en général son maître de mathématiques. Dans ses futures classes, même s'il s'en défend parfois, ce même étudiant sera l'expert en mathématiques qui devra se positionner face aux questions ou aux réponses des élèves. Ce rôle d'expert que doit exercer l'enseignant en mathématiques a été décrit par Robert, Lattuati et Penninckx (1999) pour ce qui concerne l'enseignement au lycée. Ces auteures définissent ce qu'elles nomment les *pratiques expertes* des mathématiciens à l'aide de cinq caractéristiques. La première de ces caractéristiques nous semble aussi adéquate pour les futurs experts des mathématiques de l'école primaire:

> La disponibilité des connaissances (le fait que des connaissances peuvent être utilisées à bon escient sans même avoir été rappelées), leur organisation et les rapports entre elles.
>
> Ce caractère disponible des connaissances de l'expert se traduit, par exemple, par sa capacité à pouvoir chercher systématiquement la solution d'un problème en dehors du strict cadre où il est posé, à essayer de mettre le problème en relation avec d'autres questions lorsque la solution n'est pas immédiate. Cette aptitude à réaliser des changements de perspectives, à pouvoir aller chercher d'autres savoirs que ceux qui étaient *a priori* en cause, traduit la disponibilité des connaissances chez l'expert. De plus, lorsque cette recherche n'est pas guidée par les termes apparents du problème, l'expert ne la conduit pas complètement au hasard: elle est orientée par l'organisation des connaissances dont il dispose. Nous insistons sur le fait que ce ne sont pas seulement les connaissances qui sont disponibles, mais aussi, et de manière intimement liée, les rapports entre ces connaissances.
>
> Cette disponibilité se traduit aussi par l'inscription (active et personnelle) de toute nouvelle connaissance dans les précédentes. (Robert & al. 1999, pp. 13-14)

De notre point de vue, cette disponibilité des connaissances, et surtout des rapports entre des connaissances qui ne semblent pas liées entre elles, sont fondamentaux dans le travail de l'enseignant de mathématiques. De nombreuses recherches (par exemple Vandebrouck 2008) montrent que ce n'est souvent pas le cas chez les enseignants débutants, même au niveau secondaire où les enseignants de mathématiques ont pourtant une formation académique importante dans cette discipline. On peut donc faire l'hypothèse que ce manque de disponibilité des connaissances et de certains liens entre elles est aussi présent chez les futurs enseignants primaires vaudois, dont le bagage mathématique ne dépasse pas celui enseigné à l'école secondaire.

Clivaz (2011) montre que cette disponibilité des connaissances et de certains liens entre elles, s'ils sont nécessaires pour le maître secondaire, sont aussi importants au niveau primaire. Ces concepts permettent notamment à l'enseignant de donner du sens aux savoirs qu'il enseigne et aux connaissances qu'il utilise pour préparer ses cours et pour gérer les situations didactiques en classe. Pour que les liens entre les différentes connaissances mathématiques soient disponibles à l'enseignant débutant, il est nécessaire qu'ils soient mis en évidence et travaillés pendant sa formation et que leur importance soit relevée tant dans la résolution de problèmes liés directement aux connaissances spécifiques travaillées dans le cours que dans des situations proches de celles qui seront vécues en classe. Or des travaux récents, notamment Clivaz et Deruaz (2013), Dias et Deruaz (2012) permettent d'affirmer que, pour une grande partie des étudiants futurs enseignants, ces liens ne sont pas disponibles.

Cette disponibilité des connaissances et des liens entre elles devrait non seulement permettre à l'enseignant débutant de préparer ses cours et de donner du «sens» à ce qu'il veut faire apprendre à ses élèves, mais elle devrait aussi lui permettre de se positionner sur des faits mathématiques. En effet, comme nous l'avons vu plus haut, dans la relation pédagogique, il sera l'expert et les élèves attendront de lui des réponses et des validations. Il faudra donc qu'il soit capable non seulement de donner une réponse ou de se positionner sur la réponse d'un élève, mais qu'il puisse évaluer son degré de certitude à propos de sa réponse pour décider s'il peut la fournir telle quelle aux élèves ou s'il doit se renseigner avant de le faire.

Pour se prononcer de manière définitive sur un résultat qu'il ne connaît pas encore, l'expert en mathématiques doit soit exhiber un contre-exemple, soit démontrer le résultat. Ce processus peut être long et n'est pas toujours possible en classe dans le feu de l'action. L'enseignant doit alors se contenter d'une estimation de la vérité du résultat, d'une preuve pragmatique et non formelle. Proposer une réponse n'est donc pas suffisant, on attend de l'enseignant qu'il puisse associer à sa réponse un niveau de certitude qui, évidemment, lui est propre.

2. *Les degrés de certitude*

Comment intégrer les objectifs de ce module, qui portent autant sur le positionnement face aux mathématiques et à leur enseignement que sur les contenus mathématiques eux-mêmes dans le processus de certification? Les forces de l'UER MS ne lui permettent pas de corriger de manière satisfaisante plus de 200 copies d'un examen écrit traditionnel dans les délais impartis. Elle a donc opté pour la réalisation d'un examen standardisé en utilisant des Questions à Choix Multiple (QCM) avec Degrés de Certitude (DC). Comme nous le disions déjà dans notre contribution à EMF 2012:

> «Ce n'est pas ce que nous ignorons qui nous cause des problèmes, mais ce que nous savons ... et qui est faux. Reconnaître (...) ses degrés d'incompétence est une habileté fondamentale, une compétence cruciale pour tout apprenant.» (Gilles 2010, p. 101). À la suite des travaux de Gilles, nous estimons qu'il est important, voire même essentiel pour un enseignant d'être capable d'estimer son degré de certitude par rapport à une affirmation qu'il peut être amené à faire, en particulier lorsqu'il répond à un élève ou lorsqu'il se positionne par rapport à une proposition d'un élève. L'ignorance ignorée est ainsi particulièrement dangereuse. Les DC permettent de tenir compte, dans le barème, de la certitude avec laquelle l'étudiant a choisi sa réponse parmi les solutions proposées. Nous avons donc utilisé les DC avec l'échelle donnée dans le tableau 1. (Deruaz & Clivaz 2012, p. 191)

Si vous considérez que votre réponse a une probabilité d'être correcte comprise entre	DC N°	Vous obtiendrez les points suivants en cas de réponse	
		correcte	incorrecte
0 % et 25 %	0	+13	+4
25 % et 50 %	1	+16	+3
50 % et 70 %	2	+17	+2
70 % et 85 %	3	+18	+0
85 % et 95 %	4	+19	-6
95 % et 100 %	5	+20	-20

Tableau 1 *– Échelle DC classiques (Gilles, 2010, p. 69)*

Les résultats de cette première expérience avec le cours de savoirs disciplinaires s'étant avérés globalement positifs (Deruaz 2015), il a été décidé de la prolonger dans le nouveau module, non seulement pour l'examen, mais également pendant les séances de cours dans le but de rendre actifs les étudiants et de les faire réfléchir sur les processus de vérification des résultats possibles ou non en fonction des questions posées; de leur faire prendre conscience qu'en mathématiques, dans la mesure du possible, on ne relit pas sa réponse, mais on la vérifie.

Nous proposons dans cette contribution de présenter les premiers résultats d'une recherche qui a été mise en œuvre pour essayer d'évaluer les conséquences de cette utilisation élargie des degrés de certitude sur le positionnement de nos étudiants face aux mathématiques.

III. L'UTILISATION DES DEGRES DE CERTITUDES PENDANT LE COURS

Les résultats ci-dessous ont été récoltés au printemps 2014. Le cours décrit est constitué de 12 séances de 90 minutes dont trois ont porté sur le thème de la logique et des ensembles. 360 étudiants étaient inscrits au cours et 350 se sont présentés à la session d'examen. Si la logique n'est pas enseignée à l'école primaire, le programme officiel mentionne dans son chapeau, sous «visées prioritaires»:

> Se représenter, problématiser et modéliser des situations et résoudre des problèmes en construisant et en mobilisant des notions, des concepts, des démarches et des raisonnements propres aux Mathématiques et aux Sciences de la nature dans les champs des phénomènes naturels et techniques, du vivant et de l'environnement, ainsi que des nombres et de l'espace. (Plan d'étude romand 2010)

Plus loin dans le texte, on trouve des expressions du type «tri et organisation des informations (liste, schéma,…)», «déduction d'une information nouvelle à partir de celles qui sont connues» ou encore «vérification, puis communication d'une démarche (oralement) et d'un résultat en utilisant un vocabulaire ainsi que des symboles adéquats». Ceci dès les premières années de la scolarité. Pour reprendre la terminologie utilisée par Mesnil dans sa thèse (Mesnil 2014), il ne s'agit pas d'enseigner aux futurs enseignants de l'école primaire des bases de logique mathématique, mais de les sensibiliser à la logique des mathématiques.

Notre objectif est de leur préciser quelques notions comme la conjonction, la disjonction, la négation, l'implication et l'équivalence en mettant en évidence les liens avec la théorie des ensembles et les notions d'intersection, de réunion, d'inclusion ou de complémentarité, mais aussi les difficultés liées aux significations parfois différentes dans la langue naturelle (Mesnil 2014, pp.118-139). Dans un second temps, et c'est ce qui sera décrit dans les deux séances analysées plus précisément par la suite, nous cherchons à mettre en évidence quelques difficultés récurrentes comme:

1. Ce n'est pas parce qu'un résultat est vrai que le raisonnement qui a permis d'obtenir ce résultat est correct. Nous pouvons illustrer cela avec l'exemple ci-dessous sur lequel nous reviendrons dans notre analyse:

   Les canards sont des oiseaux,
   Or les palmipèdes sont des oiseaux,
   Donc les canards sont des palmipèdes.

   Les canards sont bien des palmipèdes, les deux prémisses et la conclusion sont vraies, mais la déduction n'est pas correcte.

2. Pour écrire la négation d'une conjonction (respectivement d'une disjonction), il faut prendre la disjonction des négations (respectivement des conjonctions).

Plusieurs auteurs ont déjà relevé ce type de difficultés, par exemple:

> Alors que les mots «et» et «ou» peuvent, dans certains cas, être dans la langue usuelle des opérateurs sur les propositions qui correspondent aux connecteurs ET et OU, il n'y a pas dans la langue française d'opérateur sur les propositions qui serait l'analogue du connecteur NON.

> Ainsi, là où la conjonction des propositions «n est pair» et «n est un multiple de 3» est «directement» la proposition «n est pair ET n est un multiple de 3», la négation de la proposition «n est pair», qui est à strictement parlé la proposition «NON(n est pair)», ne sera pratiquement jamais formulée ainsi; on dira plutôt éventuellement «n est non pair», ou plus souvent «n n'est pas pair» et même encore plus souvent «n est impair». (Mesnil, 2014, p 122)

Une autre difficulté est liée à une *mise en facteur*, dans le langage courant, du sujet et du verbe dans le but d'alléger le texte. Par exemple dans la phrase «j'ai mangé du riz et du poulet» que l'on doit développer en «j'ai mangé du riz et j'ai mangé du poulet» avant de pouvoir en prendre la négation qui est «je n'ai pas mangé de riz ou je n'ai pas mangé de poulet».

1. Une première séance de cours

Pendant le cours, nous affichons des questions sur l'écran de projection et nous demandons aux étudiants d'y répondre sur la plateforme moodle à l'aide de leur téléphone portable, tablette ou ordinateur. Tous les étudiants ne répondent pas, mais nous arrivons, en général, à obtenir plus de 200 réponses. Nous avons utilisé ce procédé pour la première fois au tout début de la seconde séance de cours en posant deux questions relatives à l'affirmation ci-dessous:

Les carrés ont quatre côtés de même longueur,
Or les losanges ont quatre côtés de même longueur,
Donc les carrés sont des losanges.

A la question *le raisonnement ci-dessus est il correct?,* 66% des étudiants ont répondu positivement et à la question *les carrés sont-ils des losanges?,* 45% des étudiants ont répondu positivement. On remarque donc qu'à ce moment-là du cours, beaucoup d'étudiants ne maîtrisent pas l'enchaînement de propositions logiques et qu'une partie non négligeable (nécessairement plus de 20%) de ces étudiants prétendent que le raisonnement est correct, mais contredisent ensuite la conclusion de ce même raisonnement en affirmant que les carrés ne sont pas des losanges! Evidemment ces deux questions mettent en évidence plusieurs difficultés au niveau de la logique des mathématiques; il y a la non correction de l'enchaînement logique et le fait que si formellement les carrés sont des losanges, à l'école primaire ce n'est pas nécessairement le cas! Nous estimons toutefois qu'il est important que l'enseignant de l'école primaire sache que si dans sa classe les carrées ne sont pas nécessairement des losanges pour les élèves, lorsque ceux-ci seront à l'école secondaire, alors les carrés seront des losanges. Les bonnes réponses n'ont pas été données aux étudiants. Il leur a simplement été dit que cela serait repris à la fin de la séance.

Lors de cette même séance de cours, après avoir travaillé un moment sur la différence entre appartenance à un ensemble et inclusion d'un sous-ensemble dans un autre sous-ensemble d'un même ensemble, on a proposé le syllogisme ci-dessous comme exemple d'introduction:

Les chiens sont des mammifères,
Or les mammifères sont des animaux,
Donc les chiens sont des animaux.

En l'illustrant avec un diagramme de Venn. Immédiatement après, nous avons proposé un nouveau sondage en introduisant cette fois des degrés de certitude en proposant le syllogisme ci-dessous:

Les truites sont des poissons,
Or les poissons savent nager,
Donc les truites savent nager.

A la question *le syllogisme est-il correct*?, nous avons obtenu 98% de réponses positives avec une répartition des degrés de certitude donnée dans le tableau ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
0%	3%	5%	18%	23%	52%	88,8%

***Tableau 2** – Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On observe donc que lorsqu'il s'agit d'appliquer directement un résultat qui vient d'être vu, les étudiants le font correctement et utilisent majoritairement des degrés de certitude élevés.

Après avoir discuté quelques minutes de ces résultats avec les étudiants, on a proposé le sondage suivant:

Les canards sont des oiseaux,
Or les palmipèdes sont des oiseaux,
Donc les canards sont des palmipèdes.

A la question *le syllogisme est-il correct?*, nous avons obtenu 26% de réponses positives avec une répartition des degrés de certitudes données dans le tableau ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
0%	5%	9%	21%	24%	41%	85,2%

***Tableau 3** – Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On observe que lorsqu'il ne s'agit plus d'une application simple du résultat précédent, environ un quart des étudiants se retrouvent en difficulté et que, même s'ils sont un peu moins élevés, les degrés de certitude utilisés par les étudiants à ce sondage sont proches de ceux utilisés lors du sondage précédent.

Nous avons ensuite discuté avec les étudiants, notamment à l'aide du syllogisme ci-dessous:

Les canards sont des oiseaux,
Or les pingouins sont des oiseaux,
Donc les canards sont des pingouins.

Cet exemple nous permet d'insister sur le fait que ce qui nous intéresse n'est pas la validité de la troisième affirmation, mais la correction de l'enchaînement entre les prémisses et la conclusion. Nous avons alors pris une trentaine de minutes pour rappeler aux étudiants les définitions des quadrilatères usuels ainsi que quelques propriétés de ces quadrilatères. Avant de terminer cette seconde séance de cours, nous avons proposé un dernier sondage aux étudiants:

Les carrés ont quatre côtés de même longueur,
Or les losanges ont quatre côtés de même longueur,
Donc les carrés sont des losanges.

Nous leur avons alors uniquement demandé si ce syllogisme était correct et nous avons obtenu que 42% de réponses affirmatives ce qui est meilleur que les 66% obtenus lors du premier sondage, mais nettement moins bien que les 26% obtenus lors du troisième sondage pour lequel la structure logique était identique. Nous pouvons constater que les étudiants ont plus de difficultés à appliquer ces raisonnements logiques lorsque le contexte est géométrique que lorsqu'il est indépendant des mathématiques. Ce n'est pas surprenant car s'ils savent probablent tous que les canards sont des palmipèdes, ils hésitent encore sur les inclusions entre les différents ensembles de quadrilatères pour lesquelles les règles sont différentes dans le contexte du cours de mathématiques que ce qu'ils utilisent en dehors du cours. Ils ne peuvent donc pas se fier à leur intuition. C'est d'ailleurs l'une des raisons pour lesquelles nous utilisons ces exemples, car nous faisons l'hypothèse que s'ils ne peuvent plus se fier à leur intuition, ils seront le plus enclins à utiliser les outils de la logique des mathématiques que nous leur proposons. Pour ce qui est des degrés de certitude, nous avons obtenu les résultats ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
1%	3%	15%	25%	18%	38%	83,1%

Tableau 4 *– Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On ne peut que constater que, lors de cette première séance dans laquelle les DC sont utilisés et sur ce chapitre particulier, les DC choisis par les étudiants sont très stables, ceci même pour des questions pour lesquelles les taux de réussite sont relativement différents. Nous relevons toutefois qu'il s'agit de la première utilisation des degrés de certitude dans ce module et que nous les proposons sur des contenus nouveaux et difficiles pour lesquels les étudiants n'ont, pour l'instant pas beaucoup d'outils de vérification à disposition.

A l'issue de la séance, nous avons mis à la disposition des étudiants un test en ligne composé de QCM avec degrés de certitude pour leur permettre de s'exercer. Ils avaient en particulier la possibilité d'effectuer plusieurs fois le test pour mesurer l'impact du choix des degrés de certitude sur la note obtenue.

2. *Une deuxième séance de cours*

En analysant les résultats d'un pré-test qui a été proposé aux étudiants avant la première séance de cours, nous avons observé qu'à la question:

Je suis une fille et je n'ai pas les yeux bleus
Quelle est la négation de cette phrase?
Veuillez choisir une réponse:

1. *Je suis une fille et j'ai les yeux bleus*
2. *Je suis un garçon et je n'ai pas les yeux bleus*
3. *Je suis une fille ou j'ai les yeux bleus*
4. *Je suis un garçon ou j'ai les yeux bleus*

Seuls 41% des étudiants ont répondu correctement. C'est à la suite de ce constat que nous avons proposé, au début de cette séance de cours qui allait en particulier porter sur la négation d'une affirmation et le complémentaire d'un sous-ensemble, le sondage qui suit:

La négation de l'affirmation

Alice est drôle et Bill le lézard n'est pas lourd

est la proposition

1. Alice est drôle et Bill le lézard est lourd
2. Alice n'est pas drôle et Bill le lézard est lourd
3. Alice n'est pas drôle ou Bill le lézard n'est pas lourd
4. Bill le lézard est lourd ou Alice n'est pas drôle

5. Bill le lézard n'est pas lourd et Alice est drôle
6. Aucune de ces propositions.

Nous avons alors obtenu les résultats suivants:

1	2	3	4	5	6
2%	57%	7%	19%	8%	7%

Tableau 5 *– Réponses choisies par les étudiants*

On constate que le taux de réponses correctes (19%) est encore plus faible que lors du pré-test. Ceci est peut-être dû au fait que certains étudiants cherchaient la réponse *Alice n'est pas drôle ou Bill le lézard est lourd* et ont ainsi choisi la réponse *aucune de ces propositions.* Mais même en ajoutant ces deux résultats, on obtient un résultat (26%) encore inférieur à celui obtenu lors du prétest (41%). Le fait que la phrase de départ ne soit pas habituelle a peut-être perturbé certains étudiants qui ont répondu spontanément de manière correcte lors du pré-test et qui ont cherché à utiliser un modèle mathématique qu'ils ne maîtrisent pas encore lors du sondage pendant le cours. Lors du pré-test, le feed-back proposé aux étudiants était simplement vrai ou faux, mais ne donnait pas la réponse correcte. Il est possible que certains étudiants qui étaient convaincus par leur réponse incorrecte ont été déstabilisés et ont répondu au hasard lors du sondage, pour lequel nous avons obtenu les degrés de certitude ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
7%	13%	24%	26%	17%	13%	68,1%

Tableau 6 *– Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On constate que les étudiants ont globalement choisi des degrés plus prudents que lors de la séance de cours précédente. Il est possible que cela soit lié à leur première expérience et à leur entraînement à l'utilisation des degrés de certitude, mais il est aussi possible que cela soit lié au fait qu'une question analogue qui n'avait pas donné de bons résultats a été posée lors du pré-test. Pour répondre partiellement à cette interrogation, nous avons proposé un sondage avec une question d'une autre nature immédiatement derrière ce premier sondage:

Effectuer la soustraction 1011010 - 649709.
Dans quelle boîte se trouve le résultat?

A	B	C	D	E
2 0 0 6 9 1	2 0 5 3 5 1	2 1 5 0 5 1	2 4 4 7 2 1	2 5 0 2 6 1
2 1 8 9 6 1	2 2 3 8 7 1	2 5 7 6 8 1	2 6 3 9 2 1	2 6 3 6 8 1
2 4 4 4 4 1	3 0 9 5 9 1	3 0 4 6 0 1	3 4 2 2 9 1	2 8 9 3 0 1
2 5 1 7 4 1	3 1 6 9 7 1	3 0 8 5 3 1	3 6 1 3 0 1	3 2 4 9 4 1
3 1 4 9 7 1	3 5 5 5 1 1	3 1 2 0 6 1	3 6 9 9 8 1	3 3 5 9 7 1
3 5 6 0 0 1	3 7 7 4 5 1	3 6 9 9 6 1	3 9 3 3 2 1	3 6 9 2 1 1

Le passage par les boîtes est ici nécessaire pour que les étudiants ne puissent pas transformer ce problème de soustraction en un problème d'addition à partir des solutions proposées. Par contre, ils peuvent, une fois qu'ils ont trouvé un résultat à cette soustraction, le vérifier à l'aide d'une addition. Dans ce cas, ils ont utilisé un outil d'expert qui leur permet de choisir un degré de certitude plus élevé que s'ils avaient uniquement effectué la soustraction, sans possibilité de la vérifier.

Il se trouve que 89% des étudiants qui ont répondu à cette question y ont répondu correctement. Un certain nombre d'étudiants n'ont pas eu le temps d'y répondre. Les degrés de certitude utilisés par les étudiants sont mentionnés dans le tableau ci-dessous:

0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
3%	3%	7%	13%	16%	58%	86,7%

Tableau 7 *– Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

Nous constatons donc que si nous proposons aux étudiants une tâche simple et isolée pour laquelle un certain nombre d'entre eux a la possibilité de vérifier son résultat, ils choisissent des degrés de certitudes plus élevés, même si la question n'a pas été travaillée pendant le cours. Nous avons ensuite commenté ces résultats auprès des étudiants et mis en évidence la possibilité de vérification offerte par cette question.

Nous avons alors travaillé sur le complémentaire d'un sous-ensemble et mis en évidence les lois de De Moivre $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}$ et $\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}$ sans faire le lien avec les négations d'une conjonction ou d'une disjonction.

Puis nous avons reproposé le premier sondage aux étudiants:

La négation de l'affirmation

Alice est drôle et Bill le lézard n'est pas lourd

est la proposition

1. Alice est drôle et Bill le lézard est lourd
2. Alice n'est pas drôle et Bill le lézard est lourd
3. Alice n'est pas drôle ou Bill le lézard n'est pas lourd
4. Bill le lézard est lourd ou Alice n'est pas drôle
5. Bill le lézard n'est pas lourd et Alice est drôle
6. Aucune de ces propositions.

Nous avons alors obtenu les résultats ci-dessous:

	1	2	3	4	5	6
Sondage 1	2%	57%	7%	19%	8%	7%
Sondage 3	1%	20%	13%	61%	4%	1%

Tableau 8 *– Réponses choisies par les étudiants*

Nous pouvons constater qu'une partie importante des étudiants ont su interpréter les résultats ensemblistes mis en évidence pendant le cours dans le contexte équivalent, mais différent de la logique. Au niveau des degrés de certitude, nous obtenons les résultats ci-dessous:

	0%-25%	25%-50%	50%-70%	70%-85%	85%-95%	95%-100%	Certitude moyenne
1	7%	13%	24%	26%	17%	13%	68,1%
3	5%	6%	19%	21%	23%	27%	76,7%

Tableau 9 *– Degrés de certitude utilisé par les étudiants*

On constate qu'un certain nombre d'étudiants a choisi des degrés de certitude plus élevés après avoir suivi le cours qu'avant, ce qui laisse penser qu'ils sont plus sûrs de leur réponse. Malheureusement, les outils que nous avons à disposition pour effectuer nos sondages ne nous permettent pas de relier le degré de certitude utilisé par un étudiant avec la réponse qu'il a choisie. Nous ne pouvons donc pas savoir si, individuellement, les étudiants utilisent les degrés de certitude de manière performante, ce que nous pouvons par contre faire lors de l'examen. (Deruaz à paraître)

Si nous reprenons le contenu de cette seconde séance de cours, nous pouvons constater que, dans un premier temps la plupart des étudiants ne savent pas retrouver la négation d'une conjonction et que même s'ils utilisent les degrés de certitude de manière plus prudente que lors du cours précédent, cette utilisation n'est pas encore optimale. Pendant le cours, mettons en évidence que dans certains cas, il y a des possibilités de vérifier son résultat et d'ainsi pouvoir choisir des degrés de certitudes plus élevés. Nous montrons ensuite que dans le cas de la négation d'une conjonction, on peut se référer à un résultat général (formule de De Moivre) qui peut s'énoncer dans le cadre de la logique ou dans celui de la théorie des ensembles. Nous montrons aussi que si l'on passe dans le cadre de la théorie des ensembles, il y a une possibilité relativement simple de retrouver cette formule en hachurant des diagrammes de Vienne. En procédant ainsi, nous mettons en évidence des liens entre différentes connaissances provenant de cadres différents, mais voisins. Ce passage entre le cadre de la logique et celui de la théorie des ensembles est un outil souvent utilisé par le mathématicien expert pour répondre rapidement à une question ou pour valider sa première réponse en utilisant les outils d'un autre cadre. Nous faisons l'hypothèse que la mise à disposition d'un résultat décontextualisé (formule de De Moivre), mais aussi la mise en évidence de l'opportunité du changement de cadre et ainsi la possibilité de répondre à une même question avec plusieurs outils différents devraient petit à petit permettre aux étudiants de changer de posture face aux mathématiques et de prendre le risque de se positionner en expert et de ne plus systématiquement aller chercher un résultat dans sa mémoire.

D'autres analyses des résultats des examens (Deruaz à paraître) mettent en évidence le fait que les étudiants choisissent des DC plus élevés lorsque les tâches sont simples et isolées (Robert 2008, p. 49) ou lorsque des outils de vérification sont à disposition que pour les autres questions.

IV. CONCLUSION

Dans une étude qui questionne les effets des modalités d'évaluation sur le rapport au savoir et à la formation de futurs enseignants du premier degré, Breithaupt et Clerc-Georgy interrogent des étudiants sur leur perception de deux examens, dont celui du module décrit dans cette contribution.

> Céline aime beaucoup les maths. Elle est *plus mathématique que langues*. Elle se souvient avoir *fait beaucoup de méthodes pour trouver la réponse*, au moins deux ou trois méthodes (…). Pour l'examen de maths le procédé [utilisation des DC] lui semble logique, car les mathématiques sont vérifiables. (Breithaupt & Clerc-Georgy, à paraître)

Céline indique spontanément le lien entre une utilisation, pertinente de son point de vue, des degrés de certitude et des possibilités de vérification qu'offrent les mathématiques de vérifier ces résultats en utilisant des méthodes différentes pour les obtenir.

Dans son entretien, une autre étudiante, Marie, insiste sur le fait qu'elle a eu une histoire particulière avec les mathématiques. «Elle a *toujours fait partie des nuls en maths, des filles qui avaient peur des maths, qui n'étaient pas bonnes*. Elle a entendu *des milliers de profs* lui dire "*Mais enfin, fais un effort, c'est logique*".» (Op. cité). Elle met toutefois aussi en évidence le lien entre outils de vérification et choix du degré de certitude.

> Le fait d'être capable de vérifier plusieurs fois ses réponses permet à Marie d'indiquer de hauts degrés de certitude, exception faite des questions de contenus didactiques. (…). *Pour les maths c'est plus logique, ça reste du calcul, c'est juste c'est faux, il n'y a pas d'entre-deux.* (…) Indiquer un haut degré de certitude signifie être *convaincue*, ce qui ne peut se faire sur des questions didactiques où il faudrait *suivre la première intuition, c'est souvent la bonne.* Le fait de ne pas pouvoir vérifier, le fait de ne pouvoir être sûre malgré les relectures engendrent de l'incertitude. (Breithaupt & Clerc-Georgy, à paraître)

Ce témoignage montre que Marie a changé de posture face aux mathématiques entre le début et la fin du module. Elle a acquis des outils d'expert, puisqu'elle cherche à vérifier ses résultats lorsque c'est possible. Peut-être que l'utilisation des degrés de certitude pendant le cours a contribué à cette évolution, non seulement chez Marie, mais chez une partie des étudiants qui ont suivi ce module et donc que nous avons au moins partiellement atteint cet objectif. Nous avons pu mettre ne évidence dans un autre article (Deruaz à paraître), une utilisation plus pertinente des degrés de certitude lors de l'examen qui a suivi le cours de 2014 (celui dont nous traitons dans cette contribution) que dans le cours de 2013 lors duquel nous avions beaucoup moins utilisé des sondages avec degrés de certitude pendant le cours, mais nous n'avons pas d'outils qui nous permettent d'affirmer que l'un est une conséquence directe de l'autre mêm si c'est le seul changement significatif qu'il y a eu entre les deux occurrences du cours. Par ailleurs, les résultats de 2014 ont été confirmés en 2015 avec une organisation similaire du cours. Pour étayer notre propos, nous pouvons aussi signaler que dans le cadre de la HEP VD, un autre examen utilise les degrés de certitude. Il s'agit un examen mis en place pour tester les compétences des étudiants en français comme langue de communication qui doit être réussi par tous les étudiants de l'école pendant leurs études. Lors de leurs études, alors qu'aucune question ne portait sur cet examen, Breipthaupt et Clerc Georgy (Breithaupt & Clerc-Georgy, à paraître) ont relevé que tous les étudiants interrogés ont mentionné la différence qu'il y avait dans l'utilisation des degrés de certitude en mathématiques et en français et à quel point il la trouvait peut justifiable dans le cas de l'examen de français lors duquel ils n'ont pas d'outils de vérification à disposition.

REFERENCES

Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Breithaupt S., Clerc-Georgy A. (à paraître) Effets des modalités d'évaluation sur le rapport au savoir des étudiants en formation à l'enseignement. *Mesure et Evaluation en Education.*

CIIP (2010) *Plan d'études romand.* CIIP: Neuchâtel. Retrieved from https://www.plandetudes.ch

Clivaz S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* (Thèse de doctorat), Université de Genève, Genève. Retrieved from http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047

Clivaz S., Deruaz M. (2013) Des mathématiques à leur enseignement, l'algorithme de la multiplication. *Grand N* 91, 15-33.

Clivaz S., Proulx J., Sangaré M. S., Kuzniak, A. (2012) *Articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement. Pratiques et formation.* Paper presented at the Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012, Geneva.

Deruaz M. (2015) Un dispositif pour évaluer des savoirs mathématiques au début, pendant et à la fin d'un module de formation. In Blais J-G., Gilles J.-L., Tristan-Lopez A. (Eds.), *Évaluation des apprentissages et technologies de l'information et de la communication: Bienvenue au 21e siècle* (Vol. 3, pp. 77-111). Berne: Peter Lang.

Deruaz M. (à paraître). Une utilisation des degrés de certitude en formation des maîtres du premier degré. *Mesure et Evaluation en Education.*

Deruaz M., Clivaz S. (2012) *Un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques en formation des maîtres primaires.* Paper presented at the Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012, Geneva.

Dias T., Deruaz M. (2012) Dyscalculie: et si les enseignants reprenaient la main? *A.N.A.E. approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant,* 120-121.

Gilles J.-L. (2010) *Qualite Spectrale Des Tests Standardisés Universitaires*. Saarbrücken: Editions Universitaires Européennes.

Mesnil Z. (2014) *La logique: d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement.* Université Paris Diderot: Paris. Retrieved from https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01114281v3

Robert A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouck F. (Ed.), *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45-57). Toulouse: Octarès.

Robert A., Lattuati M., Penninckx, J. (1999) *L'enseignement des mathématiques au lycée: un point de vue didactique*. Paris: Ellipses.

Vandebrouck F. (Ed.). (2008) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse: Octarès.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DIMENSION EPISTÉMOLOGIQUE DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES[1]

Jean-Luc DORIER[*]

Résumé – Epistémologie expérimentale c'est le nom qu'a failli recevoir ce champ de recherche naissant à la fin des années 70, qui deviendra la didactique des mathématiques. Une référence tout autant à l'épistémologie historique des mathématiques qu'à l'épistémologie génétique de Piaget. Dans ce texte, nous nous proposons de caractériser la dimension épistémologique des trois grandes théories de didactique des mathématiques française : la théorie des situations de Brousseau, la théorie des champs conceptuels de Vergnaud et la théorie anthropologique du didactique de Chevallard.

Mots-clefs : épistémologie, genèse, transposition didactique, situation fondamentale, champs conceptuels.

Abstract – Experimental epistemology is the name that was nearly given, at the end of the 70s, to this emerging field, which will finally be called "didactique des mathématiques". This was as much a reference to the historical epistemology of mathematics than to Piaget's genetic epistemology. In this text we explore this epistemological dimension of the three main theories of French didactics of mathematics: Brousseau's theory of didactical situations, Vergnaud theory of conceptual fields and Chevallard anthropological theory of didactics.

Keywords: epistemology, genesis, didactical transposition, fundamental situation, conceptual fields.

I. INTRODUCTION

La didactique des mathématiques se définit comme l'étude des processus de transmission des connaissances mathématiques. Dans le paradigme de la théorie des situations de Brousseau, un concept centrale st celui de situation fondamentale :

> Il s'agit alors de déterminer l'ensemble des situations qui sont susceptibles de faire fonctionner une notion, en lui conférant les différents sens qui déterminent le concept correspondant. (Brousseau 1981, p.109).

Par l'objet même de son étude, la recherche en didactique des mathématiques présente un caractère expérimental, cependant le travail « de terrain » (observations, expérimentations, analyses de productions d'élèves, etc.) est sous-tendu par un travail préalable important ayant trait à « l'étude du savoir mathématique ». Cette étude est une phase fondamentale pour que le chercheur puisse prendre ses distances par rapport aux enjeux didactiques. Le sens des concepts, les problèmes qui s'y rattachent, la position relative d'un élément de savoir dans un

[1] Ce texte s'appuie sur une partie de ma note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches (Dorier 1997b).

[*] Université de Genève – Suisse- Jean-Luc.Dorier@unige.ch

Dorier, J.-L. (2015) La didactique des mathématiques : une épistémologie expérimentale. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 108-118.

savoir plus large qui l'englobe, mais aussi la variabilité de ces données en fonction des périodes et des institutions, etc. sont autant de questions qui aident à mieux comprendre le fonctionnement d'un système didactique. C'est dans ce sens qu'à leur début Brousseau et Vergnaud ont hésité à nommer ce champ de recherche naissance « épistémologie expérimentale ».

Or, comme le souligne Legrand (1993) :

> Chercher une situation fondamentale, c'est alors se rebeller contre la logique implacable de la présentation scientifique, logique de présentation très linéaire où la clarté et la rigueur du discours, la trivialité des assertions intermédiaires se paie le plus souvent par un émiettement et un laminage de significations principales, par une perte de contrôle de l'élève sur la validité et la pertinence de ce qu'on lui enseigne. (Op. cité, p. 126).

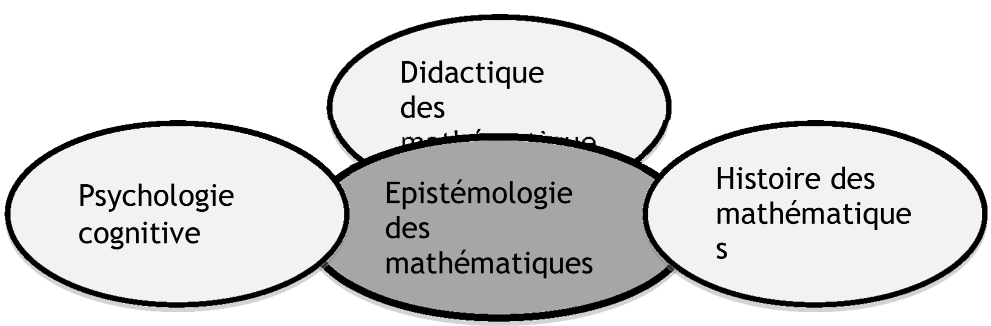
On voit donc que l'épistémologie à l'œuvre dans le travail didactique doit inventer de nouveaux outils, se défier du seul fonctionnement des mathématiques savantes et investiguer de nouveaux territoires. De plus, le chercheur en didactique ne peut se contenter d'un point de vue interne au système d'enseignement, il analyse le processus complexe qui conduit de la production du savoir dans la communauté mathématique jusqu'à son enseignement, en replaçant l'enjeu de connaissance dans le contexte plus vaste de la constitution des savoirs. C'est en particulier ce qu'exprime Chevallard (1991) quand il nous dit que :

> […] le concept de transposition didactique, par cela seulement qu'il renvoie au passage du savoir savant au savoir enseigné, donc à l'éventuelle, à l'obligatoire, distance qui les sépare, témoigne de ce questionnement nécessaire […] C'est l'un des instruments de la rupture que la didactique doit opérer pour se constituer en son domaine propre ; il est ce par quoi l'entrée du savoir dans la problématique de la didactique passe de la puissance à l'acte. (Op. cité, p.15)

Ainsi une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné. En outre, le processus de transposition didactique est complexe, il ne commence pas au moment où l'enseignant prépare son cours, il est au contraire à ce moment-là dans sa phase finale, l'enseignant n'ayant plus que le contrôle de variables locales dans la présentation du texte du savoir. Le chercheur en didactique est donc tenu de remonter aux sources de ce processus, jusqu'à la production du savoir savant, pour « se déprendre de la familiarité de son objet d'étude, et exercer sa vigilance épistémologique » (ibid., p.15).

D'ailleurs, la pertinence de la référence à l'histoire du savoir depuis ses origines dans la sphère savante ne se limite pas au travail spécifique d'analyse de la transposition didactique mais touche à la plupart des aspects de la recherche en didactique des mathématiques française.

Notre étude repose sur les quatre pôles : épistémologie, didactique et histoire des mathématiques et psychologie cognitive. L'épistémologie apparaît comme le terme médiateur qui fait le lien entre le travail historique, le travail de psychologie cognitive et le travail didactique :



Autrement dit, l'épistémologie joue un rôle transversal car elle interagit à la fois avec la didactique et l'histoire des mathématiques mais aussi la psychologie. L'*épistémologie* au sens strict peut apparaître soit comme le nom savant de la philosophie des sciences soit comme l'étude des conditions de production des connaissances scientifiques.

Bachelard distingue l'histoire et l'épistémologie d'une science :

> C'est […] l'effort de rationalité et de construction qui doit retenir l'attention de l'épistémologue. On peut voir ici ce qui distingue le métier d'épistémologue de celui d'historien des sciences. L'historien des sciences doit prendre les idées comme des faits. L'épistémologue doit prendre les faits comme des idées, en les insérant dans un système de pensées. Un fait mal interprété par une époque reste un fait pour l'historien. C'est au gré de l'épistémologue, un obstacle ou une contre-pensée.
> […] L'épistémologue doit donc s'efforcer de saisir les concepts scientifiques dans des synthèses psychologiques effectives, c'est-à-dire dans des synthèses psychologiques progressives, en établissant, à propos de chaque notion, une échelle de concepts, en montrant comment un concept en a produit un autre, s'est lié avec un autre. Alors il aura quelque chance de mesurer une efficacité épistémologique. Aussitôt la pensée scientifique apparaîtra comme une difficulté vaincue, comme un obstacle surmonté. (Bachelard 1938, pp.17-18).

Il ne faudrait pas voir dans le travail de Bachelard une péjoration du travail historique. La distinction qu'il soulève montre au contraire la complémentarité des deux approches et revendique l'importance de la réflexion épistémologique dans le travail historique sans dénigrer l'importance de ce dernier.

Le sens du terme *épistémologie* s'est largement étendu depuis plusieurs années. Cette évolution doit beaucoup au développement de domaines tels que l'histoire des sciences ou les sciences cognitives qui entretiennent avec l'épistémologie des rapports étroits. Ainsi le terme d'épistémologie s'est-il appliqué à de nouvelles problématiques, son sens s'est alors élargi. En particulier, il n'est pas rare aujourd'hui qu'épistémologie désigne la théorie des méthodes ou des fondements de la connaissance, ce qui est le sens du terme *epistemology* en anglais, le terme français de *gnoséologie* n'étant plus guère usité. L'usage introduit par Piaget dans l'expression *épistémologie génétique* témoigne aussi de cet élargissement d'emploi :

> La méthode génétique revient à étudier les connaissances en fonction de leur construction réelle ou psychologique, et à considérer toute connaissance comme relative à un certain niveau du mécanisme de cette construction. (Beth et al. 1957, p.19).

Du coup, cette épistémologie quitte l'attachement à la philosophie pour se constituer en science humaine et expérimentale. D'avoir donné à l'épistémologie un aspect expérimental n'est pas le moindre mérite de Piaget, et certainement une condition nécessaire à l'existence de la didactique des mathématiques.

Piaget (1967, pp. 6-7) donne deux approximations pour définir l'épistémologie :

i) Etude de la constitution des connaissances valables.

Le terme « constitution » montre l'idée d'un processus, alors que l'usage du pluriel insiste sur la différenciation disciplinaire et que le terme « valables » révèle une conception normative du savoir.

ii) Etude du passage des états de moindre connaissance aux états de connaissance plus poussée.

Cette position induit la dimension de genèse d'une connaissance, et en détermine la nature.
Ces deux points de vue coïncident si l'on considère que la constitution des connaissances n'est jamais achevée. Or c'est ce qu'expriment Beth et al. (1957) :

> Déterminer comment s'accroissent les connaissances implique que l'on considère, par méthode, toute connaissance sous l'angle de son développement dans le temps, c'est-à-dire comme un processus continu dont on ne saurait jamais atteindre ni le commencement premier ni la fin. Toute connaissance, autrement

> dit, est à envisager comme relative à un certain état antérieur de moindre connaissance, et comme susceptible de continuer elle-même un tel état antérieur par rapport à une connaissance plus poussée. (Op. cité, p.18)

On retrouve l'idée de genèse d'une connaissance qui est très importante dans l'œuvre de Piaget. C'est aussi un point de convergence avec la perspective de Bachelard. Il ne faudrait cependant pas croire que ces deux auteurs ont une perception uniforme et linéaire de la genèse de la connaissance. Au contraire, dans des domaines assez différents, ces deux types de travaux ont permis de dégager des notions liées à l'idée de rupture et d'obstacle , qui mettent en évidence justement le caractère non uniforme et non linéaire de la progression de la connaissance.

Piaget relie par ailleurs son approche à ce qu'il appelle la méthode historico-critique, proche de l'épistémologie historique de Bachelard. Pour lui :

> […] la méthode complète de l'épistémologie génétique est constituée par une collaboration intime des méthodes historico-critique et psychogénétique, et cela en vertu du principe suivant […] : que la nature d'une réalité vivante n'est révélée ni par ses seuls stades initiaux, ni par ses stades terminaux, mais par le processus même de ses transformations. […] Or, de cette constitution progressive, la méthode psychogénétique fournit seule la connaissance des paliers élémentaires, même si elle n'atteint jamais le premier, tandis que la méthode historico-critique fournit seule la connaissance des paliers, parfois intermédiaires mais en tous cas supérieurs, même si elle n'est jamais en possession du dernier […] (Ibid., p.23).

Ainsi Piaget établit-il un lien entre phylogenèse et ontogenèse. Il se garde toutefois de dire que la deuxième serait une réplique de la première à petite échelle, mais il établit plutôt un lien de filiation, comme si l'évolution d'une connaissance chez un individu était constitutive de la genèse globale de cette connaissance. La didactique des mathématiques a repris et dépassé cette idée en combinaison avec d'autres, essentiellement issues de Bachelard. On pourra à ce sujet consulter les textes fondateurs de Artigue (1991) et Radford (1997).

Soulignons également que l’histoire des mathématiques, depuis plusieurs années prend beaucoup plus en compte les dimensions sociales et culturelles et que le champ de l’éthno-mathématique a aussi ouvert de nouvelles approches qui ont permis d’enrichir les approches épistémologiques.

Nous allons maintenant brièvement montrer comment la dimension épistémologique est prise en compte dans les trois grandes théories de didactique des mathématiques française. Faute de place nous ne développerons pas d’exemples détaillés, ce que nous pourrons faire lors de la présentation orale.

II. EPISTEMOLOGIE ET THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES (TSD)

L'enseignement vise à recréer dans la classe une genèse des concepts mathématiques que l'élève doit s'approprier. On peut dire que cette genèse est artificielle, dans la mesure où ce n'est pas la genèse historique, elle est aussi expérimentale, parce qu'elle est liée à l'expérience de la classe et de chaque élève.

> Certes les contraintes qui gouvernent ces genèses (artificielles) ne sont pas identiques à celles qui ont gouverné la genèse historique, mais cette dernière reste néanmoins, pour le didacticien, un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné ou une base de travail, s'il s'agit d'élaborer une telle genèse (Artigue 1991, p. 244).

On peut dès lors bien sûr envisager de réorganiser les évènements de façon à ne choisir que les étapes essentielles, en raccourcir certaines, en regrouper d'autres, etc. Mais un tel travail comporte aussi le danger d'être exposé à l'arbitraire et au subjectif. Il doit s'intégrer dans une problématique bien définie et s'appuyer sur un cadre d'analyse théorique qui devra englober des outils didactiques.

> Pour organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de décimal, il faut faire une étude épistémologique afin de mettre en évidence les formes sous lesquelles le décimal s'est manifesté et leur statut cognitif. […] Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement « historique » qui restaurerait une forêt de distinctions et de points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique. (Brousseau 1981, p. 48).

De plus, le contexte de l'enseignement reste une contrainte incontournable qui soulève beaucoup de problèmes d'adaptation. Le problème du temps tout d'abord : comment en effet recréer une genèse de plusieurs décennies (voire siècles) en quelques heures (même sur plusieurs années) ? Le problème des contraintes cognitives ensuite : l'organisation du savoir enseigné ne suit pas dans son ensemble la progression historique du savoir savant, comment alors intégrer le passé mathématique de l'élève au modèle du processus historique ? Plus généralement, les différences en termes sociaux, psychologiques ou institutionnels sont telles que la genèse artificielle à l'œuvre dans la classe ne peut suivre que de très loin la genèse historique. Dans l'analyse de la genèse historique, plus que l'énumération et la fonction de différentes étapes de l'évolution, il importe de pouvoir déterminer les conditions qui ont permis de passer d'une étape à une autre ou au contraire ce qui a pu faire obstacle. La question centrale est : comment s'assurer que le problème posé est bien pertinent par rapport au savoir ? Quelles relations a le problème posé avec la raison d'être de l'objet de savoir, enjeu de l'enseignement ? Quel sens donne t-il au savoir ?

C'est un problème épistémologique pour lequel Brousseau (1986) affirme qu'« il existe pour tout savoir une famille de situations susceptibles de lui donner un sens correct (par rapport à l'histoire de ce concept, par rapport au contexte social, par rapport à la communauté scientifique). […] Pour toute connaissance, il est possible de construire un jeu formel, communicable sans utiliser cette connaissance, et dont elle détermine pourtant la stratégie optimale. »

Dans la TSD une situation fondamentale d'une connaissance est une modélisation de cette famille de situations mathématiques à potentiel didactique spécifiques du savoir visé. Un problème particulier peut donc être envisagé comme découlant d'une situation « fondamentale » : cette situation « fondamentale » est représentée par un ensemble fini de variables didactiques, pertinentes par rapport à la signification du savoir, enjeu d'enseignement. Inversement, en donnant des valeurs à ces variables, on génère des situations particulières donnant au savoir une signification particulière. De fait, la construction des significations des concepts par les élèves se pose en terme d'usages dans des situations. C'est un des points clefs, qui donne tout son sens au terme de situation dans la TSD. Pour plus de détail on pourra voir à ce propos le cours de Bessot (2011) à l'école d'été sur les ingénieries didactiques.

Par exemple dans le cas de l'apprentissage du nombre, un des points essentiels des premiers apprentissages est que les élèves prennent conscience de l'importance de la notion de quantité d'une collection. Les travaux de Brousseau (voir Margolinas & Wozniak 2013) ont ainsi permis de dégager une première situation fondamentale consistant à créer des collections équipotentes (mettre exactement autant, pas plus, pas moins d'œufs dans une collection de coquetiers). A travers un jeu sur les variables didactiques (proximité ou éloignement du stock d'œufs, nécessité de tout amener en une fois dans un panier, demande différée dans le temps, commande à autrui, possibilité d'avoir des jetons, un crayon et du papier…) on peut ainsi imaginer une progression commençant par une situation d'action, puis des situations de formulation de plus en plus complexes, permettant aux élèves de construire le sens de l'équipotence à travers la construction de collections intermédiaires. Ce travail s'inspire de pratiques avérées dans l'histoire de l'humanité comme celle du berger qui met un caillou sur un tas chaque fois qu'un mouton sort de l'enclos, et qui en enlèvera un à chaque mouton qui rentre le soir. Ou encore les coches sur des bouts de bois ou d'os datant du paléolithique, qui servaient à garder la mémoire d'une quantité.

Le type de démarche évoqué ci-dessus montre un rôle que peut jouer l'analyse historique dans la construction d'ingénieries didactiques et dans les choix globaux déterminant les grandes lignes de la genèse expérimentale que l'enseignement vise à produire. A un niveau plus local, l'analyse historique joue également un rôle pertinent dans les diagnostics d'erreurs. En effet, l'histoire fournit des exemples de processus d'évolution des connaissances, dont une analyse épistémologique permet de mettre en évidence, les ressorts, les sauts conceptuels, la fonctionnalité, etc. Une confrontation des erreurs des élèves à ces exemples peut permettre d'interpréter ces erreurs de façon plus satisfaisante. En particulier, l'analyse historique peut permettre de distinguer les erreurs de nature épistémologique, des erreurs plus contingentes qui peuvent être de nature cognitive ou didactique.

> L'erreur et l'échec n'ont pas le rôle simplifié que l'on veut parfois leur faire jouer. L'erreur n'est pas seulement l'effet de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard que l'on croit dans les théories empiriques et behavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure, qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant se révèle fausse, ou simplement inadaptée. Les erreurs de ce type ne sont pas erratiques et imprévisibles, elles sont constituées en obstacles. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que dans celui de l'élève, l'erreur est constitutive du sens de la connaissance acquise. (Brousseau 1983, p. 171).

En s'inspirant de Bachelard, les chercheurs en didactique des mathématiques vont importer dans leur domaine la notion d'obstacle épistémologique. Bachelard introduit ainsi cette notion :

> Quand on cherche les conditions psychologiques des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens de l'esprit humain : c'est dans l'acte de connaître, intimement, qu'apparaissent par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques. […] En revenant sur un passé d'erreurs, on trouve la vérité en un véritable repentir intellectuel. En fait, on connaît contre une connaissance antérieure en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation. (Bachelard 1938, p. 13).

Bachelard avait a priori écarté les mathématiques de son propos, pour lui « en fait, l'histoire des mathématiques est une merveille de régularité. Elle connaît des périodes d'arrêt. Elle ne connaît pas des périodes d'erreurs. » (Ibid., p.22). Néanmoins la notion d'obstacle a été beaucoup étudiée en didactique des mathématiques (voir entre autres, (CIRADE 1989) et (Perrin-Glorian 1993)). Il nous semble cependant qu'il y a un danger à la trop banaliser. En effet, dans une polémique qui l'a opposé à Glaeser (1981) à propos de l'enseignement des nombres relatifs, Brousseau avait exprimé des exigences très fortes quant à la consistance de l'analyse historique pour qu'elle puisse aider de façon pertinente à la mise en place d'un dispositif didactique en termes d'obstacles épistémologiques :

> Se posait-on ces problèmes ? Comment les résolvait-on ? Ou croyait-on pouvoir les résoudre ? Est-ce que ce qui nous apparaît aujourd'hui comme une difficulté était perçu de la même façon à l'époque ? Pourquoi cet « état de connaissances » paraissait-il suffisant, sur quel ensemble de questions était-il stable ? Pourquoi les tentatives de le modifier ou plutôt de le renouveler étaient-elles vouées à l'échec à ce moment-là ? Peut-être jusqu'à ce que de nouvelles conditions apparaissent et qu'un travail "latéral" soit

> accompli, mais lequel ? Ces questions sont nécessaires pour entrer dans l'intimité de la construction des connaissances […] (Brousseau 1983, pp. 190-191)

Ces exigences montrent la difficulté d'analyse liée à la détermination d'un obstacle épistémologique. Du point de vue de l'histoire, la notion d'erreur ou seulement de difficulté est très problématique, les questions précédentes nous y renvoient. Dans ce contexte, le parallèle avec la situation d'enseignement doit être suffisamment contrôlé. De plus, il nous semble difficile (voire dangereux) de faire jouer à l'exemple de la genèse historique un caractère trop prédictif. Cela suppose au moins une analyse comparée très minutieuse des conditions et des contraintes du contexte historique et du contexte didactique visé. Une analyse didactique qui se donnerait la recherche d'obstacles épistémologiques comme but essentiel doit prendre en compte au moins l'ensemble des questions énoncées par Brousseau, pour ne pas risquer d'introduire un biais dans l'analyse historique. Autrement dit, la notion d'obstacle épistémologique présuppose une réflexion épistémologique fine qui repose sur une analyse historique particulièrement dense.

III. EPISTEMOLOGIE ET THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS

Il est moins courant de penser au travail de Vergnaud (1990) quand on parle d'épistémologie en didactique des mathématiques. Pourtant cette approche vient directement de l'épistémologie génétique et elle comprend de fait une dimension épistémologique[2] forte que je voudrais illustrer ici de façon succincte à l'aide d'un exemple tiré de la classification des problèmes additifs, que Verganud a réalisée dans les années 80. Je m'appuierai ici sur un texte récent qui reprend ce travail (Vergnaud 2009).

Dans son approche, Vergnaud met en évidence l'importance pour la signification d'un concept mathématique de la classe des problèmes dans lesquels il prend ses différents sens. C'est sur cette base que pour le champ conceptuel de l'addition, il a réalisé une classification des problèmes additifs, c'est-à-dire des problèmes qui nécessitent pour être résolus d'utiliser une addition ou une soustraction. Alors que du point de vue mathématique un problème additif revient toujours soit à un calcul direct $a + b$ ou $a – b$ soit à résoudre une équation du type $a + x = b$, Vergnaud montre que du point de vue des représentations et des schèmes d'action c'est plus complexe. Il met ainsi en évidence une classification des problèmes additifs qui repose sur une analyse épistémologique de la nature du problème plus fine que ce que les outils classiques de mathématiques peuvent offrir, mais qui montre bien la nature mathématique profonde des problèmes. Ce travail a été d'une grande importance pour apporter des explications alternatives de celles des psychologues ou des linguistes aux difficultés des élèves. Sans rentrer dans les détails, je voudrais illustrer cette idée en comparant les trois problèmes suivants :

1. Pierre avait 7 billes. Il en gagne 5. Combien en a-t-il maintenant ?

2. Robert vient de perdre 5 billes ; il en a maintenant 7. Combien en avait-il avant de jouer ?

3. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a perdu 7 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a gagné 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

Dans la résolution de ces trois problèmes, la réponse s'obtient *in fine* par l'addition $7 + 5 = 12$. Pourtant il est facile de voir, ce qui est confirmé par les expérimentation que :

[2] Certes la dimension historique est peu présente ici, mais il s'agit bien d'une réflexion de nature épistémologique, qui se base sur des observations cliniques, mais aussi sur une réflexion interne aux objets mathématiques en jeu. En ce sens, ce travail est loin d'une démarche purement psychologique.

- le premier est très simple (réussi par la quasi totalité des élèves de fin de première année primaire), il s'agit d'un modèle *état – transformation – état*, et comme la transformation est positive c'est presque aussi simple que le cas le plus élémentaire *partie – partie – tout.*

- le deuxième est un peu plus complexe et n'est généralement réussi qu'en fin de deuxième ou troisième année primaire. La recherche de l'état initial (connaissant la transformation et l'état final) nécessite la construction d'un théorème-en-acte pour inverser la transformation.

- le troisième est beaucoup plus complexe et souvent n'est pas réussi par des élèves en fin de primaire. On pourrait croire que la difficulté principale vient de la complexité de l'énoncé et donc soit avant tout de nature linguistique.

Pourtant si l'on considère le problème suivant :

3b. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a gagné 5 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a gagné 7 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

Il présente exactement les mêmes caractéristiques langagières, mais sera beaucoup plus facilement réussi. En effet le fait qu'on l'on mette en rapport un gain partiel moindre qu'un gain total, permet de se ramener à un problème de *partie – partie – tout* ou l'on cherche une des parties.

De même avec le problème :

3c. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a perdu 5 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a perdu 7 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?
Où il suffit de raisonner sur des pertes au lieu des gains.

Le problème 3d est un peu plus complexe que les deux précédents sans atteindre le niveau de difficulté du 3.

3d. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a gagné 7 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a gagné 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

On peut en effet le ramener à la recherche d'une transformation quand on passe de l'état 7 billes à l'état 5 billes.

Par contre le problème 3e. est aussi complexe que le 3.

3e. Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde, il a gagné 7 billes, il fait ses comptes et s'aperçoit qu'en tout il a perdu 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

Ici on ne peut pas se ramener à un des deux cas précédents, car on a mis en rapport une perte et un gain. Il est nécessaire de penser en termes de composition de transformations. Ce problème est de fait un bon problème d'entrée dans la compréhension des opérations avec les nombres négatifs.

Ainsi on voit bien que la classification des problèmes additifs par Vergnaud repose sur une analyse épistémologique où la signification mathématique que le sujet peut donner au problème détermine le niveau de difficulté. La dimension cognitive est bien ici spécifique des mathématiques en jeu et pas seulement de marqueurs linguistiques ou culturels.

IV. EPISTEMOLOGIE ET THEORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE (TAD)

Dans l'introduction nous avons clairement montré la dimension épistémologique de la transposition didactique, qui est à l'origine de la TAD. En fait, dès la deuxième édition de la *Transposition Didactique*, Chevallard (1991) positionne très clairement son programme de recherche par rapport à l'épistémologie. C'est ce que nous allons rappeler brièvement ici sans analyser les développements les plus récents de la TAD (faute de place).

Dans la postface à la deuxième édition de la *Transposition Didactique*, il s'interroge sur la place de la didactique, et propose de la situer dans le champ de l'anthropologie (*l'étude de l'Homme*). Très schématiquement, son point de vue est le suivant. Il distingue savoir et connaissance :

> Une certaine connaissance, c'est-à-dire une certaine qualité du rapport à un objet, se donne à voir. Au lieu qu'un savoir est toujours supposé. Il se présente à nous par ses emblèmes (sa dénomination, etc.), et nous le rencontrons comme présent *in absentia*, comme une potentialité - ou un manque, quand nous voulons « l'apprendre ». (Op. cité, p. 209).

Il parle alors de la didactique de la connaissance, ou didactique cognitive. Or celle-ci ne saurait être incluse dans la seule anthropologie cognitive, il y manque encore la composante relative à l'intention didactique, c'est pourquoi l'auteur introduit le terme d'anthropologie didactique de la connaissance. Par ailleurs, comme il a associé l'adjectif cognitif au terme de connaissance, il associe l'adjectif épistémologique au terme de savoir[3], il identifie ainsi l'anthropologie des savoirs à l'anthropologie épistémologique et finalement à l'épistémologie. Ce jeu sur les mots est pour lui le moyen de montrer non seulement les liens entre la didactique et l'épistémologie, mais aussi l'apport de l'approche de la didactique, dans sa dimension anthropologique, pour l'épistémologie :

> Il est assez clair maintenant que l'épistémologie telle qu'elle existe s'est donnée jusqu'ici avec passion à l'étude quasi exclusive de la production des savoirs et à l'étude de leurs producteurs ; et qu'elle a négligé et leur utilisation, et leur enseignement. Or ceux-ci ne peuvent être écartés d'une étude anthropologique des savoirs. (Ibid., p. 211).

Ce vocabulaire étant mis en place, l'auteur est prêt à nous fournir la clé de sa définition de la didactique, définition qui la situe dans le champ de l'anthropologie :

> Au croisement de l'anthropologie des savoirs et de l'anthropologie didactique de la connaissance, il y a l'anthropologie didactique des savoirs, dont l'objet est la manipulation des savoirs dans une intention didactique, et en particulier l'enseignement des savoirs. Là aussi, écourtons. De même qu'on a parlé de didactique de la connaissance (ou didactique cognitive), parlons, pour faire bref, de didactique des savoirs. Celle-ci est donc à la fois une division de l'anthropologie des savoirs ou épistémologie (en notre sens) et de la didactique cognitive. C'est exactement elle que je nommerais désormais -nouveau raccourci - didactique, sans plus. (Ibid., p.211).

Cette approche par les définitions et partant du principe que la didactique est une partie de l'anthropologie est complétée par Chevallard, qui précise, plus loin, le rôle primordial que joue la sphère de production dans la légitimité épistémologique des choix d'enseignement :

> Une des plus fortes leçons qu'ait procurée la didactique […] c'est que l'enseignement d'un savoir, plus largement sa manipulation didactique en général, ne peuvent, en bien des aspects, se comprendre si l'on ignore et ses utilisations et sa production […] (Ibid., pp.211-212).
>
> Dans le cas d'un savoir savant, en effet, la sphère de la production en vient à assumer, par le biais notamment de l'Ecole et de la transposition didactique, un rôle bien plus large que celui de production *stricto sensu*.[…] La sphère de la recherche en un savoir savant est un belvédère d'où peuvent s'observer, et où finissent toujours par trouver quelque écho, les mouvements affectant le monde complexe et naturellement opaque des pratiques de ce savoir. Tout tend à monter vers elle, parce que tout tend à rechercher l'investiture épistémologique et culturelle du savoir savant qui y est produit. (Ibid., p.233).

[3] Ce choix résulte en partie d'une différence dans la séparation des termes connaissance et savoir, mais aussi de la volonté de Chevallard de garder un sens plus restreint au mot épistémologie (n'englobant pas, entre autres, le sens d'épistémologie génétique) pour mieux montrer l'apport de la dimension anthropologique (cf. la citation qui suit). On va voir que cette différence dans l'utilisation du terme épistémologique sera quasiment gommée dans la dernière étape de l'élaboration de définitions par Chevallard.

Dans ce sens, les outils qu'offre la TAD peuvent inspirer le travail historique en renforçant d'une part l'importance de l'étude des lieux de transmission et plus globalement, les dimension sociales et culturelles de la production scientifique, dont on a déjà dit plus haut qu'elles étaient de plus en plus présentes dans les recherches actuelles.

Faute de place nous ne pouvons développer ici plus avant les dimensions épistémologiques qui se sont développées dans les apports plus récents de la TAD. Pour plus de détails nous renvoyons les lecteurs à nos propres travaux sur l'algèbre linéaire (résumés dans Dorier 1997a et b) ainsi qu'à une étude mettant en avant l'approche écologique dans Ba et Dorier (2006).

V. CONCLUSION

Ce rapide survol des dimensions épistémologiques dans les trois grandes théories de la didactique des mathématiques francophone est un moyen de montrer le rapport privilégié que la recherche en « éducation mathématique », pour reprendre le terme anglo-saxon, entretient en France avec les mathématiques. De par la spécificité de la Théorie de situations mathématiques à usage didactique et de la Théorie anthropologique du didactique (et son origine dans la transposition didactique) c'est avant tout une référence à l'épistémologie historique (avec Bachelard mais aussi bien d'autres) qui est visible. Néanmoins la dimension expérimentale et la nécessité de prendre en compte le processus cognitif et les interactions renvoie à une dimension plus psychologique avec les travaux de Piaget, mais aussi de Vygotski. Ceux-ci ont inspiré Brousseau mais aussi Vergnaud, dont nous avons montrer que la théorie des champs conceptuels relève elle aussi d'une approche épistémologique, qui si elle ne s'inspire guère de la dimension historique n'en reste pas moins essentielle pour montrer la spécificité des connaissances mathématiques dans les phénomènes d'apprentissage. Bien sûr la didactique des mathématiques s'est étoffée de plusieurs autres approches et cadres théoriques dont la dimension épistémologique est moins marquée, mais la plupart des didacticiens de culture française se revendiquent plus ou moins de ces trois grandes théories dont le fort ancrage épistémologique dessine de façon unique un rapport à la discipline mère des mathématiques. Pour compléter ce bref panorama on pourra se reporter à la conférence d'ouverture de Kilpatrick (2008) à la célébration du 100^{e} anniversaire de la création de la CIEM sur le thème « The development of mathematics education as an academic field » et ma réaction à sa conférence dans le même volume (Dorier 2008) ou un texte sur le même thème en français (Dorier 2012).

REFERENCES

Artigue M. (1991) Epistémologie et Didactique, *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 10(2/3), 241–286.

Ba C., Dorier J-L. (2006) Aperçu historique de l'évolution de l'enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIX^{ème} siècle, *l'Ouvert*, 113. 17-30.

Bachelard G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique,* 13° éd.. Paris : Vrin, 1986.

Bessot A. (2011) L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In Magolinas C. & al. (Eds.) En amont et en aval des ingénieries didactiques – XV^{e} école d'été de didactique des mathématiques Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009 (pp. 29–56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Beth W.E., Mays W., Piaget J. (1957) *Epistémologie génétique et recherche psychologique,* Etude d'épistémologie génétique I. Paris : P.U. F.

Brousseau G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1(1), 37–127.

Brousseau G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(2), 165–198.

Brousseau G. (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse d'état, Université de Bordeaux 1.

Chevallard Y. (1991) *La transposition didactique*, 2ème éd.. Grenoble: La Pensée Sauvage.

CIRADE (1989) *Construction des savoirs - Obstacles et conflits,* Actes du colloque du CIRADE à Montréal. Ottawa : Arc éd.

Dorier J.-L. (2012) La didactique des mathématiques : émergence d'un champ autonome au carrefour des mathématiques, de la psychologie et des sciences de l'éducation. In Elaouf M.-A., Robert A., Belhadjin A., Bishop M.-F. (Eds.) *Les didactiques en question(s) - Etat des lieux et perspectives pour la recherche et la formation* (pp. 42–48). Bruxelles : de Boeck (col. Perspectives en éducation et formation).

Dorier J.-L. (2008) Reaction to J. Kilpatrick's talk: The development of mathematics education as an academic field. In Menghini M., Furinghetti F., Giacardi L., Arzarello F. (Eds.) The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education (pp. 40–46). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Dorier J.-L. (Ed.) (1997a) L'algèbre linéaire en question, collection Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Dorier J.-L. (1997b) *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions*. Note de synthèse HDR - Université Joseph Fourier - Grenoble 1 - 20 mai 1997. Paru sous la forme d'un cahier du laboratoire Leibniz, Cahier n°12. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338400/document

Glaeser G. (1981) Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 2(3). 303–346.

Kilpatrick J. (2008) The development of mathematics education as an academic field. In Menghini M., Furinghetti F., Giacardi L., Arzarello F. (Eds.) The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education (pp. 25–39). Roma: Istituto della Enciclopedia Italiana.

Legrand M. (1993) Le concept de situation fondamentale. Richesse et limites de ce concept. In Noirfalise R. (Ed.). *Actes de la VIIe école d'été de recherche en didactique des mathématiques* (pp.121–130). Clermont-Ferrand : IREM.

Margolinas C., Wozniak F. (2013) *Le nombre à l'école maternelle – Une approche didactique*. Bruxelles : De Boeck.

Perrin-Glorian M.-J. (1993) Utilisation de la notion d'obstacle en didactique des mathématiques, *Cahier du Séminaire de Recherche / réflexion / Interaction*, année 1992-93. Grenoble : IUFM, 1–21.

Piaget J. (Ed.) (1967) *Logique et connaissance scientifique*. Encyclopédie de la Pléiade. Paris : Gallimard.

Radford L. (1997) On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics* **17**(1), 26–33.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2/3), 133–170.

Vergnaud G. (2009) Activité, développement, représentation. Colloquium de didactique des mathématiques 2008. In Coulange L., Hache C. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 7–29). Paris : IREM et ARDM. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/AAR10001.pdf.

DE LA TRANSPOSITION DES SAVOIRS MATHEMATIQUES A LEUR DE-TRANSPOSITION DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Emmanuel HATEGEKIMANA LUANDA[*]

Résumé - La transposition didactique qui permet d'extraire les savoirs scolaires des savoirs savants est un processus de transformation qui adapte et exprime ce savoir au niveau des apprenants par des situations didactiques. Ces savoirs exprimés en contextes produisent de manière intuitive des connaissances subjectives et diffèrent des savoirs savants de départ. Notre analyse montre que le fonctionnement et l'évolution de la pensée mathématique devait s'appliquer au cursus de formation scolaire pour faire évoluer le cognitif des élèves jusqu'à l'acquisition des connaissances se rapprochant au savoir savant. Ce processus, appelé dé-transposition, peut être vu comme une opération inverse à la transposition didactique.
Mots-clefs: Transposition didactique, contextualisation, formalisation des savoirs, situations didactiques, connaissances des élèves.
Abstract - The didactic transposition that helps to extract the school knowledge to the scientific one is a process of transformation that adapts and expresses this knowledge at the level of the learners by didactic situation. This knowledge in context produce in a intuitive manner of subjective knowledge that differ from the scientific knowledge. Our analysis prouves that the function and the asserment of mathemematic thought should be applied in the course of school function to make evolve the cognitive of pupils to the acquisition of knowledge close to the scientific knowledge. This process calls upon transposition may be seen as an inverse operation to a didactic transposition.
Keywords: Didactic transposition, contextualisation, knowledge formalisation, didactic situation, learners' knowledge.

I. INTRODUCTION

La communication des savoirs mathématiques en théorie des situations exige que les savoirs savants soient transformés en savoirs didactiques enseignables par un processus de transposition didactique. Ils doivent être contextualisés pour devenir des savoirs didactiques pouvant générer des connaissances que les élèves pourront se construire eux-mêmes en agissant sur le milieu didactique dûment construit au préalable par le professeur. Cette exigence communicationnelle permet donc, suivant le lieu, la région où vit l'élève et les cultures de diversifier les cognitifs des élèves car alors les objets du savoir se transmettent intuitivement en se fondant sur des jeux ou des problèmes réels relatifs à la région vitale des élèves qui doivent manipuler et agir sur les objets qui leur sont familiers. Cet état de chose conduit à une diversification des savoirs scolaires selon les mœurs et les coutumes de chaque société, savoirs pouvant être qualifiés de culturels car contextualisés et pouvant différer les uns des autres.

[*] Université de Goma – République Démocratique du Congo – hategekimanaemmanuel68@yahoo.fr

Hategekimana Luanda E. (2015) De la transposition des savoirs mathématiques à leur dé-transposition dans l'enseignement secondaire. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 119-128.

Le fonctionnement des connaissances dans le processus de formation au primaire et au secondaire permet cependant de passer de ces connaissances intuitives, qui sont le cognitif généré par le savoir-en-acte suivant une transformation évolutive aux connaissances relatives au savoir pur, savoir abstrait de la communauté scientifique. Ce passage se fait par une évolution des rapports aux objets de savoir dans le processus éducatif en spirale. C'est donc une forme de décontextualisation mieux encore de dé-transposition successive s'opérerant dans le processus de formation scolaire et que certains appellent ''objectivation''. La décontextualisation des connaissances intuitives des élèves doit alors être réalisée en un fonctionnement évolutif des connaissances de sorte que le cognitif puisse se développer et passer de l'état ''contextualisé'' à l'état ''universel'' comme se présentent les théories mathématiques achevées, état que Y. Chevallard qualifie de cognitif pur. (Brun J. & al., p.34). Rouchier e(1991), cité par Brun, parle d'une transformation des connaissances à partir du cognitif primaire, connaissances qui apparaissent comme produit des situations a-didactique et qui doivent être transformées pour se rattacher à un domaine plus savant où la connaissance n'est pas dans l'action et ainsi arriver à un cognitif plus ou moins pur.

Aussi, l'histoire des mathématiques montre que les savoirs mathématiques se sont construits au début à partir d'observations ou manipulations de la réalité concrète répondant aux questions posées par les réalités vitales. Progressivement, ils se sont formalisés au fur des âges pour se constituer en théorie axiomatiques, toujours par l'évolution des rapports individuels aux savoirs en question. Le fonctionnement des connaissances mathématiques montre ainsi que les cognitifs des mathématiciens ont évolués par étapes pour donner des savoirs savants que nous utilisons actuellement. Ce fonctionnement évolutif des savoirs historiques peut-il être assimilable au développement des connaissances dans le cursus de formation des élèves dans notre système d'enseignement dit ''à spirale'', après leur contextualisation ?

Considérons le processus de fonctionnement des certains savoirs scolaires décrit par A. Mercier, qu'il appelle ''objectivation des connaissances en acte'' tel que l'explique J. Brun :

> Le rôle de transformer les connaissances en acte en objets de connaissances ou savoirs est dévolu à un hypothétique processus d'abstraction, à la manière de Dienes : de la manipulation concrète, on passe directement à la présentation des actions, ce qui laisse supposer que le relais entre connaissances objectivées va de soi, que leur jonction est immédiate et que les connaissances en acte se transforment comme naturellement en savoirs. Ces connaissances en actes structurent les savoirs enseignés … Si les connaissances implicites structurent les savoirs, la question de relais des unes aux autres, reste posée. C'est le problème de l'objectivation des connaissances en acte. (p.34)

Ces savoirs obtenus par des connaissances en actes sont entachés de subjectivité car exprimés en termes de situations d'apprentissage. Puisque les savoirs enseignés diffèrent des savoirs savants auxquels ils sont déduits, nous nous tournons au processus de l'objectivation des savoirs intuitifs, de transformation du cognitif primaire caractérisant les savoirs en actes en savoirs savants en nous basant sur des cas précis de l'enseignement des nombres et de la géométrie au niveau élémentaire et secondaire en RD Congo pour analyser comment évoluent les savoirs en acte durant la formation de base à travers les contenus d'apprentissage dans le système d'enseignement à ''spirale''. Une progression "en spirale" permet à l'élève de revenir plusieurs fois sur la même notion au cours de sa formation, lui laissant ainsi le temps de la maturation, de l'assimilation et de l'appropriation… ». (Inspection des mathématiques des sciences physiques et chimie, p.2). Cela suppose ainsi une évolution au cours de la formation pour assurer la maturation des rapports au savoir en étude, en plusieurs étapes.

Puisqu'il s'agit de l'objectivation des connaissances, nous nous sommes tournés vers la théorie logique de LADRIERE J. pour l'évolution de la pensée mathématique en partant des savoirs intuitifs pour arriver aux savoirs purs. Cette dite théorie distingue quatre phases de l'évolution de l'axiomatisation des savoirs mathématiques à partir des savoirs intuitifs jusqu'aux savoirs formalisés. Nous avons ainsi proposé, en comparaison avec l'objectivation dans l'évolution des savoirs-en-actes, les phases d'un processus que nous nommerons « dé-contextualisation ou dé-transposition didactique des savoirs mathématiques scolaires » pouvant produire au bout de compte des savoirs savants, savoirs objectifs. Ces phases correspondent même à l'évolution historique des savoirs mathématiques de base.

Nous émettons l'hypothèse selon laquelle, le fonctionnement de cette dé-contextualisation permet de dé-culturaliser et d'universaliser le contenus mathématiques scolaires par un enseignement hiérarchisé des savoirs scolaires par les niveaux d'abstractions à travers la formation en spirale. Ce travail d'analyse théorique constitue le préliminaire du fonctionnement évolutive du cognitif des élèves de l'école maternel à l'université et notamment au secondaire en suivant cas par cas des notions précises afin d'en dégager les failles des ruptures qui ne sont jamais relancés.

II. LA THEORIE DES SITUATIONS ET LES CULTURES

Une situation étant l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu, elle est donc sujette à la culture de l'enseignant et même de l'élève. Cela puisque les situations didactiques créent des conditions qui favorisent l'apprentissage, situations comprises comme l'environnement de l'élève mis en œuvre et manipulé par l'enseignant comme un outil. Aussi, les conditions d'une des utilisations particulières d'une connaissance mathématique sont considérées comme formant un système appelé « situation » et puisque ces conditions dépendent de l'environnement de l'élève et plus souvent aussi du professeur, elles dépendent des cultures. Donc les situations didactiques servant à l'enseignement des mathématiques peuvent différer d'un contexte à un autre, d'une culture à une autre et peuvent donner lieu à une diversité des connaissances scolaires dans l'enseignement de base.

Par ailleurs, une situation d'usage en classe se définit comme un jeu hypothétique qui explicite un système minimal de conditions nécessaires dans lesquelles un savoir mathématique peut se manifester par les décisions aux effets observables d'un actant sur un milieu. Ces conditions se définissent sur base de la culture du contexte dans lequel est située l'école et ces jeux qui sont une manifestation des cultures caractérisent les milieux susceptibles de constituer une diversité des sources d'apprentissages des savoirs mathématiques. Cette diversité peut influer sur le sens et l'entendement des concepts qu'apprennent les élèves, ce qui fait dire à Guy Brousseau que :

> La définition des connaissances, par leur fonction dans une situation, entérine le fait que pour une même notion mathématique, chaque actant (société, professeur, élève) développe des connaissances a priori différentes suivant les conditions dans lesquelles il les utilise, les crée ou les apprend. Valides ou non d'un point de vue académique, elles sont d'une certaine façon ainsi légitimées, reconnues. (p.17)

Les situations d'enseignement des mathématiques ne peuvent être puisées que dans l'environnement social des élèves pour leur permettre de réaliser des accommodations nécessaires pour la construction de leur propre connaissance à partir de leur sens et de leur signification contextuelle. Elles sont donc intuitives et il y a nécessité d'un processus de décontextualisation par une purification successive de l'intuition ou de la subjectivité dans ces savoirs enseigné.

> Le processus d'enseignement part des savoirs à enseigner, puis il cherche à atteindre (induire) la connaissance au moyen des transformations des situations relatives à ces savoirs et se conclut par le retour à ces savoirs de départ. (Brun & al., p.303)

On voit donc qu'il y a un autre processus de transformation des connaissances dans l'enseignement, le retour aux savoirs de départ qui est une transformation évolutive se faisant grâce à une transformation situationnelle dont le but est d'atteindre le savoir de départ, savoir savant du patrimoine de la communauté scientifique. C'est donc une forme de dé-transposition qui consiste à faire évoluer le rapport avec ce savoir enseigné au départ pour que l'élève puisse acquérir le savoir savant, dé-transposition qui peut s'entendre comme une déculturation des savoirs culturels scolaires.

III. PROCESSUS DE LA DECONTEXTUALISATION DES CONNAISSANCES DANS L'ENSEIGNEMENT

Le problème de la décontextualisation du cognitif déduit des savoirs-en-actions dans le cursus d'enseignement des savoirs mathématiques a été abordé par quelques auteurs sous plusieurs aspects que nous voudrions succinctement passer en revue et le comparer au développement de la pensée mathématique pour étayer nos propos généralisant.

La question du changement de statut des connaissances dans les processus cognitif à l'œuvre sur les situations, c'est-à-dire le relai qui se forme entre les organisations cognitives et les savoirs à apprendre en situation didactique a été abordé par A. Rouchier (1997), quand il a invoqué le concept de ‘'*cognitif primaire*'' qui doit être transformé pour se rattacher à un domaine plus savant où la connaissance n'est plus dans l'action et Y. Chevallard (1992) l'affirme lorsqu'il distingue ‘'*le cognitif pur*'' qui relève du rapport personnel de l'individu au savoir et les transformations de ces rapports personnels qu'il conçoit en ces termes :

> Mais on doit alors tenir compte d'une réalité incontournable dans nos sociétés : le cognitif pur n'existe pas, ou presque pas. Les changements dans les rapports personnels y sont très fréquemment liés à une intention institutionnelle que changent ces rapports ; ils sont institutionnellement, c'est-à-dire anthropologiquement corrélés avec l'apparition d'intentions didactiques. (Brun & al., p. 34)

Le rapport au savoir en action conduit d'abord à des connaissances dites primaires, que l'on acquiert par le premier contact de l'individu apprenant, au savoir contextualisé est entaché de plusieurs irrégularités qui l'écartent de la vraie connaissance savante par l'effet de la transposition. Donc le premier rapport de l'individu aux objets d'apprentissages doit subir des transformations dans le cursus d'apprentissage afin d'évoluer jusqu'à se rapprocher du rapport plus ou moins clair et juste qu'on pourrait qualifier de connaissances purs se rattachant aux savoirs purs. Cette transformation de la connaissance fait évoluer l'individu qui apprend dès le début de sa formation scolaire jusqu'à sa fin est la dé-transposition. Par cette transformation, les savoirs-en-actes sont décontextualisés jusqu'à se rattacher aux savoirs savant donnant à l'apprenant des connaissances objectives. Aussi, ce savoir est transformé par le changement d'intentions institutionnelles qui changent les rapports aux savoirs présentés en des contextes différents car lorsque l'apprenant passe d'une institution à une autre, son contexte cognitif change de façon évolutive.

Selon G. Vergnaud, dans ses aspects pratiques et théoriques, ce développement évolutif du cognitif s'est observé aussi dans la formation des savoirs scientifiques et doit s'observer aussi dans l'enseignement actuel, mais cela ne se fait pas actuellement et la tendance est d'enseigner des manières à faire des algorithmes (Op. cité, p.52). Les connaissances de l'apprenant devait évoluer avec les objets du savoir à enseigner car l'institutionnalisation doit marquer le terme du processus d'objectivation à la fin du parcourt continu de formation où s'enchaineraient et se convertiraient harmonieusement le rapport de savoir et le rapport institutionnel. (Brun & al., pp. 41-42). C'est donc le temps didactique qui organise de façon cumulative, linéaire et harmonieuse, dans le processus de formation en spirale, la succession et l'évolution des objets de savoir. Cette évolution se caractérise ainsi par des ruptures et des filiations d'objets d'apprentissage, des conversions réciproques entre connaissances spontanées venant de l'intuition par rapport à l'appréhension des connaissances, et les différentes organisations personnelles des connaissances suivant les différents niveaux institutionnels. Au sujet des savoirs-en-actes évoluant suivant les niveaux pour générer à la fin du cursus, des savoirs savants par leur hiérarchisation dans l'abstraction, Guy Brousseau dit que :

> La production et l'enseignement des connaissances mathématiques demandent un effort de transformation de ces connaissances en savoir, une dépersonnalisation et une décontextualisation qui tendent à effacer les situations historiques (les jeux) qui ont presidé à leur apparition. (…) Le champ des problèmes relatifs à une connaissance ne cesse à son tour de se transformer au fur et à mesure de l'évolution de la théorie. (Brousseau, p.94)

On voit ainsi cette nécessité de faire évoluer les connaissances scolaires pour éliminer progressivement tout recours à la réalité concrète et aux jeux et pour qu'enfin de compte les élèves puissent les acquérir comme connaissances se rattachant aux savoirs savants de la communauté scientifique, ce que A. Antibi et G. Brousseau (2000) appellent la dé-transposition des connaissances scolaires.

La notion de système formel correspondant en logique au perfectionnement de la méthode axiomatique et représentant le degré suprême d'abstraction peut s'appliquer ici à travers des contenus hiérarchisés suivant les niveaux d'études et donc d'abstractions dans la formation prôné par le système d'enseignement à spirale. En effet, lorsque les intentions institutionnelles changent et évoluent, les contenus d'enseignement changent aussi parallèlement et évoluent suivant le schéma classique de l'évolution de la pensée mathématique et en même temps le sens de notions apprises évolue aussi. R. Douady dit que savoir des mathématiques, c'est avoir fonctionnellement ces savoirs comme outil, pour s'en servir. Ces savoirs, pour les acquérir doivent évoluer dans un contexte qui fasse évoluer le sens, et étant alors décontextualisé, ils doivent être recontextualisés pour être enseignés. (Douady, p.2). Les élèves qui les apprennent pour la première fois doivent agir sur le milieu didactique relatif au contexte, donc ces savoirs sont appris intuitivement.

L'intuition désigne toute forme de connaissance directe et sans aucune médiation, qu'elle soit d'ordre temporel ou logique, entre le sujet connaissant et l'objet connu : l'objet n'est pas appréhendé successivement mais donné comme une totalité présente à l'esprit, il n'est pas connu discursivement selon un rapport de principe à conséquence. (Baraquin & al. 2005, p.192). Lorsqu'un individu fait connaissance d'un savoir qu'il appréhende pour la toute première fois et apprend des savoirs-en-actes en agissant sur un milieu construit à cet effet. Des connaissances qu'il acquiert à ce niveau sont primaires, subjectives et intuitives.

André Revuz parle de l'importance de l'intuition dans l'éducation mathématique mais regrette que l'intuition avec laquelle le mathématicien appréhende les réalités est écartée. Il le précise enfin en ces termes :

> J'ai insisté sur le fait que dans le travail du mathématicien la rigueur et l'intuition collaboraient constamment et qu'une séparation stricte de leur domaines d'activité ne correspondait pas à la réalité. Or quand on observe le déroulement des classes de mathématiques, on a l'impression que l'exigence de rigueur y est toujours présente, mais qu'à priori on ne compte pas sur l'intuition des élèves et que l'on considère comme exceptionnel ceux qui en montrent. L'éducation de la rigueur serait un des objectifs de l'enseignement mathématiques, le développement de l'intuition serait hors de sa portée car elle résulterait d'un ''don'' sur lequel on serait sans pouvoir ». (Revuz, pp.92-93)

En fait, la théorie des situations aide à développer l'intuition car lorsqu'on organise un milieu didactique, on aide les élèves à agir sur ce milieu et à appréhender ainsi, de manière intuitive les connaissances. Ces connaissances qu'ils saisissent ne résultent pas d'un raisonnement logique, mais d'une intuition qui les leur fait connaitre et qui peuvent ainsi être qualifiés d'intuitives, ou de personnelles. Aussi, pour les intuitionnistes,

> La réalité mathématique est indépendante du langage mathématique et de la logique qui est un pur instrument de la communication. L'existence mathématique est réduite à la constructibilité : l'être mathématique n'a pas une réalité autonome, il n'existe que dans l'acte par lequel il est engendré. Toute la pensée mathématique est fondée sur une intuition originaire, celle de la division de l'unité, source de dualité. (Ladiere 1957, pp.26-27)

Les premières connaissances que les élèves construisent à partir des situations didactiques sont intuitives et subjectives car leur appréhension résulte d'une action de l'intelligence sur le milieu et non d'un raisonnement logique. L'activité de la pensée mathématique consiste donc à partir du niveau intuitif au niveau formalisé de manière évolutive. La distinction entre système et propriétés du système prend toute sa portée et l'on ne peut se passer d'un recours ultime à l'intuition car les mathématiques reposent en définitive sur l'accomplissement des gestes concrets. Et de ce point de vue, l'apport intuitionniste est capital du fait qu'en insistant sur l'exigence de constructivité, elle met en relief une caractéristique de la pensée mathématiques. Cela justifie donc l'usage des situations didactiques dans la formation de la pensée mathématique dans une institution d'enseignement. D'où l'adéquation entre cette évolution de la pensée mathématique et l'évolution des connaissances en milieu scolaire.

IV. LE DEVELOPPEMENT DE LA PENSEE MATHEMATIQUE A TRAVERS LA FORMATION SCOLAIRE

La reconstruction de savoirs scolaires par une évolution situationnelle pour amoindrir l'écart de transposition vue comme une purification progressive et hiérarchisée des aspects intuitifs caractérisant le cognitif primaire issu des savoirs en acte, ne peut pas se faire en un jour mais suivant une série des paliers progressifs à des niveaux institutionnels d'apprentissage que l'élève devrait franchir pour acquérir le vrai savoir savant des scientifiques. C'est cela le vrai caractère d'organisation en spirale de l'enseignement scolaire qui doit faire évoluer les connaissances des élèves. Etant donné la convergence des différentes réflexions des auteurs précités, selon Hategekimana (2014, p.36), les phases de formalisation de Ladière (1957, pp. 55-57) s'appliquent en enseignement pour faire cheminer les connaissances des élèves du cognitif primaire au cognitif plus ou moins purs, des connaissances intuitives issues des savoirs-en-actes aux connaissances formalisés se rattachant aux savoirs savants pour avoir la ‘'décontextualisation'' des savoirs scolaires.

- La première, l'axiomatique intuitive, s'élabore à partir du concret et didactiquement parlant, à partir des situations d'enseignement, de manière intuitive par les élèves dans une classe de mathématique. Il s'agit du système des connaissances qui s'élabore lorsque la contextualisation des savoirs savants a eu lieu pour que l'élève puisse, sous le guide du professeur, construire soi-même ses connaissances. Donc les savoirs-en-actes à ce niveau produisent une axiomatique intuitive, les cognitif étant subjectif.
- La deuxième, correspond à l'axiomatique abstraite et consiste à préciser le contenu des concepts fondamentaux dégagés des situations didactiques d'apprentissage et donc, une phase de construction des savoirs, non plus en partant des situations mais en partant des constructions mathématique élémentaires de cette connaissance.
- L'axiomatique formelle consiste à définir les concepts fondamentaux, non de façon intuitive mais à partir des relations établies entre ces concepts. Il s'agira de définir les opérations et toutes les notions connexes au savoir en étude. C'est un premier essai de formalisation axiomatique des connaissances.

- Enfin, le système formel pur peut se faire avec la définition axiomatique, après que tout le reste soit fait au préalable. Ici, il ne serait plus question de définir les concepts à partir des situations ni des constructions mathématiques de cette connaissance mais de manière axiomatique.

Nous émettons l'hypothèse selon laquelle, « la décontextualisation ou dé-transposition des connaissances dans l'enseignement actuel de mathématiques devra suivre le cheminement logique de la formalisation des connaissances mathématiques dans l'usage des situations didactiques afin de faire acquérir des savoirs abstraits ». Cette formalisation des mathématiques contextualisées permet de réunifier et d'universaliser les différentes connaissances issues de plusieurs types de contextualisations culturelles des savoirs scolaires dans toutes les cultures et donne lieu à un savoir universel dégagé des particularités culturelles

1. *Cas de l'enseignement de la Géométrie au secondaire et en formation des maîtres*

Les premiers travaux de géométrie ont été menés il y a trois mille ans à Babylone pour résoudre des problèmes d'astronomie et en Egypte pour retrouver les limites des terrains qui avaient été recouverts par les eaux du fleuve Nil pendant les crues. Les mathématiciens de cette époque ont établi des formules pour déterminer l'aire des surfaces limitées par des polygones élémentaires (triangle, trapèze, parallélogramme,…), le volume de l'espace limité par le prisme droit, …et des formules approximatives concernant le cercle. A cette époque, la géométrie était utilitaire et pratique dicté par le besoin de résoudre les problèmes pratiques.

Vers le 6ème siècle avant Jésus-Christ, les grecs ont fondé une géométrie philosophique et scientifique en quittant ainsi le seul aspect pratique. La géométrie devint un objet de réflexion pour elle-même et aussi déductive en fondant les propriétés des figures par les démonstrations. Avec Platon, les géomètres ont commencé à distinguer les objets du monde réel et les objets géométriques qui sont abstraits et parfaits. Ce fut le passage du concret à l'abstraction et donc de la modélisation.

Au 3ème siècle avant Jésus-Christ, Euclide organisa les savoirs géométriques de manière logique à partir des définitions, des axiomes et des propriétés démontrées. Ce fut donc le début de la formalisation et de la théorisation de la géométrie, de manière cohérente et de la structuration logique.

Du 9ème au 13ème siècle après Jésus-Christ, les mathématiciens arabes traduisirent les ouvrages grecs en les commentant et enrichirent la trigonométrie dans laquelle ils développèrent des méthodes de calcul d'aires et des volumes et la géométrie sphérique pour les besoins de l'astronomie. Aussi, le dessin et la peinture ont conduit au développement de la géométrie projective et la géométrie devint algébrique par l'introduction des repères et des équations. C'est l'organisation des savoirs fondés sur un système axiomatique cohérent pouvant permettre leur structuration en une théorie hypothético-déductive.

Et à partir du 18ème siècle, des recherches se font intenses en géométrie surtout lorsque les mathématiciens commencèrent à questionner la théorie géométrique notamment sur les axiomes d'Euclide. Ce fut le développement et l'expansion théorique de la géométrie. (Nzitakera 1995)

On obtient donc à partir de l'évolution de la géométrie dans le temps, quatre étapes principales que la géométrie a pu franchir pour devenir une science avec des méthodes et des théories. Puisque cette évolution de la pensée géométrique s'inscrit dans le schéma global du développement de la pensée mathématique, nous pouvons associer les synthèses théoriques de Houdement et Kouzniak (1998-1999, pp.71-72) en trois types de géométrie :

- La géométrie naturelle qui se confond avec la réalité (G1), dont la source de validation est la réalité, le sensible et qui comprend trois aspects : l'intuition, l'expérience et la déduction s'exerçant sur des objets matériels grâce à la perception et la manipulation d'objets.
- La géométrie axiomatique naturelle qui est un schéma de la réalité (G2) dans laquelle les aspects non rigoureux et les appels à l'intuition de l'espace cèdent la place à la déduction logique et à la démonstration au sein d'un système axiomatique le plus possible.
- La géométrie axiomatique formalisée (G3) pour laquelle le cordon ombilical avec la réalité est coupé et dans laquelle les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible, sur l'intuition mais la primauté du raisonnement logique s'impose.

Pour Houdement et Kouzniak, l'évolution de la géométrie ne doit pas être vue comme une suite des ruptures mais comme une vision unificatrice de la géométrie évolutive entre divers pôles et doit concourir à la formation des maîtres. Il a donc pensé s'en servir pour une bonne formation des maîtres. Cette classification rejoint la procédure de l'enseignement de la géométrie telle que l'a proposé Henri (1999) cité par Parzysz (pp.2-3), qui distingue trois types de rapports à l'espace en enseignement de la géométrie qui sont la situation concrète, une première modélisation par une schématisation et une mathématisation élaborée à partir du modèle. Sur base de cette approche, l'enseignement de la géométrie comporte ainsi un cadre théorique basé sur quatre paradigmes dont deux de la géométrie non axiomatiques : la géométrie concrète (G0) constituée les résultats de l'observation des figures dans l'espace (phase axiomatique intuitive) et la géométrie spatio-graphique (G1) constituée par des schémas graphiques de ce que l'on observe dans l'espace (axiomatique abstraite), et deux de la géométrie axiomatiques : la géométrie proto-axiomatique (G2) constituée par une modélisation de la réalité (axiomatique formelle) et la géométrie axiomatique qui est la formalisation finale (G3) (axiomatique formelle pure). (Parzysz, p. 130). Ce processus est une mathématisation, une décontextualisation des savoirs-en-acte qui consiste à généraliser et à dégager des définitions mathématiques à partir des observations, des réalisations et leurs schématisations et à produire un discours du type déductif appliqué aux données de l'énoncé.

2. *L'enseignement des ensembles de base (*$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$*)*

En République Démocratique du Congo, les ensembles s'enseignent sous forme intuitive en première, deuxième et troisième secondaire et constituent un savoir de base à toute la formation mathématique au secondaire. En se basant sur les idées de Ladrière, et la formation des structures mathématiques, Banwitiya et al. (p.4) et Hategekimana (2006) ont proposé un enseignement des structures algébriques par leur hiérarchisation par *un enseignement qui considère les différentes structures comme des classes hiérarchiques dont le passage d'une classe à une autre suppose d'abord la maîtrise de la première et l'existence d'un besoin d'obtenir des propriétés supplémentaires pour résoudre certains problèmes jugés nécessaires.* Ce qui est corroboré par Servais (Gattegno & al., p.38) pour qui, l'algèbre peut s'apprêter dans son enseignement au modèle de décontextualisation qui occasionnerait un enseignement hiérarchisé permettant d'asseoir l'abstraction mathématique des structures algébriques :

> L'algèbre, d'abord conçue comme un système d'opérations sur des nombres de nature déterminée, est, par une libération progressive, apparue de plus en plus clairement comme un système opératoire pouvant agir sur des êtres de nature les plus diverses. Par une abstraction nouvelle, on néglige toute ces interprétations pour considérer des êtres indéterminés sur lesquels s'exercent des opérations qui ne sont autrement précisées que par des règles de composition données de façon explicite.

Il en résulte une structuration de l'enseignement de l'algèbre générale tenant compte de la hiérarchisation des structures et des niveaux d'abstractions des mathématiques, pouvant s'appliquer à l'enseignement des structures algébriques suivant quatre niveaux ou degrés différents et successifs et comme un processus qui intègre chaque fois le cheminement du formalisme des connaissances mathématiques, et donc de leur décontextualisation :

- Premièrement, l'enseignement intuitif, basé sur les problèmes de la vie liés à la genèse des nombres et des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{R}$ d'une manière hiérarchisée. Ces situations permettraient de contextualiser les définitions des nombres comme classes d'équivalences induisant une relation d'équivalence.
- Deuxièmement, les ensembles sont définis non plus à partir des situations, mais à partir de la relation d'équivalence déduite précédemment par la situation.
- Troisièmement, le principe du raisonnement mathématique étant bien acquis, on généralise les structures des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ aux demi- groupes pour $\mathbb{N}$, groupes et anneaux pour $\mathbb{Z}$ et les corps pour $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et on reprend les constructions de leurs constructions, le passage de l'un à l'autre se faisant par hiérarchisation des structures et non d'une manière axiomatique.
- Quatrièmement, on définit les savoirs de manière axiomatique sans recourir aux constructions, ces dernières étant bien maîtrisées à l'avance.

La hiérarchisation des structures signifie que les structures sont présentées aux élèves par pallier, le passage de l'une à l'autre se faisant par construction motivée par la résolution d'un certain nombre de problèmes préalablement posés dans la structure de base (Hategekimana 1993). Pour améliorer le rendement de l'enseignement des mathématiques, nous émettons l'hypothèse qu'il serait nécessaire d'appliquer ces phases dans l'enseignement des mathématiques chaque fois que les connaissances sur les ensembles des nombres comme une procédure de décontextualisation des connaissances à partir des situations ou des jeux.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les savoirs savants sont rendues culturels par l'effet de transposition didactique et lorsqu'elles sont contextualisées par des situations ou des jeux culturels et peuvent ainsi différer et donner lieu à une diversité des connaissances scolaires de base. Pour les rendre impersonnelles et les dégager de toute connotation contextuelle et culturelle, les étapes de la décontextualisation s'avèrent nécessaire afin que les connaissances finales apprises au bout de compte soient ''déculturalisées'' (contextualisées) et ainsi universalisées. Cette évolution des connaissances scolaires se réalise dans notre système d'enseignement à spirale par les modifications des intentions institutionnelles et des transformations des situations didactiques de sorte que les contenus d'enseignement évoluent en même temps que les rapports des élèves aux objets d'enseignement. Ce processus des transformations peut être qualifiée de dé-transposition car elle fait évoluer les savoirs en actes aux savoirs purs ayant fait l'objet de transposition. Cette façon de faire est déjà appliquée pour l'enseignement de la géométrie et peut donc être généralisées à l'enseignement de toutes les connaissances mathématiques notamment des structures algébriques. De ce fait, les connaissances que les élèves auront acquis seront générales et pourront comprendre leurs constructions, leurs sens et significations ainsi que leurs formes finales axiomatisées.

Ce qui reste, c'est d'analyser exactement ce qui se fait dans les pratiques d'enseignement dans nos écoles et de proposer comment réaliser cette évolution. Cependant, cela ne peut se faire que s'il y a eu une bonne transposition et si les savoirs scolaires sont contextualisés autrement dit si les enseignants connaissent et utilisent à bon escient les théories de la transposition didactique et des situations didactiques. Mais aussi, des expérimentations peuvent se réaliser conjointement en prévoyant, les situations didactiques des notions données construites expérimentalement ainsi que leur dé-contextualisation ou dé-transposition.

REFERENCES

Antibi A., Brousseau G. (2000) La dé-transposition des connaissances scolaires. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 20(1), 7-40.

Banwitiya Y., Indenge Y., Hategekimana L-E., (2013) Enseignement par hiérarchisation des structures et des niveaux d'abstractions. *CERIGO* 6, 1-25

Baraquin N. et al. (2005) *Dictionnaire de Philosophie*. Paris : Armand Colin.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée Sauvage.

Brousseau G. (2000) Education et didactique des mathématiques. *Education matematica* 12(1), 5-39.

Brun J. et al. (1996) *Didactique des mathématiques*. Paris : Delachaux et Niestél.

Dorier J-L. et al. (2002) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques.* Paris : La Pensée Sauvage.

Douady R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. une chronique en calcul mental, un projet en algèbre à l'articulation collège-seconde*. Repères IREM 15.* Topiques Éditions.

Gattegno et al. (1958) *Le matériel pour l'enseignement des mathématiques.* Paris : Delachaux et Niestlé.

Hategekimana L. (1993) *Etude comparative de quelques complétions des structures en mathématiques*. ISP/Bukavu : Mémoire de Licence.

Hategekimana L. (2014) *Sur l'enseignement des nombres rationnels et irrationnels*. Thèse de Doctorat. Kinshasa : Université Pédagogique National.

Hategekimana L. (2006) Enseignement par hiérarchisation des structures en mathématique, une piste pour la résolution du problème d'enseignement des mathématiques. *Cahiers du CERUKI, Nouvelle Série* 33, 53-67.

Houdement C., Kuzniak A. (1998-1999) Réflexion sur l'enseignement de la géométrie pour la formation des maîtres*. Grand N, CRDP-IREM* 64, 65-78.

Inspection de mathématiques et de sciences physiques et chimiques (2010) *Pourquoi une progression annuelle en spirale ?.*

Ladriere J. (1957) *Les limitations internes des formalismes.* Paris : Gauthier-Villars.

Nzitakera S. (1995) Le postulat d'Euclide sur les parallèles et l'approche axiomatique moderne de la géométrie. *Revue de pédagogie appliquée* XI, 1-4.

Parzysz B. (2006) La géométrie dans l'enseignement au secondaire et en formation des professeurs des écoles. De quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in didactica* 17, 128-161.

Revuz A. (1980) *Est-il impossible d'enseigner les mathématiques ?* Paris : PUF

Vergnaud G. (1990) Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. *Petit x* 22, 51-69.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'ENSEIGNEMENT DE LA NOTION D'EQUATION EN REPUBLIQUE DEMOCRATIQUE DU CONGO : CAS DE QUELQUES ETABLISSEMENTS DE LA CAPITALE KINSHASA

Alexandre MOPONDI BENDEKO MBUMBU[*] – Octave MOLEKA BATUMBI[**]– Benjamin MUGARU DAWA[***]

Résumé – L'apprentissage ou l'enseignement de toute notion mathématique, la notion d'équation dans notre cas, comprend toujours deux aspects : l'aspect sens ou signification de ce qu'on veut enseigner, « le à quoi ça sert ? », et l'aspect résolution des problèmes en rapport avec la notion en question.

Nous constatons qu'en RDC, du moins dans ce que nous avons constaté dans l'échantillon d'écoles de la capitale Kinshasa, l'enseignement de la notion d'équation porte plus sur la résolution des problèmes en rapport avec l'équation qu'à la signification qu'on veut lui donner. Toute la progression conduisant à la généralisation de l'écriture ou de la présentation d'une équation commence bien de la maternelle jusqu'à la fin de l'école primaire. Arrivé en secondaire général, la forme générale d'une équation est donnée sans expliquer ce qu'elle représente ; on passe directement à parler de quelques équations types et à la résolution. Il y a donc un saut informationnel entre l'écriture généralisée de l'équation et la résolution des équations. Il reste à compléter la chaîne pour que la progression soit continue et surtout pour que les élèves arrivent à mobiliser l'équation lorsque cela semble nécessaire.

Mots-clefs : équation, expression, signification, résolution, mobilisation.

Abstract – Learning or teaching of any mathematical notion, the notion of equation in our case, includes always two aspects: the sense or meaning of what you want to teach, the "what's the point?', and the aspect of resolution of the problems related to the concept in question.

We note that in the DRC, at least in what we found in the sample of schools in the capital Kinshasa, education of the concept of equation is more on the resolution of the problems in connection with the equation that the meaning we want to give him. Any progress leading to the widespread use of writing or presentation of an equation starts well from nursery school to the end of primary school. Arriving in general secondary, the general form of an equation is given without explaining what it means. It passes to speak of some type equations and resolution. So there is an informational jump between generalized equation writing and solving the equations. It remains to complete the chain to make continuous progress and above all so that students come to mobilize the equation when it seems necessary.

Keywords: equation, expression, meaning or significance, resolution, mobilization

[*] Université Pédagogique Nationale– RDC – bendekomopondi@yahoo.fr
[**] Université Pédagogique Nationale– RDC – octavemoleka@yahoo.fr
[***] Université Pédagogique Nationale– RDC – benjamin.dawa@yahoo.fr

Mopondi A., Moleka O. B., Mugaru B. D. (2015) L'Enseignement de la notion d'équation en République Démocratique du Congo : cas de quelques établissements de la capitale Kinshasa. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT1, pp. 129-138.

I. PROBLEMATIQUE

Notre vécu d'élève et notre expérience d'enseignant ont montré que la notion d'équation en mathématique soulève des problèmes d'apprentissage et de réinvestissement en République Démocratique du Congo (RDC). Le travail de l'état de lieu, qui est le nôtre, cherche à interroger l'enseignement en s'inspirant directement d'un questionnement didactique et mathématique. Le questionnement va porter sur la désignation de l'objet mathématique (équation), la définition cet objet mathématique, la signification, donc le sens, donnée à cet objet à travers la définition et son réinvestissement.

Tout nous semble partir de la désignation de l'objet mathématique qui est constitué de trois composantes (deux polynômes et un signe d'égalité). Le signe d'égalité semble jouer dans la désignation de cet objet mathématique.

L'expression mathématique ainsi obtenue, équation, se trouve ainsi au centre de l'apprentissage de cet objet mathématique où tout tourne autour du signe d'égalité $=$. Il faut dire que dans beaucoup de cas de désignation d'objets mathématiques, le mathématicien se réfère à leurs composantes fondamentales, aux éléments qui forment leur structure de base. La figure géométrique qui est composée de trois côtés et de trois angles est désignée par ses trois angles, triangle. Cela montre déjà la difficulté qu'ont les mathématiciens à désigner les objets de leur travail. Les enseignants sont donc censés prendre en compte cet aspect des choses dans leur enseignement pour éviter de réaliser un apprentissage basé uniquement sur la désignation et non sur l'essence même de l'objet mathématique.

Comme nous venons de le signaler, l'objet mathématique désigné par l'équation a, pour l'exprimer, trois composantes principales qui sont : le signe d'égalité et deux polynômes, appelés membres *(*$ax + b = cx + d$*)***.** Pour le désigner ils se sont basés essentiellement sur la composante égalité, d'où est sortie l'équation. Ce qui a conduit au signe d'égalité pour le traduire.

En définitive, l'objet mathématique désigné par l'équation se présente par deux polynômes placés de part et d'autre de ce signe d'égalité pour lequel il faut trouver la valeur de l'inconnue qui constitue le polynôme. Le plus souvent et cela de façon presque systématique, l'enseignant congolais définit l'objet mathématique équation comme *une égalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs attribuées à l'inconnue* et après cette définition il passe directement aux méthodes de résolution qui conduisent à trouver la valeur de cette inconnue. Il ne pense presque pas à la signification, c'est-à-dire au sens qu'il donne à cet objet mathématique indépendamment de sa désignation. Nous pensons que si l'apprenant n'as pas le sens de cet objet mathématique appelé équation, il va avoir du mal à mobiliser cette notion au moment utile et à la réinvestir quand il le faut. Donc pour nous, si difficulté il y a à l'apprenant congolais, c'est certainement au niveau du sens, de la signification, du concept pour lequel il n'a pas été entrainé.

Dans ses travaux de thèse sur « les tribulations de signe = dans la moulinette de la bonne réponse », Laurent Theis met en évidence les connaissances, liées à ce signe d'égalité, qui font l'objet de la progression de l'apprentissage de la notion d'équation dans les programmes officiels de l'enseignement en RDC. Il s'agit de l'équipotence, de l'équivalence et de l'égalité.

Il existe évidemment des différences fondamentales entre ces trois notions qui cependant correspondent toutes à l'équivalence. En clair, l'égalité représente un cas particulier de l'équipotence et l'équipotence un cas particulier de l'équivalence.

L'équivalence suppose les trois propriétés : la réflexivité, la transitivité et la symétrie. L'équipotence est l'équivalence quantitative. La notion d'égalité est un cas particulier d'équipotence ; il ne suffit pas que deux collections aient le même nombre d'éléments pour qu'elles soient égales, il faut en plus que ces éléments soient exactement les mêmes. Ainsi, sur le plan ensembliste deux ensembles A et B sont dits égaux si et seulement si, tout élément de A appartient à B et tout élément de B appartient à A. l'égalité correspond également à l'équivalence quantitative à la seule différence que les mêmes objets physiques se retrouvent dans les ensembles en question.

En mathématique le signe = (égal), placé entre deux termes symbolise la relation d'égalité, ces deux termes désignent exactement le même objet mathématique, en général nombre, ensemble, fonction etc.

Au-delà de cette signification mathématique soulignée ci-haut, l'égalité peut avoir d'autres sens (significations, interprétations) : elle peut représenter la *combinaison de deux nombres pour obtenir un troisième* ; il s'agit de l'égalité du type $a + b = c$. Elle peut aussi signifier le *fractionnement d'un nombre* en deux nombres différents ; il s'agit d'égalité du type $a = b + c$. L'égalité peut également être une *relation d'équivalence qui peut avoir plusieurs dénominations* pour un même nombre. Par exemple 0,4 est une autre désignation de $\frac{2}{5}$, « 3 + 4 » serait du point de vue mathématique la désignation de « 5+2 ».

Saenz-Ludlow et Walgamuth (1998), cités par Theis dans sa thèse (2005, p.9), distinguent cinq différentes significations d'égalité : 1° L'égalité indiquerait *une commande* de trouver le résultat ; il s'agit d'égalités du type « $a + b = \dots$ » ou « $a + \dots = c$ ». 2° L'égalité désignerait *l'équivalence des résultats des deux opérations*, comme par exemple « $\frac{14}{3} = \frac{42}{9}$». $\frac{14}{3} = \frac{42}{9}$». 3° L'égalité soulignerait *l'équivalence de fractions*. 4° Le symbole d'égalité servirait à introduire *différents symboles ou différentes écritures pour désigner un même nombre*. 5° L'égalité désignerait la *relation de commutativité* qui est vraie pour tous les nombres A et B quelle que soient les valeurs numériques qu'on leur assigne ($A + B = B + A$). Cette dernière signification permet aussi de souligner l'importance du symbole d'égalité pour la compréhension des propriétés des différentes opérations arithmétiques de base dont la commutativité, l'associativité, la symétrisation, etc.

Nous pouvons donc dire que l'apprentissage de la notion d'équation comporte deux aspects qui sont : *l'expression mathématique* de la notion (le langage - les codes utilisés pour l'exprimer) et *la résolution*. C'est dans l'aspect expression mathématique que les différents sens peuvent faire l'objet de l'apprentissage. De façon explicite, l'hypothèse que nous pouvons émettre serait du type « l'apprentissage de la notion d'équation n'est réalisé que lorsque l'apprenant est à mesure de la mobiliser, lorsque cela est nécessaire, et d'utiliser l'algorithme approprié pour arriver au résultat attendu ». Et l'apprenant ne peut la mobiliser que lorsqu'il sait à quoi la notion peut servir.

Toutes ces hypothèses demandent un travail de terrain approfondi pour les vérifier. Au niveau de cette communication, nous nous sommes limités au travail d'exploration, d'état de lieu ; nous avons observé des leçons et filmé des séances de cours de la maternelle (3-5 ans) à la 6ème année des humanités (18-19 ans). Ce qui nous a permis d'identifier le moment ou le problème de sens est posé pour essayer de proposer des solutions.

II. NOTION D'EQUATION DE LA MATERNELLE AU SECONDAIRE

Il est de coutume, en République Démocratique du Congo (RDC), de présenter un travail d'initiation à la recherche à la fin des études supérieures et universitaires (5 ans après le baccalauréat). C'est dans ce cadre qu'à **l'**Université Pédagogique Nationale (UPN), nous avons entrepris le travail, appelé mémoire de fin d'études, sur l'enseignement de la notion d'équation de la maternelle aux humanités dans quelques établissements de la capitale, Kinshasa. L'enseignement en RDC est subdivisé en école maternelle (3-5 ans), l'école primaire (6-12 ans), l'école secondaire (13-18 ans) dont deux ans de secondaire général (13-14 ans) et 4 ans des humanités (15-18 ans). La sixième année des humanités est la dernière année des humanités (baccalauréat). Le travail effectué a porté sur tous ces niveaux.

1. *Bilan des observations des classes*

A l'école maternelle, la notion est présentée sous forme d'une *relation d'équivalence***,** c'est-à-dire, on y présente en général, deux situations ou deux ensembles entre lesquels on établit une équivalence. Les situations utilisées dans ce contexte sont toutes du milieu de l'enfant ; elles sont envisageables par l'enfant qui les traite. Prenons l'exemple du jeu lacunaire observé dans la classe de maternelle.

« Jeu lacunaire : le jeu où on a deux têtes, l'une avec tous les éléments et l'autre avec quelques éléments en moins. Il faut trouver les éléments qui manquent dans l'autre tête pour que les deux soient pareilles

Règle du jeu : Le jeu consiste à compléter les éléments qui manquent dans une collection par rapport à une collection complète donnée. »

L'enfant est implicitement appelé à établir une bijection entre les deux ensembles (têtes). Pour que cela soit possible, il doit compléter le second ensemble qui manque encore certains éléments. Cela dans le but de retrouver les mêmes objets physiques dans les deux ensembles. On aboutit donc à la forme « A=B ». Dans ce cas l'égalité n'a qu'une seule signification : l'équivalence.

A l'école primaire, l'élève passe du cas concret au nouveau cas où il doit apparaître des nouveaux codes dans la formulation d'une équation : des nombres, le signe d'égalité, des pointillés, le signe d'addition, le signe de soustraction, le signe de multiplication et le signe de division. Tout l'ensemble est présenté comme étant une *« opération à trou »*. On retrouve des présentations du genre: $a + \ldots = b$, $a + b = \ldots$, $a = b + \ldots$, etc. ces différentes formes d'équations prennent des différentes dénominations donc des différents sens à travers différents degrés de l'enseignement primaire :

Au degré élémentaire (1er et 2ème année), on remplace les collections par un énoncé littéral qu'on transforme en une équation. On a par exemple l'énoncé, « combien de boules faut-il ajouter à une collection de trois boules pour en avoir cinq ? », est traduit par l'équation « 3 +…= 5 ».

En fait, au degré élémentaire l'équation est présentée comme une « décomposition d'un nombre » en deux autres nombres. Exemples : 20 = 17 +… ; Etc.

Au degré moyen (3ème et 4ème année), l'équation est prise comme une *« recherche du complément »* de nombre. On a les situations du genre : 52+….=100 ; 630+….=1000 ; 4700+…=10000 ; Etc.

Au degré terminal ($5^{ème}$ et $6^{ème}$ année), on renforce les différents sens donnés à l'équation vue au premier et au deuxième degré et on fait plus d'exercices d'application qui sont plus vers les situations de conversion (1l + … = 1hl ; 1l + … dal = 1hl).

En secondaire général*, il est question de passer de l'écriture d'une équation sous forme d'une opération à trou (*2 + … = 5*) à la forme dite générale* dans laquelle les pointillés sont remplacés par une lettre, généralement x ou y ($2 + x = 5$). A ce niveau, on s'arrête aux *équations du premier degré* simple et du premier degré dans un *système de deux équations* à deux inconnues.

Le problème qui se pose ici est celui de la signification donnée à cette nouvelle expression, $2 + x = 5$. Le constat est qu'au lieu de commencer par expliquer cette expression on passe directement à la résolution, donc à la recherche de la valeur de x. Pendant les deux ans de secondaire général, il sera essentiellement question de trouver la valeur x. Le sens donné à cette nouvelle expression sera totalement occulté.

Aux humanités, tout le travail sur les équations sera porté sur *la catégorisation des équations* et la *résolution* des problèmes en rapport avec ces équations.

Il y a eu comme équation :

- Equation du premier degré à une inconnue : Il s'agit d'un énoncé mathématique qui après transformation peut prendre la forme « $ax + b = 0$ », avec a un réel non nul, b un réel quelconque et x l'inconnue. C'est un exemple d'équation polynomiale de degré un.
- Equation du premier degré à deux inconnues (Géométriquement, l'équation du premier degré à deux inconnues représente l'équation d'une droite du plan, $y = \alpha x + \beta$, *avec* α *et* β *des réels*) : Il s'agit de l'égalité suivante : « $ax + by = c$ ». Où a et b sont deux réels non nuls, c un réel quelconque, x et y sont des inconnues.
- Système de deux équations à deux inconnues :

C'est une équation linéaire dont l'expression analytique est de la forme :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ cx + dy = e \end{cases}$$

Où a, b, c, e *et* d sont des réels non tous nuls ; x et y des inconnues.

. Equation du premier degré contenant la valeur absolue :

C'est une équation où l'inconnue se trouve entre le symbole « valeur absolue »

Exemples :

$$|x| - |x - 3| = 0$$
$$|x - 2| = 5$$

La résolution de ces équations conduit également aux équations du premier degré. On examine les équations dans des intervalles bien déterminés par les conditions sur les valeurs absolues. La solution de l'équation est la réunion des solutions dans chaque intervalle.

- Equation paramétrique du premier degré :

C'est une équation dans la quelle, en plus de l'inconnue classique, intervient une nouvelle lettre, m, appelée paramètre.

Exemples :

$(2m+3)x = 6m+1$;

$(m^2-1)x+3=0$;

m dans ces équations représente le paramètre et x l'inconnue.

Equation du second degré

Elle est de la forme générale $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels et x l'inconnue qu'il faut déterminer.

L'équation réciproque

L'équation réciproque d'inconnue x peut prendre les formes suivantes :

$ax^3+bx^2+bx+a=0$

$ax^3+bx^2-bx-a=0$

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$

$ax^4+bx^3-bx-a=0$.

La résolution de ces équations, conduit à celles du premier degré et second degré. En effet, en factorisant le premier membre de l'équation par regroupement des termes à coefficients semblables on aboutit, en général, au produit d'une fonction du premier degré à une fonction du second degré. Par la règle du produit nul[1], on aboutit donc à deux équations dont l'une du premier ou l'autre du second degré.

En observant ces équations on remarque que les termes extrêmes et les termes équidistants aux extrêmes ont les mêmes coefficients.

Equation fractionnaire

Les équations fractionnaires sont celles dont au moins un dénominateur contient une inconnue.

Exemple :

$$\frac{4}{x+5}-\frac{24}{5}+\frac{5+x}{x+5}=0$$

Ces équations sont également réductibles au premier ou au second degré. D'abord on pose la condition préalable sur le dénominateur qui ne doit pas s'annuler, puis par des techniques de transformation on aboutit à une équation du premier ou du second degré.

Equations trigonométriques

Les équations trigonométriques sont celles dans lesquelles on voit apparaître les fonctions trigonométriques telles sinus, cosinus, etc.

Exemples :

$\sin x = a$; $tg\mu(x)=tg\mu(x)$; $\sin^2 x+2\cos^2 x+\sin x=1$

Equation logarithmique

---

[1] $A.B = 0 \leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$

L'équation logarithmique est celle dans laquelle l'inconnue intervient dans l'expression du logarithme.

Exemples :

$\log_a u(x) = c$; $\log_3 u(x) = \log_a v(x)$

Avec $u(x), v(x)$ des fonctions de x, a un réel positif, non nul et différent de 1.
En appliquant les propriétés des logarithmes on aboutit à des équations polynomiales telles que rencontrées plus haut.

Equation exponentielle

Une équation exponentielle est celle dans laquelle l'inconnue intervient dans l'exposant.

Exemples :

$a^{u(x)} = b$; $a^{u(x)} + b^{v(x)} = c$

Avec a et b des réels positifs non nuls et différents de 1 ; $u(x), v(x)$ des fonctions de l'inconnue x et c un réel.

2. *Résumé des observations de classes*

Les observations des classes confirment l'existence d'une progression de l'apprentissage de la notion d'équation qui est plus liée à la répartition du programme de formation (Instructions Officielles) qu'à la conception d'un processus d'apprentissage par l'enseignant. Cette répartition, on la retrouve dans les manuels qui sont intégralement suivis par les enseignants.

En suivant cette progression des programmes, nous pouvons mettre en évidence certains sens attribués à la notion d'équation ; ces sens se réfèrent essentiellement au signe d'égalité « = ».

Le premier sens donné est celui de la *« relation d'équivalence »* que nous avons retrouvé dans les situations concrètes proposées en *maternelle* ; il n'y a évidemment pas un code, à ce niveau, pour traduire ce sens d'équivalence. L'accent est mis sur « l'équipollence », précisément sur « l'égalité » entre les collections. C'est sur l'observation, la numération et l'énumération qu'est centré le travail des apprenants.

En primaire, s'ajoutent, dans l'ordre de la progression, les sens de « l'opération à trou », voire l'addition à trou, de la « décomposition d'un nombre en une somme » ou « fractionnement du nombre », et du « complément d'un nombre ». Une généralisation sur les autres opérations fondamentales, soustraction – multiplication – division clôture le travail de l'école primaire sur l'équation.

C'est donc à l'école primaire que commence la formulation (ou l'écriture ou encore la présentation) de l'équation comme langage ou comme expression mathématique d'un problème posé. Cela nécessite l'apparition de certains codes : « = » (signe d'égalité) ; « …. » (points en suspension, signe de trou) ; « + » (signe d'addition) ; « - » (signe de soustraction) ; « x » (signe de multiplication) ; « : » (signe de division). Les apprenants ne savent nécessairement pas former une phrase mathématique avec ces codes. Mais l'enseignant, qui sait former une phrase avec ces codes, utilise ces codes pour leur proposer un énoncé mathématique à résoudre. C'est, nous semble-t-il, à cette étape que l'apprentissage de l'équation comme énoncé mathématique échappe aux apprenants. Visiblement, c'est à l'introduction des premiers codes qu'il faut donner le sens de langage à l'équation ; il doit donc précéder la résolution de l'équation. C'est normalement à la fin de l'école primaire que les apprenants doivent avoir le sens de langage mathématique de l'équation ; l'enseignement secondaire le consoliderait et mettrait l'accent sur la résolution.

En secondaire général, il y a le travail de la consolidation de ce qui est fait à l'école primaire auquel s'ajoute celui de la généralisation de la présentation (ou formulation) mathématique d'une équation : le signe de trou, « … », qui signifie ce qu'on cherche (l'inconnue), est remplacé par une lettre (les plus utilisées : x, y) : $2 + x = 11$.

Ce passage aux lettres pour exprimer ce qu'on cherche est la source de problèmes des apprenants pour ce qui est : - la signification de la lettre (sens donné à la lettre) – la formulation d'une équation (sens de l'énoncé mathématique) – la résolution d'une équation. En définitive, c'est le fait d'occulter l'apprentissage du sens de l'équation comme énoncé mathématique qui est à la base de tous ces problèmes. C'est une hypothèse forte qui demande un travail approfondi pour la vérifier.

Les problèmes des apprenants s'étendent avec la complexification des énoncés mathématiques de l'équation ; ils ont maintenant deux équations du premier degré à résoudre :

$$\begin{cases} 5x + 3y = 18 \\ 6x + 14y = 12 \end{cases}$$

*En 3ème et 4ème***,** l'équation est censée être travaillée comme un objet, une notion mathématique. La réalité est que le travail se limite à la définition et à la résolution de quelques formes d'équations présentées (Equation du premier degré à une inconnue – Equation du premier degré à deux inconnues – système de deux équations à deux inconnues – Equation du second degré – Equation bicarrée – Equation réciproque – Equation du premier degré contenant la valeur absolue – Equation fractionnaire – Equation paramétrique du premier degré – Equation trigonométrique). En définitive, le travail sur les équations est réduit à la résolution des équations ; c'est donc l'enseignement des algorithmes de résolution des équations qui sont ici au centre de l'apprentissage et non le sens donné à ces équations. Les équations trigonométriques sont résolues sans établir un lien avec les fonctions trigonométriques, par exemple.

Allant dans la même logique, il est ajouté en *5ème des humanités* les équations logarithmiques et exponentielles. La particularité de la *6ème des humanités* est tout simplement de changer d'ensemble de travail. Jusque là tout était fait dans l'ensemble des nombres réels, R ; il va être question maintenant de travailler dans l'ensemble des nombres complexes, C. C'est dans cet ensemble C qu'ils vont revisiter les équations travaillées dans R.

A ce niveau de travail, les questions qui portent sur les variables des situations sont à examiner dans ce que nous avons appelé domaine de travail. Comme domaines : les situations proches du milieu socioculturel, les nombres naturels, les nombres décimaux, les nombres rationnels, les nombres réels et les nombres complexes.

III. COMMENTAIRES DE TYPE DIDACTIQUE DE CE QUI EST OBSERVE

Les constats faits dans les séances observées montrent que toute la progression de l'apprentissage est centrée sur *« l'expression »* et la *« résolution »* d'une équation. On montre d'abord comment l'équation se présente avant de proposer les différentes tâches à exécuter.

Donc l'expression d'une équation est à la charge de l'enseignant et la résolution à la charge de l'apprenant ; la priorité de l'apprentissage est sur la maîtrise de l'algorithme de résolution.

Les apprenants arrivent à *résoudre* les équations proposées mais ils ont du mal à *exprimer* (ou à *traduire*) un problème formulé littéralement (ou à formuler) sous forme d'une équation.

Il y a donc un aspect de cette notion d'équation qui n'est pas pris en considération dans cet apprentissage. Il nous semble être celui du *sens de l'énoncé mathématique* d'un problème formulé littéralement ou à formuler.

La notion d'équation peut donc être définie à partir :

De son « expression », par exemple $5x + 10 = 110$, en se référant à sa composante principale, qui est le signe d'égalité, pour la définir.

De la « notion mathématique » d'équation qui suppose un langage, en particulier le langage algébrique.

En parlant de la définition à partir de la notion mathématique de l'équation, nous pouvons dire qu'elle est :

D'abord une *« traduction »* de l'énoncé littéral (formulé ou à formuler) ;

Ensuite un *« moyen de résolution »* des problèmes pour lesquels les méthodes arithmétiques de résolution sont inefficaces ;

Aussi une *« formule à appliquer »,* qui est une traduction standard d'un phénomène (problème, activité, …). Exemple de la vitesse en physique : $V = D/T$

Une *« fonction »* à définir et/ou à étudier.

On étudie ou on observe un comportement, une évolution, une variation des effets de la chaleur, de la dilatation d'un corps, de la résistance des matériaux, …

Il y a donc une progression à prendre en compte lorsqu'on veut travailler l'équation comme un objet, une notion mathématique.

Nous sommes donc en face de deux problèmes :

Problème de *« désignation »* du concept, par une composante de son expression, signe d'égalité, qui influe fortement sur son apprentissage ;

Problème de *« définition » uniquement* à partir de son expression.

IV. CONCLUSION DU TRAVAIL DE L'ETAT DES LIEUX ET PERSPECTIVES D'AVENIR

a. Le constat est que la désignation de l'objet mathématique par l'équation influe fortement sur l'apprentissage de la notion mathématique d'équation. Tout tourne autour de l'égalité.

b. En remontant un peu l'histoire mathématique de l'équation, nous sommes plutôt dans le domaine du langage mathématique (langage algébrique) solution de certains problèmes qui ont du mal à trouver une solution par des méthodes arithmétiques. C'est bien ce langage algébrique que l'enseignant doit privilégier dans cet apprentissage.

c. Sachant que le langage mathématique marque le passage de l'arithmétique à l'algèbre, l'enseignant doit proposer des situations (problèmes) pertinentes qui justifient le recourt au langage algébrique, traduction mathématique de ces problèmes, pour arriver à la solution.

d. La progression des séances qui doivent conduire à l'apprentissage de cette notion d'équation comprendrait plusieurs étapes :

d1. Tout commencerait par les séances de « traduction » de problèmes en équations et d'équations en problèmes. Ce va-et-vient conduirait à la définition de l'équation comme énoncé mathématique de problème.

d2. La définition sera étendue aux formules de physique et chimie, et aux fonctions (trigonométriques, logarithmiques, etc). C'est à ce niveau que devrait se poser la question des éléments nécessaires pour écrire une équation.

d3. La résolution de ces équations serait l'aboutissement de ce travail qui précède.

REFERENCES

Mopondi Bendeko Mbumbu A. (2010) *Approches socioculturelles de l'enseignement en Afrique subsaharienne*. Editions l'Harmattan.

Theis L. (2005) *Les tribulations de signe = dans la moulinette de la bonne réponse*. EBD : Québec.

MANUELS SCOLAIRES

Badetty L., Alii (2011) *Maitriser les math-4*. Editions Loyola : Kinshasa.
Kayembe J.B., Alii (2003) *Maitriser les maths-3*. Editions Loyola : Kinshasa.
Kayembe J.B., Alii (1996) *Maitriser les maths-2*. Editions Loyola : Kinshasa.
Kayembe J.B., Alii (1996) *Maitriser les maths-1*. Editions Loyola : Kinshasa.
Kibazola L., Alii (2002) *Pratiques des mathématiques à l'école primaire 3.*
New Scolot : Kinshasa.
Kweti wa Kweti J., Alii (2005) Pratiques des mathématiques à l'école primaire 4,
New Scolot: Kinshasa.
Loshima B., Alii (2005) *Maitriser les Maths 5.2*. Edition Loyola: Kinshasa.
Loshima B., Alii (2002) *Maitriser les math-5*. Editions Loyola: Kinshasa.
Makiadi N. (1999) *Algèbre 5 tome 1*. Editions CRP: Kinshasa.
Mbuyamba Kayola S. (2008) *Apprenons les mathématiques : 1ére année*.
Editions CRP : Kinshasa.
Mbuyamba Kayola S. (2008) *Apprenons les mathématiques : 1ére année*.
Editions CRP : Kinshasa.
Mpakasa Kibulu D., Alii (2010) *Maitriser les math-6*. Editions Loyola : Kinshasa.
Mugono N.M., Mayamba L. (2004) *Pratiques des mathématiques à l'école primaire 5.*
New Scolot : Kinshasa.
Mukoko N. (2009) *Mathématique 1er secondaire*. Editions CRP : Kinshasa.

DOCUMENTS ADMINISTRATIFS

Programme de l'enseignement maternel niveau 1, 2, 3 ; janvier 2008

PROGRAMME NATIONAL DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE DE MATHÉMATIQUE, 2005.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ANALYSE DE DISPOSITIFS ET DE STRATEGIES DE FORMATION INITIALE ET CONTINUE DES ENSEIGNANTS

Compte-rendu du groupe de travail n°2

Claire WINDER* – Mouloud ABDELLI** – Lily BACON*** – Caroline LAJOIE****

I. INTRODUCTION

Ce nouveau rendez-vous du GT2 s'inscrivait dans la continuité des travaux portant sur la thématique des formations développée lors des éditions précédentes d'EMF (Tozeur, 2003 – Sherbrooke, 2006 – Dakar, 2009 – Genève, 2012). Le groupe de travail s'est ainsi engagé à poursuivre la réflexion sur les dispositifs et stratégies de formation initiale et continue mis sur pied dans les pays participants ainsi que sur les cadres théoriques et empiriques auxquels se référer pour les concevoir et sur lesquels s'appuyer pour les analyser. Un bref regard sur les bilans de ces différentes éditions permet de voir les développements discutés jusqu'à présent et de situer les nouvelles contributions.

Ainsi, lors du colloque EMF2006 à Sherbrooke, le groupe de travail n°2 s'était intéressé aux défis de la formation initiale à l'enseignement. Les questions portaient à la fois sur les dispositifs mis en place pour former les futurs maîtres et sur la diversité des acteurs qui les gèrent, et elles avaient conduit à situer la place de la formation didactique à offrir aux futurs maîtres. Les discussions avaient également amené à préciser l'importance des cadres théoriques développés pour interpréter les phénomènes observés dans la classe et pour concevoir des dispositifs de formation. Afin de mieux cerner les besoins des enseignants et de leurs formateurs, il apparaissait important de documenter les caractéristiques du métier d'enseignant ainsi que les contextes dans lesquels ce métier s'exerce.

Le colloque EMF2009 à Dakar avait vu la fusion des groupes de travail n°2 et n°9, qui avaient respectivement pour thèmes l'analyse de dispositifs de formation initiale et continue, et le lien entre les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves. De cette combinaison avait résulté une réflexion portant sur la manière dont ces deux thèmes pouvaient s'éclairer et se compléter. Il s'agissait notamment d'interroger l'impact de résultats

* COPIRELEM, ESPE de Nice – France – claire.winder@unice.fr
** Université de Constantine 1 – Algérie – mldabdelli@umc.edu.dz
*** Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue – Canada – Lily.Bacon@uqat.ca
**** Université du Québec à Montréal – Canada – lajoie.caroline@uqam.ca

Winder C., Abdelli M., Bacon L., Lajoie C. (2105) Analyse de dispositifs et de stratégies de formation initiale et continue des enseignants – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°2.* In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*– Actes du colloque EMF2015 – GT2, pp. 139-143.

concernant les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves sur l'élaboration de dispositifs de formation.

Lors du colloque EMF2012 à Genève, le groupe de travail n°2 cherchait à explorer les cadres théoriques et empiriques auxquels se référer pour concevoir des dispositifs de formation et les analyser. Il s'agissait de rechercher des régularités et des constantes dans la formation des enseignants de mathématiques. Au-delà de la grande diversité des travaux présentés, des préoccupations communes ont été dégagées dont notamment : la nécessité, pour élaborer une formation, d'une meilleure connaissance des besoins des étudiants-enseignants ; une réflexion de fond portant sur la nature de la formation initiale ou continue (les dispositifs de formation, les stratégies de formation, les « grands principes » qui inspirent les formateurs, les choix de formation, les contraintes institutionnelles qui orientent la formation) ; une analyse de ce qui reste de la formation au moment de l'entrée dans le métier et au-delà. Enfin, l'importance de différents types d'articulation a été soulignée : entre autres, les articulations entre formation et profession (notamment au moment de l'entrée dans le métier) ; les articulations à l'intérieur des formations dans le cas des professeurs des écoles ; les articulations entre les problèmes qui remontent du métier et ceux mis en évidence par les didacticiens ; les articulations entre les savoirs détenus par les différents acteurs (étudiants, professeurs des écoles/professeurs du secondaire, formateurs, professeurs des universités).

Fort de cet héritage, le groupe de travail n°2 de l'EMF2015 à Alger a poursuivi la réflexion en abordant de manière critique diverses questions relatives à la conception, la mise en place et l'analyse de dispositifs et de stratégies de formation initiale et continue des enseignants de mathématiques. Les travaux du groupe se sont ainsi articulés autour de trois grands types de questions présentés lors de l'appel à contribution :

1. Les paradigmes de l'enseignant de mathématiques comme idéal visé par la formation.
2. Les dispositifs de formation.
3. Recherches en didactique des mathématiques et formation des professeurs.

II. L'ESSENTIEL DES CONTRIBUTIONS

Une douzaine de personnes provenant de pays différents sur trois continents (Algérie, Cameroun, France, Québec) ont pris part aux sessions du groupe de travail n°2, apportant leurs points de vue dans les débats très riches qui ont suivi les quatre contributions.

Les intervenants se sont intéressés aux enseignants de mathématiques du secondaire ainsi qu'aux professeurs des écoles. Nous reprenons ici les contributions dans leur ordre de présentation pour en faire ressortir les points marquants.

Les deux premières interventions ont porté sur la présentation et l'analyse de dispositifs de formation initiale des professeurs des écoles en France.

Horoks, Grugeon-Allys et Pézard-Charles ont présenté un dispositif de formation initiale des professeurs des écoles en France dans le cadre d'un module d'initiation à la recherche. Elles ont mis en évidence en quoi des outils issus de la recherche en didactique des mathématiques ont permis l'élaboration de ce dispositif ainsi que l'analyse de ses effets potentiels sur le développement professionnel des enseignants.

La conception d'une évaluation diagnostique en mathématiques a été présentée par Pilet et Grugeon-Allys. Cette évaluation s'adresse à des étudiants futurs professeurs des écoles. Elle est fondée sur une analyse épistémologique, didactique et cognitive sur chaque domaine des mathématiques, permettant de définir un référentiel de connaissances et de compétences. À partir de la présentation des résultats obtenus par des cohortes d'étudiants au cours l'année précédente, les auteurs mettent en évidence la très grande hétérogénéité des connaissances mathématiques des étudiants à l'entrée de leur formation initiale. Les auteurs ont également rendu compte du potentiel de l'évaluation diagnostique élaborée pour déterminer les besoins d'apprentissage des étudiants. Pilet et Grugeon-Allys ont par la suite discuté des possibilités d'exploitation de leur outil pour concevoir et organiser des stratégies de formation mieux articulées aux besoins réels des étudiants.

Dans leur intervention, Feugueng et Vandebrouck ont dressé un état des lieux de pratiques d'enseignants du secondaire du Cameroun utilisant les TICE en vue d'identifier des besoins de formation continue. Cette intervention a mis en évidence certaines contraintes écologiques venant en concurrence avec les demandes de l'Institution.

La dernière intervention présentait un cadre d'analyse à destination des formateurs de professeurs des écoles visant à mettre en évidence les potentialités de situations de formation initiale et continue (Guille-Biel Winder, Petitfour, Masselot et Girmens). Tel qu'il est conçu, ce cadre peut aider à conduire une analyse des ressources conçues pour le formateur dans le but d'en favoriser l'appropriation par le formateur et de l'aider à les adapter aux contraintes de formation.

Les différentes contributions ont ainsi abordé un ou plusieurs des types de questions identifiés *a priori*.

III. BILAN

Lors du bilan, les échanges entre les participants ont tout d'abord porté sur les dispositifs de formation initiale ou continue. Ils ont fait ressortir trois préoccupations principales. La première porte sur l'élaboration d'un cadre pour analyser les dispositifs de formation. La seconde concerne la nécessité d'élaborer un cadre pour analyser l'impact des formations sur les formés. La troisième concerne ce qui peut amener à l'élaboration d'un dispositif : les contraintes institutionnelles ou organisationnelles (ministère de tutelle, cadre universitaire ou pas, durée de la formation, formation diplômante ou non, contenu d'un « référentiel de compétences », …), mais également celles liées au profil du public concerné.

Par ailleurs, les participants ont échangé sur les hypothèses formulées concernant les besoins de formation de formés issus de divers parcours de formation et la place à accorder à un diagnostic des besoins des formés (sur les contenus mathématiques mais également sur le rapport au savoir à enseigner des formés et sur leurs conceptions sur l'apprentissage et l'enseignement). Les réflexions se sont portées sur les relations avec les parties prenantes de la formation (institutions, acteurs).

La place de la recherche en didactique des mathématiques a également été questionnée. Deux niveaux d'intervention de la recherche en didactique des mathématiques peuvent être identifiés :

- la recherche comme outil permettant d'élaborer des formations d'enseignants (initiales ou continues) ou de formateurs d'enseignants, d'analyser ou d'évaluer une formation (impacts sur les formés, pertinence)
- la recherche comme objet d'apprentissage.

La mise en perspective des interventions met en évidence le besoin méthodologique, en termes de cadre théorique, de définir des références permettant de positionner les dispositifs par rapport à différentes entrées :

- stratégies de formation ;
- positions du formés ;
- contenus mathématiques, didactiques, pédagogiques, technologiques (TICE).

IV. CONCLUSION

Les colloques EMF visent à permettre les échanges d'idées, d'informations, d'expériences, de recherche autour des questions vives de l'enseignement des mathématiques, à renforcer la coopération entre les chercheurs, formateurs, enseignants, vivant dans des contextes sociaux et culturels différents, et à contribuer au développement, dans la communauté francophone, de la recherche en didactique des mathématiques et de ses retombées, notamment sur la formation initiale et continue.

Le groupe de travail n°2 du colloque EMF2015 a rempli ce rôle. En effet, une collaboration avec les corps de l'inspection algérien (primaire, secondaire) a été envisagée à l'issue du GT2 avec différents participants de ce groupe de travail. Par ailleurs, ses participants ont souligné la nécessité de continuer à travailler jusqu'au prochain EMF2018. À cet égard, plusieurs pistes de travail ont été relevées.

Une première piste concerne la poursuite de la réflexion sur l'intégration des TICE dans les pratiques enseignantes (et notamment au Cameroun).

De plus, l'idée d'auto-positionnement du formé (en particulier par le biais d'une évaluation diagnostique), nécessite un approfondissement, notamment en s'intéressant aux rapports au savoir des formés et à leurs conceptions de l'apprentissage et de l'enseignement, en réfléchissant sur la manière de provoquer cet auto-positionnement à différents moments de la formation et en explicitant les apports potentiels et les effets engendrés, pour le formé et pour le formateur.

Enfin, une troisième piste porte sur la mise à l'épreuve du cadre d'analyse de situations de formation exposé dans le groupe de travail (Guille-Biel Winder, Petitfour, Masselot & Girmens). La réflexion peut porter sur la conception de dispositifs de formation prenant en compte les caractéristiques de formation mises en évidence dans le groupe de travail. Il s'agit également de mettre en place un travail de coopération pour analyser des dispositifs de formation existants (jeux de rôles, formation par la recherche, dispositifs de formation à distance, …).

En ce qui concerne les évolutions du groupe de travail n°2, les participants souhaiteraient pour EMF2018 que :

- le public du GT2 soit élargi à tous les acteurs de la formation ;
- la formation des formateurs soit étudiée et mieux mise en évidence ;
- les réflexions soient portées sur des ressources de formation à destination des formateurs ;
- des bilans d'initiatives de collaborations (notamment pour la formation de formateurs) soient établis.

Par ailleurs, une nouvelle piste à explorer est proposée pour EMF2018 : envisager une plage commune avec un (ou deux) autre(s) groupe(s) de travail (par exemple le GT1 ou GT6) au cours de laquelle deux contributions, issues chacune de chaque groupe de travail mais ayant une connexion l'une avec l'autre, seraient présentées et discutées.

Quand c'est difficile, c'est alors qu'on doit essayer !
Proverbe camerounais

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

INTÉGRATION DES TIC DANS LES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES AU CAMEROUN

Désiré Magloire FEUGUENG[*] – Lawrence DIFFO LAMBO[**] – Fabrice VANDEBROUCK[***]

Résumé – Dans cet article nous nous intéressons à la problématique de l'intégration des TICE dans les pratiques professionnelles des enseignants de mathématiques du Cameroun. L'état Camerounais a traduit son adhésion à la mouvance TIC en éducation, en créant des Centres de Ressources Multimédia (CRM) dans 71 Lycées du Cameroun et en incitant les enseignants à y aller avec leurs élèves. Dix ans ont passé, mais les CRM ne sont pas utilisés par les enseignants de mathématiques. Quelle en est la cause ? Et comment pourrait-on y remédier ? A partir d'une analyse de documents officiels, de questionnaires et d'entretiens, nous essayons de dégager ce qui freine l'appropriation des TICE chez les enseignants, et quelques pistes pour remédier à cette situation.

Mots-clefs : intégration pédagogique des TICE, enseignement des mathématiques, Cameroun

Abstract – In this article we focus on the issue of integration of ICT in professional practices of Cameroon mathematics teachers. The Cameroonian state reflects its adherence to the movement in ICT education, creating Multimedia Resource Centres (MRC) in 71 High Schools of Cameroon and encouraging teachers to go with their students. Ten years have passed, but CRM is not used by mathematics teachers. What is the cause? And how could they be addressed? From an analysis of official documents, questionnaires and interviews, we try to identify which slows the appropriation of ICT among teachers, and some ways to remedy this situation.

Keywords: pedagogical integration of ICT, mathematics education, Cameroon.

I. INTRODUCTION

Les TIC ont envahi la société dans presque tous les pays, et ce dans presque tous les secteurs (Cuban 1997). On a assisté à l'émergence de nouveaux métiers directement liés aux TIC (Valenduc & Lemaire 2003) et à la transformation des métiers déjà existants par l'intégration des TIC (Aubert & al. 2010). L'éducation, et plus spécifiquement l'enseignement des mathématiques, n'est pas resté inchangée, ainsi que le confirme Artigue (2013) :

> Depuis de nombreuses années, les systèmes éducatifs essaient de mettre les potentialités qu'offrent les technologies informatiques au service de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. (Op. cité, p.1)

[*] LDAR - Université Paris Diderot – France ; Université de Yaoundé I – Cameroun – feugueng.uticef@yahoo.fr
[**] Ecole Normale Supérieure - Université de Yaoundé I – Cameroun – yldiffo@yahoo.fr
[***] LDAR - Université Paris Diderot – France – vandebro@univ-paris-diderot.fr

Feugueng D., Diffo Lambo L., Vandebrouck F. (2015) Intégration des TIC dans les pratiques des enseignants de mathématiques au Cameroun. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT2, pp. 144-158.

Quant au système éducatif camerounais, il a marqué son arrimage à la mouvance TIC depuis une dizaine d'années lorsque, sous l'impulsion du Chef de l'Etat, les établissements scolaires et universitaires ont progressivement commencé à être dotés de matériels TIC (ordinateurs, imprimantes, salles de machines avec accès à internet, vidéoprojecteurs…). Toutefois, la recherche locale sur l'utilisation des TICE par les enseignants signale que :

> Le Cameroun, malgré des efforts certains, est loin d'avoir intégré, dans son effectivité concrète, l'innovation technologique à visée pédagogique. (Onguene Essono & Onguene Essono 2006, p.61)

Aussi avons-nous essayé de répondre à la question de savoir ce qu'il en est pour les enseignants de mathématiques, c'est-à-dire s'ils utilisent les TIC dans leurs pratiques professionnelles en classe ou en dehors de la classe.

Dans une première partie, nous dressons un état des lieux de l'utilisation des TICE parmi les enseignants de mathématiques. Dans une deuxième partie, nous analysons des actions mises en œuvre par l'état et tentons d'en déterminer les faiblesses. Pour terminer, nous explorons des pistes à poursuivre pour « booster » l'intégration des TICE chez nos enseignants de mathématiques.

II. ETAT DES LIEUX DE L'INTEGRATION DES TICE CHEZ LES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES CAMEROUNAIS

1. Des actions gouvernementales en vue d'introduire des TIC dans le système éducatif

a) Dans les établissements scolaires : Les Centres de Ressources Multimédia (CRM)

L'état du Cameroun a traduit son adhésion à la mouvance TIC en éducation en créant des Centres de Ressources Multimédia (CRM) dans les établissements d'enseignement secondaire. Une CRM est une salle nettement distinctive équipée de quarante ordinateurs (en moyenne) connectés à internet et interconnectés entre eux, et de tout le matériel nécessaire pour les présentations assistées par ordinateur (vidéoprojecteurs, scanneurs, caméscope). Les deux premiers CRM ont été installés en 2001, une au Lycée général Leclerc et l'autre au Lycée bilingue d'Essos. A ce jour, il existe soixante-onze CRM répartis dans les dix régions du Cameroun, soit en moyenne 7 CRM par région.

Les enseignants sont encouragés à exploiter les CRM avec leurs élèves. Des moniteurs sont disponibles dans les CRM, avec la mission d'aider les enseignants à s'approprier les ressources du CRM à des fins pédagogiques. Aucune mesure coercitive n'existe cependant.

Deux modalités d'utilisation des CRM sont préconisées. D'une part, l'enseignant peut amener sa classe (ou une partie) au CRM : alors, les moniteurs et les enseignants font un travail préparatoire consistant à sélectionner des ressources pertinentes qu'ils exploiteront. D'autre part, les élèves peuvent se rendre au CRM sans l'enseignant : chaque CRM dispose d'un ou plusieurs serveurs, sur lesquels sont installés la plateforme libre et gratuite Claroline. Sur cette plateforme fonctionnant en intranet (tous les ordinateurs du CRM sont interconnectés entre eux et ont accès à cette plateforme), les moniteurs, suivant des consignes données par chaque enseignant, sélectionnent sur internet les ressources jugées pertinentes et susceptibles d'enrichir les cours faits en salle de classe. Les élèves trouvent au CRM, et aussi dans la bibliothèque virtuelle nationale (BVN) que nous présentons plus bas, des ressources bien triées de manière à compléter les enseignements qu'ils ont reçus.

b) La Bibliothèque Virtuelle Nationale (BVN)

Une plateforme, la Bibliothèque Virtuelle Nationale[70], a été créée en 2011 à l'échelle du MINESEC. Elle a pour objectif de faciliter le partage de documents administratifs et pédagogiques. Elle contient des ressources numériques de qualité à la disposition gratuite des enseignants, élèves, inspecteurs et élèves-professeurs. Les ressources disponibles dans la BVN sont dûment sélectionnées par un comité national de validation des ressources constitué d'inspecteurs pédagogiques nationaux. Toutefois, seuls peuvent y accéder les personnels qui y ont été inscrits.

c) La promotion de l'usage des TICE par les enseignants de mathématiques

L'Etat a organisé en 2014 (en partenariat avec la société de téléphonie MTN), un concours visant à récompenser l'enseignant de mathématiques qui utilise le mieux les TIC dans le cadre de ses pratiques de classe. La remise du prix a fait l'objet d'une large publicité (affiches, scoops dans des chaînes de télévision).

Cent quarante-quatre (144) candidats se sont présentés au concours de la première année et un candidat a été sacré meilleur enseignant utilisateur et intégrateur des TIC dans l'enseignement secondaire dans chacune des 10 régions du Cameroun. Il s'est trouvé que le champion national était un enseignant de mathématiques ayant la particularité d'avoir suivi un Master en Ingénierie des technologies éducatives : le Master ACREDITE[71].

d) Sur le plan de la formation continue

Le MINESEC a organisé un séminaire pour exhorter les inspecteurs à intégrer le volet TICE dans leurs missions, notamment les ressources numériques validées au niveau de la BVN. Ce séminaire n'a pas été suivi de la modification officielle des missions des inspecteurs définies dans l'organigramme, de sorte que rien n'a changé. A titre informatif, notons que les inspecteurs ayant été nommés après ce séminaire n'en ont pas même été informés. Un séminaire de formation des Inspecteurs Pédagogiques Nationaux à la prise en main du Portail Numérique du MINESEC s'est aussi tenu du 09 au 13 juillet 2012.

e) Sur le plan de la formation initiale des enseignants de mathématiques : le projet PRENUM-AC

Les écoles de formation à l'enseignement (ENS), relèvent du Ministère de l'Enseignement Supérieur (MINESUP) et non du MINESEC. Il s'ensuit que les curricula de formation des enseignants n'ont pas été affectés par les efforts susmentionnés menés au MINESEC. Cependant, de 2012 à 2015, le département des mathématiques de l'ENS de Yaoundé a participé à un projet portant sur la création des ressources numériques de mathématiques : PReNuM-AC (Production de Ressources Numériques pour l'Enseignement des Mathématiques en Afrique Centrale (http://www.prenum-ac.org)).

Ce projet financé par le fond francophone des inforoutes, a réuni des participants issus du Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) de l'Université Paris Diderot (France), de l'ENS de Yaoundé (Cameroun) et de l'ENS de Brazzaville (Congo). Les élèves-professeurs

[70] La plateforme est disponible à l'adresse : http://www.camensec.cm

[71] Analyse, Conception et REcherche dans le Domaine de l'Ingénierie des Technologies en Éducation (https:// www.canal-u.tv/video/formasup/master_acredite_analyse_conception_et_recherche_dans_le_domaine_de_l_ingenierie_des_technologies_en_education.14570)

des deux écoles normales se prêtant à un apprentissage par « learn by doing » ont produit par eux-mêmes des ressources TICE pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans les classes de terminales scientifiques du Cameroun et du Congo. Ils ont travaillé sous l'encadrement collaboratif des inspecteurs nationaux des inspecteurs pédagogiques nationaux, des experts du LDAR et des formateurs d'enseignants des deux universités.

Certaines autorités ont vu en ce projet une initiative allant « au cœur du problème de formation professionnelle à l'ENS ».

2. *De l'intégration effective des TICE grâce aux actions présentées ci-dessus*

Pour recueillir des traces d'utilisation des TICE par les enseignants de mathématiques, à défaut de ne pouvoir infiltrer la sphère personnelle des enseignants, nous nous sommes basés sur les CRM, seuls espaces de montage et de réalisation de projets intégrant les TIC pour enseignement.

A cet effet, nous avons exploité les rapports d'activité des CRM ainsi que le rapport général d'un séminaire organisé en vue d'inciter à l'usage des TICE en milieu scolaire. Nous avons retenu les informations pouvant nous renseigner sur l'utilisation effective des TICE, sur les problèmes posés par leur utilisation et sur ceux rencontrés au cours de cette utilisation. Par exemple, un rapport[72] note une inexistence de fonds alloués à la maintenance des équipements informatiques, le manque de matériel nécessaire au bon fonctionnement (papiers, encres, matériels d'entretiens et de maintenance …). Parmi les suggestions, ce document pointe le fait que les CRM pourraient être mis à contribution pour la sensibilisation, voire la formation des enseignants aux usages pédagogiques des TICE.

Nous avons interrogé les personnels des établissements scolaires chargés de l'encadrement technique et pédagogique des enseignants désireux d'utiliser les TICE (les censeurs et les surveillants généraux en charge de CRM) sur d'éventuelles utilisations des TIC par les professeurs en général et les professeurs de mathématiques en particulier. Nous avons exploité les rapports de quatre établissements scolaires de la ville de Yaoundé : le Lycée Bilingue d'Étoug-Ébé, le Lycée Bilingue de Nkol-Éton, le lycée d'Ékounou et le lycée de Nkolbisson. Enfin, nous avons eu des entretiens avec deux responsables de CRM qui ont répondu à la question de savoir ce qui empêche les usages des TIC parmi les enseignants.

Les résultats saillants sont que les enseignants en général et les enseignants de mathématiques en particulier n'utilisent pas les CRM à des fins pédagogiques. Quant à ces derniers, ils ne se rendent jamais au CRM avec leurs élèves. Les responsables de CRM nous ont en fait confié qu'en général les enseignants ne viennent au CRM que pour leurs besoins personnels. Ils ont expliqué que, pour justifier leur présence dans les établissements scolaires, ils ont conçu avec l'appui de leurs responsables d'établissements, des programmes de passage des enseignants dans le CRM avec les élèves ; mais ils déplorent le fait qu'aucun enseignant de mathématiques n'a jamais amené sa classe au CRM. Il ressort de leurs propos que beaucoup d'enseignants (y compris les enseignants de mathématiques) utilisent le CRM pour d'autres activités que les mathématiques, généralement extrascolaires (navigation sur internet, le jeu, divertissement, les communications …), et ils estiment que l'ordinateur n'est pas approprié pour l'enseignement des mathématiques. Au mieux, certains ayant le désir d'innover saisissent leurs épreuves avec une suite bureautique (Word, Latex pour certains). Ce constat du terrain au Cameroun rejoint une remarque de Cleary, Akkari et Corti :

> […] les écoles sont de mieux en mieux équipées au niveau des TIC mais cette technologie reste, la plupart du temps, très sous-utilisée. (Cleary, Akkari & Corti 2008)

[72] Le rapport N°001/MINESEC/DREC-CE/DDESEC-MF/LBE/CRM du 18 septembre 2014

Au vu de ce constat d'échec des efforts visant l'intégration des TIC chez les enseignants de mathématiques au Cameroun, nous nous proposons d'analyser les actions menées afin d'en déterminer les faiblesses et rechercher des stratégies de remédiation.

III. ANALYSES DES DISPOSITIFS EN VUE DE COMPRENDRE LE MANQUE D'ENGOUEMENT DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES POUR LES TICE

Nous commençons par préciser ce que nous entendons par « intégration des TICE chez le professeur de mathématiques » au regard de la recherche en didactique des mathématiques dans laquelle nous inscrivons notre démarche. Nous proposons ensuite un cadre logique pour l'intégration pédagogique des TICE, cadre à la lumière duquel nous procédons à l'analyse des politiques utilisées en vue de parvenir à des suggestions de pistes de remédiation.

1. *Intégrer les TICE pour un enseignant de mathématiques, c'est quoi ?*

Selon Gueudet et Vandebrouck (2011), l'indice qu'un enseignant intègre les TICE se voit dans le fait qu'il les utilise soit dans la préparation de ses cours hors de la salle de classe, soit pendant le cours lorsqu'il orchestre des activités impliquant les TICE avec ses élèves.

Cette technique de perception nous semble être un cadre approprié d'évaluation applicable à un enseignant de mathématiques. Le lecteur intéressé par les détails explicatifs se rapportera à leur travail. Il en saura plus sur l'Approche Documentaire du Didactique et la progression d'un enseignant du stade où il utilise des ressources TICE come simple artefacts à celui où il les associe à des tâches véritablement professionnelles.

2. *Quel cadre pour analyser l'existant et suggérer des pistes de remédiation ?*

L'UNESCO (2010) a également proposé un cadre présentant des actions dont la mise en œuvre conditionne une réelle intégration des TICE. Au regard du contexte camerounais, il nous semble que la mise en œuvre de trois de ces actions conditionne fortement l'intégration des TICE dans l'enseignement. Il s'agit de tout ce qui relève :

- de la *préparation du professeur*, qui inclut les formations initiale et continue, ainsi que la mise à contribution de la recherche pour améliorer la qualité de ses pratiques.

> Certains enseignants ne peuvent concevoir d'enseigner en utilisant l'outil informatique sans en avoir une maîtrise complète. (Chaachoua 2000, p. 3)

- de *l'environnement technologique de l'enseignant*, qui renseigne sur son équipement en outils TICE, les pratiques courantes dans son environnement, le coût du matériel TICE. L'idée ici est que, l'appropriation d'un artefact suppose la familiarisation avec ce denier ;
- des *politiques publiques* qui doivent encadrer la mise en œuvre des TICE, qui nous apparaissent comme étant les facteurs-clé du succès de l'intégration des TICE, en ce sens que les programmes de formation, la définition des missions de chacun des sujets de l'institution, incombe au politique.

Nous schématisons notre modèle ou cadre d'analyse comme ci-après.

Ainsi, pour savoir pourquoi les TICE n'ont pas été intégrées dans les pratiques des enseignants de mathématiques du Cameroun, nous analysons le contexte camerounais sous le prisme de ces trois composantes. Relativement à l'environnement technologique, nous examinons, comme spécifié plus haut, celui disponible dans les CRM d'établissements scolaires mais aussi l'équipement personnel des enseignants. En relation avec la préparation du professeur, nous analysons ce qui concerne sa formation initiale et sa formation continue. Pour terminer, nous mettons en relief la part de responsabilité qui revient aux politiques publiques dans les difficultés de l'intégration des TICE parmi les enseignants camerounais.

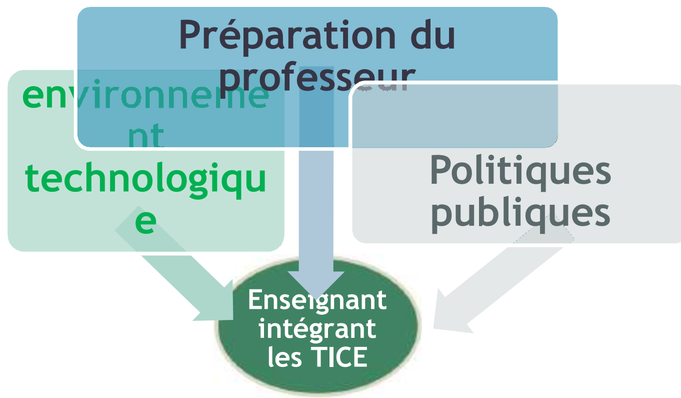


***Figure 1** – Les facteurs de l'intégration des TICE*

3. Difficultés relatives à l'environnement technologique

a) Difficultés relatives à l'environnement technologique de l'enseignant confiné aux équipements des CRM

Rappelons que l'utilisation des TIC est préconisée dans le cadre des CRM, donc en dehors de la salle de classe ordinaire, ce qui pose le problème d'engorgement à l'accès de l'unique salle du CRM du lycée.

En effet, le premier obstacle est celui des effectifs de la classe, généralement élevés (en moyenne 100 élèves par classes), tandis que le CRM ne possède que 40 ordinateurs d'ailleurs destinés à l'ensemble du lycée. Il s'ensuit l'impossibilité d'accueillir la classe entière au CRM. L'enseignant doit donc imaginer des scénarii d'utilisation incluant le partage de la classe en groupes devant s'y rendre à tour de rôle. Ceci ne facilite pas les orchestrations, puisqu'en outre les emplois de temps sont contraignants. Enfin, quand deux enseignants (« mordus » des TIC) souhaitent utiliser le CRM au même moment, il leur faut décider qui des deux occupe la salle du CRM.

b) L'équipement technologique personnel de l'enseignant

Nonobstant la baisse significative des prix du matériel informatique observée depuis quelques années (due à la défiscalisation du matériel informatique), l'acquisition du matériel informatique demeure hors de la portée du professeur lambda. A titre de comparaison, un enseignant de collège au Cameroun ayant exercé pendant 13 années gagne mensuellement 280 000 FCFA, soit un peu moins de 430 €, tandis qu'un ordinateur neuf de moyenne qualité coûte environs 300 000 FCFA soit environs 460 €. Donc, l'acquisition d'un ordinateur constitue un défi pour l'enseignant de mathématiques. Vekout (2015) montre cependant que :

> Les enseignants doivent donc toujours être à jour sur les innovations des TIC pour pouvoir de mieux en mieux s'en servir dans leur environnement au profit de l'éducation. (Vekout 2015)

Il y a donc lieu de penser que le fait pour un enseignant de ne pas posséder d'ordinateur personnel pourrait également constituer pour lui un frein à l'intégration de cet artefact dans ses pratiques pédagogiques.

4. Difficultés relevant de la préparation de l'enseignant

Du point de vue de Arsenault Carter (2012), « le manque de formation et de motivation sont les grands obstacles quant à l'intégration des TIC »[73]. Clary, Akkary et Corti (2006) écrivent « l'utilisation des TIC en classe est efficace si la formation de l'enseignant est bonne dans ce domaine ». Ils constatent en outre que si les jeunes enseignants utilisent facilement les technologies pour le loisir, ils ne développent généralement que très peu ou pas du tout d'utilisations éducatives pertinentes. Cette défaillance est due, selon les auteurs, à l'absence d'une formation appropriée sur l'usage des TICE.

Aussi, avons-nous recherché si la formation en TICE était en cause dans l'échec de l'intégration pédagogique des TICE chez les enseignants de mathématiques camerounais. A cet effet, nous avons examiné les curricula de formation à l'enseignement des mathématiques, les pratiques de formation auxquelles les élèves-professeurs de mathématiques sont exposées en formation initiale, ainsi que le système de formation continue des enseignants en exercice. Il nous a ensuite paru opportun de compléter ces informations en interrogeant des enseignants de mathématiques ayant eu une expérience avec les TIC.

a) Investigations menées au département de mathématiques de l'ENS de Yaoundé

Notre investigation au département de mathématiques de l'ENS de Yaoundé a été menée au moment précis où un curriculum de formation des élèves-professeurs était en cours d'élaboration. En fait, depuis la création de l'ENS en 1961, aucun programme officiel des enseignements n'était disponible. S'agissant des TICE, nous avons dû nous limiter à l'interrogation orale des formateurs d'enseignants. A cet effet, nous avons fait la rencontre de 8 enseignants sur les 11 que compte le département de mathématiques de l'ENS de Yaoundé, auxquels nous avons posé les questions suivantes :

Les élèves-professeurs de mathématiques sont-ils formés en TICE à l'ENS de Yaoundé ?

Vous servez-vous des TICE dans vos propres cours à ces étudiants ?

L'environnement de l'ENS s'accommode-t-il de l'usage des TICE ?

Utilisez-vous les TICE dans vos pratiques personnelles ?

Il en ressort qu'aucune formation spécifique à l'usage des TICE n'est donnée aux étudiants. D'ailleurs aucun enseignant du département ne donne à ses étudiants des travaux à effectuer avec les TICE. Quant à l'environnement de l'ENS, certaines mesures ont été prises pour amener les élèves-professeurs et leurs formateurs à profiter autant que possible de la plus-value des TICE, notamment la couverture du campus par une connexion à internet disponible en wifi. Les enseignants sont invités à produire des ressources relatives à leurs cours à mettre en ligne, mais la collecte de documents (pourtant accompagnée de compensations financières), reste extrêmement timide, même des seuls textes en format .pdf.

Dans le département de mathématiques, nous avons répertorié un vidéoprojecteur et son écran neufs mais non utilisés pour les cours aux étudiants. Il n'existe aucun appareil de production audiovisuelle. Tous les enseignants de mathématiques de l'ENS possèdent au

[73] Arsenault Carter A. (2012) Annick Arsenault Carter Enseignante d'une classe inversée – Lauréate du prix Enseignante de l'année 2014 de l'AEFNB. Consulté à l'adresse https://annickcarter1.wordpress.com/

moins un ordinateur chacun, dont un laptop que, pourtant, aucun d'eux n'utilise dans la salle de cours. D'ailleurs les salles de classe ne disposent d'aucun équipement en matériel didactique TICE. Les cours se font à la manière traditionnelle, avec notes de cours sur papier (notes écrites à la main en général et parfois saisies et issues de l'impression) et craie blanche. Certains enseignants nous ont confié qu'ils utilisent des logiciels spécifiques aux mathématiques (statistique et calcul formel) dans le cadre de leurs travaux personnels de recherche, mais jamais avec leurs étudiants.

A l'ENS de Yaoundé, les enseignants de mathématiques n'intègrent donc pas les TICE dans leurs pratiques de classe. A fortiori donc, les élèves-professeurs de Mathématiques ne reçoivent pas d'initiation à l'usage des TICE pour l'enseignement. Signalons toutefois qu'un projet de formation des enseignants de l'ENS à l'usage des TICE (CertNum-Sup) est en cours de lancement, et les cours devraient débuter au plus tard en décembre 2015.

b) Traces de formation continue aux TICE chez les enseignants en exercice

Selon les textes officiels[74], les inspecteurs pédagogiques régionaux et nationaux ont la charge de la formation continue des enseignants en exercice. Or ces derniers sont promus par nomination parmi les professeurs de lycées et n'ont pas suivi de formation sur l'usage des TICE eux-mêmes. Il s'ensuit que sur le plan institutionnel, les enseignants en exercice ne reçoivent aucune formation en TICE. La Cellule d'Appui à l'Action Pédagogique (CAAP) assure une formation en bureautique (Word, Excel, PowerPoint) à tout le personnel du MINESEC. Mais il n'existe pas, en formation continue, de formation spécifique et institutionnelle à l'usage des TICE par les enseignants.

Les actions ont été menées et décrites dans la première partie l'ont été dans le cadre de projets ponctuels et financés. Il s'en est suivi que ces initiatives ont fait bouger les choses pendant les projets en question, sans aucun impact sur le fonctionnement quotidien des intervenants de la chaine pédagogique.

c) Enquête auprès des enseignants ayant participé au projet PReNuM-AC

Nous avons interrogé via un questionnaire en ligne une trentaine de personnes, soit 11 élèves-professeurs de l'ENS de Yaoundé, 15 enseignants en exercice et 2 inspecteurs pédagogiques de mathématiques ayant tous participé au projet PReNuM-AC.

A la question de savoir ce qui, de leur point de vue, pouvait expliquer que les enseignants en service dans des établissements équipés d'un CRM ne les utilisent pas dans le cadre de leurs cours (question 6 du questionnaire en Annexe 1), ils ont quasi-unanimement pointé du doigt l'inexistence d'un enseignement portant sur les TICE en formation initiale et continue. Quant à eux-mêmes, qui avaient bénéficié d'une formation en TICE au sein du projet, ils ont tous indiqué qu'ils ont trouvé cette formation très utile pour leur carrière d'enseignant de mathématiques, en regardant comme un bénéfice énorme le fait d'en avoir tiré la capacité de confectionner eux-mêmes des documents numériques de mathématiques comportant des formules et bien illustrés par des figures extrêmement suggestives. On peut ici penser qu'à l'occasion de ce projet, leur regard sur l'utilisation des TICE à l'école a évolué, et surtout qu'ils sont motivés pour poursuivre en autoformation le développement de l'intégration des TICE dans leurs pratiques d'enseignement.

A la question de savoir ce qu'ils pensent pouvoir faire désormais avec les TICE, ils ont massivement répondu qu'ils concevront toutes leurs futures épreuves par ce moyen. Un

[74] Décret N°2012/267 du 11 juin 2012, portant organisation du Ministère des Enseignements Secondaires.

d'entre eux a même annoncé qu'il était déjà en train d'écrire un fascicule destiné aux élèves. Nous trouvons là des éléments de confirmation de ce qu'on dit Barton et Haydn :

> On ne peut pas s'attendre à ce que des stagiaires utilisent des TIC en classe en l'absence d'occasions de voir des exemples convaincants d'une telle utilisation dans des classes. (Cleary & al. 2006)

Et leur intention de désormais utiliser les TICE semble confirmer que le fait d'avoir été mieux informés sur ce que Depover, Karsenti et Komis on dénommé « le potentiel cognitif » (Depover, Karsenti & Komis 2007) des TICE pour l'enseignement, a beaucoup contribué à leur propre sensibilisation.

Nous concluons de ce qui précède qu'en réalité, le défaut constaté de formation (initiale et continue) aux usages des TICE en mathématiques constitue effectivement une entrave à l'intégration pédagogique des TICE chez les professeurs de mathématiques camerounais

5. *Difficultés relevant des politiques publiques*

L'engagement effectif de l'état à développer l'intégration des TICE dans l'enseignement au lycée, et les sacrifices consentis dans la création des CRM et dans leur équipement ont été mentionnés. Mais, quelles causes imputables aux politiques publiques ont-elles contribué à l'échec constaté ?

Nous avons noté ci-dessus qu'il a manqué en amont une formation appropriée des enseignants. Les curricula des formations premières à l'ENS ignorent l'usage des TICE. La formation continue des enseignants en exercice est confiée par l'état aux seuls inspecteurs pédagogiques, alors que ceux-ci n'ont pas eux-mêmes été formés à l'usage des TICE. En outre, nous avons noté l'inadéquation de l'environnement technologique mis en place dans les CRM.

Les chercheurs de l'Agenda Panafricain de recherche sur l'intégration pédagogique des TIC (PanAf), dans une étude portant sur l'orientation et l'accompagnement de l'intégration pédagogique des TIC dans les pays africains[75], mentionnent le « développement d'une politique nationale d'intégration pédagogique des TIC » parmi les huit recommandations qu'ils ont élaborées à l'intention des décideurs politiques. Nous pouvons donc en déduire de façon certaine que l'institution scolaire camerounaise n'a pas encore pris les mesures nécessaires à l'intégration pédagogique des TIC chez les enseignants.

IV. STRATEGIES SUGGÉREES EN VUE D'UNE INTEGRATION EFFECTIVE DES TICE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU CAMEROUN

Trois pistes majeures se dégagent pour favoriser la mise en œuvre des TICE par les enseignants de mathématiques camerounais. La première concerne l'amélioration de l'équipement en matériel TICE ; la seconde concerne la formation des enseignants, et la dernière relève des politiques publiques relatives aux TICE.

1. *Favoriser un équipement approprié dans les salles de classe*

En considérant le contexte camerounais, il apparaît que les CRM ne sont pas très adaptés pour l'utilisation des TICE à l'école. Il semblerait donc opportun d'envisager des solutions plus flexibles, notamment les équipements nomades.

---

[75] Orienter et accompagner l'intégration pédagogique des TIC dans les pays africains: 8 recommandations à l'intention des décideurs politiques, des formateurs d'enseignants et d'autres administrateurs de l'éducation. http://africaict.org/docs/administrateurs.pdf

A titre d'exemple la classe nomade - un meuble sur roulettes contenant de 6 à 32 ordinateurs portables selon les constructeurs, une ou deux bornes Wi-Fi, une imprimante et différents dispositifs de connexions - pourrait remplacer les CRM en offrant les avantages suivants: d'une part elle permet de faire entrer le CRM dans la salle de classe habituelle, évitant la dépense relative à la construction d'une salle spécialisée ; d'autre part l'établissement peut en acquérir plusieurs de telle sorte que chaque enseignant l'utilise pendant son heure de cours.

2. *Favoriser l'équipement personnel des enseignants de mathématiques en matériel et logiciels spécifiques aux mathématiques*

En regardant chaque matériel TIC comme un artefact, nous pouvons imaginer que tout enseignant en possédant pourrait développer divers modes d'utilisation, y compris professionnelles, parfois différents du mode d'emploi conventionnel (Charlier 2000). A cet effet, on pourrait penser qu'un enseignant initié (ou non) aux TICE et ayant un ordinateur personnel à sa disposition sera plus à même d'imaginer et de mettre en œuvre des stratégies d'usage innovantes et pertinentes en milieu scolaire, si tant est qu'il en a l'intention. C'est du moins ce que prescrit une recherche de l'UNESCO (Institut de statistique de l'Unesco 2010) selon laquelle il est essentiel d'aider les enseignants à acquérir l'équipement adéquat pour soutenir la mutation des usages pédagogiques.

3. *Mettre en œuvre la formation initiale et continue en TICE des enseignants*

La recherche a formellement établi la nécessité d'introduire la formation à l'utilisation des TIC en éducation dans les curricula de formation des enseignants[76].

Tant dans le référentiel français que dans le référentiel canadien, les compétences en TICE sont désormais requises pour les enseignants de ces deux pays, de sorte que les futurs enseignants y reçoivent, dès la formation initiale, une formation aux TICE faisant partie constitutive de leur formation de base. Il devient donc nécessaire d'introduire la formation à l'intégration pédagogique des enseignants dans les curricula de formation des enseignants au Cameroun.

De plus le fait d'être soumis à une expérience de formation avec les TICE semble contribuer à améliorer la perception des enseignants à l'égard des TICE. C'est du moins ce que nous avons constaté parmi les participants au projet PReNuM-AC. A la question de savoir s'ils trouvaient nécessaire d'introduire une formation aux TICE dans le curriculum de formation à l'enseignement des mathématiques, ils ont unanimement répondu par un « oui » ferme. En outre ils estiment que c'est durant la formation initiale que l'introduction de la formation aux TICE est la plus utile. On trouve ici une justification de l'idée défendue par Cleary, Akkari et Corti (2008) selon laquelle une expérience heureuse avec les TIC encourage les enseignants à vouloir d'avantage s'en servir.

4. *Rénover les politiques éducatives en y intégrant les TICE*

Dans la société d'aujourd'hui, les TIC devraient faire partie des outils de l'enseignant de mathématiques. S'intéressant à la notion d'outil pédagogiques, Long (2014) démontre que, au même titre que la craie ou le papier, l'ordinateur est un outil pédagogique par excellence, de par sa flexibilité :

[76] « TIC UNESCO: Un référentiel de compétences pour les enseignants » (2011)

> Une intégration véritable de l'ordinateur passe par un bouleversement des pratiques pédagogiques avec lesquelles […les enseignants] sont confortables (Long 2014, p. 5).

Or la définition des politiques éducatives et des missions des intervenants dans la chaîne éducative relève de l'Etat. Il importe donc que l'état associe des experts TICE à la redéfinition des politiques éducatives.

REFERENCES

Artigue M. (2013) L'impact curriculaire des technologies sur l'éducation mathématique. *EM TEIA Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana* 4(1). http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/article/view/159

Aubert B., Cohendet P., Da Silva L., Grandadam D., Guimaron J., Montreuil B. (2010) *L'innovation et les technologies de l'information et des communications.* http://cpp.hec.ca/cms/assets/documents/recherches_publiees/CE-2010-04_Innovation_et_TIC_oct2010.pdf

Chaachoua H. (2000) *Usage des TICE dans l'enseignement : Quelles compétences pour un enseignant des mathématiques?* https://edutice.archives-ouvertes.fr/edutice-00000591/

Charlier B. (2000) Comment un « nouvel outil qu'il faut bien utiliser » devient un instrument au service d'une activité. http://tecfa.unige.ch/tecfa/teaching/FFL/Textes/Textes_obligatoires/charlier_2000.pdf

Cleary C., Akkari A., Corti D. (2008) 4.3_Gomez_2-05 - 2008-7-Cleary.pdf. http://www.revuedeshep.ch/site-fpeq/Site_FPEQ/7_files/2008-7-Cleary.pdf

Cleary C., Akkari A., Corti D. (2006) L'intégration des TIC dans l'enseignement secondaire. http://www.revuedeshep.ch/site-fpeq/Site_FPEQ/7_files/2008-7-Cleary.pdf

Cleary C., Akkari A., Corti D. (2008) L'intégration des TIC dans l'enseignement secondaire. http://www.revuedeshep.ch/site-fpeq/Site_FPEQ/7_files/2008-7-Cleary.pdf

Cuban L. (1997) Rencontre entre la classe et l'ordinateur: la classe gagne. *Recherche et formation* 26, 11–29.

Depover C., Karsenti T., Komis V. (2007) *Enseigner avec les technologies.* Presses de l'Université du Québec.

Gueudet G., Vandebrouck F. (2011) Technologies et évolution des pratiques enseignantes : études de cas et éclairages théoriques. *Recherches en didactique des mathématiques* 31(3), 271□313.

Institut de statistique de l'Unesco (2010) *Guide de mesure pour l'intégration des technologies de l'information et de la communication (TIC) en éducation.* Montréal : Institut de statistique de l'UNESCO.

Long D. (2014) Les TIC et le perfectionnement des enseignants. http://web.umoncton.ca/umcm-longd04/TheorixDownload/Perfectionnement.pdf

Onguene Essono L. M., Onguene Essono C. (2006) TIC et Internet à l'école : Analyse des nouvelles pratiques enseignantes dans les salles de classes d'Afrique noire. In Fonkoua P. (dir.) *Intégration des TIC dans le processus enseignement-apprentissage au Cameroun.* Editions terroirs.

TIC UNESCO (2011) *Un référentiel de compétences pour les enseignants.* http://unesdoc.unesco.org/images/0021/002169/216910f.pdf

Valenduc G., Lemaire L. (2003) *Offre de formation dans les TIC en Wallonie et à Bruxelles.* http://gerard.moreau14.free.fr/Ressources/RapMETIC-form.pdf

Vekout E. (2013) *Quelques modèles d'intégration des TICE.* http://www.adjectif.net/spip/spip.php?article231

ANNEXES

V. ANNEXE 1 : QUESTIONS POSEES AUX PARTICIPANTS DU PROJET PRENUM-AC

1. Parmi les logiciels que vous avez découvert durant votre participation au projet PRENUM-AC, lesquels vous ont semblé intéressants pour un professeur de mathématiques dans le contexte du Cameroun ?
2. Selon vous, le projet PRENUM-AC a-t-il contribué à la mise en place ou au renforcement de certaines compétences professionnelles chez les enseignants de mathématiques qui y ont participé? Si oui, lesquelles ?
3. Avez-vous vous-même développé de nouvelles compétences grâce à votre participation au projet PRENUM-AC ?
4. Après avoir participé au projet PRENUM-AC, quel est d'après vous le meilleur moment pour introduire la formation en TIC du professeur de mathématiques?
    a. [Le moment de la formation initiale]
    b. l'auto-formation financée par les enseignants eux-mêmes]
    c. [la formation dans les établissements scolaires par les inspecteurs] ?
    d. [Autre]
5. Quels facteurs propres au Cameroun pourraient y favoriser la formation en TICE des enseignants de mathématiques ?
6. Les Centres de Ressources Multimédia (CRM) ont été introduits dans les établissements scolaires depuis plus de dix ans (plus précisément à partir de 2001) au Cameroun. Pourquoi ne sont-ils pas utilisés par les enseignants de mathématiques ?
7. Les CRM vous semblent-ils adaptés pour l'utilisation des TICE avec les élèves en cours de mathématiques ?
8. Quels logiciels vous semblent utilisables par un professeur de mathématiques affecté dans un établissement scolaire dépourvu de Centre de Ressources Multimédia ?
9. Quels logiciels vous semblent exploitables en classe avec un vidéoprojecteur et un laptop ?
10. Les établissements scolaires du Cameroun sont-ils prêts pour accueillir des enseignants de mathématiques utilisateurs des TIC ?
11. Quelles sont, selon vous, les conditions (matérielles, financières, au niveau institutionnel) qui devraient être réunies, pour qu'il soit aisé et profitable pour l'enseignant de mathématiques d'utiliser efficacement les TIC avec ses élèves dans les établissements scolaires du Cameroun ?
12. Dans les conditions actuelles, y-a-t-il quand même des pistes d'utilisation des TIC en salle de classe ?
13. Vous arrive-t-il de conseiller à des enseignants de mathématiques l'utilisation de certains logiciels dédiés aux mathématiques ? Si oui, indiquez quel(s) logiciel(s) vous conseillez souvent en précisant pour chaque logiciel ce que vous demandez d'en faire.
14. Quelle situation d'utilisation des TICE vous semble le mieux convenir au contexte camerounais ? [Amener les élèves dans un centre de ressources pour qu'ils touchent eux-mêmes aux machines]

15. Quelle situation d’utilisation des TICE vous semble le mieux convenir au contexte camerounais ? [Amener en classe un ordinateur et un vidéoprojecteur pour faire, lorsque vous jugez nécessaire, des présentations ponctuelles aux élèves]
16. Quelle situation d’utilisation des TICE vous semble le mieux convenir au contexte camerounais ? [Autre]
17. Vous arrive-t-il de conseiller aux enseignants de mathématiques l’utilisation de certains matériels informatiques pour préparer ou présenter leurs cours de mathématiques ? Si oui, indiquez quel(s) matériel(s) vous leurs conseillez souvent en précisant (si possible) pour chaque matériel ce que vous leur demandez d’en faire.
18. Est-il nécessaire de former les enseignants de mathématiques à l’intégration pédagogique des TICE ?
19. Au MINESEC, qui s’occupe de la formation en TICE des enseignants de mathématiques ?
20. La formation continue des enseignants de mathématiques rencontre-t-elle des difficultés qui soient contournables par un usage judicieux des TICE ? (Veuillez préciser).
21. Vous semble-t-il pertinent de former les enseignants de mathématiques aux TICE par internet ? (utilisation d’une plateforme du style moodle) ?
22. Que pouvez-vous faire, à votre niveau, pour conduire les enseignants de mathématiques que vous côtoyez dans le cadre de votre travail, dans l’acquisition des compétences en TICE ou tout au moins à s’intéresser aux TICE ?
23. L'ENS de Cachan, l'ENS de Lyon et un consortium d'universités parmi lesquelles l'Université Paris Diderot ont élaboré un cours en ligne destiné à rendre les formateurs d'enseignants et les enseignants capables de créer des séances de cours telles que les logiciels de géométrie dynamique, les tableurs et les logiciels de calcul formel constituent des supports à l'activité mathématique des élèves. Un partenariat est en cours de négociation avec l'AUF pour que ceux qui ne disposent pas de moyens de connexion à internet puissent bénéficier des points d'accès à internet de l'AUF. Souhaitez-vous y participer?

VI. ANNEXE 2 : RESULTATS DE L'ENQUETE EFFECTUEE DANS LES CRM

Le tableau suivant présente une synthèse des résultats de l'exploitation de documents portant sur l'utilisation des TICE en milieu scolaire.

Document consulté	*Difficultés listées dans le document exploité*	*Suggestions faites par les rédacteurs du document consulté*
Rapport CRM du 18 septembre 2014[77]	Rubrique « Difficultés rencontrées » - Inexistence de fonds alloués à la maintenance des équipements informatiques - Le centre manque du matériel nécessaire à son fonctionnement (papiers, encres, matériels d'entretiens et de maintenance…). Le minimum que le chef d'établissement met à notre disposition reste insignifiant. - Manque d'engouement des enseignants quant à l'exploitation du Centre	Rubrique « suggestions » - Les CRM pourraient être mis à contribution pour la sensibilisation, voire la formation des enseignants aux usages pédagogiques des TIC, de plus en plus incontournables dans la société de l'information dans laquelle nous vivons aujourd'hui. - Nous suggérons aussi que cette dimension de l'enseignement et de l'apprentissage soit prise en compte dans l'organisation de jour.
Rapport d'activités du CRM du Lycée d'Ekounou (troisième trimestre juillet 2014)	Un seul élève de classe de troisième a cherché des informations relatives aux mathématiques sur la recommandation de son enseignant. Deux enseignants de mathématiques se sont rendus au CRM pour travailler sur internet sans leurs élèves (aucune précision n'est donnée sur la nature de ce qu'ils y faisaient, même si les chefs de centre estiment que les enseignants vont au CRM surtout pour consulter leurs mails)	
Bilan d'activités au CRM du lycée technique de Nkolbisson (troisième trimestre 2014)	Les professeurs de Sciences Physiques ont fait 5 cours dans les espaces de cours et de simulation, et 6 passages dans les espaces de recherche documentaire ; les enseignants de mathématiques n'ont fait aucun passage, ni dans l'un ni dans l'autre de ces deux espaces.	
Rapport Bilan des activités du premier trimestre (CRM du Lycée	Rubrique « Difficultés rencontrées » - 3 cours de mathématiques ont été faits dans le CRM. - Manque d'engouement de certains enseignants quant à l'exploitation de nombreux espaces fonctionnels du CRM.	Rubrique « suggestions » - Engager une réflexion profonde afin de trouver une solution définitive pour le financement de la maintenance du parc informatique de notre établissement. - Sensibiliser et former des

[77] N°001/MINESEC/DREC-CE/DDESEC-MF/LBE/CRM

Technique de Nkolbisson) [78]	- Très faible utilisation des logiciels professionnels dus au manque de volonté des enseignants.	enseignants à l'usage pédagogique des NTIC. - Amener les enseignants à créer des ressources multimédia pédagogiques locales en utilisant le matériel et matériaux existants.
Rapport général de l'Atelier de suivi et d'animation des CRM et de la région du centre des 19 et 20 mars 2014 au lycée bilingue de Yaoundé	Rubrique « Problèmes identifiés » - Faible taux d'utilisation des CRM par les enseignants. - Absence d'une véritable réflexion d'ordre pédagogique préalable à l'utilisation des TIC. - Absence d'un schéma directeur qui encadre l'intégration pédagogique des TIC. - Implication insuffisante des Inspections de pédagogie. - Absence d'une politique cohérente et incitative favorisant la production de ressources pédagogiques multimédia. - Absence d'une politique cohérente et incitative favorisant la production de ressources pédagogiques numériques endogènes. - Absence de sessions de formation des différents intervenants de la chaine de supervision pédagogique (Inspecteurs, Chefs d'établissements, Censeurs, Animateurs pédagogiques et enseignants) à l'intégration des TIC.	Rubrique « Recommandations » - Ressortir explicitement dans le texte réorganisant le fonctionnement des CRM, le temps obligatoire à réserver au CRM dans les emplois de temps des élèves. - Inciter en début d'année, les Animateurs pédagogiques à produire dans le cadre des conseils d'enseignements, un plan d'intégration des TIC dans l'enseignement pendant les inspections des enseignants. - Intégrer la dimension TIC dans les programmes officiels de l'enseignement secondaire. - Former les enseignants à la production des ressources. - Trouver des moyens pour inciter les enseignants à produire des ressources. - Elaborer une politique nationale de production de ressources numériques.
Rapport d'activités du 1er trimestre 2014-2015 du CRM du lycée bilingue de Nkol-Eton[79]	Rubrique « Difficultés rencontrées » - Le taux de fréquentation du CRM par les enseignants n'est pas encore satisfaisant.	Nous sommes convaincus que beaucoup de nos enseignants ne s'impliquent pas dans le CRM tout simplement parce qu'ils n'ont aucune ou pas assez de connaissances en informatique. En leur permettant de pallier cette insuffisance, nous avons grand espoir qu'ils pourront à l'avenir intégrer plus aisément les TIC dans leurs enseignements pour le plus grand bien des élèves.

***Tableau 1** – Données sur l'utilisation des TICE dans les établissements scolaires*

[78] N°01/2015/R/MINESEC/DRES-CE/DDES-MF/LTN/SG-CRM du 08 Janvier 2015
[79] N°0238/15/NP/MINESEC/DRES-CE/DDES-MF/CPEST du 05 Février 2015

PROPOSITION D'UN CADRE D'ANALYSE DE SITUATIONS DE FORMATION DES PROFESSEURS DES ÉCOLES

Claire GUILLE-BIEL WINDER[*]– Edith PETITFOUR[**]– Pascale MASSELOT[***]– Yves GIRMENS[****]

Résumé – Cet article présente un cadre d'analyse de situations de formation destinées aux professeurs des écoles. Ce cadre aide à conduire une analyse des ressources conçues pour les formateurs d'enseignants. Il permet d'interroger les potentialités des situations dans le but de les adapter aux contraintes de formation imposées. Il vise aussi à favoriser une meilleure appropriation de ces ressources. À cette étape de son élaboration, le cadre se structure en cinq paliers d'étude permettant de caractériser les activités de formation en fonction de leur nature, du positionnement du formé et des connaissances convoquées (mathématiques, didactiques, voire pédagogiques). L'utilisation potentielle de ce cadre est illustrée dans l'analyse de trois situations de formation.

Mots-clefs : situation de formation, stratégies de formation, cadre d'analyse, paliers, professeurs des écoles.

Abstract –This article presents an analysis model of training situations intended for primary school teachers. This model allows an analysis of resources which are conceived for teacher tutors. It allows to question the potentialities of those situations in order to adapt them to the framework of the training. It also aims at improving the appropriation of these resources. The model is structured into five stages of study allowing to characterize the training activities according to their nature, to the positioning of the trainee and to the knowledge required (in mathematics, didactics, and eventually pedagogy). The use of this model is illustrated in training situations.

Keywords: training situation, training strategies, analysis model, stages, primary school teacher.

Dans le domaine de la formation en mathématiques des professeurs des écoles, les réflexions menées notamment par la COPIRELEM (**Co**mmission **P**ermanente des **IR**em sur l'enseignement **ELEM**entaire) depuis plus de trente ans, ont conduit à la production d'un grand nombre de documents à destination des formateurs des professeurs des écoles mais également des professeurs des écoles. Les formations de formateurs organisées par la COPIRELEM visent à présenter, en vue de les transmettre, des « situations de formation » aux formateurs d'enseignants afin qu'ils puissent les utiliser comme ressources par la suite en formation d'enseignants, en les adaptant aux besoins de leur public en formation initiale ou continue. Or, la mise à disposition des formateurs de ressources dont la qualité est reconnue par un collectif ne suffit pas à garantir leur appropriation, à savoir une compréhension de leurs

[*] COPIRELEM – France – claire.winder@free.fr
[**] COPIRELEM – France – edith.petitfour@univ-lorraine.fr
[***] COPIRELEM – France – pmasselot@aol.com
[****] COPIRELEM – France – yves.girmens@free.fr

Guille-Biel Winder C., Petitfour E. Masselot P. et Girmens Y. (2015) Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation des professeurs des écoles. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT2, pp. 159-172.

finalités et enjeux de formation ainsi que des modalités de mises en œuvre envisageables. Pour tenter de répondre à cette question de formation de formateurs, il nous a semblé nécessaire de construire un outil d'analyse de « situations de formation ».

Notre cadre d'analyse des « situations de formation » vise ainsi dans un premier temps à interroger les potentialités de ces situations pour pouvoir les adapter à un public choisi dans le contexte de contraintes de formation imposées. Il contribue aussi à clarifier les enjeux dans les différentes phases de la mise en œuvre, enjeux liés à des objectifs de formation mathématiques, didactiques ou pédagogiques. À terme, il s'agit de permettre aux utilisateurs de ces ressources de mieux appréhender et de s'approprier, de manière plus fidèle aux intentions des concepteurs, les enjeux de formation sous-jacents. La présentation du cadre d'analyse fait l'objet de la première partie de ce texte.

Pour l'illustrer, nous avons fait le choix d'analyser trois situations particulières de formation de type homologie et/ou transposition en référence à la typologie établie par Kuzniak (2003). Dans une stratégie basée sur la transposition, le formateur cherche à transmettre un savoir de référence sur l'enseignement et tente de maîtriser le phénomène d'adaptation opéré par les formés. Dans une stratégie de formation basée sur l'homologie-transposition, le formateur fait vivre une situation de résolution d'un problème, selon les conceptions et choix didactiques et pédagogiques qu'il souhaite voir mis en œuvre dans leur enseignement par les formés qui l'expérimentent, moyennant une adaptation au niveau où ils enseignent de certains aspects mathématiques, didactiques et pédagogiques (travail de transposition). Les trois parties suivantes présentent l'analyse, selon notre cadre, de la mise en œuvre de deux situations de formation par homologie-transposition et d'une situation de formation basée sur la transposition. Un premier fonctionnement de ce cadre d'analyse en cours d'élaboration a été développé autour de ces trois situations lors du XXXXI$^{\text{ème}}$ colloque de la COPIRELEM (Danos, Masselot, Simard & Winder 2015 ; Mangiante-Orsola & Petitfour 2015 ; Aubertin & Girmens 2015).

I. DIFFÉRENTS PALIERS D'ÉTUDE DES POTENTIALITÉS D'UNE SITUATION DE FORMATION

Dans cette première partie, nous présentons notre cadre d'analyse d'une « situation de formation ». Nous utilisons ici le mot « situation » au sens de (Brousseau 2010) :

> Une situation est caractérisée dans une institution par un ensemble de relations et de rôles réciproques d'un ou de plusieurs sujets (élève, professeur, etc.) avec un milieu, visant la transformation de ce milieu selon un projet. Le milieu est constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans une situation. Le sujet détermine une certaine évolution parmi des états possibles et autorisés de ce milieu, vers un état terminal qu'il juge conforme à son projet. (…) . La situation permet de « comprendre » les décisions du professeur et des élèves, erreurs ou appropriées. (Brousseau 2010, p.2)

Ainsi une « situation de formation » est pour nous une situation impliquant des formés (étudiants en formation initiale ou enseignants en formation continue), et des formateurs au sein d'une institution de formation d'enseignants. Elle consiste en un ensemble d'activités proposées par le formateur et construites autour d'une activité que nous appellerons activité « amorce ».

Dans notre analyse d'une situation de formation, nous prenons en compte l'ensemble des activités proposées par le formateur en les caractérisant en fonction de leur nature, et en explicitant, pour chacune d'entre elles, le positionnement du formé ainsi que les connaissances convoquées. La prise en compte de ces différents critères nous permet de définir cinq paliers d'étude caractéristiques.

1. *Connaissances convoquées*

En ce qui concerne les connaissances, Houdement (1995) et Kuzniak (1994), en utilisant une métaphore issue de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau 1998), ont identifié trois types de « savoirs utiles pour enseigner » (Houdement 2013, p.12) :

> Le **savoir mathématique** correspond aux mathématiques nécessaires à l'enseignant pour préparer, réguler et évaluer sa séance et ses élèves.
>
> Le **savoir didactique** est, par définition, nourri par les recherches en didactique sur les mathématiques du primaire. *A priori* ce savoir a vocation à être théorique mais (…) une transposition est nécessaire pour rendre accessible en centre de formation des « savoirs utiles » (…).
>
> Le **savoir pédagogique** ou « savoir d'expérience » (Portugais, 1995) (…) se caractérise par son oscillation entre deux pôles, l'un théorique mais parfois très éloigné de la pratique future des étudiants (par exemple, le fait que les pratiques constructivistes de l'apprentissage prennent le pas sur les conceptions behavioristes), l'autre proche du sens commun et de la pratique (…) mais privée de l'adaptabilité d'un modèle plus théorique. (Houdement 2013, pp. 12-13)

Dans les différentes activités, nous distinguons alors les connaissances mathématiques ainsi que les connaissances didactiques et pédagogiques que l'on vise à faire acquérir aux formés. Ces connaissances sont soit mobilisées en acte, soit explicitées en contexte par le formateur, soit décontextualisées pour devenir mobilisables dans d'autres contextes. Les connaissances mathématiques sont mobilisées en acte lorsqu'elles sont utilisées comme outil (Douady 1986) dans l'activité mathématique considérée. Cette dernière peut être soit vécue, avec la réalisation effective de ce qui est demandé (réalisation de manipulations, élaboration et rédaction d'une solution), soit évoquée, avec une résolution mentale. Les connaissances mathématiques sont explicitées en contexte lorsque leur utilisation dans l'activité en tant qu'outil est formulée et elles sont décontextualisées lorsqu'elles sont présentées en tant qu'objet, généralement dans une phase d'institutionnalisation. Concernant les connaissances didactiques ou pédagogiques, elles sont mobilisées en acte dans l'identification des choix didactiques ou pédagogiques effectués dans l'activité mathématique considérée, elles sont explicitées en contexte dans une analyse des implications de ces choix et elles sont décontextualisées dans la mise en évidence et l'explicitation des concepts didactiques ou pédagogiques sous-jacents.

2. *Positionnement du formé*

Dans une situation de formation, nous distinguons trois positionnements spécifiques attendus du formateur de la part du formé, dont ce dernier peut ou non être conscient. Ainsi, le formé est placé dans une position d'élève par rapport aux connaissances mathématiques lorsqu'il doit réaliser l'activité mathématique ou lorsqu'il s'intéresse aux connaissances mathématiques décontextualisées de cette activité. Il est placé dans une position d'enseignant lorsqu'il étudie des activités à destination des élèves ou des productions d'élèves, lorsqu'il analyse les conditions de mise en œuvre en classe de l'activité mathématique considérée ou encore lorsqu'il entre dans un questionnement plus large sur les pratiques de classe ou sur les enjeux d'apprentissages mathématiques. Enfin, il est placé dans une position de chercheur lorsqu'il s'agit de problématiser une question professionnelle en lien avec les pratiques de classe et les enjeux d'apprentissage.

3. *Nature des activités*

Dans une situation de formation, nous pouvons alors distinguer des activités de natures différentes qui induisent (implicitement ou explicitement) des positionnements spécifiques de la part du formé, en convoquant des connaissances mathématiques, didactiques et/ou pédagogiques pouvant être présentes en acte, être explicitées en contexte ou être décontextualisées :

- l'activité mathématique : elle peut être vécue ou évoquée, le formé étant placé en position d'élève par rapport aux connaissances mathématiques à mobiliser ou à construire ; les connaissances mathématiques en acte, voire aussi explicitées en contexte, sont convoquées ;

- l'analyse réflexive de cette activité mathématique : elle fait apparaître les connaissances mathématiques décontextualisées (ce qui place le formé en position d'élève apprenant ou revisitant les mathématiques), ainsi que des connaissances didactiques et/ou pédagogiques en acte (initiant le changement de positionnement du formé vers une position d'enseignant) ;

- l'analyse des conditions de mise en œuvre (effective ou seulement anticipée) de cette activité mathématique : elle nécessite un positionnement d'enseignant de la part du formé ; les connaissances didactiques et/ou pédagogiques sont explicitées en contexte ;

- l'analyse réflexive de l'activité pédagogique et/ou didactique précédente : elle conduit à la décontextualisation des connaissances didactiques et/ou pédagogiques ; elle peut se présenter sous la forme d'un questionnement plus large portant sur les pratiques de classe (situations d'apprentissage spécifiques, gestes professionnels, …), ou sur les enjeux d'apprentissages mathématiques d'un ou de plusieurs contenus (programmes, progressions, …), ou bien encore sous la forme d'une mise en évidence d'outils d'analyse didactique (phases d'une situation didactique, types de tâches, …) ; le formé a un positionnement d'enseignant ;

- la problématisation de questions professionnelles en lien avec les pratiques de classe, les enjeux d'apprentissage et/ou les outils d'analyse didactique : elle permet un positionnement de chercheur notamment lorsqu'il s'agit d'élaborer une méthodologie d'analyse de cette question et d'en inférer des résultats.

4. *Paliers d'étude*

Le tableau 1 récapitule les caractéristiques des cinq paliers d'étude que nous distinguons même s'ils sont imbriqués et « se chevauchent » parfois.

Palier	Nature de l'activité	Positionnement du formé	Connaissances		
			mathématiques	didactiques	pédagogiques
0	Activité mathématique (vécue ou évoquée)	Elève	En acte et/ou explicitées en contexte		
1	Analyse réflexive de l'activité mathématique du palier 0.	Elève Enseignant.	Décontextualisées	En acte	En acte
2	Analyse des conditions de mise en œuvre (effective ou possible) de l'activité du palier 0.	Enseignant.		Explicitées en contexte	Explicitées en contexte
3	Analyse réflexive de l'activité didactique et pédagogique du palier 2.	Enseignant.		Décontextua-lisées	Décontextua-lisées
4	Problématisation d'une question professionnelle en lien avec le palier 3.	Chercheur.			

***Tableau 1** – Caractéristiques des cinq paliers d'étude*

La structure retenue pour notre analyse, représentée en Figure 1, est ainsi sous forme de « paliers emboîtés » : chaque palier correspond à une mise à distance, un pas de côté, mettant en jeu des connaissances mathématiques et/ou didactiques et/ou pédagogiques, à partir de l'étude du palier précédent. Le passage d'un palier n à un palier n + 1 s'accompagne soit d'un changement de positionnement du formé (d'élève à enseignant ou d'enseignant à chercheur avec parfois des intermédiaires), soit d'une mise à distance dans un positionnement donné en lien avec le degré de décontextualisation (en acte, explicité en contexte, décontextualisé) des connaissances.

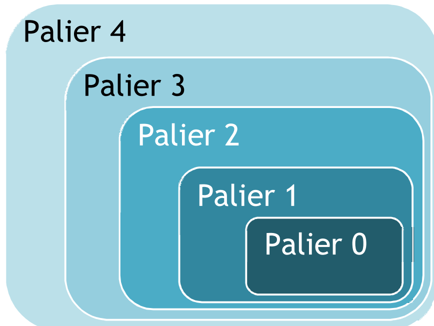


Figure 1 *– Structure retenue pour le cadre d'analyse : paliers d'étude emboîtés*

Pour réaliser une activité se situant à un palier n + 1, le formé doit faire appel à des connaissances relatives aux paliers précédents. Nous faisons donc l'hypothèse qu'il n'est pas possible d'exploiter une situation à un palier n + 1 si les formés ne possèdent pas les acquis correspondants du palier n. Ainsi chaque palier englobe le précédent.

II. LA SITUATION « LE SOLIDE CACHÉ »

La situation du « solide caché » (IREM de Lille 2000) est à l'origine une situation proposée pour des élèves de 8 à 11 ans ($6^{ème}$ à $8^{ème}$ année du primaire). Elle a été adaptée pour en faire une situation de formation présentée, dans différentes versions, dans des ateliers lors des colloques de la COPIRELEM de Strasbourg (2005) et de Dijon (2011) et lors d'un stage de formation de formateurs de professeurs des écoles en didactique des mathématiques organisé par la COPIRELEM (Séminaire de formation des nouveaux formateurs Tours 2005). La version de la situation présentée ici a été mise au point à l'occasion de plusieurs sessions de formation initiale et continue et a été présentée lors d'un atelier du colloque COPIRELEM de Mont de Marsan (Aubertin & Girmens 2015).

1. *Description de l'activité « amorce » de la situation du solide caché*

Un solide est caché dans une poche. On le désignera dans ce qui suit comme « solide référent ». L'activité consiste à réaliser un patron pour fabriquer un solide « identique » au solide caché (c'est-à-dire de même forme et à la même échelle), à partir des réponses obtenues (de type « oui » ou « non » ou un nombre associé exclusivement à une mesure de longueur) à une suite de questions.

Phase 1

Un groupe de trois formés, nommé G_1 est constitué. Le solide référent lui est confié sans que les autres formés ne le voient. Le groupe G_1 se retire avec le solide et doit imaginer les questions qui peuvent lui être posées et quelles réponses il doit donner. Les autres formés sont répartis en deux autres groupes G_2 et G_3 pour réfléchir et se mettre d'accord sur les questions qu'ils décideront de poser. Chaque groupe note ses questions sur une feuille.

Phase 2

Chacun des groupes G_2 et G_3 pose à tour de rôle une question à laquelle le groupe G_1 répond par « oui » ou « non » ou un nombre associé exclusivement à une mesure de longueur ou bien « on ne peut pas répondre » si la question appelle une réponse autre que « oui » ou « non » ou porte sur un nom de solide.

Un formateur note au tableau les questions avec la réponse apportée dans l'ordre où elles apparaissent. Quand il l'estime utile, il peut proposer des pauses afin de permettre à chaque groupe de se concerter pour faire le point et ajuster son questionnement.

Phase 3

Une dernière pause ayant permis aux groupes G_2 et G_3 de conclure qu'ils disposaient d'assez d'informations pour déterminer un patron, chaque groupe est invité à se concerter pour construire un patron du solide.

Phase 4

Chaque groupe présente le patron qu'il a élaboré. Un échange est suscité entre les deux groupes autour des informations utilisées. Puis le solide caché est dévoilé par le groupe G_1 pour être confronté aux patrons proposés par les groupes G_2 et G_3.

2. *Analyse de la situation*

Le palier 0 est relatif à la résolution du problème, telle qu'elle est proposée dans l'activité « amorce » dans ses différents aspects : les connaissances mises en œuvre portant sur les figures planes, les solides, les patrons ainsi que sur les différentes formes de raisonnement utilisées pour résoudre le problème. Pour des enseignants en formation, membres des groupes G_2 ou G_3, le fait de résoudre le problème « comme s'ils étaient des élèves », leur permet d'une part, de saisir les enjeux de la situation et son potentiel mathématique et d'autre part, d'approfondir ou de s'approprier des connaissances et des modes de raisonnements mathématiques.

Une fois le problème résolu, les formés sont invités à faire un pas de côté par rapport à leur vécu pour identifier les aspects mathématiques qu'ils ont rencontrés ou mis en œuvre pour résoudre le problème. Ce moment réflexif, situé au palier 1, gagne à être organisé en deux temps :

- un premier temps pour revivre par la pensée la résolution : mise en commun et débat sur le choix des questions, les manières d'ajuster le questionnement, les manières de raisonner, les obstacles rencontrés, etc.

- un deuxième temps pour dégager des savoirs mathématiques : sur quelles connaissances mathématiques les participants se sont-ils appuyés pour trouver la solution ? Ont-ils élaboré des connaissances nouvelles ?

À partir de ce qui a été mis en avant, il appartient au formateur de retenir et mettre en forme les savoirs qu'il juge opportuns sur les figures planes, les solides, le patron, etc.

Vient ensuite un deuxième pas de côté pour analyser, au palier 2, les aspects didactiques et pédagogiques de la situation : le choix du solide, la manière d'introduire et de lancer la situation, l'organisation et le déroulement de la recherche ; la manière dont le formateur a géré la situation, ses interventions ; la manière dont la recherche a été menée par les groupes ; la manière d'organiser et de gérer la mise en commun des réponses ; la manière de dépasser les obstacles ; les variantes possibles et leurs conséquences, etc.

Enfin, au palier 3, dans une perspective d'enrichissement des pratiques, en s'appuyant sur l'analyse conduite au palier 2, le formateur est conduit à dégager des aspects génériques se rapportant aux gestes professionnels : par exemple, l'analyse *a priori*, le repérage des variables, la recherche des obstacles, les aides possibles, la formulation de consignes, l'organisation d'un travail de recherche, la gestion d'un travail en groupes, la gestion d'une mise en commun, etc.

III. LA « SITUATION DES ANNUAIRES »

La « situation des annuaires » est une situation de formation qui a été présentée à plusieurs reprises dans des stages de formation de formateurs de professeurs des écoles en didactique des mathématiques organisés par la COPIRELEM (Séminaire de formation des nouveaux formateurs Pau 1992, Maxéville 2001, Istres 2006), et qui a fait l'objet de plusieurs publications (Houdement & Peltier 2002, 2003; Houdement 2006). Après avoir décrit l'activité « amorce », nous présentons une analyse de la situation selon le cadre élaboré.

1. *Description de l'activité « amorce » de la situation des annuaires*

Cette activité se déroule en plusieurs phases et selon une série de consignes. Nous présentons ici les grandes lignes du déroulement :

Phase 1

Les formés, placés en îlots de quatre personnes, doivent partager des feuilles rectangulaires (feuilles d'annuaires) en deux parties exactement superposables sans perte et sans recollement. Ils sont invités à trouver le maximum de partages différents.

Le travail est individuel mais l'organisation retenue autorise les échanges. Les productions sont affichées au fur et à mesure sur une grande feuille. Il est possible de valider la proposition en vérifiant à chaque fois la superposition exacte des deux parties et la reconstitution possible de la feuille initiale avec les deux parties obtenues. Le procédé utilisé pour obtenir la ligne de partage est alors progressivement mis en évidence.

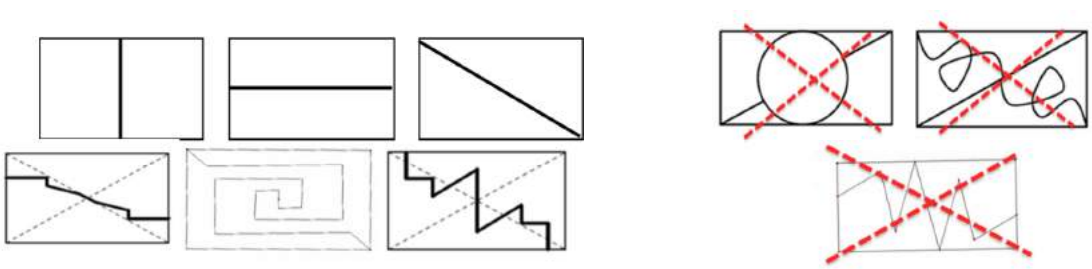


Figure 2 *– Des exemples de partages corrects (à gauche) et incorrects (à droite).*

À l'issue de l'activité, le formateur propose une institutionnalisation très contextualisée portant sur :

- la propriété vérifiée par la ligne de partage pour répondre à la consigne : cette ligne est symétrique par rapport au centre du rectangle ;

- l'aire de surfaces issues de partages : les deux parties issues d'un même partage sont superposables, elles ont donc même forme ;

- deux parties issues de deux partages différents ne sont pas directement superposables, pourtant elles vérifient toutes les deux la propriété : « avec deux parties analogues à chacune d'elles on peut reconstituer la feuille entière », on dit alors, pour formaliser cette propriété commune, qu'elles ont même aire.

Phase 2

Une deuxième consigne amène les formés à recommencer l'activité précédente mais avec des demi-feuilles rectangulaires. L'organisation est identique à celle de la phase précédente. Cette seconde classe de surfaces de même aire (dont un représentant est le quart de feuille) est matérialisée par une nouvelle grande feuille sur laquelle sont affichées certaines productions.

Lorsqu'il s'agit d'introduire un codage des deux classes ainsi construites, rendant compte de la propriété commune aux surfaces qu'elles contiennent, l'ensemble du groupe s'accorde généralement pour désigner la première classe par ½, car elle contient des demi-feuilles A4 et la deuxième par ¼, car elle contient des quarts de feuilles A4. Ce codage est retenu et noté sur les grandes feuilles qui matérialisent les classes.

Phase 3

Dans une troisième consigne, les formés doivent construire, par groupe de deux (ou de quatre), des surfaces ayant même aire que la feuille d'annuaire, mais de formes différentes. Les différentes propositions sont ensuite présentées et acceptées ou non après argumentation. En cas de désaccord, la feuille d'annuaire est reconstituée par découpage et recollement à partir de la feuille proposée.

Les surfaces retenues constituent une nouvelle classe de surfaces de même aire que l'on décide de coder par 1, puisqu'il s'agit de surfaces ayant même aire qu'une feuille d'annuaire. Deux types de procédures apparaissent :

- les surfaces sont obtenues par juxtaposition de surfaces (par exemple, deux surfaces de la famille ½ ou une surface de la famille ½ et deux surfaces de la famille 1/4) ; ces différentes procédures donnent lieu à leur traduction en terme de codage fractionnaire (par exemple ½ + ½ = 1 ou ½ + ¼ + ¼ = 1) ;

- les surfaces sont obtenues par découpage et recollement sans perte ni superposition d'une nouvelle feuille d'annuaire.

Phase 4

Il s'agit de mettre en ordre les différentes classes obtenues. Le rangement des classes en fonction de la relation « … est moins étendue que… » est matérialisé par la mise en ordre des grandes affiches représentant les classes, elle est justifiée par la superposition des rectangles représentants des différentes classes qui ont une dimension commune.

2. *Analyse de la situation*

Le cadre d'analyse retenu place l'activité « amorce » décrite précédemment au palier 0 d'étude d'une situation. En effet, le formé a, dans ces différentes phases, un positionnement d'élève ; il « joue le jeu » et se focalise sur ce que les différentes consignes données lui demandent de convoquer. Il n'est pas sollicité pour s'interroger sur ce que le formateur « cherche à lui faire apprendre » ; même si, comme tout élève, cette question peut être en arrière plan de ses actions (mais à cette étape, il ne lui sera rien demandé explicitement à ce sujet).

Différentes connaissances mathématiques sont en jeu au cours de l'activité :

- la notion d'aire est utilisée en acte au cours de la phase 1 (utilisation de la superposition de deux surfaces), puis explicitée en contexte et dissociée de la notion de périmètre en fin de phase 1 et en phase 2 (« avoir même aire »), en phase 3 (additivité et principe de conservation des aires) et jusqu'à la phase 4 (relation d'ordre sur les aires) ;

- la symétrie centrale est utilisée en acte au cours de la phase 1, puis explicitée en contexte en fin de phase 1 et en phase 2 ;

- les fractions sont explicitées en contexte en phases 2 et 3 ;

- la relation d'équivalence ainsi que la notion de classe d'équivalence sont utilisées en acte dans toute l'activité « amorce ».

À l'issue des différentes phases, le formateur dévoile progressivement ce qu'il a voulu « enseigner » en faisant vivre cette activité aux formés (car cette explicitation ne peut être laissée à la charge du « formé ») :

- Il reprend l'explicitation du rôle des différentes étapes qui permettent de définir la grandeur aire pour généraliser cette construction du concept de grandeur (définition d'une relation d'équivalence, construction de l'ensemble quotient, caractérisation des classes, construction d'une relation d'ordre sur l'ensemble quotient) ainsi que la construction d'un codage numérique qui est une mesure de cette grandeur relativement à une unité choisie.

- Il explicite les obstacles rencontrés (attendus et provoqués) lors de cette construction.
Le formateur se situe alors à un nouveau palier d'étude de la situation (palier 1) qui englobe l'activité « amorce », alors envisagée comme un « outil pour faire apprendre » utilisé sciemment par l'enseignant qui l'a proposée.

Dans un troisième temps, le formateur dévoile « comment il s'y est pris » (comment il a en quelque sorte « manipulé » les formés) et fait apparaître des « régularités » dans la pratique. Ce nouveau temps se situe au palier 2. Il s'agit tout d'abord de mettre en évidence des gestes professionnels par la reprise à travers l'analyse des choix effectués par le formateur (voire en explicitant des alternatives possibles) des aspects de la pratique :

- analyse *a priori* de l'activité, avec : choix des valeurs des variables (par exemple contraintes, consignes successives, ordre des consignes) ; explicitation de ce qui est mis en évidence et de ce qui est « laissé de côté » ; prise en compte des obstacles (difficultés prévisibles) ; aides éventuelles (lesquelles, pour qui, à quel moment) ; organisation (ici intérêt d'un travail en groupes, composition des groupes, rôles dans les groupes) ; modes de validation retenus (et prise en charge de la validation) ;

- analyse *a posteriori* de l'activité : les décalages éventuels ; les prises de décisions à chaud ; l'enchaînement des consignes et les effets produits ; la gestion des mises en commun (choix des productions, ordre des interventions) ; ce que l'enseignant dit, fait dire, laisse dire … ; ce qu'il retient, oublie, met en valeur … ; comment l'enseignant organise la prise de parole, en fonction de quels critères, etc.

La « situation des annuaires » est un point de départ permettant de mettre en évidence les grandes lignes de la progression concernant l'enseignement des grandeurs et des mesures à l'école élémentaire en s'appuyant par exemple sur le document d'accompagnement des programmes 2002 « Grandeurs et mesures à l'école élémentaire » pour analyser les régularités et les spécificités dans l'enseignement et l'apprentissage d'autres grandeurs introduites à l'école. En ce sens, elle permet d'atteindre le palier 3.

La « situation des annuaires » amorce ainsi un « parcours de formation » partant du palier d'étude 0 pour aller vers le palier 3, en passant successivement par les paliers intermédiaires. Ceci est représenté par le schéma donné en Figure 3.

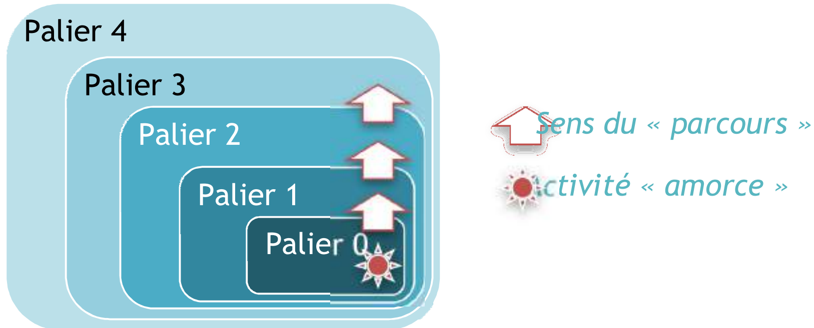


Figure 3 *– Les différents paliers d'étude de la situation des annuaires*

IV. SITUATION D'ANALYSE DE MANUELS SCOLAIRES

Dans cette partie, nous décrivons tout d'abord l'activité « amorce » d'une situation d'analyse de manuels scolaires. Cette situation s'inscrit dans la continuité de situations de formation conçues par des membres de la COPIRELEM et menées lors de colloques ou de séminaires destinés aux nouveaux formateurs (Lepoche & Taveau 2005 ; Lepoche, Masselot & Winder 2005). La stratégie de formation est basée sur la transposition.

Nous analysons ensuite la situation de formation à l'aide de notre cadre d'analyse. Nous avons retenu le même domaine d'étude que celui de la « situation des annuaires » : grandeur et mesure, avec l'introduction de la notion d'aire en CM1.

1. *Description de l'activité « amorce » d'une situation d'analyse de manuels scolaires*

Le travail d'analyse de manuels scolaires se déroule en cinq phases.

Phase 1 : analyse de l'activité d'une collection de manuels par binôme

Dans une première phase, les formés disposent du manuel et du livre du maître d'une collection. Ils doivent, par binôme, analyser la partie recherche ou découverte de la séance introductive de la notion d'aire en CM1 de la collection, ceci en complétant une grille d'analyse qui leur est fournie et qui a été élaborée par le formateur. La grille les conduit à repérer les objectifs de la séance indiqués par les auteurs, les définitions des termes de surface et d'aire données et les types de tâches proposés. Pour chaque type de tâches, ils doivent identifier les procédures pouvant être mises en œuvre ainsi que les difficultés et erreurs prévisibles pour les élèves.

Phase 2 : analyse comparée par binôme

Dans une deuxième phase, chaque membre d'un binôme fait part de son analyse à un membre d'un autre binôme ayant étudié une collection différente. Les deux nouveaux binômes font alors chacun une analyse comparée de l'introduction du concept d'aire des deux collections à disposition.

Phase 3 : analyse comparée par groupe de quatre

Dans une troisième phase, les binômes se rassemblent par groupe de quatre. Ils mettent en commun leurs comparaisons de l'introduction du concept d'aire dans les deux collections et rédigent leurs conclusions.

Ainsi, dans les trois premières phases, les formés analysent les manuels par binôme (ou trinôme), puis par groupe de quatre (ou cinq) tandis que le formateur est observateur. Ce dernier a imposé certains éléments présents dans la grille distribuée mais n'intervient pas au niveau du contenu de l'analyse que doivent faire les formés. Il veille seulement à ce que les consignes soient comprises et il prend note des points de discussions ou de questions qui émergent dans les groupes.

Phase 4 : mise en commun

Le formateur conduit une phase de mise en commun : chaque groupe de quatre est amené à donner ses conclusions relatives à la comparaison de l'activité d'introduction de la notion d'aire dans les deux collections de manuels analysées.

Phase 5 : synthèse

Dans une dernière phase, le formateur effectue une synthèse dans laquelle il dégage des éléments sur ce qu'il souhaite que les formés retiennent de ce travail d'analyse et des échanges qui ont eu lieu lors de la mise en commun.

2. *Analyse de la situation*

Dans cette situation de formation d'analyse de manuels, l'activité « amorce » est une analyse comparative d'activités d'introduction de la notion d'aire proposées dans des manuels de différentes collections. Notre cadre d'analyse place cette activité « amorce » au palier 2 : la comparaison des activités des manuels doit en effet conduire à une analyse des conditions de mise en œuvre en classe d'une activité d'introduction de la notion d'aire. En outre, il est attendu que le formé se positionne en tant qu'enseignant en prenant du recul sur les différents moyens permettant d'aborder la notion d'aire. L'association des manuels à comparer, choisie par le formateur, peut permettre de faire émerger différents éléments mathématiques, didactiques ou pédagogiques, qu'il pourra exploiter dans la phase de synthèse en fonction de ses objectifs de formation. La comparaison peut en effet amener le formé à un constat de choix différents faits par les auteurs de manuels à propos de l'introduction de la notion d'aire. Le formateur amènera alors le formé à s'interroger sur l'implication de ces choix sur les apprentissages des élèves.

Pour parvenir à la comparaison des activités mathématiques des manuels, les formés sont d'abord amenés à effectuer une activité de palier 1 dans la première phase de travail, en complétant la grille d'analyse proposée par le formateur pour un manuel donné. Le formé est ainsi conduit à une analyse réflexive de l'activité mathématique proposée dans le manuel et il est placé en position d'enseignant : il étudie une activité à destination des élèves. Il doit alors mobiliser des connaissances didactiques en acte, d'une part dans l'analyse didactique de l'activité mathématique du manuel (repérage des types de tâches, identification de procédures, anticipation d'erreurs et de difficultés possibles), d'autre part dans la découverte du choix des auteurs pour introduire la notion d'aire (par la grandeur ou par la mesure). Il peut également mobiliser des connaissances pédagogiques en acte s'il prend des informations sur le déroulement pédagogique décrit dans le livre du maître.

Renseigner la grille d'analyse proposée par le formateur suppose de la part du formé la capacité à réaliser l'activité mathématique présentée dans le manuel, c'est-à-dire la maîtrise de l'activité du palier 0, qu'il réalisera a priori de façon évoquée, en mettant en jeu des connaissances mathématiques en acte sur la notion d'aire. Le formé a également la possibilité de vérifier ses connaissances mathématiques propres, en consultant le livre du maître où sont exposées les connaissances mathématiques décontextualisées à enseigner.

Dans la phase de mise en commun, le formé peut, par exemple, relever l'existence d'approches différentes de la notion d'aire : entrée par la mesure ou en tant que grandeur. Il se situe ainsi au niveau des connaissances didactiques au palier 1 d'étude de la situation. Le formateur pourra être amené à effectuer des rappels ou des apports de connaissances mathématiques décontextualisées à propos de la notion de grandeur et de celle de mesure. Il se situera alors au palier 1 au niveau des connaissances mathématiques, en revenant sur des acquis en lien direct avec l'activité du palier 0. Si au moment de la phase de synthèse, le formateur choisit d'aller au-delà du simple constat de choix différents faits par les auteurs de manuels et invite les formés à interroger la pertinence de chacune de ces deux approches, il exploite alors l'analyse de manuels au palier 2. En effet, son objectif consiste ici à amener le formé à une prise de recul sur l'activité mathématique elle-même afin de dégager certains aspects didactiques relatifs à l'enseignement de la notion d'aire. Des arguments en lien avec les difficultés et erreurs des élèves (confusion entre aire et périmètre par exemple), issus d'une analyse didactique du palier 1, peuvent permettre de justifier le choix d'une approche de la notion d'aire par les grandeurs plutôt que par la mesure. Le questionnement sur l'approche à privilégier pour enseigner la notion d'aire peut s'étendre à une réflexion sur d'autres grandeurs (palier 3). Et enfin, dans le cadre par exemple de séminaires de recherche, le formateur pourrait exploiter cette analyse de manuels à un palier 4 dans le but d'étudier les conceptions des auteurs sur l'enseignement de la notion d'aire et plus généralement sur l'enseignement des grandeurs en vue de construire une programmation sur ces notions.

Ces différentes étapes successivement proposées peuvent être représentées comme dans la Figure 4.

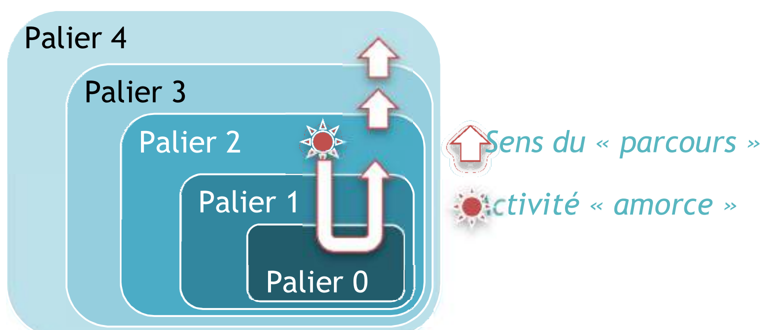


Figure 4 *– Les différents paliers d'étude de l'analyse de manuels*

La comparaison de manuels permet aussi de faire émerger la notion de variable didactique lorsqu'un même type de tâches est proposé dans chacun des manuels mais que les choix des valeurs des variables diffèrent. Un tel objectif de formation se situe au palier 3.

La notion d'aire peut, par exemple, être introduite par un type de tâches de rangement de surfaces selon leur aire. Les manuels choisis seront tels que dans l'un, les surfaces sont non déplaçables si bien que la comparaison doit se faire visuellement et sans manipulation, tandis que dans l'autre, la comparaison peut se faire par découpage et recollement avec une manipulation effective. Dans la comparaison de ces deux approches de la notion d'aire, une activité au palier 1 revient à identifier les différentes procédures de résolution liées à la variable didactique « nature de la situation », à savoir statique versus dynamique. Une activité au palier 2 consiste à s'interroger tout d'abord sur la nécessité de manipulations effectives avant de proposer des « manipulations mentales », et de s'interroger ensuite sur les moyens d'amener les élèves à une activité de comparaison mentale. Réfléchir plus généralement au rôle de la manipulation en phase d'apprentissage et aux étapes intermédiaires permettant de se construire des images mentales (décrire l'action en acte, l'évoquer) correspond à une activité du palier 3. Comme le souligne Peltier (2003) :

> Ces expériences ne pourront être mobilisées que si elles ont été décrites au moment de l'action et surtout évoquées après avoir été menées, de manière différée et sans retour à la manipulation.(Peltier 2003 p.167)

Ainsi, selon les manuels qu’il choisit, la façon dont il les associe, selon la grille d’analyse qu’il propose et selon les éléments de synthèse qu’il choisit/privilégie/met en valeur, le formateur va exploiter cette situation de formation d’analyse de manuels scolaires à différents paliers.

V. CONCLUSION

Le cadre d’analyse élaboré semble être adapté aux situations s’inscrivant dans le cadre de stratégies de formation par homologie-transposition ou par transposition.

La présentation des différents paliers (partie I) suggère une hiérarchisation. En revanche les différents exemples explicités (parties II à IV) montrent que le terme « palier » ne fait pas référence à une chronologie à suivre dans une situation de formation : en effet, il est envisageable de proposer une activité « amorce » en entrant par un palier 1, 2, 3 ou 4, mais pour réaliser l’activité, le formé devra revenir à des paliers inférieurs, voire faire des aller-retour entre différents paliers.

Dans les trois exemples de situations de formation envisagés ici, le cadre d’analyse a permis de mettre en évidence :

- les paliers d’étude envisageables dans la formation, au niveau des savoirs mathématiques, didactiques et pédagogiques ;
- l’existence de différents parcours possibles ;
- les imbrications des différents paliers d’étude.

Le cadre a ainsi révélé la richesse potentielle de telles situations ainsi que les conséquences des choix réalisés par le formateur lors de la mise en œuvre de ces situations sur la nature des apprentissages susceptibles d’être provoqués.

REFERENCES

Aubertin J-C., Girmens Y. (2015) Une situation d’homologie-transposition : le solide caché. *XXXXI Colloque COPIRELEM*.

Brousseau G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1980)*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau G. (2010). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998). http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Danos P., Masselot P., Simard A., Winder C. (2015) Analyser une ressource de formation : exemple de la « situation des annuaires ». *XXXXI Colloque COPIRELEM*.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet.*RDM* 7(2). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Houdement C. (1995) *Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies*. Thèse de l’université Paris 7.

Houdement C., Peltier M-L. (2002) Aires de formation. *Les Cahiers du Formateur 5*. ARPEME. 64-108.

Houdement C., Peltier M-L. (2003) Aires de surfaces planes. *Concertum Les carnets de route de la COPIRELEM 2*. ARPEME. 199-221.

Houdement C. (2006) Mathématique, didactique et découpages. *Actes du colloque Mathématiques et résolution de problèmes : un point de vue didactique*. IREM de Montpellier. 43-51.

Houdement C. (2013) *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques*. Note d'habilitation à diriger les recherches. Université Paris Diderot – Université de Rouen.

IREM de Lille-Ecole primaire (2000) *Travaux géométriques Apprendre à résoudre des problèmes Cycle 3*. CRDP Nord-Pas-de-Calais. 150-156.

Kuzniak A. (1994) *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*. Thèse de l'université Paris 7.

Kuzniak A. (2003) Les stratégies utilisées pour former les maîtres du 1er degré en mathématiques. *Concertum Les carnets de route de la COPIRELEM 3*. ARPEME. 7-22.

Lepoche G., Taveau C. (2005) Analyse de manuels scolaires sur la division euclidienne. *Les cahiers du formateur 7*. IREM Paris 7.

Lepoche G., Masselot P., Winder C. (2005) Fractions et décimaux : analyse de manuels. *Les cahiers du formateur 7*. IREM Paris 7.

Mangiante-Orsola C., Petitfour E. (2015) L'analyse de manuels en formation : pour quoi faire ? *XXXXI Colloque COPIRELEM*.

Peltier M-L. (2003) « Le napperon » : un problème pour travailler sur la symétrie axiale. *Concertum Les carnets de route de la COPIRELEM 2*. ARPEME. 161-172.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

FORMER DES ENSEIGNANTS PAR LA RECHERCHE : QUELS OUTILS POUR ANALYSER LES EFFETS POTENTIELS SUR LES PRATIQUES ?

Julie HOROKS* – Brigitte GRUGEON-ALLYS** – Monique PEZARD-CHARLES***

Résumé - Dans cette étude, nous proposons des outils que nous avons construits pour analyser les contenus et modalités d'une formation initiale de professeurs des écoles en France, à travers une initiation à la recherche en didactique des mathématiques, et pour envisager ses effets potentiels sur le développement professionnel des enseignants. Nous testons ces outils sur une promotion d'étudiants ayant suivi cette formation.

Mots-clefs : (formation par la recherche, formation initiale, enseignants du 1er degré, analyse multidimensionnelle)

Abstract – In this paper, we are presenting the theoretical and methodological tools that we have built in order to analyse the contents and the set up of a particular schoolteacher initial training in France, through an initiation to research in Mathematics Education. By using these tools, we are also trying to assess the potential effects of this training on the practises of beginner teachers, and give here an example of such an analysis.

Keywords: (initiation to research, initial training, schoolteachers, multimodal analysis)

I. NOS QUESTIONS SUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

1. *Le contexte français*

Depuis quelques années et après plusieurs réformes successives, la formation des enseignants a lieu dans des Ecoles Supérieures du Professorat et de l'Education (ESPE) réparties sur toute la France. Ce sont des écoles internes à des universités, dans lesquelles interviennent des formateurs de terrain (eux-mêmes enseignants dans des classes) et des formateurs à temps plein qui peuvent être enseignants chercheurs. Pour le premier degré (école maternelle - élèves de 3 à 5 ans, et école élémentaire – de 5 à 11 ans), les étudiants peuvent devenir enseignants s'ils remplissent deux conditions :

- réussir le concours de recrutement qui, en ce qui concerne les mathématiques, comporte des résolutions de problèmes de mathématiques et des tâches didactiques consistant en général en des analyses de productions d'élèves ou de documents pour l'enseignement ;

* LDAR-UPEC – France – julie.horoks@u-pec.fr
** LDAR-UPEC – France – brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr
*** LDAR-UPEC – France – monique.pezard-charles@u-pec.fr

Horoks J., Grugeon-Allys B., Pezard-Charles M. (2015) Former des enseignants par la recherche: quels outils pour analyser les effets potentiels sur les pratiques? In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT2, pp. 173-184.

- obtenir un Master, dans le cadre d'une ESPE ou non.

Les Masters dédiés à la formation des enseignants du 1er degré incluent des moments de stage en classe, et une initiation à la recherche, avec des volumes horaires divers suivant les universités.

2. Le cas particulier de l'académie de Créteil

Dans le cadre de la formation dispensée à l'ESPE de l'académie de Créteil, les étudiants suivent pendant les deux années du Master une initiation à la recherche, dans un champ de recherche à choisir parmi tous ceux proposés par l'université, devant leur permettre de s'inscrire dans une dynamique de développement professionnel. Cette initiation porte sur un nombre d'heures représentant environ 120 h du temps de formation, et doit permettre aux étudiants de produire un mémoire de recherche, qui sera évalué dans le cadre du Master. Elle s'insère dans une maquette de Master qui comprend aussi des enseignements disciplinaires et didactiques, et une alternance entre formation et stage qui s'organise autour de contenus professionnels. Les contenus et modalités de formation varient probablement fortement d'un Master à l'autre, voire d'un formateur à l'autre dans un même Master (cf. Sayac 2012). On peut penser qu'ils sont influencés par le statut des concepteurs des maquettes ainsi que celui des formateurs qui les mettent en œuvre.

Le travail que nous présentons implique des enseignants chercheurs du laboratoire LDAR[1], qui sont aussi des formateurs intervenant dans l'initiation à la recherche en didactique des mathématiques analysée ici. Ces formateurs partagent par ailleurs, en tant que chercheurs, des cadres théoriques communs qui ont probablement une influence sur leur façon de concevoir la formation des enseignants. Nous avons voulu nous emparer des questions de recherche que posait ce nouveau type de formation et en particulier interroger ses effets potentiels sur le développement professionnel des enseignants.

3. Présentation de l'option recherche en didactique des mathématiques (OR1)

Les contenus de l'initiation OR1 sont inspirés de théories de la recherche en didactique des mathématiques française, et plus particulièrement de résultats liés à l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. L'initiation doit permettre de familiariser les étudiants avec quelques résultats marquants sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Elle a aussi pour objectif de leur donner les outils nécessaires pour pouvoir réaliser un mémoire de recherche à l'issue des deux années de master. Parmi les cadres théoriques abordés avec les étudiants de l'option OR1, on trouvera principalement celui de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Brousseau 2011), qui est en particulier un outil mobilisé par les étudiants pour réaliser des analyses a priori de séances ou séquences. Le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) est lui aussi utilisé, dans une bien moindre mesure, pour parler de transposition didactique (Chevallard 1985), en particulier pour l'analyse des programmes et des manuels. Enfin, lorsqu'il s'agit d'observer et d'analyser les pratiques enseignantes, c'est le cadre de la Double Approche didactique et ergonomique des pratiques enseignantes (Robert & Rogalski 2002) qui est mis en avant, et en particulier les différentes composantes de l'activité enseignante.

Dans l'OR1, la recherche est présente sous différentes formes : elle est parfois en filigrane, comme source d'inspiration pour le formateur ; elle fournit aussi des objets et outils à enseigner explicitement aux futurs enseignants. Elle peut être présentée de manière directe,

[1] Nadine Grapin, Brigitte Grugeon-Allys, Julie Horoks, Eric Mounier, Cécile Ouvrier-Buffet, Monique Pézard-Charles, Julia Pilet et Nathalie Sayac

par le biais d'articles de recherche à lire. Elle est enfin une démarche à laquelle on initie les étudiants au cours de l'élaboration du mémoire. Ainsi, certaines séances sont introduites à travers un contenu mathématique spécifique (calcul mental, numération), d'autres tournent autour d'un axe de recherche particulier (élèves en difficulté, pratiques enseignantes telles que l'évaluation ou la gestion de l'hétérogénéité) ou d'un outil de recherche lié aux données recueillies (vidéos, manuels, protocoles, productions d'élèves). Quelques cours s'articulent autour de l'exposition d'éléments théoriques et de leur illustration par des exemples de recherches et de résultats. Enfin, de nombreuses séances sont consacrées au suivi méthodologique du travail personnel des étudiants dans la perspective de la rédaction du mémoire. Nous faisons l'hypothèse que tous ces apports n'auront probablement pas le même impact sur la formation des enseignants, et que c'est plus particulièrement à travers les activités où ceux-ci sont amenés à manipuler les outils de recherche issus de ces théorie qu'ils pourront s'approprier ces concepts.

En terme de modalités de formation, dans le cadre de l'OR1, on peut considérer qu'elles diffèrent probablement des stratégies des formateurs utilisées dans le reste de la formation (cf. homologie, monstration et transposition, Houdement & Kuzniak 1996), puisque ce sont ici des activités liées à l'initiation à la recherche et non à l'enseignement : nous formons ici des futurs enseignants, dont on ne s'attend pas à ce qu'ils développent des pratiques de recherche, bien que les outils que nous leur proposons puissent informer aussi les décisions qu'ils pourront prendre pour leur classe. Cela pose la question de la transposition des outils de recherche par nous, formateurs et chercheurs, pour ce type de formation, mais aussi par les étudiants, qui peuvent éventuellement intégrer certains de ces outils à leurs pratiques pour enseigner (par exemple, analyse de manuels pour la classe / analyse de manuels pour la recherche, qui sont des pratiques pas forcément si éloignées). Cela pose en particulier la question des ressources que nous mettons à disposition des étudiants de l'OR1, et qui sont ici principalement des articles de recherche, utiles pour nous en particulier pour introduire des résultats et démarches de recherche et aussi pour les étudiants, pour alimenter l'écriture de leur mémoire : quel usage pourront-ils en faire une fois enseignant ?

Pour tenter de construire un cadre d'analyse permettant de répondre à la question de l'impact de ce type de formation sur les formés, et suite aux recherches de Grugeon (2010) et Grugeon-Allys (2010), nous cherchons à définir une référence pour caractériser la formation en relation avec les pratiques enseignantes visées. Ainsi, nous nous demandons :

- Quels éléments dans la dynamique de développement professionnel des étudiants ont évolué au cours de la formation par la recherche, puis des premières années d'exercice du métier ? Quelles régularités dans les pratiques effectives ? Quelles variabilités ?
- Quelles relations entre ces régularités et les effets potentiels de la formation par la recherche définis a priori à partir du choix des contenus et des modalités de formation ?

Nous n'irons pas ici jusqu'à l'analyse des pratiques effectives, faute de données suffisantes, mais nous détaillons notre façon de mettre en œuvre les outils que nous avons construits pour cette analyse.

II. DES OUTILS POUR ANALYSER LE DISPOSITIF DE FORMATION ET SES EFFETS POTENTIELS SUR LE DEVELOPPEMENT PROFESSIONNEL

L'enjeu de cette recherche est de mettre en relation le scénario de formation proposé dans l'OR1 et les pratiques effectives en classe développées lors des deux premières années d'exercice par les étudiants de deuxième année de master ayant suivi cette formation. Le phénomène didactique étudié est complexe et comporte de multiples facettes, tant du côté de la formation, du côté des pratiques enseignantes que du côté des apprentissages, et il est donc nécessaire de les prendre en compte pour éclairer les différents aspects du phénomène.

Différentes théories didactiques sous-tendent donc nos analyses à tous les niveaux de cette étude :

- celles qui guident les choix effectués pour la formation et sa mise en œuvre et nous permettent de faire un pas de côté pour analyser ce qui se passe dans notre propre formation,
- celles qui nous permettent d'analyser les pratiques des stagiaires dans leurs classes,
- ou encore celles qui sont enseignées comme objets et outils dans le cadre de l'initiation à la recherche.

Pour prendre en compte la complexité de la formation et des pratiques et construire une référence, il est donc nécessaire d'organiser une étude multidimensionnelle en mobilisant plusieurs cadres théoriques en fonction des objets de recherche, formation ou pratiques enseignantes, du grain d'analyse global ou local, du statut de l'enseignant générique ou spécifique.

1. *Nos hypothèses sur la formation des enseignants*

Nos hypothèses portant sur la formation relèvent de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski 2002) qui imbrique une approche didactique où les activités du professeur sont analysées en fonction des apprentissages potentiels des élèves en mathématiques et une approche ergonomique où le professeur est considéré comme un individu dans l'exercice du métier d'enseignant. Les activités des professeurs, c'est à dire ce qu'ils font, disent, pensent, sont constitutives de leurs pratiques, et la double approche permet, pour un enseignant donné, une caractérisation et une interprétation de ces pratiques à partir de leur recomposition via cinq composantes (cognitive et médiative, personnelle, institutionnelle et sociale). De plus, des cohérences sont observables à différents niveaux de l'activité du professeur, au niveau global (préparations et stratégie d'enseignement), local (organisation et gestion des situations, gestion des interactions et des improvisations), micro (gestion des gestes professionnels).

Ces hypothèses nous viennent de recherches déjà effectuées : l'importance de s'appuyer sur le collectif et d'organiser des mises en commun (cf. double régulation, Rogalski 2008), de partir des pratiques presque déjà là des enseignants (Robert, Roditi & Grugeon 2008), de leur proposer des analyses de ressources en prise avec la réalité du métier pour développer l'expérience (mais dans un contexte de recherche), de leur apporter non pas des méthodes à appliquer mais plutôt des alternatives pour enseigner (Robert & Horoks 2007). De même, nous mettons en avant les contraintes du métier d'enseignant tout comme celles de la formation. Nous tenons compte en particulier des besoins liés au niveau en mathématiques de nos étudiants, souvent faible et hétérogène, ainsi que des besoins ressentis pendant les stages, liés au quotidien de la classe (nécessité de préparations régulières) et aux diverses contraintes des terrains de stage (dans un contexte pas toujours facile de partage de la classe avec un autre enseignant).

2. *Concevoir et mettre en œuvre la formation, autour de contenus issus de la recherche : une cohérence entre ce qui est transmis et la façon de le transmettre ?*

La conception et la mise en œuvre de la formation s'appuient pour nous sur plusieurs cadres en fonction des aspects étudiés et de différents grains d'analyse. Les contenus de la formation définis a priori prennent en compte des apports de la recherche en didactique des mathématiques en particulier des concepts issus de la TSD : situation didactique, situation a didactique, situation d'action, de formulation ou de validation, variable didactique, contrat didactique, dévolution, institutionnalisation, milieu, stratégie optimale, rétroaction du milieu, analyse a priori / a posteriori, conception, mais aussi du concept de transposition didactique ou de type de tâche[2] issu de la TAD. Ce sont aussi des concepts utiles pour nous en ce qui concerne la mise en place des enseignements de ces contenus (organiser différentes situations porteuses d'apprentissages pour nos étudiants, avec différentes phases dans les séances), et en tout cas de l'analyse que nous pouvons faire des séances de formation au sein de l'OR1.

Dans les activités que nous proposons en formation, ces concepts didactiques doivent être mobilisés comme outils conceptuels par les étudiants, notamment pour concevoir des situations, des tests, des questionnaires, des grilles d'observation, et les analyser, si possible au niveau de l'usage qu'en fait le chercheur et en perspective de l'usage que peut en faire l'enseignant. Dans le cadre de cette initiation, il y a donc deux grands types d'outils proposés aux étudiants : certains des concepts abordés peuvent être utiles, plus ou moins directement, pour la classe, tandis que d'autres ne voient leur présence ici justifiée que pour engager les étudiants dans l'initiation à la recherche, même si nous formons l'hypothèse qu'ils pourront eux aussi participer au développement des pratiques de ces futurs enseignants, (comme par exemple la construction de tests pour repérer les conceptions des élèves sur une notion donnée). Mais ce double rôle n'est probablement pas facile à tenir pour les étudiants (qui sont déjà à la fois dans des postures d'étudiants et d'enseignants, suivant les moments de leur formation, (Sayac 2012). En effet, on peut penser par exemple que conduire une séance dans sa propre classe ou y mener une expérimentation pour le mémoire ne sont pas des activités totalement équivalentes : il faudra peut-être s'interdire d'aider certains élèves pour ne pas fausser les résultats de l'expérimentation, ce qui n'est pas une posture facile à tenir en tant qu'enseignant ayant pour objectif de faire progresser les élèves.

Les contenus de didactique des mathématiques jouent donc ici un rôle triple :

- ce sont des objets transmis aux formés, un peu transposés (uniquement des concepts et résultats liés aux mathématiques et problématiques du 1er degré. Il y a peu d'insistance sur le côté théorique mais on peut faire le lien avec les problèmes et constats à l'origine de la genèse de ces concepts)
- ce sont aussi des outils de formation puisque les tâches proposées poussent les étudiants à développer des activités de recherche dont on fait l'hypothèse qu'elles permettront de prendre du recul sur leur pratique d'enseignement
- ce sont enfin des outils d'analyse des contenus (en termes de types de tâches et de transposition) et de la mise en œuvre de la formation dans l'OR1 (en termes d'organisation didactique)
- Pour modéliser les niveaux de l'activité de l'enseignant visés dans l'OR1 il est nécessaire de caractériser les types de tâches (Chevallard 1999) proposés et les modalités de formation. Les types de tâches ainsi caractérisés devraient permettre de motiver les raisons d'être des concepts travaillés et d'amener les étudiants à mobiliser les concepts outils transposés de la didactique des mathématiques (essentiellement ceux de la TSD) pour les résoudre. L'usage de ces outils devrait conduire les étudiants

[2] Pour Chevallard (1998): « Dans la plupart des cas, une tâches (et le type de tâches *parent*) s'exprime par un *verbe* : *balayer* la pièce, *développer* l'expression littérale donnée (…) Un genre de tâches n'existe que sous la forme de différents *types* de tâches, dont le contenu est étroitement spécifié. *Calculer...* est un genre de tâches ; *calculer la valeur (exacte) d'une expression numérique contenant un radical* est un type de tâches, de même que *calculer la valeur d'une expression contenant la lettre x quand on donne à x une valeur déterminée* »

à construire dialectiquement une « certaine » prise de distance par rapport à une pratique professionnelle et une première construction d'expérience professionnelle en prise sur la réalité de l'enseignement. Ce choix théorique reposant sur une approche multidimensionnelle permet de définir une référence en termes d'activités enseignantes visées[3] par la formation, pour caractériser à la fois les tâches proposées et les activités qui peuvent en découler pendant la formation, mais aussi les pratiques enseignantes que l'on cherche à former à plus long terme. A partir de cette référence, nous construisons deux grilles d'analyse des pratiques :

- La liste des activités enseignantes visées a priori par la formation mise en relation avec une grille d'analyse des contenus de formation
- L'échelle de développement a priori des pratiques pour évaluer les pratiques effectives des professeurs d'école en lien avec les activités enseignantes développées en classe.

Nous présentons ces deux outils méthodologiques dans la partie suivante de cette étude.

3. *Analyser les effets de la formation sur les pratiques enseignantes*

L'analyse des pratiques enseignantes durant la première année d'exercice des anciens étudiants doit nous permettre de mettre en perspective les activités enseignantes visées par la formation et les activités effectives des enseignants en classe.

Les activités enseignantes visées par la formation relèvent de l'i-genre 3 (Butlen et al. 2003) et doivent permettre une prise de conscience des apports de l'exercice de la vigilance didactique, définie « comme un ajustement didactique permanent de la part du professeur faisant appel aux deux composantes cognitive et médiative des pratiques et s'exerçant dans les trois niveaux global, local et micro. » (Charles-Pézard 2010). Pour exercer une certaine vigilance didactique, les enseignants doivent mobiliser des connaissances mathématiques et didactiques en situation, en particulier « des outils permettant de lire le réel, issus de la didactique des mathématiques mais transformés en vue de l'action d'enseigner ». Ces outils issus en partie de la TSD peuvent, par exemple, permettre la mise en œuvre d'une analyse a priori pour identifier le savoir mathématique en jeu dans une situation d'apprentissage, le choix des valeurs des variables didactiques et l'incidence de celles-ci sur les procédures et les résultats des élèves, dans le but de mieux anticiper la mise en actes du projet. Pendant la classe, ces outils peuvent aider à la conduite des différentes phases et à la prise de décisions.

La double approche, fondée sur la théorie de l'activité, dans laquelle s'inscrivent aussi les apports de Vygotsky, permet de distinguer tâche prescrite / tâche effective et pratique visée (prescrite) / pratique effective (cf. Rogalski 2008). L'évolution des pratiques est étudiée à partir de l'étude des écarts entre les acticités enseignantes visées en formation et celles effectivement mises en place en classe, en termes de différents types de savoirs pour l'enseignement, des différentes compétences professionnelles développées pour l'exercice d'une vigilance didactique, de régularités ou de variabilités de pratiques effectives (Pariès, Robert & Rogalski 2008). Les régularités sont mises en perspective des choix réalisés en formation, notamment des types de tâches développés en lien avec les concepts de la didactique des mathématiques mobilisés. Les variabilités sont mises en perspective des contraintes liées soit à la composante personnelle, soit aux composantes institutionnelle ou sociale (notamment l'établissement d'exercice)

---

[3] Quand on parle d'activité, il s'agit d'activité engendrée par une tâche, au sens de la théorie de l'activité. Quand on parle d' « activité visée », on entend avec une technique relevant de la technologie et théorie visée, c'est-à-dire les activités enseignantes mettant en jeu les concepts transposés et les outils de la didactique des mathématiques.

III. NOTRE METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Nous formulons l'hypothèse de recherche suivante : “Une entrée par la recherche dans la formation à partir de types de tâches s'appuyant sur l'usage d'outils conceptuels fondés sur des résultats de recherche en didactique, définis a priori, peut contribuer à enrichir et à favoriser l'acquisition de certains savoirs pour l'enseignement ainsi que l'exercice d'une certaine vigilance didactique”. Pour tenter de tester cette hypothèse, nous mettons en regard les activités enseignantes visées a priori par la formation et les pratiques effectives de nos anciens étudiants.

1. Activités enseignantes visées a priori par la formation et types de tâches proposées

Les activités enseignantes visées sont listées a priori (et non en fonction des contenus de l'option) à partir du référentiel national de compétences des pratiques enseignantes (cf. Bulletin officiel du 25 juillet 2013) et des résultats de recherche sur les pratiques. Elles prennent en compte les contenus mathématiques visés et leurs spécificités, à partir des résultats de la recherche en didactique des mathématiques pour le 1er degré. Nous listons dans les tableaux 1 et 2 différentes activités d'enseignant visées[4], constituant ses pratiques, ainsi que les types de tâches conçus dans la formation en OR1 pour développer ces pratiques, et nous nous demandons :

- Pour chaque tâche proposée dans le cadre de l'initiation à la recherche via l'option OR1, quelles sont les activités enseignantes potentiellement visées ? Cela nous amène en particulier à questionner les raisons d'être des tâches que nous proposons en formation à la recherche pour de futurs enseignants.
- Pour chaque activité enseignante visée, quelles sont les tâches proposées dans le cadre de l'option OR1, et les contenus de DDM relatifs à ces tâches, qui peuvent avoir une influence particulière sur le développement de cette pratique ? Et par conséquent, avons-nous donné les moyens à nos étudiants de travailler dans l'option certaines activités que nous jugeons importantes pour leurs pratiques futures ?

Repérer les enjeux d'un apprentissage pour choisir une situation adaptée
Choisir et utiliser de façon pertinente un manuel ou d'autres ressources
Construire une situation adaptée (par rapport aux objectifs, à la séquence)
Connaître les savoirs mathématiques et leur didactique
Gérer différents types de séances (Introduction, institutionnalisation, entraînement, réinvestissement, évaluation)
Gérer les différentes phases d'une séance (dévolution, recherche, mise en commun (formulation, validation et hiérarchisation des procédures), institutionnalisation)
Evaluer les élèves
Gérer l'hétérogénéité des procédures des élèves
Faire un retour réflexif sur le déroulement d'une séance
Continuer à se former et innover.

Tableau 1 *-– Activités enseignantes visées par la formation*

Analyser des tâches et des situations
Analyser des productions d'élèves
Analyser des manuels
Faire des analyses a priori / a posteriori de séances
Analyser des vidéos au regard d'une problématique
Rechercher et analyser des articles
Problématiser et formuler des hypothèses de recherche
Construire une méthodologie pour répondre à un questionnement

Tableau 2 *– Types de tâches proposées dans le cadre de l'OR1*

[4] Nous distinguons les activités d'enseignant des activités de chercheur, visées aussi par cette formation, mais que nous ne détaillons pas ici.

Ainsi il nous semble que par exemple les tâches d'analyse de productions d'élèves que nous proposons dans le cadre de l'option, participent en particulier à l'activité « Evaluer les élèves » mais aussi, moins directement peut-être, « Gérer les différentes phases d'une séance » ou « Gérer l'hétérogénéité des procédures des élèves », qui sont des activités enseignantes visées par la formation. De façon réciproque, on peut se demander quelles tâches proposées concernent par exemple l'activité « Gérer différents types de séances », et constater vraisemblablement que peu de travail visant cette activité est proposé dans le cadre de l'option. Cela nous permet donc de questionner les activités potentiellement travaillées, ou non, dans notre offre de formation.

Mais bien entendu nous avons conscience que certains de ces types de tâches peuvent être proposés dans les autres volets de la formation. Quels sont ceux qui sont spécifiques à l'initiation à la recherche ? Et pour nous, d'un point de vue méthodologique comment prendre en compte le reste de la formation par rapport aux tâches proposées et aux effets potentiels sur les pratiques ? Même si les types de tâches peuvent être communs avec les autres UE mobilisant des contenus de didactique des mathématiques, nous pouvons faire l'hypothèse qu'ils ne sont probablement pas équivalents pour autant. En effet, les tâches mises en œuvre dans d'autres UE utilisent différents types de ressources mais rarement, voire jamais, les articles de recherche utilisés dans une UE d'initiation à la recherche. D'autre part, préparer et mener une séance dans sa classe relève du développement de pratiques professionnelles alors que définir et mener une expérimentation en classe pour tester des hypothèses de recherche amène à prendre de la distance par rapport à des choix didactiques définis a priori, même si ce type de tâche permet aussi probablement de développer des pratiques d'enseignant.

Il n'est pas toujours facile de faire ce pas de côté, pour des étudiants qui visent le métier d'enseignant, sans l'avoir encore vécu, et pour des chercheurs qui forment aussi et surtout de futurs enseignants !

2. *Niveaux de développement des pratiques enseignantes*

Pour étudier la dynamique de développement professionnel des professeurs d'école stagiaires (PES) débutants (étudiants ayant suivi l'OR1 en 2011-2013), il est nécessaire de définir une grille permettant d'analyser, de comparer et d'évaluer les pratiques des PES en dehors de la classe et en classe. Pour ceci, nous avons élaboré a priori une échelle des niveaux de développement des pratiques enseignantes. Nous nous référons au cadre de la Double Approche pour prendre en compte les contraintes institutionnelles, sociales et personnelles. Nous prenons en compte les trois i-genres définis par Butlen et al. (2003) et en particulier l'i-genre 3, regroupant des enseignants qui réalisent des scénarios proches de ceux préconisés en formation, Ces mêmes chercheurs ont proposé une échelle pour analyser les pratiques des enseignants, en référence à une proximité plus ou moins grande avec les pratiques du i-genre 3 attachées à la gestion des différentes phases d'une séance, l'ensemble permettant d'évaluer la vigilance didactique de l'enseignant.

Toutefois, l'échelle définie par Butlen et al. (2003) ne prend pas en compte le niveau global de l'organisation des pratiques, et les activités enseignantes qui ont lieu en dehors de la classe. Nous avons donc croisé les activités enseignantes visées pendant la formation en lien avec les types de tâches travaillés en formation et les niveaux de développement définis. Nous obtenons, pour chacune des activités listées, 3 niveaux, C, B et A. Le niveau C relève plutôt du i-genre 1, le niveau A du i-genre 3 de référence. Entre les deux, le niveau B indique la connaissance de savoirs didactiques partiels, peu structurés et mobilisés de façon isolée. On peut aussi envisager un niveau A-, entre B et A, qui relèverait d'un i-genre 3 non maîtrisé, ne comportant ni hiérarchisation des procédures, ni institutionnalisation complète (seulement locale), et qui permettrait au chercheur d'identifier une pratique en voie de construction. Par exemple, pour l'activité « gérer les différentes phases d'une séance », les 3 niveaux sont détaillés dans le tableau 3.

niveau C	niveau B	niveau A
* Pas de phases clairement identifiées (oral collectif, exercices individuels écrits avec faible mise en commun, usage dominant de fichier) * Peu d'initiatives laissées aux élèves, validation à la charge du professeur	* Des phases sont organisées mais pas forcément gérées pour engager les élèves dans la recherche et la comparaison des procédures * Initiatives partagées mais peu de validation à la charge des élèves, ou qui ne visent pas la construction d'une rationalité mathématique * au cycle 1, les phases sont gérées au sein des ateliers	* Organisation d'une phase de lancement (reformulation ou autre) * Organisation d'un temps de recherche * Organisation d'une mise en commun (formulation, validation et hiérarchisation des procédures), avec des initiatives partagées et des validations visant à la construction d'une rationalité mathématique * Organisation de bilans conduisant à une institutionnalisation (dépersonnalisation, décontextualisation) en lien avec l'activité * au cycle 1, les phases sont gérées aussi au sein du collectif

Tableau 3 *- les 3 niveaux de développement détaillés pour l'activité "gérer les différentes phases d'une séance"*

Nous repérons les activités enseignantes dont les niveaux de développement sont plus particulièrement élevés pour la plupart de nos anciens étudiants, et les mettons en lien avec les tâches proposées en formation, pour en déduire un effet éventuel (même si cela reste à nuancer compte tenu de l'impossibilité de prendre en compte ici l'intégralité de la formation reçue par les étudiants).

Nous présentons maintenant brièvement l'expérimentation réalisée et comment nous avons mobilisé ces outils pour étudier le niveau de développement professionnel des étudiants lors de la première année d'exercice.

3. Expérimentation et données recueillies sur les pratiques effectives

Nous avons étudié la dynamique de développement des pratiques des premiers étudiants ayant choisi l'OR1 « Apprentissages mathématiques à l'école : approche didactique » comme UE d'initiation à la recherche et l'ayant suivie sur 2 ans : en 2011-2012 pour le M1 et 2012-2013 pour le M2.

Nous avons fait passer un questionnaire à la trentaine d'étudiants qui l'ont suivie, en fin de M2 avant les soutenances, pour appréhender leurs points de vue sur la formation reçue. Nous ne présenterons pas cette partie de la recherche ici, même si elle nous permet de repérer des évolutions éventuelles du regard que les étudiants portent sur leur formation et son utilité.

En 2013-2014, nous avons organisé le suivi de 12 PES issus de cette promotion de M2. Au delà des PES ayant suivi l'OR1, nous avons aussi suivi 8 étudiants ayant participé à d'autres options de recherche. Ces étudiants constituaient un groupe témoin, pour lequel il est cependant plus difficile d'analyser la formation reçue et son impact éventuel sur les pratiques, faute d'informations, ce qui explique aussi que nous n'ayons pas réussi à renseigner avec la même précision les grilles d'observation les concernant. Nous cherchons des régularités dans les pratiques des PES ayant suivi l'OR1. Pour accéder à des éléments des pratiques de ces PES hors classe et en classe, pendant cette première année d'exercice, nous avons réalisé 2 visites. Un protocole de visite avait été conçu pour que tous les chercheurs respectent les mêmes modalités et explicité aux PES volontaires.

Nous avons défini une grille d'observation commune à l'ensemble des chercheurs impliqués dans la recherche pour organiser le recueil d'informations suite à l'observation, lors de chaque visite. Suite aux 2 visites, nous avons construit une grille d'analyse relative à l'échelle de développement. Nous avons ainsi décrit la dynamique de développement à l'œuvre en fin de première année d'exercice, à partir des niveaux de développement des pratiques, pour chaque activité visée a priori dans la formation, indiqués après chaque visite. La comparaison de ces grilles doit permettre ainsi de repérer des régularités à mettre en relation avec la formation et de faire apparaître des variabilités à mettre en relation avec d'autres déterminants des pratiques (institutionnel, social et personnel), notamment l'établissement dans lequel les PES ont exercé, l'équipe pédagogique avec laquelle ils ont travaillé.

Nous avons aussi réalisé un entretien après la deuxième visite pour obtenir des traces de la formation suivie pendant l'OR1, sur des points qui n'auraient pas été spontanément abordés lors des entretiens formatifs de visite. L'enjeu de l'analyse de ces données est de tester notre hypothèse de recherche. Pour les PES ayant suivi l'option, nous avons réalisé une synthèse des niveaux de développement par type d'activité (cf. tableau 4). Il apparaît clairement des régularités dans l'analyse des niveaux de développement, qui se situent entre A et B, selon les activités visées a priori par la formation[5].

Les PES ont construit des situations qui, selon nous, ont globalement du sens pour les élèves. Lors de leur préparation, ils ont anticipé plus ou moins implicitement les procédures et les erreurs envisageables dans la résolution des tâches proposées en mathématiques, sans toujours faire explicitement référence aux concepts de la didactique.

Activités	[6]		
Repérer les enjeux d'un apprentissage pour choisir une situation adaptée	1	5	6
Construire une situation adaptée (par rapport aux objectifs, à la séquence)	1	6	5
Choisir et utiliser de façon pertinente un manuel ou d'autres ressources	1	8	3
Connaître les savoirs mathématiques et leur didactique en lien avec leur enseignement	1	8	3
Connaître les savoirs mathématiques et leur didactique en lien avec les apprentissages des élèves	1	9	2
Gérer différents types de séances	1	7	4
Gérer les différentes phases d'une séance (dévolution, recherche, mise en commun institutionnalisation)	1	4	7
Evaluer les élèves	1	8	3
Gérer l'hétérogénéité des procédures des élèves	1	9	2
Faire un retour réflexif sur une séance	1	4	7
Continuer à se former et innover	1	4	7

***Tableau 4** – niveaux de développement des pratiques des PES sortants de l'OR1*

En ce qui concerne la gestion des différentes phases d'une séance, nous constatons qu'à l'exception de l'une d'elle, les PES laissent un temps de recherche assez conséquent aux élèves, puis prennent en compte les procédures pendant une phase de mise en commun mais certains n'organisent pas encore leur hiérarchisation. Nous remarquons que les phases de synthèse sont davantage menées collectivement, ce qui entraîne que la validation reste encore souvent prise en charge par l'enseignant. Ces résultats nous paraissent cohérents avec les

[5] à l'exception d'une PES qui était en grande difficulté et n'arrivait pas à gérer la paix scolaire dans sa classe, les origines de ces difficultés relevant certainement d'éléments extérieurs à la formation

[6] C'est la même PES, en difficulté dans sa classe pour des raisons de discipline notamment, qui a été notée au niveau C pour toutes les pratiques visées.

types de tâches souvent proposées dans le cadre de l'OR : l'analyse de tâches, de procédures et de séances en classe avec en particulier le découpage en phases de ces séances.

Il nous faut encore comparer ces résultats avec les niveaux de développement des 8 PES témoins, qui, bien que n'ayant pas participé à l'OR1, ont cependant côtoyé certains des formateurs de l'OR1 dans les autres UE contenant de la didactique des mathématiques, ce qui n'est probablement pas neutre pour notre analyse.

IV. CONCLUSION

1. *Des variabilités liées aux contraintes*

Nous identifions des variabilités entre les PES qui peuvent être liées à différents types de contraintes. Suite aux entretiens, nous associons certaines contraintes à la composante personnelle.

Ces variabilités peuvent relever du rapport des PES au rôle de l'école, de leur rapport au savoir mathématique, d'une maturité plus ou moins grande, d'une posture ayant eu plus ou moins de mal à s'installer. Ces variabilités peuvent aussi dépendre du type d'établissement dans lequel les PES ont effectué leur première année d'exercice : nomination en maternelle ou en élémentaire, nomination en ZEP ou non, existence d'un projet d'école ou non, travail d'équipe possible avec des collègues installés ou non depuis longtemps dans l'établissement. Ces conditions d'exercice vont favoriser ou non leur intégration dans leur nouveau métier.

2. *Des effets sur les pratiques...*

En ce qui concerne l'hypothèse formulée, l'analyse des données recueillies suite à la première année d'exercice des PES ayant suivi l'UE d'initiation à la recherche à partir de l'OR1 met en évidence qu'une entrée par la recherche dans la formation peut avoir des effets favorables :

- un changement probable du regard des PES sur la formation, malgré des contraintes très fortes lors de l'année de formation,
- le développement d'une certaine vigilance didactique, en lien avec l'usage des d'outils conceptuels fondés sur des résultats de recherche en didactique, mobilisés pour résoudre les types de tâches proposés dans l'OR1, même si ce résultat reste à étayer.

Il est important d'étudier la stabilité d'un tel développement à moyen terme puis à plus long terme puis de le comparer aux PES du groupe témoin, ce que nous n'avons pas encore réalisé.

3. *… et des effets sur la formation*

La recherche engagée a apporté des effets concrets sur la formation en faisant évoluer la maquette de l'OR1 pendant l'année 2013-2014 : la réflexion sur les contenus et les modalités de la formation par l'initiation à la recherche, et leurs effets potentiels, nous a ainsi amenés à repenser notre offre de formation pour y faire figurer un ensemble de types de tâches en lien avec la couverture de notre référentiel, en ayant plus que jamais à l'esprit, pour chaque séance proposée, les activités enseignantes visées et les besoins des futurs PES.

REFERENCES

Brousseau G. (2011) *La théorie des situations didactiques en mathématiques* (Vol. 5, No. 1, pp. 101-104). Presses universitaires de Rennes.

Butlen D., Masselot P., Pezard M. (2003) De l'analyse des pratiques effectives de professeurs d'école débutants nommés en ZEP/ REP à des stratégies de formation, *Recherche et formation* (44), 45-61.

Charles-Pezard M. (2010) Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques* 30(2), 197- 261

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche Anthropologique. La notion d'organisation praxéologique. Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques. Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle, 119-140.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique* (Vol. 95). Grenoble: La pensée sauvage.

Grugeon-Allys B. (2010) Evolution des pratiques des professeurs débutants de mathématiques pendant les premières années d'exercice, In Goigoux R., Ria L., Toczek-Capelle M.C. (eds), *Les parcours de formation des enseignants débutants*, Presses Universitaires Blaise Pascal. ISBN 978-2-84516-401-7.

Grugeon B. (2008) Quelle évolution des pratiques d'un professeur stagiaire de mathématiques pendant son année de formation à l'IUFM. In Vanderbrouck F. (ed.), *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 328-366). Toulouse : Octarès. ISBN 978-2-915346-59-6

Houdement C., Kuzniak A (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(3), 287-322.

Paries M., Robert A., Rogalski J. (2008) Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré. *Educational studies in mathematics*, 68(1), 55-80.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne des sciences, des mathématiques et des technologies* 2.4, 505-528.

Robert A., Horoks J. (2007) Tasks Designed to Highlight Task-Activity Relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 279–287.

Robert A., Roditi E., Grugeon B. (2008) Diversité des offres de formation et travail du formateur de professeurs de mathématiques du secondaire. *Petit x* (74), 60-90.

Rogalski J., (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité : une perspective de psychologie ergonomique, in F. Vanderbrouck (eds), *La classe de mathématiques : activité des élèves et pratiques des enseignants* pp. 23-30. Toulouse : Octarès.

Sayac N. (2012) Pratiques de formateurs en mathématiques dans le premier degré. *Les savoirs de la formation* (71), 115-130.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

CONCEPTION ET EXPLOITATION D'UN DIAGNOSTIC EN MATHÉMATIQUES À L'ENTRÉE EN FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRE POUR ORGANISER DES STRATÉGIES DE FORMATION

Julia PILET[*] – Brigitte GRUGEON-ALLYS[**] [1]

Résumé – Dans cette communication, nous présentons notre approche théorique et méthodologique pour concevoir une évaluation diagnostique en mathématiques au service de la formation que nous illustrons dans le domaine de la géométrie. Nous illustrons ensuite les résultats de l'évaluation passée par les étudiants des groupes de formation sur les sites de formation de l'ESPE de l'académie de Créteil (pourcentage de réussite, profils des étudiants sur quatre domaines mathématiques). Nous explicitons nos choix d'enseignement pour faire évoluer le rapport des étudiants aux mathématiques et développer des savoirs mathématiques et didactiques en lien avec leur profession.

Mots-clefs : Diagnostic, Evaluation, formation initiale des professeurs d'école, Régulation et personnalisation des apprentissages, Didactique des mathématiques.

Abstract – In this paper, we present our theoretical and methodological approach to design a diagnostic assessment in mathematics at the service of the training which we illustrate in the field of geometry. Then, we illustrate the results of the assessment passed by students training groups on training sites of the ESPE of Academy of Créteil (success rate, student profiles on four mathematical domains). We explain our choices of education to change the views of students on mathematics and develop mathematical and didactic knowledge related to their profession.

Keywords: Diagnosis, Assessment, Initial training of school teachers, Personalization of learning, Mathematics Education

Cette communication s'inscrit dans l'axe « dispositif de formation » du groupe de travail GT2. Nous y présentons le dispositif ORPPELA conçu dans le cadre d'un dispositif IDEA[2] de l'Université Paris-Est Créteil visant à « **Organiser une Progressivité des Parcours de formation des Etudiants en master Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation (MEEF) et leur Accompagnement »** en mathématiques. Ce projet s'inscrit dans

* Université Paris Est Créteil – France – julia.pilet@u-pec.fr
** Université Paris Est Créteil – France – brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

[1] Cette recherche est réalisée dans le cadre du projet IDEA *ORPPELA,* à l'ESPE de Créteil – Université Paris Est Créteil, coordonné par B. Grugeon-Allys avec l'équipe des enseignants C. Moussy, M-C. Marillier, B. Galin, F. Brugier, et enseignants chercheurs, J. Pilet et J. Horoks. http://espe.u-pec.fr/l-espe/innovation-pedagogique/projet-orppela-organiser-une-progressivite-des-parcours-de-formation-des-etudiants-en-master-metiers-de-l-education-et-de-la-formation-et-leur-accompagnement-682061.kjsp?RH=1412862302533

[2] Dans le cadre des Initiatives d'Excellence en Formations innovantes (IDEFI) du Programme Investissements d'Avenir, Université Paris-Est met en oeuvre le dispositif IDEA.

Pilet J., Grugeon-Allys B. (2015) Conception et exploitation d'un diagnostic en mathématiques à l'entrée en formation initiale des enseignants du premier degré pour organiser des stratégies de formation. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT2, pp. 185-198.

le contexte spécifique de la formation initiale des enseignants du premier degré de l'académie de Créteil en France.

Depuis 2009, la formation initiale des enseignants se déroule dans le cadre d'un master dont la mention est « Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation » (MEEF). Ce master prépare aux métiers de l'éducation et au concours de recrutement des professeurs des écoles. Les étudiants de l'académie de Créteil sont pour la plupart issus de filières non scientifiques et ont souvent un passé douloureux avec les mathématiques. De plus, de nombreux étudiants reprennent des études dans le cadre d'une reconversion professionnelle. La formation a pour enjeu de faire évoluer leur rapport aux mathématiques, de leur permettre de construire les savoirs mathématiques et didactiques nécessaires à la profession mais aussi de leur redonner le goût et l'envie de faire des mathématiques pour qu'ils le transmettent à leurs élèves.

Cette spécificité de l'hétérogénéité importante des étudiants de l'académie de Créteil se destinant aux métiers de l'enseignement nous a conduit à développer un dispositif de formation plus attentif aux parcours antérieurs et à la diversité des profils des étudiants. Ce dispositif vise à concevoir et mettre en place, d'une part, une évaluation diagnostique des connaissances et compétences des étudiants en mathématiques à l'entrée du master MEEF, et, d'autre part, des stratégies de formation adaptées aux acquis et besoins d'apprentissage repérés des étudiants. Un autre enjeu concerne le développement de l'autonomie des étudiants.

Dans cette communication, nous présentons notre approche théorique et méthodologique pour concevoir une évaluation diagnostique en mathématiques au service de la formation. Nous illustrons dans le domaine de la géométrie. Nous présentons ensuite les résultats de l'évaluation passée par les étudiants des groupes de formation sur les sites de formation de l'ESPE de l'académie de Créteil (pourcentage de réussite, profils des étudiants sur quatre domaines mathématiques). Nous terminons par nos choix d'enseignement pour faire évoluer le rapport des étudiants aux mathématiques et développer des savoirs mathématiques et didactiques en lien avec leur future profession.

I. UN REFERENTIEL POUR CONCEVOIR LE TEST ET DECRIRE LE PROFIL DES ETUDIANTS PAR DOMAINE MATHEMATIQUE ETUDIE

1. Les domaines mathématiques retenus

Nous avons retenu quatre domaines mathématiques dans le test : celui de la géométrie, celui des nombres et de l'arithmétique en primaire, celui de l'algèbre et celui de la proportionnalité et des fonctions. Ces domaines structurent les programmes mathématiques français et leur maîtrise tant mathématique que didactique est au cœur du développement professionnel des futurs enseignants. Même si le domaine de l'algèbre n'est pas au programme de l'école primaire, nous l'avons conservé dans le test parce qu'un certain nombre de travaux de didactique des mathématiques (Chevallard 1985, 1989 ; Grugeon 1997) soulignent le rôle de l'algèbre pour étudier les nombres, les opérateurs et leurs propriétés. De plus, le domaine des grandeurs et mesure n'est pas traité à part entière dans la version actuelle du test. Plusieurs exercices de géométrie et de proportionnalité y font néanmoins appel.

2. Cadrage général du référentiel par domaine

Pour chaque domaine, nous établissons une référence afin de situer les connaissances et compétences des étudiants dans un domaine mathématique donné. Cette démarche s'appuie sur les travaux de Grugeon (1997), Chenevotot, Grugeon et Delozanne (2011), Grugeon-Allys, Pilet, Chenevotot-Quentin, Delozanne (2012) qui, depuis une vingtaine d'années, développent une évaluation diagnostique, *Pépite*, des connaissances et des compétences en algèbre des élèves de fin de scolarité obligatoire en France pour organiser la régulation des apprentissages. Dans ces travaux, l'évaluation Pépite a une fonction diagnostique et formative, au service des apprentissages. Nous fondons le diagnostic dans une approche épistémologique, didactique et cognitive du savoir et non dans une approche psychométrique. Cette approche permet une analyse de réponses des élèves qui dépasse une analyse en termes de « réponse correcte » ou « incorrecte » et de pourcentage de réussite sur l'ensemble du test. En effet, à partir de travaux de didactique de l'algèbre (Chevallard 1985, 1989), Grugeon a modélisé l'algèbre comme un outil pour résoudre des problèmes mettant en jeu différents traitements algébriques (généralisation, modélisation, preuve), et un ensemble d'objets (expressions algébriques, équations, fonctions, etc.) auxquels sont associés plusieurs représentations sémiotiques (écritures algébriques, programmes de calculs, graphes, etc.). Cette référence permet d'évaluer les différents aspects de l'activité algébrique. Cette approche rejoint le point de vue développé par Vergnaud (1990) à travers les champs de conceptuels :

> « Un concept ne peut être réduit à sa définition, du moins si l'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens » (p.135).

C'est pourquoi l'évaluation *Pépite* est construite, d'une part, à partir d'un ensemble d'exercices qui recouvrent les types de problèmes du domaine de l'algèbre et, d'autre part, d'une analyse des réponses des élèves en fonction de plusieurs dimensions, définies *a priori*, pour caractériser la nature des procédures mises en œuvre par l'élève. Cette analyse, dite « locale », est suivie d'une analyse « globale et transversale », sur l'ensemble des questions du domaine. Elle consiste à repérer des cohérences de fonctionnement de l'élève, c'est-à-dire des régularités de fonctionnement dans le domaine considéré. Dans le cas d'un fonctionnement erroné, ces cohérences peuvent être associées à des erreurs « récurrentes » ou reproductibles dans un contexte proche. Cette analyse globale est directement liée à la notion de champ conceptuel : « Il est nécessaire, pour comprendre le développement et l'appropriation des connaissances, d'étudier des ensembles assez vastes de situations et de concepts, c'est-à-dire des champs conceptuels. Etudier l'apprentissage d'un concept isolé, ou d'une technique isolée, n'a pratiquement pas de sens. » (Vergnaud 1986, p.28).

Grugeon (1997) a modélisé le profil des élèves en algèbre, point d'appui pour faciliter la construction de séquences afin de permettre aux élèves de comprendre les limites de certaines procédures et de reconstruire des connaissances (Pilet 2012). Dans l'évaluation diagnostique à destination des futurs enseignants de primaire, nous reprenons cette approche en modélisant chaque domaine par un champ conceptuel pour établir un référentiel. Cette démarche offre de plus la possibilité de questionner le transfert du modèle du test Pépite à d'autres domaines que celui de l'algèbre et à un niveau scolaire supérieur que celui du collège.

Chaque domaine s'organise donc autour de :

- La résolution des problèmes (aspect outil) qui donnent du sens aux concepts (référent),
- La construction et le traitement des propriétés des concepts mobilisés lors de la résolution (aspect objet – signifié),
- Les liens entre différentes représentations sémiotiques (signifiants) associés à différents registres de représentation sémiotique.

Le référentiel développé consiste à définir trois niveaux de conceptualisation sur chaque dimension. Leur définition s'appuie sur l'étude de l'évolution des conceptions des élèves en lien avec des ruptures d'ordre épistémologique du côté des connaissances et du côté des démarches et des raisonnements au cours de l'apprentissage. Elle s'appuie également sur l'étude des difficultés liées à des décalages de l'activité mathématique attendue lors de la transition entre institutions (école/collège, collège/lycée, lycée/université). Chaque niveau donne des indicateurs pour situer le développement conceptuel d'un étudiant dans un domaine donné. Ces indicateurs traduisent des cohérences de fonctionnement dominantes sur l'ensemble des exercices du domaine. Nous illustrons notre démarche pour le domaine de la géométrie.

3. *Le référentiel pour la géométrie*

Dans la recherche en didactique de la géométrie, Houdement et Kuzniak (1999, 2006) ont travaillé la question du rapport entre l'espace physique et l'espace géométrique et ont montré que des difficultés d'apprentissage proviennent souvent d'une confusion entre les savoirs issus de l'expérience directe avec le monde réel et les savoirs géométriques. Dans l'enseignement de la géométrie, même si les objets géométriques étudiés sont communs de la maternelle au lycée, le rapport à ces objets évolue et provoque des ruptures de contrats. Dès l'école maternelle, c'est une géométrie de la perception qui est mise en jeu. La validation se fait par ce que « l'on voit ». Puis, à l'école élémentaire, les élèves rencontrent une première rupture avec la géométrie perceptive. La validation ne se fait plus seulement par la perception mais par les instruments (compas, règle, équerre, rapporteur). Houdement et Kuzniak parlent de géométrie naturelle, dans laquelle la validation « s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments » (Houdement & Kuzniak 1999, p.12). C'est ensuite à partir de la classe du collège que les élèves sont amenés à passer d'une vision de la géométrie instrumentale à la géométrie du raisonnement qui sera la base dans les classes de l'enseignement secondaire. Cette géométrie, appelée « géométrie axiomatique naturelle » par Houdement et Kuzniak, est déductive ; elle consiste à démontrer à partir des données de l'énoncé et des propriétés mathématiques. Du point de vue de leurs connaissances mathématiques, les étudiants doivent distinguer géométrie naturelle et géométrie axiomatique naturelle. En particulier, pour l'épreuve du concours, ils devront résoudre un ou des problèmes mettant en jeu un raisonnement déductif. Du point de vue de leurs connaissances didactiques, la formation vise à leur faire comprendre que pour enseigner la géométrie en primaire ils auront à accompagner les élèves à des changements de contrat pour passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par explicitation de propriétés et recours à des instruments. Les principaux types de tâches sont les tâches de reconnaissance, reproduction, construction de figure, description d'une figure ou production d'un programme de construction.

Le référentiel reprend ces distinctions pour définir une échelle de conceptualisation des objets de la géométrie selon trois dominantes :

- *Géométrie dominante A : connaissances et compétences liées majoritairement à une géométrie du raisonnement déductif ;*

- *Géométrie dominante B : connaissances et compétences liées majoritairement à une géométrie instrumentée ou à une géométrie du raisonnement déductif souvent incorrect ;*

- *Géométrie dominante C : connaissances et compétences liées majoritairement à une géométrie perceptive.*

Lorsqu'aucun fonctionnement dominant n'apparaît, nous parlons de niveau instable, noté niveau I, Nous illustrons dans le tableau 1, la description d'une dominante sur chaque composante et renvoyons à l'annexe pour celle des autres niveaux.

Composante d'analyse	Niveau C
Résolution de problèmes (reconnaissance, reproduction construction, démonstration)	Capable de reconnaître globalement des données du problème, d'avoir une idée de la démonstration (« je vois que »), mais sans pouvoir l'opérationnaliser dans une démarche instrumentée ou un raisonnement déductif.
Interprétation et traitement de figures	Capable de reconnaître une figure à partir d'une appréhension perceptive ou opératoire à partir de la forme, voire de propriétés globales. Des difficultés peuvent rendre difficile la distinction entre les propriétés spatiales et géométriques d'une figure.
Gestion des représentations sémiotiques	Capable d'avoir une vision globale d'une figure. Des difficultés pour distinguer une figure et ses dessins dans différentes positions, d'articuler différentes représentations sémiotiques (dessins, dessins codés, programme de construction, texte en langue naturelle, etc.)

***Tableau 1** – Référentiel pour le niveau C en géométrie*

L'évaluation diagnostique que nous avons conçue établit sur chaque domaine les traits dominants de conceptualisation de l'étudiant que nous appelons *profil* de l'étudiant.

II. L'EVALUATION DIAGNOSTIQUE

Nous présentons dans ce paragraphe l'évaluation diagnostique à destination des étudiants de première année du master MEEF.

1. La répartition des exercices par domaine

Nous avons constitué l'évaluation d'exercices représentatifs des quatre domaines mathématiques pour déterminer des caractéristiques du développement conceptuel des étudiants dans ces domaines. Le test est prévu pour une durée d'une heure de passation. Comme le montre le tableau 2, il est composé de 29 exercices répartis en une moitié sur le numérique, un cinquième sur la géométrie, autant sur la proportionnalité et sur l'algèbre. Les exercices sont pour la plupart sous forme de QCM ce qui permet un traitement informatique. Certaines sont ouvertes (6/29) : les étudiants doivent soit entrer un nombre soit un raisonnement. Dans ce dernier cas les questions sont codées par un humain et non par une machine.

Domaine	Nombre d'exercices
Géométrique	6/29
Numérique	14/29
Proportionnalité et fonction	5/29
Algébrique	4/29

***Tableau 2** – Répartition des exercices du diagnostic par domaine*

2. L'analyse des réponses : du codage des réponses au profil de l'étudiant

L'évaluation comprend deux étapes pour l'analyse des réponses des étudiants qui correspondent aux analyses locale et globale du test Pépite.

La première analyse est locale. Pour chaque exercice les solutions possibles sont déterminées à partir d'une analyse *a priori* et chacune est associée à une des trois dominantes de conceptualisation du domaine. L'analyse et le codage sont donc réalisés non seulement en termes de réponse correcte ou incorrecte mais également en fonction des démarches, des raisonnements et des représentations mobilisés.

La seconde analyse est transversale pour l'ensemble des questions de chaque domaine. Nous avons conçu un algorithme qui calcule pour chaque domaine le nombre de codage *a*, *b* ou *c* issus de l'analyse locale. Le nombre le plus important permet de positionner l'étudiant par rapport aux dominantes définies en référence. Cette analyse est renvoyée à l'étudiant accompagnée du pourcentage de questions répondues par rapport aux nombres de questions posées.

3. Un exemple d'analyse locale sur une question de géométrie

Nous illustrons ici l'analyse locale d'un problème de géométrie qui consiste à repérer si l'étudiant sait déterminer la nature d'un triangle à partir d'un codage sur un dessin à main levée. L'énoncé de ce problème est présenté en figure 1.

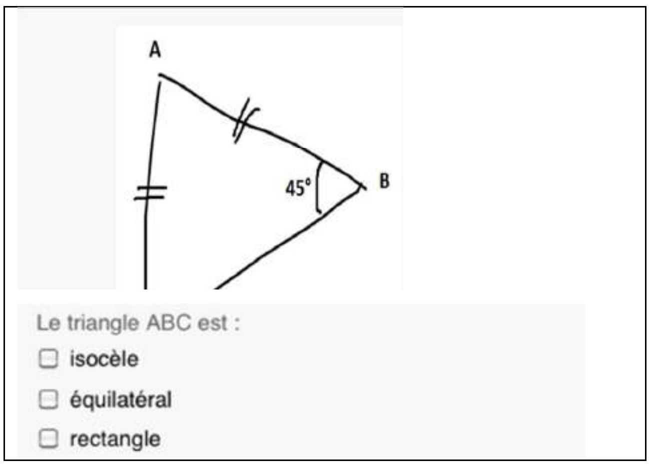


Figure 1 – *Un exemple d'exercice de géométrie dans un problème*

Le triangle ABC est isocèle. Cette propriété est repérable directement à partir de l'interprétation du codage et le dessin vient appuyer cette propriété. Il est également rectangle mais le dessin ne représentant pas cette propriété, seule la démonstration à partir du codage permet de répondre. Le triangle n'est pas équilatéral mais le dessin est trompeur puisqu'il pourrait donner à penser que les trois côtés sont égaux. Nous présentons dans le tableau 3 les réponses anticipées qui découlent de cette analyse.

Réponse	**Niveau de conceptua-lisation**	**Analyse didactique**
Isocèle et rectangle	*a*	Réponse correcte. Appui sur un raisonnement déductif pour calculer la mesure de l'angle A.
Isocèle	*b*	Appui sur le codage mais pas de raisonnement à partir de l'angle pour démontrer que le triangle est rectangle.
Rectangle	*b*	Raisonnement à partir du codage du triangle isocèle et des propriétés sur la somme des angles d'un triangle pour démontrer que le triangle est rectangle. Plusieurs hypothèses pour expliquer que le fait que « isocèle » n'a pas été coché : - l'étudiant considère qu'un triangle ne peut être isocèle et rectangle en même temps ; - l'étudiant considère que la propriété d'être un triangle rectangle l'emporte sur celle d'être isocèle.
Equilatéral	*c*	Géométrie perceptive globale. Pas de raisonnement à partir du codage.

		L'étudiant ne sait pas qu'un triangle équilatéral a tous ses angles de 60°.
Isocèle et équilatéral	c	Géométrie perceptive. Utilisation du codage pour l'égalité sur la longueur de deux côtés mais utilisation du perceptif pour le troisième côté. L'étudiant ne sait pas qu'un triangle équilatéral a tous ses angles de 60°.
Rectangle et équilatéral	c	Géométrie perceptive et contradiction.

Tableau 3 – *Analyse anticipée et codage sur un exercice de géométrie du test*

Ainsi la méthodologie de conception de l'évaluation diagnostique s'organise selon les étapes suivantes : choix d'exercices qui recouvrent le domaine de la géométrie, établissement d'indicateurs à partir d'une analyse *a priori* des réponses envisageables pour déterminer des profils. Même si le nombre d'exercices du test est assez faible nous considérons toutefois que leur choix et l'analyse des réponses le rendent opératoire pour établir ce que nous appelons les profils « dominants » des étudiants. L'objectif est de permettre ici l'organisation d'une stratégie de formation appuyée sur les besoins d'apprentissage repérés en géométrie, la mise en évidence des changements de contrat en géométrie, les limites des démarches en géométries perceptive et instrumentée pour démontrer des propriétés géométriques.

III. ANALYSE DES RESULTATS ET CONCEPTION DE STRATEGIES D'ENSEIGNEMENT ADAPTEES

1. Les profils des étudiants pour l'année 2014-2015

A l'entrée 2014, 490 étudiants de l'académie de Créteil ont passé le test dès leur entrée à l'ESPE. Le tableau 4 présente la répartition des différents profils sur les quatre domaines suite à l'analyse de leurs réponses.

Domaines	**Numérique**		**Algèbre**		**Géométrie**		**Proportionnalité**	
%Réponse	96		83		96		97	
%Réussite	59		40		35		46	
	%	**Effectif**	**%**	**Effectif**	**%**	**Effectif**	**%**	**Effectif**
Profil A	63%	309	20%	100	7%	36	33%	163
Profil B	0%	0	9%	44	3%	14	1%	4
Profil C	17%	82	57%	277	46%	225	47%	230
Profil I	20%	99	14%	69	44%	215	19%	93

Tableau 4 *– Répartition des profils des 490 étudiants sur quatre domaines*

Ce tableau montre la disparité des connaissances des étudiants en mathématiques mais aussi les dominantes fortes qui ressortent. 17% des étudiants sont en profil C dans le numérique, c'est-à-dire qu'ils ont une connaissance fragile de la numération décimale, des décimaux et des fractions et qu'ils rencontrent des difficultés à utiliser les notions numériques de base dans la résolution de problèmes numériques. Près de la moitié des étudiants sont en profil C en géométrie et en proportionnalité et seuls 20% utilisent l'algèbre dans la résolution de problèmes nécessitant son usage. De plus, des analyses supplémentaires de ces données indiquent que 30% des étudiants ont le profil C dans deux domaines et 10% dans trois domaines. Ces résultats montrent la nécessité de mettre en place une formation qui prenne en compte les besoins d'apprentissage des étudiants dans les différents domaines mathématiques.

Chaque étudiant reçoit des éléments sur son profil dans chaque domaine mathématique. Voici un exemple de profil d'un étudiant en géométrie (tableau 5) :

Géométrie		
Pourcentage de réponses aux questions du domaine	Pourcentage de réponses correctes parmi les questions traitées dans le domaine	Profil du domaine
100%	36%	B
Connaissance fragile des propriétés des figures géométriques, des différents modes de représentation. Distinction entre une figure et ses dessins connue mais peu articulée avec les propriétés. Démonstration de propriétés géométriques ne s'appuyant pas toujours sur un raisonnement déductif.		

Tableau 5 *–Profil d'un étudiant en géométrie*

2. *Nos principes de formation*

Notre stratégie de formation consiste à proposer des situations d'introduction clefs, avec des variables didactiques bien choisies afin de permettre aux étudiants des profils B et C de comprendre les limites de leurs démarches et raisonnements en fonction du problème et du contexte, de les remettre en question. La formation vise aussi à motiver la reprise et la construction de notions mathématiques, les modes de formulation, validation et de justification dans une vision globale d'une culture mathématique et de préparation au concours de recrutement des professeurs des écoles. En effet, nous faisons l'hypothèse qu'il est nécessaire de proposer des situations pour faire remettre en question des conceptions erronées ou rapports personnels inadaptés des futurs enseignants à des objets de savoir pour donner des raisons d'être à certaines notions et les faire fonctionner en tant qu'*outil* avant de les institutionnaliser comme *objet* (Douady 1987). Ces stratégies s'inscrivent dans les travaux de Charnay (1995) sur la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages. De plus, pour tous les étudiants, en particulier les étudiants de niveau A, ces situations doivent les conduire à une première réflexion didactique sur les notions étudiées et à un premier développement de compétences professionnelles.

La gestion en travaux dirigés de ces séances est essentielle pour assurer la prise en charge des connaissances hétérogènes des étudiants en référence aux objectifs visés. La mise en œuvre de ces situations vise à amener les étudiants à chercher des solutions puis à en débattre. Une fois qu'ils ont trouvé une solution, nous leur proposons de la présenter en classe entière et d'argumenter leur point de vue. Ces temps de mise en commun avec confrontation des procédures et des raisonnements mis en œuvre par les étudiants, validation et hiérarchisation des procédures, sont l'occasion d'interroger les connaissances et compétences erronées. Ils sont suivis d'une institutionnalisation des savoirs visés. Ce retour sur leurs productions vise également à permettre à des étudiants, seuls, parfois perdus en mathématiques et peu enclins à s'engager dans la résolution de problèmes, à reprendre l'envie et le goût du raisonnement en mathématiques.

Ainsi les profils des étudiants sont pris en compte en amont, dès la conception des séquences, à la fois en ce qui concerne la nature des situations proposées que leur gestion. Nous n'avons pas fait le choix d'une formation qui proposerait des exercices différents en fonction des profils parce que nous pensons que tous les étudiants tirent parti des situations clefs puisqu'elles permettent le plus souvent d'aborder des raisons d'être des notions mathématiques comme des notions didactiques. Toutefois, les feuilles d'exercices proposées en travaux dirigés contiennent plus d'exercices que ce qui est traité en présentiel, ce qui permet aux étudiants qui auraient terminé avant les autres, d'avancer à leur rythme, mais aussi de donner des exercices plus ciblés aux étudiants de profil C. Notre stratégie de formation est également liée aux modalités de formation que nous mettons en place.

3. *Nos modalités de formation*

La stratégie de formation s'appuie sur le choix de situations ciblées, comme nous venons de le présenter, ainsi que sur des modalités spécifiques de formation que nous expliquons aux étudiants dès la mise en place du contrat de formation. Ces modalités utilisent la plateforme EPREL de l'université Paris-Est-Créteil à travers laquelle nous ouvrons des espaces en ligne, vers des documents et communiquons avec nos étudiants.

Chaque semestre est découpé en plusieurs séquences concernant les thèmes mathématiques des programmes (nombres et numération décimale, géométrie, grandeurs, etc.). Pour chaque séquence, la formation s'organise selon le même modèle.

Des exercices préparatoires avec correction ainsi qu'une synthèse des savoirs et savoir-faire indispensables à la suite de la formation sont proposés aux étudiants avant la séquence en présentiel. Les étudiants (dominante C) peuvent ainsi travailler les prérequis. Ils ne sont pas abordés en travail dirigé sauf si les étudiants demandent d'y revenir.

Une feuille d'exercices mathématiques et didactiques est distribuée en TD. Elle contient plusieurs situations clefs pour remettre en question des rapports inadaptés aux savoirs mathématiques. Elle contient également des exercices d'entrainement de difficulté croissante. Toutes les corrections des exercices sont déposées sur EPREL à la fin du TD ainsi qu'un document de cours reprenant les différentes notions mathématiques et didactiques[3] qui sert de point d'appui à l'institutionnalisation des savoirs. Les feuilles d'exercices sont régulièrement complétées de devoirs à faire à la maison. Nous accompagnons les documents déposés sur EPREL d'un forum afin que les étudiants puissent poser des questions aux formateurs. Cela permet de réguler l'enseignement à distance et si besoin de revenir sur certains aspects des notions abordées en TD.

Nous organisons de plus des séances dédoublées avec deux formateurs. Ces séances sont l'occasion de répondre plus spécifiquement aux besoins des étudiants, de les accompagner davantage et de répondre à leur question individuellement. Nous organisons également des entretiens avec les étudiants qui le souhaitent afin de répondre à leurs questions (par exemple sur une de leur production) et de les aider à organiser leur travail personnel.

4. *Un exemple de stratégie de formation en géométrie*

La séquence de géométrie plane[4] s'organise en trois séances de trois heures. Avant la séquence, les étudiants ont pu travailler des notions et constructions de base, comme savoir tracer une perpendiculaire ou une parallèle à une droite passant par un point avec l'équerre, ou encore reconnaître des droites perpendiculaires ou parallèles dans des positions non prototypiques.

Comme près de la moitié des étudiants (cf. tableau 4) travaille en géométrie perceptive ou instrumentée la première séance vise à montrer les limites de ces géométries pour reproduire puis démontrer des propriétés. Il s'agit d'abord d'une tâche de reconnaissance de figures puis d'une tâche de reproduction de figure dont l'énoncé est présenté en figure 2 qui nécessite de retrouver le centre d'un cercle et donc d'utiliser des propriétés géométriques (caractérisation d'un cercle et point de concours des médiatrices d'un triangle).

[3] Ces documents peuvent être proposés préalablement au TD en fonction des contraintes de temps.
[4] Nous n'abordons pas ici les théorèmes de Pythagore, de Thalès.

Ex 1.2 : Reproduction de figure

L'objectif de cette activité est de reproduire la figure ci-dessous sur une feuille de papier blanc, en respectant les consignes suivantes :

- les seuls instruments disponibles sont la règle non graduée et le compas,
- le papier calque n'est pas autorisé,
- en revanche, il est possible d'écrire et de rajouter des tracés et des traits de construction sur le dessin à reproduire.

Modalités de travail :

- Vous effectuez individuellement la recherche.
- Vous effectuez la vérification lorsque vous serez sûr de vous. Pour valider votre reproduction, vous superposez la figure obtenue à l'original : elles doivent se correspondre complètement.

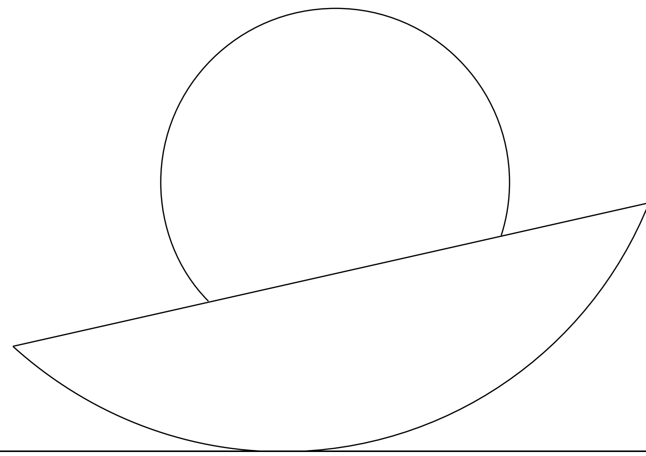


Figure 2 – *Reproduction d'une figure*

Cette situation a donc un double objectif. D'une part, amener les étudiants qui privilégient le perceptif et la mesure à prendre conscience des limites de ce rapport aux objets de la géométrie, les amener à distinguer les propriétés spatiales des propriétés géométriques et faire émerger les procédés de construction. D'autre part, cette situation est une première rencontre avec des connaissances didactiques sur l'enseignement de la géométrie à l'école en cycle 3 et au collège. Elle est l'occasion d'amener les étudiants à travailler l'implicite des dessins, à comprendre la nécessité de prendre des informations supplémentaires (ajout de tracé, de points), de coder les figures, de distinguer les propriétés spatiales des propriétés géométriques, de préciser le vocabulaire géométrique, de percevoir l'insuffisance de l'essai pour reproduire et la nécessité de s'appuyer sur des propriétés géométriques. Cette première séance de trois heures est suivie d'exercices d'entrainement mettant principalement en jeu la construction de figures en lien avec leur caractérisation géométrique.

Les séances suivantes visent à conduire les étudiants à distinguer différentes descriptions d'une figure (texte ou programme de construction) et leurs conséquences sur sa construction, à distinguer conjecture et démonstration. La situation d'introduction de la séance 2 porte sur la description d'une figure géométrique et sur sa construction à partir d'une description. La consigne est la suivante : donnez une suite d'instructions pour qu'une personne qui n'a pas vu cette figure puisse refaire une figure analogue. Les instruments autorisés sont le compas et la règle non graduée.

La situation de type émetteur-récepteur amène les étudiants à analyser une figure pour réaliser une prise d'informations efficace pour sa construction en distinguant les propriétés spatiales des propriétés géométriques et à déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour une description opératoire (programme de construction). Dans la troisième séance nous amenons les étudiants à distinguer ce qui relève d'une conjecture ou d'une démonstration, à remettre en cause des propriétés alors qu'à l'évidence elles semblent vraies. Il s'agit d'amener les étudiants à déterminer les conditions nécessaires et suffisantes d'un raisonnement déductif en utilisant les propriétés des figures géométriques en jeu dans des exercices de difficulté progressive (Duval 1993, 2000).

IV. CONCLUSION

L'évaluation diagnostique que nous avons construite pour repérer les connaissances apprises des étudiants à l'entrée en formation initiale des enseignants de primaire est fondée sur une analyse épistémologique, didactique et cognitive sur chaque domaine mathématique considéré. Cette approche permet de définir un référentiel des connaissances et compétences pour chaque domaine mathématique et donc de situer les connaissances et compétences des étudiants par rapport à ce référentiel. Au delà d'une évaluation en termes échec / réussite, cette évaluation de type formatif permet de déterminer les besoins d'apprentissage des étudiants et d'adapter des stratégies de formation, en amont de la formation. Le choix des exercices diagnostiques et l'analyse anticipée des réponses possibles sont fondés par ce référentiel.

Les résultats d'une cohorte d'étudiants de l'académie de Créteil à ce test mettent bien en évidence l'hétérogénéité des profils des étudiants dans les quatre domaines mathématiques. Nous avons explicité nos stratégies de formation pour permettre de gérer cette hétérogénéité et permettre aux étudiants de faire évoluer leur rapport aux mathématiques et de favoriser leur développement professionnel.

Suite à un questionnaire passé auprès des étudiants, 76 étudiants ont répondu (voir annexe 2). 70% des étudiants qualifient le test de très utile ou d'indispensable pour situer leurs connaissances et leurs compétences par rapport à celles attendues et pour mieux cibler leurs besoins d'apprentissage. Les situations et exercices proposés lors des TD semblent globalement adaptés à 80% dans l'ensemble des domaines traités. En revanche, seuls 58% jugent ces TD utiles ou très utiles pour revenir sur leurs erreurs et 64% utiles ou très utiles pour comparer des procédures et des raisonnements.

Les formateurs en particulier les nouveaux formateurs pointent le fort potentiel de l'approche épistémologique, didactique de l'évaluation pour développer ces stratégies de formation. Voici deux bilans de nouveaux formateurs, du point de vue des étudiants :

> « Les avis des étudiants sont très bons. Ils ont redécouvert le plaisir du travail, se sont accrochés malgré beaucoup de difficultés en maths souvent. (…) Il y a eu beaucoup de remise en confiance sur leurs propres qualités en maths. Ils constatent beaucoup de progrès sur l'organisation de la pensée et la compréhension du "faire des maths". »

> « Mise ou remise en confiance d'un certain nombre d'entre eux : les activités proposées, les discussions sur les différentes procédures mises en œuvre ont permis de faire de la « didactique active », de gérer l'hétérogénéité et de montrer de façon pratique ce qui pouvait être fait en classe (en transposant pour des enfants bien sûr). Plusieurs ont témoigné à plusieurs reprises que signifie «faire des mathématiques » n'est pas qu'un apprentissage de règles qui n'ont qu'une fonction dans une logique interne des mathématiques totalement mystérieuses, mais que cela a un sens et que l'on peut y prendre un peu goût. »

Nos perspectives concernent maintenant le suivi des étudiants et l'analyse de l'apport effectif de ces stratégies de formation dans leur évolution du rapport à la géométrie et leur développement professionnel à court terme et éventuellement à long terme.

REFERENCES

Charnay R. (1995) De la diversité. Dans R. Charnay et al. (Eds.), *Chacun, tous... Différemment ! Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages* (p. 9-29). Lyon : I.N.R.P.

Chevallard Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x* n°5, 51-94.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* n°19, 43-75.

Chenevotot-Quentin F., Grugeon B., Delozanne E. (2011) Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation (827842). Dakar, Sénégal, du 5 au 10 avril 2009.*

Douady R. (1987) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-32.

Duval R., (1993) Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive, *Petit x,* n° 31, 37-61.

Duval R. (2000) Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 20(2).

Grugeon B., (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol.17.2, pp. 167-210, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Grugeon-Allys B., Pilet J., Chenevotot-Quentin F., Delozanne E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.-P., Dorier J.-L., Robert A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (137-162). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Houdement C., Kuzniak A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-195.

Houdement C., Kuzniak A. (1999) Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics*, 40.3, 283-312.

Pilet J. (2012) *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation.* Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris, 2012, 871p.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/1.2, 133-170, Editions La Pensée Sauvage.

Vergnaud G. (1986) Psychologie du développement cognitive et Didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives. *Petit x*, 38, 21-40.

ANNEXE1 : Référentiel pour les niveaux A et B en géométrie

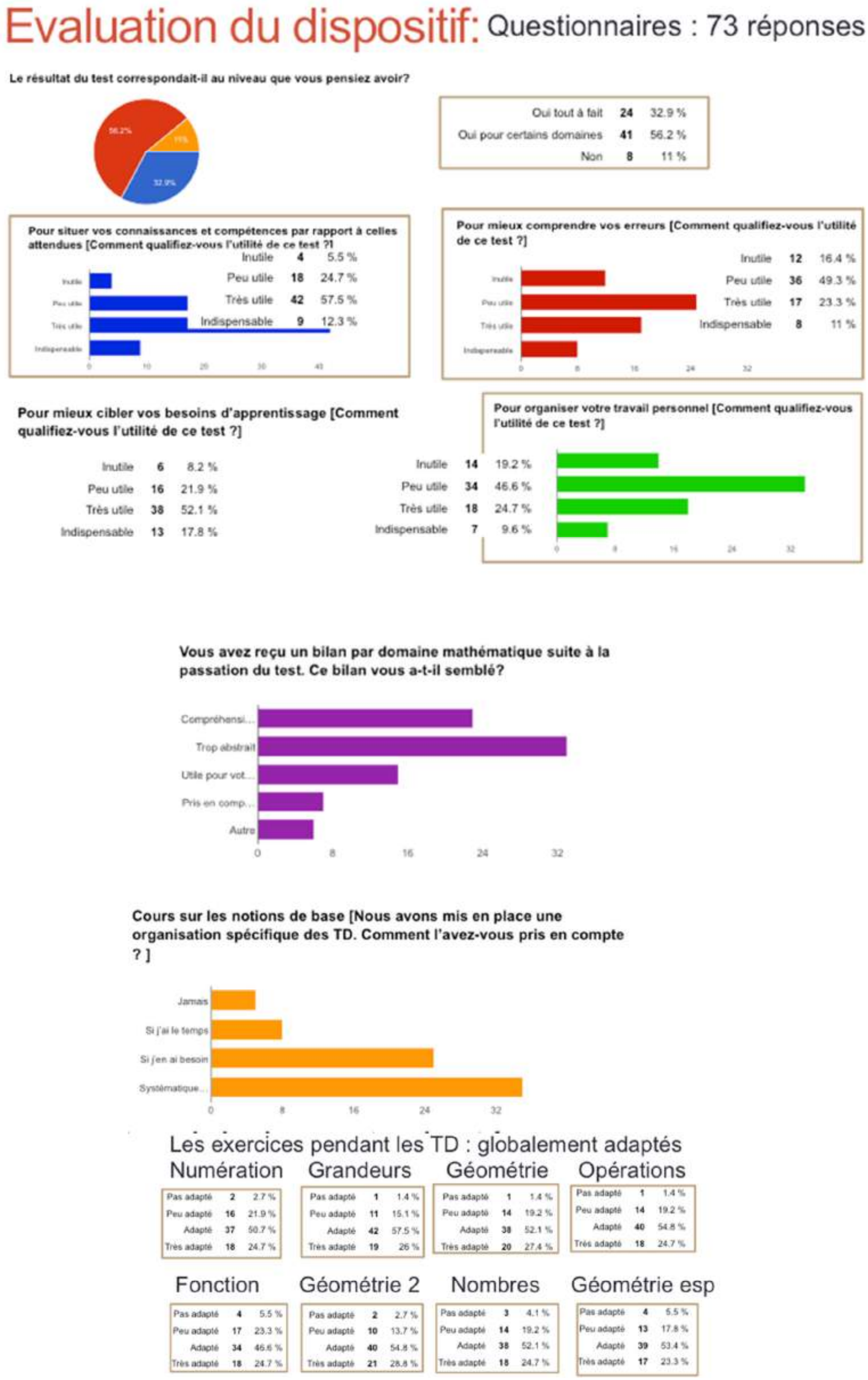
Composante d'analyse	**Niveau A**
Résolution de problèmes (reconnaissance, reproduction construction, démonstration)	Capable de mobiliser un raisonnement déductif s'appuyant sur une reconnaissance des données du problème, une analyse des figures géométriques en termes de propriétés à mobiliser pour démontrer les propriétés géométriques visées.
Interprétation et traitement de figures	Capable de distinguer ce qui relève du nécessaire et du suffisant pour caractériser une figure géométrique. Capable d'interpréter les figures géométriques à partir d'une appréhension séquentielle et discursive pour déterminer les propriétés des figures en jeu et les structurer pour organiser une démonstration.
Gestion des représentations sémiotiques	Capable de distinguer une figure et ses dessins dans différentes positions, d'articuler différentes représentations sémiotiques (figurale, langue naturelle, programme de construction, etc.)

Composante d'analyse	**Niveau B**
Résolution de problèmes (reconnaissance, reproduction construction, démonstration)	Capable de mobiliser une démarche s'appuyant sur une reconnaissance des données du problème pour conjecturer les propriétés, mais privilégiant des démarches instrumentales basées sur le traçage de figure à l'aide d'instruments, la mesure[5].
Interprétation et traitement de figures	Capable de distinguer ce qui relève du nécessaire mais pas forcément du suffisant pour caractériser une figure géométrique. Capable d'interpréter les figures géométriques à partir d'une appréhension séquentielle pour déterminer les sous figures en jeu et organiser une construction de la figure à partir des propriétés de la figure[6]. Des travaux sur les limites d'une telle démarche puis sur une appréhension discursive des figures doivent être développés.
Gestion des représentations sémiotiques	Capable de distinguer une figure et ses dessins dans différentes positions, d'articuler différentes représentations sémiotiques figurales sur un graphique à l'aide d'instruments mais de façon peu reliée à la formulation langagière des propriétés des figures et des démonstrations.

[5] Des exercices montrant les limites d'une démarche instrumentale devront être proposés

[6] Des exercices sur les limites d'une telle démarche puis sur une appréhension discursive des figures doivent être développés.

ANNEXE 2 : Résultats du questionnaire rempli par les étudiants en avril 2015



Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LES DIFFERENTES PENSEES MATHEMATIQUES ET LEUR DEVELOPPEMENT DANS LE CURRICULUM

Compte-rendu du Groupe de travail n° 3

Rahim KOUKI[*] - Doris JEANNOTTE[**] - Joëlle VLASSIS[***]

I. RAPPORT

Ce groupe de travail fait suite au Groupe de travail n^{o} 3 « Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum » du colloque EMF 2012 et du groupe de travail n^{o} 10 « La pensée mathématique, son développement et son enseignement » du colloque EMF 2009. Comme son titre l'indique, il porte sur les pensées mathématiques et, plus particulièrement, sur leur développement dans le curriculum ainsi que dans diverses communautés mathématiques à différents niveaux scolaires, et ce, en prenant en compte les diversités sociales et culturelles. Trois aspects principaux on été abordés dans ce groupe.

Le premier a consisté en l'étude de différents courants théoriques caractérisant la pensée mathématique et visait à éclairer des questions tant épistémologiques que pratiques, par la mise en lumière de divergences et de convergences quant à l'opérationnalisation de ces théories en lien avec différentes perspectives de recherches.

Le deuxième aspect visait à étudier la prise en compte de l'activité du sujet, son histoire et le milieu dans lequel il évolue, de la nature des objets avec lesquels il travaille, des méthodes qu'il met en œuvre en lien avec les processus de conceptualisation et le développement d'une pensée mathématique.

Le troisième questionnait la prise en compte des différentes pensées mathématiques dans les curricula des pays de l'espace mathématique francophone. Par exemple, leur place dans les programmes, les manuels, les ressources pour les enseignants et dans les pratiques effectives des enseignants en regard des apprentissages des élèves peuvent être éclairée par la recherche.

Quatorze personnes ont participé aux activités du GT3 dont sept provenaient du Canada, quatre de France, deux du Luxembourg, et une de Tunisie. En tout, onze textes ont donné lieu

[*] Université Tunis El Manar – Tunisie- Rahim.Kouki@ipeiem.rnu.tn
[**] Université du Québec à Montréal – Canada – jeannotte.doris@uqam.ca
[***] Université du Luxembourg – joelle.vlassis@uni.lu

Kouki, R., Jeannotte D., Vlassis J. (2015) Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum – *Compte-rendu du Groupe de Travail n° 3*. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*– Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 199-205.

à des présentations. Ces textes concernaient différents ordres d'enseignement du préscolaire jusqu'au lycée. Quoique certains textes touchaient à plusieurs des aspects abordés par le groupe, il est possible de leur attribuer une prédominance selon le classement suivant. Quatre des propositions portaient davantage sur le premier aspect en touchant diverses questions épistémologiques. Cinq concernaient plutôt le second aspect en s'intéressant à l'activité des élèves. Enfin, deux présentations ont fait état d'analyse de curriculum et touchaient donc davantage le troisième aspect.

Dans le reste de ce rapport, nous présentons un bref résumé des contributions écrites et des échanges qui ont eu lieu à leur sujet lors des séances du travail du groupe. Nous proposons ensuite une synthèse de nos discussions ainsi que des pistes pour le congrès EMF-2018.

1. *Mise en lumière de différentes perspectives théoriques pour caractériser la pensée mathématique*

Luis RADFORD a abordé le thème de la pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. Selon cette théorie, deux points de vue sont nécessaires pour définir la pensée mathématique : d'une part, le point de vue anthropologique directement lié à l'agir des individus et aux pratiques sociales; il s'agit d'une synthèse culturellement codifiée du travail ou labeur humain; cette pensée apparaît au sujet comme potentialité; d'autre part, le point de vue subjectif qui est liée à l'individu et renvoie à l'actualisation d'un archétype culturel, comme par exemple la résolution d'équation; l'activité du sujet pensant est donc médiation entre la pensée potentielle et la pensée actuelle. L'exemple du développement de la pensée algébrique dans une classe de deuxième année du primaire a permis d'illustrer les idées présentées. En particulier, la pensée algébrique a été définie en fonction de trois composantes élémentaires : l'indétermination, la dénotation et l'analycité.

Doris JEANNOTTE a proposé une conceptualisation des processus généralisation et abstraction en tant qu'activité de la pensée mathématique, conceptualisation qui prend racine dans une perspective commognitive. Les deux processus sont posés comme différents sur la base du discours qu'ils développent. Quoique nécessaire à l'évolution de la pensée mathématique du sujet, l'abstraction est nécessaire au développement d'un nouveau « discours incommensurable » (au sens de Sfard, 2008) avec celui dont il est issu.

Hassane SQUALLI a exploré l'apport du modèle de Dörfler (1991) pour l'analyse du développement de la pensée algébrique chez des élèves. Contrairement à la conceptualisation de Jeannotte, le processus de généralisation est ici posé comme une série d'abstractions d'invariants essentiels. En outre, l'analyse a permis de mettre en évidence le rôle des processus de validation dans le développement du processus de généralisation.

Joëlle VLASSIS a proposé une réflexion sur la dialectique conceptualisation/symbolisation propre à la pensée mathématique. Au départ d'une analyse épistémico-historique de l'évolution de la notation algébrique, et dans la foulée des approches socio-culturelles inspirées de Vygotsky, l'auteure témoigne du rôle et de l'importance des activités de symbolisation dans toute situation mathématique. Du point de vue des apprentissages, l'auteure met ainsi en lumière, sur la base d'une situation concrète de résolution d'équations, la nécessité de développer des pratiques de classe centrées sur le symbolisme mathématique. Celles-ci envisagent la possibilité pour l'élève de construire le sens de ce symbolisme en étroite interaction avec les concepts, selon une progression structurée en chaînes de signification évoluant vers une mathématisation de plus en plus abstraite au fil d'activités de complexité croissante.

2. *L'activité des élèves au cœur du développement de la pensée mathématique : du préscolaire au Lycée*

Nathalie ANDWANDTER a examiné le potentiel des activités de suites non-numériques au regard du développement d'une pensée algébrique chez les enfants de 5 ans. L'auteure analyse d'une part, les démarches des élèves, les gestes et le langage qu'ils utilisent pour résoudre les situations et d'autre part, les différents types d'étayage pour soutenir les apprentissages. L'auteure montre que des enfants de 5 ans peuvent développer une pensée récursive de type qualitatif voire de type quantitatif, même si pour certains d'entre eux, une des difficultés consiste à exprimer verbalement la variation entre les figures. L'auteure a également mis en évidence l'influence des interventions spécifiques de l'étayage sur la nature des réponses des enfants et le genre de pensée élaborée par ceux-ci. Ainsi, afin d'optimiser leurs interventions, il importe que les enseignants comprennent ce que l'élève doit discerner pour réaliser les apprentissages spécifiques.

Isabelle DEMONTY a présenté une étude centrée sur l'analyse des démarches des élèves dans des situations de généralisation de suites arithmétiques, à deux moments clés de la scolarité obligatoire : avant l'introduction formelle de l'algèbre (élèves de 12 ans) et après une année de travail en algèbre (élèves de 14 ans). Les résultats montrent les potentialités des élèves à s'impliquer dans ces tâches et ce, même avant tout apprentissage formel de l'algèbre. Ils pointent également les difficultés des élèves, ayant déjà une année d'enseignement de l'algèbre derrière eux, à manier correctement le symbolisme algébrique. Ces résultats témoignent également du caractère artificiel de la rupture introduite dans certains curricula qui préconisent d'enseigner l'algèbre au secondaire après que les élèves ont acquis une base de connaissances arithmétiques au primaire.

Adolphe ADIHOU a présenté quelques résultats d'une enquête portant sur l'analyse des raisonnements des élèves du premier cycle du secondaire au Québec (12-14 ans). L'analyse vise à documenter les raisonnements algébriques et arithmétiques mobilisés lors de la résolution de problèmes écrits de type comparaison, généralement utilisés à l'entrée du secondaire. L'analyse met en évidence la production par les élèves de raisonnements, parfois sophistiqués, qui ne peuvent être interprétés comme purement arithmétiques ou purement algébriques. Cela remet en question l'insistance à imposer rapidement aux élèves le recours à la méthode algébrique dans la résolution de problèmes.

Alain BRONNER a cherché les conditions d'une entrée vers « l'algèbre avant la lettre » via une typologie de problèmes de généralisation. Dans cette perspective, il a étudié les potentialités que peuvent offrir certaines classes de situations relatives à ces problèmes d'une part, et a proposé un travail exploratoire, s'appuyant sur une approche praxéologique, afin de voir comment ces types de situations de généralisation peuvent favoriser une pensée algébrique dans les classes du primaire et du début du secondaire avant toute introduction du symbolisme algébrique.

Nathalie BRIANT s'intéresse à la pensée algorithmique, relativement à la pensée mathématique dans le contexte d'un environnement informatisé, exploitant le logiciel Algobox. Elle montre, sur la base de l'expérimentation d'une situation de résolution d'équations, que l'introduction de l'outil informatique va remettre en question l'écologie des savoirs enseignés. En effet, la recherche d'un algorithme informatisé va nécessiter une double transposition, la première allant de la résolution mathématique à la résolution algorithmique ; la seconde passant de cette dernière à la résolution informatique. Ce détour par une pensée algorithmique a permis le développement d'une pensée algébrique. Cette double transposition a provoqué en effet l'évolution du rapport aux objets algébriques. Ceux-ci ont été réinterrogés, revisités allant jusqu'à l'étude de nouveaux objets comme le concept de paramètre.

3. Analyse curriculaire et développement de la pensée mathématique

Mirène LARGUIER a présenté une étude comparative des orientations curriculaires pour l'entrée en algèbre entre les programmes du Québec et de la France pour des élèves entre 10 et 12 ans. Cette analyse a mis en lumière l'intérêt des problèmes de généralisation exploités dans des classes au Québec. Ce type de problème semble permettre une entrée vers l'algèbre et le développement d'une pensée algébrique en comparaison avec une pensée arithmétique. Les analyses a priori et a posteriori de quelques problèmes de généralisation typiques expérimentés en France avaient pour objectif de tester la solidité de l'hypothèse concernant l'intérêt des problèmes de généralisation. L'auteur souligne, enfin, qu'une modification du curriculum en fin de primaire et en collège est souhaitable en France en prenant pour exemple le programme du Québec.

Rahim KOUKI propose une réflexion épistémologico-didactique sur le développement de la pensée algébrique dans le curriculum tunisien par une présentation des résultats d'une étude didactique sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au début du cycle secondaire tunisien. Deux analyses didactiques étaient conduites : l'une, de nature historique et épistémologique, portant sur l'évolution diachronique des praxéologies algébriques dans les trois champs conceptuels, syntaxique et sémiotique ; et l'autre, de nature institutionnelle, était consacrée à l'exploration des programmes et des manuels scolaires pour en décrypter les visées et les caractéristiques didactiques. Les principaux enseignements didactiques dégagés de cette étude invitent à privilégier les approches de modélisation in situ, la construction des concepts algébriques qui est en étroite relation avec leur fonctionnalité procédurale et la mobilisation des techniques opératoires.

II. SYNTHÈSE ET PERSPECTIVES

Il faut souligner que l'ensemble des communications présentées dans le groupe de travail n°3 s'est intéressé, explicitement ou implicitement, au développement de la pensée algébrique sur la base d'approches théoriques et méthodologiques variées. Les analyses ont porté sur les relations entre la pensée algébrique et divers autres types de pensée, tels que la pensée mathématique en général, la pensée arithmétique ou encore algorithmique.

Plusieurs questions de nature épistémologique ont émergé de nos discussions, en particulier autour des différences et des ressemblances entre pensée arithmétique et pensée algébrique, entre pensée algébrique et algorithmique mais aussi entre abstraction et généralisation. Durant les discussions, l'importance de continuer la réflexion épistémologique amorcée a été bien mise en évidence. Ces éléments ont pu être mis en parallèle avec des questions sur l'activité mathématique des élèves et sur le développement de curriculum.

<u>Du point de vue de l'activité de l'élève</u>, la question de l'enseignement précoce de l'algèbre a été posée dans plusieurs communications. Une hypothèse souvent soutenue est que l'apprentissage de l'arithmétique doit être bien entamé avant d'aborder les premiers apprentissages algébriques. Toutefois, les données présentées par Demonty, ainsi que les mouvements « Early Algebra » (voir notamment les travaux de Kaput, Carraher & Blanton, 2008 à ce sujet) remettent en question cette dernière et la recherche permet maintenant de conclure qu'il est possible de favoriser le développement de la pensée algébrique beaucoup plus tôt. En fait, lorsqu'une pensée arithmétique, axée essentiellement sur le sens du nombre, est très avancée, celle-ci pourrait nuire au développement de la pensée algébrique, qui elle

envisage le sens des opérations répétées un nombre infini de fois. Ces réflexions ont amené le groupe à discuter de la différence entre arithmétique et algèbre, débat qu'il serait intéressant de poursuivre dans les prochaines éditions d'EMF.

On ne peut étudier ces enjeux sans à nouveau pousser la réflexion sur le plan épistémologique. Plusieurs questions ont été abordées qui pourront être approfondies dans la suite :

Quels rôles jouent la généralisation et l'abstraction dans la création de nouveaux objets mathématiques ? Quels liens existe-t-il entre les processus d'abstraction et de généralisation ? Le modèle de Dörfler utilisé par Squalli ainsi que l'analyse conceptuelle dans une perspective commognitive développée par Jeannotte offrent une perspective contrastée à ces questions.

Quels sont les éléments épistémologiques et didactiques qui permettent le développement de la pensée algébrique ? Tout d'abord, les chercheurs semblent s'entendre sur l'importance des variables et des opérations dans la pensée algébrique. Ces derniers semblent importants pour la différencier de la pensée arithmétique principalement axée sur les nombres. Ensuite, Larguier et Bronner ont témoigné de l'intérêt des activités de généralisation pour permettre l'entrée dans l'algèbre. Dans la foulée, Radford précise qu'on observe des généralisations en arithmétique. Il y aurait également une pensée arithmétique avancée comme le principe de la « fausse position », mis en évidence par Adihou, que l'on retrouve dans l'activité mathématique des élèves lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes algébriques. Enfin, l'importance du développement des symbolisations évoluant en étroite interaction avec les concepts selon une chaîne de signification, souligné par Vlassis, permet de contribuer à l'émergence de nouveaux objets algébriques. De même, Briant montre que l'utilisation d'environnements informatisés impliquant un détour par une pensée algorithmique provoque l'évolution du rapport aux objets algébriques à la suite d'une double transposition du langage utilisé.

<u>Du point de vue du développement de curriculum</u>, se posent alors deux questions au moins. La première concerne le *« quand » débuter un enseignement favorisant le développement de la pensée algébrique.* L'arithmétique pourrait se poser en obstacle à l'algèbre. Toutefois, si on débute l'algèbre plutôt, on pourrait venir bloquer le développement de la pensée arithmétique. La deuxième question renvoie à la réflexion de Kouki, qui sur la base d'une analyse historique et institutionnelle, analyse *la prise en considération par l'institution des éléments du développement de la pensée algébrique dans la rédaction des curricula.* Il s'agit de questions ouvertes qui pourraient être abordées lors des prochains EMF.

Enfin, *la question du rôle de l'enseignant et de la nature de son étayage a été évoquée à plusieurs reprises lors des débats. Doit-il se contenter d'être un guide ? Quels types d'intervention sont-ils porteurs ?* Il semble que selon Anwandter, un enjeu crucial réside dans la compréhension par l'enseignant des raisonnements des élèves mais aussi des ressorts des activités proposées.

Comme constaté lors des discussions, la confrontation des cadres et des analyses a permis de soulever une richesse jusqu'ici absente en permettant d'articuler la dialectique arithmétique/algèbre, de préciser ce qu'on entend par pensée algébrique, arithmétique, par généralisation et abstraction.

Bien qu'une majorité de contributions aient porté sur la pensée algébrique, nous recommandons de maintenir ouverte la thématique de ce groupe de travail à d'autres modes de la pensée mathématique. En effet, cette ouverture apporterait une valeur ajoutée aux discussions, notamment en enrichissant les questions épistémologiques sur la manière de caractériser un mode de pensée mathématique ; les cadres méthodologiques d'analyse de leur développement, les liens entre ces différents modes de pensée ainsi que l'étude de questions transversales comme le lien entre pensée et raisonnement, le rôle de la symbolisation dans le développement d'un mode de pensée, etc.

En outre, en ouvrant la réflexion sur les pensées mathématiques, on réalise que son étude épistémologique est marquée par le projet didactique qui nous anime. *Comment différents cadres permettent d'éclairer notre compréhension de l'activité mathématique de l'élève ?* Les analyses, parfois complémentaires, parfois semblant contradictoires, ont mené à des questions à explorer : *Comment clarifier notre discours afin de favoriser une meilleure communication entre chercheurs ? Quelles autres pensées mathématiques se retrouvent dans les curricula ? Comment se différencie chacune des pensées mathématiques ?*

Enfin, nous pensons que les questions liées aux organisations mathématiques ainsi que celles liées à la formation des enseignants méritent d'être mieux développées dans les EMF à venir.

REFERENCES

Dörfler W. (1991) Forms and means of generalization in mathematics. In Bishop A. J., Mellin-Olsen S., Van Dormolen J. (Eds.) *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers..

Kaput J.J., Carraher D., Blanton M. (2008) Skeptic's guide to algebra in the early grades. In Kaput J.J., Carraher D.W., Blanton M.L. (Eds.) *Algebra in the early grades* (pp. xvii-xxi). New York : National Council of teachers of mathematics.

Radford L. (2013) Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education* 2(1), 7-44.

Sfard A. (2008) *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York : Cambridge University Press.

CONTRIBUTIONS AU GT3

Communications orales

ADIHOU, A. - Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison

ANWANDTER-CUELLA, N. - Étude du développement de la pensée algébrique au préscolaire : cas de suites non-numériques

BRIANT, N. - Etude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique

BRONNER, A. - Développement de la pensée algébrique avant la lettre. Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique

DEMONTY, I. - Le développement de la pensée algébrique : quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre ?

JEANNOTTE, D. - Les processus abstraire et généraliser conceptualisés dans une perspective commognitive.

KOUKI, R. - Développement de la pensée algébrique dans le Curriculum tunisien : analyse épistémologique et institutionnelle

LARGUIER, M. - Première rencontre avec l'algèbre

RADFORD, L. - La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation

SQUALLI, H. - La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels

VLASSIS, J. - Symboliser et conceptualiser, deux facettes indissociables de la pensée mathématique. L'exemple de l'algèbre.

Affiche

DEMONTY, I. - Construire un questionnaire valide centré sur les connaissances des enseignants en algèbre élémentaire : les apports croisés des recherches centrées sur l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre élémentaire.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ANALYSE DES RAISONNEMENTS D'ÉLÈVES À TRAVERS DES RÉSOLUTIONS DE PROBLÈMES DE COMPARAISON

Adolphe ADIHOU[*] – Hassane SQUALLI[**] - Mireille SABOYA[***] – Mélanie TREMBLAY[****]
Annick LAPOINTE[*****]

Résumé – Nous exposons quelques résultats d'une recherche conduite auprès d'élèves du premier cycle du secondaire au Québec (12-14 ans) visant à documenter les raisonnements algébriques et arithmétiques mobilisés par ces élèves dans la résolution de problèmes écrits de type comparaison, généralement utilisés à l'entrée du secondaire. L'analyse amène à constater une cohabitation, des allers-retours entre les pensées arithmétique et algébrique.

Mots-clefs : algèbre, arithmétique, structure, résolution de problèmes, raisonnements

Abstract - We present some results of a research conducted with junior high school students in Quebec (12- 14 years) to document the algebraic and arithmetic reasoning mobilized by these students in solving word problems type comparison, typically used at the entrance of the school. The analysis leads to the recognition of cohabitation, back and forth between arithmetic and algebraic thinking.

Keywords: algebra, arithmetic, structure, problem solving, reasoning

I. CONTEXTE DE LA RECHERCHE

L'étude s'inscrit dans la continuité de deux recherches québécoises ; celle de Bednarz et Janvier (1992), réalisée après la réforme des années 1980 et celle de Marchand (1998) réalisée après la réforme des années 1990 (Saboya, Besançon, Martin, Adihou, Squalli, Tremblay 2014). Comme ces deux recherches notre étude vise à éclairer le travail fait dans la résolution de problèmes de comparaison en algèbre après les changements mis sur pied dans le curriculum des mathématiques au secondaire dans les années 2000. Par ailleurs, Oliveira et Camara (2011) ont mené une étude qui brosse le portrait de la résolution de ces problèmes pour les élèves de 6e année primaire et du premier cycle du secondaire au Brésil et au Québec. Dans la recherche dont nous faisons état dans cette contribution, et dans une perspective du développement de la pensée algébrique, nous avons conçu et soumis des

[*] Université Sherbrooke – Canada - Adolphe.Adihou@USherbrooke.ca
[**] Université Sherbrooke– Canada - Hassane.Squalli@USherbrooke.ca
[***] Université du Québec à Montréal – Canada - Saboya.Mireille@uqam.ca
[****] Université du Québec à Rimouski – Canada - Melanie_Tremblay@uqar.ca
[*****] Université Sherbrooke – Canada - Annick.Lapointe@USherbrooke.ca

Adihou A., Squalli H., Saboya M., Tremblay M., Lapointe A. (2015) Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 206-219.

problèmes qui valorisent des raisonnements algébriques chez les élèves du 1er cycle du secondaire (1re année : 12/13 ans et 2e année : 13/14 ans) (Saboya et al. 2014).

II. ÉLEMENTS DE PROBLÉMATIQUE

Les recherches sur le recours aux problèmes à texte dans l'enseignement de l'algèbre sont très variées : celles qui étudient la place et le rôle des problèmes dans le curriculum de l'enseignement secondaire, celles qui étudient les difficultés liées à leur résolution, celles qui étudient le contenu qu'ils véhiculent et celles qui se focalisent sur les problèmes pour étudier le passage de l'arithmétique vers l'algèbre. Ainsi, les années 90 ont vu la réalisation d'une variété de recherches sur l'enseignement et l'introduction de l'algèbre par le biais de la résolution de problèmes. C'est le cas de Bednarz et Janvier (1996) qui soulignent dans leur introduction « For many reasons, we must consider problem solving as a significant perspective through which to introduce students to algebra » (p.115). Dans leurs études, elles mettent en évidence les différentes perspectives d'introduction de l'algèbre entre autres le développement des habiletés à généraliser et à raisonner de manière analytique qui sont deux composantes essentielles de la pensée algébrique (Squalli 2000), et a fortiori, deux enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre au moment de son introduction.

De nombreuses recherches empiriques ont montré qu'au lieu de stratégies algébriques de résolution de problèmes, un grand nombre d'élèves préfèrent utiliser des stratégies arithmétiques. Ces recherches ont mis en évidence le fait que lorsqu'il s'agit de résoudre une équation, plusieurs ont de la difficulté à opérer sur l'inconnue et utilisent plutôt la méthode par essais et erreurs, qui est souvent efficace dans certains problèmes scolaires. Filloy et Rojano (1984) considèrent que dans de tels cas il existe une coupure didactique le long de la ligne d'évolution d'une pensée arithmétique à une pensée algébrique chez l'élève. A l'instar de ces recherches, Marchand (1998) a travaillé spécifiquement sur l'aspect analytique de l'introduction à l'algèbre. Elle a montré qu'il existait des discontinuités dans la nature et la complexité des problèmes proposés aux élèves d'un niveau scolaire à un autre dans le cadre du programme de 1993. Elle a constaté que peu d'élèves du premier cycle du secondaire effectuait le passage à un raisonnement algébrique, plusieurs privilégiant le raisonnement essais et erreurs qui étaient pourtant peu fréquent avant la réforme de 1993.

Par ailleurs, le programme québécois (Gouvernement du Québec 2006) préconise d'introduire l'algèbre par une double voie : 1) par la généralisation et 2) par l'introduction au raisonnement analytique dans le cadre de la résolution de problèmes (considérer l'inconnue et opérer sur elle comme on opère sur les données connues). En effet, la capacité à généraliser et celle à raisonner sur l'inconnue favorisent la capacité à symboliser (Squalli 2000) et ces deux voies favorisent l'introduction du langage symbolique de l'algèbre. En effet, comme le précise Pimm (1995):

> We symbolise when we want something that is absent or missing in some way – and then we work on or with the symbol as a substitute, and on occasion as a consolation.
>
> […] One central reason, then, for symbolising is that symbols allows us to *manipulate*, by proxy, things that are not easily handled, or which are even impossible to handle, by our physical selves (p. 109).

Par contre pour la première voie, le travail de Denis (1997) et celui de Squalli, Theis, Ducharmes-Rivard et Cotnoir (2007) ont mis en évidence le glissement qui s'est opéré dans les manuels: de l'idée d'exploitation de situations qui se voulaient prétexte à une généralisation et à l'introduction du symbolisme algébrique, à un enseignement devenu avant tout celui des suites numériques. Concernant la seconde voie, par une analyse des problèmes utilisés dans des manuels pour l'introduction à l'algèbre (nature et complexité), Marchand et Bednarz (1999) ont mis en évidence que les problèmes choisis n'aident pas les élèves à voir la pertinence d'un passage au raisonnement algébrique (raisonner de manière analytique) et à saisir la puissance de l'algèbre (Squalli 2002) dans la résolution d'une classe de problèmes pour laquelle le raisonnement arithmétique se révèle en réalité suffisant. Bednarz et Janvier (1994) distinguent trois classes de problèmes : des problèmes de taux, des problèmes de comparaison et des problèmes avec des transformations dans le temps. Elles ont mis en place une grille pour analyser des problèmes arithmétiques et algébriques et leur complexité. Bednarz et Janvier (1996) ont étudié la résolution de problèmes sous l'angle de continuité et de discontinuité entre la résolution avec l'arithmétique et l'approche algébrique. Elles ont analysé la façon dont les élèves procèdent lors d'une résolution arithmétique (les raisonnements, le traitement, l'utilisation des relations, etc.) dans le but de faire un lien entre une résolution arithmétique et celle algébrique. Elles ont ainsi fait ressortir la différence qui existe entre le calcul relationnel à l'œuvre lors d'une résolution arithmétique et d'une résolution algébrique. «The preceding analysis appears to link a priori this way of connecting the problem (algebraic solution) to the reasoning we called « numeric trial » (p.128). Dans leur conclusion, elles ont laissé transparaître que la difficulté des étudiants à résoudre un problème par l'arithmétique pourrait être une motivation pour passer à une résolution par l'algèbre. Leur étude fait aussi ressortir les difficultés des élèves de revenir à des résolutions arithmétiques lorsque ces derniers maitrisent les résolutions algébriques.

Dans la perspective du développement de la pensée algébrique, **quels sont les raisonnements algébriques chez les élèves du 1er cycle du secondaire ?** Nous analysons les raisonnements utilisés par les élèves dans la perspective selon laquelle la pensée algébrique articule les dimensions arithmétique et algébrique.

III. CADRE DE RÉFÉRENCE

Dans cette perspective, il importe alors de pouvoir reconnaitre et distinguer les différentes stratégies de résolution mobilisées par les élèves en situation pour ainsi mieux adapter les interventions. **Le raisonnement algébrique est caractérisé, entre autres, par la capacité à se détacher des grandeurs et du contexte (habillage du problème) soit pour opérer sur l'inconnue, soit pour modéliser des relations, soit pour généraliser un phénomène.** Pour ce faire, on a recours à l'utilisation d'outils sémiotiques (tels que les graphiques ou les symboles algébriques) qui permettent la représentation et le calcul algébrique (Kieran 2007; Squalli 2003). On entend alors par **raisonnement analytique cette capacité à « se servir de l'inconnue comme si elle était déjà connue pour en tirer des conclusions nécessaires jusqu'à en obtenir quelque chose qui soit a déjà été démontré vrai ou a déjà été démontré faux. »** (traduction libre de Lins, 1993, produite par Jeannotte 2009). Bednarz et Janvier (1992) et Lins (1993) voient le raisonnement analytique comme étant une constituante importante du raisonnement algébrique.

Depuis fort longtemps, les Anciens opposaient les méthodes d'analyse et de synthèse (Squalli 2000). Hintikka et Rems (1964) expliquent:

> Analysis is a method Greek geometers used in looking for proofs of theorems and for constructions to solve problems. In both cases, analysis apparently consists in assuming what was being sought for, in inquiring where it comes from, and in proceeding further till one reaches something already known. Analysis is followed by a synthesis in which the desired theorem or construction is established step by step in the usual manner by retracing the stages of the analysis in the reverse order. (p. 1)

ou encore, comme Pappus lui-même l'affirme:

> Now, analysis is a method of taking what is sought as though it were admitted and passing from it through its consequences in order to something which is admitted as a result of synthesis; for in analysis we

> suppose that which is sought to be already done, and we inquire what it is from which this comes about, and again what is the antecedent cause of the latter, and so on until, by retracing our steps, we light upon something already known or ranking as first principle; and such a method we call analysis, as being a reverse solution. (…) But in synthesis, proceeding in the opposite way, we suppose to be already done that which was last reached in the analysis, and arranging in their natural order as consequence what were formerly antecedents and linking them one with another, we finally arrive at the construction of what was sought; and this we call synthesis. (Fauvell & Gray, 1990, p. 209, cité dans Lins, 1992, p. 15).

La distinction entre un raisonnement arithmétique et un raisonnement algébrique réside précisément dans le caractère analytique du raisonnement et non sur l’absence ou la présence de lettres pour représenter les inconnues. Comme le font remarquer Mason et Binns (1993), dans une démarche arithmétique, on fait simplement une suite de calculs sur des quantités connues; jamais on n'opère sur des inconnues. Dans la démarche algébrique, par contre, on procède de l’inconnue vers le connu, en opérant sur l’inconnue comme si c’était un nombre connu. Il va de soi que le symbole utilisé pour représenter l’inconnue peut être verbal ou écrit ; dans ce dernier cas, il peut être un mot (comme le mot *racine* utilisé par Al-Khawarizmi) ou n’importe quel caractère écrit (comme *x*, ?, □, …). La nature du symbole est secondaire du moment que ce symbole soit utilisé comme substitut de l’inconnue, que l’on peut manipuler lorsqu’on veut opérer sur l’inconnue.

IV. MÉTHODOLOGIE

Nous nous avons conçu et soumis des problèmes qui valorisent des raisonnements algébriques chez les élèves (12-14 ans) du 1er cycle du secondaire en vue d’analyser ces raisonnements sur la base des productions des élèves (Saboya et al., 2014). Pour cette étude réalisée au Québec, nous avons choisi les mêmes types de problème de comparaison que

Marchand (1998). Ce sont des problèmes à texte qui possèdent des données numériques et des relations de types additif et multiplicatif.

Exemple : Martin fait l’inventaire de trois produits de son dépanneur. Il compte 22 produits laitiers de plus que de produit céréaliers et il compte 201 produits en conserve de plus que de produit céréaliers. S’il y a 460 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type ?

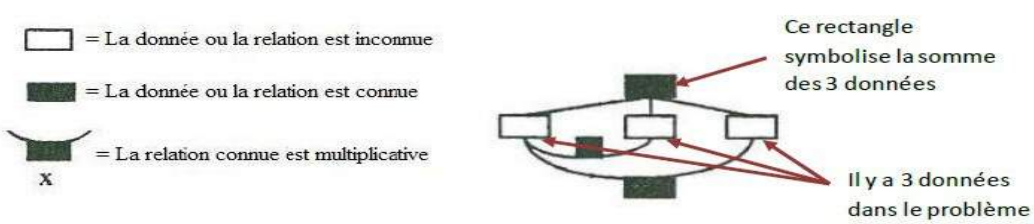


Figure 1 *– Un exemple de la schématisation de Vergnaud*

Lien entre l’exemple et la figure 1

Il y a trois types de produits soit 460 produits en tout (somme des trois données), ce qui symbolise le premier rectangle noir. Les trois rectangles blancs symbolisent le nombre de produits de chaque type recherché (Céréalier, Laitier et Conserve). Une première relation est mise en évidence entre les produits céréaliers et les produits laitiers (22 produits laitiers de plus que de produit céréaliers) et une deuxième relation est mise en évidence entre les produits céréaliers et les conserves (201 produits en conserve de plus que de produit céréaliers).

Les problèmes peuvent être connectés ou déconnectés (Bednarz et Janvier, 1994). Ces auteures précisent que pour les problèmes connectés « une relation peut facilement être établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement de type arithmétique s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir en fin de processus à retrouver la donnée inconnue » (p. 279) alors que pour les problèmes déconnectés « aucun pont ne peut être établi a priori directement entre les données connues du problème » (p. 279) (Saboya et al., 2014). Ainsi, les problèmes déconnectés «résistent» à une démarche de résolution arithmétique et favorisent l'émergence du raisonnement analytique (Squalli, 2002).

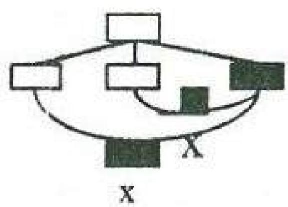
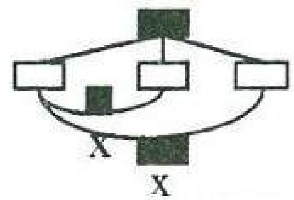
 Un exemple de schématisation d'un ***problème connecté.***	 Un exemple de schématisation d'un ***problème déconnecté.***
Comme une des grandeurs est connue, il suffit d'appliquer les relations également connues pour retrouver les autres grandeurs (relations qui sont dans le cas illustré ici multiplicatives).	Nous pouvons remarquer que cette schématisation est semblable à celle de la colonne de gauche. Toutefois, il n'y a pas de pont direct entre le total (connu) et les autres grandeurs. La résolution est moins immédiate.

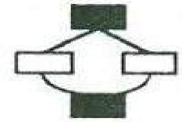
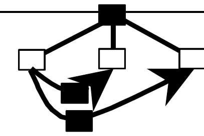
Figure 2 - *Schématisation d'un problème connecté et d'un problème déconnecté (Saboya et al. 2014)*

1. *Grille utilisée pour l'élaboration des problèmes de comparaison*

Les problèmes ayant des relations de comparaison ont été élaborés d'après la grille de Bednarz et Janvier (1994). Celle-ci a été également utilisée dans la conception des questionnaires élaborés par Marchand (1998) et ceux d'Oliveira et Camara (2011). Nous avons élaboré 12 problèmes connectés ou déconnectés avec différents habillages (contexte).

La schématisation de Vergnaud permet de mettre en évidence dans le problème les relations entre les données connues et les inconnues. Bednarz et Janvier (1992) ont classé les problèmes avec des relations de comparaison selon leur degré de complexité et leur structure. Elles considèrent à l'intérieur de chacune des catégories deux variables importantes : la nature des relations (multiplicative et/ou additive) et l'enchaînement des relations. Celles-ci influencent la complexité du problème.

2. *Les problèmes et leur structure*

Problèmes à 2 branches	Problèmes avec UNE relation de comparaison (additive ou multiplicative)	
Problèmes à 3 branches	**SOURCE** Les deux relations on la même donnée comme point de départ.	

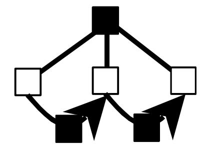
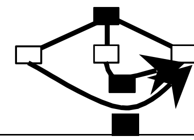
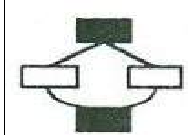
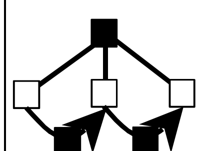
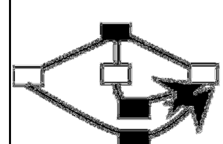
<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>COMPOSITION
Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.</td><td></td></tr>
<tr><td>PUITS
Les deux relations on la même donnée comme point d'arrivée.</td><td></td></tr>
</table>

Figure 3 *– Structures de problèmes*

3. *Échantillon*

Nous avons administré le questionnaire à un échantillon comportant 1203 élèves québécois de 48 classes du premier cycle du secondaire (secondaire 1 et 2).

V. ANALYSE DES RAISONNEMENTS DES ÉLÈVES

<table>
<tr><td>Problèmes à 2 branches</td><td>Problèmes avec UNE relation de comparaison (additive ou multiplicative)</td><td>Énoncé : Un camp de jour offre deux activités de plein air. Le soccer regroupe 3 fois plus de jeunes que le tir à l'arc. S'il y a 212 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles ?</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Problèmes à 3 branches</td><td>COMPOSITION
Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.</td><td>Énoncé : Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site <<facebouille>>. François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François. Si au total ils sont 494 amis, combien d'amis ont-ils chacun ?
Réponse Sophia : 380, Carlos : 38, François: 76</td><td></td></tr>
<tr><td>PUITS
Les deux relations on la même donnée comme point d'arrivée.</td><td>Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles ?</td><td></td></tr>
</table>

Nous présentons une analyse des raisonnements utilisés par quatre élèves pour résourdre des problèmes de type connectés ou déconnectés. Rappellons qu'un *raisonnement est qualifié de raisonnement arithmétique explicite si l'élève trouve la valeur de l'inconnue en n'opérant que sur des nombres ou grandeurs connues. Un raisonnement est qualifié de raisonnement algébrique explicite, si l'élève considère l'inconnue, la représente par*

*un symbole et opère sur l'inconnue comme si c'était un nombre connu***.** Bien que dans cette recherche des élèves aient produit des raisonnements arithmétiques explicites et des raisonnements algébriques explicites, dans cette analyse, nous nous intéressons particulièrement à documenter les raisonnements qui ne peuvent être qualifiés ni de raisonnement arithmétique explicite ni de raisonnement algébrique explicite. En effet, les élèves ne maîtrisant pas encore l'outil algébrique, nous nous attendons à ce que la manifestation de tels raisonnements se réalise dans la résolution des problèmes déconnectés. Dans cette section, nous présentons des exemples de raisonnements d'élèves qui ne sont ni des raisonnements arithmétiques explicites ni des raisonnements algébriques explicites.

1. *Résolution purement numérique : cas de problèmes déconnectés*

Dans ce premier exemple (voir figure 4), la résolution du problème est entièrement dans le registre numérique. Toutefois, comme nous allons le montrer, l'élève considère les inconnues dans le problème et opère sur elles, mais ne les représente pas explicitement. Nous dirons que l'inconnue est muette.

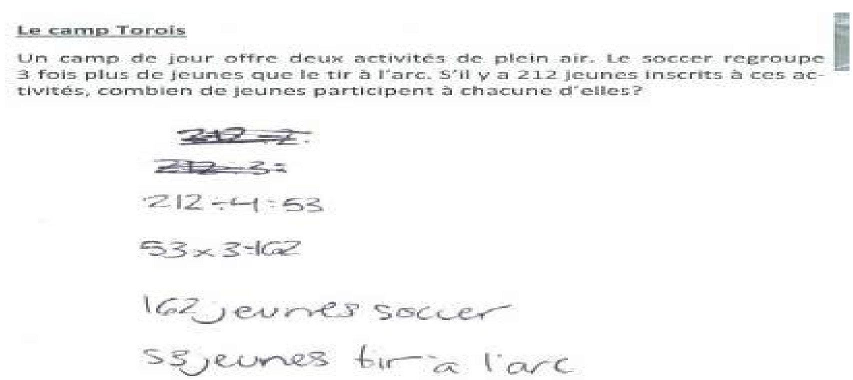


Figure 4 *– Production : Le camp Torois*

L'élève divise 212 par 2 (212 / 2) et ensuite (212 / 3), puis décide de changer de stratégie. Il exécute le calcul 212 par 4 et trouve 53. Ensuite il multiplie 53 par 3 et trouve 162 au lieu de 159 (son erreur renvoie au fait que : « 3x3 = 12 »). Comme le montre la dernière ligne de la figure 4, le nombre 53 réfère au nombre de jeunes inscrits au tir à l'arc. Le nombre 53 a été obtenu de l'opération 212 : 4.

Dans l'égalité 212 : 4 = 53 « jeunes inscrits au tir à l'arc » le nombre « 4 » proviendrait du raisonnement implicite suivant : «si le soccer regroupe 3 fois plus de jeunes que le tir à l'arc, alors le total des jeunes est 4 fois le nombre des jeunes qui font le tir à l'arc; ce nombre est donc égal à 212 : 4».Dans ce schéma de raisonnement, l'élève opère bien sur l'inconnue sans la représenter symboliquement de manière explicite. Nous dirons que l'inconnue est objet de la pensée de l'élève, sur laquelle il opère, mais elle reste muette.

2. Résolution par essais numériques

Dans ce deuxième exemple (voir figure 5), la résolution du problème est dans le registre numérique avec un tableau comme support. Cet élève explicite les relations du problème (François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François). La résolution met en évidence le fait qu'il ait trouvé un pont entre les données ou qu'il positionne les inconnues dans son tableau par ordre. Il commence sa résolution en mettant en premier lieu le nombre d'amis de François et en leur attribuant des valeurs. Il s'est rendu compte du lien qui unit le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia.

Cet élève positionne les trois relations; le nombre d'amis de François = 2x le nombre d'amis de Carlos; le nombre d'amis de Sophia = 5x le nombre d'amis de François et le total des amis est de 494. Il donne des valeurs pour l'inconnue, le nombre d'amis de Carlos, et applique les relations mises en évidence dans le problème (le nombre d'amis de François = 2x le nombre d'amis de Carlos; le nombre d'amis de Sophia = 5x le nombre d'amis de François et vérifie le total). Il ne désigne pas le nombre d'amis de Carlos par un symbole. Il utilise un raisonnement numérique à l'aide d'un tableau. Cet élève n'utilise pas de lettre mais des relations. Il fait des calculs, des essais numériques. Il met en évidence un raisonnement numérique que l'on utilise pour une approche fonctionnelle. L'approche algébrique est ici implicite. Ce type de raisonnement ne permet pas d'exprimer avec certitude si l'élève résout le problème par un raisonnement arithmétique ou algébrique. Toutefois, le travail de l'élève colle à une résolution algébrique en désignant par n = le nombre d'amis de Carlos, alors le nombre d'amis de François = 2n; et le nombre d'amis de Sophia = 5x le nombre d'amis de François = 5*2*n= 10n; et n+2n+10n=13n=494 et n=494 :13= 38).

***Figure 5** – Production : Amis Virtuels1*

3. Raisonnement de type retour à l'origine et fausse position : cas additif

Le problème « Le camp Vifranc » (voir figure 6) propose de déterminer le nombre total de jeunes qui pratiquent trois activités : « Soccer », « Tir à l'arc » et le « Canoe ». « Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le tir à l'arc regroupe 29 jeunes de plus que le canoë. L'énoncé précise qu'il y a 315 jeunes inscrits à ces trois activités et explicite une relation additive entre le nombre de jeunes pratiquant le soccer et le tir à l'arc et une relation additive entre le nombre de jeunes pratiquant le tir à l'arc et le canoë. Il s'agit donc d'un problème, faisant intervenir trois inconnues et trois relations connues.

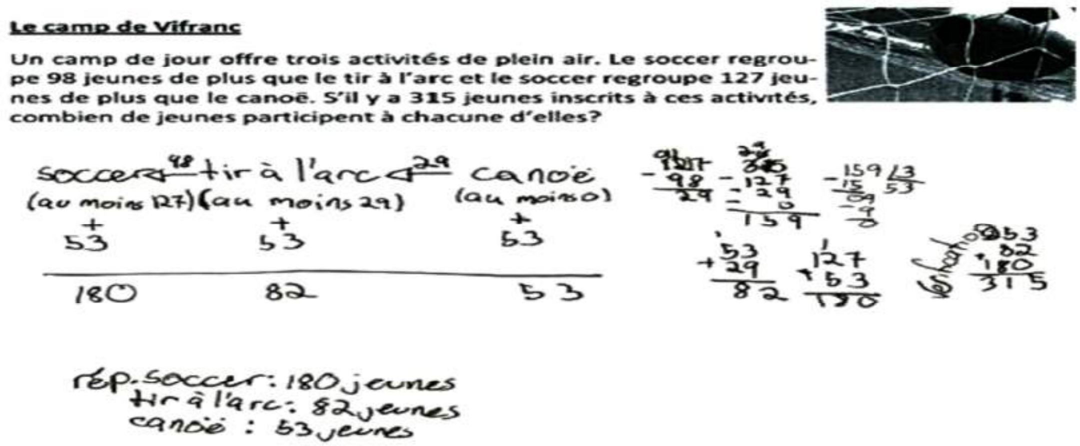


Figure 6 *– Production : Le camp de Vifranc*

Dans ce troisième exemple, la résolution du problème est entièrement dans le registre numérique. L'élève considère les inconnues dans le problème et opère sur elles, mais ne les représentent pas explicitement. Nous dirons que l'inconnue est muette.

L'élève ordonne les inconnues de la plus petite à la plus grande, réécrit les relations entres les inconnues successives. Il extrait les trois activités du problème dans l'ordre d'apparition dans l'énoncé : « Soccer », « Tir à l'arc » et le « Canoe ». Il explicite les relations du problème et positionne les deux relations par rapport au nombre de jeunes pratiquant le canoe. Dans cette opération il a bien considéré les inconnues et opéré sur elles. Il connaît maintenant les écarts entre les inconnues et leur somme. Pour trouver les valeurs des inconnues, il utilise un raisonnement qui s'apparente à la fois au raisonnement de type ***fausse position*** et à la procédure de retour à l'unité dans les raisonnements propotionnels. Il affecte la valeur minimale à l'inconnue de plus petite valeur, (retour à l'origine) et tout en maintenant stables les relations entres les inconnues, il génère les valeurs des deux autres inconnues. Il obtient un total plus petit que le total réel. Il corrige alors les valeurs des inconnues en ajoutant à chacune des valeurs le tiers de l'écart entre les deux totaux. La répartition équitable de cet écart est justifiée pour garder stable les relations entres les différentes variables.

Cet élève représente le nombre de jeunes inscrits dans les trois activités dans l'ordre de leur apparition dans l'énoncé : « Soccer », « Tir à l'arc » et le « Canoe ». Il explicite les relations du problème et positionne les deux relations par rapport au nombre de jeunes pratiquant le canoe. Cette façon de faire est rendue possible parce que le problème établit deux relations additives d'une part entre le « Soccer » et le « Tir à l'arc » et d'autre part entre le « Soccer » et le « Canoe ». L'élève part du principe selon lequel au moins 127 jeunes pratiquent le soccer, si aucun jeune ne pratique le canoe « au moins 0 » et il en déduit qu'au moins 29 jeunes pratiquent le tir à l'arc si le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc. C'est comme un retour à l'origine. En fait avec ces relations qui sont tirées du problème

« Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités » L'élève a établi d'autres types de relations équivalentes « Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le tir à l'arc regroupe 29 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités ». Dans la deuxième partie de son raisonnement qui prend en compte le nombre total de jeunes inscrits (il y a 315 jeunes inscrits à ces activités), son raisonnement part du fait que si aucun jeune ne pratique le canoe et au moins 29 jeunes pratiquent le tir à l'arc 127 jeunes pratiquent le soccer. Or il le problème précise qu'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, donc, il y a 159 jeunes (315 – 127 – 29 =159) qui pratiquent les trois activités et ces derniers sont répartis équitablement. Donc 53 jeunes (159 / 3 = 53) pratiquent le canoe, 53 + 29= 82 pratiquent le tir à l'arc et 180 jeunes pratiquent (53 + 127 = 82 + 98=180) le soccer. Il transforme les relations du problème en des relations équivalentes, il positionne un générateur pour ramener le problème en un problème ou le nombre de jeunes pratiquant le canoe est 0 (retour à l'origine ou positionnement d'une origine) et ensuite par un jeu qui ressemble à une translation (+ 53) ramène le problème à une autre origine (Changement d'origine). Dans le cas de cette résolution « 29 » jeunes a le statut de « relation ».

Cet élève fait un calcul relationnel. Il met en évidence un raisonnement algébrique implicitement. Ce type de raisonnement ne permet pas d'exprimer avec certitude si l'élève résout le problème par un raisonnement arithmétique ou algébrique.

4. Raisonnement de type retour à l'unité et fausse position : cas multiplicatif

Le raisonnement utilisé par cet élève (voir figure 7) est en quelque sorte la version multiplicative du raisonnement présenté précédemment. Ce problème est le même que celui de la figure **5**. L'inconnue "nombre d'amis de Carlos" génère les deux autres inconnues. Cet élève fait aussi un tableau et désigne par les lettres F, C et S le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia. Dans le tableau il positionne ces lettres selon l'ordre d'apparition dans l'énoncé explicite les relations du problème, toutefois il commence par donner des valeurs au nombre d'amis de Carlos en premier. Ce qui permet de dire que c'est la version multiplicative du raisonnement présenté précédemment (***Figure 6***) et que cet élève ramème le nombre d'amis de Carlos à l'unité.

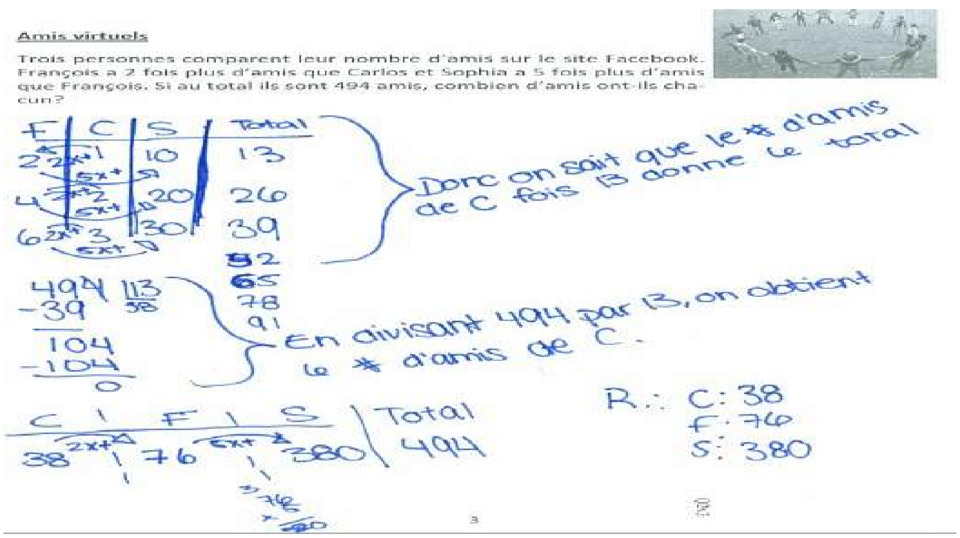


Figure 7 *–Production : Amis Virtuels2*

Le fait d'avoir commencé par le nombre d'amis de Carlos en premier et les flèches qu'il utilise, témoignent d'une analyse du problème ou du moins, d'une analyse des relations entre le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia, ou de l'ordre des relations qui permet d'établir des relations dans une certaine séquence. Il donne des valeurs à différentes au nombre d'amis de Carlos, comme dans une table des valeurs. Esuite, il exprime le nombre d'amis de François sur la base de la relation mise en évidence dans le problème (François a 2 fois plus d'amis que

Carlos). Après, il exprime le nombre d'amis de Sophia sur la base de la relation mise en évidence dans le problème (Sophia a 5 fois plus d'amis que François). Il fait la somme avec le nombre d'amis de Carlos, le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia.

Le nombre d'amis de François	*Le nombre d'amis de Carlos*	*Le nombre d'amis de Sophia*	*Total*
2	*1*	*10*	*13*
4	*2*	*20*	*26*
6	*3*	*30*	*39*

Figure 8 *–Illustration 1 : Amis Virtuels2*

De ce travail il déduit que si au total ils ont 494 amis, 494 est un multiple de 13. Le raisonnement qui lui permet de mettre cet aspect en évidence c'est que pour 1 ami de Carlos, on a un total de 13. Donc pour 38 amis on a 494 amis au total. C'est en cela qu'il fait une division 494 par 13, en posant l'opération et en exécutant l'algorithme et trouve 38. Ce qu'il exprime par : *« Donc on sait que le ?? d'amis de C fois 13 donne le total ».*

Le nombre d'amis de Carlos		*Le nombre d'amis de François*		*Le nombre d'amis de Sophia*	*Total*
	2 X +		*5 X +*		
38		*76*		*380*	*494*

Figure 9 *–Illustration 2 : Amis Virtuels2*

Dans le premier tableau (***Figure 8****)* « le nombre d'amis de Carlos » est positionné dans la deuxième colonne et la flèche y part. Dans le deuxième, « le nombre d'amis de Carlos » est positionné dans la première colonne et la flèche y part. Ce détail met en évidence le fait que le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia (les inconnues) sont identifiées selon l'ordre de leur apparition dans le problème. Remarquons cependant que l'approche de cet élève soulève la question suivante: Raisonne-t-il de façon uniquement numérique après avoir extrait des relations qui l'amènent à trouver une régularité et sur cette base, fait-il des déductions et oublie-t-il le problème ? Cet élève utilise des lettres. Mais ces lettres sont utilisées pour identifier (pour désigner). Elles ne sont pas symbolisées comme des inconnues. Il utilise des relations. Il fait des calculs. Il met en évidence implicitement un raisonnement fonctionnel et algébrique comme dans le cas de l'élève de la figure 5. Ils positionnent un générateur, c'est-à-dire une inconnue qui génère les autres relations et ce dans une certaine séquence. En effet le problème génère une fonction à trois variables qui peut être réduite à une relation multiplicative à une variable.($F(x, y, z)$ avec $y = ax;$ et $z = by = bax,$ c'est-à-dire $F(x, y, z) = F(x, ax, bax) = G(x),$ avec la contrainte $x + y + z = K$ (494)). Toutefois, ce type de raisonnement ne permet pas d'exprimer avec certitude si l'élève résout le problème par un raisonnement purement arithmétique ou algébrique.

VI. DISCUSSION ET CONCLUSION

Dans cette analyse, nous avons exposé quatre type de raisonnement qui ne sont ni arithmétique explicite ni algébrique explicite. Dans un de ces raisonnements (***Figure 4***), l'élève considère les inconnues et opère sur elles sans jamais les expliciter. Dans les autres raisonnements, les élèves considèrent les inconnues, les représentent symboliquement et utilise ces représentations pour décrire les relations entre les inconnues. Cependantt, ils ne vont pas opérer sur ces représentations. Comme dans le cas du raisonnement de type fausse position, pour ne pas opérer sur l'inconnue, ils vont affecter une valeur numérique à l'inconnue (cette valeur est choisie de manière pertinente comme un générateur). Cette valeur est comme dans le cas du raisonnement proportionnel du type retour à l'unité (retour à l'origine dans le cas de problème à stucture additive). Cela permet de corriger la valeur initiale en tenant compte des relations entre les inconnues. Dans un des raisonnements, l'élève représente bien les valeurs connues et les relations symboliquement, et utilise un raisonnement de type essais–erreurs (***Figure 5***).

Ces analyses illustrent bien que ce n'est pas dans l'utilisation de lettres ou d'un symbolisme que le raisonnement peut être qualifié d'algébrique. Dans le même sens, une résolution faisant intervenir uniquement des nombres et des calculs numériques n'est pas automatiquement arithmétique. Notre hypothèse est que ces raisonnements ont été possibles car l'élève ne dispose pas encore ou ne maîtrise pas encore l'outil algébrique. Ceci questionne la pertinence d'une introduction trop précoce de l'approche algébrique de résolution de problèmes ou de ne concevoir le développement de la pensée algébrique que comme moyen d'introduction à l'algèbre. Les raisonnements où l'inconnue est muette et ceux du type fausse position sont des raisonnements mathématiques sophistiqués et témoignent de l'avancée de la pensée mathématique des élèves même si ces raisonnements ne sont pas ceux attendus dans une classe d'algèbre. Le développement de la pensée algébrique avant l'introduction du calcul algébrique doit permettre d'enrichir les compétences mathématiques des élèves et non exclusivement à les préparer à l'algèbre.

Nous avons observé que l'analyse des raisonnements fait ressortir le fait que dans le cas de ces résolutions puisque les élèves ne disposent pas encore de l'outil algébrique, ils ont plus de liberté à construire des raisonnements et résoudre les problèmes sans une démarche algébrique imposée. Certains élèves mettent ainsi en évidence des démarches ou des approches sophistiquées, bref des raisonnements riches qui contribuent au développement de la pensée mathématique. La résolution de ces problèmes offre ainsi un espace pour permettre aux élèves de mettre en évidence des contenus qui leur permettent de développer la pensée algébrique. Ils mettent en évidence des raisonnements qui dépassent des raisonnements purement arithmétiques, tels que les raisonnements où l'inconnue est muette ou désignée expliciment par une lettre. On remarque que pour un même problème des élèves utilise un raisonnement algébrique explicite et un raisonnement arithmétique/algébrique non explicite. Toutefois certains raisonnements ne permettent pas d'exprimer avec certitude si l'élève résout le problème par un raisonnement arithmétique ou algébrique. Une observation importante que cette analyse a mis en évidene est l'intérêt de proposer aux élèves des problèmes déconnectés avant l'introduction des lettres. Ils permettent aux élèves d'induire des raisonnements sur la base des connaissances en lien avec la dimension arithmétique. La façon dont les liens entre les relations et les données sont faits dans le problème (problème connecté ou problème déconnecté), influence certes leur résolution. Par exemple, l'élève s'active dans certains cas à articuler de façon linéaire (dans un certain ordre) les relations. Mais pour les problèmes déconnectés l'activité mathématique qui consiste à trouver la réponse, pousse les élèves à positionner l'inconnue et à opérer sur elle (explicitement ou non) par un raisonnement qui n'est pas centré sur le symbolisme comme le met en évidence Squalli (2002).

Eu égard à la façon d'aborder la résolution de ces problèmes, les élèves ne sont pas dans une dynamique où l'introduction de l'algèbre est un lieu de transition, ce qui connote un avant et un après, mais dans ils sont dans une dynamique selon laquelle le développement de la pensée algébrique consiste en articulation des dimensions arithmétique et algébrique dans la perspective d'un développement et d'approfondissement des concepts mathématiques. Les interactions entre les contenus classiquement dénommés de type algébrique ou de type arithmétique cohabitent dans un espace ouvert.

Les élèves se positionnent par rapport aux inconnues, ensuite ils cherchent une façon d'articuler les relations et les données, soit dans une perspective équationnelle ou dans une démarche opératoire sur des variables, ce qui semble mettre en évidence un recours à une pensée algébrique, soit dans une perspective de produire des réponses de nature numérique dans le but de faire des calculs, ce qui semble mettre en évidence un recours à une pensée arithmétique. Dans les deux cas la dimension numérique est présente et à cette étape de développement de la pensée algébrique. Au travers des exemples des élèves et de nos analyses on pourrait évoquer, la suprématie de la pensée arithmétique sur la pensée algébrique. Pour nous, il ne devrait pas y avoir de suprématie de la pensée arithmétique sur la pensée algébrique ni de la pensée algébrique sur la pensée arithmétique dans la perspective de développement de compétences, en termes d'intentions didactiques, bien que l'algèbre sera par la suite un outil puissant pour résoudre plus tard des problèmes plus complexes. Le développement de la pensée algébrique met en évidence une dialectique entre « une pensée arithmétique» et « une pensée algébrique».

REFERENCES

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1992) *L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : didactique des mathématiques, formation normale des enseignants.* École normale supérieur Marrakech. p. 21-40.

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1994) The emergence and development of algebra in a problem solving context: A problem analysis. In da Ponte J. et Matos J. (Eds.) *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, 64-71. Lisbonne: Université de Lisbonne.

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1996) Emergence and development of Algebra as a problem solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz N., Kieran C. et Lee L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 115- 136). Dordrecht: Kluwer.

Câmara M., Oliveira I. (2010) Estratégias e registros utilizados por alunos de 6º ano na resoluçao de problemas de estrutura algébrica. *X Encontro Nacional de Educaçao Matemática.* Educaçao Matemátic, Cultura e Diversidade. Salvador. Brasil.

Denis C. (1997) Une introduction de l'algèbre en secondaire 3: généralisation et construction de formule. Mémoire de maitrise en enseignement des mathématiques. Montréal, Université du Québec à Montréal.

Filloy E. et Rojano T. (1984) From an arithmetical to an algebraic thought. *Proceedings of PME-NA VI,* Madison, Wisconsin, 51-56.

Fauvel J., Gray J. (1990) *The history of mathematics: a reader.* London: Macmillan.

Gouvernement du Québec (2006) Programme de formation de l'école québécoise : enseignement secondaire, premier cycle : version approuvée. Québec : Gouvernement du Québec.

Hintikka J., Remes U. (1964) *The Method of Analysis.* Its *Geometrical Origin and Its General Significance.* Boston studies in the philosophy of science, volume 75. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Jeannotte D. (2009) Une comparaison des erreurs commises en algèbre par des élèves du secondaire d'aujourd'hui et d'autres de la fin des années 70. *Actes du colloque GDM-2004.*

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In Lester F. K. Jr., (Ed.) Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Lins R. (1992) A framework for understanding what algebraic thinking is, Unpublished PhD Thesis. Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematics Education.

Lins R. C. (1993) *Understanding what Algebraic Thinking is : Analysis and Synthesis.* A contribution at the ESRC Seminar Group on Algebraic processes and the Role of symbolism. London: University of London.

Marchand P. (1998) *Résolution de problèmes en algèbre au secondaire : analyse de deux approches et des raisonnements des élèves.* Mémoire de maîtrise en mathématiques, option enseignement, Université du Québec à Montréal.

Marchand P., Bednarz N. (1999) L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec* XXXIX(4), 30-42.

Marchand P., Bednarz N. (2000) Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes: résolution des élèves. *Bulletin de l'Association des Mathématiques du Québec* XL(4), 15-24.

Mason J., Binns L. (1993) *Exploration of Vergnaud's theorem-in-action in the context of algebra.* A contribution at the ESRC Seminar Group on Algebraic processes and the Role of symbolism. London: University of London.

Oliveira I., Camâra M. (2011) Problemas de estrutura algébrica : uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Pimm D. (1995). *Symbols and meaning in school mathematics.* NY: Routledge.

Saboya M., Besançon V., Martin F., Adihou A., Squalli H., Tremblay M. (2014) Résolution de problèmes écrits au moment de l'introduction de l'algèbre : analyse de productions d'élèves du premier cycle du secondaire. *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec 2013*, 112-122.

Squalli H. (2000) *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base.* Thèse de doctorat, Université Laval.

Squalli H. (2002) Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire: un exemple de raisonnement à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques,* 39, 4-13.

Squalli H. (2003) *Tout, tout, tout, vous saurez tout sur l'algèbre.* Coll. "Mathèse". Montréal : Éditions Bande didactique, 316 p.

Squalli H., Theis L., Ducharmes-Rivard A., Cotnoir G. (2007) Finalités et approches d'enseignement-apprentissage de l'algèbre dans les manuels du premier cycle du secondaire au Québec. *CD-Rom des actes du colloque de International Organisation of Science and technology Education : Critical Analysis of Science Texbooks.*

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ÉTUDE DU DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE AU PRÉSCOLAIRE : CAS DE SUITES NON-NUMÉRIQUES

Manon BOILY [*] – Geneviève LESSARD [**] – Elena POLOTSKAIA [***] – Nathalie ANWANDTER-CUELLAR [****]

Résumé – Dans cet article, nous examinons le potentiel de l'activité portant sur les suites non-numériques au regard du développement d'une pensée algébrique chez les enfants de 5 ans. À cet égard, les relations récursive et explicite sont abordées. Nous apportons une réflexion sur les tâches proposées en nous attardant aux gestes et au langage utilisé par les élèves en relation avec celles-ci et ce, dans le but d'identifier le type de pensée mathématique sollicité. Une attention particulière est portée aux difficultés des élèves et aux stratégies utilisées par les enseignants, pour soutenir les apprentissages de leurs élèves dans l'expression des suites.

Mots-clefs : pensée algébrique, étayage, suite non-numérique, pensée récursive

Abstract – In this article, we examine the potential of educational activities, involving non-numerical patterns, to support the development of algebraic reasoning in five-year-old children. We focus our attention on recursive and explicit relationships present between and within elements of these patterns. In order to identify the type of mathematical thinking students may apply while solving tasks, we analyze the students' language and gestures, used in relation to the tasks' mathematical characteristics. We pay special attention to the students' difficulties and to the strategies used by teachers, to support the students' understanding of non-numerical patterns.

Keywords: Algebraic thinking, scaffolding, non-numerical patterns, recursive thinking

I. INTRODUCTION

Les régularités quantitatives et géométriques sont parmi les domaines d'étude les plus importants en mathématiques (Kieran 2014; Cai & Knuth 2011; Ministère de l'Éducation de l'Ontario 2005). En fait, l'étude de suites non-numériques fait partie de programmes de formation au sein de nombreux pays qui ont comme visée d'introduire le développement de la pensée algébrique de la maternelle à la 12ième année (Moss & McNab 2011 s'appuyant sur les travaux de Noss et al. 1997; Sasman et al. 1999; Warren 2000). Le fait d'introduire le raisonnement algébrique plus tôt dans le cheminement scolaire de l'élève aurait été influencé par plusieurs résultats de recherche démontrant les difficultés vécues par les élèves lorsqu'ils

[*] Université du Québec à Montréal – Canada – *boily.manon@uqam.ca*
[**] Université du Québec en Outaouais – Canada – *genevieve.lessard@uqo.ca*
[***] Université du Québec en Outaouais – Canada – *elena.polotskaia@uqo.ca*
[****] Université du Québec en Outaouais – Canada – *nathalie.anwandter@uqo.ca*

Boily M., Lessard G., Polotskaia E., Anwandter-Cuellar N. (2015) Étude du développement de la pensée algébrique au préscolaire. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 220-230.

sont initiés à l'algèbre au secondaire (Radford 2012; Carraher & Schliemann 2007 ; Kieran 1992).

II. L'ÉTUDE DES RÉGULARITÉS DANS LE PROGRAMME DE L'ONTARIO

À l'instar de ces travaux de recherche, le Ministère de l'Éducation de l'Ontario (MEO 2008) a décidé d'instaurer un programme préconisant le développement de la pensée algébrique, dès la maternelle, pour les élèves de 4 ans et le jardin, chez les élèves de 5 ans. L'idée étant que l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre soient présentés dans le curriculum non pas de façon linéaire et hiérarchique, mais en concomitance avec l'enseignement de l'arithmétique (Cai & Knuth 2011, Masson 2008; Squalli 2002). Toutefois, le MEO (2008) précise, en s'appuyant sur Squalli (2002), qu'il ne s'agit pas d'aborder plus tôt l'algèbre et son langage littéral mais d'amener l'élève à développer une pensée algébrique. À cet égard, le MEO (2008) accorde une place d'importance à l'étude des suites non-numériques et numériques qui, souligne-t-il, est une façon d'amener l'élève à observer les changements et analyser les relations marquées par ces changements ; ceux-ci étant au cœur du raisonnement algébrique.

Bien que les suites à motifs croissants ne soient vues qu'à partir de la deuxième année, nous voulions examiner la compétence de l'élève de 4 et 5 ans à réaliser ce type de suite au regard de la pensée mathématique suscitée.

III. L'INTÉRÊT DE CETTE ÉTUDE

Très peu d'études abordant le développement de la pensée algébrique ont été réalisées auprès d'élèves de 4 et 5 ans. En fait, les études ont plutôt été effectuées auprès d'élèves du primaire. Cependant, il semble qu'en introduisant le raisonnement algébrique dans le programme de maternelle, les enseignants peuvent construire des fondements solides chez leurs élèves, fondements qui leur seront utiles à l'étude de la notion de fonction dans les classes supérieures (Kieran 2004). Nous nous joignons donc à quelques-uns de ces auteurs tels que Moss et McNab (2011), Beatty (2010) et Warren Cooper (2008) pour examiner le potentiel de l'activité portant sur les suites non-numériques au regard du développement d'une pensée algébrique chez des élèves de l'âge préscolaire.

IV. CADRE THÉORIQUE

Dans cet article, nous présentons les compétences des élèves de la maternelle et du jardin à reconnaître et à prolonger une suite non-numérique à motifs croissants. Puis, une attention particulière est portée aux difficultés des élèves et aux stratégies utilisées par les enseignants pour soutenir les apprentissages de leurs élèves dans l'activité sur les suites. Nous apportons également une réflexion sur le développement de la pensée algébrique des élèves à l'égard des tâches proposées en nous attardant aux gestes et au langage utilisé par les élèves en relation avec celles-ci et ce, dans le but d'identifier le type de pensée mathématique sollicité.

1. Le développement de la pensée algébrique

Kieran (2004) explique que la pensée algébrique dans les premières années implique certains modes de pensée, non exclusif à l'algèbre, qui servent de base commune pour des pensées mathématiques, telle que : raisonner sur les relations, représenter et modeler. Les modes de pensée ayant cette caractéristique peuvent être sollicités dans différents types de tâches. Dans le présent article, nous nous intéressons à l'élaboration de cette pensée associée aux suites non-numériques.

Quant à Blanton et Kaput (2011), ils précisent que « *les expériences dans la construction, l'expression, et la justification des généralisations mathématiques* » sont au centre de la préparation à l'algèbre. Ils suggèrent que de telles expériences soient proposées aux élèves dès le début de la scolarisation. En outre, Kaput, Carraher et Blanton (2008) caractérisent la pensée algébrique à partir de deux aspects fondamentaux: (1) la construction et l'expression des généralisations dans des systèmes de symboles conventionnels de plus en plus formels et, (2) le raisonnement avec des formes symboliques (a-a=0), y compris les manipulations syntaxiquement guidées par les formes symboliques. Toutefois, tenant compte de l'âge de nos participants, dans notre étude, nous nous préoccupons principalement de l'aspect de construction et de l'expression non formel (non conventionnel) des relations en contexte de suites non-numériques. Nous adhérons, à l'instar de Kaput et al. (2008), à l'étude du développement d'une pensée algébrique associée aux relations et aux variations au sein de l'activité reliée aux suites non-numériques.

Par ailleurs, dans le contexte d'étude de suites, Bezuszka et Kenney (2008) distinguent la relation récursive : relation entre l'élément de la suite et l'élément suivant (exemple : f(5)=f(4)+2), et la relation explicite : relation entre la position de l'élément dans la suite et la composition (valeur) de cet élément (exemple : f(n)=2n+1). Les pensées donnant accès à l'appréciation de ces relations sont distinctes mais étroitement liées entre elles. Les deux types de pensées sont de nature algébrique selon les auteures car celles-ci sont en fait, les généralisations des relations entre des quantités. Quant à Radford (2012) ce qui fait une pensée de type algébrique est son aspect analytique. Par exemple, la reconnaissance d'une relation sous une forme généralisée.

Dans le cas de suites non-numériques, nous pouvons parler de : (1) l'appréciation d'un motif récurrent dans une suite répétitive ; (2) l'appréciation de la variation dans une suite croissante. Par conséquent, on peut se demander comment la répétition ou la variation influence le type de pensée de l'élève : récursive ou explicite (Bezuszka & Kenney 2008). La distinction entre la pensée récursive et la pensée associée à la relation explicite est importante, car selon (Moss et al. 2008 cités dans Kieran 2014) le raisonnement récursif peut poser un obstacle à l'élève dans son appréciation de la relation explicite pour arriver à une formule (règle fonctionnelle) pour exprimer le n-ième élément. On peut aussi se demander quels sont les aspects des éléments de la suite (figures) qui ont nourri la pensée de l'élève : quantitative et/ou qualitative (+2 ou «ça augmente»), géométrique et spatial («un autre carré», «plus haut») (Berdonneau 2005). Ces pensées peuvent apparaître à l'aide d'un soutien pédagogique de l'enseignant à l'intérieur d'une situation spécifique où l'enfant peut atteindre sa zone proximale de développement.

2. *Le soutien pédagogique de l'enseignant au regard de l'atteinte de la zone proximale de développement de la pensée algébrique de l'enfant*

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la théorie vygotskienne portant sur la zone proximale de développement qui fait référence à «*un niveau de développement potentiel*» que l'élève peut atteindre s'il reçoit le soutien pédagogique approprié d'un adulte expert (Brodrova & Leong 2012 ; Bouchard 2009). Ce soutien est optimal si l'étayage, qui «consiste à soutenir et guider l'apprentissage de l'enfant, notamment par le dialogue, en tenant compte de ses capacités actuelles et potentielles» est utilisé comme stratégie de soutien pédagogique (Bouchard 2009, p.165), puisqu'il permet alors à l'élève d'atteindre sa propre zone proximale de développement. Wood, Bruner et Ross (1976) proposent un cadre théorique pertinent pour analyser le soutien pédagogique, l'étayage, que l'enseignant peut apporter à l'élève lorsque celui-ci est en apprentissage. À cet effet, les auteurs présentent plusieurs types d'interventions pédagogiques pour amener l'élève dans sa zone proximale de développement.

Dans cet article, les expérimentations des élèves seront examinées au regard de six types d'interventions de soutien pédagogique que proposent Wood, Bruner et Ross (1976) : 1) Attirer l'intérêt et susciter l'engagement de l'enfant à la tâche ; 2) Encadrer l'enfant dans la tâche (proposition de stratégies et d'interventions pour alléger la tâche) ; 3) Garder l'attention de l'enfant sur l'activité et la poursuite des objectifs à atteindre en préservant sa motivation et son engagement ; 4) Orienter l'enfant vers les caractéristiques essentielles de la tâche (notamment l'inviter à apprécier un motif récurrent, à porter attention à la variation dans une suite croissante et attirer son attention sur les caractéristiques quantitatives et qualitatives des figures observées) ; 5) Contrôler la frustration de l'enfant en diminuant son stress ; 6) Démontrer, modeler et proposer des solutions à l'enfant afin de le guider vers les étapes de réalisation de l'activité.

V. LA MÉTHODOLOGIE

1. *Composition de l'échantillon*

L'échantillon se compose de 24 élèves provenant de deux écoles et quatre classes dont 12 en maternelle 4 ans et 12 en jardin 5 ans. Chaque enseignante de niveau scolaire maternelle et jardin devait choisir 2 élèves « forts », 2 « moyens », et 2 élèves « faibles » par classe comme échantillon pour représenter les élèves de la classe. Un seul élève de niveau «faible» de la maternelle représentait le deuxième groupe. Le niveau des élèves était évalué par l'enseignante en lien avec son rendement général (écoute, niveau de participation, apprentissages réalisés, etc.). Toutefois, dans cet article, nous présentons uniquement trois cas d'élèves de maternelle et du jardin. Ceux-ci ont tous 5 ans.

2. *Instruments de collecte de données*

La tâche était construite comme instrument de prétest dans le cadre d'une enquête collaborative. La tâche consistait à présenter aux élèves 4 modèles de suites différents. Les tests sur les régularités ont été inspirés de « clinical interviews » apparu dans « Public Lesson: February 6, 2013, Bishop Strachan School ». Dans ce texte, il s'agit de deux modèles particuliers de suites. Le modèle 2 est une suite dont chaque élément est composé d'un nombre de carrés rouges qui correspond à la position d'éléments dans la suite, disposés horizontalement, puis d'un hexagone jaune placé au-dessus des carrés.

Figure 1 - *Le modèle 2 est un motif croissant avec un hexagone jaune constant et des carrés orange représentant la variable*

Pour construire l'élément suivant, l'élève doit placer un nombre exact de carrés, puis un hexagone jaune.

Le modèle 3 est une suite dont chaque élément est composé d'un nombre de carrés qui correspond à la position d'éléments dans la suite, disposés verticalement, ainsi que d'un autre carré rouge disposé différemment (tourné à 90 degré). Pour construire l'élément suivant, l'élève doit placer un nombre exact de carrés en ajoutant un carré tourné à 90 degré sur le dessus.

Figure 2 - *Le modèle 3 est un motif croissant de même couleur. Il s'agissait d'un changement d'orientation pour faire la distinction entre la constante et la variable.*

Pendant le déroulement du prétest, les élèves étaient filmés. Dans un premier temps, trois modèles de suites de complexité croissante ont été présentés à chaque élève individuellement. Dans chaque cas, on demandait aux élèves de montrer, « Qu'est-ce qui vient après? » et d'expliquer « Pourquoi? ». Dans un deuxième temps, on demandait aux élèves de construire leur propre modèle de régularité. Par la suite, l'enseignante et la conseillère pédagogique pouvaient questionner l'élève pour l'amener à réaliser la tâche demandée. Ainsi, elles ont pris l'initiative de poser d'autres questions dans le but d'aider l'enfant dans la tâche à accomplir. Elles ont également pris l'initiative de poser des questions d'entrée quelque peu différentes d'un enfant à l'autre. Plusieurs de leurs interventions sont analysées au regard des types de soutien pédagogique proposés par Wood, Bruner et Ross (1976). Dans cet article, nous présentons uniquement l'analyse et les résultats portant sur l'activité des modèles 2 et 3 qui sont reproduits ci-dessous.

VI. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

1. Un tout début d'émergence d'une pensée algébrique

Exemple 1 : Matthieu 5 ans élève au jardin (modèle 3)

Pour le modèle 3, l'enseignante indique à Matthieu qu'il y a une suite sur la table puis lui demande : «Dis-moi ce que tu vois?» Il répond en pointant les ensembles d'objets d'une même figure : «un de plus en montant». Dans cette activité, Matthieu est en mesure de décrire la relation en termes récursifs en établissant une règle « un de plus » qui peut être répétée à l'infini. Plus précisément, il perçoit la récursion présente dans la suite et la généralise. Dans cet exemple, Matthieu démontre sa capacité à généraliser en établissant sa propre règle récursive qui intègre les sens quantitatif et qualitatif : «un de plus en montant». Le sens quantitatif provient du fait que c'est «un de plus», peu importe le nombre. Le sens qualitatif (spatial) vient du fait qu'il nous indique la direction «en montant». Il semble donc que dans cette situation, la pensée de Matthieu soit associée à l'émergence d'une pensée de généralisation qui elle sous-tend une forme de pensée algébrique.

Si nous portons notre analyse sous un autre angle, en abordant l'aspect pédagogique, nous constatons que la demande de l'enseignante était en soi très ouverte : «Dis-moi ce que tu vois». À cet effet, nous pensons que l'essence même de la question ait pu influencer la pensée de Matthieu et l'amener à formuler à son tour une réponse générale. En fait, l'enseignante n'a pas demandé à Matthieu de lui dire ce qui venait après, ce qui aurait probablement orienté tout autrement la pensée de Matthieu, et par conséquent, sa réponse. En réalité, la question posée par l'enseignante nous laisse croire que la réponse de Matthieu réfère à toute la situation et non à la construction du prochain élément concret, ce qui l'a donc amené à trouver une règle qu'il pouvait appliquer à toute la séquence.

Dans la suite de l'activité, l'enseignante a posé plusieurs questions à Matthieu. Nous analysons également cette partie afin de comprendre de façon plus large l'expression de la pensée de Matthieu. À cet effet, au regard des questions posées par l'enseignante, nous constatons que Matthieu n'exprime pas la constante au sein des figures. Plus précisément, il n'établit pas verbalement le lien entre les carrés en-dessous où il faut en ajouter un de plus et le carré sur le dessus dont la quantité reste toujours la même (la constante). Nous pouvons le percevoir lorsque l'enseignante lui demande combien il y a de carrés dans la première figure, il répond «1», dans la deuxième figure, il répond «2», dans la troisième figure, il répond «3». À ce moment, Matthieu n'exprime aucune relation entre le nombre de carrés en dessous et le carré sur le dessus dont la quantité reste toujours la même. Notre première hypothèse est la suivante : il se peut que l'attention de Matthieu ne soit pas dirigée vers cet élément qu'est la constante mais qu'il porte plutôt son attention sur la partie qui change et que par ailleurs, ce soit celle-là qu'il analyse. Notre deuxième hypothèse est que le terme «carré» n'est probablement pas maîtrisé par l'enfant. Si la figure avait été constituée de deux formes différentes ou si l'enseignante avait nommé les deux formes de façon distincte, par exemple : « carré droit» et « carré tourné », Matthieu aurait pu répondre correctement à la question posée par l'enseignante et exprimer la distinction entre la constante et les autres formes qui composent les figures. En fait, pour accéder à la pensée de Matthieu en ce sens, il faudra l'amener à s'exprimer sur la relation entre les parties variables et la partie «constante» dans la suite. Ainsi, par le questionnement de l'enseignante, nous pourrions accéder à la pensée de Matthieu par rapport à l'élément présent dans la figure associé à la constante.

Dans l'ensemble, cette analyse nous amène à émettre l'hypothèse qu'une question «ouverte» tend à favoriser l'élaboration d'une réponse générale. En fait, il est probable que le fait que l'enseignante ait utilisé une question très ouverte, ait permis à l'élève d'investiguer et de porter son attention sur plusieurs aspects tels que «numérique» et «spatial». En d'autres termes, la question de l'enseignante a offert l'opportunité à l'élève d'investiguer la récursion autant sur le plan visuel que numérique (Bezuszka & Kenney 2008). Ainsi, il se peut également que ce soit la question de l'enseignante de type «ouvert» qui ait incité l'élève à observer l'ensemble de la situation et à construire une règle générale. Moss et London Mc Nab (2011) vont dans ce sens en précisant que le choix des questions de l'enseignante peut diriger l'attention de l'élève vers des éléments spécifiques, ce qui par conséquent, amènerait l'élève à utiliser une forme de pensée algébrique.

Exemple 2 : Sébastien 5 ans élève de la maternelle (modèle 3)

Pour le modèle 3, qui représente une suite à régularité croissante de même couleur et de même forme, de différentes dispositions, l'enseignante demande à Sébastien de continuer la suite. Il réussit à continuer la suite avec un ordre de croissance mais ne met pas le bon nombre de carrés dans la figure construite. À cet effet, il établit une relation existante entre les ensembles en se référant au concept de grandeur. Il qualifie ainsi le premier ensemble de «petit», le deuxième de «moyen», le troisième de «grand». Lorsque la conseillère pédagogique lui demande de continuer la suite et de l'expliquer, Sébastien ajoute des carrés (plus de carrés qu'il n'en faut) et en pointant chacun des ensembles, il dit : «petit», «moyen», «grand» et «ben plus grand». La conseillère lui demande ce qu'il y aurait après, Sébastien répond «ben plus grand que ça». Sébastien fut donc en mesure de trouver une relation de variation entre les figures, celle reliée à un ordre croissant qualitatif. Toutefois, Sébastien, n'a pas été en mesure de continuer la suite avec le bon nombre d'objets, il en a mis cinq au lieu de quatre. La relation qu'il a établie n'a pas suffi à l'amener à trouver la règle complète de la suite. Dans le cas de Sébastien, nous pensons que le travail de la conseillère pédagogique serait d'amener Sébastien à observer davantage les détails de la suite pour être capable de discerner le changement quantitatif exact qui se produit d'une figure à l'autre.

Par ailleurs, l'enseignante a utilisé plusieurs interventions d'étayage proposées par Wood, Bruner et Ross (1976) qui visent à encadrer l'enfant dans la tâche : «Peux-tu continuer la suite?» ; «Peux-tu expliquer ta suite?» ; «Et qu'est-ce qu'il y aurait ici?» et «Est-ce que tu peux me dire ce que tu vois ici?» De plus, quelques interventions utilisées par l'enseignante, de type trois, visent à préserver la motivation de l'enfant : «Très bien!» et «Super!». Toutefois, certaines interventions de l'enseignante de type quatre auraient pu amener l'élève à observer les caractéristiques essentielles de l'activité dont les détails quantitatifs, ce qui aurait peut-être pu aider Sébastien à construire à bon escient les prochaines figures de la suite. Par ailleurs, une question plus ouverte telle que «Que vois-tu?», aurait peut-être permis à Sébastien de coordonner plusieurs caractéristiques et d'émettre une tout autre réponse.

Exemple 3 : Maryanne 5 ans élève au jardin (modèle 2)

Pour le modèle 2, l'enseignante dit à Maryanne de regarder sur la table parce qu'elle a une autre suite puis lui dit: «Peux-tu m'expliquer ce que tu vois devant toi?» À cet effet, l'enfant répond «une suite». On constate ici que la question posée à Maryanne oriente la pensée de l'enfant non pas sur l'interprétation de la structure en terme de changement d'une figure à l'autre, mais sur une pensée déjà construite axée sur une connaissance antérieure au niveau de la terminologie qui sous-tend la notion de «suite». Ainsi, Maryanne s'est plutôt attardée à percevoir la suite comme répétitive parce que c'est ce qu'elle a appris antérieurement. La pensée de Maryanne semble donc avoir été construite au regard de la phrase d'entrée évoquée par l'enseignant. Malheureusement, nous ne pouvons pas savoir ce qui se serait passé si l'enseignante avait posé directement la question «Que vois-tu?» à Maryanne. Peut-être que celle-ci aurait influencé Maryanne à percevoir d'entrée de jeu le changement au sein de la suite et à émettre une réponse différente. En fait, l'enfant est souvent orienté vers un désir de dire ou faire ce qu'il pense que l'enseignant aimerait qu'il dise ou qu'il fasse (Brousseau 1980). Ainsi, lorsque l'on examine les réponses de Maryanne, nous sommes portées à croire que celles-ci ont été orientées par son désir de satisfaire l'enseignante en faisant référence à un apprentissage précédent.

Par ailleurs, l'élève semble utiliser un comportement qu'elle a appris avec les suites répétitives, c'est-à-dire «nommer les couleurs». À cet effet, elle essaie d'appliquer sa connaissance précédente à l'activité sur les suites croissantes que l'enseignante lui présente. Elle nomme les couleurs. Par la suite, lorsque l'enseignante pose la question suivante à Maryanne «Qu'est-ce qui vient après?», l'élève utilise sa connaissance précédente sur les suites répétitives et essaie de changer sa suite en cohérence avec cette connaissance, c'est-à-dire, la transformer en une suite répétitive. Ce n'est que lorsque l'enseignante lui dit qu'elle ne peut rien changer que Maryanne est amenée à porter attention sur la relation récursive et à construire le prochain élément de la suite. Il semble que la question de l'enseignante ait permis à Maryanne d'établir un raisonnement récursif de type quantitatif qui l'a finalement amenée à mettre le bon nombre de carrés dans chacune des figures de la suite. À cet effet, Maryanne utilise une procédure de comptage adéquate mais n'est toujours pas en mesure de prononcer la règle de la suite. Une autre question de l'enseignante fait suite à celle précédemment citée. Cette fois-ci, la question de l'enseignante fait référence au processus de changement qui se passe au sein des figures de la suite : «Qu'est-ce que tu vois qui est différent au premier, au deuxième et au troisième»? L'enfant est ainsi amené à observer la suite, à prendre conscience de l'unicité de chacune des figures et à établir des relations entre celles-ci et par conséquent à percevoir le changement qui se produit au sein de la suite. Les interventions de l'enseignante ont permis d'orienter l'attention de l'enfant vers le changement. Par la perception de ce changement, elle a réussi au niveau de la manipulation concrète des objets à continuer la suite. Cependant, sur le plan verbal, elle ne peut exprimer ce changement par une règle qui le sous-tend. Ainsi, bien que les questions de l'enseignante aient sollicité la pensée récursive de Maryanne et que celle-ci ait été en mesure de continuer la suite, elle n'est pas parvenue à exprimer verbalement la formule récursive associée à la suite du modèle 2.

Étant donné que Maryanne exprime bien ce changement par la manipulation des objets de la suite puisqu'elle peut continuer la suite, il est donc plausible de croire que Maryanne possède une connaissance implicite lui permettant de réguler la situation par manipulation (Brousseau 1971). Toutefois, nous ne sommes pas en mesure de confirmer l'essence de cette pensée puisqu'elle n'a pas été exprimée verbalement.

En résumé, nous concluons que les interventions de l'enseignante dans un cadre d'étayage ont amené Maryanne à apprécier les caractéristiques variées de la suite à un stade qui lui a permis de continuer correctement celle-ci. Toutefois, nous pensons qu'elle n'a pas eu accès à un *niveau* de pensée algébrique au même titre que Matthieu et Sébastien. En fait, Maryanne n'a pas exprimé verbalement la généralisation correspondante à cette construction comme l'avait fait Matthieu sous forme quantitative, ni sous forme qualitative tel que Sébastien l'a fait.

De plus, treize interventions ont été nécessaires pour amener l'enfant à réaliser l'activité et par conséquent atteindre sa zone proximale de développement. À cet effet, l'enseignant utilise des interventions de type 2 qui visent à simplifier la tâche sans indiquer la solution directement (L'enseignante aide Maryanne en enlevant les carrés de surplus qu'elle avait ajoutés) et de type quatre qui consiste à orienter l'attention de l'enfant sur certaines caractéristiques essentielles de l'activité et vers le but de l'activité car Maryanne semble avoir dévié de la direction en puisant dans ses connaissances antérieures reliées aux suites répétitives. Ainsi, l'enseignante réoriente son attention en l'amenant sur une autre piste, celle du changement. À cet effet, elle formule la question suivante: «Que remarques-tu qui est différent?» Elle tente alors d'attirer et d'accentuer l'attention de l'enfant sur des caractéristiques qui lui permettront de comprendre le changement au sein de la suite et ainsi de poursuivre l'activité : «Combien vois-tu de carrés dans le premier?» ; «Dans le deuxième?» ; «le troisième?» ; «le quatrième?» Ces interventions permettent à Maryanne de s'orienter vers l'aspect quantitatif des figures. De plus, les questions de l'enseignante contiennent des remarques qui donnent l'information nécessaire à l'enfant pour comprendre ce vers quoi l'enseignante aimerait l'amener, plus précisément le but de l'activité c'est-à-dire l'observation du changement dans la suite. Enfin, l'enseignante fait une intervention de type 6 en indiquant à l'enfant la prochaine étape à réaliser. Elle lui demande: «Qu'est-ce que tu mettrais dans ton dernier?» À cet effet, Maryanne qui semble avoir établi la relation entre les figures, met 4 carrés et 1 hexagone à la dernière figure et complète la dernière figure.

VII. DISCUSSION

1. Le développement de la pensée algébrique et les stratégies de soutien apportées par l'expert (enseignant ou conseillère pédagogique)

Dans le premier exemple, Matthieu a perçu la variation en s'appuyant sur une pensée récursive de type quantitatif et qualitatif «un de plus en montant». À cet effet, Bezuska et Kenney précisent (2008) que : «Tout comme la pensée récursive est fondamentale pour la pensée et le raisonnement algébrique, ainsi la récurrence et les relations de récurrence font partie du contenu de base fondamental de l'algèbre.» (p.1, traduction libre). De plus, ce qui attire notre attention c'est le fait que Matthieu puisse coordonner différents types de pensée (nombre, opération, qualitatif, et spatial) pour rendre compte de la relation récursive qui relève d'une pensée plus axée sur les relations et donc à portée algébrique (Kieran 2004).

Cette coordination rendue possible grâce à la connaissance numérique de Matthieu, démontre un niveau de raisonnement bien élevé.

Dans le deuxième exemple, Sébastien fut en mesure de trouver une relation de croissance sous forme qualitative: « petit, moyen, grand, plus grand, ben plus grand que ça ». Nous pouvons ainsi percevoir que Sébastien fait référence à une pensée récursive de type qualitatif. Cependant, il est possible que Sébastien ait été en mesure de mettre le bon nombre d'éléments dans les figures, s'il avait porté son attention sur les caractéristiques quantitatives de la suite. De plus, bien que Sébastien ait utilisé une pensée de type algébrique en faisant référence à l'aspect récursif et qualitatif de la suite, nous pensons que sa pensée n'a pas atteint un niveau supérieur, celui associé à la coordination de plusieurs caractéristiques des figures de façon simultanée tel que Matthieu l'a démontré. Il s'agirait donc, chez Sébastien et chez Matthieu, de deux niveaux de pensée de type algébrique. Il est vrai que la question de l'expérimentation «qu'est-ce que tu vois?» est ouverte et n'incite pas nécessairement chez l'élève l'analyse quantitative. Dans l'enseignement, il faut penser comment construire la situation pour que cet objectif soit plus clair chez l'élève.

Dans le troisième exemple, Maryanne utilise une procédure de comptage adéquate mais n'est toujours pas en mesure d'exprimer la variation entre les figures telle que l'avaient fait Sébastien et Matthieu. Elle a toutefois été capable d'exprimer sa pensée en construisant l'élément suivant correctement. Cependant, à notre avis, Maryanne est dans un processus d'acquisition d'outils langagiers pour exprimer une compréhension plus développée des changements et de la récursion au sein des suites à motif croissant sous une forme verbale. En fait, à ce propos, Bodrova et Leong (2012) précisent que le développement cognitif de niveau supérieur est dépendant de l'acquisition d'outils de la pensée qui est favorisée par le langage partagé, soit lorsque l'adulte intervient auprès de l'enfant par le dialogue (interventions verbales) et lui propose des stratégies lui permettant de réaliser de nouveaux apprentissages et d'atteindre un autre niveau de pensée, soit lorsque l'élève est mis dans une situation qui est rendue «nécessaire» ou «optimale».

À cet effet, notre analyse nous a permis de constater que des interventions spécifiques de l'étayage, soient celles de type 4, pourraient amener les élèves à percevoir et à coordonner plusieurs caractéristiques dans les figures et ainsi établir différentes relations au sein de la suite. De plus, nous avons pu remarquer que le type de question posé par l'enseignant pouvait avoir des répercussions sur le genre de pensée élaborée par l'élève. À cet effet, il semble qu'une question ouverte telle que «Que vois-tu?» amènerait l'élève à regarder l'ensemble de la situation et à percevoir et coordonner plusieurs caractéristiques à la fois. Ce genre de question favoriserait chez l'élève un raisonnement plus général basé sur l'observation de la situation dans son ensemble. Toutefois, notre analyse nous amène à être prudent quant aux consignes ou aux phrases qui sont émises par l'enseignant juste avant l'activité. Par exemple, si une question telle que «Peux-tu m'expliquer ce que tu vois devant toi?» est précédée d'une phrase de l'enseignant qui indique ce qu'il y a sur la table telle que :«Regarde ici, tu as une suite», celle-ci peut influencer et orienter différemment la pensée de l'enfant qui pourra dès lors être porté à se référer à certains apprentissages antérieurs sur les suites, ce qui le limitera dans l'expression des relations qu'il pourrait percevoir. Ainsi, à notre avis, il serait préférable de ne pas indiquer à l'enfant ce qu'il y a sur la table et commencer d'emblée par «Que vois-tu?».

En résumé, les trois cas discutés permettent d'alléguer que les suites non-numériques ont le potentiel de susciter chez l'enfant les éléments de la pensée d'ordre algébrique suivants :

- l'appréciation des caractéristiques quantitative et qualitative des figures
- l'appréciation de changement (croissance) au niveau qualitatif et quantitatif

- l'appréciation de rôles différents des composantes des figures : « constante » et « variable »
- la coordination des caractéristiques variées des figures
- l'expression de la régularité par manipulation (construction du prochain élément de la suite)
- l'expression verbale de la règle de la suite.

Toutefois, nous n'avons observé aucun cas où l'enfant ait exprimé la règle d'une suite (fonctionnelle, non récursive) sous une forme explicite. On peut penser que cela est dû au fait que ce type de pensée algébrique n'était pas accessible aux enfants, ou que les enfants n'ont tout simplement jamais porté attention à la relation directe entre la position de la figure dans la suite et la composition de la figure, puisqu'aucun matériel visuel n'était présent pour alimenter la pensée de l'enfant à ce niveau. Toutefois, la généralisation de relation récursive était bien observée dans l'expérimentation ce qui nous donne le droit de parler de raisonnement algébrique.

VIII. CONCLUSION

Cette étude nous a permis de mettre de l'avant le potentiel des suites non-numériques par l'entremise des éléments de la pensée d'ordre algébrique qu'elles suscitent ainsi que l'influence de l'étayage dans le type de pensée qu'elle favorise. À l'instar de (Bjorkland, 2014, sous presse), nous croyons que les suites représentent un objet d'apprentissage potentiel mais que les enseignants ont besoin de comprendre ce que l'élève doit discerner pour faire les apprentissages spécifiques. Toutefois, le curriculum de l'Ontario n'est pas précis dans la distinction de la compréhension du changement sous forme récursive ou explicite. De plus, le curriculum n'est pas précis sur le potentiel des questions qui peuvent favoriser le développement de la pensée algébrique et du type de soutien à apporter à l'élève en ce sens. Par ailleurs, en donnant l'occasion aux élèves de 4 et 5 ans de vivre une activité sur les suites à motifs croissants, bien que cela ne soit pas favorisé dans le curriculum, il faut se demander s'ils ont les outils nécessaires pour formuler des règles explicites tels que du matériel visuel à l'appui ainsi qu'une connaissance des nombres suffisamment élaborée pour être capable de formuler cette relation explicite. Cette avenue de recherche peut sembler intéressante.

REFERENCES

Beatty R. (2010) Supporting algebraic thinking : Prioritizing visual representations, *OAME Gazette, 49(2)*, 28-33.

Berdonneau C. (2007) Mathématiques. Activités pour les tout-petits. Profession enseignant. Hachette éducation.

Bezuska S., Kenney M. (2008) The three R's : Recursive thinking, Recursion, and Recursive formulas . *NCTM : "Algebra and algebraic thinking in school mathematics".*

Björklund C. (2014 sous presse) Playing with patterns-lessons learned from a learning study with toddlers Communication présentée en Suède dans le cadre du POEM.

Bouchard C. (2009) Le développement global de l'enfant de 0 à 5 ans en contextes éducatifs. Presses de l'Université du Québec : Québec

Blanton M. L., Kaput J.J. (2011) Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades . *In* Cai, J., Knuth, E. (Eds) (p.5-21) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* Heidelberg, Germany: Springer.

Bodrova E., Leong D. (2012) *Les outils de la pensée. L'approche vygotskienne dans l'éducation à la petite enfance.* Presses de l'Université du Québec : Québec

Brousseau, G., (1971) *La théorie des situations didactiques.* Bordeaux, France : DAEST-Faculté des Sciences de l'Homme-Université Victor Segalen Bordeaux 2.

Cai J., Knuth, E. (2011) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* Heidelberg, Germany: Springer.

Carraher D.W., Schliemann A. (2007) Early algebra and algebraic reasoning. In Lester F. K. (Eds.) (p.669-705) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kaput J.J. (2008) What Is Algebra? What is Algebraic Reasoning? In Kaput J.J., Carraher D.W., Blanton M.L. (Eds.) (p.xvii-xxi) *Algebra in the early grades.* National Council of teachers of mathematics. New York .

Kaput J.J., Carraher D., Blanton M. (2008) Skeptic's guide to algebra in the early grades. In Kaput J.J., Carraher D.W., Blanton M.L. (Eds.) (p.xvii-xxi) *Algebra in the early grades.* National Council of teachers of mathematics. New York .

Kieran C. (2014) What Does Research Tell Us about Fostering Algebraic Thinking in Arithmetic? National council of teachers mathematics NCTM.

Kieran C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator* 8(1), 139 - 151

Kieran C. (1992) The learning and teaching of school algebra. In Grouws D.A. (Eds.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Masson J. (2008) Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. In Kaput J.J., Carraher D.W., Blanton M.L. (Eds.) *Algebra in the early grades* (pp.57-94). National Council of teachers of mathematics. New York .

Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2008) *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la troisième année. Modélisation et algèbre de la maternelle à la troisième année.* Fascicule 1 régularités et relations. Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Moss J., London McNab S. (2011) An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Function and Co-variation . In Cai J, Knuth E. (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp.277-320). Heidelberg, Germany: Springer.

Radford L. (2012) *On the development of early algebraic thinking.* P*NA*, *6*(4), 117-133.

Squalli H. (2002) Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnement à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques*, 39, 4-13.

Warren E., Cooper J. (2008) Generalizing the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking . *Educational Studies in Mathematics* 67, 171–185.

Wood D., Bruner J. S., Ross G. (1976) The tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry* 17, 89-100.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ÉTUDE D'UNE TRANSPOSITION DIDACTIQUE DE L'ALGORITHMIQUE AU LYCÉE : UNE PENSÉE ALGORITHMIQUE COMME UN VERSANT DE LA PENSÉE MATHÉMATIQUE

Nathalie BRIANT* – Alain BRONNER**

Résumé – Nous nous positionnons sur la place de la *pensée algorithmique* relativement à la *pensée mathématique*, en analysant deux points. Le premier consiste à considérer l'émergence de la pensée algorithmique lors de la résolution d'un problème mathématique en utilisant un environnement informatisé. Nous définissons la *double transposition* qui s'en suit, en caractérisant la démarche algorithmique. Le second consiste à montrer comment le détour par une *pensée algorithmique* a permis de développer une *pensée algébrique* et d'asseoir des concepts algébriques relatifs à la notion d'équation. Nous nous appuyons sur les résultats d'une ingénierie didactique expérimentée sur des élèves de 15 ans du lycée français.

Mots-clefs : pensée algorithmique, pensée algébrique, algorithme, équations, programmation

Abstract – We position ourselves about the place of *algorithmic thinking* in relation to *mathematical thinking*, analysing two points. The first is to consider the emergence of algorithmic thinking when solving a math problem using a computerized environment. We define *double transposition* that follows, featuring algorithmic approach. The second is to show how the detour through an *algorithmic thinking* has helped develop an *algebraic thinking* and sit algebraic concepts relating to the notion of equation. We build on the results of a didactic engineering tested on 15 years students of French high school.

Keywords: algorithmic thinking, algebraic thinking, algorithm, equations, programming

Préambule : Nous apportons ici une contribution au groupe de travail n°3, en nous centrant sur l'axe 2 intitulé « *L'activité du sujet au cœur du développement de la pensée mathématique* », et plus particulièrement sur le développement de la pensée algébrique des élèves, par le biais d'une pensée algorithmique. L'axe 1, « *La pertinence d'une différentiation de différents modes de pensées mathématiques* », est également convoqué puisque des caractéristiques propres à chacun de ces deux modes de pensée sont évoquées.

La réforme des lycées en France de 2009 s'est accompagnée d'un changement de programmes. Relativement à la classe de seconde (secondaire 2, 1ère année, 15–16 ans), une part d'algorithmique a été introduite dans le programme de mathématiques. L'objet de ce texte fait suite à nos travaux de thèse intitulée « *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français* » (Briant 2013). Nous souhaitons développer trois hypothèses sur l'apport de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques :

* LIRDEF. Université de Montpellier – France – nathalie.briant@fde.univ-montp2.fr
** LIRDEF. Université de Montpellier – France – alain.bronner@fde.univ-montp2.fr

Briant N., Bronner A. (2015) Étude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 231-246.

- concernant certains types de problèmes mathématiques, dont nous donnons quelques exemples plus loin, à toute forme de pensée mathématique nécessaire à leur résolution s'adjoint une pensée algorithmique particulière, dès que l'on cherche à les résoudre en utilisant les Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement (TICE), et notamment des langages de programmation ;

- par le choix de certains types de tâches, le développement de la pensée algorithmique chez les élèves peut permettre le développement de leur pensée mathématique en rendant plus visible les objets utilisés et les étapes de la procédure de résolution ;

- le fait de dégager une démarche algorithmique sur le problème à résoudre amène à se situer au niveau d'un type de tâches, et non plus au niveau de la tâche elle-même (au sens de Chevallard 1999). C'est-à-dire qu'un point de vue plus général est abordé, au-delà des cas particulier de certaines variables, permettant ainsi un accès plus important aux concepts en jeu et une meilleure compréhension de ceux-ci.

Pour soutenir ces hypothèses, nous reprenons certains résultats de notre travail de thèse, montrant comment des élèves de seconde du lycée français (15-16 ans) ont lié *pensée algorithmique* et *pensée algébrique* et comment ce travail leur a permis d'asseoir leurs connaissances en algèbre. Le cadre didactique sous-jacent à cette étude est celui de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard (1999).

I. L'AVENEMENT D'UNE PENSEE ALGORITHMIQUE POUR RESOUDRE CERTAINS TYPES DE PROBLEMES MATHEMATIQUES UTILISANT LES TICE

Dans cette première partie, nous nous proposons de développer ce que recouvre pour nous le terme de *pensée algorithmique*, pensée qui se développe au sein d'une *pensée mathématique*, mais sans se fondre complètement dans celle-ci, mais venant la compléter, amenant d'autres points de vue sur le problème à résoudre, d'autres techniques et d'autres technologies.

1. *Un exemple de la nécessité de développer une pensée algorithmique pour résoudre un problème mathématique dans un environnement informatisé*

La plupart des procédures de résolution de problèmes mathématiques ne se présentent pas directement sous la forme d'un algorithme. En général, la structure de cet algorithme reste à déterminer, à partir d'éléments de la résolution mathématique du problème posé dans un dispositif papier-crayon. Nous cherchons à montrer que la recherche d'un algorithme à partir des éléments de cette résolution n'est pas *transparente*[1], au sens de Artigue (1997), pour l'individu qui doit accomplir cette tâche.

[1] Artigue (1997) définit le concept de pseudo-transparence comme un *phénomène qui renvoie à des décalages dans les modes de représentation (interne et à l'interface) des objets.* Ce chercheur souligne que même si les phénomènes peuvent sembler minimes, ils perturbent le fonctionnement didactique. Pour exemplifier ce phénomène, prenons le cas de l'écriture des expressions algébriques sur support informatisé en considérant par exemple la tâche « entrer l'expression $\frac{x+4}{x-7}$ dans un logiciel ou une calculatrice ». Il est nécessaire d'adapter l'expression, de la *transposer* pour qu'elle soit lisible par une calculatrice actuelle de type collège (ou encore un tableur) sous la forme d'une écriture linéaire parenthésée du type $(x+4)/(x-7)$. La confrontation des deux environnements papier-crayon et informatique peut s'avérer bénéfique pour une compréhension approfondie de concepts, en exhibant des techniques ou des technologies différentes. Par exemple ici, la technique consistant à transformer une écriture spatiale en une linéarisation et un parenthésage des expressions permet d'asseoir les règles de priorité des opérations.

Commençons par présenter un exemple d'algorithme portant sur la simplification de la racine carrée d'un entier naturel noté *N*, sous la forme $a\sqrt{b}$ avec *a* et *b* entiers et *b* le plus petit possible.

L'existence de l'écriture $\sqrt{N} = a\sqrt{b}$ étant assurée[2], il reste à trouver une procédure qui permette de déterminer les valeurs de *a* et *b*.

Une première possibilité est de décomposer *N* en facteurs premiers et de considérer la parité des exposants des nombres premiers en présence pour calculer a et b : un premier algorithme peut ainsi être réalisé. Cet algorithme est souvent utilisé en environnement papier-crayon (pour des nombres « pas trop grands ») et se présente sous la forme suivante :

Algorithme n°1

Effectuer la décomposition de *N* en facteurs premiers : $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\propto_k}$

Pour tout entier i compris entre 1 et *k* :

- Si $\propto_i$ est pair, *a* contient le facteur $p_i^{\frac{\propto_i}{2}}$;
- Si $\propto_i$ est impair, *a* contient le facteur $p_i^{\frac{\propto_i - 1}{2}}$ et *b* contient le facteur p_i.

Une seconde possibilité est d'utiliser l'égalité $N = a^2b$ et d'effectuer l'algorithme suivant :

Algorithme n°2

Pour chaque entier *I* compris entre 1 et Ent($\sqrt{N}$) :

- Tester si la division euclidienne de *N* par I^2 donne un reste nul ;
  - Si c'est le cas, affecter à *a* la valeur de *I* ;
  - Si ce n'est pas le cas, *a* garde sa valeur.
- Passer à la valeur suivante de *I*.

Calculer la valeur de $b = N/a^2$

Ce second algorithme donne, en sortie de la structure répétitive, la plus grande valeur possible de *a*, puisque cette valeur est modifiée à chaque nouvelle valeur de *I* qui vérifie $N \equiv 0$ [I^2]. La valeur de *b* en est alors déduite.

L'un ou l'autre de ces algorithmes répond au problème posé, cependant le second possède l'avantage sur le premier de ne pas nécessiter d'effectuer en préambule la décomposition du nombre *N* en facteurs premiers.

Si l'objectif est de programmer cet algorithme, une machine n'ayant pas -a priori- implanté en son sein un programme de décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier, le second algorithme est, de ce fait, plus facilement transposable en un algorithme *informatisé*,

[2] Si *N* est un carré parfait, il existe *a* entier tel que $N = a^2$ et par suite :$\sqrt{N} = a\sqrt{1}$;
Si *N* n'est pas un carré parfait, il existe un plus grand carré parfait *a* qui divise *N* (au pire *a* = 1). Alors $N = a^2b$ et $\sqrt{N} = a\sqrt{b}$. Si *a* est le plus grand possible, *b* sera le plus petit possible.

qui pourra alors être écrit dans un langage de programmation, compréhensible par une machine, comme celui réalisé ci-dessous sur le logiciel Algobox[3].

<table>
<tr>
<td>Soit N un entier naturel.

Pour chaque entier I compris entre 1 et Ent($\sqrt{N}$) :

- Tester si la division de N par I^2 donne un reste nul ;

- Si c'est le cas, affecter à a la valeur de I ;

- Si ce n'est pas le cas, passer à la valeur suivante de I.

Calculer la valeur de $b : N/a^2$

Afficher

racine(N) = a*racine(b)</td>
<td>VARIABLES
N EST_DU_TYPE NOMBRE
I EST_DU_TYPE NOMBRE
a EST_DU_TYPE NOMBRE
b EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE N
POUR I ALLANT_DE 1 A floor(sqrt(N))
DEBUT_POUR
SI (N%(I*I)==0) ALORS
DEBUT_SI
a PREND_LA_VALEUR I
FIN_SI
FIN_POUR
b PREND_LA_VALEUR N/(a*a)
AFFICHER a
AFFICHER "*racine("
AFFICHER b
AFFICHER ")"
FIN_ALGORITHME</td>
<td>N = 120
Algorithme lancé
2*racine(30)
Algorithme terminé

N = 256
Algorithme lancé
16*racine(1)
Algorithme terminé

N = 1789
Algorithme lancé
1*racine(1789)
Algorithme terminé</td>
</tr>
<tr>
<td>Algorithme de simplification de $\sqrt{N}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où (a, b) ∈ N² et où b est le plus petit possible.</td>
<td>Programme correspondant à l'algorithme ci-contre sous Algobox</td>
<td>Résultats obtenus par le programme pour trois valeurs particulières de N</td>
</tr>
</table>

Figure 1 *- Exemple de simplification des racines carrées sur le logiciel Algobox*

Cet exemple montre que la recherche d'un algorithme *informatisé* s'appuie sur la résolution mathématique mais que celle-ci nécessite d'être *transposée* (au sens de Balacheff, 1994) pour tenir compte des actions qui sont élémentaires pour la machine. Ainsi ce premier exemple montre que bien que la résolution de ce type de tâches repose sur un algorithme (n°1) en environnement papier-crayon, mais que la recherche d'un autre algorithme (n°2) est souvent nécessaire afin résoudre le même type de tâches dans un environnement informatisé. Ainsi, une pensée algorithmique vient s'intégrer à la pensée mathématique initiale, non pas en se substituant à elle, mais en la complétant.

2. *De la résolution mathématique au programme informatique : une double transposition*

Le concept de transposition didactique (Chevallard 1985) a été repris par Balacheff (1994) et retravaillé en tenant compte des contraintes liées à l'apprentissage de savoirs en environnement informatique sous le nom de *transposition informatique.* Le savoir enseigné dans une situation classique d'enseignement est différent du savoir enseigné avec un ordinateur, ce qui peut se schématiser comme suit :

[3] Algobox est un logiciel de programmation, libre et gratuit, développé en 2009 par Pascal Brachet, professeur de mathématiques au lycée Bernard Palissy à Agen. L'auteur le définit lui-même comme un *logiciel pédagogique d'aide à la création et à l'exécution d'algorithmes.* Ce logiciel est bien adapté pour des lycéens puisque son principe est que le code de l'algorithme se construit pas à pas grâce à des instructions de base pré-écrites que l'on insère, comme des « briques » dans le corps du programme. L'activité est alors davantage centrée sur la réflexion du choix des instructions et de leurs articulations plutôt que sur la syntaxe de lignes de code.

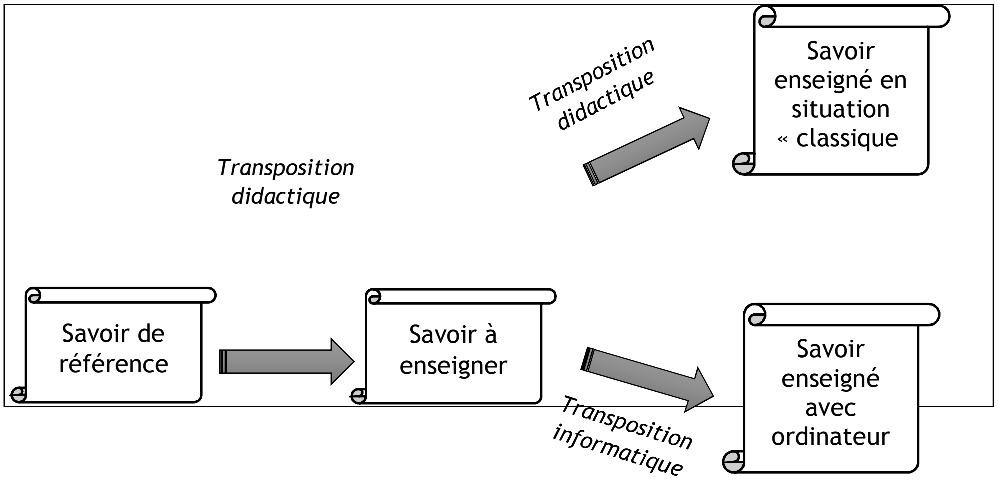
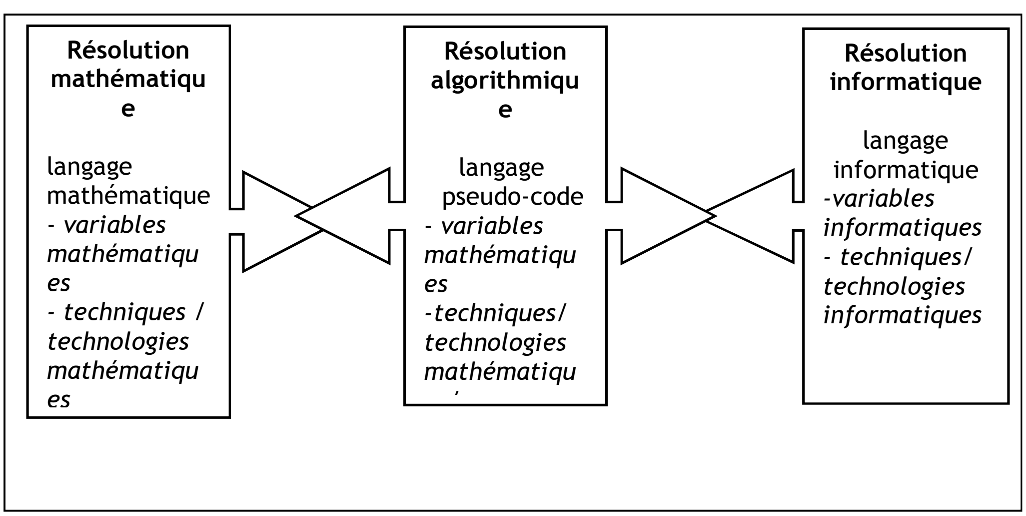


Figure 2 *- Transpositions didactique et informatique (Chevallard 1982, Balacheff 1994)*

Balacheff (1994) explique qu'*aux contraintes de la transposition didactique s'ajoutent, ou plutôt se combinent, celles de modélisation et d'implémentation informatiques.* Ce chercheur définit deux types de contraintes liées à la transposition informatique, les *contraintes de la modélisation computable* et les *contraintes logicielles et matérielles* des supports informatiques. Les premières portent sur la représentation et le traitement interne des savoirs dans la machine et les secondes sur la représentation et le traitement au niveau de l'interface, autrement dit ce qui est « visible » pour le sujet. Balacheff (ibid.) donne l'exemple du logiciel Cabri-Géomètre qui possède une représentation interne des objets géométriques issue de la géométrie analytique sur un modèle des nombres réels et une interface offrant une représentation de ces objets sous forme d'un pavage fini de pixels. Il précise que ces représentations ne sont pas transparentes : « *les systèmes de représentations ayant leurs propres caractéristiques, l'univers interne et l'interface combinent des effets générateurs et des phénomènes non intrinsèques aux entités représentées.* » (ibid., p.16)

Nos recherches sur l'intégration de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques nous amènent à reprendre le concept de transposition informatique de Balacheff mais avec une adaptation, tenant compte de la singularité de l'algorithmique. En effet, lorsqu'une tâche de type « concevoir un programme pour résoudre un problème » est donnée, nous voyons émerger une *double transposition*, associée à des techniques différentes, justifiées par des technologies relevant du domaine mathématique, du domaine informatique, ou des deux conjointement.

Nous schématisons et explicitons ci-dessous cette double transposition.



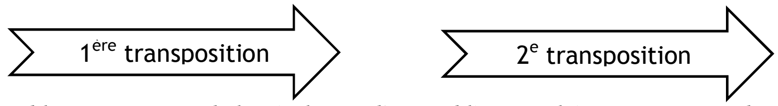


Figure 2 *- Double transposition de la résolution d'un problème mathématique en vue de sa programmation*

- *Premier cadre de la figure 2 : résolution mathématique*

Ce premier cadre symbolise la résolution du problème posé dans le cadre mathématique « habituel », c'est-à-dire en environnement classique papier-crayon. Cette résolution s'appuie sur des techniques et un environnement technologico-théorique mathématique : c'est ainsi que la résolution du problème est dite *mathématique* (par opposition ici à *informatique*).

Cette résolution peut avoir donné lieu à un premier algorithme, que nous nommons *algorithme mathématique*, comme l'algorithme n°1 de l'exemple de la simplification d'une racine carrée, mais notons que toutes les résolutions de problèmes mathématiques ne se présentent pas nécessairement sous la forme d'un algorithme.

- *Deuxième cadre de la figure 2 : résolution algorithmique*

La résolution mathématique achevée, une première transposition a lieu pour déterminer un algorithme *informatisé*, écrit en *pseudo-code*, notions que nous allons définir plus précisément.

Dans l'exemple de la simplification d'une racine carrée, nous avons vu que l'algorithme mathématique n°1, utilisé habituellement dans un environnement papier-crayon, nécessite la connaissance des nombres premiers, ce qui n'est pas généralement pas implanté de base dans un logiciel quelconque de programmation. La recherche d'autres algorithmes intervient alors dans cette phase, comme l'algorithme n°2 présenté plus haut, dont la structure tient compte des actions élémentaires réalisables par une machine et des logiciels de programmation intégrés : nous nommons ainsi *algorithme informatisé* ce type d'algorithme dont la fonction est de faciliter le passage à la deuxième étape qui sera développée plus loin.

Cette première transposition se fait à différents niveaux :

- au niveau du langage : nous passons d'un langage mathématique, c'est-à-dire *le langage utilisé usuellement par les écrits mathématiques* (Modeste 2012, p.62) à un langage en *pseudo-code* ressemblant à un langage de programmation, qui serait débarrassé de ses problèmes de syntaxe. Modeste (2012, p.24) le présente comme *un langage intermédiaire, inspiré des instructions des langages informatiques mais libéré de certaines contraintes et manipulant directement les objets mathématiques* ;

- au niveau des techniques et technologies utilisées toujours en considérant notre exemple, les techniques utilisées pour l'algorithme n°1 reposent sur la décomposition du nombre *N* en facteurs premiers et la parité des exposants des nombres premiers en présence, alors que pour l'algorithme n°2, elles reposent sur la recherche par divisions successives d'un plus grand élément dont le carré divise le nombre *N* ; les technologies-théories sous-jacentes s'en trouvent alors modifiées.

La résolution algorithmique du problème donné s'appuie sur la transposition à venir qui permettra de transformer *l'algorithme informatisé* en un programme, dont les contraintes sont propres au logiciel et à la machine choisis pour l'implanter.

- *Troisième cadre de la figure 2 : résolution informatique*

Une seconde transposition aboutit à l'écriture du programme avec un logiciel adéquat.

Elle se fait elle aussi à différents niveaux :

- au niveau du langage : il s'agit de passer du langage en pseudo-code de l'algorithme à un langage informatique, c'est-à-dire un langage de programmation. À titre d'exemple, en reprenant la simplification de la racine carrée (cf. figure 1), la propriété « I^2 divise N », *élémentaire* pour un individu, nécessite une reformulation pour donner un équivalent qui soit compréhensible par une machine, selon sa structure interne et dans son langage. Le test choisi sous la forme « $N \ \% \ I^2 = 0$ »[4] a été choisi mais toute autre formulation utilisant une succession d'opérations élémentaires pour le logiciel et préprogrammées dans celui-ci, conviendrait (comme par exemple « $Ent\ (N/I^2) = N/I^2$ »).

- au niveau des variables : les variables mathématiques utilisées dans les algorithmes vont céder la place aux variables informatiques dans le programme informatique. Remarquons que ces variables font partie de la technologie des praxéologies informatiques mais leur importance dans la programmation nous les fait préciser ici ;

- au niveau des techniques et technologies utilisées : aux techniques et technologies-théories propres à la résolution du problème en environnement papier-crayon viennent s'adjoindre celles liées aux principes de programmation informatique (notion de variables informatiques, affectation de variables, lecture/écriture, structures alternatives, structures répétitives).

Au centre de cette seconde transposition, apparaît la nécessité de comprendre ce qui est élémentaire pour une machine et ce qui ne l'est pas, ce qui va impliquer de comprendre les bases du fonctionnement d'un ordinateur, au niveau des instructions que celui-ci peut exécuter. Nous sommes au cœur de la *transposition informatique* (Balacheff 1994) et d'*instrumentation*[5] (Rabardel 1995) avec des problèmes de *pseudo-transparence*, au sens d'Artigue[6] (2005).

En conclusion de cette première partie, les tâches du type « concevoir un programme pour résoudre un problème mathématique » se décomposent en deux phases :

- la création *d'algorithmes informatisés* ou bien l'adaptation *d'algorithmes mathématiques* à partir de la résolution mathématique du problème en environnement « classique » papier-crayon ;

- l'adaptation de l'algorithme informatisé retenu en un programme, implanté sur un système informatique donné.

Bien entendu, ces phases ne sont pas forcément séquentielles ni chronologiques, de nombreux aller-et-retour pouvant survenir. Avec l'expérience, certains experts peuvent élaborer plus directement un programme mais on peut faire l'hypothèse que, face à des problèmes complexes, ils ont aussi besoin de passer par un algorithme informatisé et du pseudo-code.

Pour résoudre un tel type de tâches, le sujet va devoir apprendre à se décentrer de sa posture d'individu pour se placer dans la position de tenir compte de ce que sait faire la machine, s'il veut que son algorithme soit transférable en un programme. C'est en ce sens qu'émerge une *pensée algorithmique*, non entièrement « superposable » à la *pensée*

---

[4] La syntaxe « *a % b* » renvoie le reste de la division euclidienne de *a* par *b* sous le logiciel Algobox.

[5] L'*instrument* constitue pour Rabardel (1995) *une entité mixte qui tient à la fois du sujet et de l'artefact* : l'instrument est alors l'unité entre un *artefact* et l'organisation d'actions possibles, appelées les *schèmes d'utilisation*, qui constituent un ensemble structuré d'invariants correspondant à des catégories d'opérations réalisables à l'aide de l'artefact considéré. Tout au long de ce processus de conception, de création, de modification et d'utilisation d'un l'outil, le sujet évolue aussi personnellement en même temps qu'il s'approprie cet outil, et cette évolution concerne à la fois son comportement et sa connaissance. L'*instrumentation* (et l'instrumentalisation) est ce qui consiste à faire d'un artefact un instrument.

[6] Cf. note n°1 de bas de page.

mathématique mais intimement liée à elle. Pour la définir, nous choisissons cette définition de Modeste (2012), lui-même inspiré par Hart[7] :

> La pensée algorithmique serait alors une façon d'aborder un problème en essayant de systématiser sa résolution, de se questionner sur la façon dont des algorithmes pourraient ou non le résoudre. (p.47)

Nous retrouvons ainsi le troisième point indiqué dans l'introduction, sur le fait qu'une pensée algorithmique amène à une *généralisation* d'une tâche donnée, en s'intéressant au type de tâches sous-jacent, c'est-à-dire en ne considérant pas le problème pour des valeurs numériques données, mais en envisagent sa résolution de manière plus générale.

II. LIENS ENTRE PENSEE ALGORITHMIQUE ET PENSEE ALGEBRIQUE DANS LE CADRE D'UNE INGENIERIE DIDACTIQUE EN CLASSE DE SECONDE

Nous présentons ici une partie de l'ingénierie didactique, développée dans le cadre de notre thèse (Briant 2013). L'objectif est double ici. Il s'agit d'une part d'illustrer le modèle développé dans la première partie (Cf. section I.2 et figure 2) et d'autre part de montrer comment le détour par une pensée algorithmique a permis de développer et d'asseoir des concepts algébriques gravitant autour de la notion d'équation.

La situation que nous décrivons ci-après a été expérimentée auprès d'élèves de trois classes de seconde du lycée français (secondaire 2, 1ère année, 15–16 ans) et menée par les enseignants de ces classes. La situation offre un travail sur la *modélisation* des équations, ce qui consiste en la détermination d'une équation *paramétrée* qui couvre tous les cas de figure d'une liste d'équations donnée. Par exemple, pour les deux équations $1{,}5x - 4 = 412x + \frac{2}{3}$ et $x - 4 = 0$, un *modèle* qui convient est $ax + b = cx + d$, alors que $x + a = 0$ ne convient que pour la seconde (*a, b, c, d* nombres réels fixés). Cette modélisation est permise par l'introduction de l'algorithmique et de l'outil informatique, comme Balacheff (1994) l'exprime :

> L'expression computationnelle des objets d'enseignement pour leur inscription dans un dispositif informatique dédié à l'apprentissage n'est pas le résultat d'un simple processus de traduction d'un système de représentation vers un autre, mais celui d'un véritable processus de modélisation et donc de théorisation des objets d'enseignement et de leurs conditions d'existence. (p.10)

Balacheff précise que l'introduction de l'outil informatique va remettre en question l'écologie des savoirs enseignés, dans le sens où elle conduit à l'explicitation de contenus d'enseignement jusque-là non-dits, voire à la création de nouveaux objets d'enseignements (ibid.). C'est bien ce qui se produit dans le cadre de notre expérimentation où le détour par l'algorithmique permet de considérer les équations comme *objet*[8] de l'algèbre au sens de Douady (1986) sur lesquels on amène les élèves à s'interroger.

L'objectif annoncé aux élèves est la création de programmes permettant de résoudre « automatiquement » les équations de la liste ci-dessous (cf. figure 3) :

---

[7] Référence donnée par Modeste (2012) : Hart E. W. (1998) Algorithmic Problem Solving in Discrete Mathematics. In Morrow L. J. & Kenney M. J. (Eds.) *The teaching and learning of Algorithm in school mathematics, 1998 NCTM Yearbook* (pp. 251-267). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

[8] Citons Douady (1986) afin d'expliciter les concepts d'objet et d'outil : « […] un concept est ***outil*** lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par ***objet***, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement. »

1. Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous, **sans les transformer au préalable**.

2. Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.

3. Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.

*Équation 1 :	$x + 3 = 0$	Équation 7 :	$\frac{7}{2}x + 3 = \frac{2}{3}$
*Équation 2 :	$2x - 3 = 4$	Équation 8 :	$\frac{7}{2}x + \frac{2}{5} = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x$
*Équation 3 :	$3 - 2x = -2$	Équation 9 :	$3 = 2x + 1$
Équation 4 :	$2 + x = 5x$	Équation 10 :	$3x + 2 = 5 + 3x$
Équation 5 :	$2x + 3 = 3x + 1$	Équation 11 :	$1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$
Équation 6 :	$8 - x = \sqrt{2}$		

Figure 3 *- Fiche élève de la situation expérimentée*

1. Contexte de l'expérimentation menée

Au niveau des programmes institutionnels français, les différentes capacités requises pour résoudre algébriquement les équations présentées en figure 3 se situent en classe de quatrième du collège (secondaire 1, 3e année, 13–14 ans). Le programme de ce niveau de classe stipule de « mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue » ainsi que de « réduire une expression littérale à une variable, du type 3x – (4x – 2) » (MEN 2008). Pour la classe de troisième du collège (secondaire 1, 4e année, 14–15 ans), il est précisé de « *compléter les bases du calcul littéral et d'en conforter le sens, notamment par le recours à des équations ou des inéquations du premier degré pour résoudre des problèmes* » (Ibid.). Pour la classe de seconde du lycée (secondaire 2, 1ère année, 15–16 ans), le programme enjoint de savoir « *résoudre une équation se ramenant au premier degré* » (MEN 2009).

Ainsi le public ciblé pour l'expérimentation menée, constitué d'élèves de classes de seconde, a-t-il déjà reçu un enseignement concernant la résolution algébrique de ce type d'équations. En revanche, le travail de modélisation – explicité précédemment – pour obtenir la forme générique de ces équations, ne fait pas partie expressément des programmes institutionnels français, et les élèves testés ne l'ont pas rencontré au cours de leur scolarité. Il s'agit de retravailler des connaissances déjà rencontrées au collège, mais en alliant *ancien et nouveau,* en proposant ce travail dans le cadre de l'algorithmique. Les élèves sont amenés à manipuler les inconnues, les paramètres et les techniques de résolution des équations du premier degré. Si le but pour l'élève est la réalisation d'un programme qui « tourne » sur une machine, l'objectif d'enseignement est une reprise du concept d'équation et des objets qui gravitent autour de ce concept.

Pour situer plus globalement la situation proposée aux élèves dont la fiche de travail est présentée en figure 3, décrivons brièvement la séquence dans laquelle elle s'inscrit. Celle-ci composée de trois situations[9] déclinées comme suit :

[9] Les situations n°1 et n°3 ne sont pas explicitées davantage dans ce document. Elles sont données ici afin de situer l'expérimentation menée. La situation n°1 a fait l'objet d'un travail de groupes de 4 à 5 élèves qui se sont accordés sur un classement possible des équations données, travail ensuite restitué au groupe classe par un rapporteur puis discuté par l'ensemble de la classe. La situation n°3 a été menée en salle informatique, avec la

- la situation n°1 permet un travail sur la *catégorisation* d'équations de degré 1 et 2, ce qui consiste en un classement par les élèves d'une vingtaine d'équations polynomiales de degré 1 ou 2, selon des critères à déterminer. Le choix de ces équations permet d'identifier les conceptions des élèves relatives à la notion d'équation et de renforcer, ou le cas échéant de faire émerger la connaissance que la forme et la nature d'une équation influent sur sa technique de résolution ;

- les situations n°2 et n°3 sont construites de façon similaire et offrent chacune deux types de tâches : le premier sur la *modélisation* des équations, ce qui consiste en la détermination d'une équation *paramétrée* qui couvre tous les cas de figure d'une liste d'équations donnée ; le second sur la détermination des techniques de résolution de types d'équations reconnues, par le biais de l'algorithmique et de la programmation. La différence entre les deux situations est le degré des équations considérées : pour la situation n°2, les équations sont polynomiales de degré 1 alors que pour la situation n°3, elles sont de degré 2.

C'est la situation n°2 qui est développée dans cet article. Elle a été conduite en février 2011 dans trois classes de seconde d'un même lycée. Les trois professeurs expérimentateurs ont, au moment de l'expérimentation, déjà initié leurs élèves à la structure de base d'un algorithme et à une prise en main du logiciel Algobox, débutant ainsi l'*instrumentation*, au sens de Balacheff (1994), de ce logiciel. Le travail se déroule en binômes, au cours d'une séance d'une heure, les élèves disposant d'un poste informatique pour deux et d'une liste d'équations à résoudre, résolution à effectuer en élaborant un ou des algorithmes qui sont ensuite programmés.

2. *Analyse a priori*

Une analyse a priori de cette situation permet de montrer la double transposition nécessaire pour passer de la résolution mathématique à la conception du programme. Si nous contextualisons les trois étapes de la figure 2 à la situation présentée, nous obtenons le schéma suivant pour la résolution de l'équation $ax + b = cx + d$ $(a \neq c)$:

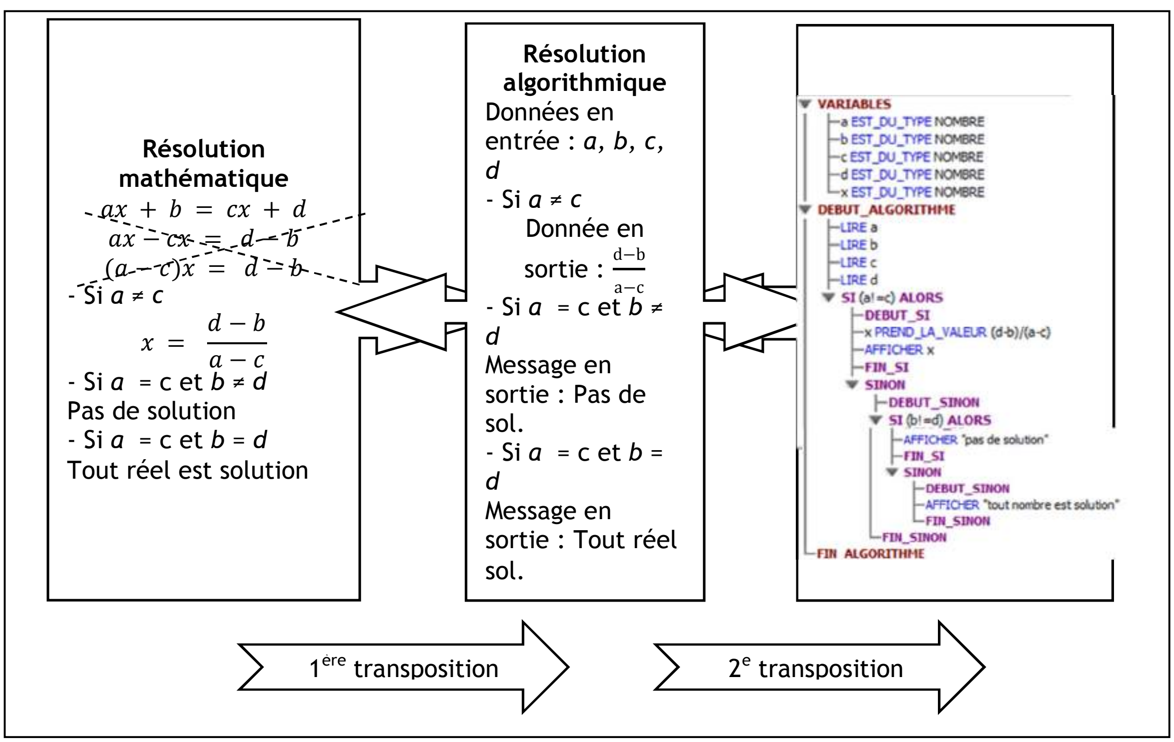


***Figure 4** - Double transposition de la résolution d'une équation du 1er degré en vue de sa programmation*

Cette double transposition a les caractéristiques suivantes :

- la *première transposition* nécessaire à la conception d'un algorithme à partir de la résolution « mathématique » de l'équation du premier degré implique la disparition d'étapes intermédiaires de la résolution en environnement papier-crayon (indiquées en pointillés sur la figure 4). Il existe ici une *pseudo-transparence* (Artigue 1997) des environnements papier-crayon et algorithmique et une *non-congruence* de ces deux environnements, au sens de Duval (1995). Il y a un réel travail de transposition à effectuer pour passer du résultat mathématique : « L'équation $ax + b = cx + d$ admet pour solution $\frac{d-b}{a-c}$, si $a \neq c$ » à la formulation algorithmique associée. D'autre part, la condition « si $a \neq c$ » arrive en fin de la résolution « à la main », sous forme d'une discussion selon la nullité ou non de $a - c$, alors qu'elle est nécessaire tout au début de l'algorithme. Il y a toute une *reconstruction* nécessaire à envisager pour concevoir l'algorithme à partir de la résolution de l'équation, une autre pensée dans laquelle il faut entrer, une *pensée algorithmique*.

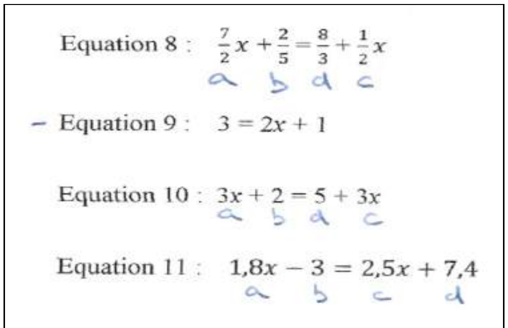
- la *seconde transposition* pour la conception du programme informatique à partir d'un algorithme nécessite non seulement la compréhension d'un nouveau langage, mais également une adaptation de l'algorithme aux contraintes du logiciel utilisé. Par exemple, le logiciel Algobox ne permet pas l'affichage direct d'une expression à calculer. Le logiciel n'accepte pas l'instruction « *afficher (d – b)/(a – c)* », ce qui oblige à passer par une variable intermédiaire. Ceci induit ici encore une non-congruence entre l'algorithme conçu et le programme informatique.

3. *Analyse a posteriori*

Bilan des résultats des élèves

Outre la mise en place elle-même de cette situation conçue pour permettre la prise en compte de l'aspect *objet* des équations au sens de Douady (1986), nous avons relevé des indicateurs montrant l'émergence de cette prise en compte par les élèves et leur entrée dans une *pensée algébrique*. Nous partageons la conception d'une pensée algébrique au sens de Radford (2006 et 2008), non nécessairement liée à l'utilisation de symbolismes algébriques et de règles formelles, mais caractérisée par deux grands principes : la possibilité de nommer des quantités indéterminées ou inconnues (dans des registres variés comme la langue, des schémas ou du symbolisme divers) et de raisonner sur ces quantités comme si elles étaient connues. Les indicateurs renvoient à des aspects différents des pensées algorithmique et algébrique comme le montrent les exemples suivants :

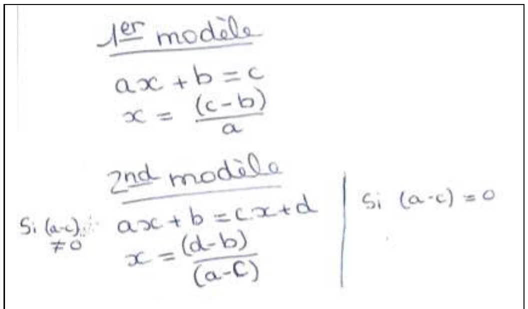
- l'utilisation en actes de *paramètres* nécessaires pour écrire sous une appellation unique différentes équations données dans le cadre d'une démarche algorithmique avec les bons choix des variables informatiques ; ce qui montre qu'une structure générale algébrique est bien dégagée par l'élève (cf. figure 5).



Production de l'élève Pierre

Figure 5 *- Élève considérant des équations du premier degré sous une forme générique*

- l'utilisation du terme *modèle* d'une équation lors de la recherche d'une forme générique d'équation correspondant à une liste donnée, montrant ainsi que l'élève est entré dans une posture spécifique d'une pensée algorithmique où il s'agit de dégager des procédures générales adaptées à des données (cf. figure 6).



Production de l'élève Victorien

Figure 6 *- Production d'élève considérant la modélisation des équations*

C'est clairement le passage par l'algorithmique qui provoque l'évolution du rapport aux objets de l'algèbre, ce mode de pensée invitant les élèves à faire un pas de côté par rapport à leur considération habituelle de ces équations et des techniques qu'ils ont automatisées. Ces exemples montrent que le travail engagé va bien au-delà de la simple résolution d'équations du premier degré : les objets de l'algèbre sont réinterrogés, revisités, allant jusqu'à l'étude *de nouveaux objets* comme souligné par Balacheff, et en particulier l'étude du concept de *paramètre*. Chevallard (1989) précisait déjà l'intérêt didactique de l'introduction du concept de paramètre dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire, en nommant ce concept *la force de l'algèbre*, et en affirmant que s'interroger sur les paramètres d'un système est une façon d'entrer dans la *modélisation algébrique*. Le détour par l'algorithmique permet d'accéder à ce concept de paramètre, en en réalisant une certaine *matérialisation,* au sein d'un programme informatique.

En effet, les élèves se sont questionnés sur la façon de communiquer les équations du type $ax + b = c$ à l'ordinateur. La différentiation du rôle des lettres permet de relier les notions de paramètre et d'inconnue à la structure de l'algorithme à concevoir : les paramètres sont des données d'entrée (les *connues* de Descartes) alors que l'inconnue est une donnée de sortie de l'algorithme. La structure de l'équation aide à comprendre la structure de l'algorithme, et réciproquement. L'exemple de l'élève Aliaume est significatif de ce changement de ces nouvelles connaissances (cf. figure 7).

```
VARIABLES
  Xfacteur EST_DU_TYPE NOMBRE
  egal EST_DU_TYPE NOMBRE
  Sumx EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE Xfacteur
  LIRE Sumx
  LIRE egal
  egal PREND_LA_VALEUR (egal-Sumx)/Xfacteur
  AFFICHER egal
FIN_ALGORITHME
```

Production de l'élève Aliaume

Figure 7 *- Programme de résolution de l'équation $ax + b = c$*

Pour déterminer une forme générique pour une liste d'équations de la forme $ax + b = c$, l'élève Aliaume utilise des noms pour les paramètres, évocateurs de leur statut. Il nomme l'équation :

(Xfacteur)x + (Sumx) = (egal).

Le coefficient de l'inconnue est nommé « *Xfacteur* », pour rappeler le rôle que joue ce paramètre que l'on multiplie par *x*. Le second terme du membre de gauche s'appelle « *Sumx* », ce qui lui confère le statut d'un nombre que l'on ajoute au terme en *x*. Enfin le paramètre de droite est appelé « *egal* », évoquant l'annonce du résultat d'une opération. Ces notations sont plus qu'un simple choix de vocabulaire et dénotent bien le sens attribué à ces objets. Elles permettent à l'élève de retrouver facilement de quel paramètre il s'agit, lorsqu'il manipule une équation avec des coefficients déterminés. C'est bien ici encore le détour par une *pensée algorithmique* qui autorise cette démarche.

Les limites de l'expérimentation

Néanmoins, la cohérence globale de la situation a été perdue de vue par certains élèves qui ne possédaient pas les premiers concepts de base de l'algorithmique, ni n'étaient suffisamment instrumentés pour l'utilisation du logiciel Algobox. Les observations menées dans les différentes classes ont montré que le nombre de manipulations liées à des questions de communication avec l'environnement informatique vient parasiter les rétroactions qui auraient été intéressantes d'un point de vue mathématique. Laborde (2003) indique que l'acquisition d'une genèse instrumentale est lente et complexe et que les premiers schèmes mis en place ne sont pas les plus efficaces. De plus, les schèmes impliquent une certaine connaissance mathématique :

> The use of technology in mathematics by students was analyzed from an instrumental perspective […]. The mentioned research papers provide examples that show that the instrumental genesis takes place over a long period of time and that the first schemes constructed by the learner are not the most effective. What also appears is that the schemes involve some mathematical knowledge. A double question arises from these observations: What are the relevant tasks allowing both the development of instrumentation schemes and of mathematical knowledge? [10]

L'équilibre entre les deux pôles, développer les schèmes et asseoir des connaissances mathématiques, est délicat à trouver, ce qu'a confirmé l'expérimentation conduite.

---

[10] L'utilisation de la technologie en mathématiques par les élèves a été analysée dans une perspective instrumentale […]. Les travaux de recherche mentionnés sont des exemples qui montrent que la genèse instrumentale se déroule sur une longue période de temps et que les premiers schèmes construits par l'apprenant ne sont pas les plus efficaces. Ce qui apparaît aussi, c'est que les schèmes impliquent une certaine connaissance mathématique. Une double question se pose à partir de ces observations : Quelles sont les tâches pertinentes permettant à la fois le développement de systèmes d'instrumentation et de la connaissance ?

III. CONCLUSION

En conclusion, nous revenons d'une part, sur la question de la pensée algorithmique pour matérialiser des objets de l'algèbre et d'autre part sur celle de l'existence d'une pensée algorithmique, qui s'adjoint à la pensée mathématique.

Pour le premier point, le détour par l'algorithmique, évoqué plus haut lors de la mise en œuvre de la situation exposée, est à rapprocher d'un *micro-monde* dont Capponi et Laborde (1995) donnent la définition suivante :

> Un micro-monde est une création d'un monde de réalités artificielles fournissant un modèle (au sens des logiciens) d'une théorie. Ce monde comporte des objets sur lesquels on peut agir grâce à des actions, on peut aussi créer de nouveaux objets. Une fois créés, les objets ont un comportement régulé par la théorie sous-jacente au modèle. Même si l'utilisateur du micro-monde peut agir sur ces objets, ces derniers présentent donc une certaine autonomie, de la même manière qu'on ne peut faire n'importe quoi avec un objet matériel. (p. 265).

Capponi et Laborde utilisent cette définition du micro-monde pour caractériser le logiciel de géométrie dynamique Cabri-géomètre. Nous effectuons ici le parallèle avec le logiciel de programmation Algobox qui se comporte comme tel, puisqu'il est possible de créer des représentations d'un objet théorique et d'agir sur ses représentations. La comparaison ne peut cependant être totale, la conception de Cabri-géomètre est *dédiée* à la manipulation d'objets géométriques et à l'exploration de leurs propriétés, alors qu'un logiciel quelconque de programmation n'est pas spécialement dédié au domaine algébrique. Néanmoins, ce parallèle permet de comprendre comment s'est créée une nouvelle représentation des objets de l'algèbre, dans le cadre de l'algorithmique et de la programmation. Laborde (2003) utilise le terme de *médiation* de l'outil informatique pour définir le rapport dialectique qui existe entre l'action et la signification mathématique. L'accès aux objets mathématiques abstraits, non *ostensifs*[11], se fait par l'intermédiaire de registres sémiotiques (Duval 1993) où l'utilisation de signes en donne des *ostensifs* (Chevallard & Bosch 1999). Ainsi l'algorithmique et la programmation forment un micro-monde pour le domaine algébrique, où il est possible d'explorer et d'expérimenter sur des objets de l'algèbre, comme s'ils étaient des objets *matériels*. Ceci renforce une entrée dans la pensée algébrique, comme montré dans les résultats précédents.

Pour le second point de cette conclusion, la situation exposée propose un type de problème mathématique dont est recherchée une résolution algorithmique pour toutes les instances du problème posé. La résolution algorithmique et son écriture dans un environnement informatique nécessitent une *transposition*. Nous pensons que la complexité de cette transposition vient non seulement de la *non-congruence* entre les environnements papier-crayon et informatisé, comme nos analyses le montrent, mais également d'une *pensée algorithmique* qui n'est pas contenue entièrement dans la *pensée mathématique*.

Cette idée est développée par Modeste (2012) qui précise qu'une *activité mathématique est centrée sur la résolution de problèmes* et que lorsque la pensée algorithmique est considérée *en tant que pensée mathématique parmi d'autres,* elle est alors *une approche particulière de certains problèmes mathématiques* (p. 47). Cependant, Modeste montre, en s'appuyant sur les travaux de Knuth[12], que l'essor de la science informatique a fait évoluer la pensée

[11] D'après Chevallard et Bosch (1999), les objets *ostensifs* sont ceux qui possèdent une forme matérielle (comme un crayon) ou accessible aux sens humains comme les gestes, les mots, les schémas, les écritures, etc. ; les objets *non ostensifs* sont les idées, les notions, les concepts, reconnus par une institution, *qui ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours).*

[12] Référence citée par Modeste :

algorithmique, et qu'il faut tenir compte de cette évolution pour reconsidérer cette forme de pensée. Pour ce chercheur, la différence essentielle réside dans le fait que la pensée algorithmique, vue comme pensée mathématique, *ne questionne pas l'efficacité des algorithmes qu'elle produit,* et *qu'elle n'utilise pas la notion de variable informatique*, ce qui renvoie à la notion de *complexité* d'un algorithme et à l'opération d'*affectation* (cf. §.4.3). Nous rejoignons Modeste quant à la nécessité de considérer une pensée algorithmique qui ne soit pas complètement incluse dans la pensée mathématique.

> Il nous semble donc que, pour aborder la pensée algorithmique, il soit indispensable d'appréhender simultanément les deux points de vue, intra-mathématique mais aussi extra-mathématique. (Modeste, 2012, p.53)

Il nous apparaît en effet, après avoir mené cette expérimentation, qu'ajouter un point de vue informatique (donc extra-mathématique) permet de prendre en considération une dimension qui n'existe pas en environnement mathématique usuel en papier-crayon, et qui induit un mode de pensée différent. L'existence de cette pensée spécifique nous semble être un élément didactique important qui permet de mieux comprendre la transposition qui se produit lors de la recherche d'algorithmes pour résoudre un problème.

REFERENCES

Artigue M. (1997) Le logiciel Dérive comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathetatics* 33(2), 133-169.

Artigue M. (2005) L'intelligence du calcul. Dans *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour, France : le calcul sous toutes ses formes.*

Artigue M., Haspekian M. (2007) L'intégration de technologies professionnelles à l'enseignement dans une perspective instrumentale : le cas des tableurs. In Baron, Guin, Trouche (Eds.) *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage (*pp. 37-63). Paris : Hermès.

Balacheff N. (1994) Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques, 14*(1), 9-42.

Bosch M., Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(1), 77-123. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf

Briant N. (2013) *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.* (Thèse de doctorat, université Montpellier 2).

Capponi B., Laborde C. (1995) *Cabri-classe, apprendre la géométrie avec un logiciel.* Archimède : Grenoble.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* n°19, 43-75.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 5.* 37-65. IREM de Strasbourg

---

Knuth, D. E. (1985) Algorithmic thinking and mathematical thinking. The American Mathematical Monthly, 92 (1), 170-181. (Rééd. avec corrections (1996) Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science. In Selected Papers on Computer Science, 87-114)

Duval R. (1995) S*émiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne : Peter Lang.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Haspekian M. (2005) *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Étude du cas des tableurs.* (Thèse de doctorat, université Paris 7).

Laborde C. (2003) *The design of curriculum with technology : Lessons from projects based on dynamic geometry environments.* Reaction to A. Cuoco & P. Goldenberg's presentation "CAS and curriculum : Real improvement or déjà vu all over again ?" CAME Symposium, Reims.

MEN (2008) Ministère de l'éducation nationale. Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques. BO spécial n° 6 du 28 août 2008. Paris.

MEN (2009) Ministère de l'Éducation nationale. Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009.

Modeste S. (2012) *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* (Thèse de doctorat, Université de Grenoble).

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Radford L. (2006) Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter (*pp. 2-21). Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford L. (2008) Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In *Different Contexts. ZDM – The International Journal on Mathematics Education.* DOI 10.1007/s11858-007-0061-0.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGEBRIQUE AVANT LA LETTRE APPORT DES PROBLÈMES DE GENERALISATION ET D'UNE ANALYSE PRAXÉOLOGIQUE

Alain BRONNER [*]

Résumé – Nous cherchons les conditions d'une entrée de « l'algèbre avant la lettre » par les problèmes de généralisations. Dans cette perspective nous étudions les potentialités de certaines classes de situations. Comment peuvent-elles favoriser une pensée algébrique dans les classes du primaire et du début du secondaire avant toute introduction du symbolisme algébrique ? Nous proposons un travail exploratoire relativement à la question précédente. Ce travail a consisté à analyser avec diverses approches une situation de généralisation dans une classe de 6e du Québec[1]. Dans cet article nous montrons l'intérêt d'introduire une analyse praxéologique pour ce type de situations.

Mots-clefs : pensée, algébrique, numérique, généralisation, praxéologie

Abstract – In this article we show the advantage of introducing a praxeological analysis to these situations by analyzing a situation of generalization in a 6th grade class in Quebec. We search the conditions for introducing "algebra prior to letter" with generalized problems. In this perspective we study the potential of certain categories of situations. How can they promote algebraic thinking in elementary and junior high school classes before the introduction of algebraic symbolism? We offer exploratory work in relation to the previous question. In this article we show the advantage of introducing a praxeological analysis for this type of situations.

Keywords: thinking, algebraic, numeric, generalization, praxeology

I. INTRODUCTION

La recherche présentée ici s'inscrit dans un projet visant le développement d'un observatoire international de la pensée algébrique (OIPA) dans la continuité de plusieurs actions conjointes, initialisées lors de rencontres des universités de Montpellier et de Sherbrooke en 2008 et 2010. Les missions principales sont de constituer un lieu virtuel international d'archivage, d'échange et de diffusion des connaissances, et de documenter les programmes de formation initiale et continue des enseignants, relativement à la pensée algébrique à l'école primaire et secondaire.

L'entrée dans l'algèbre se résume souvent à un « coup de force » du professeur à partir de problèmes dont il suggèrera aux élèves à un moment plus ou moins opportun qu'il est « utile » voire « nécessaire » d'utiliser une « lettre » pour pouvoir traiter ou démontrer une

[*] Université de Montpellier – France – alain.bronner@fde.univ-montp2.fr

[1] Élèves de 12 ans.

Bronner A., (2015) Développement de la pensée algébrique avant la lettre - Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 247-264.

propriété numérique dans toute sa généralité ou pour chercher un nombre inconnu satisfaisant un système de contraintes numériques. Ce coup de force où la formule ou l'équation avec une lettre « x » jaillissent alors dans la classe pourrait nous faire oublier la longue marche vers le symbolisme algébrique introduit, notamment par Viète, puis prolongé par Descartes, pour développer sa nouvelle algèbre en vue de résoudre des problèmes de la géométrie.

Mais c'est aussi oublier que la pensée algébrique peut se voir à l'œuvre chez de nombreux mathématiciens avant eux et avant la disponibilité de ces outils extra-numériques. Sans vouloir la rejouer, cette scène historique originale nous amène à l'hypothèse que nous pouvons faire entrer les élèves dans une nouvelle pensée algébrique avant « la lettre » les préparant ainsi au calcul littéral et à l'algèbre outil dès la fin de l'école élémentaire et au début du collège en France. Ce travail s'inscrit en fait dans une articulation *numérique – algébrique* où le passage du *numérique* vers *l'algébrique* est posé depuis fort longtemps mais reste encore une question d'enseignement et de recherche (Booth 1984 ; Vergnaud 1987 ; Chevallard 1989 et 1990; Kieran 1990). De nombreux courants institutionnels ont émergé comme celui *d'Early Algebra* qui fut impulsé au travers des « Principles and Standards for School Mathematics » du NCTM (2000). Cette question a été étudiée au Québec (Marchand & Bednarz 1999, Squalli, Mary & Marchand 2011, Squalli, Suurtamm & Freiman 2012). En France, plusieurs travaux de recherche soulignent aussi les difficultés de la construction de la pensée algébrique (rapport sur le calcul de la commission Kahane 2001; numéro spécial de la revue internationale Recherche en Didactique des Mathématiques 2012).

Dans cette perspective, de nombreux chercheurs et enseignants se sont tournés vers les problèmes dits de généralisation. Squalli (2000) souligne que la généralisation est un processus essentiel dans l'activité mathématique et en particulier en algèbre. Il va même plus loin en avançant que cette activité est caractéristique d'une pensée algébrique. Ces recherches conduisent à des expérimentations de situations de généralisation s'appuyant sur divers supports et problèmes. Au Québec, depuis plusieurs années les programmes vont même dans ce sens comme l'indiquent Marchand et Bednarz (1999, p. 31) : « Ce programme, tout au moins dans ses intentions, cherche à faire en sorte que les élèves voient la pertinence de l'algèbre, accordent un sens au symbolisme algébrique, avant de s'engager plus à fond dans sa manipulation. » Ce programme s'inscrirait ainsi dans la perspective de faire apparaître le symbolisme comme un moyen d'exprimer la généralité. De plus, cette perspective serait développée dans des situations numériques pour généraliser des propriétés et des règles (ibid).

En France aussi des chercheurs ont souligné l'intérêt pour des problèmes de généralisation comme Grugeon (1995) dans sa caractérisation de la *compétence algébrique* :

> La compétence algébrique s'évalue aussi à travers la capacité à exprimer des relations numériques générales. En effet, l'algèbre est un outil essentiel pour rendre l'accès possible aux propriétés numériques et pour les généraliser …De façon générale, le langage algébrique permet de formuler des problèmes dans leur généralité puis de les résoudre de façon systématique. L'algèbre peut jouer un rôle essentiel pour engager les élèves dans leur construction de la rationalité mathématique.

Notre travail s'inscrit dans ces perspectives de recherche et cherche à étudier les potentialités de certaines classes de problèmes et situations de généralisation. Nous cherchons notamment à trouver les conditions d'une entrée de « l'algèbre avant la lettre » par les problèmes de généralisations. Quels sont les contextes, supports, cadres, formulations de ces problèmes à privilégier ? Comment peuvent-ils favoriser une pensée algébrique et l'émergence de généralisation dans les classes du primaire et du début du secondaire avant toute introduction du symbolisme algébrique ? Quels rôles jouent les manipulations, actions, formulations, argumentations ? Quelles validations peuvent être mises en place ? Ces situations permettraient-elles d'introduire le formalisme à un moment adéquat et de rentrer dans une pensée analytique pour manipuler ces formalismes ? Plus généralement quelles sont les conditions sur l'élaboration et la gestion des situations didactiques s'appuyant sur ces types de problèmes ?

Nous proposons un travail exploratoire relativement aux questions précédentes dans le cadre de nos collaborations au sein de l'OIPA avec des chercheurs du Québec. Ce travail a consisté à analyser avec diverses approches une situation de généralisation dans une classe de 6^{e} du Québec[2]. Dans cet article nous présentons notre méthodologie, nos analyses et résultats pour cette situation en montrant l'intérêt d'introduire une analyse praxéologique pour ce type de situations.

II. METHODOLOGIE

Nous avons développé depuis une vingtaine d'année une méthodologie d'analyse des pratiques enseignantes et des situations d'enseignement dans le cadre d'un observatoire du numérique que nous étendons ici à l'algébrique dans le cadre de l'OIPA.

Notre cadre théorique est constitué de la Théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992, 1999) et de la Théorie des situations didactiques (Brousseau 1986) pour l'étude générale des situations et de la transposition didactique des objets mathématiques. La prise en compte des processus langagiers et sémiotiques étant essentielle dans notre approche, elle est complétée par les notions de dénotation empruntée à Frege, de la théorie des registres de représentations sémiotiques (Duval 1993).

Notre méthodologie s'inscrit dans la didactique française de confrontation entre une *analyse a priori* et une *analyse a posteriori*, et est articulée en cinq grandes étapes non indépendantes (Bronner 2006) : l'analyse a priori, la trame de la séance observée, la description et l'analyse des organisations mathématiques selon l'approche anthropologique, l'analyse de l'organisation didactique selon la méthodologie dite des quatre composantes, et le repérage de gestes d'étude d'élèves et de gestes professionnels de l'enseignant, des évènements et des ajustements. Nous présenterons la méthodologie au fur et à mesure de chaque étape avec les analyses correspondantes, mais dans cet article nous nous limiterons aux trois premières étapes.

III. L'ANALYSE A PRIORI

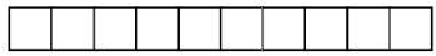
Le professeur a choisi de commencer sa séquence par une première situation basée sur des chaines carrées comme ci-dessous en demandant d'examiner tout d'abord les premiers cas pour 1, 2, 3, 5 et pour 9 mailles. Puis, il propose aux élèves d'étudier le cas de chaines triangulaires. Ensuite les élèves inventeront des formes, en fait pentagonales et hexagonales. Enfin le professeur demande aux élèves de généraliser le travail à n'importe quelle forme de mailles. Dans la fin de la séquence le professeur lance un exercice qu'il appelle « défi » et qui consiste, dans le cas de la maille carrée, à trouver une façon de calculer le nombre de mailles qu'aurait une chaîne formée de 121 tiges.

[2] Élèves de 12 ans.

Les chaines du joaillier

Mise en situation

Laurent, un bijoutier, fabrique des chaines en or à mailles de forme carrée comme celle-ci :



Il fait des chaines de différentes longueurs pour diverses utilisations (au cou, au pied, comme boucles d'oreilles).

L'or coûte cher. Quand il fait une commande, il compte les tiges une par une pour être sûr de ne pas en commander de trop ni en oublier. Mais c'est long. Il voudrait pouvoir trouver le nombre de tiges dont il a besoin sans être obligé de compter les tiges une par une. Vous devez envoyer un message au bijoutier dans lequel vous allez lui expliquer comment il pourrait faire pour trouver combien de tiges il a besoin selon le nombre de mailles.

Nous utilisons ici la modélisation de l'activité mathématique développée par Chevallard (1999) avec la notion de praxéologie constituée de 4 dimensions articulées (*type de tâches, techniques, technologies, théorie*) pour analyser les démarches possibles.

La situation concerne le type de tâches : « Calculer le nombre de constituants élémentaires (Tiges) d'une chaine à mailles carrées (c) connaissant le nombre de mailles ». Certains élèves peuvent ne pas comprendre qu'il s'agit de déterminer une expression ou une méthode permettant de calculer le nombre de tiges pour n'importe quel nombre de mailles ou être bloqués pour le faire et se limiter à donner des quantités de tiges pour quelques nombres déterminés de mailles, pour les premiers cas 2, 3, 4 ou 5 par exemple.

Les types de tâches appellent des techniques de résolution (des manières de faire pour résoudre les tâches particulières) dont nous dégageons les grandes catégories à ce niveau d'étude.

1. *Les techniques σ_1 basées sur des technologies numériques :*

On peut dégager une première catégorie de techniques $\sigma 1$ associées à ce type de tâches dans le cas d'un petit nombre déterminé de mailles, dont on peut en donner la mise en œuvre générique suivante, de manière plus ou moins complète et dans un ordre divers :

- Identifier les composants élémentaires : triangle, quadrilatère, pentagone, … ;
- Prendre en compte le caractère régulier en dimension 2 : des polygones réguliers ;
- Voir qu'ils sont superposables ;
- Commencer à en assembler 1, 2, puis 3 ensuite ; …
- S'assurer d'avoir un début, une fin, le nombre de mailles qu'il faut ;
- Dénombrer les tiges : Le dénombrement peut de se faire de manière désorganisée ou en suivant une réorganisation spatiale, et dans ce dernier cas plusieurs procédures sont à envisager.
  - Par exemple, on peut d'abord compter toutes les tiges horizontales (soit deux par deux, soit celles toutes celles du haut puis celles du bas, …), puis les tiges verticales.

- Un élève peut aussi voir la répétition des composants et identifier le nombre de tiges ajoutés par composants (3 dans le cas de mailles carrées) puis multiplier ce nombre par le nombre de mailles en n'oubliant pas d'ajouter 1 pour la première maille.
- Une autre procédure est de compter selon un principe de récurrence : on peut compter tout d'abord les tiges de la première maille (4), puis on compte les tiges de la maille suivante soit en énumérant soit en ajoutant 3 d'un coup (7), et ainsi de suite (10) ...

On voit que même dans le cas d'un dénombrement pour un nombre fini déterminé de mailles de nombreuses techniques peuvent être mobilisées et que certaines procédures peuvent se généraliser.

Dans la suite nous nous intéressons aux raisonnements des élèves ayant compris le type de problèmes et entrant dans la tâche de généralisation : « Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles carrées pour n'importe quelle longueur de la chaine ». Les stratégies des élèves par rapport à la généralisation peuvent se répartir en trois grandes catégories de raisonnements.

2. *Les techniques τ_2 basées sur des technologies de généralisation explicite*

Ces techniques commencent en général par la mise en œuvre de techniques τ_1 en examinant le cas d'un petit nombre de mailles 1, 2, 3 et éventuellement un nombre un peu plus grand. Une première étape consiste ainsi tout d'abord à examiner les premiers cas de nombre de mailles n = 2, 3, 4, … puis à comprendre que la manière de dénombrer peut se généraliser en considérant un nombre de mailles quelconque, même si on ne connaît pas ce nombre de mailles ou si on ne sait pas vraiment exprimer ce nombre indéterminé. Ici la généralisation porte sur une procédure de dénombrement mettant en relation la quantité cherchée avec la variable du problème, autrement-dit le nombre de mailles, en se basant comme dans le cas déterminé sur une réorganisation spatiale.

Par exemple, l'élève se base sur une décomposition du motif en distinguant les tiges horizontales et verticales. Ainsi, quand on a une quantité de mailles on prend 2 fois plus de tiges horizontales et on ajoute encore la même quantité de tiges que de mailles et encore une tige pour terminer le motif avec les tiges verticales. Cela conduit à des expressions conformes à $M1 = 2n+(n+1)$. Mais, un élève de sixième année ne produira certainement pas une telle expression dans le registre (Duval, 1993) du langage algébrique. Par contre diverses expérimentations et travaux dans ce domaine suggèrent d'autres réponses dans un langage mixte qui associe langage mathématique et langage naturel. Les élèves peuvent ainsi produire des réponses comme : pour une quantité de mailles le nombre de tiges est 3 × mailles + 1. On peut s'attendre à une dénomination dans le registre verbal (comme « le nombre de tige est 2 fois le nombre de mailles plus le nombre de mailles plus un ») ou un code mixte verbal-numérique (comme « Nombre de tiges = 2xNombre de mailles + Nombre de mailles + 1 ») ou encore avec des abréviations.

Une autre forme de présentation peut être attendue en exposant une méthode générale sur l'exemple générique au sens de Balacheff (1987). Par exemple, pour 143 mailles, il faut 3 fois 143 tiges et une tige de plus ce qui fait en tout : 430 tiges. Même si l'élève fait montre d'une conception procédurale (Sfard 1991 ; Kieran 1992) dans laquelle l'expression décrit un processus de calcul sur un cas déterminé, il est ici pour nous dans une procédure généralisatrice.

D'autres techniques τ_2 sont à envisager en utilisant des décompositions spatiales différentes pour produire des ostensifs équivalents à M1. Par exemple, l'élève peut remarquer que si on a une quantité de mailles, on prend trois fois plus de tiges et on en ajoute une pour obtenir le dénombrement et proposer ainsi une expression M2 = 3n+1. En synthèse, pour n mailles, plusieurs modélisations sont possibles, produites par un dénombrement conforme à une configuration spatiale :

> M1 = 2n+(n+1) en considérant le nombre de tiges horizontales d'une part et celui des tiges verticales d'autre part ;
> M2 = 3n+1 en considérant le nombre de mailles avec 3 tiges et en ajoutant une tige pour commencer ou terminer la chaîne ;
> M3 = 4n-(n-1) en considérant le nombre de mailles à 4 tiges et en retranchant les tiges mises en double ;
> M4 = 4+3(n-1) en considérant une première maille à 4 tiges et les tiges correspondant aux mailles suivantes à 3 tiges.

Les modélisations précédentes portent en elles-mêmes le principe de certaines procédures possibles par une méthode de dénombrement correspondant à une analyse de configurations spatiales. Ces techniques τ_2 portent en elles-mêmes la validation, autrement dit une validation interne, basée sur l'analyse de la configuration spatiale. Une validation partielle sous forme de vérification avec les premiers cas est possible et peut paraître suffisante aux yeux des élèves.

La théorie algébrique élémentaire permet de démontrer que ces diverses expressions algébriques représentent un même nombre que dénote (Drouhard, 1997) l'expression simplifiée 3n+1.

3. *Les techniques σ_3 basées sur des technologies de généralisation implicite*

Ici c'est la méthode générale pour passer d'une quantité de mailles à la suivante qui est mis en avant. Elle est associée aussi sur le principe de récurrence que nous avons vu avec les techniques numériques. Par exemple, les élèves peuvent faire des dessins pour 1 maille, 2 mailles, jusqu'à 5 ou 6 mailles et compter les tiges sur les dessins. La généralisation pourrait se traduire de cette façon : quand on ajoute une maille, on ajoute une tige en largeur et 2 tiges en longueur, on ajoute donc 3 tiges. L'invariant se focalise sur le passage de la quantité de mailles à celle augmentée de une unité (de mailles). Elle pourrait se traduire par un opérateur du type : Pour trouver le nombre de tiges pour n + 1 mailles, j'ajoute 3 au nombre de tiges pour n mailles. Ici aussi un langage mixte devrait être utilisé dans ce type de procédure. Cette généralisation demande de calculer au fur et à mesure les quantités obtenues à partir du premier cas et se trouve rapidement limitée pour un nombre de mailles assez grand. On notera quand même qu'un invariant est avancée mais n'est pas opératoire. Ici aussi le recours spontané à l'usage d'une lettre parait peu probable, mais cela dépendra de la mémoire didactique de la classe.

4. *Les techniques σ_4 basées sur des technologies de généralisation par investigation et induction*

Les élèves déterminent les quantités de tiges des premiers cas en faisant plusieurs dessins pour 1 maille, 2 mailles, jusqu'à 5 ou 6 mailles ou un dessin qu'ils complètent au fur et à mesure. Ils observent les quantités obtenues et conjecturent une relation générale par induction. Par exemple, ils obtiennent des résultats du type :

Mailles	1	2	3	4	5	6	7	8
Tiges	4	7	10	13	16	19	22	25

L'élève généralise les résultats sur les petits nombres en faisant apparaitre une relation numérique liée au nombre de mailles de départ. Ils peuvent ainsi remarquer la récurrence indiquée précédemment T(x+1) = T(x) + 3 mais cette fois-ci en observant les quantités numériques et en faisant une induction numérique et non sur la configuration spatiale comme dans la catégorie précédente.

Ils peuvent aussi remarquer que les résultats obtenus pour la deuxième ligne sont des multiples de 3 augmentés d'une unité. Cela peut conduire à des expressions conforme à M2 = 3n+1 mais encore une fois cette conjecture est obtenue par observation et induction des expressions numériques. Il sera sûrement plus difficile d'induire des expressions conformes à M1 = 2n+(n+1) ou M3 = 4n-(n-1) ou encore M4 = 4+3(n-1).

5. *Extension du type de problème et analyse des variables didactiques*

Même si on peut aussi penser que l'histoire dans laquelle est inséré le problème peut être un facteur intéressant, son influence est difficile à apprécier et demanderait une étude à elle seule. Nous ne regardons pas des macros variables comme le contexte, ici le choix d'un dénombrement d'objets relativement familiers (les bijoux) présentés sous forme schématiques de dessins. Nous nous intéressons aux variables didactiques principales[3] dans le cadre du contexte choisi.

- La variable « nombre de maille » : L'examen des cas particuliers et le nombre N de mailles à étudier au début peuvent jouer un rôle sur la procédure des élèves. Ainsi on peut distinguer plusieurs domaines relativement à cette variable pour une forme donnée :

- N non fixé : L'élève examine les premiers cas de sa propre initiative et rentre dans les catégories suivantes ou essaie de généraliser directement.
- N petit (< 10 en général) : une procédure de dénombrement systématique peut être envisagée. Ensuite là aussi les différentes catégories peuvent être envisagées.
- N grand (43 ou 44) : ici la procédure précédente doit être abandonnée mais les élèves peuvent peut-être mimer les procédure de dénombrement direct et aller vers les procédures de généralisation explicite.
- N très grand (200, 1000, …). L'élève doit déjà se projeter vers la généralité pour pouvoir répondre à la question et entrer dans l'une des procédures proposées.

- La variable « Forme de la maille » : Comme indiqué plus haut, le problème proposé sera étendu à d'autres formes, une variable didactique importante sera donc la forme F de la maille de la chaine ; triangulaire, carré, pentagonale, … Cette variable conduit évidemment à des expressions différentes en lien avec le nombre de tiges de la maille mais peut jouer un rôle sur le raisonnement même d'analyse et de dénombrement d'une formule générale pour un type donné.

Deux grands types de raisonnements peuvent être anticipés. Les élèves recommencent sur chaque forme la procédure sur les premières formes de manière quasi-indépendante même si

[3] D'autres variables peuvent jouer un rôle comme le type de support de présentation et de manipulation (support évoqué, mobile, dessiné, …) en facilitant ou bloquant certaines procédures. Par exemple, des tiges effectives peuvent être distribuées aux élèves.

on peut penser que l'expérience et la familiarisation avec le type de problèmes conduisent à faire évoluer le raisonnement. Ou alors ils peuvent induire une formule ou une expression en la modifiant en prenant en compte les variations sur la forme. Par exemple, pour le facteur 3 qui apparaît pour la forme triangle les élèves pourraient induire qu'ils doivent maintenant considérer un facteur 5 pour des formes pentagonales. Les élèves pourraient se convaincre en testant avec un cas au sens de l'exemple crucial de Balacheff (1987). Il se pose ainsi un problème de validation à étudier dans les réalisations didactiques.

IV. LA TRAME DE LA SEANCE OBSERVEE

Il s'agit ici d'identifier des traces relativement objectives de ce qui est observé de la séance. La trame correspond à un premier découpage en grandes unités intelligibles de la séance et définies par les fonctions habituellement utilisées en classe (recherche ou mise au travail sur des exercices, mises en commun, bilans, cours, …) et les tâches proposées aux élèves. Elle est construite à partir de toutes les données, notamment pour nous, une vidéo et une narration de la séance (sous forme d'un document écrit). Ainsi dans le tableau 1 chaque phase est indiquée par le repérage des instants relativement aux deux données précédentes (sous la forme Instant de la narration/Instant de la vidéo), sa fonction a priori et les tâches repérées des élèves ainsi que la modalité de travail (individuel, en groupe ou collective). Les deux données utilisées n'ont pas été synchronisées, d'autant que nous ne disposons pas de la vidéo complète sur toute la séance. Nous utilisons comme repérage temporel principal les instants de la narration qui semblent plus conforme au déroulement effectif de la séance. Ainsi la séance comporte deux parties avant et après la récréation, et le minutage de la séance est réinitialisé à partir de la phase 8 correspondant à la reprise après la récréation.

Phases	**Instants Narration/ instants Vidéo**	**(Fonctions de la phase et) tâches du professeur et des élèves**	**Modalités de travail**
1	0 à 16min11 / 0 à 2min45 (puis coupure de la vidéo)	Présentation de la situation générale, de la chaine à mailles carrées et calcul du nombre de tiges pour 1, 2, 3, 5 / Calcul pour 9 mailles	Collective / Groupe pour le cas de 9 mailles (2 min environ)
2	16min11 à 40min15/ (pas de vidéo)	Calcul du nombre de tiges pour 45, puis 44, mailles et explicitation du programme de calcul général (cas des chaines à mailles carrées)	Groupe (appelé équipe au Québec)
3	40min15 à 49min43 / 2min45 à 10min	Retour sur la chaîne à mailles carrées : Bilan et débat	Collective
4	49min43 à 57min40 / (pas de vidéo)	Présentation de la chaine à mailles triangulaires, calcul du nombre de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Collective / Groupe
5	57min40 à 1h04min42 /10min à 14min30	Retour sur la chaîne à mailles triangulaires : Bilan des réponses du problème	Collective
6	1h04min42 à	Présentation de la chaine à mailles	Collective /

	1h08min59 / (pas de vidéo)	hexagonales, calcul du nombre de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Groupe
7	1h08min59 à 1h14min05 / 14min40 à 16min40	Retour sur la chaine à mailles hexagonales : Bilan du travail des élèves	Collective
	Récréation		
8	4 min à 11min 23 / (pas de vidéo)	Créer sa propre chaine à mailles différentes, calcul du Nb de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Collective / Groupe
9	11min 23 à 17min04 /16min40 à 19min55	Retour sur les propres chaînes octogonale et pentagonale : Bilan du travail des élèves	Collective
10	17min04 à 25min30 /19min55 à 21 min04	Rechercher une expression commune dans tous les cas de formes de chaîne	Collective / Groupe
11	25min30 à 31min36 / 21min04 à 26min07	Retour sur la généralisation : Bilan	Collective
12	31min36 à 43min15 / (pas de vidéo)	Phase appelée « Défi » : Dans le cas de la maille carrée, trouver une façon de calculer le nombre de mailles qu'aurait une chaîne formée de 121 tiges.	Collective / Groupe
13	43min15 à 49 min / (pas de vidéo)	Retour sur le Défi : Bilan et conclusion	Collective

***Tableau 1** – Trame de la séquence « Bijoutier »*

Nous nous intéressons maintenant aux mathématiques développées dans cette séance à travers la deuxième étape de notre méthodologie.

V. LA DESCRIPTION ET L'ANALYSE DES ORGANISATIONS MATHEMATIQUES SELON L'APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

Nous utilisons ici encore la modélisation de l'activité mathématique par la notion de praxéologie constituée de 4 dimensions articulées (*type de tâches, techniques, technologies, théorie*) et la grille d'organisations mathématiques que nous avons mise en évidence dans l'analyse a priori (partie III).

1. Les types de tâches

Nous allons montrer que plusieurs types de tâches sont enchâssés dans cette séance et que ce choix est important pour le développement des processus de généralisation.

Les élèves sont confrontés dans les 3 premières phases à un premier *type de tâches ponctuel*, puis à une première tâche de généralisation. Ainsi ils doivent tout d'abord dans les phases 1 et 2 travailler sur le type de tâches déjà repéré :

Tcn : Calculer le nombre de constituants élémentaires (Tiges) d'une chaine à mailles carrées (c) connaissant le nombre de mailles.

Pour ce type, le professeur propose aux élèves différents spécimens en jouant sur la variable N du nombre de mailles de la chaine :

- Calcul pour 1, 2, 3, 5 mailles
- Calcul pour 9 mailles
- Calcul pour 45 puis 44 mailles.

La fin de la phase 2 et la phase 3 se concentrent sur la tâche de généralisation évoquée dans l'analyse a priori :

tca : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles carrées pour n'importe quelle longueur de la chaine.

Précisons nos notations : la 1ère lettre est T pour Type ou t pour tâche, la 2e lettre désigne la forme, ici c pour carrée, la 3e lettre donne n pour numérique et a pour algébrique (nous poursuivons dans la suite la même logique de notation dans la suite).

Les phases 4 et 5 amènent à jouer sur la variable forme et le professeur propose maintenant des tâches analogues avec le cas d'une chaine à mailles triangulaires. Les élèves étudient ainsi le type de tâches :

Ttn : Calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles triangulaires connaissant le nombre de mailles ;
et les différents cas suivants pour la variable N nombre de mailles :

- Calcul pour 1, 2, 3, 4, 5 mailles
- Calcul pour 44 mailles.

Puis les élèves travaillent sur la tâche de généralisation :

tta : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles triangulaires pour n'importe quelle longueur de la chaine.

Le scenario se poursuit de manière analogue avec le cas d'une maille hexagonale dans les phases 6 et 7, faisant rencontrer le type de tâches Thn à travers le calcul pour 44 mailles

Thn : Calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles hexagonales connaissant le nombre de mailles.
Puis la tâche de généralisation :

tha : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles hexagonales pour n'importe quelle longueur de la chaine

Dans les phases 8 et 9 le professeur demande aux élèves de choisir leurs propres formes de mailles avec la contrainte suivante : la forme doit être différente des précédentes. En plus de la consigne « trouver une phrase mathématique pour calculer le nombre de tiges pour une chaîne de 44 mailles » (document Narration), il précise aussi à la suite d'une question d'un élève à propos de la longueur des tiges : « les tiges doivent être toutes égales et les mailles, elles sont toutes de la même forme. C'est pourquoi je te demande de dessiner une maille et toutes tes mailles vont être identiques. Et elles vont s'attacher par un côté. 4 minutes. »

Cela amène les élèves, selon les groupes, à deux tâches de généralisation de même type :

toa : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles octogonales pour n'importe quelle longueur de la chaine ;

tpa : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles pentagonales pour n'importe quelle longueur de la chaine.

Le professeur demande ensuite de trouver une phrase mathématique à envoyer au bijoutier qui permettra de calculer le nombre de tiges pour n'importe quelle chaîne. Les différentes tâches tca, tta, tha, toa et tpa vont en fait alimenter le travail des phases 10 et 11, qui les font alors apparaître comme des spécimens d'un nouveau type de tâches :

Ta : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles pour n'importe quelle forme et pour n'importe quelle longueur de la chaine.

La séance se termine par un « défi » dans les dernières phases 12 et 13, en considérant un problème inverse des précédents dans le cas de la maille carrée, à travers le type de tâches et le cas de 121 tiges suivant

Tmn : Dans le cas de la maille carrée, trouver le nombre de mailles qu'aurait une chaîne formée d'un certain nombre de tiges ;
et le processus de généralisation s'arrêtera ici à la tâche

tma : Dans le cas de la maille carrée, trouver une façon de calculer le nombre de mailles qu'aurait une chaîne formée d'un certain nombre de tiges.

La succession des tâches et types de tâches fait apparaître la structure d'enseignement de cette séance comme un réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série, pourrait-on dire. Ainsi, après avoir fait travailler les élèves, dans chaque cas de forme de mailles, sur un type de tâches ponctuelles du type Tcn, Ttn Thn à travers différents spécimens le professeur les amène à se placer sur les tâches respectives de généralisation tca, tta tha. Même si la réalisation des différentes tâches est proposée successivement, nous analysons le début de la structure comme parallèle dans la mesure où il y a une répétition en jouant sur la forme de la maille (carrée, triangulaire et hexagonale) avec la même structuration (étude sur les premiers termes au niveau du nombre de mailles 1, 2, 3 et 5, puis 44 et 45, puis cas général) . Ce premier réseau parallèle peut être schématisé ainsi :

- **Tcn → tca**
- **Ttn → tta**
- **Thn → tha**

Nous observons que l'étude commence par des types de tâches Tfn (f comme forme et n comme numérique) que nous qualifions de numérique dans la mesure où il s'agit tout d'abord de considérer un nombre déterminé de mailles et de produire la quantité de tiges correspondante. Mais à chaque fois, le contrat conduit, pour chaque forme f, à terminer l'étude avec une tâche de généralisation tfa (a ici comme algébrique).

La structure parallèle aurait pu se poursuivre strictement sur les phases suivantes, avec un choix de la forme a priori réservé aux élèves, mais pour la suite l'étude se réalise directement sur les tâches de généralisation toa et tpa à propos des formes octogonale (o) et pentagonale (p) comme le précise le professeur à un élève : « il doit faire une phrase mathématique plus générale, pas seulement pour le cas de 44 mailles » (Tour 37, Document Narration, instant 0 :09 :55 d'après récréation). Le nouveau réseau peut être schématisé ainsi avec cet ajout en série laissant en vide les types de tâches numériques :

N → A → A

- **Tcn → tca**
- **Ttn → tta**
- **Thn → tha**

… → toa

… → tpa

Dans les phases 10 et 11, les différentes tâches tca, tta, tha, toa et tpa apparaissent alors comme de simples spécimens d'un nouveau type de tâches de généralisation Ta avec la recherche d'une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles pour n'importe quel forme et pour n'importe quelle longueur de la chaine. Le réseau se complexifie ainsi en série en le schéma suivant :

N → A → A → A

Généralisation du 1er degré (1 variable)

Généralisation du 2e degré (2 variables)

- **Tcn → tca**
- **Ttn → tta**
- **Thn → tha**

… → toa

… → tpa

Ta

Il s'agit ainsi d'engager les élèves dans un processus de généralisation de degré encore supérieur en considérant les deux variables forme de la maille (F) et nombre de mailles (N). Cette première analyse montre que les praxéologies ponctuelles s'agrègent en des praxéologies locales, voire régionales, emboitées autour du type de tâches Ta et permet de mettre au jour une structuration mathématique complexes et emboitée. Nous poursuivons la caractérisation de l'organisation mathématique construite en analysant les techniques et technologies associes aux différents types de tâches identifiés.

2. *Les organisations mathématiques produites par les élèves*

Les tâches isolées et les types de tâches sont réalisés par des techniques de résolution souvent au début embryonnaires ou en voie de constitution dans un processus d'enseignement-apprentissage. Nous décrivons les éléments de techniques élaborées par les élèves et repérables dans les données de la séquence « bijoutier ».

- *Techniques associées aux types de tâches Tcn, Ttn Thn*

Dans le cas des calculs sur un petit nombre de mailles carrées (1 à 5, puis 9 parfois) en début de séquence, les élèves utilisent certainement des techniques conformes à σ_1 basées sur des technologies numériques comme nous l'avions indiqué dans l'analyse a priori (section III). Le professeur ne demande pas la procédure des élèves et la classe se met rapidement d'accord sur le nombre de tiges pour 1, 2 et 3, puis 5 : « Il compte avec les élèves, les tiges qui composent une maille, deux mailles et trois mailles. Puis il ajoute deux mailles de plus (5 mailles) sans les afficher sur l'écran. … Il demande à une élève le nombre de tiges obtenues. Elle dit 16 et il vérifie que tous sont d'accord. »Visiblement on n'est pas dans une tâche problématique, comme on peut encore le voir avec la construction d'une chaîne de 9 mailles : « Il suit en particulier l'équipe 4 : ils en comptent 22. Il leur demande de vérifier. Ils recomptent et obtiennent 28. Il fait le tour des équipes, revient ensuite en grand groupe et demande si quelqu'un a autre chose que 28. Aucun. Il leur fait constater que c'est facile si l'on peut les compter. »

Dans le cas d'un calcul pour un grand nombre de mailles carrées (le professeur propose au début 45 mailles), les élèves commencent à expliciter leur technique, comme dans l'équipe 4 « E[4.3] explique que pour 2 mailles, il faut faire 2×3+1, pour 3 mailles 3×3+1, pour 5 mailles… E[4.4] trouve que c'est compliqué alors que E[4.1] suggère que pour 45 mailles, il faut faire 45×3 et que le terme +1 est pour commencer la chaîne, car la première maille comprend 4 tiges. » On est déjà ici sur des techniques τ_2 basées sur des technologies de généralisation explicite, la généralité dans la constitution spéciale de la chaîne est perçue et utilisée pour exprimer la réponse dans le cas d'un grand nombre déterminé de mailles.

L'équipe 3 envisage une autre décomposition : « E[3.1] explique à E[3.3] qu'elle a calculé 1 fois 4, et pour les autres mailles 1 fois 3 et donc … E[3.2] récapitule : 1×4 + 44×3 ». Puis quelques minutes après que le professeur demande de travailler sur 44 au lieu de 45, l'équipe confirme sa procédure : « E[3.1] dit encore 1 fois 4 est égale à 4, et 43 fois 3 …». On note ici encore comment cette équipe évolue d'une technique de dénombrement de type σ_1 basées sur des technologies numériques vers une technique de type τ_2 basées sur des technologies de généralisation explicite consistant à voir la configuration comme un carré avec 4 tiges, puis un nombre (ici 43) de composants de 3 tiges.

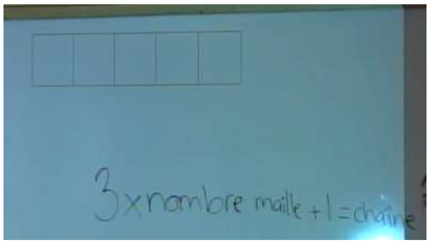
L'équipe 6 explicite une procédure pour 45 mailles, qu'on pourrait qualifier de proportionnalité : « 3 des élèves s'entendent pour dire au bijoutier de faire 5 fois la commande pour 9 mailles, soit 5×28 tiges. E[1.2] fait remarquer que ce ne sont pas tous les nombres de mailles qui sont multiples de 9. » L'erreur ne sera pas relevé lors du travail de groupe.

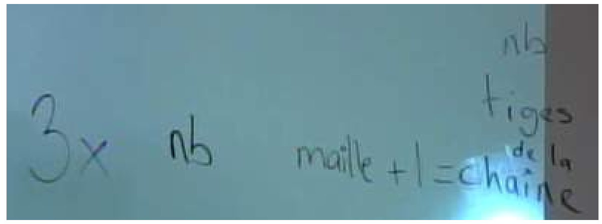
- *Techniques associées aux tâches tca, tta, tha, toa et tpa*

Le professeur précise à plusieurs moments « qu'il veut un message à dire au bijoutier, pour qu'il sache comment trouver le nombre de tiges, et ce, pour n'importe quelle longueur de chaîne à mailles carrées » ou « il ne veut pas seulement le nombre de tiges, mais aussi le message mathématique pour aider le bijoutier à trouver le nombre de tiges à commander pour d'autres longueurs de chaînes » et encore il rappelle qu'après avoir trouvé la réponse pour 44 mailles, ils doivent écrire un message pour tout nombre de mailles. On note ainsi ce geste du professeur, vraisemblablement, pour faire entrer les élèves dans les tâches de généralisation *tca, tta, tha, toa et tpa*.

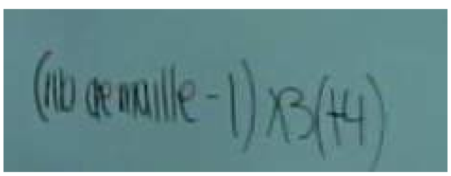
Dans le premier travail de groupes à propos des mailles carrées et d'un nombre, considéré comme déjà grand, 44 ou 45, on a vu que certains élèves avaient compris qu'il fallait décrire la procédure de calcul effective, et non pas se limiter à donner la quantité de tiges nécessaire.

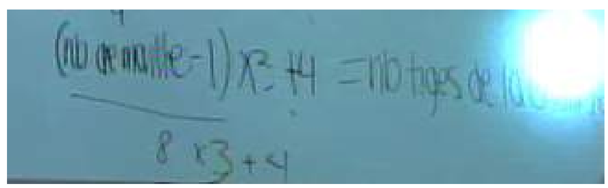
Pour cette tâche, au niveau de l'équipe 4 : « E[4.4] explique qu'il lui dirait qu'à chaque maille il faut 3 tiges, mais qu'il faut en ajouter une pour la première. » Cet élève n'arrive pas à entrer, du moins au début de la phase 2 de la séance, à produire une technique de généralisation explicite. Il associe bien la correspondance sans pouvoir exprimer globalement la quantité nécessaire. Vers la fin de cette phase, l'élève débouche sur cette généralisation explicite en oralisant « multiplier nombre de mailles par trois plus un pour le premier ». La généralisation explicite, signe d'une pensée algébrique, semble en route dans cette équipe. Finalement il va modifier son message sous la demande du professeur de griffonner ce message sur sa feuille pour produire « × nombre de m. par 3 et + 1 pour 1^er^ » puis, après une remarque du professeur à propos du terme « 1er », l'élève finit par formuler : « trois fois nombre de mailles plus un ». Cette généralisation est passée par l'abstraction d'une configuration générale où le « plus un » avait encore la signification de la 1ère tige. Finalement, dans la phase 3 où un bilan est proposé, cette équipe produit au tableau le message « 3xnombre maille + 1 =chaîne » qui sera transformé par le professeur en « 3×nb mailles +1 = nb tiges de la chaîne », qui propose que « nombre dorénavant on va le simplifier nb ».





Dans la phase 2, l'équipe 2 entre aussi dans une généralisation explicite conforme à la modélisation M4 = 4+3(n-1), du moins pour l'élève E[2.4], qui dit à voix haute « 3× nombre de mailles -1 +4 ». Il s'ensuit un échange fourni avec le professeur pour amener l'élève à écrire le message en tenant compte des priorités des opérations. Dans le bilan collectif de la phase 3 l'élève E[2.4] de cette équipe ira écrire son message au tableau sous la forme (nb mailles-1)×3(+4)= nb de tiges de la chaîne qui sera corrigée par le professeur.





Une élève d'un autre groupe n'arrive pas à comprendre le message, elle ne semble pas entrer dans cette pensée algébrique qui demandait de décontextualiser l'écriture et de ne plus se focaliser à interpréter ce « moins une maille » comme elle le répète en exprimant son incompréhension pour ce message.

L'équipe 5 semble voir le processus opératoire général mais bute sur l'expression de cette généralité en se demandant « comment exprimer ce (le nombre de mailles) qui est multiplié par 3 ».

Les deux messages précédents, conformes aux modélisations M2 = 3n+1 et M4 = 4+3(n-1), sont validés par le professeur et la classe par retour aux premiers cas numériques, constituent alors une référence pour la suite.

Ainsi dans la phase 4, à propos des mailles triangulaires, la dévolution sur la tâche de généralisation tta est réussi et les élèves essaient d'élaborer un message général. L'élève E[1.1] explicite l'élaboration de la technique en expliquant qu'elle se base sur l'adéquation numérique avec les premiers cas : « … si tu fais deux fois le nombre de mailles plus un, car 2×2, 4, +1, 5 ». Mais surtout l'idée lui est venue du message de l'équipe 4 à propos des mailles carrées : « L'autre chaîne avait 4 côtés, ils ont enlevé 1 et ils ont mis 3, alors moi, vu qu'il y a 3 côtés, j'ai enlevé 1 et ça m'a fait 2. » On a ici une démarche par analogie validée numériquement. Le professeur l'invite même à expliciter cette démarche dans la phase 5 de bilan à partir du 1er message pour le calcul des mailles carrées (3×nb de mailles+1) : « soustraire 1 au nombre de côtés d'une maille ». Nous reviendrons sur l'attention du professeur à propos de cette élaboration qui conduit au message : « 2×nb de mailles+1=nb de tiges » de même type de modélisation que M2.

Dans ce bilan, nous trouvons aussi une modélisation du type M4 proposée à la classe par l'équipe 3 par l'élève E[3.2]: « (nb mailles -1)×2+3=nb de tiges dans la chaîne ». Ce message est validé par le professeur et les élèves par un essai pour les cas 3 et 5.

Les deux premières tâches de généralisation *tca* et *tta* (mailles carrées et triangulaires) sellent le scenario et les 3 autres tâches *tha, toa* et *tpa* (mailles hexagonales, octogonales et pentagonales) se déroulent de la même manière de la phase 6 à la phase 9 avec des messages du même type que les modélisations M2 et M4 des chaines à mailles carrées. Par exemple pour l'octogone, des groupes donnent le message « (nb de mailles-1)×7+8=nb de tiges », tandis que pour les pentagones des groupes c'est le message « (nb de mailles-1)×4+5=nb de tiges » qui est avancé.

- *Techniques associées au type de tâches Ta*

Comme déjà indiqué, dans les phases 10 et 11 le professeur propose aux élèves de se situer au niveau du type de tâches de généralisation Ta pour lequel les tâches précédentes (*tca, tta, tha, toa et tpa*) ne sont des spécimens. Le professeur présente ainsi le travail demandé :

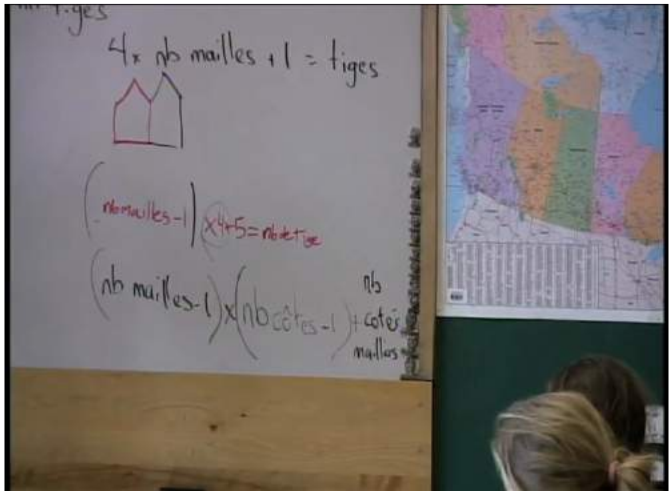
> A chaque coup on a trouvé **une phrase mathématique** qui permettait de trouver le nombre de tiges. Maintenant ce que je veux que vous me trouviez, je veux avoir une phrase mathématique qu'on va pouvoir envoyer au bijoutier et dans cette phrase peu importe la commande du client, c'est-à-dire que le client qu'il décide que sa maille est triangulaire, carrée qu'elle est de forme hexagonale, pentagonale, octogonale, peu importe la forme de sa maille, le bijoutier va pouvoir prendre cette **formule** là et dire ah là parfait j'aurai besoin de tant de tiges.

Après un travail de groupes de huit minutes environ dans la phase 10, les élèves livrent leurs « phrases mathématiques » demandées par le professeur. On retrouve ici deux types de formules généralisant les formes M2 et M4 vues dans les cas particuliers de formes :

- G2 : (nb côtés de la maille - 1) × nb de mailles + 1 = nb de tiges
- G4 : (nb de mailles -1) × (nb côtés – 1) + nb côtés = nb de tiges

Pour la formule G1, une élève explique qu'ils ont observé que, dans la formule « 2×nb de mailles+1=nb de tiges » du cas triangulaire, le « 2 » représente le nombre côtés de la maille moins 1. Le professeur pousse un peu le raisonnement en disant « donc vous avez remplacé votre 2 … d'où il vient ce 2 là … c'est justement le nombre de côté de la maille moins 1 ».

Le professeur poursuit la demande de l'explicitation du raisonnement pour la formule G2 en mettant en parallèle au tableau (voir figure ci-dessous) la formule pour le pentagone pour bien faire ressortir le rôle joué par les différentes variables et explicite lui-même le raisonnement supposé des élèves : « on part de la formule précise pour ce type de mailles là et puis on généralise avec une formule qui va nous permettre de trouver ». Et il compare les deux formules en précisant que la deuxième est un peu moins évidente à voir.



Nous laissons de côté l'analyse du type de tâches Tmn et de la tâche tma (phase 12 et 13) qui amènent à s'intéresser à la dépendance inverse entre le nombre de mailles et le nombre de tiges pour la forme carrée.

- *Technologies associées aux différents types de tâches de généralisation*

Nous rappelons que nous utilisons le concept de technologie au sens de Chevallard (1 999), autrement le discours sur la technique qui permet de la justifier, éclairer, produire, …

En dehors des connaissances liées au choix du contexte géométrique constitué essentiellement des polygones et des méthodes élémentaires de dénombrement, les élèves doivent avoir une idée intuitive des notions de suites et d'algorithmes. Ils doivent aussi maîtriser les connaissances sur le numérique, notamment sur les nombres entiers et les opérations de l'arithmétique avec le vocabulaire et les différents registres sémiotiques permettant de manipuler et traiter les calculs sur ces nombres.

Les notions de variable et de dépendance entre variables peuvent aussi émerger de ce travail sans qu'une formalisation soit possible. Ces situations font ressortir le besoin d'utiliser un langage intermédiaire entre le langage formalisé de l'algèbre et le langage numérique sur les nombres. Ce langage est parfois introduit par le professeur comme « Nb » pour désigner une variable numérique.

Les connaissances et outils précédemment indiqués vont fournir des ressources aux élèves pour entrer dans un processus de généralisation, favorisé par la situation.

VI. SITUATIONS DE GENERALISATION : PRAXEOLOGIES ET PENSEE ALGEBRIQUE

Nous avons déjà souligné la structure complexe de la situation proposée avec la succession des tâches et types de tâches numériques et de généralisation que nous avons qualifié de réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série. Cette structure a permis à une classe et sûrement à de nombreux élèves de cette classe d'entrer dans un processus de généralisation qui est un des aspects spécifiques de la pensée algébrique.

La situation permet une dévolution de ce processus en commençant par des types de tâches numériques (Tcn et Ttn) et en mobilisant des techniques σ_1 basées sur des technologies numériques. Les productions des élèves attestent une articulation numérique-algébrique bien ajustée en jouant sur la taille de la variable nombre de mailles. Ainsi le passage de l'étude des premiers cas du nombre de mails (entre 1 et 9) à celui d'un nombres comme 44 ou 45 force les élèves à faire évoluer leurs procédures vers des techniques de généralisation explicite. Ce saut informationnel fait ainsi fonctionner ces valeurs numériques comme des exemples génériques au sens de Balacheff (1987) et ne plus considérer ce cas comme un cas déterminé mais comme un représentant d'une variable, montrant ainsi un aspect de la compétence et pensée algébrique.

Dès les premières tâches, le langage et divers registres sémiotiques sont sollicités pour dire cette généralisation, l'aspect sémiotique fort de cette situation fait ainsi apparaître une caractéristique du travail algébrique.

Le numérique va encore être un appui dans cette situation comme moyen de validation mais aussi provoque de futurs obstacles didactiques car les élèves peuvent considérer les vérifications de formules avec les premiers cas numériques comme une preuve. Conception qu'il faudra prendre en compte à propos de l'apprentissage de la démonstration au collège en France.

Pour terminer, si la situation a permis à des élèves de traiter une situation de généralisation à deux variables, comme on l'a vu avec le type de tâches *Ta* où les élèves devaient faire un message pour n'importe quelle forme et taille de chaînes, on peut être plus réservé sur la forte mise en évidence du raisonnement analogique par le professeur.

REFERENCES

Balacheff N. (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* 18.12.

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1992) *L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : didactique des mathématiques, formation normale des enseignants.* École normale supérieur Marrakech. p. 21-40.

Bednarz N., Dufour-Janvier, B. (1996) Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Booth L. (1984) Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x, Vol 5.*

Bronner A. (1997) Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée, *Thèse de doctorat.* Université Joseph Fourier, Grenoble.

Bronner A. (2006) « Installation et régulation par l'enseignant de l'espace parole-pensée-actions-relations. Gestes d'étude, Gestes professionnels, évènements et ajustements ». *Journées d'études IVDA* 2005. Presses Universitaires de Franche-Comté.

Bronner A., (2007) La question du numérique : Le numérique en questions, Habilitation à Diriger les Recherches, Université Montpellier 2.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.2. La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* n°19, 43-75.

Chevallard Y. (1990) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, n°23, 5-38.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, Vol. 5, ULP, IREM de Strasbourg.

Grugeon B. (1995) *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Kieran C. (1994) A functional approach to the introduction of algebra: some pros and cons, in Ponte J. P., Matos J. F. (Eds.). *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 1, 157-175.

Kieran C. (1992) The learning and teaching of school algebra. In Grouws D. A. (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Marchand P., Bednarz N. (1999) L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ* XXXIX(4), 30-42.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

Squalli H., Suurtamm C., Freiman, V. (2012) *Preparing Teachers to Develop Algebraic Thinking in Primary and Secondary School / Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire.* Canadian Mathematics Education Study Group 2012.

Vergnaud G. (1986) Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique.* Éditions La Pensée Sauvage.

Squalli H., Mary C., Marchand P. (2011) Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique. Technologie - Sciences – Mathématiques*. Editions Deboeck.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE : QUELLES DIFFÉRENCES ENTRE LES RAISONNEMENTS MIS EN PLACE PAR LES ÉLÈVES AVANT ET APRÈS L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE ?

Isabelle DEMONTY[*] – Annick FAGNANT[**] - Joëlle VLASSIS[***]

Résumé – De nombreux curricula préconisent d'enseigner l'algèbre après que les élèves ont acquis une base de connaissance en arithmétique. Cette façon d'organiser les enseignements mathématiques n'est pas en adéquation avec les recherches centrées sur la pensée algébrique : celle-ci se caractérise par une manière particulière de raisonner face à des problèmes, qui peut se développer bien avant les premiers apprentissages du secondaire (Radford, 2014). La communication compare les démarches mises en œuvre par des élèves dans des situations de dénombrement, avant et après l'introduction de l'algèbre. Elle apporte ainsi des informations sur l'évolution de la pensée algébrique des élèves de 11 à 14 ans

Mots-clefs : développement, pensée algébrique, dénombrement, arithmétique, algèbre

Abstract – A lot of curricula recommend to teach algebra after the students have acquired a deep knowledge in arithmetic. This way of organizing the mathematics' teaching is not in adequacy with the researches focused on algebraic thinking: it's more a way of reasoning that can be developed before the first learnings of secondary school (Radford, 2014). The communication compares way of thinking by students in the study of "pattern", before and after the introduction of the algebra. It brings information on the evolution of the algebraic thinking of students from 11 to 14 years old.

Keywords: development, algebraic thinking, pattern, arithmetic, algebra

De nombreux curricula préconisent d'enseigner l'algèbre après que les élèves ont acquis une bonne base de connaissance en arithmétique (Cai & Knuth 2011 ; Radford 2014). Les programmes de mathématiques en Belgique francophone vont dans cette direction, en marquant une distinction entre l'arithmétique d'une part, qui relève de la responsabilité de l'instituteur et l'algèbre d'autre part, qui débute dans l'enseignement secondaire (grades 7 et 8) avec l'introduction du symbolisme algébrique, des procédures associées (calcul algébrique et résolution d'équations).

Cette façon de considérer l'algèbre n'est pas en adéquation avec les recherches centrées sur la pensée algébrique (Kieran 2007) : la définition même de cette pensée n'est pas directement liée à la capacité à utiliser des écritures mathématiques comportant des lettres. Au contraire, celle-ci relève davantage d'une manière particulière de raisonner face à des problèmes, qui

[*] Université du Luxembourg – GD Luxembourg – isabelle.demonty@uni.lu
[**] Université de Liège – Belgique – afagnant@ulg.ac.be
[***] Université du Luxembourg – GD Luxembourg – joelle.vlassis@uni.lu

Demonty I., Fagnant A., Vlassis J., (2015) Le développement de la pensée algébrique : quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre? In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 265-279.

peut se développer dans un cadre numérique, bien avant les premiers apprentissages du secondaire (Kieran 2007 ; Cai & Knuth 2005 & 2011, Radford 2006, 2008 & 2014).

Malgré cette rupture nette entre l'arithmétique et l'algèbre soutenue par les directives officielles, on retrouve une compétence qui autorise le développement de cette pensée algébrique dès les premiers apprentissages mathématiques : il s'agit de la capacité à dénombrer, compétence qui doit être travaillée dès l'école maternelle, approfondie en primaire (en remplaçant le dénombrement par un calcul) et revue à nouveau dans l'enseignement secondaire (où le dénombrement sera exprimé par une formule). L'étude du dénombrement dans le contexte de l'analyse de suites arithmétiques dont chacun terme est représenté par un enchaînement de figures, constitue ainsi un support intéressant pour amener une réflexion sur les caractéristiques de la pensée algébrique des élèves avant et après l'introduction de l'algèbre.

C'est à ce type de situation que notre communication s'intéresse. Elle se centre sur les questions suivantes : comment se caractérise la pensée algébrique dans des situations d'analyse de suite arithmétiques? Les démarches mises en œuvre par les élèves selon qu'ils sont à l'école primaire ou au début de l'enseignement secondaire sont-elles réellement différentes ? Qu'en est-il de l'écriture même de ces démarches ?

Après une analyse de quelques recherches centrées sur les caractéristiques de la pensée algébrique, la communication présente les résultats d'un test soumis à 156 élèves de grades 6 et 8 issus de 8 classes en Belgique francophone, en vue de mieux cibler les différences qui se dégagent dans les démarches de généralisation mises en œuvre avant l'introduction de l'algèbre et après une année complète d'enseignement de l'algèbre.

I. FONDEMENTS THEORIQUES

Cette partie a pour but d'apporter un éclairage théorique à la problématique suivante : comment se caractérise la pensée algébrique dans des situations d'analyse de suites arithmétiques ?

Elle est structurée en 3 parties. La première partie propose une première mise au point sur les caractéristiques principales de la pensée algébrique. La deuxième partie s'intéresse aux situations où l'élève est amené à généraliser un phénomène à travers l'observation de cas particuliers : elle envisage à la fois les démarches que les élèves mettent en œuvre pour généraliser et les symbolisations écrites qui fournissent un support intéressant pour tenter de mettre à jour leur raisonnement, ainsi que la façon dont les élèves le formulent. Enfin, la dernière partie discute des liens entre pensée algébrique et généralisation.

1. Les caractéristiques de la pensée algébrique

L'utilisation de notations symboliques ne constitue pas la meilleure manière de définir l'entrée dans la pensée algébrique ((e.g. Kieran 1989, 1990 ; Filloy & Rojano 1989 ; Cortes, Vergnaud, Kavafian 1990 ; Radford & Puig 2007).

Selon Russel, Schifter et Bastable (2011), une caractéristique majeure de la pensée algébrique est de parvenir à comprendre le comportement des opérations

Selon Radford (2014), la pensée algébrique présente les trois caractéristiques suivantes :

- l'indétermination qui relève de la capacité à exploiter des problèmes qui impliquent des nombres inconnus ;
- la dénotation qui consiste à parvenir à nommer ou symboliser ces nombres inconnus. Cette dénotation peut se faire de différentes manières, à l'aide du code alphanumérique, mais aussi du langage naturel, de gestes ou de signes non conventionnels ;

le raisonnement analytique. Celui-ci amène à traiter les quantités indéterminées comme si elles étaient connues, et à parvenir à réaliser des opérations sur ces nombres inconnus.

Dans cette définition, la pensée algébrique recouvre des aspects liés d'une part à une certaine forme de pensée (le raisonnement analytique) et d'autre part, à la manière de symboliser cette pensée (la dénotation).

2. *Les situations de dénombrement : comment les élèves généralisent-ils des phénomènes et comment expriment-ils par écrit leurs démarches ?*

Radford (2006, 2008) a largement étudié les démarches de généralisation mises en place par les élèves de 10 à 14 ans, dans le cadre de l'étude de suites arithmétiques représentées par des figures, comme l'illustre la figure 1.

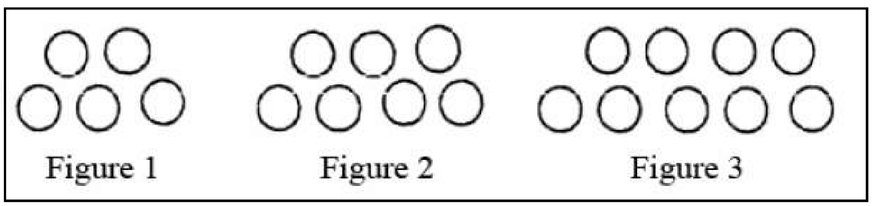


Figure 1 - E*xemple de situation de dénombrement dans le contexte de suites arithmétiques (Radford 2006, p.5)*

Selon cet auteur, la généralisation présente deux caractéristiques : un aspect phénoménologique d'une part, qui correspond à la démarche mise en œuvre pour généraliser une suite arithmétique et un aspect sémiotique d'autre part, qui correspond à l'expression du raisonnement réalisé. Dans la suite de cette partie, nous envisageons quelques caractéristiques de ces deux facettes de la généralisation, qui sont en réalité intimement liées.

a) *L'aspect phénoménologique de la généralisation : comment les élèves raisonnent-ils pour généraliser ?*

Radford (2006 ; 2008) identifie trois types de raisonnements d'élèves face à la généralisation de suites arithmétiques : l'induction naïve, la généralisation arithmétique et la généralisation algébrique.

- L'induction naïve consiste à rechercher un motif inconnu en analysant les caractéristiques d'un seul motif connu. Ces élèves élaborent par exemple des stratégies d'essais-erreurs en tentant d'établir une règle au départ de l'analyse d'un seul terme, sans chercher un point commun entre plusieurs termes de la suite. Une autre stratégie fréquente d'induction naïve relève d'une application erronée du raisonnement proportionnel : bon nombre d'élèves, face à une situation d'agrandissement, font appel à ce raisonnement sans avoir vérifié si ce modèle fonctionnait dans cette situation. Par exemple, pour déterminer le nombre d'objets nécessaires pour réaliser le motif n°6, ces élèves pensent qu'il suffit de multiplier le nombre d'objets constituant le motif 3 par 2.

- Une autre démarche est qualifiée par Radford (2006, 2008) de généralisation arithmétique : dans celle-ci, la personne identifie un point commun à travers l'analyse de plusieurs termes de la suite (il s'agit du fait qu'il y a un accroissement constant entre les termes consécutifs). Cette caractéristique peut être utilisée pour identifier correctement un terme à partir d'un terme proche (par addition successive de la raison). Toutefois, l'élève n'est pas en mesure, dans une telle démarche, de procéder à un raisonnement lui permettant d'utiliser cette caractéristique pour prédire un terme lointain de la suite étudiée.
- Dans la démarche de généralisation algébrique, l'élève identifie une régularité à travers l'analyse de quelques termes de la suite, étend ou généralise cette régularité aux autres termes, et parvient à proposer une expression directe de n'importe quel terme de la suite (Radford, 2006 ; Radford, 2008).

b) L'aspect sémiotique de la généralisation : comment les élèves expriment-ils leur raisonnements de généralisation ?

Dans ses travaux, Radford (2006 ; 2008 et 2014) propose aux élèves d'exploiter en groupes les situations. Il constate que les canaux de symbolisation des élèves dépassent largement les uniques traces écrites : les gestes, les mots et même les intonations données par les élèves dans leurs explications sont très révélateurs de leur façon de penser et d'exprimer leurs démarches.

Notre étude se positionne dans une perspective d'évaluation, en s'intéressant aux traces écrites laissées par les élèves pour exploiter ces situations. Dans cet article, nous nous centrerons donc sur les caractéristiques de ce canal de communication.

Lorsqu'ils proposent une démarche d'induction naïve ou de généralisation arithmétique, les élèves peuvent écrire leur raisonnement à l'aide de calculs, de phrases ou même à l'aide d'un substitut symbolique pour identifier le nombre inconnu. Ils peuvent également soutenir ce raisonnement par des annotations écrites sur les dessins présentant les suites (par exemple, ils identifient la raison de la suite en entourant chaque fois les figures qui ont été ajoutées pour passer d'un motif au motif qui le suit directement).

En ce qui concerne la démarche de généralisation algébrique, Radford (2006) constate que les élèves peuvent proposer 3 types de symbolisations écrites, correspondant à 3 types de généralisation algébriques : factuelle, contextuelle et symbolique. Dans la généralisation algébrique factuelle, l'élève symbolise l'inconnue à partir d'un nombre : il choisit un nombre et applique la formule au départ de celui-ci. Dans la généralisation algébrique contextuelle, l'inconnue est symbolisée par un substitut symbolique (point d'interrogation, cadre vide, lettre, …) mais la symbolisation élaborée garde des traces de la situation qui l'a vue naître : par exemple, l'élève utilise des parenthèses pour indiquer l'ordre des opérations à réaliser, sans que cela ne soit nécessaire selon la règle de priorité des opérations. La généralisation algébrique symbolique se détache quant à elle de la situation, pour proposer une écriture tout à fait correcte sur le plan mathématique, qui n'est plus enracinée dans le contexte de la suite.

Plusieurs recherches, réalisées dans le domaine de la mise en équation de problèmes impliquant des équations apportent des éclairages intéressants concernant la symbolisation algébrique. Deux concepts nous paraissent transposables dans le domaine de la symbolisation d'une généralisation.

Il s'agit d'une part de la nominalisation (Radford, 2002) qui est un processus linguistique à travers lequel un élément est transformé en sujet à partir d'un verbe d'action.

> Ainsi, par exemple lorsqu'il s'agit de symboliser le fait qu'un enfant a 5 billes de plus qu'un autre, l'élève doit transformer l'information « 5 billes de plus » par « le premier enfant a x billes et le second enfant à 5 + x billes »

Le second concept est défini par Duval (2002) et concerne la nécessité, dans la plupart des problèmes impliquant les équations, de choisir une lettre qui permettra de désigner non pas une mais plusieurs quantités exprimées dans l'énoncé. Par exemple, face au problème énoncé ci-dessus, l'élève doit parvenir à utiliser une même lettre pour désigner les parts de deux enfants, la part du second devant être symbolisée en fonction de la part du premier (le premier enfant a x billes et le second a x + 5 billes).

Dans la symbolisation des suites arithmétiques, l'élève est amené à effectuer une démarche de nominalisation : il doit penser à mobiliser dès le départ une quantité inconnue (le n° du motif) et à effectuer des opérations au départ de cette quantité inconnue, celle-ci devant nécessairement apparaitre dans sa formule. En ce qui concerne la nécessité d'exprimer plusieurs inconnues au départ d'une seule, cette démarche ne sera utile que pour formaliser certains raisonnements, faisant intervenir cette particularité, par exemple lorsque l'élève constate qu'il faut additionner deux nombres consécutifs : il va devoir exprimer tant le premier que le deuxième nombre au départ d'une même inconnue.

Ces recherches montrent que l'écriture, à l'aide d'une expression algébrique, de la pensée algébrique est loin d'être simple. Les recherches centrées sur les connaissances des enseignants ont mis en évidence que ceux-ci avaient tendance à sous-estimer ces difficultés de symbolisation. Certains auteurs attribuent ce fait aux connaissances mathématiques des enseignants, qui les ont conduits à automatiser un certain nombre de procédures que les élèves doivent découvrir lors des premiers apprentissages algébriques. A ce propos, Koedinger et Nathan (2004) définissent le concept d'« expert blind spot », pour désigner le fait que les enseignants, de par leur bagage important en mathématiques, évaluent mal la difficulté des tâches de symbolisation algébrique, l'associant même à une simple traduction directe d'un énoncé en symboles mathématiques (Julo 1995 ; Duval 2002).

3. *Quels liens peut-on établir entre pensée algébrique et démarche de généralisation ?*

D'après les trois caractéristiques de la pensée algébrique rappelées ci-avant (Radford 2008 et 2014), ni l'induction naïve, ni la généralisation arithmétique ne relèvent de la pensée algébrique. En effet, dans aucune de ces deux démarches, les élèves ne parviennent à élaborer un raisonnement de nature analytique, puisque leurs démarches ne prennent pas appui sur un nombre inconnu. De plus, les seules dénotations concernent des quantités connues.

A l'inverse, les démarches de généralisation algébriques contextuelles et symboliques présentent les trois caractéristiques de la pensée algébrique. Les élèves sont en effet confrontés à l'indétermination, puisqu'ils doivent élaborer un raisonnement qui permette de déterminer n'importe quel terme de la suite, à partir de son rang dans la suite. Ils parviennent également à symboliser ces nombres inconnus, sans nécessairement utiliser le code alphanumérique et enfin, leur raisonnement est de nature analytique, dans la mesure où il s'agit de réaliser des opérations au départ d'un rang quelconque du terme, qui est inconnu.

La démarche de généralisation algébrique factuelle présente à minima deux des trois caractéristiques de la pensée algébrique : le raisonnement est bien de nature analytique et les élèves montrent qu'ils sont capables d'exploiter pleinement des problèmes qui impliquent des nombres inconnus.

En ce qui concerne la dénotation, Radford (2006) précise que « dans la généralisation algébrique factuelle, l'indéterminée n'est pas nommée : la généralisation repose sur des actions réalisées sur des nombres ; les actions sont composées de mots, de gestes et d'activités de perception » (p. 16) [traduction libre][1]. Selon ce point de vue, on peut penser que la dénotation fait défaut à ces élèves puisqu'ils ne parviennent pas à nommer ou symboliser l'inconnue. Toutefois, cette idée n'est pas partagée par d'autres auteurs. En effet, s'appuyant sur les travaux de Dörfler (1991), Squalli (à paraître) exprime le fait qu'« un moment crucial dans le processus de généralisation se produit quand […] la formulation des protocoles ne sert plus uniquement à décrire les cas spécifiques examinés mais aussi à envisager les cas potentiels » (p.7). En suivant cette idée, on peut considérer que l'exemple sur lequel s'appuient les élèves lorsqu'ils proposent une généralisation algébrique factuelle a la valeur d'un cas général qui permet de décrire un processus de calcul plutôt que la réponse effective trouvée (qui à elle seule ne garde pas la trace de la démarche effectuée). Dans ce cas, la dénotation telle que définie dans la pensée algébrique est réalisée (l'inconnue est désignée par un nombre ayant la valeur d'un exemple prototypique) et la généralisation algébrique factuelle présente bien les trois caractéristiques de la pensée algébrique.

II. PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE ET HYPOTHESES

Selon Radford (2008, 2014), la pensée algébrique peut être rendue accessible aux jeunes élèves, bien avant l'entrée dans l'algèbre. Dans un contexte de suites arithmétiques, lors d'activités savamment orchestrées par l'enseignant, les études menées par Radford et ses collaborateurs montrent que les élèves parviennent à élaborer des raisonnements de nature analytique et à symboliser ceux-ci à l'aide d'un substitut symbolique.

S'il s'avère que les élèves sont capables de développer de tels raisonnements lorsqu'ils sont accompagnés dans leurs démarches par l'enseignant, qu'en est-il de leurs démarches spontanées ? Faut-il vraiment attendre l'entrée dans l'algèbre pour que les élèves parviennent à développer et symboliser un raisonnement de nature algébrique ?

En référence aux travaux de Radford (2006, 2008 et 2014) et de Dörfler (1991), nous émettons la première hypothèse suivante : avant tout enseignement formel de l'algèbre, bon nombre d'élèves sont capables de développer des raisonnements de nature algébrique, même si la manière de symboliser ceux-ci ne relève pas de l'utilisation du code alphanumérique.

Par ailleurs, les enseignants de mathématiques du secondaire ont tendance à surestimer la facilité d'acquérir le langage formel (Koedinger & Nathan, 2004), l'associant souvent à une simple traduction du langage courant en symboles mathématiques (Julo, 1997 ; Duval, 2002).

---

[1] In factual generality, indeterminacy remains unnamed; generality rests on actions performed on numbers; actions are made up here of words, gestures and perceptual activity".

Nous émettons la seconde hypothèse suivante : même après plus d'une année d'utilisation du symbolisme algébrique, les élèves de 14 ans éprouvent de nombreuses difficultés pour formaliser leur raisonnement par le biais de l'écriture algébrique.

III. METHODOLOGIE

Les résultats que nous présentons dans cette communication ont été recueillis suite à la passation d'un test comprenant deux suites arithmétiques, et soumis à un total de 156 élèves issus de 2 années d'étude : grade 6 (6e primaire) et grade 8 (deuxième secondaire).

La figure 2 reprend le nombre de classes et d'élèves concernés par l'épreuve dans chaque année d'étude.

	Grade 6	Grade 8
Nombre de classes	4	4
Nombre d'élèves	79	77

Figure 2 - *Brève description de l'échantillon*

Identique dans toutes les classes, le test a été soumis en début d'année scolaire (au mois de novembre).

Puisque nous interrogeons dans cet article la nécessité d'attendre l'entrée dans l'algèbre pour que les élèves parviennent à développer et symboliser un raisonnement de nature algébrique, il nous a semblé nécessaire de comparer les résultats de ces deux groupes d'élèves puisque les uns n'avaient aucune expérience algébrique (groupe de grade 6 et que les autres avaient reçu une année complète d'enseignement de cette matière (groupe de grade 8).

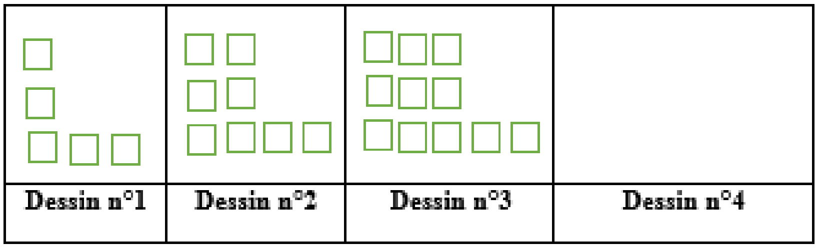
Dans ce test, nous confrontons les élèves à une suite arithmétique symbolisée par des petits carrés.

L'activité soumise aux élèves est présentée dans la figure 3. L'élève dispose au départ d'une représentation visuelle des trois premiers termes de la suite. Sur la base des réflexions de Radford, Miranda, & Demers (2009), nous avons proposé un questionnement en 4 étapes :

- dans un premier temps, l'élève est amené à dessiner le motif n°4 ;
- il lui est ensuite demandé de proposer une description de l'agencement des carrés pour le motif n°7, dans le but de porter son attention sur la disposition spatiale des carrés ;
- l'élève doit ensuite identifier le nombre de carrés nécessaires pour un motif lointain (n°100) ;
- enfin, il s'agit de généraliser en mots une procédure pouvant convenir quel que soit le numéro recherché. Afin d'amener les élèves à donner du sens à la notion de nombre indéterminé dans ce contexte, nous avons formulé la consigne à l'aide d'un petit jeu (voir question 4). Pour les élèves de grade 8, nous demandons d'exprimer ce moyen en utilisant des symboles mathématiques.

Les résultats présentés dans cet article concernent les réponses apportées aux élèves à la quatrième étape du questionnement (question 4). Ce choix s'explique par le fait que, dans cette dernière question, l'élève est réellement amené à généraliser le phénomène sous étude ; les trois autres questions n'impliquent en effet pas de réaliser un raisonnement analytique, mais sont plutôt destinées à aider les élèves, et en particulier les plus jeunes, à entrer progressivement dans l'activité de généralisation évaluée dans cette quatrième question.

Voici une suite de dessins réalisée à l'aide de petits carrés :



1) Continue la suite en dessinant le dessin n°4 dans la case vide ci-dessus.

2) Alexandre est un élève d'une autre classe. Il voudrait obtenir le dessin n°7, mais il n'a pas vu les premiers dessins.

   a. Explique-lui comment il doit faire (***attention***, ton explication doit être réalisée uniquement avec des mots).

   b. Finalement, combien de carrés doit-il dessiner ? ……….

3) Alexandre aimerait réaliser le dessin n°**100** sur la fenêtre de sa classe avec des post-it. Combien de post-it devra-t-il utiliser ?

4) Dans la classe d'Alexandre, il y a une boite contenant des papiers sur lesquels est chaque fois indiqué un nombre … Alexandre va choisir un papier au hasard dans la boîte. Le nombre indiqué sur le papier lui donnera le numéro d'un dessin de la suite.

   a) Ecris un message à cet élève pour qu'il sache comment il pourra calculer le nombre de post-it dont il aura besoin pour réaliser le dessin choisi au hasard. ***Attention**, il doit juste savoir combien il lui faudra de post-it : il ne devra pas faire le dessin.*

   b) **Si tu es en 2e secondaire**, écris ce moyen en langage mathématique (utilise des signes d'opérations,…).

Figure 3 *- La situation proposée aux élèves*

IV. RESULTATS

Les résultats apportent des éléments empiriques permettant d'approcher la deuxième problématique au cœur de cet article : Quelles sont effectivement les démarches mises en œuvre par les élèves selon qu'ils sont à l'école primaire ou au début de l'enseignement secondaire ?

Cette partie est structurée en deux parties. Dans un premier temps, nous nous centrerons sur le message formulé par les élèves pour généraliser la suite. L'ensemble des productions sera analysé en référence à la typologie de Radford (2006, 2008) présentée précédemment. Par la suite, nous analyserons plus précisément la symbolisation mathématique des messages réalisée par les élèves de grade 8.

a) Les démarches de généralisation des élèves de 6ᵉ et 8ᵉ grades.

La figure 4 présente quelques démarches de chaque sorte, permettant d'illustrer le classement réalisé. Etant donné la consigne (rédiger un message), très peu de productions ont pu être classées dans la catégorie « généralisation algébrique symbolique », les élèves n'étant pas incités à symboliser algébriquement leur raisonnement.

	Production de l'élève	**Commentaire**
Induction naïve	Si c'est le dessin 10, il doit prendre 5 fois les carrés qu'il y a sur le dessin 2.	L'élève ici propose d'appliquer le raisonnement proportionnel.
	Tu prends le nombre fois le nombre, puis tu ajoutes 2.	On peut penser ici que l'élève se base sur le motif 3, seul cas pour lequel cette règle fonctionne.
Généralisation arithmétique	Il devra ajouter toujours 3 par rapport au nombre qu'il aura.	Cette production indique que l'élève a repéré l'accroissement constant entre les termes de la suite
	Tu dois regarder le n°1 puis faire une addition de 3 chaque fois jusqu'au numéro que tu as pêché.	Par rapport à la précédente, cette production apporte l'idée supplémentaire du point de départ (5 post-it pour le premier motif).
	Par exemple, il choisit un post-it et que c'est le n°10. Il devra prendre 23 post-it. Si le n°7 contient 14 post-it, il faudra en ajouter 9 (3 par dessin) pour avoir le 10.	On peut penser que cette démarche pourrait évoluer vers une généralisation algébrique, si l'élève identifie que 9, c'est 3 x 3, 3 étant également la différence entre 10 et 7).
Généralisation algébrique	S'il a le 100, il doit faire 5 puis ajouter 99 fois 3, ça fait 302. Si c'est 150, il doit faire 5 puis ajouter 149 fois 3, ça fait 434.	Il s'agit ici de deux exemples de généralisation algébrique factuelle : bien que les deux démarches sont exprimées par des nombres, elles présentent un caractère général qui laisse à penser que la règle pourra être utilisée quel que soit le motif.
	Par exemple ; si le n° est 401, il faudra faire 3 x 401 + 2. C'est la même chose avec tous les autres nombres.	
	On fait le nombre ….. fois 3, plus 2	La généralisation algébrique est, dans ces trois cas, de nature contextuelle : l'ordre des
	Il doit faire le nombre qu'il a péché fois 2 puis rajouter le nombre plus 2.	

	Tu dois faire le nombre que tu as plus 2 pour la ligne horizontale et pour les 2 autres, tu dois faire chaque fois ton nombre. Pour finir, tu additionnes le tout.	opération est chaque fois renforcé par un mot ou un signe de ponctuation. Les deux dernières démarches témoignent d'une visualisation de la suite décomposée en 3 lignes horizontale.
	3n + 2	La généralisation nous parait de nature symbolique : elle utilise de manière correcte le symbolisme algébrique (omission du signe « . » et respect de la priorité des opérations).

Figure 4 - *Quelques exemples de démarches proposées par les élèves*

La figure 5 présente la nature des raisonnements mis en œuvre par les élèves, en fonction de leur niveau d'étude.

	6P (N = 79)	**2S** (N = 77)
Induction naïve • Raisonnement proportionnel	5%	5%
• Démarche valable pour un cas seulement	14%	5%
Généralisation arithmétique	27%	18%
Généralisation algébrique[2] • Factuelle	19%	12%
• Contextuelle ou symbolique	20%	38%
Inclassable[3]	6%	5%
Omission	9%	17%

Figure 5 - *Démarches de généralisation mises en œuvre par les élèves, selon le niveau d'étude*

Les résultats de la figure 5 confirment notre première hypothèse : avant tout enseignement formel de l'algèbre, bon nombre d'élèves sont capables de développer des raisonnements de nature algébrique, même si la manière de symboliser ceux-ci ne relève pas toujours de l'utilisation du code alphanumérique : environ 40% des élèves de grade 6 (39%) écrivent un message révélant une « généralisation algébrique », et la moitié d'entre eux parviennent à exprimer leur raisonnement à l'aide d'un substitut symbolique.

Des différences apparaissent toutefois entre les démarches mises en œuvre par les élèves n'ayant pas encore abordé l'algèbre et celles élaborées par les autres.

- la proportion de raisonnements de type « induction naïve » est plus conséquente en primaire que dans les autres années d'étude, la différence la plus marquée concerne la

[2] Vu la consigne donnée aux élèves (Ecris un message), il ne nous semblait pas pertinent de distinguer les démarches de types généralisation contextuelle ou symbolique.
[3] Certaines démarches témoignaient davantage d'une incompréhension de la consigne que d'une véritable démarche de généralisation.

proportion de raisonnements valables pour un cas seulement, laissant penser que les élèves ont axé leur réflexion sur l'analyse d'un seul terme de la suite (14% en grade 6, contre 6% en grade 8), raisonnement très éloigné d'une démarche de nature algébrique : la recherche d'un point commun à au moins deux termes de la suite n'étant pas un élément sur lequel 14% des élèves de grade 6 ont spontanément porté leur attention. La formulation de la question 4 a été réfléchie en référence aux recommandations de Radford, Miranda, et Demers (2009) qui ont étudié les façons de faire comprendre au mieux l'enjeu de la tâche aux élèves du primaire, sans les orienter sur une démarche particulière de résolution. Toutefois, on peut émettre l'hypothèse que la formulation de la question « Alexandre va choisir un papier au hasard … » a peut-être induit les élèves de primaire, non familiers avec ce genre d'énoncés, à imaginer la situation dans leur tête, à se concentrer sur un cas particulier et à s'engager ainsi dans une démarche d'induction naïve. Ce problème se pose sans doute moins pour les élèves de grade 8 qui sont plus familiers à ce genre de tâche.

- L'autre différence intéressante concerne la proportion d'élèves qui formalisent leur démarche algébrique par le biais d'un substitut symbolique : 20% des élèves de grade 6 et 38% des élèves de grade 8 parviennent à élaborer des généralisations contextuelles ou symboliques. Lorsque les élèves de grade 6 développent une généralisation de type algébrique, la moitié d'entre eux ne pensent pas spontanément à nommer l'inconnue par un substitut symbolique. On peut penser que la nécessité par écrit leur démarche a peut être limité les élèves de grade 6 dans les possibilités de dénotation de l'inconnue. En effet, les travaux de Radford (2007, 2008, 2013) montrent à quel point le langage oral et gestuel occupe une place importante dans ce type d'activité. Par ailleurs, présentés dans une perspective sémiotique, les travaux qu'il a menés montrent que le dialogue entre élèves et avec l'enseignant est aussi une composante essentielle des productions écrites qui peuvent découler de l'exploitation de telles activités.

b) Les symbolisations mathématiques développées par les élèves de 14 ans.

La figure 6 présente les caractéristiques des messages symbolisés mathématiquement par les élèves, après un an d'expérience dans le domaine algébrique

Caractéristique de l'écriture mathématique	Exemples	% de démarches
Symbolisation algébrique correcte respectant les conventions algébriques	3n + 2	4%
Symbolisation algébrique utilisant la lettre, mais comportant des marques du lien à la suite étudiée	(a.3) + 2 n.3 + 2 x-3 < x < x + 3	34%
Symbolisation algébrique correcte n'utilisant pas la lettre, mais un substitut symbolique	….. . 3 + 2 Numéro . 3 + 2	10%
Symbolisation n'impliquant que des nombres et des signes opératoires	. 3 + 2 5 +3 + 3 ...	19%
Symbolisation utilisant deux lettres différentes ou une même lettre pour désigner des nombres différents	n x 2 + n[4] 2a + b	3%
Erreurs de parenthèse	n. 3 (+2)	4%

[4] La mise en mots de cette démarche montre que l'élève a analysé la suite de manière horizontale (deux lignes correspondant au n° du dessin, et la dernière en a 2 de plus que le n° du dessin. La symbolisation mathématique semble indiquer ici que l'élève a éprouvé des difficultés à identifier une inconnue à partir d'une autre (n et n+2).

	(3n) + (2)	
Autres erreurs		1%
Omission[5]		25%

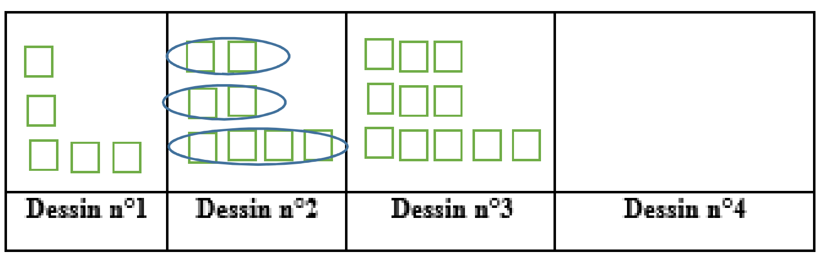
Figure 6 – *Caractéristiques des messages symbolisés mathématiquement par les élèves de grade 8*

La seconde hypothèse formulée se vérifie également : même après plus d'une année d'utilisation du symbolisme algébrique, les élèves de 14 ans éprouvent de nombreuses difficultés pour formaliser, par le biais de l'écriture algébrique, leur raisonnement. Moins de 40% des élèves de grade 8 parviennent à formuler leur raisonnement à l'aide d'une expression algébrique, même encore ancrée dans le contexte de la suite.

Au total, 10% des élèves sont proches d'une écriture correcte, mis à part le fait qu'ils n'ont pas pensé à utiliser une lettre dans ce contexte (ils utilisent alors un point d'interrogation ou un mot pour symboliser le nombre inconnu).

Deux erreurs nous semblent particulièrement importantes à mettre en évidence.

- Près de 20% des élèves ne symbolisent que des opérations à effectuer (fois 3 plus 2) pour trouver un terme quelconque de la suite. On peut penser, en référence aux travaux de Radford (2002), que ces élèves ne parviennent pas à réaliser le processus de nominalisation, consistant à passer d'une expression verbale (multiplier par 3 puis additionner 2) à une expression nominale (x . 3 + 2).
- Une autre erreur concerne surtout les élèves qui ont tenté d'exprimer algébriquement la règle suivante : « on a le numéro du motif sur les deux lignes du haut et le numéro du motif + 2 sur la ligne du bas».



Bon nombre d'élèves ont éprouvé des difficultés pour exprimer cette règle à l'aide d'une seule inconnue. En référence aux travaux de Duval (2002), ces réponses témoignent de la difficulté qu'ont les élèves à désigner plusieurs objets inconnus à partir d'un seul élément inconnu. Pour contourner ce problème, certains élèves ont utilisé 2 inconnues (a.2 + b ; a représentant le nombre de carrés sur chacune des deux lignes du haut et b, désignant le nombre de carrés sur la ligne du bas), d'autres ont utilisé une même inconnue pour désigner deux nombres différents (x. 2 + x ; le « x » présenté en premier lieu désignant le nombre de carrés sur chacune des deux premières lignes et le « x » présenté en deuxième lieu désignant le nombre de carrés sur la dernière ligne) et d'autres ont symbolisé la deuxième quantité par un nombre (ex : a.2 + 202 – on peut penser ici que l'élève a traduit le calcul 200 . 2 + 202 en langage mathématique, en remplaçant a par 200, et en conservant le 202 dans sa formule).

[5] Bon nombre d'élèves qui avaient rédigé en mots une généralisation de type arithmétique ont omis de répondre à cette question.

V. CONCLUSION

Traditionnellement, la plupart des curricula mathématiques séparent l'étude de l'arithmétique et de l'algèbre, l'arithmétique étant de la responsabilité des apprentissages du primaire alors que l'algèbre est réservée aux élèves de début d'enseignement secondaire. Des recherches récentes s'accordent sur le fait qu'une révision des programmes de primaire en vue de laisser place au développement de la pensée algébrique des élèves peut être bénéfique pour l'approfondissement de leurs connaissances des nombres en général (Cai & Knuth 2011). Les travaux menés dans ce sens par Radford et ses collaborateurs (2006, 2008, 2009, 2014) montrent que les situations de dénombrement impliquant des suites arithmétiques sont des environnements propices au développement de cette pensée.

Les programmes de Belgique francophone autorisent l'exploitation de situations de dénombrement, en proposant de les travailler à la fin de l'enseignement primaire (à travers des exploitations numériques) et au début de l'enseignement secondaire (où l'accent sera mis sur l'élaboration d'une formule permettant de généraliser le phénomène à tous les cas possibles).

C'est dans ce contexte que se situe la réflexion présentée ici. Elle présente un certain nombre de limites. Tout d'abord, elle ne concerne 156 élèves de 11 et 14 ans issus 8 classes qui se sont prêté volontairement à l'exploitation, sous la forme d'un test papier-crayon, d'une seule situation impliquant des suites arithmétiques. Ensuite, l'analyse présentée dans cette communication est focalisée sur la manière dont les élèves expriment par écrit un moyen général pour déterminer n'importe quel terme de la suite étudiée. Les travaux menés par les chercheurs en sémiotique ont pourtant montré que les expressions orales et gestuelles des élèves sont également centrales pour exprimer leurs raisonnements (Radford 2014) : dans cette étude, nous n'avons pas eu accès à ces canaux de communication. Il nous semble évident que les résultats auraient pu être différents si nous avions pu observer les élèves lors de la réalisation de la tâche.

Au-delà de ces limites, une série de constats méritent d'être discutés.

Les résultats nous amène à penser que la rupture introduite par les curricula du primaire et du secondaire est artificielle et ne rend pas compte des véritables capacités, même spontanées, des élèves de 11-12 ans dans ce domaine : dès la fin de la scolarité primaire, environ 40% des élèves parviennent sans aide à développer des raisonnements de nature algébrique, qu'ils peuvent exprimer par écrit. Après plus d'une année d'acquis algébriques, cette proportion s'élève à environ 50%.

Un autre constat important concerne les résultats obtenus par les autres élèves. Même après une année d'expérience algébrique et de travail approfondi sur les techniques qui y sont associées (calcul algébrique, résolution d'équations), près de 30% des élèves élaborent un raisonnement relevant soit de l'induction naïve, soit d'une généralisation arithmétique qui est limitée à la découverte de cas proches de ceux qui sont donnés au départ. Les outils cognitifs dont ces élèves font preuve ici ne leur permettent pas encore de répondre de manière satisfaisante à ces problèmes de dénombrement qui visent à les confronter à la notion d'indéterminée. Comme le confirment de nombreuses études (Kieran 2007), un travail soutenu par des discussions entre pairs et avec l'enseignant peut permettre à ces élèves de progresser dans leur raisonnement.

Outre cette difficulté à élaborer un raisonnement de nature algébrique, apparaissent des difficultés importantes des élèves débutant en algèbre pour exprimer, à l'aide du formalisme mathématique, leur raisonnement : à peine 1/3 des élèves de grade 8 parvient à symboliser correctement le raisonnement en utilisant spontanément la lettre. Près de 20% des élèves ne parviennent à développer le processus de nominalisation : ils n'expriment à l'aide de l'écriture mathématique que les opérations à réaliser au départ de l'inconnue, cette dernière n'apparaissant nulle part dans leur formule. D'autres élèves éprouvent des difficultés à exprimer une inconnue au départ d'une autre inconnue. Ces deux démarches sont pourtant essentielles dans d'autres domaines abordés au début de l'enseignement secondaire, en particulier lors de la mise d'un problème en équation (Duval 2002 ; Radford 2002). Il nous semble que ces problèmes d'écriture doivent faire l'objet d'un enseignement beaucoup plus approfondi, qui mériterait sans doute être amorcé dans un contexte arithmétique, dès l'école primaire (Cai & Knuth 2011).

Si de nombreux résultats montrent que les activités de réflexion sur les suites arithmétiques peuvent être porteuses pour aider les élèves à développer leur pensée algébrique, un travail important d'information voire même de formation est nécessaire pour amener les enseignants du primaire et du secondaire à poursuivre, chacun avec leurs objectifs spécifiques, cet ambitieux projet auprès de leurs élèves. Des recherches centrées plus spécifiquement sur cette question nous paraissent essentielles pour permettre d'amener in fine davantage d'élèves à maitriser pleinement tant les concepts et procédures algébriques élémentaires.

REFERENCES

Cai J., Knuth E. (2011) *Early algebraization*. New York: Springer.

Duval R. (2002). *L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets.* Actes du séminaire Franco-italien sur l'enseignement de l'algèbre. Irem de Nice.

Dörfler W. (1991) Forms and means of generalization in mathematics. In Bishop A. J., Mellin-Olsen S., Van Dormolen J. (Eds.) *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Julo J. (1996) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.* Rennes : Presses universitaires.

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In Lester F. K. (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Koedinger K., Nathan M. (2004) The real story behind story problems. Effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences* 13(2), 129-164.

Radford L. (2002) On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 26, Anne D. Cockburn and Elena Nardi (Eds.), Vol. 4, 81-88.

Radford L. (2006) Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In Alatorre S., Cortina J. L., Sáiz M., Méndez A. (Eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 2-21). Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford L. (2008) Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. DOI 10.1007/s11858-007-0061-0.

Radford L. (2014) The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal* 26, 257-277.

Radford L., Miranda I., Demers, S. (2009) *Processus d'abstraction en mathématiques. Ottawa: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques.* Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Squalli H. (à paraitre) La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. *Actes de l'Espace Mathématique Francophone*. Alger.

LES PROCESSUS ABSTRAIRE ET GÉNÉRALISER CONCEPTUALISÉS DANS UNE PERSPECTIVE COMMOGNITIVE

Doris JEANNOTTE*

Résumé – Ce texte présente une exploration théorique des termes généralisation et abstraction en tant que processus de pensée mathématique. Après la présentation d'un survol de la littérature en didactique des mathématiques sur généralisation et abstraction, les principales caractéristiques de ces deux processus sont présentées. Basé sur une perspective commognitive, généraliser et abstraire sont défini comme des processus discursifs. Le premier génère des énoncés qui étendent un discours existant. Le second crée un nouveau discours avec ses propres règles et ses nouveaux objets. En conclusion, ces deux processus sont mis en relation avec le raisonnement mathématique et il est proposé que l'abstraction ne soit pas considérée comme un processus de raisonnement mathématique.

Mots-clés : Pensée mathématique, abstraire, généraliser, raisonnement mathématique, commognition

Abstract – This paper presents a theoretical exploration of generalization and abstraction as processes of mathematical thinking. After presenting an overview of the mathematics education literature on generalization and abstraction, we highlight the principal characteristics of these two processes. Based on the commognitive framework, we situate generalization and abstraction as discursive processes. The first generates new utterances that extend an existing discourse. The second creates a new discourse with its own rules and new objects that are not coherent with the old ones. We conclude with how they might be related to mathematical reasoning, and thereby propose that abstraction not be considered a process of mathematical reasoning.

Keywords: Mathematical thinking, abstracting, generalizing, mathematical reasoning, commognition

Favoriser le développement de la pensée mathématique et plus particulièrement du raisonnement mathématique (RM) est un objectif de plusieurs curriculums à travers le monde. La mise de l'avant du RM par les politiques éducationnelles et les recherches sur les RM sont souvent justifiées par sa relation avec la compréhension et le sens (donner du sens au monde qui nous entoure). C'est par l'utilisation de différents RM que les élèves donnent du sens aux contenus mathématiques rencontrés en classe et aux processus mathématiques nécessaires à la résolution de problèmes mathématiques.

Ainsi, ces curriculums sont parfois influencés par des recherches en didactique des mathématiques et :

> The aim of developing mathematical reasoning in classrooms calls on the research community to clarify what is mathematical reasoning and what it looks like in school contexts (Reid 2002, p. 7).

---

* Université du Québec à Montréal – Canada - jeannotte.doris@uqam.ca

Jeannotte D. (2015) Les processus abstraire et généraliser conceptualisés dans une perspective commognitive. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 280-289.

C'est donc dans le but d'éclairer le champ conceptuel du RM que le présent écrit cherche à définir d'un point de vue théorique deux processus de pensée mathématique liés au RM dans la littérature en didactique des mathématiques.

Lors d'un projet portant sur la conceptualisation du RM pour l'enseignement et l'apprentissage du RM en classe (Jeannotte 2015), l'analyse de la littérature scientifique en didactique des mathématiques a permis de mettre en lumière différents processus liés au RM. Un de ceux-ci est le processus généraliser. Généraliser est lié à conjecturer, prouver et justifier (Mason et al. 1994). L'exploration de la littérature afin de caractériser le terme généraliser de façon cohérente avec le RM a rapidement mené au processus d'abstraction (voir p. ex. Pedemonte 2002 ; Dreyfus 1991 ; ou encore Piaget 1977). Le développement de ces deux processus en classe du primaire et du secondaire est étudié par plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques. Toutefois, malgré la pléthore de recherches en didactique des mathématiques sur la généralisation et l'abstraction, le sens de ces deux processus et leurs liens conceptuels avec le RM restent ambigus. Comme il a été souligné par Davis et Hersh (1981) et White (1993), l'abstraction et la généralisation sont même parfois utilisées comme synonymes. Pour mieux comprendre le sens de ces deux processus et leur relation au RM, une recherche théorique supportée par l'anasynthèse (Legendre 2005) a été entreprise afin de proposer une conceptualisation de ces deux termes.

J'ai structuré ce texte en cinq sections. Dans un premier temps, je présente les assises méthodologiques qui ont guidé cette recherche théorique. Dans un second temps, j'élabore autour des assises théoriques sur lesquelles s'appuit la synthèse pour en aboutir à l'objectif de ce texte qui est d'explorer conceptuellement les processus généraliser et abstraire. Dans un troisième temps, l'analyse de la littérature autour de généraliser et abstraire est exposée. Dans un quatrième temps, je partage la réponse à l'objectif de ce projet, la synthèse théorique qui positionne ces deux termes (généraliser et abstraire) dans une perspective commognitive. Enfin, en conclusion, je discute de certaines implications.

I. L'ANASYNTHESE EN TANT QU'ASSISES METHODOLOGIQUES

La démarche méthodologique qui supporte cette théorisation est l'anasynthèse (Legendre 2005, voir figure 1). L'anasynthèse est un néologisme formé des mots analyse et synthèse.

> [Elle] est un cadre général qui permet de baliser l'analyse et la synthèse d'une pluralité de données conceptuelles ou empiriques pour la conceptualisation de modèles théoriques (Guay 2004, p. 19).

Premièrement, un corpus a été circonscrit à partir de bases de données et de mots-clés liés au RM et plus particulièrement, dans le cas de cette réflexion, liés à la généralisation et à l'abstraction. Des textes d'auteurs majeurs dans le domaine ainsi que des textes cités par des auteurs qui se sont penchés sur la généralisation et l'abstraction ont aussi été ajoutés au corpus s'ils n'étaient pas présents dans la première revue de la littérature. Comme le but de l'analyse est de mettre en lumière les convergences, les divergences et les potentialités entre les différents auteurs dans la littérature, le processus de constitution du corpus s'est arrêté lorsqu'aucune nouvelle information n'émergeait de l'analyse des textes.

Deuxièmement, des informations reliées aux aspects théoriques, axiologiques, praxiques et explicatifs sont extraites du corpus. À partir de ces informations, une synthèse est ensuite écrite. Cette dernière met en évidence les convergences, les différences et les potentialités entre les différents auteurs. Enfin, un modèle est proposé qui met en lumière les différentes caractéristiques des termes généraliser et abstraire dans une perspective commognitive. Des boucles de rétroaction permettent d'éclairer l'élaboration du modèle tout au long de la démarche. Ces boucles sont déclenchées par, entre autres, l'émergence de nouvelles informations, les commentaires lors de la présentation du prototype, une mise à l'épreuve de l'argumentation.

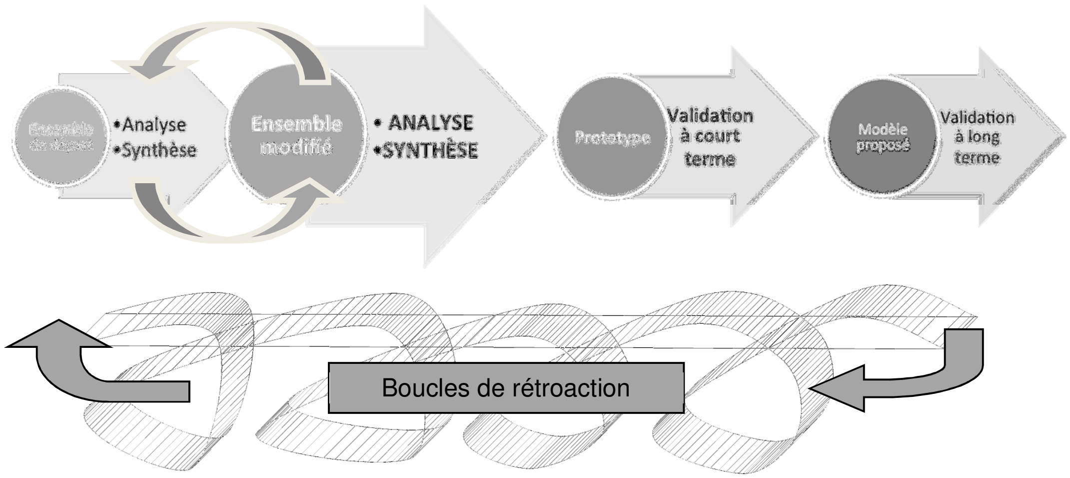


Figure 1 *- la démarche d'anasynthèse (tiré de Jeannotte 2015)*

II. LA COMMOGNITION EN TANT QU'ASSISES THEORIQUES

Le cadre utilisé pour explorer les processus de généralisation et d'abstraction est la commognition développée par Sfard (2008, 2012). Ce choix a deux principales implications. Premièrement, pour un chercheur commognitif, le développement de la recherche est équivalent au développement du discours scientifique. Un chercheur doit construire à partir du travail d'autres chercheurs en visant le développement d'un discours commun. De ce fait, cette étude s'appuie sur la littérature en didactique des mathématiques qui s'intéressent à la généralisation et à l'abstraction. Ce corpus permet de construire à partir du discours scientifique déjà construire par la communauté de didactique des mathématiques. Il ne s'agit donc pas d'un modèle de ce qu'on retrouve comme différents sens dans cette communauté. Ainsi, le modèle proposé a ses propres assises théoriques (la commognition).

Deuxièmement, pour un chercheur commognitif, les mathématiques (ou la pensée mathématique) sont un discours, c'est-à-dire, un type particulier de communication. Cette communication ne se limite pas non plus aux interactions langagières. En fait, tout acte de communication est une composante du discours mathématique : langage corporel, indices contextuels, histoire des interlocuteurs. Il y a deux niveaux de discours, le niveau objet et le niveau méta. Le niveau objet est un discours qui porte sur les objets de ce discours. Le second type de discours est celui de niveau méta. Le discours dit « de niveau méta » est un discours qui porte sur un autre déjà existant. Par exemple, Sfard (2008) considère l'algèbre élémentaire comme un discours qui subsume l'arithmétique. L'algèbre élémentaire est alors vue comme un méta discours. Comme le discours est récursif, l'algèbre élémentaire devient ensuite un discours en soi sur lequel on peut de nouveau porter un regard méta, et ainsi de suite. Ce type de discours met en lumière le deuxième élément caractéristique du discours mathématique que Sfard (2002) souligne, c'est-à-dire, les règles métadiscursives qui le régissent. Ces règles métadiscursives sont ce qui permet qu'il y ait communication effective, et sont, selon Sfard (2002), le véhicule premier de la culture mathématique. Ces règles sont rarement explicitées. Sfard donne comme exemple, de ces règles métadiscursives, les façons dont on définit et prouve en mathématique.

Le développement d'un discours mathématique (donc des mathématiques) correspond à un changement de ce discours. Deux sortes de développement de discours sont possibles : le développement de niveau objet et le développement de niveau méta. D'un côté, le développement de niveau objet réfère à une extension du discours existant[1] à propos d'objets mathématiques déjà construit. De l'autre, le développement méta du discours réfère à la construction d'un nouveau discours en changeant les règles du jeu mathématique, construisant ainsi de nouveaux objets mathématiques. Cette distinction entre le développement de niveau objet et de niveau méta sera cruciale pour la distinction entre les processus généraliser et abstraire. Ceci demande un petit détour quant à ce qui est entendu par objet mathématique. Sfard définit l'objet discursif comme suit :

> The (discursive) objet signified by S (or simply object S) in a given discourse on S is the realization tree of S within this discourse » (Sfard, 2008, p.166).

Elle précise cette définition en 2012:

> a mathematical object can be defined as a mathematical signifier together with its realization tree, where the realization tree is a hierarchically organized set of all the realizations of the given signifier, together with the realizations of these realizations, as well as the realizations of these latter realizations, and so forth (Sfard 2012, p. 4).

Une autre distinction importante concerne ce qui est entendu ici par RM et par pensée mathématique. D'un point de vue commognitif, le RM est un processus métadiscursif qui dérive des énoncés à propos d'objets ou de relations mathématiques en explorant les relations qui les unissent (Jeannotte 2014, 2015). Ce processus est organisé en une certaine structure qui est contingentée par des règles discursives partagées et est porteur d'une valeur épistémique. Le RM peut alors avoir une fonction de systématisation. Ainsi, le RM étend un discours à propos d'objets mathématiques déjà existant. Il permet donc un développement de niveau objet. Pour sa part, tel que stipulé précédemment, la pensée mathématique est synonyme de discours mathématique. La pensée mathématique est composée d'un vocabulaire particulier, de médiateurs, d'énoncés généralement acceptés, de routines. La pensée mathématique est davantage que le RM. Le RM est un type de processus de pensée mathématique contribuant au développement des mathématiques par l'inférence de nouveaux énoncés.

L'objectif est donc ici d'explorer les concepts de généralisation et d'abstraction dans la littérature en didactique des mathématiques et de les caractériser d'un point de vue commognitif ainsi qu'à la lumière de la définition de RM précédemment exposée afin d'éclairer les différents liens qu'ils entretiennent avec le RM.

III. GENERALISATION ET ABSTRACTION DANS LA LITTERATURE

Malgré que ces deux processus sont souvent considérés comme interreliés, chacun est présenté séparément afin de souligner les caractéristiques de chacun.

1. *La généralisation*

Pour G. J. Stylianides (2005) et Artzt (1999), raisonner mathématiquement, c'est généraliser et construire des conclusions valides. Généraliser est donc, pour ces deux auteurs, un processus central de RM et complémentaire à celui de construire des conclusions valides. Pour Mason (1996), la généralisation est « the heartbeat of mathematics, and appears in many forms » (p. 65). Elle peut mener à ce qui est plausible, pourquoi cela semble plausible et là où cela est plausible (Mason et al. 1994). Cette idée de plausibilité nous mène à Pólya (1968) et

[1] On peut ici distinguer développement de niveau objet (ou méta) de discours de niveau objet (ou méta). Par exemple, un discours de niveau méta peut permettre un développement de niveau objet. C'est le cas du raisonnement mathématique (voir Jeannotte 2015).

son livre sur le raisonnement plausible. Repris par plusieurs auteurs tels Pedemonte (2002) et Stylianides (2005), Pólya définit le processus généraliser comme « passing from the consideration of a given set of objects to that of a smaller set, contained in the given one » (1968 p. 13). Un élément qui apparait important dans cette définition est le terme passage. La définition de Pólya est similaire à celle de Dreyfus (1991) qui caractérise la généralisation comme un processus qui va plus loin que le particulier, qui identifie des similitudes et qui étend le domaine de validité d'un énoncé. White (1993) réfère à la recherche d'invariant, applicable à un ensemble d'objets. Similairement, Ellis (2007) définit la généralisation comme

> an activity in which people in specific socio-mathematical contexts engage in at least one of three actions: (a) identifying commonality across cases, (b) extending one's reasoning beyond the range in which it originated, or (c) deriving broader results from particular cases (p. 311).

Ellis élargit l'idée d'ensemble d'objets en incluant n'importe quelle extension d'une idée à un phénomène. Ellis (2011) considère que l'observation des interactions entre élèves, ou entre élèves et enseignants, permet d'étudier le développement du processus de généralisation puisque ce dernier se construit, selon elle, par le biais des interactions. Celui-ci, qui a un aspect dynamique et statique, serait fortement dépendant du contexte, de l'histoire des élèves, de leurs interactions et des artéfacts disponibles.

Pour Kaput (1999),

> generalization involves deliberately extending the range of reasoning or communication beyond the case or cases considered, explicitly identifying and exposing commonality across cases, or lifting the reasoning or communication to a level where the focus is no longer on the cases or situations themselves but rather on the patterns, procedures, structures, and the relations across and among them (which, in turn, become new, higher-level objects of reasoning or communication) (Op. cite, p. 136).

La première partie de la définition de Kaput fait référence à un processus qui étend les énoncés précédemment inférés à un plus grand domaine de validité, tout comme souligné par les autres auteurs cités, et ne nécessitent donc pas de construire de nouveaux objets au sens où cette structure, qui est mise au jour, table sur des objets mathématiques qui font déjà partie du discours. On pourra dès la prochaine section lier la seconde partie de la définition de Kaput à un processus d'abstraction.

Pour Cañadas et al. (2007),

> generalizing the conjecture involves a change in what Duval (1990) calls its 'epistemic value', from a possible conjecture to an accepted general rule. This is a change in what is believed about the statement (Op. cite, p. 64).

De l'analyse des textes portant sur la généralisation en didactique des mathématiques, plusieurs éléments peuvent être retenus pour caractériser « généraliser » en tant que processus de RM. Dans le corpus analysé[2], le processus de généralisation est parfois lié à l'expansion du domaine de validité d'un énoncé, parfois à la construction d'un énoncé de nature générale à partir d'un ou deux cas. De même, cette analyse illustre comment l'idée de transformation apparait sous différentes formes dans la littérature sur la généralisation à travers les expressions *passage, extension, going further, change*. Mais, on peut se demander en quoi une telle transformation est-elle liée à l'abstraction en particulier et au RM en général d'un point de vue commognitif.

[2] Il ne faut pas oublier que le corpus original est composé de textes intéressés au RM.

2. *L'abstraction*

Dans les textes sur le RM, des auteurs spécifient que le processus de RM se fait sur des objets abstraits, ou encore sur des concepts abstraits : « [M]athematical reasoning requires that young children recognize how a given term (or object or symbol) represents some abstract concept that is not directly conveyed » (English 2004, p. 16). Soulignons ici que le terme abstrait est associé à l'objet et non au processus en soi. Cet élément a une importance dans la définition de l'abstraction et, à certains moments, il est difficile de comprendre, comme dans la définition d'English (2004), si l'abstraction est un processus ou une qualité d'un objet mathématique. Le glissement entre ces deux sens de l'abstraction pourrait nuire à l'interprétation de certains résultats. Pour Duquesne (2003), les raisonnements se construisent à partir d'éléments familiers, mais ces éléments deviennent de plus en plus indépendants de la réalité, de *plus en plus abstraits*. Encore ici, l'abstraction est associée aux objets mathématiques. Toutefois, l'idée de processus (déroulement dans le temps) est présente. Pour Peressini et Webb (1999), l'abstraction est un mode de RM tout comme l'induction, la déduction, le raisonnement proportionnel et le raisonnement spatial. English (2004), pour sa part, mentionne que

> despite the definitional variations in the literature, there appear to be basic processes that underlie mathematical reasoning, as Dreyfus and Eisenberg (1996) posited. Those basics include quantification, patterning, abstraction and generalisation, and representation and translation (Op. cite, p. 35).

Ces différents auteurs associent clairement « abstraction » et « processus ». Mentionnons toutefois qu'English utilise, pour parler du RM, des propos qui sont plutôt liés à la pensée mathématique par Dreyfus et Eisenberg (1996). Même si certains auteurs associent RM et abstraction, très peu d'éléments théoriques sont fournis quant aux sens qui sont accordés à ce concept. Ceci a nécessité l'ouverture du corpus à une littérature plus large et hétéroclite. Dans ce nouveau corpus, l'abstraction est mise en relation, entre autres, avec les mathématiques ou la pensée mathématique.

L'abstraction est fréquemment associée à la création de concepts qui ne fait référence à aucun objet concret ou tangible (Sfard 2008). C'est aussi associé avec l'isolation d'attributs spécifiques dans le sens d'être en mesure de les considérer indépendamment d'autres attributs. Pour Mason (1989), l'abstraction est un « delicate shift of attention from seeing an expression as an expression of generality, to seeing the expression as an object or property » (p. 2). Mais ce déplacement n'est pas le passage dont fait mention Pólya (1968) dans le processus de généralisation. Mason situe l'abstraction dans la transition de l'action d'exprimer une généralisation à l'action d'utiliser et manipuler cette généralité pour construire un argument mathématique. Mason souligne l'importance d'ignorer certains éléments pour permettre de mettre la structure au jour et pouvoir la manipuler. Dans un même ordre d'idées, Dreyfus (1991) considère l'abstraction comme un processus mental qui permet d'isoler des relations entre les objets et les propriétés d'objets. D'un point de vue cognitiviste, Gray et Tall (2007) définissent l'abstraction comme un processus de création d'images mentales et mène à la création de concepts mathématiques. L'approche qui a été privilégiée ici est plutôt l'approche commognitive (Sfard 2008) et nécessite donc une nouvelle conceptualisation du concept d'abstraction se rapportant au RM qui prend en compte la nature commognitive de ce processus.

En fait, Noss et Hoyles (1996) qualifient ces visions de l'abstraction de classique,

> one of decontextualisation, a process of extricating the mathematics from the problem, removing it from action to cognition (op. cité, p. 19).

Ces derniers remettent cette vision en question.

> Where can meaning reside in a decontextualised world? If meanings reside only within the world of real objects, then mathematical abstraction involves mapping from one world to another, meaningless, world (Noss & Hoyles 1996, p. 21).

Ils proposent alors une vision où le processus d'abstraction est défini comme un processus de connexions plutôt que d'isolation et d'ascension. Le processus d'abstraction est un processus qui demande à l'élève de construire une multitude de liens entre différentes expériences similaires (Noss & Hoyles 1996). Enfin, tout processus d'abstraction est situé : « We intend by the term situated abstraction to describe how learners construct mathematical ideas by drawing on the webbing of a particular setting which in turn, shapes the way the ideas are expressed » (p. 122). Déjà, la vision de Noss et Hoyles (1996) est plus compatible avec l'approche commognitive en prenant en compte l'aspect socioculturel du processus.

Même si le processus d'abstraction n'est pas encore compris selon eux, Ohlsson et Lehtinen (1997) soutiennent que ce n'est pas un processus qui classifie le monde selon des similitudes comme le fait le processus de généralisation. C'est un processus qui rend les connaissances davantage complexes. Dans le même sens, Schwarz, Dreyfus et Hershkowitz (2009) ont développé le cadre *nested epistemic actions model of abstraction in context* pour étudier le développement du processus d'abstraction. Ils ont défini l'abstraction

> as an activity of vertically reorganizing previous mathematical constructs within mathematics and by mathematical means so as to lead to a construct that is new to the learner » (p. 24).

Dans ce cadre, l'abstraction amène une nouvelle cohérence dans l'organisation des connaissances. De même, le contexte (social, historique, ontologique) est un important aspect de leur cadre.

IV. UNE PERSPECTIVE COMMOGNITIVE

1. *La généralisation d'un point de vue commognitif*

Que peut-on tirer de cette synthèse ? L'idée de transformation apparait sous différentes formes dans la littérature sur la généralisation et ne semble pas nécessiter la création de nouveaux objets mathématiques. Les aspects « inférence » et « expansion » apparaissent comme importants dans la littérature. L'expansion du domaine de validité d'un énoncé et la construction d'un énoncé de nature générale à partir d'un ou deux cas sont souvent posées comme un résultat de ce processus. D'un point de vue commognitif, on peut lier le processus de généralisation au RM puisqu'il est clairement associé à l'inférence et au discours, sans qu'il y ait nécessairement création d'un nouveau discours incommensurable avec le premier. Étendre le domaine de validité d'un énoncé n'amène pas un changement au niveau des règles du discours. Les objets en jeu lors du processus de généralisation existent déjà, d'un point de vue commognitif. La généralisation est alors, d'un point de vue commognitif, un processus qui infère un énoncé à propos d'un ensemble d'objets mathématiques ou d'une relation entre différents objets de cet ensemble à partir d'un ensemble plus restreint d'objets contenus dans ce premier. La généralisation est un processus discursif qui étend un discours mathématique sans en changer les règles. Il s'agit donc d'un discours de niveau méta qui permet un développement discursif de niveau objet. De même, contrairement à ce que soulignent Cañadas et al. (2007), il n'y a pas de changement de valeur épistémique associé au processus de généralisation. D'étendre une relation d'un cas à un ensemble plus large ne change pas la valeur épistémique de cette relation. Ce processus peut donc mener à un énoncé vraisemblable, mais aussi certain. La valeur épistémique de l'énoncé n'a pas à être nécessairement vraie. Enfin, soulignons que le terme « généraliser », lorsqu'utilisé en tant que processus de RM, n'est pas ce qui est entendu par Piaget (1977, "Fondation Jean Piaget",

2014) par généralisation constructive. On peut donc dire qu'un processus de généralisation est un processus de RM lorsqu'il n'y a pas construction d'un nouvel objet mathématique, puisqu'un processus de RM est posé ainsi.

2. *L'abstraction d'un point de vue commognitif*

L'idée de rendre les connaissances plus complexes, qui a émergé de l'analyse de la littérature en didactique des mathématiques, peut être liée à un développement de niveau méta du discours mathématique. Mais alors, comment parler d'abstraction dans une approche commognitive et comment situer ce processus dans un modèle de RM? Sfard (2008) circonscrit ces deux processus, raisonnement et abstraction, en les reliant à des objets commognitifs, c'est-à-dire l'ensemble des réalisations de cet objet dans un discours donné. En d'autres mots, l'abstraction est un processus commognitif de création de concepts. D'un point de vue commognitif, ceci demande de déritualiser et d'objectiver un discours qui existe déjà afin d'en créer un nouveau.

> L'objectivation est a discursive process of double elimination, which results in freeing the evolving narratives from the extension in time and from human agency (Sfard 2008, pp.51-52),

à savoir réifier et aliéner, éléments précédemment soulignés par Mason (1989). Ceci demande donc un va-et-vient entre le discours sur les objets et le discours sur le discours (métadiscours). On retrouve ici cette idée de changement, de passage présent chez d'autres auteurs. Comme Ohlsson et Lehtinen (1997) prétendent, le processus d'abstraction d'un point de vue commognitif mène au développement d'une structure de connaissances qui est plus complexe que l'ensemble de ses composantes, qui est donc incommensurable avec l'ancien discours. Ceci peut être traduit en terme commognitif comme un changement dans les règles du jeu et la construction de nouveaux objets mathématiques. Ceci demande des aller-retour entre des discours de niveau objet et des discours de niveau méta. L'objectification est

> a discursive process of double elimination, which results in freeing the evolving narratives from the extension in time and from human agency (Sfard 2008, pp. 51-52),

c'est-à-dire par réification et aliénation. Il y a donc ici une distinction importante entre le RM (et plus particulièrement, la généralisation) et l'abstraction en tant que processus qui pourrait permettre de mieux comprendre l'apprentissage des élèves.

V. CONCLUSION

D'un point de vue commognitif, la principale différence entre le processus de généralisation et le processus d'abstraction en est une discursive. La généralisation mène à une extension du discours. Il y a une cohérence entre le discours existant et les énoncés développés par le processus de généralisation. Aucune règle du jeu n'est changée, uniquement de nouvelles informations à propos d'objets déjà construits sont inférées. Par exemple, on retrouve dans Kaput (1999) un exemple du processus (de RM) « généraliser ». Dans cet exemple, des élèves d'une classe du primaire ont observé que 3x12 = 12x3. Ils se demandent si 4x9 = 9x4 puis si cette relation est toujours vraie. Après avoir exploré d'autres cas et observé que cette relation est vraie pour plusieurs, ils étendent cette relation à tous les nombres. Si l'on se concentre sur le processus « généraliser » ici, c'est en inférant à partir de l'observation de cette relation sur plusieurs cas qu'ils sont en mesure d'étendre la relation à tous les nombres.

Le processus d'abstraction mène pour sa part à un nouveau discours, à de nouvelles règles du jeu. L'ancien discours semble limité, même désuet à partir de ce nouveau point de vue. Au cœur du questionnement, on peut se demander quel rôle est joué par le RM dans le processus d'abstraction. Évidemment, le processus d'abstraction peut impliquer à certains moments des processus de raisonnements, mais celui-ci sera local et ne pourrait à lui seul permettre de comprendre l'ensemble du processus d'abstraction, ce passage à un nouveau discours, avec de nouvelles règles et de nouveaux objets. L'abstraction peut être décrite comme un processus qui se développe par plusieurs cycles d'individualisation de discours interpersonnel et de (re)communication.

Parce que généralisation et abstraction sont liées au RM dans la littérature en didactique des mathématiques, la perspective commognitive adoptée pour cette théorisation peut avoir un impact sur le discours scientifique en lien avec le RM et la pensée mathématique. En effet, cette perspective mène à concevoir généraliser comme un processus de RM mais à rejeter abstraire comme processus deRM, l'abstraction menant à un développement de niveau méta. Bien que généraliser et abstraire puissent être considérés comme des processus de pensée mathématique et qu'un peut influencer l'autre, on ne peut subsumer l'un et l'autre.

REFERENCES

Artzt A. F. (1999) Mathematical reasoning during small-group problem solving. In Stiff L. V., Curcio F. R. (Eds.) *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 Yearbook* (p. 115–127). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cañadas M. C., Deulofeu J., Figueiras L., Reid D. A., Yevdokimov O. (2007) The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning* 5(1), 55-72.

Davis P., Hersh R. (1981) *The mathematical experience.* Boston. MS: Birkhäuser

Dreyfus T. (1991) Advanced mathematical thinking processes. In Tall D. (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus T., Eisenberg T. (1996) On different facets of mathematical thinking. In Sternberg R. J., Ben Zeev T. (Eds.) *The nature of mathematical thinking* (pp. 253–284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duquesne F. (2003) *Apprendre à raisonner en mathématiques à l'école et au collège* (2e éd.). Suresnes, France: Éditions du Centre national d'études et de formation pour l'enfance inadaptée.

Ellis A. B. (2007) Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education* 38(3), 194-229.

English L. D. (2004) *Mathematical and analogical reasoning of young learners*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gray E., Tall D. (2007) Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal* 19(2), 23-40.

Jeannotte D. (2014) Processes of mathematical reasoning : Framing from math educator discourses. In Liljedahl P., Nicol C., Oesterle S., Allan D. (Eds.) *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. 6, p. 117). Vancouver, BC.

Jeannotte D. (2015) Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire. (Thèse de doctorat non publié). Université du Québec à Montréal.

Legendre R. (2005) *Dictionnaire actuel de l'éducation* (3d éd.). Montréal, QC: Guérin.

Mason J. (1989) Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics* 9(2), 2-8.

Mason J. (1996) Expressing generality and roots of algebra. In Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.), *Approches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). The Netherland: Kluwer.

Mason J., Burton L., Stacey K. (1994) *Thinking mathematically.* Essex, UK: Addison-Wesley.

Ohlsson S., Lehtinen E. (1997) Abstraction and the acquisition of complex ideas. *International Journal of Educational Research* 27(1), 37-48.

Piaget J. (1977) Recherches sur l'abstraction réfléchissante: L'abstraction des relations logico-arithmétiques. *Études d'Épistémologie Génétique* 34, 5-147.

Pólya G. (1968) *Mathematics and plausible reasoning* (2 ed. Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Noss R., Hoyles C. (1996) *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*. The Netherland: Kluwer Academic.

Pedemonte B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. (Thèse de doctorat non publiée). Université Joseph Fourier, Grenoble.

Peressini D., Webb N. (1999) Analyzing mathematical reasoning in students' responses across multiple performance assessment tasks. In Stiff L. V., Curcio F. R. (Eds.) *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 156–174). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reid D. A. (2002) Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 33(1), 5–29.

Schwarz B., Dreyfus T., Hershkowitz R. (2009) The nested epistemic actions model for abstraction in context. In Schwarz B., Dreyfus T., Hershkowitz R. (Eds.) *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 11-41). New York: Routledge.

Sfard A. (2002) There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics* 46(1-3), 13–57.

Sfard A. (2008) *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Sfard A. (2012) Introduction: Developing mathematical discourse - Some insights from communicational research*.* *International Journal of Educational Research*, 51-52, 1-9.

Stylianides G. J. (2005) *Investigating students' opportunities to develop proficiency in reasoning and proving: A curricular perspective.* (Thèse de doctorat non publiée) University of Michigan.

White H. (1993) *Étude exploratoire relative à la "pensée mathématique" chez de futurs enseignants et enseignantes.*(Thèse de doctorat non publiée). Québec : Université Laval.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE DANS LE CURRICULUM TUNISIEN : ANALYSE ÉPISTEMOLOGIQUE ET INSTITUTIONNELLE

Rahim KOUKI* – Slimane HASSAYOUNE**

Résumé : Ce texte vise à présenter les résultats d'une étude didactique sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au début du cycle secondaire tunisien.

Deux analyses didactiques y sont menées : l'une, historique et épistémologique, porte sur l'évolution diachronique des praxéologies algébriques dans les trois champs conceptuel, syntaxique et sémiotique ; et l'autre, institutionnelle, est consacrée à l'exploration des programmes et des manuels scolaires pour en décrypter les visées et les caractéristiques didactiques.

Les principaux enseignements didactiques dégagés de cette étude nous invitent à privilégier les approches de modélisation *in situ*, la construction des concepts algébriques en étroite relation avec leur fonctionnalité procédurale et la mobilisation des techniques opératoires en contexte.

Mots-clés : Praxéologie algébrique, rapport institutionnel, champ conceptuel, champ syntaxique, champ sémiotique

Abstract: This text aims to present the results of a didactics study in algebra at the beginning of the secondary Tunisian school.

Two training analyzes carried out there: one, historical and epistemological concerns the diachronic evolution of algebraic praxeologies in the three conceptual, syntactic and semiotics fields; and the other institutional, is dedicated to the exploration of the programs and textbooks to decipher the aims and didactics characteristics.

The main didactic lessons learned from this study invite to focus on the *in situ* modeling approaches, building a close relationship with their algebraic functionality, procedural concept and the mobilization of operative techniques. This opens up new research perspectives oriented towards deepening established facts and operation through a didactic and curricular engineering.

Keywords: Algebraic praxeology, institutional relationship, conceptual field, syntactic field, semiotic field.

I. OBJET ET CADRE DE LA RECHERCHE

De nombreux travaux didactiques tunisiens se sont intéressés à l'enseignement / apprentissage de l'algèbre ainsi qu'à ses aspects épistémologiques et didactiques très particuliers qui font de lui un important domaine unificateur des mathématiques. En effet, les aspects sémiotiques et syntaxiques, la modélisation des situations et les interactions entre les cadres algébrique, numérique et graphique, ont été sujets à des travaux d'investigation multiples parmi lesquels nous pouvons citer ceux de Kouki (2006), Ben Nejma (2006) et Achour (2005). Ce travail

Kouki R., Hassayoune S. (2015) Développement de la pensée algébrique dans le curriculum tunisien : analyse épistémologique et institutionnelle. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 290-312.

s'inscrit dans la lignée de ces recherches et aspire à fournir d'autres éclairages sur la nature des praxéologies algébriques visées par les programmes de la première année secondaire en Tunisie (15-16 ans). Pour ce faire, nous envisageons de rapporter les résultats d'une analyse épistémologique portant sur les principales phases historiques de l'émergence de l'algèbre d'une part, et d'une investigation institutionnelle réalisée par l'étude des programmes et des manuels scolaires ayant eu cours depuis les années soixante-dix (époque des mathématiques modernes) de ce même domaine de savoir, d'autre part.

L'algèbre élémentaire telle qu'elle est enseignée au deuxième cycle de l'enseignement de base (13-15 ans) et au début de l'enseignement secondaire tunisien (15-16 ans) se manifeste à travers deux champs praxéologiques principaux :

- Le calcul algébrique : développement, réduction, factorisation d'expressions numériques et littérales.
- La résolution de problèmes : analyse, modélisation (mise en équation, en inéquation, en système, en fonction), résolution, validation des solutions.

Son enseignement pose des problèmes cruciaux notamment aux niveaux :

- des compétences à développer chez les élèves.
- des choix didactiques à adopter dans les activités d'enseignement/apprentissage et
- de la complexité de son système sémiotique.

Dans un premier temps, nous délimitons les contours du domaine de l'algèbre élémentaire par une analyse épistémologique et historique de sa genèse. Ensuite, nous explorons les pratiques antérieures et actuelles de son enseignement, en vue de déterminer les compétences attendues des différents projets didactiques et les éventuelles difficultés rencontrées au cours des apprentissages.

Le cadre théorique dans lequel nous nous plaçons est celui de *la théorie anthropologique du didactique* initiée par Chevallard (1992). Ce cadre, assez général et opérationnel, nous semble convenir parfaitement à ce que nous comptons entreprendre et, *a priori*, s'adapte bien à nos outils et méthodes d'investigation. Ceci a l'avantage de nous aider dans notre entreprise diagnostique et favorise la production d'alternatives de remédiation aux difficultés rencontrées par les élèves dans le processus enseignement/apprentissage de l'algèbre élémentaire.

II. GENÈSE DU SAVOIR-SAVANT : *AL-JABR*.

Qu'est-ce que l'algèbre ? Quelle est son origine ? Quel est son rapport avec l'arithmétique ? Quels problèmes permet-elle de résoudre ? La réponse à ces questions doit tenir compte des phénomènes accompagnant l'évolution et le développement des théories mathématiques sous-jacentes ou mises en jeu et des obstacles rencontrés et de la manière dont ils ont été franchis.

Au cours de la haute antiquité, l'algèbre paléo-babylonienne (XVIII^{e} av. J.C) était caractérisée par des algorithmes de calcul généralisables hors contexte métrologique et par l'apparition des premières techniques algébriques fondées sur une bonne maîtrise du sens des nombres, de leurs notations métrologique et positionnelle et de leurs usages dans la résolution des problèmes scolaires (au profit des apprentis-scribes) et de la vie courante (Proust 2006). Ainsi, les praxéologies mobilisées au cours de cette période sont essentiellement algorithmiques sous-tendues par des types de tâches calculatoires stéréotypés appelant la mobilisation de techniques mécaniques calquées sur des exemples génériques. Tout se fait par imitation et application à la lettre des procédures arrêtées sans aucune démonstration ni justification apparentes, preuve d'une vraisemblable absence de technologie ou de théorie algébrique sous-jacente, du moins dans ce qui nous est parvenu à travers les traces archéologiques déjà étudiées[1].

Les Grecs (III^{e} Av. J.C) ont eu ensuite une influence spécifique sur le développement des premières procédures algébriques initiées par leurs ancêtres les mésopotamiens grâce à la rigueur du raisonnement qu'ils ont instaurée et par l'étayage géométrique des propriétés numériques accompagnant l'essor de la géométrie euclidienne (Abgrall 2011-2012). Ainsi, les praxéologies développées sont donc essentiellement fondées sur des types de tâches de calcul de grandeurs géométriques nécessitant la mobilisation de techniques de transformations d'aires justifiées par des blocs technologico-théoriques relatifs aux grandeurs et aux mesures. Le champ conceptuel et cognitif, déjà bien installé en géométrie grâce aux apports théoriques des *Éléments d'Euclide*, contient implicitement les concepts algébriques qui ne seront découverts que douze siècles plus tard par les mathématiciens arabes par un changement de cadre, amorcé par Al-Khwârizmî. Le champ syntaxique évolue parallèlement aux progrès réalisés dans le domaine du langage courant. Dans cette *algèbre rhétorique*, ni les opérations ni les inconnues ne sont représentées par des symboles, tout est écrit et communiqué verbalement en langue naturelle.

Plus tard, l'introduction de l'inconnue opérationnelle (*arithme*) - notée ς et signifiant la quantité indéterminée d'unités- par Diophante d'Alexandrie (III^{e}), a permis d'insuffler un nouvel élan au processus de résolution des problèmes en les modélisant par des écritures symboliques. Cette façon de procéder favorise un changement conceptuel dans les activités de résolution de problèmes. Le langage construit par la symbolisation de *l'arithme* et des diverses catégories de nombres[2], conjuguée à une syntaxe convenable, a permis à Diophante de traduire les problèmes posés à l'aide d'expressions algébriques se prêtant au calcul formel sur les *espèces (monômes)* et qui aboutissent à des équations réduites donnant la valeur de l'inconnue opérationnelle et, par suite, celles des inconnues cherchées (Radford 1991, pp. 2-4). Les praxéologies algébriques ainsi mobilisées sont articulées autour des types de tâches de résolution de problèmes nécessitant pour leur réalisation des techniques de modélisation à l'aide des inconnues opérationnelles et de manipulations d'écritures formelles sur les *arithme* . Des éléments technologiques transparaissent implicitement dans la démarche pré-algébrique diophantienne mais sans aucun support théorique notable. Les deux champs syntaxique et sémiotique se trouvent donc sensiblement enrichis, permettant ainsi une évolution importante des processus algébriques déployés.

Mais en fait et de l'avis d'éminents historiens des mathématiques (Rached 1984, Djebbar 2005), le mot *algèbre* provient du terme arabe *al-jabr* qui signifie en médecine réparation ou restauration d'une fracture. Il a été utilisé, dans *Al-kitâb al-mukhtasar f'il jabr w'al-muqâbala* (Le livre abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison), un important ouvrage écrit au début du IX^{e} siècle par Mûhammad Ibn Mûssa Al-Khwârizmî (780-850). Dans ce traité, l'expression arabe *al-jabr* (la restauration) désigne l'opération qu'on fait subir à l'équation du second degré pour en supprimer les termes précédés d'un signe *moins*, alors qu'*al-muqâbala* signifiait la réduction de termes de même degré dans une équation quadratique. C'est à partir du IX^{e} siècle que l'algèbre devient progressivement, l'art de réduire et de résoudre les équations, puis la science des expressions algébriques et enfin la résolution de tous types

[1] Høyrup (2002) considère qu'en fait, ces praxéologies ne sont pas de pures recettes découvertes par hasard et qu'elles sont guidées par des raisonnements géométriques, développés plus tard par les mathématiciens grecs et arabes.

[2] Diophante introduit et symbolise une nouvelle catégorisation des nombres en notant : Δ^{γ} (carré), K^{γ} (cube), $\Delta^{\gamma}\Delta$ (carré-carré ou bicarré), ΔK^{γ} (carré-cube), $K^{\gamma}K$ (cubo-cube).

d'équations. Cette nouvelle science simplifie et unifie les techniques anciennes de résolution des problèmes posés par la vie quotidienne des gens sédentarisés et vivant en société. Il apparaît donc que les problèmes de la vie courante comme ceux d'héritage, d'arpentage, de construction en briques etc. sont les vraies origines de ces équations et des manipulations dont celles-ci sont l'objet. Étayées par les savoirs géométriques de l'époque, les procédures utilisées par Al-khwârizmî ont ainsi permis à la pensée algébrique de progresser en matière de modélisation et de manipulation de modèles.

Après avoir pris connaissance de la traduction arabe du traité d'arithmétique de Diophante, Al-Karâjî (953-1029) utilise les concepts et lexiques algébriques *shay* (chose), *mâl* (carré) et *kaab* (cube) créés par AL-Khwârizmî pour appliquer l'arithmétique aux expressions algébriques et résoudre les problèmes à l'aide de l'algèbre de Diophante. Al-Karâjî et son disciple Al-Samaw'al (1130-1175) introduisent les polynômes sous la forme de tableaux et explicitent les opérations usuelles sur ces tableaux.

Abdeljaouad (2002) précise que :

> La multiplication d'indices attestant la présence de symboles algébriques dans les traités maghrébins d'arithmétique indienne, nous confirme dans l'hypothèse d'une origine maghrébine des symboles algébriques, apparus comme conséquence logique de l'inclusion de l'algèbre comme chapitre complémentaire aux traités de hisâb al-ghubâr. (Op. cité, p.22)

Ce symbolisme algébrique permet de représenter le nombre connu *'adad* noté : ـعـ, l'inconnue *shay* notée : ـشـ, son carré *mâl* noté : ـمـ, son cube *kaab* noté : ـكـ, la quatrième puissance de l'inconnue (c'est-à-dire le carré du carré) notée : ـمـمـ et les termes : égal *ya'dilû* noté : ـلـ, soustraction *illa* noté : لا comme le montrent les fac-similés suivants illustrant le lexique sémiotique utilisé par les algébristes maghrébins du XIVe :

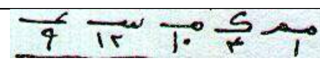
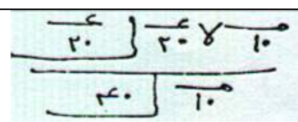
(26b)[3]		$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$
(63b)[4]		$10x^2 - 20 = 20$ $\longrightarrow 10x^2 = 40.$

Tableau1 *- Fac-similés (Abdeljaoued 2002, p.26)*

Ce symbolisme se retrouve adopté par un certain nombre de mathématiciens européens, comme dans le manuscrit anonyme du XVe siècle, intitulé *Liber Restaurationis.* Son auteur consacre un paragraphe à la présentation d'un symbolisme algébrique en l'adaptant à l'écriture et à la langue latine (Moyon 2005). Il donne un exemple où le nombre (dragme) est représenté par *d*, l'inconnu (radicis) par *r* et le carré de l'inconnu (census) par *c*.

Dans son traité *Art analytique ou Algèbre nouvelle*, François Viète (1540-1603) introduit une véritable algèbre littérale, avec ses symboles, ses procédés calculatoires, ses transformations particulières et sa pensée spécifique (Boyé 2003, Guichard 2000). Un des principaux avantages de la méthodologie analytique de Viète est l'obtention de formules générales et applicables à plusieurs situations, caractérisées par l'usage des paramètres littéraux, ce qui permet de conserver la trace de toutes les étapes du raisonnement et de se retrouver facilement lorsque l'on procède à un changement quelconque de ces paramètres. L'activité entreprise ne se réduit donc pas à la résolution d'un problème particulier, c'est plutôt une famille entière de situations qui se trouvent résolues par ce procédé. De plus, cette avancée dans l'évolution des praxéologies algébriques est illustrée par un processus tout à fait

---

[3] Folio du manuscrit de Jerba (Abdeljaoued 2002, p.26)
[4] Ibid.

nouveau et efficace de résolution de problèmes dans différents domaines des mathématiques (arithmétiques, géométriques, trigonométriques, fonctionnels, combinatoires etc.)

Viète a le mérite de développer l'algèbre en tant qu'outil au service de la résolution des problèmes, mais il montre par la même occasion qu'algèbre et résolution de problèmes (*analyse ou art analytique*) sont imbriquées au point de se confondre. En effet le développement de l'une favorise celui de l'autre, voire nécessite celui de l'autre, c'est la signification du titre donné à son œuvre *Introduction à l'art analytique ou algèbre nouvelle.*

Poursuivant l'élan donné par Viète, Descartes propose une méthode d'algébrisation de la géométrie, dans l'ouvrage intitulé *La Géométrie* et publié en 1637, il annonce :

> Par la méthode dont je me sers, tout ce qui tombe sous la considération des géomètres se réduit à un même genre de problèmes qui est de rechercher la valeur des racines de quelque équation. (Cité in (Guichard 2000, p. 48)

Et précise plus loin qu'il veut que sa méthode soit universelle pour :

> Résoudre généralement toutes les questions qui peuvent se présenter en n'importe quel genre de quantité aussi bien continue que discrète. (Ibid.)

Le véritable essor de l'algèbre n'est amorcé que lorsque la substitution des écritures formelles aux écritures verbales est devenue possible. Mais pour arriver à cette étape décisive de son évolution, l'algèbre s'est plusieurs fois métamorphosée par une lente abstraction de ses objets d'étude : mesure de grandeurs, calcul sur des nombres abstraits et finalement manipulation d'écritures formelles avec des lettres désignant d'abord des nombres et ultérieurement toutes sortes d'objets. En tant qu'outil et processus de résolution de problèmes, l'algèbre a parallèlement évolué vers une forme de pensée analytique offrant ainsi une alternative concise et efficace à la méthode synthétique de *l'arithmétique*.

Après ce bref passage en revue des principales étapes historiques de la genèse de l'algèbre, nous pouvons, à présent, résumer l'évolution historico-épistémologique des praxéologies algébriques en nous arrêtant sur ses moments forts. Le tableau 2 en synthétise les principales caractéristiques :

La période paléo-babylonienne	XVIII^{e} Av. J.C.	**Pré-algèbre algorithmique :** Usage des tables numériques et métrologiques, algorithmes de calcul**, procédures de résolution d'équations sur des exemples génériques.**
La Grèce antique : Les Éléments d'Euclide, livre II	III^{e} Av. J.C	**Pré-algèbre géométrique :** -**Calcul de grandeurs géométriques** (susceptible d'illustrer géométriquement des propriétés numériques et des algorithmes de résolution d'équations). -**Rigueur** dans les processus d'argumentation.
Diophante d'Alexandrie	III^{e} siècle	**Arithmétique présymbolique :** -Méthode de l'inconnue opérationnelle (*l'arithme*). -Calcul sur les *arithme et les espèces*.
Al-Khwârizmî	780-850	**Algèbre des équations :** -Procédés d'*al-jabr* w'*al-muqâbala*. -Justifications géométriques.
Al-Karâjî	953- 1029	**Arithmétisation de l'algèbre** Généralisation des opérations arithmétiques aux expressions monômes et aux polynômes.
Viète	1540-1603	**Algèbre littérale (spécieuse) :** -Calcul algébrique abstrait. -Méthode analytique. -Résolution de problèmes via une modélisation et un langage algébrique.
Descartes	1596-1650	**Algébrisation de la Géométrie**

Tableau 2 *- Étapes historiques de l'évolution des praxéologies algébriques*

Suite à cette analyse historique, il apparait que, lors de sa genèse, l'algèbre s'est progressivement constituée, au fil du temps, comme un outil et une démarche de résolution de problèmes. De façon plus précise, en suivant le parcours de la conceptualisation, de la syntaxe et de la sémiotique algébriques, des Babyloniens à Descartes, en passant par Euclide, Diophante et Al-Khwârizmî, nous nous rendons compte que l'algèbre a lentement évolué vers une pensée spécifique et un langage formel permettant de modéliser des problèmes et de les résoudre via un calcul littéral approprié ; l'étude de ses concepts, en tant qu'objets de savoir, n'est venue que plus tard.

En jalonnant ainsi le cours de l'histoire, nous avons voulu tirer des enseignements didactiques en revenant aux sources, convaincus de l'intérêt que peut présenter l'exploration des réussites et des échecs encourus par nos ancêtres en matière de diffusion de l'algèbre. Il y apparaît donc primordial de privilégier le travail de modélisation et les dialectiques Outil/Objet au sens de Douady (1992, p. 133) et Opératoire/Prédicatif au sens de Vergnaud (2001, p. 9) tout au long du curriculum, si l'on veut gagner le pari de donner sens aux activités algébriques et de favoriser une interaction intégrative des différents domaines des mathématiques. Mais ceci présuppose une autre façon d'envisager l'enseignement/apprentissage de l'algèbre et nécessite un plus grand effort en ingénierie didactique génératrice de situations ajustées à cette fin ; c'est ce qui constitue une véritable perspective de recherche en didactique de l'algèbre.

Procédons maintenant à une analyse écologique et praxéologique des programmes d'algèbre et des manuels scolaires[5] de la première année secondaire, analyse qui nous permettra de saisir l'évolution du double[6] rapport institutionnel à l'algèbre en Tunisie et son impact sur les conditions et les contraintes de la diffusion de ce domaine du savoir mathématique à ce niveau de l'échelle de codétermination didactique[7] qu'est *l'école*.

III. ÉVOLUTION DES PROGRAMMES ET DES MANUELS SCOLAIRES D'ALGÈBRE

Nous avons procédé à une analyse des programmes d'algèbre et de leur mise en œuvre appliquée depuis 1976 dans le cycle secondaire tunisien, afin de saisir les évolutions de l'enseignement, les causes des changements éventuels opérés, ainsi que les rapports personnels et institutionnels à cet objet de savoir.

En Tunisie, au cours du demi-siècle précédent, trois réformes du système éducatif se sont succédées respectivement en 1958, 1991 et 2002 et ont largement influencé les contenus des programmes et des manuels scolaires.

1. Le programme d'algèbre et le manuel scolaire de 1976

Ce programme est une copie conforme du programme français de la classe de Troisième applicable à la rentrée scolaire de 1972 (Arrêté du 22/7/1971 B.O.E.N français du 29/7/1971). La partie de ce programme consacrée au domaine algébrique est intitulée *Nombres réels, calculs algébriques, fonctions numériques.*

Le programme de mathématiques de la classe de quatrième année secondaire sections : math-sciences, math-techniques et lettres (actuelle première année de l'enseignement secondaire) est, à ce moment, composé de trois grandes parties articulées entre elles via une

[5] En Tunisie, le manuel scolaire est unique. Il est édité et diffusé par le centre national pédagogique, institution publique placée sous la tutelle du ministère de l'éducation.

[6] Deux institutions sont ici concernées : l'institution productrice des programmes officiels et celle du curriculum réel.

[7] Selon Chevallard cette échelle comprend cinq niveaux supérieurs : *la civilisation, la société, l'école, la pédagogie* et *la discipline*.

méthode analytique à support algébrique et basée sur des activités dans un repère orthonormé du plan :

1. Nombres réels, calculs algébriques, fonctions numériques.
2. Plan euclidien (orthogonalité, distance, repère orthonormé)
3. Géométrie plane euclidienne (médiatrice d'un segment, distance d'un point à une droite, cercle, isométries planes, trigonométrie)

Ainsi le calcul algébrique annoncé dans le libellé de ce programme est mis en œuvre essentiellement lors des calculs sur les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles et au cours d'éventuelles réductions des équations et inéquations modélisant des problèmes du premier degré.

Le bloc technologico-théorique justifiant les différentes techniques du calcul algébrique est globalement constitué des définitions, propriétés et théorèmes découlant de la structure de corps totalement ordonné dont est muni l'ensemble IR des nombres réels.

Les organisations mathématiques préconisées sont caractérisées par les types de tâches, les techniques, les technologies et les théories les justifiant. Elles sont précisées dans le tableau 3:

Contenus	Types de tâches	Techniques	Technologies	Théories
Propriétés de l'addition, de la multiplication et de l'ordre dans IR	**T** : Calculs dans IR	**τ** : Somme, produit, quotient de nombres réels exprimés sous la forme $\frac{b}{a}$ où a et b sont des nombres réels avec a non nul ou sous les formes : $\sqrt{a}$ ou $a^{\frac{1}{2}}$	**θ** : Définitions et propriétés des opérations sur les nombres.	**Θ** : Structures algébriques : (IR, +, x, $\leq$) est un corps totalement ordonné
Fonctions polynômes-Fonctions rationnelles	**T_1** : Calculs sur les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles **T_2** : Représentation graphique des fonctions affines et des fonctions affines par intervalles	**τ_1** : Somme, produit, quotient de fonctions polynômes et rationnelles. **τ_2 :** Construction à l'aide de points dont les couples de coordonnées appartiennent aux graphes de ces fonctions	**θ_1** : Définitions et propriétés des opérations sur les fonctions polynômes et rationnelles **θ_2** : Théorèmes sur la représentation graphique des fonctions affines	**Θ_1** : Structures algébriques de IR[x] et IR(x) **Θ_2** : Géométrie analytique
Problèmes du premier degré	**T** : Résolution de problèmes du premier degré	**τ_1 :** Modélisation de situations à l'aide d'équations, inéquations ou systèmes linéaires du premier degré à une ou deux inconnues **τ_2 :** Résolution d'équations, d'inéquations ou de systèmes	**θ_1** : Non définie par les programmes en vigueur **θ_2** : Théorèmes justifiant les techniques de résolution	**Θ_1** : Non définie **Θ_2** : (IR, +, x, $\leq$) est un corps totalement ordonné.

***Tableau 3** -Les organisations mathématiques visées par le programme de 1976*

Selon cette visée, l'enseignement de l'algèbre est articulé au premier abord, sur l'étude des modèles des structures algébriques, ensuite sur l'acquisition d'outils permettant de manipuler des expressions polynômiales et rationnelles et, partant, à résoudre des problèmes se ramenant à des équations et inéquations du premier degré à une ou deux inconnues.

Malgré l'apparence d'une certaine logique dans la conception du programme, des anomalies didactiques ont éclaté au grand jour au fur et à mesure de son application sur le terrain. En effet :

- Le caractère abstrait des concepts relatifs aux structures algébriques préalablement abordés n'a pas manqué d'entrainer le rejet des élèves et de leur ôter toute motivation.
- Les praxéologies algébriques, qui doivent être développées, dépassent le cadre de leurs applications et ne sont pas ajustées à leurs fins (par exemple, les compétences exigées dans les manipulations des fonctions polynômes et rationnelles, parfois entachées de grande virtuosité, ne sont que rarement sollicitées et exploitées au cours de l'application du curriculum)
- Le problème de l'apprentissage de la modélisation des situations reste entier et aucun éclairage à son sujet n'est abordé.

Dans le manuel couramment utilisé à cette époque (Monge & al. 1976), le contenu disciplinaire est présenté conformément aux principes de l'enseignement traditionnel, c'est-à-dire sous forme de cours magistraux. Ceci a eu pour effet que lors des pratiques enseignantes le *topos* du professeur y apparait extrêmement large ; celui-ci se charge de la quasi-totalité des responsabilités dévolues à la classe, ce qui lui permet de piloter l'apprentissage, en exerçant le plein contrôle sur les connaissances à faire acquérir aux élèves, usant ainsi de son statut d'unique détenteur des savoirs dans l'institution-classe. Le contrat didactique d'ostension est activé sous ses deux formes assumée et déguisée (Berthelot, Salin 1993-1994, pp. 48-50), jouant le rôle du facilitateur et légitimant les interventions forcées de l'instance enseignante.

Afin de décrire l'approche didactique adoptée par les auteurs du manuel, nous présentons, dans le tableau 4, l'organisation mathématique relative au thème *équations à une inconnue* proposée en guise d'analyse *a priori* des praxéologies mathématiques et didactiques à développer:

Types de tâches T	**Techniques τ**	**Technologies θ**	**Théories Θ**
Résoudre une équation du premier degré à une inconnue réelle donnée sous forme réduite.	Application de l'algorithme de résolution.	Définitions, propriétés et théorèmes sous-tendant les algorithmes de résolution.	Structures algébriques : (IR,+, x) est un corps commutatif.
Résoudre une équation du premier degré à une inconnue réelle donnée sous la forme *f(x)=g(x)* où *f* et *g* sont deux fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1.	-Transformer l'équation en la mettant sous la forme réduite -Appliquer l'algorithme de résolution	-Équations équivalentes -Tout réel non nul admet un inverse.	
Résoudre une équation se ramenant à des équations du premier degré.	-Transformer l'équation en la mettant sous la forme *h(x)=0* -Factoriser *h(x)* en produit de facteurs de premier degré -Appliquer l'intégrité de (IR, +, x) -Résoudre chaque équation obtenue. -Donner l'ensemble des solutions.	-Équations équivalentes -Distributivité de x sur + -Tout réel non nul admet un inverse -Un produit de réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.	

Tableau 4 *- Organisation mathématique du thème équations à une inconnue telle que proposée par le manuel de 1976*

Les documents officiels (programmes et manuels), censés présenter et prescrire[8] le texte du savoir et la méthodologie de sa mise en œuvre, passent sous silence les éléments technologiques et théoriques sous-tendant le raisonnement mathématique mis en jeu et n'apportent aucune réponse à des questions cruciales telles que : pourquoi aborde-t-on l'étude des équations ? À quelles questions ces équations permettent-elles de répondre ?

Ceci n'aurait pu être accompli qu'au prix d'efforts consentis par les enseignants pour concevoir des situations didactiques significatives et des activités motivantes susceptibles de faire interagir les élèves avec le savoir visé, faute de quoi, seul un habitus de réflexes et de pratiques d'algorithmes dépourvus de sens se construit au sein de l'institution scolaire.

2. *Le programme d'algèbre et le manuel scolaire de 1986*

Pendant cette période de la contre-réforme, des ajustements ont été nécessaires pour corriger les effets pervers de la réforme précédente.

Conformément à cette nouvelle orientation, le programme d'algèbre a été épuré de toutes structures algébriques, seules quelques notions sur les applications subsistent encore et le ton a été donné pour rendre les mathématiques plus vivantes, plus attrayantes et proches de la vie quotidienne des élèves. La partie *algèbre* est constituée de six rubriques, parfois brièvement commentées :

1. Application, image d'une partie d'un ensemble, restriction d'une application.

Composition de deux bijections, bijection réciproque d'une bijection.

2. Racine carrée d'un réel positif ; racine carrée d'un produit, d'un quotient de réels. Calculs approchés de racines carrées par encadrement.

On admettra que a étant un réel positif, il existe au moins un réel positif x dont le carré est égal à a.

3. Applications linéaires et applications affines de IR dans IR ; applications affines par intervalles. Représentations graphiques.

On étudiera des restrictions de telles relations à des sous-ensembles quelconques de IR en se limitant à quelques exemples puisés particulièrement dans la vie courante.

4. Équations et inéquations du premier degré à une inconnue. Équations et inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.

5. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Résolution graphique d'un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues.

6. Exemples variés de problèmes du premier degré.

On étudiera des problèmes formulés dans un langage courant et liés aux préoccupations quotidiennes des élèves.
On montrera par ailleurs sur quelques exemples comment utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes de géométrie.

Les notions de structure de groupe, de structure de corps, de fonction, de surjection, de fonction polynôme, de fonction rationnelle disparaissent. Les concepts d'application et de bijection sont encore retenus, en raison de leur utilité en géométrie lors de l'étude des translations et des symétries et, en plus, de leur rôle fondateur pour le concept d'application affine, encore une fois, retenu pour aborder les thèmes d'équation et d'inéquation du premier degré. En conséquence, le programme s'articule autour de la résolution de problèmes du premier degré en intégrant dans un tout structuré les applications affines, les équations et les systèmes du premier degré.

[8] En Tunisie, les programmes scolaires sont officiellement prescrits et les manuels scolaires sont uniques pour chacun des niveaux d'enseignement.

Le manuel scolaire (Kachoukh & al. 1986) permettant la mise en œuvre de ce programme répond à un triple objectif : atténuer les effets pervers des mathématiques modernes, réconcilier l'enseignement des mathématiques avec son environnement et accroître *le topos* des élèves en leur permettant de participer d'une manière active et efficace à l'élaboration des leçons.

Conformément aux directives officielles, l'exclusivité est donnée au premier degré ; on ne parle plus de fonctions polynômes ou de fonctions rationnelles. Suite à la mise en place des préalables numériques, les auteurs abordent directement l'étude des applications affines. Suivant cette orientation, le domaine algébrique comporte plusieurs habitats imbriqués entre eux (applications linéaires, applications affines, équations et inéquations du premier degré, systèmes d'équations ou d'inéquations du premier degré). Ainsi, les praxéologies algébriques à développer sont maintenant ajustées à leur fin -la résolution des problèmes du premier degré- et il n'est plus question de faire du calcul algébrique pour lui-même, sauf pour ce qui est proposé en guise de rappels au chapitre introductif du manuel.

La structure du chapitre 4, portant sur les équations et inéquations du premier degré à une inconnue, reflète une organisation didactique privilégiant particulièrement deux moments de l'étude : le moment de la première rencontre avec les types de tâches constituant l'organisation mathématique (à travers l'étude d'un exemple préliminaire) et celui du travail et de la mise à l'épreuve de la technique correspondante (par le biais d'exercisation a posteriori)[9].

Les analyses écologiques et praxéologiques, ci-dessus réalisées, montrent une attitude réaliste et modérée de la noosphère à la sortie de la crise des mathématiques modernes. Les praxéologies à développer dans l'enseignement/apprentissage de l'algèbre en première année secondaire sont maintenant réduites à l'essentiel, mieux articulées entre elles et visent la résolution des problèmes du premier degré. Toutefois, ce dernier objectif a été relégué par les auteurs du manuel et du coup par les enseignants, en fin d'apprentissage (sûrement dans l'intention de mieux outiller les élèves de techniques algébriques suffisantes). Le problème du sens des activités mathématiques reste entier, tant qu'on n'ose pas évoquer à temps les questions auxquelles l'algèbre peut répondre ainsi que leur raison d'être.

3. *Le programme d'algèbre et le manuel scolaire de 1991*

La deuxième réforme du système éducatif tunisien est consacrée par la nouvelle loi d'orientation de l'éducation (Loi du 19 juillet 1991). Elle est conçue pour adapter l'école aux changements culturels et économiques qui ont affecté la société tunisienne après plus de trois décennies d'indépendance. Suite à l'application du principe de *l'éducation pour tous* porté par la réforme de 1958, cette nouvelle réforme a redéfini les finalités et la mission de l'éducation en misant sur la qualification des jeunes pour les préparer à s'intégrer dans une vie citoyenne accomplie.

Sur le plan pédagogique, les années quatre-vingt-dix sont essentiellement caractérisées par le paradigme de la pédagogie par objectifs (*PPO*). Tout a été alors mis en œuvre pour rationaliser les activités d'enseignement/apprentissage. Des finalités, des objectifs généraux, des objectifs spécifiques, des objectifs opérationnels, des critères d'évaluation et des indicateurs de réussite sont ainsi précisés et parfaitement délimités pour guider la conception, le développement et l'évaluation des apprentissages. Cela n'a pas manqué d'influencer la transposition didactique et l'ingénierie des outils didactiques dans un environnement éducatif fortement positiviste, pragmatique et behavioriste.

---

[9] Voir annexe 1.

Le programme[10] de 1991 est conçu pour répondre aux exigences de la deuxième réforme du système éducatif tunisien, survenue en juillet 1991, qui vise essentiellement : l'utilisation des nombres réels, un apprentissage de base concernant les fonctions numériques à variable réelle, le développement de l'aptitude à représenter graphiquement des fonctions et à exploiter les représentations graphiques et la pratique d'une démarche scientifique.

La noosphère constate que les difficultés des élèves en algèbre élémentaire sont dues essentiellement

- sur le plan sémiotique et syntaxique, à l'incompréhension de la signification des lettres et de leurs assemblages dans les expressions littérales.
- sur le plan conceptuel et sémantique, à l'influence de la pensée arithmétique acquise aux deux cycles de l'enseignement de base.

Pour lever ces obstacles, sont réintroduits des apprentissages des manipulations d'expressions algébriques, en particulier les règles de calcul dans IR (utilisation des parenthèses et priorité des opérations, puissances entières, racines carrées de réels positifs, identités remarquables, factorisation, développement, réduction d'expressions numériques ou littérales, etc.). En même temps, des calculs numériques en situation sont ajoutés au calcul formel, à l'occasion des tâches de détermination des valeurs des expressions dépendant d'une ou de plusieurs variables lorsque celles-ci sont données.

> Mettre en œuvre les règles opératoires dans IR et les règles sur les puissances pour :
>
> Calculer la valeur d'une expression numérique ou une expression littérale pour des valeurs données des variables. (Premier objectif spécifique)

Inversement, des calculs numériques proposés en activités préliminaires débouchent, via le procédé d'induction et de généralisation, sur des expressions littérales. Ainsi des connexions sont établies entre calcul algébrique et calcul numérique dans une optique assimilant en quelque sorte l'algèbre à une arithmétique généralisée (Gascon 1993).

> -Le calcul numérique et le calcul littéral seront menés de pair. (Recommandations)

Quatre aspects caractérisent le programme de 1991 :

- Comme dans les programmes précédents, l'apprentissage de l'algèbre, initié par le programme de 1991, est motivé par le développement de la compétence de résolution des problèmes du premier degré.
- La modélisation des situations est mise en avant dans les rubriques des objectifs.

> Mettre en équation ou en inéquation un problème donné. (Objectifs spécifiques, p. 9)
>
> Exemples d'étude de problèmes conduisant à […] (Contenus, p. 9)

- Les problèmes seront puisés dans le domaine mathématique ou des domaines des autres disciplines scolaires ou de l'environnement socioculturel.

> Les problèmes seront puisés dans le domaine mathématique ou dans le domaine des autres disciplines (Physique par exemple) ou encore dans l'environnement social et économique de l'élève. (Recommandations, p. 9)

- Les recommandations officielles prêtent cette fois-ci une attention particulière au processus de résolution des problèmes en indiquant explicitement les différentes phases.

> […] on dégagera nettement les différentes phases : Choix de l'inconnue ou des inconnues ; mise en équation ; résolution de l'équation ou de l'inéquation ou du système obtenus ; vérification et interprétation des résultats. (Recommandations, pp. 9-10)

[10] Voir annexe 2

Quatre articles, sur six, concernent ainsi l'installation des pré-requis algébriques nécessaires à l'étude des deux thèmes-clés du programme à savoir les applications affines et les problèmes du premier degré.

Le manuel scolaire de la première année secondaire (Tarifa & al. 1991), apparu suite à la réforme de 1991, est intitulé *Mathématiques, 4ème année secondaire*. L'intention des auteurs, précisée dans la préface, est de proposer *un manuel essentiellement conçu pour une formation de base adressée à des élèves, de profils divers, d'une première année secondaire désormais non spécialisée du tronc commun.* L'activité et l'engagement des élèves y sont fortement encouragés en vue de leur faire acquérir *des méthodes de travail et des capacités à résoudre des problèmes.*

Une organisation commune et uniforme des chapitres est adoptée. Des activités, des exercices d'application, des exercices à caractère intégratif et des exercices résolus sont proposés et constituent les principaux supports des apprentissages projetés. Les auteurs proposent des activités à réaliser sur le manuel, comme compléter des tableaux, des phrases, ou des expressions numériques ou algébriques et des ébauches de démonstrations. Les rappels et les résultats les plus importants du cours sont présentés sous des intitulés *définitions, théorèmes, propriétés, retenons* pour mettre en évidence les contenus à mémoriser.

Nous présentons dans l'annexe 3, en guise d'illustration de ce qui précède, un corpus des types de tâches algébriques préconisés ainsi que les techniques susceptibles de les réaliser et les blocs technologico-théoriques servant à les justifier.

Le manuel de 1991 apparaît donc comme un outil didactique innovant en introduisant

- des activités de nature mathématique, ludique ou récréative.
- des informations culturelles et historiques.

Toutefois l'imprécision concernant le statut des contenus mathématiques (définition, propriété, théorème, démonstration, exemple d'application) présentés a engendré plusieurs difficultés lors de son utilisation par les enseignants qui ont demandé, en vain, une formation de proximité à l'utilisation du manuel et un accompagnement didactique sur le terrain. De plus, ce qui a été annoncé en matière de capacité de résolution des problèmes n'a pas été traduit dans les faits. L'absence de technique suffisamment claire et intelligible de modélisation des situations (mise en équation, en inéquation ou en système), qui ne s'acquiert pas naturellement, nécessite un apprentissage spécifique et parfaitement ajusté à ce type de tâches comme l'indiquent clairement Duval et al. (1996).

4. Le programme d'algèbre et le manuel scolaire de 2003

La loi d'orientation de l'éducation et de l'enseignement scolaire de juillet 2002 trace les principaux objectifs visés :

> À côté de ses missions d'éducation et d'instruction, l'école est aussi appelée à qualifier les jeunes en les dotant de compétences susceptibles de favoriser leur insertion économique et sociale. Ainsi, il serait urgent de développer, dès le cycle primaire, conjointement quatre types d'habiletés :
>
> - Des savoir-faire pratiques qui s'acquièrent par l'initiation à la résolution de problèmes.
> - Des savoir-faire méthodologiques de traitement de l'information et de son exploitation dans la recherche des solutions alternatives et innovantes.
> - Des compétences entrepreneuriales à travers la conception, le développement et l'évaluation de projets collectifs et interdisciplinaires.
> - Des compétences comportementales mobilisables par des savoir-être comme l'autonomie, la coopération, le vivre-ensemble et la critique constructive. (Loi d'orientation n°2002-80 du 23 juillet 2002)

Deux nouvelles orientations pédagogiques sont annoncées:

- Mettre en œuvre des démarches d'apprentissage différenciées prenant en compte la diversité des profils et des rythmes des élèves et leur permettre d'avoir des chances égales de réussite.

- Privilégier les dispositifs didactiques et pédagogiques favorisant le développement des compétences de résolution de problèmes et de réalisation de projets.

Le programme de mathématiques de 2003, issu de cette réforme s'inscrit dans l'optique éducative illustrée par l'article 10 de la nouvelle loi d'orientation de l'éducation et de l'enseignement scolaire qui stipule que :

> L'école veille dans le cadre de sa fonction de qualification à développer des compétences et des savoir-faire chez les élèves. … À cette fin l'école est appelée à faire acquérir aux apprenants l'aptitude à :
>
> - Utiliser les savoirs et les savoir-faire acquis pour la recherche des solutions alternatives dans la résolution des problèmes auxquels ils peuvent être confrontés ;
> - S'adapter aux changements ;
> - Prendre des initiatives et innover ;
> - Travailler en groupe ;
> - Apprendre tout au long de la vie. (Loi d'orientation de l'éducation, article 10)

La nouvelle orientation pédagogique institutionnalisée est celle de « l'approche par les compétences ». Fondée sur le paradigme socioconstructiviste de l'apprentissage, cette approche a fortement influencé les programmes scolaires et les outils didactiques qui restent en usage jusqu'à nos jours.

Le savoir algébrique à enseigner dans le programme officiel en vigueur a pour habitat institutionnel une rubrique intitulée *Activités algébriques*. Cette rubrique spécifie les contenus disciplinaires suivants :

1. Identités remarquables.
2. Fonctions linéaires – Fonctions affines.
3. Équations et inéquations linéaires du premier degré à une inconnue réelle.
4. Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues réelles.

Les aptitudes à développer sont ensuite précisées de façon exhaustive, en guise de *niches fonctionnelles* de ces objets de savoir:

1. Les élèves mobilisent les règles et les techniques de calcul algébrique pour :

- additionner, soustraire et multiplier des expressions algébriques ;
- calculer la valeur numérique d'une expression littérale ;
- développer, factoriser et simplifier des expressions algébriques en utilisant les produits remarquables ;
- résoudre des équations et des inéquations linéaires du premier degré à une inconnue ;
- résoudre des systèmes linéaires de deux équations du premier degré à deux inconnues.

2. Les élèves mobilisent un algorithme ou une procédure de calcul algébrique pour :

- déterminer le signe d'un binôme du premier degré ;
- résoudre des équations et des inéquations se ramenant à des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue ;
- déterminer l'expression d'une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel ;
- déterminer l'expression d'une fonction affine connaissant les images de deux réels distincts.

3. Les élèves résolvent des problèmes algébriques dans des situations mathématiques ou en rapport avec leur environnement dans des contextes familiers ou non familiers.
En particulier,

- les élèves modélisent des situations réelles menant à des équations, des inéquations ou des fonctions linéaires ou affines ;
- les élèves résolvent des problèmes d'optimisation ou de point de rencontre de deux mobiles.

Nous constatons que les objets d'enseignement de l'algèbre et leur contexte de fonctionnement marquent une réelle continuité avec les anciens programmes. En effet, l'enseignement de l'algèbre a toujours pour objet l'étude des équations, inéquations et applications affines ; toutefois, on dénote une avancée importante sur le plan méthodologique. Les pratiques algébriques ne sont plus considérées comme un objectif intermédiaire d'apprentissage, mais comme une compétence à part entière à développer.

Se voulant conforme aux nouveaux programmes, le manuel scolaire (Mcharek & al. 2003) vise le développement des sept compétences disciplinaires qui y sont prescrites. Dans sa préface, les auteurs rappellent le rôle des mathématiques dans la formation de l'esprit critique et de l'imagination créatrice et leur place de choix dans l'éducation citoyenne de chacun. Pour eux, le manuel doit être un outil de promotion scientifique, intellectuelle, culturelle et sociale s'adressant à tous les élèves dans leur diversité et quelle que soit leur vocation et indépendamment de leur niveau de maîtrise des savoirs acquis au terme de l'enseignement de base.

Le manuel se compose de seize chapitres, huit en *Travaux géométriques* et huit en *Travaux numériques*. Parmi ces derniers, le chapitre 11 traite des *Activités algébriques*. L'annexe 4 présente les compétences visées dans la partie *Activités algébriques* et le dispositif permettant leur développement chez les apprenants.

Dans sa majeure partie, le manuel est constitué exclusivement d'activités. Aucune organisation didactique ou mathématique n'est proposée. Seules des situations d'apprentissage et d'évaluation, accompagnées parfois d'indications et de rappels sont fournies en guise de supports de cours. La conception du cours, étant entièrement laissée à la charge des enseignants, ceux-ci se sentent la plupart du temps démunis et reprennent leurs anciens cours qu'ils enrichissent par des activités puisées dans le nouveau manuel. Paradoxalement, les élèves, quant à eux, ne peuvent utiliser ce manuel qui leur est en principe adressé sans l'aide de l'enseignant, en l'absence d'un cours clairement conçu et suffisamment adapté à leur profil cognitif.

À la fin de la première année d'utilisation de ce manuel, l'Inspection générale rapporte :

> […] ce manuel propose un ensemble de ressources, certes précieuses mais non structurées, pour la conception et l'élaboration des situations d'apprentissage. De ce fait, il constitue beaucoup plus un document d'accompagnement du programme qu'un manuel scolaire susceptible d'être exploité par des élèves de différents niveaux et confrontés à des difficultés linguistiques, cognitives et méthodologiques… Les enseignants et les élèves trouvent des difficultés à l'utiliser (choix et gestion des activités proposées). (Rapport de Synthèse de l'Inspection Générale de l'Éducation relatif aux visites d'inspection pédagogique, Ministère de l'Éducation, TUNISIE, 2003-2004, pp. 6-7)

IV. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce survol historique des programmes d'algèbre et des contenus des manuels scolaires de la première année secondaire en Tunisie, depuis les années soixante-dix jusqu'à nos jours, nous a permis d'apprécier l'évolution du rapport institutionnel à l'algèbre dans le système éducatif tunisien. Nous avons vu comment ce rapport a sensiblement évolué d'une relation institution-objet de savoir à l'époque des mathématiques modernes vers une relation plus pragmatique et utilitaire considérant l'algèbre comme un outil et un langage formel au service de la résolution des problèmes, en passant par des étapes intermédiaires (1986-1991) où l'algèbre a joué le rôle d'outil-objet, appris pour lui-même en tant que savoir mathématique exigible par l'institution en premier lieu, et utilisé plus tard dans des contextes d'application et de transfert.

L'analyse épistémologique appuyée par l'étude de l'évolution des praxéologies algébriques a montré qu'au cours des quatre précédents millénaires, trois champs épistémologiques s'y sont progressivement développés : le champ conceptuel, le champ syntaxique et le champ sémiotique.

Elle a mis en évidence la difficile genèse du formalisme algébrique en tant qu'outil de la pensée algébrique et a permis d'explorer les obstacles et les ruptures qui l'ont caractérisée.

Les principales caractéristiques épistémologiques, mises en lumière, montrent que :

- L'algèbre est structurellement et fonctionnellement attachée aux activités de résolution de problèmes mathématiques et extra-mathématiques qui constituent sa véritable raison d'être et son ultime champ d'application.
- Le développement des compétences algébriques nécessite la levée de l'obstacle du raisonnement numérique en assumant une rupture épistémologique arithmétique-algébrique. Les activités de résolution des problèmes déconnectés[11] (Marchand, Bednarz 2000) peuvent y contribuer efficacement.
- Sur le plan syntaxique, prenant naissance dans le champ numérique, l'algèbre n'a pu s'en détacher qu'au prix d'une double transition : procédural-structural (Kieran & al. 1980, pp. 6-7) et calcul numérique-manipulation littérale.
- Sur le plan conceptuel, une avancée importante a été réalisée avec le recours à la dialectique analyse-synthèse qui a eu l'avantage de favoriser une pensée algébrique efficace dans la résolution des problèmes.

L'analyse institutionnelle a mis en exergue la particularité évolutive du rapport institutionnel à l'algèbre dans le système éducatif tunisien. Ainsi, d'un rapport à un objet de savoir conceptuel (à l'époque des mathématiques modernes) on est passé à un rapport à un objet-outil (objet d'étude ensuite outil méthodologique) pour aboutir désormais à un rapport à un outil au service de la résolution des problèmes.

Cette analyse débouche sur les conclusions suivantes :

- Les praxéologies algébriques visées par l'institution scolaire sont, la plupart du temps, artificielles et dépassent le cadre de leurs applications. Ceci est notamment illustré par une virtuosité et des automatismes excessifs constatés lors des apprentissages du calcul algébrique.
- Le problème de l'apprentissage de la modélisation des situations reste entier et aucun éclairage institutionnel à son sujet n'est abordé. L'absence de technique suffisamment claire et intelligible de modélisation (mise en équation, en inéquation ou en système, usage de fonctions linéaires ou affines) est manifeste.
- Les manuels scolaires passent sous silence les éléments technologiques et théoriques sous-tendant les démarches et les raisonnements mathématiques mis en jeu dans les activités algébriques et n'apportent aucune réponse à des questions cruciales telles que: Pourquoi aborde-t-on l'étude des concepts étudiés ? À quelles questions ces concepts permettent-ils de répondre ?

[11] Un problème est dit déconnecté si aucun pont ne peut être établi *a priori* directement entre ses données.

- Toutefois, les praxéologies à développer dans l'enseignement/apprentissage de l'algèbre se sont réduites, au fil des années, à l'essentiel et deviennent progressivement mieux articulées entre elles. Elles visent désormais la résolution des problèmes du premier degré à ce niveau scolaire. Mais ce dernier objectif est souvent occulté et n'a pas été atteint faute d'interaction continue avec les problèmes dans l'avancée du cursus.

- Les nouveaux matériels didactiques proposent des activités diverses qui contribuent à illustrer les techniques algébriques mobilisées dans la réalisation des différentes tâches et à faciliter leur appropriation par les élèves. Toutefois, ces activités se ramènent, la plupart du temps, à des problèmes faiblement déconnectées encourageant souvent l'adoption d'une démarche arithmétique aux dépens des processus algébriques de résolution.

Eu égard à toutes ces considérations et ces faits historiques, il est légitime de se demander si l'institution prend effectivement en compte les obstacles épistémologiques ainsi dévoilés dans les processus de la transposition didactique. Plus précisément, nous nous demandons s'il est possible d'envisager une autre alternative didactique permettant de conjuguer les deux aspects conceptuel et opérationnel de l'algèbre dans une même et seule dynamique. Pouvons-nous faire en sorte que l'apprentissage de l'algèbre soit une réponse pertinente à un besoin éprouvé par les apprenants lorsqu'ils sont confrontés à un problème? Et quel est alors le degré d'efficacité et de pertinence d'un tel modèle ? Les réponses à ces questions pourront faire l'objet de recherches futures.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2002) Le manuscrit mathématique de Jerba : Une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité, *Actes du 7e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes*, Marrakech, 30-31 Mai et 1er Juin 2002.

Abgrall Ph. (2011-2012) *Histoire des mathématiques*, Cours de Mastère M1, ISEFC, Tunis.

Achour S. (2005) *L'introduction des fonctions linéaires et affines dans l'enseignement secondaire, d'une problématique de modélisation physique à l'ostension algébrique : Quelles alternatives possibles ?*, mémoire de DEA, Tunis : ISEFC.

Ben Nejma S. (2006) *Étude des rapports institutionnel et personnel aux équations via la mise en équation de problèmes en première année secondaire tunisien (3è en France) : Évolution de ces rapports dans la transition collège/lycée*, mémoire de DEA, Tunis : ISEFC.

Berthelot R., Salin M-H. (1993-1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N* 53, 39-56, 48-50.

Boyé A. (2003) *François Viète, inventeur de l'algèbre ?*[en ligne], IREM, Pays de la Loire.
http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/fundoro/archivos%20adjuntos/publicaciones/otros_idiomas/frances/Seminario11-12/AnneBoye_FrancoisViete.pdf

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des Mathématiques* 12, 73-112.

Djebbar A. (2005) *L'algèbre arabe : genèse d'un art.* Paris, Vuibert-Adapt.

Gascon J. (1993) Un nouveau modèle de l'Algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée. *Petit x* n° 37 ,43-63.

Douady R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères-Irem* n°6, 133-134.

Duval R. & al. (1996) à propos de charades dont la solution est un système d'équations à deux inconnues. *Petit x* n° 44, 35 à 48.

Guichard J. P. (2000) Qu'est-ce que l'algèbre ? Un domaine ou un langage ?, L'algèbre au lycée et au collège. *Publication de l'IREM de Montpellier*, 40-57.

Høyrup J. (2002) *Lengths, widths, surfaces: A portrait of old Babylonian algebra and its kin, studies and sources in the history of mathematics and physical sciences*. Berlin et londres : Spinger.

Kieran C., Herscovics N. (1980) Donner de la signification au concept d'équation, *L'initiation à l'algèbre, Collection « Documents du CREM* (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Be.) » n°3, 46-58.

Kouki R. (2006) Équations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique. *Petit x* n° 71, 7-28.

Marchand P., Bednarz N. (2000) Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes, *Bulletin AMQ* XL(4), 15-25.

Ministère de l'éducation de la Tunisie (2002) *Loi d'orientation n°2002-80 du 23 juillet 2002 relative à l'éducation et à l'enseignement scolaire.*

Ministère de l'éducation de la Tunisie, Inspection Générale de l'éducation (2003-2004), *Rapport de synthèses des inspections pédagogiques des Collèges et des Lycées*, Discipline : Mathématiques, multi-gr.

Moyon M. (2005) *Matériaux pour l'Histoire des Mathématiques en Europe du XII^e^* au *XV^e^ siècles* : *Exemple du « Liber Restaurationis »*. Mémoire de Master en histoire des sciences, Universités de Lille 1 - Lille 3.

Proust C. (2006) Mathématiques en Mésopotamie, REHSEIS, en ligne sur *CultureMath*, <http://culturemath.ens.fr/nodeimages/images/chrono_mesopotamie.pdf>

Radford L. (1991) Diophante et l'Algèbre présymbolique. *Bulletin AMQ*, Décembre 1991-Mars 1992.

Rashed R. (1984) *Entre arithmétique et algèbre : recherche sur l'histoire des mathématiques arabes*. Paris : les belles lettres.

Vergnaud G. (2001) Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. Conférence publiée dans les *Actes du colloque GDM-2001*.

MANUELS SCOLAIRES TUNISIENS DE LA 1^ÈRE^ ANNÉE SECONDAIRE

Manuel scolaire de 1976 : M. MONGE, M. GUINCHAN, J-P. PELLE, *Mathématiques Classe de troisième*, édition Belin, 1972.

Manuel scolaire de 1986 : Kachoukh B, Hachfi A, Bel Haj Salem M, Tangour M, *Mathématiques 4ème Math-Sciences et Math-Technique*, CNP Tunis.

Manuel scolaire de 1991 : Tarifa S, SMIDA H, Klila S, Mhamdi N, *Mathématiques 4ème année secondaire*, CNP Tunis, édition 1991.

Manuel scolaire de 2003 : Mcherek R, Mhamdi N, Klila S, Ben Youssef L, *Mathématiques 1ère année secondaire*, CNP Tunis.

ANNEXES

Annexe 1 : Exemples d'organisations didactiques préconisées par le manuel de 1986 (commentées)

Chapitres	Leçons	Paragraphes	Contenus	Commentaires
4- Équations et inéquations du premier degré à une inconnue	4.1- Équations	4.1.1-Notion d'équation	4.1.1.1-Exemple : Considérons les applications f et g définies par $f(x)=x^2+3x+2$ et $g(x)=4(x+1)$ 1.Monter que f et g ne sont pas égales. 2.Montrer que $f(-1)=g(-1)$ et $f(2)=g(2)$. Les réels -1 et 2 sont appelés solutions dans IR de l'équation $f(x)=g(x)$.	C'est le premier moment de l'étude. Les élèves sont confrontés à des égalités du type $f(x)=g(x)$ où f et g sont des applications de IR dans IR et x un réel quelconque. Les types de tâches qu'ils ont à réaliser sont successivement T_1 : Montrer que deux applications ne sont pas égales, dont une technique possible est : τ_1 : Trouver un réel a tel que $f(a)\neq g(a)$.

				T_2 : Vérifier l'égalité de deux applications pour une valeur donnée de la variable. La technique correspondante est : τ_2: Calculer les images de cette valeur de la variable par les deux applications et constater leur égalité. La technologie justifiant ces techniques est constituée de la définition de l'égalité de deux applications et de toutes les règles de calcul dans IR.
			4.1.1.2-Définitions : Soient deux applications numériques à variable réelle f et g. S'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0)=g(x_0)$, on dit que x_0 est *solution* dans IR de *l'équation* $f(x)=g(x)$ où x représente *l'inconnue*. *Résoudre* dans IR l'équation $f(x)=g(x)$, c'est trouver l'ensemble S des solutions de cette équation.	Selon cette organisation didactique, l'enseignant fait fonctionner le *contrat d'ostension*, sous sa forme *déguisée* pour montrer le savoir. L'étude de l'exemple préliminaire aurait servi d'illustration concrète des définitions et de masquer cette ostension magistrale.
			4.1.1.3-Remarque : Soient f et g deux applications d'une partie E de IR dans IR, résoudre dans E l'équation $f(x)=g(x)$ c'est trouver l'ensemble S, inclus dans E, des solutions de cette équation.	Il s'agit d'une autre définition concernant la résolution, dans une partie de IR, d'une équation. Le savoir est, là, montré par un procédé *d'ostension assumée*.
		4.1.2- Équations équivalentes	4.1.2.1-Exemple : Soient les équations $3+x=5$ et $10+x=12$, l'ensemble des solutions de chacune de ces équations est S={2}. On dit que ces deux équations sont équivalentes.	Aucune activité n'est demandée. Juste une illustration magistrale et prématurée de la définition est visée.
			4.1.2.2-Définition : Deux équations sont dites équivalentes dans IR si et seulement si elles ont le même ensemble de définition dans IR.	Rien n'est dit sur la raison d'être de cette définition ni de son utilité potentielle ou future.
			4.1.2.3- Exercice : Soient les équations $x+2=5$ et $x-1=7$. Ces deux équations sont-elles équivalentes dans IR ?	Le type de tâches proposé est « T : Montrer que deux équations ne sont pas équivalentes ». L'objet de la technique τ est tout indiqué : Montrer que les équations proposées n'ont pas le même ensemble de solutions, conformément à la définition qui joue le rôle de la technologie θ justifiant τ: τ_1: On résout les deux équations et on montre qu'elles n'ont pas le même ensemble de solutions. τ_2: On montre qu'un nombre (par exemple 3) est solution de l'une sans être solution de l'autre.
			4.1.2.4- Théorème : Soient f, g et h trois applications de IR dans IR. Les équations $f(x)=g(x)$ et $f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$ sont équivalentes dans IR. - Démonstration : On montre que $\{x\epsilon IR,\ f(x)=g(x)\} = \{x\epsilon IR,\ f(x)+h(x)=g(x)+h(x)\}$	Ces deux théorèmes constituent les deux principaux éléments technologiques servant à justifier les techniques de réduction des équations.
			4.1.2.5- Théorème : Soient f et g deux applications de IR dans IR et λ un réel non nul. Les équations	

			$f(x)=g(x)$ et $\lambda f(x)=\lambda g(x)$ sont équivalentes dans IR. Démonstration : On montre que $\{x\epsilon IR,\ f(x)=g(x)\}=\{x\epsilon IR,\ \lambda f(x)=\lambda g(x)\}$	
			4.1.2.6- Définition : On appelle équation du premier degré à une inconnue *x*, toute équation se ramenant à la forme $ax+b=0$, où *a* et *b* sont des réels donnés.	Cette définition ne pourrait avoir du sens qu'à travers des activités de transformation d'équations les ramenant à la forme canonique indiquée. Par ailleurs, un flou subsiste quant à la nature de la transformation utilisée à cette fin. Les équations $\sqrt{x-1}=2$ et $\frac{1}{x+3}=5$ se ramènent toutes les deux, à la forme $ax+b=0$, est-ce qu'elles sont pour autant des équations du premier degré ?
		4.1.3- Résolution de l'équation	4.1.3.1- Résolution : $ax+b=0$ équivaut à $ax=-b$ 1er cas $a\neq 0$ on a : $x=-\frac{b}{a}$ 2ème cas : $a=0$ Si $b\neq 0$ alors S=Ø Si $b=0$ alors S=IR	Aucune justification n'est donnée. C'est comme si on veut outiller les élèves d'un algorithme applicable à toute circonstance. Ceci est confirmé par la batterie d'exercices proposés en guise de travail de la technique ainsi donnée.
			4.1.3.2-Exercices : Résoudre dans IR : $3(2x+1) - 2(1-x) = 1-4x$, ….. Résoudre et discuter dans IR : $(m-1)x + (3m-1) = 0$, …..	C'est le moment de l'étude consacré à travailler et consolider les techniques acquises. Les équations avec paramètre refont surface comme dans les années soixante après une longue absence due à l'avènement des mathématiques modernes. Mais cette apparition n'est justifiée ni conceptuellement ni fonctionnellement.
		4.1.4- Équations se ramenant au premier degré	Exercices : Résoudre dans IR $x^3 - 4x = 0$, $(x-3)(x-5) = 7(x-3)$, …. $\frac{x^2-4}{(x-2)^2}=0$, …	Les techniques de résolution sont laissées au choix des enseignants. Aucune indication n'est suggérée.
		4.1.5- Exercices résolus	-Résoudre dans IR l'équation : $\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-1)^2}=1$ -Déterminer le réel *a* de façon que l'équation $4(x+2) - x/5 = 7+ax$ n'ait pas de solution.	La première équation se ramène à $\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert=1$ et nécessite des études séparées dans trois intervalles de IR. Le deuxième exercice pose un problème redoutable en algèbre : La distinction des inconnues des paramètres. La prise de conscience de cette distinction ne peut se faire qu'en situation significative. N'oublions pas que DIOPHANTE distinguait déjà au 3ème Siècle le statut des paramètres (nombres donnés) et des inconnues, mais il ne symbolise pas les premières ; il a fallu attendre 13 siècles pour assumer cette symbolisation permettant de résoudre des problèmes en toute généralité, ce qui a été réalisé dans l'œuvre de VIÈTE.

Annexe 2 : Le programme d'algèbre de 1991

Thèmes	Objectifs spécifiques L'élève sera capable de :	Contenus	Recommandations
Opérations dans IR	Mettre en œuvre les règles opératoires dans IR et les règles sur les puissances pour : -Calculer la valeur d'une expression numérique ou une expression littérale pour des valeurs données des variables -Simplifier l'écriture d'une expression littérale	-Propriétés des opérations dans IR -Puissances d'exposants entiers relatifs -Propriétés -Valeur absolue d'un réel -Propriétés	-Les acquis antérieurs seront exploités et consolidés -Le calcul numérique et le calcul littéral seront menés de pair. -Les élèves utiliseront la calculatrice pour effectuer des calculs numériques.
Produits remarquables	Développer et factoriser une expression algébrique en utilisant des produits remarquables.	Produits remarquables: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$	-Aucune virtuosité n'est demandée dans les exercices de factorisation -On donnera aux élèves l'occasion de factoriser tout le long de l'année.
Racines carrées	-Trouver les réels x tels que $x^2 = a$ où $a \in IR^+$ -Mettre en œuvre les règles de calcul sur les radicaux pour simplifier l'écriture d'une expression ou pour en trouver la valeur exacte ou une valeur approchée.	-Racine carrée d'un réel positif -Racine carrée d'un produit -Racine carrée d'un quotient	-On consolidera les acquis antérieurs -Les opérations sur les radicaux superposés sont hors programme -Les élèves utiliseront la touche de la calculatrice pour trouver une valeur approchée ou exacte d'expressions numériques contenant des radicaux.
Ordre dans IR	-Comparer des réels -Encadrer une somme ou un produit de réels -Représenter un encadrement sur une droite graduée.	-Ordre dans IR -Intervalles de IR -Addition et ordre -Multiplication et ordre.	Les acquis antérieurs seront consolidés et complétés au niveau du vocabulaire et de l'expression mathématique.
Applications linéaires et affines	-Représenter graphiquement une application linéaire ou affine -Lire et interpréter des représentations graphiques de telles applications -Restriction d'une application linéaire ou affine. -Représenter graphiquement la restriction d'une application linéaire ou affine sur un intervalle donné de IR.	-Applications linéaires -Applications affines	-Les notions d'application d'un ensemble vers un autre et de restriction d'une application sur un intervalle de IR seront introduites au cours des activités et on évitera de s'attarder sur leurs aspects théoriques. -Les applications linéaires et affines seront appréhendées sous les trois aspects suivants : numérique, graphique et relationnel entre deux variables - On mettra en évidence la relation entre les fonctions linéaires et la proportionnalité.
Équations et problèmes	-Mettre en équation ou en inéquation un problème donné -Résoudre une équation ou une inéquation du premier degré à une inconnue réelle. -Représenter graphiquement les solutions d'une équation à deux inconnues réelles. -Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues réelles -Représenter graphiquement les solutions d'une inéquation du 1er degré à deux inconnues.	Exemples d'étude de problèmes conduisant à : -Une équation ou une inéquation du premier degré à une inconnue réelle. -Une équation du premier degré à deux inconnues réelles -Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues réelles. -Des inéquations du 1er degré à deux inconnues	-Les problèmes seront puisés dans le domaine mathématique ou dans le domaine des autres disciplines (Physique par exemple) ou encore dans l'environnement social et économique de l'élève. -Pour la résolution de tout problème, on dégagera nettement les différentes phases : Choix de l'inconnue ou des inconnues ; mise en équation ; résolution de l'équation ou de l'inéquation ou du système obtenus ; vérification et interprétation des résultats. -On pourra s'aider d'interprétations graphiques.

		réelles.	

Annexe 3 : Exemples d'organisations algébriques préconisées par le manuel de 1991

Chapitres	Types de tâches (T)	Techniques (τ)	Blocs technologico-théoriques [θ,Θ]
-Équations et inéquations à une inconnue	T_{11}-Vérifier qu'un réel donné est solution d'une équation ou inéquation. T_{12}-Résoudre une équation ou une inéquation du premier degré à une inconnue. T_{13}-Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. T_{14}-Représenter graphiquement les solutions d'une équation ou inéquation. T_{15}-Mettre un problème en équation ou en inéquation et le résoudre.	τ_{11}-Remplacer l'inconnue par ce réel et vérifier l'égalité ou l'inégalité des deux membres. τ_{121}-Ramener l'équation ou l'inéquation à la forme réduite et appliquer l'algorithme de résolution. τ_{122}-Dresser le tableau du signe de binômes. τ_{13}-Transformer l'équation ou l'inéquation sous la forme $F(x)=0$ (resp $F(x)<0$, $F(x)\leq 0$), factoriser $F(x)$ et appliquer l'intégrité de (IR,+,x) ou les règles de signes dans IR. τ_{14}-Utiliser un axe représentant la droite réelle. τ_{15}-*Technique non indiquée dans le manuel.*	-Règles concernant l'ordre et les opérations dans IR. -Algorithme et procédure de résolution d'une équation du 1er degré. -Identités remarquables. -Définition, réunion, intersection des Intervalles de IR.
-Applications linéaires	T_{16}-Déterminer une application linéaire à partir de la donnée d'un réel non nul et de son image. T_{17}-Représenter graphiquement une application linéaire f donnée par : $f(x)=ax$. T_{18}-Résoudre un problème en utilisant une application linéaire.	τ_{16}-Résoudre l'équation $ax_0=y_0$ où a est l'inconnue et x_0 et y_0 sont donnés. τ_{171}-Tracer la droite (OM_0) où $M_0(x_0, y_0)$ et $y_0=ax_0$. τ_{172}-Tracer (OA) où A(1,a). τ_{18}-*Aucune technique n'est indiquée.*	-Définition d'une application linéaire et sa notation : $x \mapsto ax$ -Repères cartésiens du plan. -Théorème donnant la représentation graphique d'une application linéaire.
-Applications affines	T_{19}-Déterminer une application affine donnée par deux réels et leurs images. T_{20}-Déterminer une application affine $x \mapsto ax+b$ donnée par l'un des coefficients a *ou* b et la donnée d'un réel non nul et son image. T_{21}-Représenter graphiquement une application affine. T_{22}-Interpréter la représentation graphique d'une application affine. T_{23}-Résoudre des problèmes en utilisant des applications affines.	τ_{19}-Appliquer le résultat : $b=f(0)$ *et* $a=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ τ_{20}-Appliquer l'un des résultats : $a=a_0$ *et* $b=y_0-a_0x_0$ ou $b=b_0$ et $a=\dfrac{y_0-b_0}{x_0}$, $x_0\neq 0$ τ_{211}-Tracer la droite (AB) où A et B sont deux points de la représentation graphique. τ_{212}-Tracer la droite passant par B(0,b) et parallèle à OA où A(1,a). τ_{22}-*Aucune technique n'est précisée.* τ_{23}-*Aucune technique n'est précisée.*	-Définition d'une application affine et sa notation : $x \mapsto ax+b$ -Propriétés d'une application affine. -Repère cartésien du plan. -Théorème (admis) du régionnement du plan.
-Systèmes d'équations et d'inéquations à deux inconnues.	T_{24}-Résoudre un système de deux équations à deux inconnues. T_{25}-Représenter graphiquement les solutions d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues.	τ_{241}-Utiliser la méthode de substitution. τ_{242}-Utiliser la méthode d'élimination. τ_{25}-Utiliser les représentations graphiques de deux applications affines convenables. τ_{26}-Utiliser le théorème du	-Définitions, propriétés et théorèmes concernant les équations et les inéquations du premier degré à une ou deux inconnues. -Repère cartésien du plan

	T_{26}-Résoudre graphiquement un système d'équations ou d'inéquations du premier degré à deux inconnues. T_{27}-Mettre un problème en équation ou en inéquation et le résoudre.	régionnement du plan. *τ_{27}-Aucune technique d'ordre général n'est indiquée.*	-Théorème du régionnement du plan.

Annexe 4 : Les compétences algébriques visées par le manuel de 2003 et leurs composantes

Chapitres	Compétences mathématiques Exigibles :	Composantes de la compétence			Contextes de réalisation
		Capacités	**Habiletés**	**Contenus mobilisés**	
Activités algébriques	**1-Pratiquer une démarche mathématique. 2-Communiquer dans un langage mathématique. 3-Mobiliser des algorithmes et des procédures. 4-Résoudre des problèmes. 5-Organiser et analyser l'information. 6-Utiliser les technologies de l'information et de la communication. 7-Apprécier la contribution des mathématiques au développement de l'individu et de la société.**	Mobiliser des règles, des algorithmes, des procédures et des techniques algébriques en contexte de résolution de problèmes.	-Concevoir une expression littérale modélisant une situation. -Interpréter une expression littérale. -Trouver une valeur numérique d'une expression littérale pour des valeurs données des variables. -Factoriser une expression à l'aide des identités remarquables. -Transformer l'égalité de deux expressions en une égalité équivalente.	-Propriétés de + et x dans IR. -Identités remarquables.	-Situations familières ou non familières en contextes intra- ou extra-mathématiques. -Situations faisant intervenir : L'égalité de deux expressions, la mesure de grandeurs et/ou une lecture graphique.
Fonctions linéaires		Mobiliser le concept de fonction linéaire pour analyser, modéliser et résoudre une situation-problème.	-Reconnaître une situation de linéarité. -Déterminer une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel. -Représenter graphiquement une fonction linéaire. -Lire et interpréter le graphique d'une fonction linéaire.	-Fonction linéaire. -Représentation graphique d'une fonction linéaire.	-Détermination graphique du coefficient d'une fonction linéaire. -Problèmes de pourcentage. -Construction de segments de longueur *a.b* ou *1/b* où *a* et *b* sont deux nombres non nuls donnés.
Équations et inéquations du premier degré à une inconnue		Résoudre des problèmes du premier degré.	-Résoudre des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue. -Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue.	-Équation et inéquations du 1er degré à une inconnue. -Équation $x^2=a$. -Signe d'un binôme du premier degré.	-Mise en équation d'un problème. -Mobilisation du signe d'un binôme pour résoudre un problème d'optimisation de coût. -Recherche d'une quatrième proportionnelle.
Fonctions affines		Mobiliser le concept de fonction affine pour analyser, modéliser et résoudre une situation-	-Déterminer une fonction affine connaissant les images de deux nombres. -Reconnaître une situation modélisable par une fonction	-Fonction affine. -Représentation graphique d'une fonction affine.	-Détermination de taux d'accroissement. -Conversion des températures (degré Celsius/degré Fahrenheit) -Vitesse du son. -Résolution

		problème.	affine. -Représenter graphiquement une fonction affine. -Lire et Interpréter le graphique d'une fonction affine.		graphique d'une équation ou d'une inéquation.
Systèmes de deux équations à deux inconnues		Résoudre des problèmes modélisables par des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.	-Résoudre graphiquement une équation du premier degré à deux inconnues. -Résoudre un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues. -Résoudre graphiquement un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues.	-Équation du premier degré à deux inconnues. -Systèmes de deux équations du 1er degré à deux inconnues. -Résolution par substitution ou par élimination -Résolution graphique.	-Modélisation d'un problème par une équation du premier degré à deux inconnues. -Modélisation d'un problème par un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues. -Résolution de problèmes d'optimisation.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

PREMIÈRE RENCONTRE AVEC L'ALGÈBRE

Mirène LARGUIER*

Résumé – Une comparaison entre les programmes du Québec et de la France pour des élèves entre 10 et 12 ans, a mis en lumière l'intérêt des problèmes de généralisation mis en œuvre dans des classes au Québec. Ce type de problème semble permettre une entrée vers l'algèbre et le développement d'une pensée algébrique en comparaison avec une pensée arithmétique. Les analyses a priori et a posteriori de quelques problèmes de généralisation typiques testés en France ont pour objectif de tester la solidité de l'hypothèse concernant l'intérêt des problèmes de généralisation.

Mots-clefs : algèbre – pensée algébrique – problèmes de généralisation

Abstract – A comparison between programs of Quebec and France for pupils between 10 and 12 years, revealed the interest for problems of generalization implemented in classes in Quebec. This type of problem seems to allow an entrance towards the algebra and the development of an algebraic thinking to comparison with an arithmetical thinking. Analyses of some typical problems of generalization tested in France have for objective to test the solidity of the hypothesis concerning the interest of the problems of generalization.

Keywords: Algebra - algebraic thinking - problems of generalization

I. UNE ÉTUDE DANS LE CADRE DE L'OBSERVATOIRE INTERNATIONAL DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE

Cet article est une contribution dans le cadre d'un projet de grande envergure qui est le développement de l'OIPA : Observatoire International de la Pensée Algébrique. Ce projet est coordonné par Alain Bronner en France et Hassane Squalli au Québec. Il s'appuie sur de nombreux résultats de la recherche résumés ci-dessous.

L'enseignement de l'algèbre, plus particulièrement lors de l'entrée dans l'algèbre, est un *problème de la profession*, au sens de Chevallard (2006). Pour répondre en partie à ce problème, dans les recherches menées par Squalli et al. au Québec, l'accent est mis sur le développement de la pensée algébrique dès le primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre (Squalli, Mary & Marchand 2011). En France, plusieurs travaux de recherche ont souligné les difficultés de la construction de la pensée algébrique (rapport sur le calcul de la commission Kahane 2002 ; numéro spécial de la revue Recherche en Didactique des Mathématiques 2012). Quant à Bronner (2007), il a montré la difficulté de circonscrire la frontière entre numérique et algébrique. Il est à l'origine de l'idée d'un observatoire du numérique et de l'algébrique et plusieurs travaux de doctorat qu'il a encadrés portent

* Université de Montpellier – France – mirene.larguier@fde.univ-montp2.fr

Larguier M. (2015) Première rencontre avec l'algèbre. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 313-333.

directement sur des thématiques de ce futur observatoire (Larguier 2009 ; Marcio Santos Farias 2010 ; Andwandter 2012 ; Briant 2013).

Au Québec comme en France, l'articulation entre les domaines numérique et algébrique constitue l'un des aspects du *problème de la profession* cité précédemment. Toutefois cette question ne se pose pas de la même façon dans les deux pays comme l'a souligné Artigue (2012) lors d'une Conférence Nationale sur l'Enseignement des Mathématiques à l'IFÉ. Elle distingue trois voies d'entrée[1] suivant les pays et les cultures :

- la voie classique pour nous [en France] des équations,
- la voie de la reconnaissance de structures (patterns) et de la généralisation [voie choisie par les pays anglo-saxons].
- la voie de la modélisation et des fonctions.

> […] ces différentes routes ne posent pas dans les mêmes termes la question des discontinuités entre arithmétique et algèbre.

Cet article présente des éléments d'une recherche en lien avec l'une des questions vives travaillées dans l'OIPA à savoir : quelle entrée dans l'algèbre privilégier et quelles situations proposer aux élèves pour développer une pensée algébrique ? Une hypothèse retenue par l'équipe au Québec et soutenue également par l'équipe française, est de proposer des situations de généralisation comme porte d'entrée vers l'algèbre. Dans cet article il s'agit d'analyser une situation de généralisation avec la perspective de repérer la qualification de la pensée des élèves comme étant de nature arithmétique ou bien de nature algébrique. Il s'agit donc de délimiter d'une part la frontière entre les domaines numériques et algébriques considérés comme cadres mathématiques (au sens de Douady 1984), et d'autre part la frontière entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique, deux frontières qui ne se recouvrent pas toujours.

Après avoir comparé le *savoir à enseigner* (au sens de la transposition didactique définie par Chevallard 1985) dans les programmes du Québec et de la France relativement au début de l'algèbre, l'article présentera trois exemples de situations de généralisation et s'attachera à faire l'analyse de productions d'élèves concernant l'un de ces problèmes : les maisons en allumettes. Cette situation testée en France en classe de 5^{e} sera utilisée pour dégager une série de critères afin de décrire la genèse de la pensée algébrique chez les élèves. La question essentielle est : quels sont les indicateurs qui permettent de diagnostiquer chez un élève une pensée algébrique naissante ? Cette question va de pair avec cette autre question qui ne sera pas traitée dans cet article : ces problèmes de généralisation sont-ils véritablement une réponse pertinente pour signifier l'entrée dans l'algèbre ?

II. COMPARAISON DES PROGRAMMES DU QUÉBEC ET DE LA FRANCE

La comparaison des institutions scolaires québécoises et françaises n'est pas facile, car l'enseignement secondaire commence en classe de 6^{e} en France pour des élèves qui ont normalement 11 à 12 ans, alors qu'au même âge au Québec ces élèves sont en sixième année de l'enseignement primaire (Cf. tableau 1). Aussi l'analyse comparée des programmes de fin de primaire et du début du secondaire dans les deux pays, montre des différences notoires relatives à l'entrée dans l'algèbre et plus spécifiquement l'entrée dans la pensée algébrique.

[1] Citation extraite du diaporama, consulté sur Internet le 20 février 2015 : http://www.canal-u.tv/video/ecole_normale_superieure_de_lyon/12_bull_le_calcul_de_l_ecole_au_college_vers_le_calcul_algebrique.8596

Concernant le domaine numérique, le programme du Québec le dénomme *arithmétique* alors qu'en France il apparait sous la dénomination *nombres et calcul.* Par ailleurs le programme du Québec comporte des expressions inconnues en France comme *nombre composé* et *nombre carré*[2] avec les définitions suivantes[3] :

- « Un **nombre composé** est un nombre qui a 3 facteurs ou plus. »
- « Un **nombre carré** est un nombre pouvant s'exprimer sous la forme de n^2, où *n* est un nombre naturel. »

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Enseignement pré-scolaire</td><td colspan="6">Enseignement primaire au Québec</td><td colspan="2">Enseignement secondaire au Québec</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Maternelle</td><td>1e</td><td>2e</td><td></td><td>Maternelle</td><td>1e</td><td>2e</td><td></td><td>Maternelle</td></tr>
<tr><td>3ans – 4 ans</td><td>4 - 5</td><td>5 - 6</td><td>6 - 7</td><td>3ans – 4 ans</td><td>4 - 5</td><td>5 - 6</td><td>6 - 7</td><td>3ans – 4 ans</td><td>4 - 5</td><td>5 - 6</td></tr>
<tr><td>PS</td><td>MS</td><td>GS</td><td>CP</td><td>PS</td><td>MS</td><td>GS</td><td>CP</td><td>PS</td><td>MS</td><td>GS</td></tr>
<tr><td colspan="3">Maternelle</td><td colspan="5">Enseignement élémentaire</td><td colspan="3">Collège</td></tr>
<tr><td colspan="8">Enseignement primaire en France</td><td colspan="3">Enseignement secondaire en France</td></tr>
</table>

Tableau 1 - *comparaison des institutions scolaires au Québec et en France*

Concernant les contenus en terme d'objets mathématiques numériques, les programmes des deux pays se ressemblent, si ce n'est que dans les programmes du Québec les nombres décimaux - ainsi que les nombres carrés, premiers ou composés - sont abordés dès la 4e du primaire (correspondant au CM1 en France), et les puissances sont abordées en 5e du primaire (correspondant au CM2 en France). Le tableau 2 précise cette comparaison et révèle qu'en France l'étude des entiers naturels est plus succincte qu'au Québec. Un exemple illustre bien cette comparaison : il faut arriver en classe de terminale scientifique (17-18 ans) pour que soit abordée la notion de nombre premier dans le cadre d'une partie optionnelle de ce programme (enseignement de spécialité, partie dénommée *arithmétique*).

Première apparition dans les programmes	Au Québec	En France	Remarque
Nombre premier	4e primaire (9-10 ans)	Terminale S enseignement de spécialité	Nombres premiers entre eux : abordé en classe de 3e du collège (14-15 ans)
Nombre composé	4e primaire	N'apparait pas	
Nombre carré	4e primaire	N'apparait pas	
Puissance	5e primaire	4e (13-14 ans)	
Nombre décimal	4e primaire	CM1 (9-10 ans)	

Tableau 2 - *étude comparée du numérique dans les programmes du Québec et de la France*

Concernant l'entrée dans la pensée algébrique et les problèmes de généralisation, on trouve au Québec cette préconisation[4] qui concerne tout le primaire :

[2] En France cela correspond à la dénomination suivante : nombre carré parfait
[3] Définitions issues de ce site : http://bv.alloprof.qc.ca
[4] La référence de la citation se trouve dans la « progression des apprentissages au primaire » consulté sur le site : http://www1.mels.gouv.qc.ca/progressionPrimaire/mathematique/. Sauf avis contraire, toutes les citations de l'article relatives au Québec sont extraites de ce document qui fixe le *savoir à enseigner*.

> Décrire dans ses mots et avec un vocabulaire mathématique approprié des régularités numériques (ex. : nombres pairs, nombres impairs, nombres carrés, nombres triangulaires, nombres premiers, nombres composés).

Les élèves sont donc invités à repérer et à décrire des structures à travers des *régularités numériques*, ce qui peut constituer un pas vers l'expression d'une généralisation inductive (Piaget & Henriques 1978). Ce type de compétence n'est pas du tout signalé dans le programme français. Par ailleurs, au Québec, le travail sur les nombres carrés ou triangulaires favorise une conception géométrique des nombres entiers et l'émergence de concepts et de théorèmes en acte favorisant la généralisation. Par exemple : pour passer du nombre carré n^2 au nombre carré $(n+1)^2$, il suffit d'ajouter $2n+1$ à n^2 en visualisant les éléments à ajouter au bord du premier carré pour obtenir le second (Cf. figure 1).

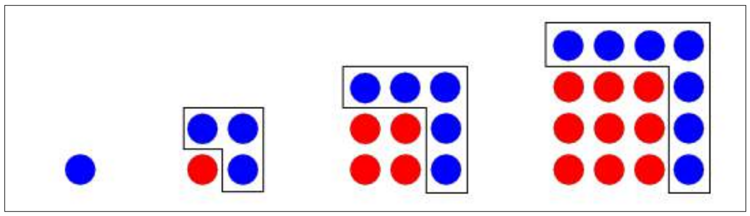


Figure 3 *- les nombres carrés (http://images.math.cnrs.fr)*

Le terme équation apparait une fois dès le primaire dans le programme québécois. Voici ce qui est demandé au Québec pour tout le primaire concernant le travail en arithmétique :

> Traduire une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou d'équations et vice versa (exploitation des différents sens de l'addition et de la soustraction).

Ce travail relatif aux équations est précisé en lien avec des situations additives :

> Déterminer un terme manquant dans une équation (relations entre les opérations) : $a + b = \square$, $a + \square = c$, $\square + b = c$, $a - b = \square$, $a - \square = c$, $\square - b = c$

Il est également précisé dans des situations multiplicatives :

> Déterminer un terme manquant dans une équation (relations entre les opérations) : $a \times b = \square$, $a \times \square = c$, $\square \times b = c$, $a \div b = \square$, $a \div \square = c$, $\square \div b = c$

Ce travail sur ces équations qui peuvent se résoudre arithmétiquement vise leur résolution mais aussi vise à faire émerger les liens entre d'une part addition et soustraction et d'autre part entre multiplication et division ce qui peut être vu comme une initiation à l'algèbre en tant qu'étude des structures des ensembles de nombres.

Dans les termes à retenir, se trouvent : « Égalité, inégalité, équation », égalité et équation ne sont donc pas des synonymes malgré leurs signifiants identiques, et les élèves doivent connaitre ces termes dès la 3^e (correspondant au CE2 en France).

Toujours au Québec, un autre élément qui prépare les élèves à l'entrée dans l'algèbre est la préconisation suivante dès le début du primaire : « Établir la relation d'égalité entre des expressions numériques (ex. : $3 + 2 = 6 - 1$). » Effectivement, ce type de tâches permet de mieux construire le concept d'égalité ; cela contribue au dépassement de l'obstacle qui consiste à connaitre l'égalité comme une relation qui n'est pas symétrique et qui remplace l'expression « ça fait ». Cette nouvelle conception de l'égalité permet de concevoir deux noms propres d'un même objet qui dénotent le même nombre (Frege 1892). Dès le début du primaire il est demandé également dans le programme québécois de « Déterminer des équivalences numériques à l'aide de relations entre les opérations » en utilisant en acte la commutativité et l'associativité (ces termes utilisés dans le texte du programme n'ont pas à être connus par les élèves). Cette demande renforce encore la solidité du concept d'égalité dans son acception d'équivalence.

Les termes *régularité* et *suite* doivent être connus par les élèves dès le début du primaire (ils figurent explicitement dans le vocabulaire à institutionnaliser), soit dès 6 ans, et voici encore ce qui est dicté par le programme québécois :

> Les situations qui lui sont proposées doivent comporter des régularités numériques ou non numériques (couleurs, formes, sons, etc.). Elles lui permettront d'observer et de décrire diverses régularités, des suites de nombres et d'opérations telles que la suite des nombres pairs, la suite des multiples de 5, la suite des nombres triangulaires. Elles le conduiront ainsi à ajouter des termes à une suite, à énoncer des règles générales ou à construire des modèles. Il pourra alors énoncer ou déduire des définitions, des propriétés et des règles. (Progression des apprentissages au primaire).

Concernant l'entrée dans l'algèbre, il y a incontestablement une grande différence avec les programmes français du primaire, ces derniers n'invitant pas explicitement les professeurs des écoles à faire découvrir à leurs élèves des régularités. D'autre part, en France, le terme d'équation n'intervient pas dans les programmes de primaire et le terme d'égalité n'apparait que dans l'expression « égalité de longueurs ». Dans les programmes français apparait une insistance pour le calcul sous toutes ses formes et pour la résolution de problèmes. Dans ce cadre, il s'agit de travailler les objets des différents domaines et de développer le raisonnement logique, mais sans préciser ce que recouvre le raisonnement en mathématiques : « La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages. ». Ainsi le programme en France est davantage axé sur des activités numériques alors que pour le Québec, outre les aspects calculatoires et la résolution de problèmes qui sont également au cœur de l'activité mathématique, le programme ouvre explicitement une fenêtre vers le développement d'une pensée algébrique qui se traduit par des problèmes de généralisation et des études de suites.

Concernant le collège en France, dont la première année correspond à la dernière année du primaire au Québec, les termes égalité et équation apparaissent et le préambule du programme de collège précise que les élèves doivent « assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes (en particulier distinguer égalité, identité et équation). » (BO spécial n° 6 du 28 août 2008, p.10). L'algèbre est donc présentée comme un langage avec des objets particuliers qui doivent être distingués, mais aucune autre précision n'est donnée.

Dans le programme français de la classe de sixième, dans le domaine dénommé « nombres et calculs » la préoccupation essentielle est le développement de techniques de calcul. Le terme « égalité » n'apparait même pas. Aucune proposition du programme ne permet de l'interpréter comme un pas vers l'algèbre si ce n'est le travail relatif aux formules : « À travers les activités sur les longueurs, les aires et les volumes, les élèves peuvent se construire et utiliser un premier répertoire de formules » (ibid., p.17).

Le premier contact avec la lettre est donc permis par l'usage des formules, ce qui confère à la lettre un statut de marque place, et pour les élèves la lettre apparait comme l'initiale d'un mot (r pour rayon, l pour largeur, etc.) ce qui peut constituer un obstacle didactique au sens de Brousseau (1998). C'est également en cinquième qu'apparait le terme d'équation. « L'initiation à la notion d'équation » apparait à travers ce type de tâches : « Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques » (Ibid.) et c'est assorti de ce commentaire :

> Une attention particulière est apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique.

> Les programmes du collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens.
>
> La classe de cinquième correspond à une étape importante avec le travail sur des égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner. (ibid., p. 23).

Ainsi les programmes alertent les professeurs sur la difficulté de l'entrée dans l'algèbre qui se traduit tout d'abord par l'usage de la lettre et aussi par un changement conceptuel concernant l'objet égalité. Un type de tâches motivant l'entrée dans l'algèbre est implicitement préconisé, à savoir proposer « des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique ». Une raison d'être de l'algèbre apparait donc là comme étant un raisonnement nécessité par des situations dans lesquelles le raisonnement arithmétique n'est plus efficace. L'opposition entre arithmétique et algébrique est donc implicitement exprimée.

Pour trouver une allusion aux problèmes de généralisation – problèmes qui apparaissent dès l'âge de 6 ans au Québec à travers l'étude de régularités – il faut regarder le programme français de la classe de quatrième (élèves de 13 à 14 ans). Effectivement on trouve une indication discrète sur des situations de généralisation, mais ce n'est vraiment pas mis en relief. C'est en lien avec le thème « calcul littéral » assorti du commentaire suivant :

> Le travail proposé [avec le calcul littéral] s'articule autour de trois axes :
>
> - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ;
> - utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ;
> - utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique). (Ibid, p. 29)

En conclusion, les instructions officielles au Québec et en France décrivent deux curricula officiels très différents en ce qui concerne l'entrée dans l'algèbre. Cependant des recherches en didactique au Québec comme en France postulent que les problèmes de généralisation sont de bons candidats pour permettre le développement d'une pensée algébrique. Dans la suite de cet article, l'analyse de productions d'élèves à propos de l'un de ces problèmes en France montrera comment peut s'opérer l'articulation entre le numérique et l'algébrique.

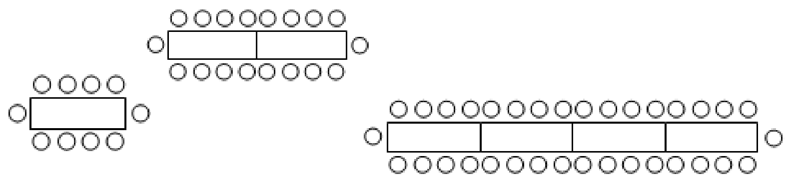
III. PRESENTATION D'EXEMPLES DE PROBLÈMES DE GENERALISATION

Dans cette partie je présente en tant qu'exemples trois problèmes de généralisation. Il s'agit en fait dans ces trois cas de problèmes dont le modèle mathématique est une suite arithmétique. L'analyse a posteriori permet de mettre au jour les réponses possibles de la part d'élèves ainsi que les indicateurs d'une pensée algébrique émergente. Dans le cadre de cet article, cette analyse ne sera réalisée que pour le problème des maisons en allumettes.

1. Les tables de la cafeteria

<u>Les tables de la cafétéria</u>

Dans une cafétéria d'école, le cuisinier dispose de petites tables rectangulaires qu'il faut mettre bout à bout pour former de plus grandes tables. Voici quelques dispositions possibles.



a) Donne une manière de trouver rapidement le nombre de chaises placées autour d'une grande table, peu importe la longueur de celle-ci.

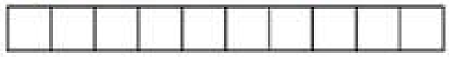
b) Si une grande table est entourée de 234 chaises, combien de petites tables ont été nécessaires à sa formation ?

Figure 4 - *énoncé donné aux élèves du problème « les tables de la cafeteria »*

Un problème similaire a été proposé par Vlassis et Demonty (2002). Le problème tel qu'il est présenté dans la figure 2 a été testé et analysé au Québec. Il a été repris en France dans le cadre de la recherche OIPA au début du collège, en 6^{e} et en 5^{e}. Contrairement aux élèves du même âge au Québec, en France les élèves ont été totalement déconcertés par ce type de problème en rupture avec les problèmes donnés habituellement et ont en général rendu feuille blanche ou alors ils ont donné le nombre de chaises pour le dessin représentant les quatre tables.

2. Les chaînes du bijoutier

Laurent, un bijoutier, fabrique des chaines en or à mailles de forme carrée comme celle-ci :



Il fait des chaines de différentes longueurs pour diverses utilisations (au cou, au pied, comme boucles d'oreilles).

L'or coûte cher. Quand il fait une commande, il compte les tiges une par une pour être sûr de ne pas en commander de trop ni en oublier. Mais c'est long. Il voudrait pouvoir trouver le nombre de tiges dont il a besoin sans être obligé de compter les tiges une par une. Vous devez envoyer un message au bijoutier dans lequel vous allez lui expliquer comment il pourrait faire pour trouver combien de tiges il a besoin selon le nombre de mailles.

Figure 5 **-** *énoncé du problème du bijoutier*

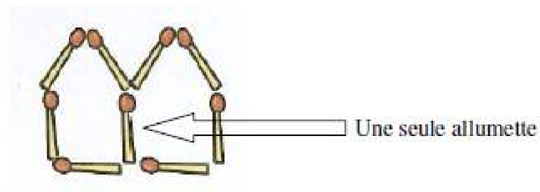
Ce problème a été travaillé au Québec dans le cadre de recherches collaboratives :

> Dans le cadre d'une rencontre sur le sujet [du passage de l'arithmétique vers l'algèbre] tenue à l'université de Sherbrooke au printemps 2013, une collaboration entre des didacticiens et des didacticiennes d'universités québécoises, le MELS (Directions des programmes pour la mathématique) et des conseillers pédagogiques permit l'émergence d'un groupe. Ce dernier se donne comme objectif de soutenir le développement de la pensée algébrique dans une trajectoire continue entre les ordres d'enseignement primaire et secondaire. Le moyen choisi par le groupe est la mise en œuvre d'un dispositif de formation-action permettant à des conseillers pédagogiques ainsi qu'à des enseignants du primaire et du secondaire des commissions scolaires de la province, de perfectionner leurs compétences professionnelles à intégrer dans leur pratique d'enseignement des mathématiques des moyens, reconnus par la recherche, pour favoriser le développement de la pensée algébrique. (http://mathematiqueps.blogspot.fr/)

Ce problème n'a pas encore été testé en France, mais en revanche une vidéo prise dans une classe de 6^{e} québécoise et issue de la recherche citée précédemment, a été analysée par les chercheurs français dans le cadre de l'OIPA (Cf. article de Bronner pour EMF 2015). Un problème similaire a également été proposé par Krysinska et al. (2009) sans le contexte de la bijouterie mais uniquement dans le cadre géométrique dans lequel on cherche le nombre de côtés de carrés accolés.

3. *Les maisons en allumettes*

Avec des allumettes, on veut construire une succession de maisons comme ci-dessous:



Arthur dit qu'il est capable de trouver la quantité d'allumettes nécessaires à la construction de n'importe quel nombre de maisons. Trouver comment fait Arthur.

Figure 6 - *énoncé du problème « les maisons en allumettes »*

L'énoncé tel qu'il est proposé dans la figure 4 a été donné en France à des élèves de 5^e par une étudiante de master 2 lors de son stage en responsabilité[5] (Massare 2011). Les productions d'élèves étudiées dans la section suivante proviennent de ce mémoire de master. Ce problème figure également dans l'article de Krysinska et al. (2009) comme étant un bon candidat pour introduire une pensée fonctionnelle mais aussi pour permettre l'entrée dans l'algèbre et le développement d'une pensée algébrique.

IV. ANALYSE DU PROBLÈME DES ALLUMETTES

1. *Pensée arithmétique et pensée algébrique*

La pensée arithmétique correspond à un raisonnement qui ne s'appuie que sur des données numériques connues présentes dans l'énoncé ainsi que sur les opérateurs numériques usuels pour obtenir le résultat recherché. Ce résultat *r* peut donc s'écrire comme une expression numérique mobilisant les données de l'énoncé et des opérateurs. Cette expression numérique qui modélise le problème peut être écrite dans le registre (Duval 1995) des écritures mathématiques ou dans le registre du langage naturel, cela ne modifie pas la nature du raisonnement. Si *r* est le résultat recherché et a_1, a_2 … a_n les données numériques connues de l'énoncé alors il existe une fonction définie dans R formulée dans le registre du langage naturel ou du langage mathématique telle que :

$$f\ (a_1,\ a_2\ \dots\ a_{n)} = r$$

La pensée algébrique a contrario, s'exprime par un raisonnement qui mobilise au moins une donnée inconnue en opérant sur elle comme si elle était connue. Ce type de raisonnement nécessite une fiction : *faire comme si* ce nombre était connu et calculer avec lui comme avec les nombres connus. En supposant qu'il n'y ait qu'un seul nombre inconnu *x* dans le problème, si a_1, a_2 … a_n sont les nombres donnés dans l'énoncé, la modélisation de ce nouveau problème peut être exprimée par :

il existe une fonction f définie dans R telle que $f\ (a_1,\ a_2\ \dots\ a_n,\ r,\ x_{)} = 0$

[5] Les fonctionnaires stagiaires, futurs enseignants de mathématiques de collège et de lycée, ont un stage en responsabilité dans un établissement qui fait partie intégrante de la deuxième année de master.

Dans le cas du problème des allumettes, la modélisation du problème sous sa forme réduite conduit à cette réponse avec n qui est le nombre d'allumettes pour un nombre entier m de maisons :

$$n = 4m+1$$

Dans cette égalité, qui est la modélisation d'une suite arithmétique, le nombre m peut être vu comme une variable si on adopte un point de vue dans le cadre des fonctions, ou n et m peuvent être vus comme des nombres indéterminés si on regarde cette égalité dans le cadre numérique comme étant une identité c'est à dire l'équivalence entre deux signes qui dénotent le même nombre (Frege 1892). Comme précédemment cette modélisation peut tout aussi bien être exprimée dans le registre du langage naturel : « le nombre total d'allumettes est égal au nombre de maisons multiplié par 4 auquel on ajoute 1 » (d'autres expressions sont possibles).

2. *Un axe et des critères pour identifier un type de pensée*

J'utilise un axe qui relie à gauche la pensée arithmétique et à droite la pensée algébrique telles qu'elles peuvent être définies comme précédemment dans le savoir de référence. Le raisonnement mis en œuvre par un élève pour résoudre le problème peut être interprété comme étant représenté par un point sur cet axe.

pensée arithmétique pensée
algébrique

Pour interpréter le raisonnement d'un élève pour le positionner sur cet axe, la typologie des preuves décrite par Balacheff (1987) est un outil utile. En effet pour exprimer la généralité et en conséquence le modèle algébrique correspondant à la situation des maisons en allumettes, l'élève doit convoquer d'une part l'objet « nombre total d'allumettes » et d'autre part l'objet « nombre de maisons » (ou l'objet « nombre d'étapes » ou encore « numéro de l'étape ») à travers des ostensifs. Ces derniers peuvent être le langage naturel, ou des abréviations ou encore des lettres sans rapport avec les mots du langage courant, mais aussi des dessins comme celui d'une maison ou d'une allumette. La convocation de ces objets est alors un marqueur de cette pensée algébrique naissante. Dans le cas d'une suite arithmétique comme dans celui d'une suite géométrique, Krysinska et al. (2009) précisent ce qui suit :

> les modèles fonctionnels a+bn et ab^n jouissent de propriétés intéressantes dont ils ont le monopole : non seulement, ils se prêtent à une double lecture [itérative et fonctionnelle], mais ils constituent aussi des modèles dont l'expression rend compte et valide à la fois la régularité itérative et le principe de la construction du tableau numérique. Nous en tirerons l'hypothèse qu'ils constituent des modèles fonctionnels sans doute plus accessibles que d'autres lors d'une première approche des problèmes de dénombrement. (Op. cité, p. 13)

Ainsi l'expression du modèle constitue le processus de généralisation. La preuve mathématique dans le savoir de référence, à savoir la démonstration, n'est pas à la portée des élèves car elle suppose une démonstration par récurrence de la validité de l'énoncé : quel que soit l'entier m, le nombre d'allumettes n est donné par n = 4m+1. Evidemment des élèves de début de collège ne se posent pas la question de la démonstration, cependant il leur est possible :

- de tester la validité du modèle produit à l'aide de quelques exemples vérifiables grâce à des dessins ;
- de justifier le modèle produit en montrant son adéquation avec le processus permettant de construire la suite des maisons.

Ainsi l'analyse des productions d'élèves selon la typologie de Balacheff pour caractériser le type de preuve permet de mettre au jour des indicateurs de la genèse d'une pensée algébrique.

3. Preuves pragmatiques mais des pensées différentes

La typologie de Balacheff permet de différencier des élèves qui n'utilisent que des nombres connus mais avec des fonctions différentes. Ainsi dans la catégorie des *preuves pragmatiques* :

- ✓ des élèves peuvent utiliser uniquement des cas particuliers en appui sur les dessins correspondants des maisons et traduire ainsi une pensée strictement arithmétique, il s'agit de l'*empirisme naïf*. Dans ce cas de figure, l'élève ne pourra pas exprimer la généralité ;
- ✓ des élèves peuvent utiliser un cas particulier comme *exemple générique*, c'est-à-dire que le nombre de maisons est supposé pouvoir être remplacé par n'importe quel autre. Bien que les objets utilisés soient des objets du domaine numérique, la pensée exprime un raisonnement générique reproductible avec n'importe quel nombre et elle dit la généralisation. Ce type de raisonnement signe une entrée dans la pensée algébrique avec en implicite le concept en acte de quantification universelle de l'énoncé produit. C'est comme si l'élève disait : « quel que soit le nombre pris à la place de l'exemple présenté pour indiquer le nombre de maisons, cela conduira à cette procédure de calcul pour donner le nombre d'allumettes ».

4. Preuves intellectuelles

L'expression de la généralité peut être exprimée dans le registre du langage naturel sans aucun appui sur des données numériques. Cela correspond alors à l'*expérience mentale* qui est une forme de *preuve intellectuelle* et qui exprime une pensée algébrique. L'élève peut fonder ce raisonnement :

- ✓ en exprimant le nombre d'allumettes en fonction du nombre de maisons à partir de l'observation des dessins des maisons ce qui l'amène à s'appuyer sur le contexte. La modélisation est alors complètement dépendante du milieu matériel ;
- ✓ en observant un invariant dans le cadre numérique qui est la relation qui lie le nombre de maisons et le nombre d'allumettes ce qui le conduit à faire abstraction du contexte. La relation exprimée est alors sous la forme d'un opérateur dans un tableau de nombres. Il y a un détachement du milieu matériel pour faire confiance aux nombres.

La généralité itérative peut exprimer également la relation entre le nombre d'allumettes pour un certain nombre de maisons et le nombre d'allumettes pour une maison supplémentaire. Autrement dit l'élève a compris que pour une maison de plus il faut ajouter 4 allumettes. Ce raisonnement général n'est pas suffisant pour exprimer le nombre d'allumettes pour m maisons, il dénote cependant que l'élève est capable d'exprimer une généralité, ce qui est un pas vers la pensée algébrique. Si la suite u_n exprime le nombre d'allumettes pour n maisons, l'élève a identifié en actes un invariant opératoire qui est : $u_{n+1} = u_n + 4$ (Dans ce cas Krysinska et al. (2009) parlent de régularité itérative qu'ils opposent à une régularité fonctionnelle).

L'*expérience mentale* peut conduire l'élève à modéliser la situation dans un registre proche de celui du langage algébrique dans le savoir de référence. L'élève produit alors un calcul qui fait intervenir des nombres connus, des opérateurs arithmétiques et aussi des signes qui désignent les variables. Voici des variantes pour les signifiants non langagiers qui expriment ces variables :

- ✓ des dessins, par exemple celui d'une allumette ;
- ✓ des mots du langage naturel ;
- ✓ des abréviations de mots ;
- ✓ des pointillés ;
- ✓ des lettres comme dans le registre algébrique.

5. Synthèse

Ces différentes réponses sont résumées dans le schéma ci-dessous.

Pensée arithmétique ⟷ Pensée algébrique

A	B	C	D	E	F	G
Cas particuliers pris comme exemples	Expression de la relation entre u_n et u_{n+1}	Exemple générique	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage des lettres

Il faut remarquer que ce qui est attendu de la part d'élèves de cinquième, c'est essentiellement une conjecture qui est l'expression du nombre d'allumettes pour un nombre de maisons donné et la justification de cette conjecture en appui sur la situation concrète.

V. ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ELEVES

Je rappelle que ces productions ont été recueillies dans une classe de 5^e (12- 13 ans) en France (Massare 2011). Les élèves ont travaillé individuellement avant d'être mis en groupe de 4 à 5 élèves qui ont travaillé de façon autonome. Les écrits que je vais analyser sont ceux qui émanent de ce travail de groupe.

En synthèse, chaque production sera caractérisée en reprenant les 7 niveaux (de A à G) représentés sur le schéma de la partie IV – 5.

1. Groupe 1

Les élèves de ce groupe s'appuient sur la relation numérique repérée dans le cadre numérique « avec ces chiffres » entre les nombres des couples (1 ; 5), (2 ; 9), (3 ; 13) pour établir la conjecture générale (appelée hypothèse finale) sur le nombre d'allumettes (Cf. figure 5). La généralité, qui est ici une généralité fonctionnelle, est exprimée dans le registre du langage naturel. Où repérer ces élèves sur l'axe pensée arithmétique/pensée algébrique ? Ils ne sont pas loin de l'*empirisme naïf* avec leur appui sur 3 exemples, mais ils sont capables d'inférer à partir de là une conjecture relative à une règle générale exprimant la relation entre le nombre de maisons et le nombre d'allumettes.

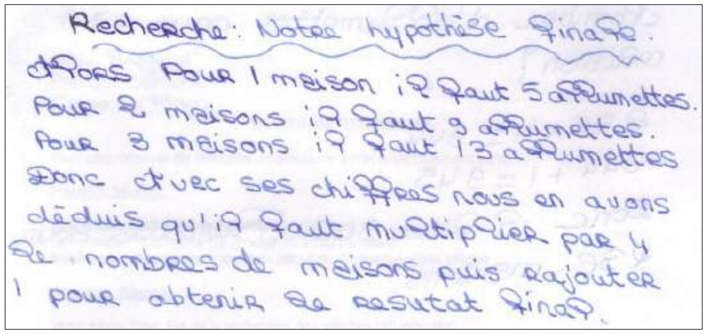

Recherche : Notre hypothèse finale.
Alors pour 1 maison il faut 5 allumettes.
Pour 2 maisons il faut 9 allumettes.
Pour 3 maisons il faut 13 allumettes
Donc avec ses chiffres nous en avons
déduis qu'il faut multiplier par 4
le nombres de maisons puis rajouter
1 pour obtenir le resutat final.

Figure 7 - *groupe 1*

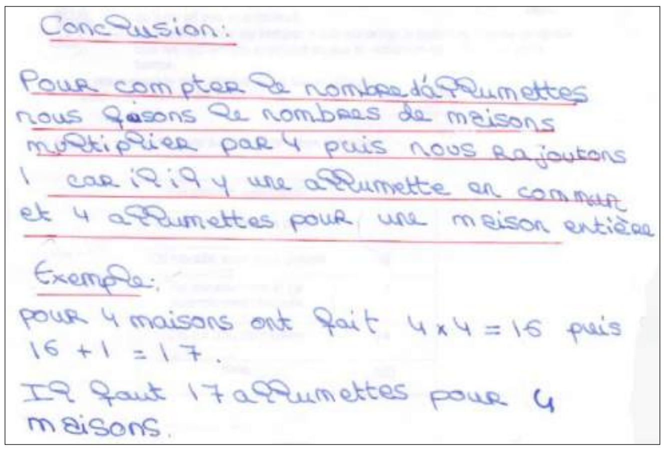

Conclusion :
Pour compter le nombre d'allumettes
nous faisons le nombres de maisons
multiplier par 4 puis nous rajoutons
1 car il il y une allumette en commun
et 4 allumettes pour une maison entière
Exemple :
pour 4 maisons ont fait 4 x 4 = 16 puis
16 + 1 = 17.
Il faut 17 allumettes pour 4
maisons.

Figure 8 - *groupe 1 : fin de leur rédaction*

Sur la figure 6, nous voyons que les élèves tentent de justifier leur règle générale, leur hypothèse finale, et nous pouvons qualifier cela d'expérience mentale. Les élèves expriment qu'en général une maison entière ne comprend que 4 allumettes (et en sous-entendu : non pas 5 allumettes par maison entière car il y a une allumette en commun). La justification de l'ajout de 1 est toutefois erronée. La tentative de validation et de mise en cohérence de la règle obtenue dans le cadre numérique avec le milieu matériel échoue. Les élèves finissent par un travail par ostension en utilisant un exemple générique en montrant comment fonctionne leur formule à laquelle ils font confiance dans le cadre numérique.

2. Groupe 2

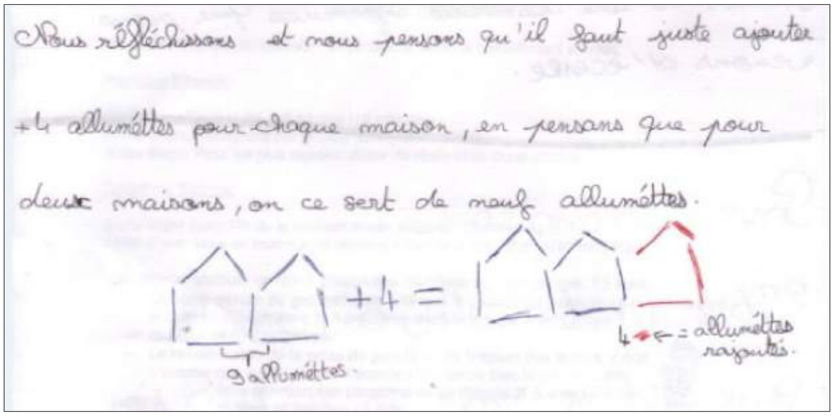


Figure 9 - *groupe 2*

Ce groupe explicite la relation entre u_n et u_{n+1} de manière générale et en particulier dans le cas où n est égal à 2. La généralité itérative est exprimée par les 4 allumettes dessinées en rouge avec la mention explicite « allumettes rajoutées ».

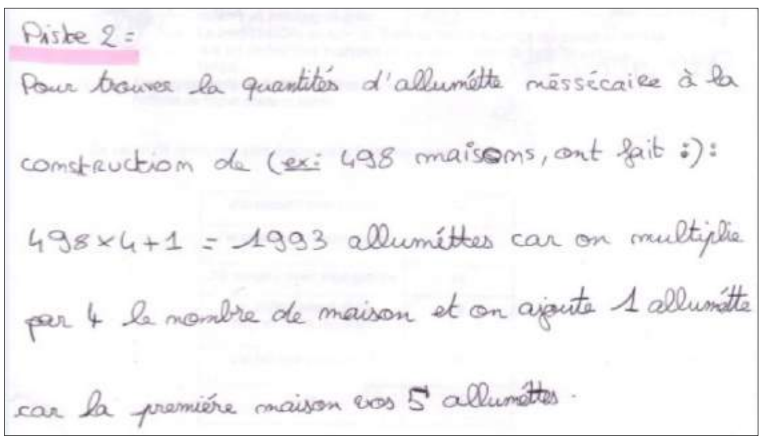


Figure 10 - *groupe 2 : fin de leur rédaction*

Dans cette deuxième partie, le groupe propose un prototype d'*exemple générique*. Le grand nombre de maisons, 498, est pris pour montrer qu'il s'agit de n'importe quel nombre, et même un grand nombre ! La généralisation s'exprime donc à travers cet exemple, elle est même justifiée car il faut compléter les 4 allumettes de la première maison par une allumette. L'exemple générique est donc justifié par l'énoncé en langage naturel qui correspond à l'*expérience mentale*.

3. Groupe 3

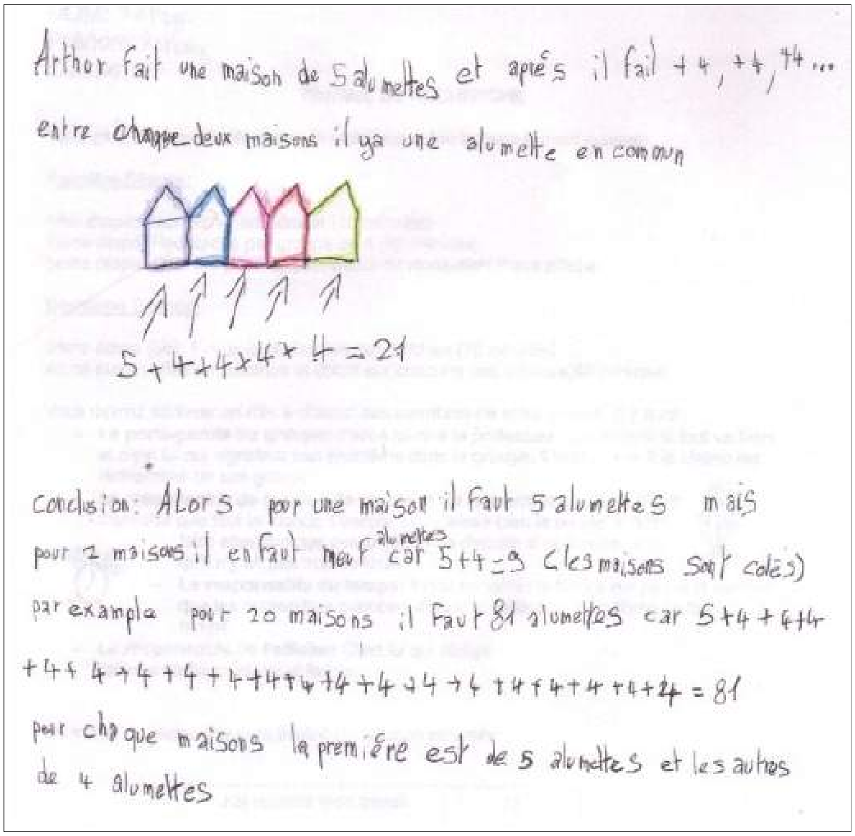
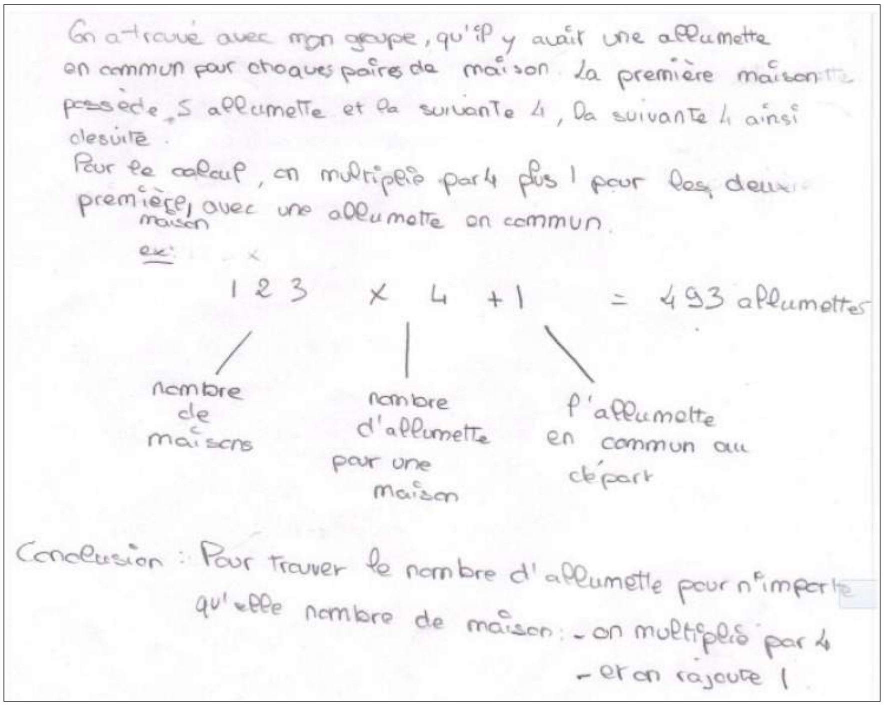


Figure 11 *- groupe 3*

Ce groupe exprime la généralité avec l'*exemple générique* relatif à 20 maisons étayé sur l'exemple dessiné de 5 maisons. Les registres du dessin graphique et des écritures mathématiques restent congruents (au sens de Duval) : chaque maison correspond soit au nombre 5 pour la première, soit au nombre 4 pour les suivantes. Les élèves n'ont pas transformé la somme réitérée en produit ce qui ne leur permet pas d'avoir une formule générale pour exprimer le nombre total d'allumettes en fonction du nombre de maisons. Dans l'expression de l'exemple générique un sous-entendu est qu'il faut écrire dans la somme autant de termes que le nombre total de maisons. Les élèves de ce groupe parviennent à exprimer la généralité en restant étroitement liés au contexte et en donnant une méthode pour calculer le nombre d'allumettes. Cependant un début de pensée algébrique est présent par le fait qu'ils ont compris des éléments invariants de la situation : la première maison a 5 allumettes et les suivantes uniquement 4. En revanche ils n'ont pas su exprimer le modèle mathématique correspondant dans sa forme de généralité fonctionnelle. Est-ce qu'ils ne se sont pas autorisés à s'éloigner du milieu matériel en transformant la somme réitérée en produit dans le cadre numérique ? Est-ce qu'une interprétation dynamique des ajouts des maisons les unes après les autres a empêché les élèves de percevoir la grandeur « nombre de maisons » ?

4. Groupe 4



On a trouvé avec mon groupe, qu'il y avait une allumette en commun pour chaques paires de maison. La première maison possède 5 allumette et la suivante 4, la suivante 4 ainsi desuite.

Pour le calcul, on multiplie par 4 plus 1 pour les deux premières maison avec une allumette en commun.

ex : 123 × 4 + 1 = 493 allumettes

nombre de maisons

nombre d'allumette pour une maison

l'allumette en commun au départ

Conclusion : Pour trouver le nombre d'allumette pour n'importe qu'elle nombre de maison : - on multiplie par 4

- et on rajoute 1

Figure 12 - *groupe 4*

On retrouve dans ce groupe, comme pour le groupe précédent, la description du processus itératif : une première maison de 5 allumettes, et 4 allumettes pour chacune des suivantes. La difficulté relative à l'explication du 1 qui correspondrait « pour les deux premières maisons avec une allumette en commun » se repère également. Il semblerait que cette expression conserve le souvenir de la génération de la suite des maisons et des différentes étapes comme le tableau 3 en rend compte.

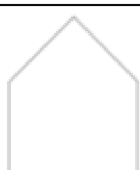
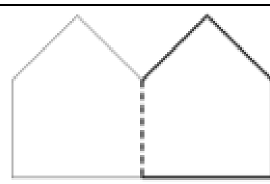
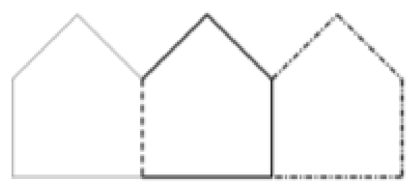
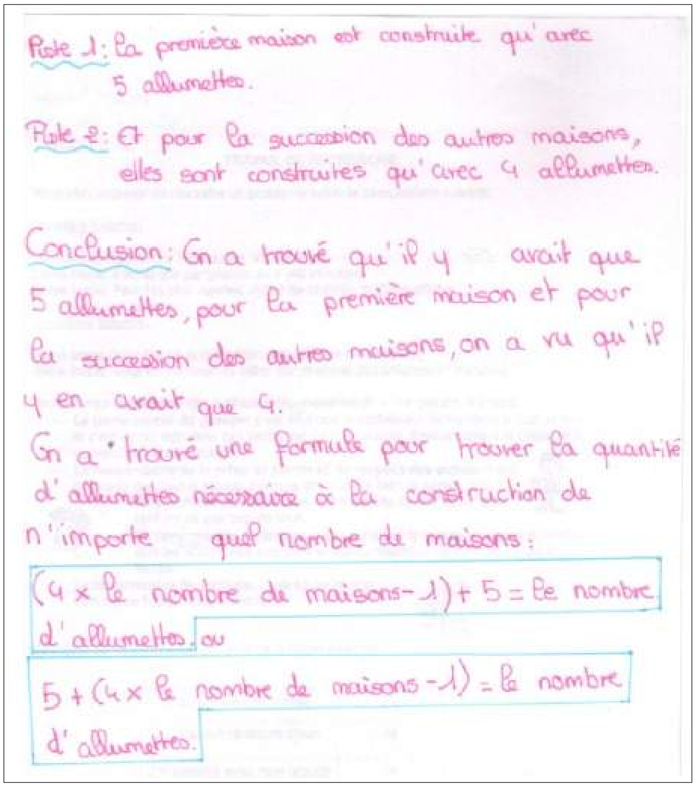
Première étape	**Deuxième étape**	**Troisième étape**
		
Première maison : 5 allumettes	Deuxième maison : 4 allumettes (et 1 allumette déjà présente) En tout : 5 + 4 ou 4 + 4 + 1 (cette unité représente l'allumette en pointillé commune aux deux premières maisons)	Troisième maison : 4 allumettes En tout : 5 + 4 + 4 Ou 4 + 4 + 4 + 1 (cette unité représente l'allumette en pointillé commune aux deux premières maisons)

Tableau 3 : méthode pour générer la suite des maisons étape par étape

Cependant ce groupe réussit à exprimer la généralité fonctionnelle, il utilise lui aussi l'*exemple générique* en faisant un pas supplémentaire vers la pensée algébrique car chaque nombre donné comme exemple est utilisé comme signe pour désigner en fait une variable ou une constante. Ainsi là où est écrit « 123 » il faut voir que c'est le « nombre de maisons » et que c'est donc une variable, en revanche 4 et 1 sont des invariants dans l'expression numérique. La conclusion ne laisse pas de doute sur le fait que les élèves ont réussi à exprimer la généralisation et même la quantification universelle avec « pour n'importe quel nombre de maisons ». La décontextualisation est alors aboutie dans cette expression dans le registre du langage naturel.

5. *Groupe 5*



Piste 1: La première maison est construite qu'avec 5 allumettes.

Piste 2: Et pour la succession des autres maisons, elles sont construites qu'avec 4 allumettes.

Conclusion: On a trouvé qu'il y avait que 5 allumettes, pour la première maison et pour la succession des autres maisons, on a vu qu'il y en avait que 4.
On a trouvé une formule pour trouver la quantité d'allumettes nécessaire à la construction de n'importe quel nombre de maisons:

(4 × le nombre de maisons − 1) + 5 = le nombre d'allumettes ou

5 + (4 × le nombre de maisons − 1) = le nombre d'allumettes.

Figure 13 - *groupe 5*

Ce groupe résout le problème de l'allumette en commun en mettant à part la première maison avec ses 5 allumettes et « pour la succession des autres maisons » seulement 4 allumettes. Ils expriment directement la généralité par une « formule », ce qui est en accord complet avec le programme français qui relie l'entrée dans l'algèbre avec le travail relatif aux formules. Le registre algébrique encore personnalisé, est un amalgame d'éléments du registre algébrique conventionnel et du registre du langage naturel. Il est à noter une erreur concernant l'absence de parenthèses pourtant nécessaires dans l'usage des règles de formation. Mais ce groupe donne la preuve qu'ils sont capables de se passer d'exemples numériques pour exprimer directement la généralisation dans un registre très proche du registre algébrique.

Une question demeure : pourquoi le groupe a-t-il écrit deux formules différentes en inversant l'ordre des facteurs du produit ? Est-ce que cela correspond à deux façons différentes d'appréhender le dénombrement en mettant la maison avec 5 allumettes soit au début soit à la fin ? Est-ce que les élèves savent que ces deux expressions différentes ont la même dénotation ?

6. Groupe 6

Le groupe 6 est le seul qui ait utilisé une lettre, cependant ce groupe produit une réponse erronée. Le raisonnement prend en compte l'assemblage de deux maisons qui ont une allumette en commun et qui comptabilise au total 5×2-1 allumettes. Il faut donc enlever l'allumette dessinée en rouge, ce qui se traduit dans l'expression numérique par la partie « - 1 ». Cela amène les élèves à produire une expression qui exprime la généralité fonctionnelle mais qui n'est vraie que pour y égal à 2.

Les élèves de ce groupe ont été capables de produire un signe, la lettre y, qui rend compte de la variable « nombre de maisons », mais ils n'ont pas su mettre leur formule à l'épreuve en la testant sur des exemples différents du nombre 2, cas où il n'y a que 2 maisons et pour lequel le dessin sert de preuve. La pensée algébrique est présente dans le sens où les élèves ont compris qu'il fallait une généralisation et une entrée dans le langage algébrique a été amorcée, mais ce langage produit un énoncé qui reste obscur pour les élèves qui ne perçoivent pas qu'il ne modélise pas le problème posé même dans des cas simples (une maison ou trois maisons par exemple).

Les élèves auraient pu mettre à l'épreuve leur formule grâce au cas dessiné de 3 maisons. Mais il semble que ce dessin ait un autre but : mettre en évidence qu'à chaque fois qu'on ajoute une maison réalisée avec 5 allumettes il est nécessaire **d'enlever 1 allumette** correspondant au trait rouge. « Enlever une allumette » est donc un invariant qui est exprimé dans la formule par la partie « - 1 ».

Il est possible de faire l'hypothèse que dans le cas des allumettes ajoutés les élèves sont capables de les traduire par y×5 mais dans le cas des allumettes enlevées « il faut en enlever une » résume toutes les allumettes enlevées et les élèves ne perçoivent pas qu'il faut faire cela y-1 fois. Les élèves terminent par un exemple générique en prenant un grand nombre de maisons, soit 150, et font confiance à leur formule. Nous pouvons noter une erreur très classique dans le maniement des égalités où le signe égal est un signe d'effectuation signifiant « ça fait ».

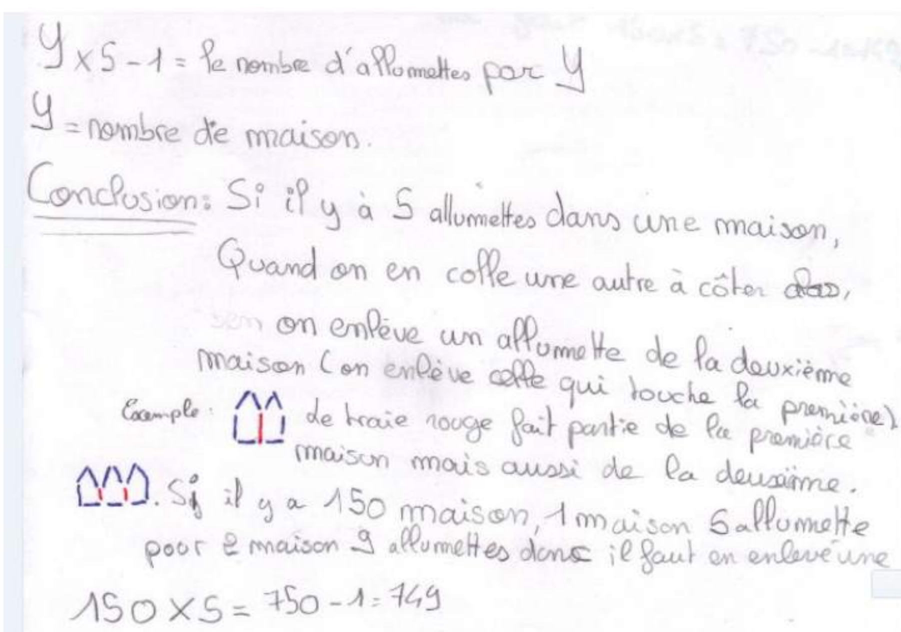

y × 5 − 1 = le nombre d'allumettes par y
y = nombre de maison.
Conclusion: Si il y à 5 allumettes dans une maison,
Quand on en colle une autre à côter ~~des~~,
on enlève un allumette de la deuxième
maison (on enlève celle qui touche la première)
Exemple: de traie rouge fait partie de la première
maison mais aussi de la deuxième.
. Si il y a 150 maison, 1 maison 5 allumette
pour 2 maison 9 allumettes donc il faut en enlevé une
150 × 5 = 750 − 1 = 749

Figure 14 - *groupe 6*

7. Reprise des analyses précédentes

Le tableau 4 reprend les critères établis dans le schéma donné en conclusion de la section IV. Il montre que la généralité itérative est exprimée par 4 groupes sur les 6. La généralité fonctionnelle est exprimée par tous les groupes de différentes façons :

- Le groupe 6 dans un langage algébrique mais de façon erronée ;
- Les groupes 1 et 4 en langage naturel ;
- Le groupe 5 en produisant une formule contenant du langage naturel.

L'exemple générique est utilisé par 4 groupes sur les 6. Pour deux de ces groupes, groupes 4 et 6, cet exemple vient en complément de l'expression de la généralité fonctionnelle.

A Cas particuliers pris comme exemples	B Expression de la relation entre u_n et u_{n+1}	C Exemple générique	D Expression de la généralité en langage naturel	E Justification juste de la généralité	F Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	G Modélisation en langage algébrique avec usage des lettres
1 – 2	2 – 3 – 4 – 5	2 – 3 (sans recours au produit) – 4 – 6 (avec erreur)	1 – 4	2 – 4 – 5	5	6 (avec erreur)

Tableau 3 - *synthèse des analyses des productions d'élèves*

VI. CONCLUSION

L'analyse des productions de ces élèves de collège confirme l'intérêt de ce type de problèmes :

- Les élèves produisent tous des réponses et la dévolution du problème est réussie ;
- Tous les groupes expriment à travers leurs réponses un déplacement d'une pensée arithmétique vers une pensée algébrique.

Ces élèves montrent aussi que ce n'est pas nécessairement l'usage de la lettre qui signe le développement d'une pensée algébrique. Á ce propos la typologie des preuves de Balacheff permet de repérer des preuves de type *exemple générique* ou encore *expérience mentale* qui signent une entrée dans l'algèbre avant la lettre en permettant l'expression implicite d'un énoncé universellement quantifié.

En France ce type de situation de généralisation pour développer la pensée algébrique et permettre une entrée dans le domaine algébrique, est méconnu par les enseignants en général et n'est pas souligné comme étant pertinent dans les programmes. Ainsi une modification du curriculum en fin de primaire et en collège apparait souhaitable.

Pour conclure cet article et reprendre la question posée au début : « quels sont les indicateurs qui permettent de diagnostiquer chez un élève une pensée algébrique naissante ? », voici une liste de ces indicateurs révélés par cette étude.

Pensée strictement arithmétique

- Le résultat est uniquement fonction des données connues.
    - Le nombre d'allumettes ne peut être obtenu que grâce au dessin correspondant au nombre de maisons (aucun des 6 groupes n'en est resté qu'à ce stade).

Indicateurs d'une pensée algébrique

- Repérage de régularités
    - Chaque fois que l'on ajoute une maison on ajoute 4 allumettes ce qui exprime la généralité itérative ;
    - Chaque fois que 2 maisons de 5 allumettes chacune se touchent il y a une allumette en trop pour la cloison commune.
- Utilisation d'un exemple générique pour exprimer la généralité.
- Le résultat utilise des grandeurs non données : comme si elles l'étaient, il y a une fiction
    - Le nombre d'allumettes est exprimé en fonction du nombre de maisons qui apparait ainsi comme une variable
    - Utilisation de l'objet nombre de maison
        - avec le langage naturel ;
        - avec une abréviation ;
        - avec un dessin ;
        - avec une lettre sans lien direct avec le contexte du problème.
- Écart avec le contexte, voire oubli du contexte pour transformer l'expression de la généralité grâce aux règles du calcul algébrique
    - Par exemple transformer une somme réitérée en produit (à ce propos le groupe 3 ne fait pas cette transformation).
- Validation de l'expression exprimant la généralité
    - Test de la validité de la formule trouvée avec des valeurs numériques connues grâce à des dessins ce qui suppose de revenir au cadre numérique et de savoir articuler les domaines numérique et algébrique (le groupe 6 n'a pas su mettre à l'épreuve sa formule par un test numérique).

REFERENCES

Andwandter N. (2012) *Place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques numérique, fonctionnel et géométrique et de leurs interrelations dans l'enseignement au collège en France.* Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Balacheff N., (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18, 147-176.

Briant N. (2013) *Etude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.* Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Bronner A. (2007) La question du numérique : le numérique en question ? Habilitation à diriger des recherches, Université Montpellier 2.

Brousseau G. (1998) *Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique.* In Théorie des situations didactiques 115-160. Grenoble, la pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage, Grenoble (126 p.). Deuxième édition augmentée 1991.

Chevallard Y. (2006) Journées scientifiques sur la formation des enseignants du secondaire. Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation – Section des sciences de l'éducation 17 mai 2006 http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Former_des_professeurs_construire_la_profession.pdf

Coulange L., Drouhard J-P. et al. (2012) *Enseignement de l'algèbre élémentaire, bilan et perspectives*. Recherches en didactique des mathématiques, numéro spécial hors-série. La pensée sauvage.

Douady R. (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* 17/2, 5-31.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine , Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Peter Lang SA

Frege G. (1892) *Sens et dénotation, in Écrits logiques et philosophiques*, trad., Seuil, 1971, pp. 102-126.

Kahane J.P., (2002) L'enseignement des sciences mathématiques, Paris, Odile Jacob.

Krysinska M., Mercier A., Schneider M. (2009) Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 29(3), 247 – 304.

Larguier M. (2009) *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.* Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Luiz Marcio Santos Farias. (2010) *Etude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire : Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde*. Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Massare C. (2011) Les problèmes de recherche à la conquête des apprentissages du collège. Master 2 Enseignement et Diffusion des Mathématiques. Université Montpellier 2.

Piaget P., Henriques G. (1978) *Recherches sur la généralisation.* Paris : Presses Universitaires de France.

Squalli H., MarY C., Marchand P. (2011) Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In Lebeaume J., Hasni A., Isabelle Harlé I. (Eds.) *Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie. Bruxelles : De Boeke*. (14 pages).

Vlassis J., Demonty I. (2002) *L'algèbre par des situations-problèmes : au début du secondaire*. Bruxelles : De Boeck.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LA PENSÉE MATHÉMATIQUE DU POINT DE VUE DE LA THÉORIE DE L'OBJECTIVATION[1]

Luis RADFORD[*]

Résumé – On aborde ici le thème de la pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. On distingue en particulier la pensée mathématique dans son sens anthropologique et dans son sens subjectif. Un exemple tiré d'une classe de 2e année portant sur la pensée algébrique sert à illustrer les idées présentées dans l'article.

Mots-clefs : pensée algébrique, médiation, objectivation, pure possibilité, activité d'enseignement-apprentissage.

Abstract – This article deals with mathematical thinking as understood in the theory of objectification. A distinction is made between two senses of mathematical thinking: an anthropological sense and a subjective one. This distinction is illustrated through a Grade 2 classroom episode dealing with algebraic thinking.

Keywords: Algebraic thinking, mediation, objectification, pure possibility, teaching-learning activity.

I. INTRODUCTION

Dans ce texte, je voudrais aborder le thème de la pensée mathématique dans le cadre d'une théorie dialectico-matérialiste d'inspiration vygotskienne : la théorie de l'objectivation (Radford 2011, 2013)[2]. Cette théorie, dont le but est de comprendre l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques comme un processus conjoint historico-culturel de productions de savoirs et des subjectivités, part de la prémisse selon laquelle l'étude didactique de la pensée mathématique exige la prise en compte de la pensée du sujet pensant et de la pensée en tant qu'entité historico-culturelle. C'est à la pensée du sujet pensant que se livre la psychologie expérimentale depuis son invention au XIXe siècle. La pensée en tant qu'entité historico-culturelle est ce à quoi on fait référence quand on parle, par exemple, de la

[1] Cet article provient d'un programme de recherche subventionné par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.

[*] Université Laurentienne – Canada – Lradford@laurentian.ca

[2] La matérialisme dialectique pose le problème de l'être et du savoir d'une manière tout à fait différente de celle qu'on trouve dans le rationalisme et l'idéalisme qui ont servi de base (directement ou indirectement) à élaboration de plusieurs théories en didactique des mathématiques (Kant, Descartes, etc.). Un exposé du matérialisme dialectique n'est pas possible à l'intérieur de cet article. Le lecteur intéressé à plonger dans une lecture sur le matérialisme dialectique pourra consulter les livres d'Ilyenkov (1977) et de Fedoseyev et al. (1977).

Radford L. (2015) Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 334-345.

pensée mathématique grecque ancienne ou de la pensée mathématique babylonienne ou de la pensée mathématique moderne. C'est une forme de pensée qui ne peut pas se réduire à la pensée d'un individu : elle transcende celui-ci. Pour accentuer la différence, nous suggérons d'appeler *pensée subjective* la pensée du sujet pensant et pensée culturelle la pensée qui transcende le sujet en tant qu'individu.

Cette façon de poser le problème didactique de l'étude de la pensée (mathématique ou autre) demande de fournir une caractérisation de ces deux types de pensée. Qu'entend-on précisément par pensée subjective? Qu'entend-on par pensée culturelle? La première question consiste à demander une caractérisation de ce que les Grecs anciens appelaient ψυχή (*psyché*), l'esprit, le souffle qui anime le sujet. C'est dans ce sens que nous pouvons dire qu'il nous faut une caractérisation *psychique* de la pensée. La deuxième question consiste à demander une caractérisation *anthropologique* de la pensée.

La caractérisation psychique de la pensée qu'offre la psychologie traditionnelle ne nous semble pas ouvrir une avenue prometteuse à notre recherche[3]. Elle souffre d'au moins trois problèmes importants :

- *primo*, la psychologie traditionnelle conçoit la pensée du sujet comme une activité *mentale*, c'est-à-dire comme quelque chose *en nous*, une activité qui *émane purement du sujet* et qui a lieu à l'intérieur de la boîte crânienne;
- *secundo,* dans la psychologie traditionnelle, le ψυχή ou souffle qui anime le sujet est confiné à la résolution de problèmes. Le sujet est réduit à un sujet purement rationnel, dépouillé de toute la dimension affective, émotionnelle et motivationnelle.
- *tertio,* la psychologie traditionnelle ne tient pas compte de la dimension anthropologique et se penche sur la pensée subjective comme si celle-ci fonctionnait indépendamment de l'autre.

On sait très bien l'antipsychologisme qu'a entouré la théorie des situations dès ses débuts (Brousseau 2006). La théorie des situations ne fait pas que s'opposer aux caractérisations psychologiques de la pensée. En fait, elle n'a pas besoin d'une caractérisation *psychique* quelconque de la pensée, car le sujet sur lequel cette théorie se penche est considéré comme un sujet *épistémique* (Brousseau 2005). Il s'agit, en effet, d'un être connaisseur formel. Le sujet sur lequel porte la théorie de l'objectivation, par contre, est un sujet concret, réel, qui souffre, jouit, sent, rêve. D'où le besoin, en ce qui nous concerne, de nous tourner vers une caractérisation psychique de la pensée. Or, en réduisant la pensée subjective à une activité mentale, la piste qu'offre la psychologie traditionnelle ne nous semble pas satisfaisante. Comme suggérait l'épistémologue dialecticien Evald Ilyenkov (1977), on pourrait décortiquer n'importe quelle boîte crânienne en morceaux chaque fois plus petits sans pour autant y trouver une seule pensée. On pourrait remarquer, en passant, que la conception selon laquelle les idées sont *en nous*, n'a été possible, historiquement parlant, que grâce à l'élaboration d'une métaphore d'origine religieuse. Celle-ci permet d'imaginer le sujet comme constitué d'une sorte de cavité où se déroule une vie intérieure. C'est ainsi qu'avec Saint Augustin à la fin du IVe siècle, on ne trouve pas Dieu à l'extérieur, mais à l'intérieur de soi. L'idée du « sujet creux » aurait été impensable pour les Grecs.

Il nous faut donc, pour commencer, une définition plus large ou différente de la pensée du sujet (une définition subjective de la pensée), ainsi qu'une définition anthropologique de la

[3] La psychologie traditionnelle, comme celle qui s'inspire du traitement de l'information ou de la résolution de problèmes (Andler 2004 ; de Vega 1986; Kotovsky et Simon 1990) décortiquent analytiquement le fonctionnement mentale en sous-fonctions qui opèrent sans égard au contexte. Elles font appel à un sujet *a*historique et *a*culturel. Pour une critique de cette conception de la pensée qu'offre la psychologie traditionnelle voir (Martin 2004).

pensée, pour pouvoir ensuite aborder le problème de l'*articulation* de la pensée dans son sens anthropologique et de la pensée dans son sens subjectif.

II. LA CARACTERISATION ANTHROPOLOGIQUE DE LA PENSEE

La caractérisation anthropologique de la pensée que nous suggérons dans cet article est directement liée à l'agir des individus et aux pratiques sociales à l'intérieur desquelles ces individus agissent. C'est ce sens contextualisé de *l'action* d'un *sujet concret* à l'égard de la *pratique sociale et culturelle* que traduit l'adjectif *anthropologique* ici. Elle est aussi ancrée dans un concept très particulier de synthèse. Le concept de synthèse est un concept qui a une longue histoire en philosophie. Kant l'utilise comme le processus qu'effectue la raison permettant de subsumer des singularités sous un même concept, qu'il prend comme déjà donné. C'est la question de l'apriorisme kantien. Dans la perspective esquissée ici, le point crucial est l'absence de concept *a priori*. Il y a plutôt un monde concret et des sujets concrets qui, à l'intérieur des pratiques sociales, mènent certaines actions en vue de satisfaire leurs besoins de subsistance et d'autres besoins (intellectuels, par exemple).

Dans ce contexte, le concept de pensée que nous suggérons apparaît en tant que *synthèse* culturellement codifiée du travail ou labeur humain. Par exemple, les méthodes anciennes de résolution d'équations qu'on trouve chez Diophante sont le résultat d'une synthèse de manières de résoudre certaines équations. On a résolu une équation disons e_1, puis une équation différente e_2, etc. C'est la synthèse culturellement codifiée de ces manières de résoudre ces équations qui constitue une pensée mathématique.

Comme synthèse, la pensée ne porte pas sur la résolution de l'équation e_1 ou sur la résolution de n'importe laquelle des équations e_j à la base de la synthèse. La pensée les dépasse toutes et ne coïncide avec aucune des manières de résoudre ces équations. De par la synthèse dont elle est issue, la pensée se constitue en ce que dans le matérialisme dialectique on appelle *pure possibilité* : celle de résoudre d'autres équations *similaires* et de s'attaquer à des équations *différentes*.

La synthèse mentionnée ici est une synthèse de *non-identité*. Elle est synthèse non-identitaire au sens suivant. La résolution d'une équation e_i est toujours *différente* de celle d'une autre équation e_j. Mais, en même temps, ces résolutions différentes sont considérées comme la *même*. C'est une synthèse de différentes singularités et, comme tel, elle n'est pas une abstraction, mais une synthèse qui contient les divergences et les contradictions des singularités (résolution des équations e_i, e_j, etc.) qu'elle s'efforce de tenir ensemble. Il s'agit d'une synthèse non-identitaire qu'injecte des contradictions internes dans la pensée. Au lieu d'être une faille ou une imperfection, la synthèse non-identitaire confère à la pensée une nature inconciliable vis-à-vis les éléments synthétisés. Les inévitables contradictions internes de la pensée sont précisément ce qui permet son développement dans la pratique sociale. En tant que porteuse de contradictions, la pensée ouvre un espace pour l'émergence de nouvelles actions et de nouvelles interprétations et créations.

Pour résumer, dans le mouvement de synthèse, les singularités des actions, toujours concrètes et déterminées spatialement et temporellement, toujours différentes les unes des autres, se voient *reflétées* dans ce qui devient reconnu comme une même manière d'agir et de réfléchir, se constituant ainsi en un *prototype* d'action et de réflexion. C'est ce que nous appelons ici *pensée*. Puisque cette synthèse est ancrée et résulte d'actions situées dans la pratique sociale, on peut aussi dire que la pensée est une *pratique réflexive*. La pensée mathématique babylonienne, par exemple, est un ensemble de synthèses de formes d'agir et de réfléchir issues de problèmes pratiques générés par un besoin de répondre à des problèmes administratifs, beaucoup d'entre eux portant sur la comptabilité, la répartition de rations, la mesure et le poids des choses, etc.

Quand un scribe dit dans un texte remontant probablement au 18^{e} siècle av. J-C: « Un champ. Les quatre fronts et le champ j'ai accumulés: 41´40´´» (Høyrup 1995, p. 1), il nous renvoie à une pratique d'arpentage promue par des besoins de contrôle administratif et décrite abondamment par Høyrup (2002), Nissen, Damerow et Englund (1993) et Robson (2008), entre autres. Dans ce champ, il faut lire un champ quadratique. Le scribe nous dit avoir trouvé 41´40´´ comme résultat de la somme des nombres mesurant les quatre côtés et l'aire. En notations modernes, si la longueur du côté est désignée par s, on aurait alors: $4s + s^2 = 41´40´´$. Høyrup dit :

> Il faut savoir que les Babyloniens concevaient un carré comme «étant» son côté et «possédant» une aire (tandis que pour nous, comme on le sait, il [le carré] «est» de 4 m^2 et «possède» un côté de 2 m) (Høyrup 1995, p. 3).

C'est dans le contexte de cette pratique d'arpentage qui autorise cette conception du carré, que le scribe peut additionner côtés et aires et peut imaginer et effectuer des opérations (additionner, arracher, etc.) sur le champ auquel fait référence l'énoncé du problème, problème qui consiste à trouver le côté s. Cette synthèse de solutions de problèmes — solutions similaires, mais toujours différentes les unes des autres — qui se constitue en façon archétypale d'agir, de dire, d'imaginer, d'effectuer des calculs, etc. se constitue aussi, *en même temps*, en pensée mathématique.

À ce sensualisme pratique, dans lequel les objets mathématiques babyloniens restent sans définitions précises et où les calculs se succèdent en même temps qu'ils montrent ce qui est à montrer, on pourrait opposer la pensée mathématique ancienne grecque issue, elle, plutôt d'une pratique aristocratique athénienne soutenue par la distinction entre travail intellectuel et manuel et une organisation sociale à la base de laquelle nous trouvons la distinction entre individu libre et esclave. Il s'agit ici d'une pensée où le calcul n'est le paradigme du faire, car l'aristocratie ne calcule pas; le calcul est laissé plutôt aux marchands et aux esclaves. Cette pensée est plutôt celle du λόγος (*logos*) — une raison qui vise à raisonner de manière juste et vraie pour s'élever à des niveaux supérieurs de la connaissance. C'est dans cette société discursive, tiraillée par la distinction entre apparence (δόξα, *doxa*) et vérité, que la parole et son usage social prennent une dimension épistémologique inconnue des Babyloniens. Ce n'est donc pas le champ issu de la pratique kinesthésique de l'arpentage et les problèmes et procédures concomitantes de résolution qui sont à la base de la pensée ici, mais ces formes géométriques inchangeables dépouillées d'activité manuelle et corporelle.

III. LA CARACTERISATION SUBJECTIVE DE LA PENSEE

La définition anthropologique de la pensée en tant que *pratique culturelle réflexive* doit maintenant être complétée par une caractérisation subjective de la pensée.

Dans son sens anthropologique, nous l'avons dit, la pensée est *pure possibilité*. Cela revient à dire que la pensée est une capacité toujours latente d'agir ou de réfléchir d'une certaine manière. C'est pourquoi on peut dire que la pensée d'une culture apparaît aux différents sujets imprégnés de cette culture comme *potentialité* ou *virtualité*, ce que Hegel appelait un *général.*[4]

[4] Insistons ici sur le fait que la *potentialité* est une catégorie ontologique fondamentale du matérialisme dialectique. Elle implique l'idée qu'un événement puisse se produire. Un poisson naît avec la potentialité de nager. Mais cette potentialité ne s'actualise qu'a travers un mouvement précis : aller d'un point A à un point B. D'autres potentialités ne sont pas innées, mais développées culturellement, comme, par exemple, résoudre une

Revenons à notre exemple de la résolution d'équations et considérons en particulier la résolution de l'équation 4xn + 2 = 27 – n. La Figure 1 montre les traces laissées par des élèves d'une 6e année (11-12 ans).

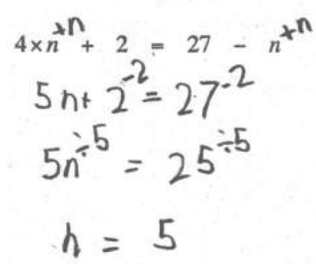


***Figure 1**- Les traces de la résolution d'une équation par un groupe d'élèves de 6e année*

La pensée algébrique des élèves ne doit pas être confondue avec les signes montrés dans la Figure 1. On ne peut pas confondre signes et pensée. Ce que la Figure 1 nous livre, ce sont les traces de la pensée des élèves, une sorte d'écho de celle-ci. En termes sémiotiques, on pourrait dire que la Figure 1 est un texte indexical : un texte qui pointe vers quelque chose qui n'est plus là, comme les empreintes que laisse un promeneur sur le sable après son passage. Confondre pensée et signes reviendrait à confondre le promeneur avec ses empreintes.

Qu'est donc la pensée des élèves? La pensée des élèves est l'*actualisation* ou *concrétisation* ou *matérialisation* de l'archétype culturel de résolutions d'équations.[5] Au sens phénoménologique strict, la pensée des élèves est ce qui *apparaît.* C'est-à-dire, l'agi, le parlé, le perçu, le gesticulé, le symbolisé, le raisonné qui se donnent à voir au cours de l'activité de la résolution de l'équation en question. Comme telle, la pensée subjective n'est pas une série de choses qui ont lieu à l'intérieur d'une boîte crânienne, mais ce qui se déploie devant soi. Ce n'est pas une série d'actions ayant lieu dans une chambre mystérieuse et inaccessible, mais un *événement* qu'on appelle un *singulier*.

Ce qui se déploie devant soi n'est donc pas quelque chose dont l'origine serait à trouver dans le vide interne du sujet (de l'élève), mais dans la matérialisation d'une potentialité culturelle. Mais dans sa matérialisation, cette potentialité (dans notre exemple, la pensée algébrique au sens anthropologique) devient un *existant* qui ne peut jamais livrer la potentialité toute entière. La matérialisation ou actualisation de celle-ci est toujours un *singulier* : ici, une matérialisation qui mobilise un savoir sur les équations à coefficients entiers; la manière d'isoler l'inconnue quand elle apparaît comme soustraction dans l'un des côtés de l'équation, etc.

IV. L'ACTIVITE HUMAINE COMME MEDIATION ENTRE SUJET ET PENSEE

Or, parce que la pensée d'une culture est plutôt prototype d'action et de réflexion, une forme vide de différences et de similarités, elle ne se donne pas à voir au sujet qui apprend. C'est

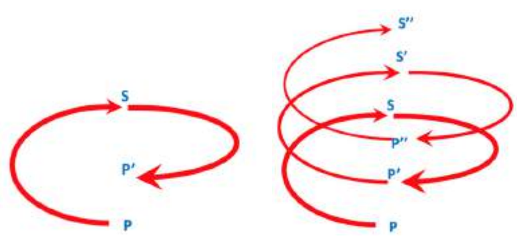
---

équation d'une certaine manière. Si nous étions nés à l'époque de Diophante, cette potentialité existerait en termes d'arithmes et de certaines façons d'opérer sur les nombres connus et non connus. L'opération réelle sur les nombres connus et inconnus à la Diophante serait *l'actualisation* ou *matérialisation* de cette potentialité. Pour une discussion plus détaillée sur la potentialité, voir (Radford 2015).

[5] Il ne faut surtout pas concevoir l'actualisation comme une simple marque ou comme copie de la potentialité : actualisation et potentialité ne sont pas de catégories ontologiques du même ordre. La potentialité n'a pas de forme. Aucune actualisation ne peut lui ressembler. Elle n'est que possibilité. Et, comme nous verrons dans un moment (Figure 2, ci-bas), il n'y a pas de déterminisme entre la potentialité et l'actualisation : leur relation est plus complexe. Elle est dialectique.

seulement dans l'épistémologie rationaliste que sujet et pensée sont *déjà* ensemble, car pour le rationalisme et ses variantes individualistes (comme le constructivisme), la relation entre sujet et pensée est une relation d'identité. L'Autre est le Même. C'est pourquoi, les Rationalistes du XVIIe siècle, comme Descartes et Leibniz, considéraient que les mathématiques pouvaient se pratiquer même les yeux fermés; pour eux, les principes dont nous avons besoin en mathématiques sont des « principes internes » au sujet, c'est-à-dire qu'ils sont à l'intérieur de nous (Leibniz 1966, pp.34-37; pour plus de détails, voir Radford 2011). Dans la perspective matérialiste esquissée ici, par contre, la pensée (au sens anthropologique) est là, devant nous. Mais pour se *révéler*, pour devenir objet de conscience, elle doit passer de potentialité à actualité; elle doit acquérir des déterminations sensibles. La pensée doit être mise en *mouvement,* s'*actualiser* et apparaître comme *singulier*. Elle ne peut apparaître qu'à travers une *médiation*.

Quelle est donc cette médiation qui met la pensée en mouvement et lui permet de se révéler dans un singulier ? La réponse est : l'activité humaine. Ce n'est qu'à travers l'activité que la pensée se singularise et peut être saisie, sentie et devenir ainsi objet de conscience. La Figure 2a illustre cette idée du point de vue phylogénétique : à un certain moment du développement d'une culture, la pensée culturelle, P, est mise en mouvement par l'activité humaine (symbolisée par les flèches en bas) et se révèle à la conscience des sujets concrets dans le singulier S. C'est à l'intérieur de cette activité (ou d'une autre activité), qui est toujours mouvement et qui est déjà affectée par P et S, que les sujets concrets peuvent maintenant étendre, raffiner, ou transformer cette pensée ou potentiel P, donnant comme résultat une nouvelle pensée culturelle ou potentiel P'. La nouvelle potentialité ainsi créée peut, par la médiation d'autres activités, se révéler ou s'actualiser dans un autre singulier S', etc. (voir Figure 2b).



Figures 2a (à gauche) et 2b (à droite) *- L'activité effectue la médiation qui permet à la pensée de passer du potentiel à l'actuel.*

Le singulier est la pensée dans son apparition phénoménologique telle qu'elle est médiatisée par l'activité, devenant ainsi pensée subjective. Dans sa singularité, la pensée s'expose et devient susceptible d'être examinée, généralisée, réfutée, transformée, subvertie.

La conceptualisation de la pensée mathématique qu'offre la théorie de l'objectivation, conceptualisation esquissée brièvement ci-dessus, permet de poser le problème du travail didactique autour d'un nouveau concept : le concept d'enseignement-apprentissage. Ce concept, de nature éthico-dialectique, est élaboré dans la section suivante.

V. LE CONCEPT D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE

Nous avons dit que la Figure 1 comporte les traces de la pensée d'un groupe d'élèves de 6e année (élèves de 11-12 ans).[6] Il s'agit d'une classe d'élèves que nous avons suivi pendant 5

[6] On peut poser la question : s'agit-il de la pensée *collective* ou de la pensée d'*un* élève ? Il nous faut revenir à la définition proposée plus haut pour répondre. On a dit que la pensée subjective est ce qui *apparaît* comme résultat

ans. Nous avons commencé à suivre cette classe quand les élèves étaient en 2e année (ils avaient alors 7-8 ans). Les traces de la pensée des élèves que nous livre la Figure 1 sont donc les traces d'une pensée subjective développée. C'est-à-dire, une pensée subjective qui a connu une transformation d'une année d'instruction à l'année suivante. Ce développement n'est pas naturel; au contraire, il s'agit d'un développement culturel, soutenu par un travail didactique continu.

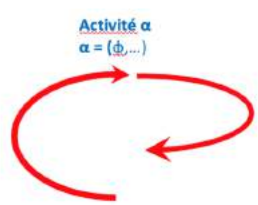
Pour que la pensée algébrique (au sens anthropologique) — pensée constituée historiquement — commence à se révéler à la conscience des élèves, il a fallu mettre sur pied une série d'activités depuis la deuxième année. Ces activités acquièrent un sens didactique précis dans la théorie de l'objectivation qu'il convient de spécifier maintenant.

Pour la théorie de l'objectivation, toute activité de salle de classe comporte deux *moments* :

(1) un moment *a priori* ou premier moment où l'activité est *configurée*. C'est à ce moment que nous préparons avec les professeurs les problèmes qui seront présentés aux élèves : nous décidons du type, de l'ordre et de l'enchainement des questions; des ressources matérielles qui seront mises à la disposition des élèves, etc.

(2) le deuxième moment est l'implémentation de ce premier moment : c'est l'activité *stricto sensu*. C'est-à-dire, ce qui se passe en salle de classe (mais peut aussi aller au-delà).

Remarquons que, normalement, les théories éducatives traditionnelles distinguent plusieurs types d'activité à l'intérieur de ce qui se passe en salle de classe : on distingue ainsi l'activité de l'élève de celle du professeur. Nous prenons une autre orientation : l'activité qui est implémentée est considérée comme *une seule* activité. Nous parlons alors de l'*activité enseignement-apprentissage*. Cette activité est caractérisée par son objet (Leontiev 1984), dans notre cas, un objet didactique. Le fait que pour l'élève cet objet didactique ne soit pas apparent au début n'enlève pas à l'activité son propre objet. Comme nous l'illustrerons dans un moment, la transparence relative de l'objet de l'activité aura des répercussions dans la manière dont le professeur et les élèves s'engagent dans l'activité. Dans le cas présenté ici, l'objet des activités était la prise de conscience chez les élèves de formes de pensée algébriques historiquement et culturellement constituées. La Figure 3 montre l'activité de salle de classe, désignée par la lettre **α**: ce qui est en train de se produire en salle de classe réellement (les flèches rouges) ; l'activité y apparaît comme un *flux*, lui même changeant, affecté continuellement, entre autres, par le premier moment, désigné par **ϕ** (celui du projet didactique).[7]



de l'actualisation du potentiel (c'est-à-dire, la pensée au sens anthropologique). *Ce qui apparaît,* apparaît dans la classe et se révèle ainsi *aux élèves*. Bien que cette apparition se réfracte différemment dans la conscience de chaque élève, elle est à la fois individuelle et collective (elle est individuelle-collective), comme la musique que fait apparaître un orchestra qui joue une symphonie.

[7] Le fait que, placés maintenant du point de vue *ontogénétique*, nous utilisons un diagramme similaire à celui utilisé à la Figure 2 (qui portait sur le point de vue *phylogénétique*) ne veut pas dire que nous adoptons l'idée selon laquelle l'ontogénèse récapitule la phylogénèse (voir Furinghetti & Radford 2008). L'activité dans la Figure 2 n'a pas de moment didactique ϕ. C'est, entre autres, dans le moment ϕ qu'on voit un des effets de la culture dans l'apprentissage des élèves. C'est pourquoi Vygotsky (1997, p.88) disait que l'éducation peut être définie comme le développement artificiel de l'enfant.

Figure 3 *- L'activité « enseignement-apprentissage » α comme un flux affecté par ϕ, entre autres.*

En ce qui a trait au premier moment, le moment ϕ, celui de la configuration de l'activité, nos choix didactiques tiennent compte de la densité épistémologique de la pensée ciblée (ici la pensée algébrique) et du développement actuel de l'enfant (Vygotsky 1985). Par rapport à la densité épistémologique de la pensée algébrique, nous nous écartons de l'idée très répandue selon laquelle l'algèbre commence avec l'utilisation des lettres. L'idée, bien sûr, est fausse. Ni les anciens mathématiciens chinois, ni les scribes babyloniens n'ont eu recours à des lettres dans la pensée algébrique qu'ils ont développée. Ni l'écriture à base de sinogramme des premiers ni l'écriture cunéiforme des deuxièmes ne sont faites à partir de « lettres »! Il nous a fallu donc commencer par caractériser la pensée algébrique. En nous inspirant des discussions souvent tendues tenues durant les années 1980 et suivantes — consulter, par exemple, Bednarz, Kieran et Lee (1996); Filloy et Rojano (1989); Kieran (1989) — nous avons suggéré (Radford 2014) que la pensée algébrique élémentaire comprend trois éléments:

(1) *indéterminés*: la situation mathématique considérée contient de nombres non-connus (inconnues, variables, paramètres, etc.); c'est-à-dire, elle contient des indeéterminés.

(2) *dénotation*: les nombres indéterminés impliqués dans la situation doivent être *nommés* ou *signifiés* d'une certaine manière. La signification peut être accomplie de diverses manières. On peut utiliser des signes alphanumériques, mais pas nécessairement. La dénotation de nombres indéterminés peut également être signifiée par le langage naturel, les gestes, les signes non conventionnels (diagrammes, par exemple), ou même une combinaison de ceux-ci.

(3) *analyticité*: les nombres indéterminés sont traités comme s'ils étaient des nombres connus. C'est-à-dire, bien qu'ils ne soient pas connus, les nombres indéterminés sont traités de la même manière que les nombres connus : on les additionne, les soustrait, les multiplie, les divise, etc.

Cette caractérisation épistémologique de la pensée algébrique nous a guidés dans l'élaboration des tâches données aux élèves (temps 1 de l'activité) et dans l'implémentation de l'activité (temps 2). Voici un exemple de 2e année.

La leçon commence avec la lecture d'une histoire que l'enseignante (E) fait aux élèves.

> Sylvain et Chantal ont des cartes de hockey. Chantal a trois cartes et Sylvain a deux cartes. Sa mère met certaines cartes dans trois enveloppes en veillant à mettre le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe. Elle donne une enveloppe à Chantal et 2 à Sylvain. Maintenant, les deux enfants ont la même quantité de cartes de hockey. Combien de cartes de hockey sont dans une enveloppe?

L'équation est illustrée au tableau, à partir d'enveloppes et de cartes en carton, comme le montre la Figure 4.

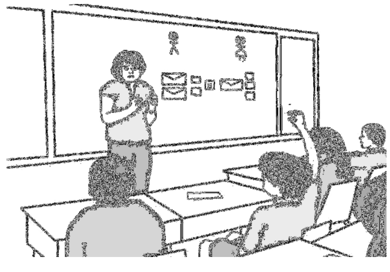


Figure 4 *- L'histoire de Chantal et de Sylvain.*

Au début, les étudiants ont abordé le problème par des procédures arithmétiques d'essai-erreur. Par exemple, au début de la leçon, Willy (W) suggère qu'il y a une carte dans chaque enveloppe :

W : Um, moi je pense qu'il y a … qu'il y a 1, umm… une carte de hockey.

E : Ok.

W : dans chaque carte [il veut dire enveloppe] parce que, euh, y'en a 3 cartes juste là (*en faisant référence au côté droit de l'équation au tableau; voir Figure 3*) et s'il y a juste 1 dans la carte [il veut dire enveloppe], ça, ça veut dire qu'il y a 4, et (*en faisant référence maintenant au côté gauche de l'équation*) y'en a 2 cartes juste là et 2, et c'est y'en a 2 dans les 2 enveloppes.

E : uhhuh, alors si je comprends bien Willy, tu as essayé la stratégie essai-erreur?

W : uhhuh…

E : C'est ça, tu as dit : ah! Je vais faire semblant qu'il y a une carte ici (*elle pointe une enveloppe*), une carte ici (*elle pointe une autre enveloppe*), une carte ici (*elle pointe une autre enveloppe*). C'est ça ce que t'as fait?

W : uhhuh…

E : puis, là, t'as calculé, s'il y a une carte ici, une carte ici, une carte ici, puis là tu as calculé 1, 2, 3, 4. C'est ça ce que t'as fait?

L'objet de l'activité est loin d'être transparent pour les élèves. L'enseignante pourrait tout simplement laisser les élèves faire tout le travail et se contenter de ce que les élèves pourraient produire par eux-mêmes. Elle pourrait aussi montrer comment résoudre l'équation (et par là montrer de manière ostensible l'objet de l'activité) et demander ensuite aux élèves de reproduire la solution à d'autres équations. Ces activités sont toujours possibles. Dans le premier cas, cependant, celui où l'activité est centrée sur l'élève, il n'y a aucune assurance que les élèves arrivent à actualiser ou matérialiser la pensée algébrique ciblée. C'est ce que nous observons en général. Dans le deuxième cas, où l'activité est centrée sur le professeur, l'activité de salle de classe pourrait finir par médiatiser la pensée visée, mais cette médiation serait très faible, car il lui manque l'engagement *cognitif* et *affectif* des élèves. Ceux-ci sont réduits au rôle de reproducteurs de comportements. Malgré ces différences, remarquons que, dans un cas comme dans l'autre, on différencie le travail du professeur de celui de l'élève. Le concept d'activité *d'enseignement-apprentissage* demande, par contre, un travail *conjoint* élèves-professeur, très souvent fort émotionnel. Il s'agit de faire émerger de ce travail conjoint, où vont se confondre dires, gestes, actions, symbolisations, l'actualisation ou la matérialisation d'une pensée algébrique ciblée. Cette actualisation ou matérialisation, souvent le résultat d'un processus progressif et pénible, est la *pensée subjective*. Malgré donc la non-transparence de l'objet de l'activité pour les élèves, l'enseignante doit garder l'activité d'enseignement-apprentissage en mouvement. Elle remercie Willy pour sa contribution et demande à la classe s'il y a d'autres idées. Joe (J) suggère d'enlever une enveloppe de Chantal et une enveloppe de Sylvain :

J : Um, moi je pense qu'il y a une [carte] dans chaque [enveloppe], parce que je voudrais enlever l'enveloppe là de Chantal.…

E : Ok

J : Et l'enveloppe de Sylvain et…

E : Pourquoi est-ce que tu enlèves une enveloppe ici, et une enveloppe ici?

J : Um, parce que si, parce que Chantal a 3 [cartes], et Sylvain a 2 [cartes], et si, et si y'a un carte dans ce … (*il pointe vers l'enveloppe qui reste à Sylvain*), ça va faire égale…

E : […] Alors, t'as trouvé ta solution comme ca? Toi, tu as isolé un petit peu, mais tu n'as pas isolé complètement, hen? Ça, c'était ta solution; tu as enlevé les enveloppes, hen?

J : Ouien…

La stratégie de Joe semble revenir sur la discussion que la classe a eue la veille au sujet de l'action d'enlever des enveloppes en vue de simplifier une équation, action qui a été illustrée à l'aide d'une balance. Aux lignes 1 et 3 du deuxième dialogue, Joe suggère, en effet, d'enlever une enveloppe de chaque côté de l'équation. Puisque cette étape est cruciale à la pensée algébrique (Filloy, Rojano & Puig 2007), l'enseignante intervient à la ligne 4. Elle est très tendue : elle sait que c'est un moment important de l'activité enseignement-apprentissage. L'enseignante invite donc Joe à articuler l'idée de manière explicite. Toutefois, comme le montre la ligne 5, l'action d'enlever une enveloppe du montant de Chantal et une enveloppe du montant de Sylvain est faite en vue de *simplifier* l'équation, et non pas pour *déduire* la valeur de l'inconnue. Nous voyons, en effet, qu'à sa troisième intervention, Joe *suppose* que l'enveloppe contient une carte. Il commence sa phrase avec la conjonction de subordination hypothétique « si ». Il dit : « si y'a une carte dans ce[tte]… [enveloppe]». Le reste de ses actions sert à vérifier qu'il y a égalité. La solution n'a pas été déduite, mais devinée. On n'opère pas sur l'indéterminé de manière analytique. Ce qui apparaît conceptuellement à la conscience des élèves n'est pas encore l'actualisation ou la matérialisation de la pensée algébrique.

Au cours de la discussion, l'enseignante revient sur l'idée d'enlever et, en s'adressant à Joe et à toute la classe, dit :

E : Tu dis, tu enlèves une [enveloppe] ici et tu enlèves une [enveloppe] ici. Alors… si j'enlève quelque chose d' un coté, est-ce que je dois enlever la même chose de l'autre coté?

Joe et élèves : Oui

L'enseignante invite à nouveau la classe à présenter d'autres idées et suggère de penser à la stratégie d'isolement dont la classe avait discuté la veille. L'équation est montrée au tableau (voir Figure 5, dessin 1). Cette fois-ci, c'est Cali (C) qui répond :

C : Um tu enlèves une enveloppe de Sylvain, et une enveloppe de Chantal (L'enseignante enlève une enveloppe du montant de Chantal et du montant de Sylvain; l'équation reste telle que montrée dans la Figure 5, dessin 2).

E: est-ce que c'est important d'enlever la même chose de chaque coté du [signe] égal?

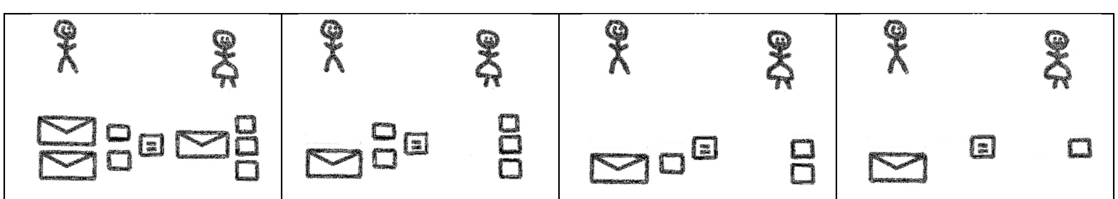
C : Oui. Et tu peux enlever l'autre enveloppe… Oh non! Une carte de Sylvain, et une carte de Chantal (Cali pointe vers les cartes de Chantal. L'enseignante fait au tableau ce que Cali dit. L'équation apparaît maintenant comme montré sur la Figure 4, dessin 3).

E: Aw! (En s'adressant à toute la classe, pour s'assurer que les élèves suivent, elle dit) Encore une fois (elle prend une enveloppe de chaque côté de l'équation, puis une carte de chaque côté de l'équation), une enveloppe, on enlève une enveloppe, une carte, une carte.

C : Tu enlèves une carte de Sylvain et tu enlèves une autre carte de Chantal.

E : (En répétant la dernière partie de la phrase de Cali) Enlève une autre carte de Chantal (elle exécute les actions en même temps qu'elle parle; L'équation apparaît maintenant comme illustrée dans la Figure 4, dessin 4. Puis, ça nous donne…

Cali : La réponse!



Dessin 1	Dessin 2	Dessin 3	Dessin 4

Figure 5 *- Les traces de la solution proposée par Cali.*

À travers la médiation d'un travail conjoint professeur-élèves se révèle maintenant un prototype général de résolution d'équations. La pensée algébrique dans son sens anthropologique se dévoile dans un singulier et devient ainsi objet de conscience. C'est ce processus de prise de conscience que nous avons appelé *objectivation* (Radford 2011). Après l'intervention de Cali, les élèves abordent d'autres équations similaires avec succès. Ils tombent par la suite sur une équation qui, après isolation, donne : 2 enveloppes d'un côté de l'équation et 6 enveloppes de l'autre côté. Les élèves reconnaissent qu'ils ont devant eux quelque chose d'autre. L'activité conjointe professeur-élèves se poursuit, rendant progressivement possible l'apparition ou la matérialisation d'autres aspects de la pensée algébrique et, par là, le développement de la pensée des élèves, c'est-à-dire la pensée subjective. Puisque l'apparition ou la matérialisation de la pensée algébrique est toujours unique, neuve, il est impossible de tomber exactement sur le même singulier, car la pensée subjective est toujours un même différent : la différence d'un même. Elle enferme le même et ne se réduit pas à celui-ci. Elle est à la fois l'achèvement de l'archétype et sa négation. Elle est toujours non-identité, déficit et surplus.

REFERENCES

Andler D. (2004) *Introduction aux sciences cognitives.* Paris: Gallimard.

Bednarz N, Kieran C, Lee L (1996) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau G. (2005) Réponses orales à Régis Gras. In Salin M, Clanché P, Sarrazy B. (Eds.) *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 43-47). Grenoble: La pensée sauvage.

de Vega M. (1986) Introducción a la psicología cognitiva. Mexico: Alianza Editorial Mexicana.

Brousseau G. (2006) Mathematics, didactical engineering and observation. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, N. Stehlíková (Eds.) *Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 3-18). Prague: PME.

Fedoseyev P. N. (1977) *Philosophy in the USSR - dialectical materialism.* Moscow: Progress Publishers.

Filloy E, Rojano T. (1989) Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics* 9(2), 19-25.

Filloy E, Rojano T, Puig L (2007) *Educational algebra.* New York: Springer Verlag.

Furinghetti F., Radford, L. (2008) Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In English L. (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education (2nd edition)* (pp. 626 - 655). New York: Taylor and Francis.

Høyrup J. (1995) *Les quatre côtés et l'aire.* Téléchargé du site: http://www.academia.edu/3131730/Torino_Associazione_Subalpina_Mathesis

Høyrup J (2002) Lengths, widths, surfaces. A portrait of old Babylonian algebra and its kin. New York: Springer.

Ilyenkov E. V. (1977) *Dialectical logic*. Moscow: Progress Publishers.

Kieran C. (1989) A perspective on algebraic thinking. In Vernand G, Rogalski J, Artigue M. (Eds). *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* 2, 163-171.

Kotovsky K, Simon H. A. (1990) What makes some problems really hard: Explorations in the problem space of difficulty. *Cognitive Psychology* 22, 143-183.

Leibniz G. W. (1966) *Nouveaux essais sur l'entendement humain.* Paris: Flammarion.

Leontiev A. N. (1984) *Activité, conscience, personnalité.* Moscou: Éditions du Progrès.

Martin J. (2004) The educational inadequacy of conceptions of self in educational psychology. *Interchange: A Quarterly Review of Education* 35, 185-208.

Nissen H, Damerow P, Englund R. (1993) *Archaic bookkeeping.* Chicago: The University of Chicago Press.

Radford L. (2011) Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: La théorie de l'objectivation. *Éléments* 1, 1-27.

Radford L. (2013) Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education* 2(1), 7-44.

Radford L. (2014) The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal* 26(2), 257-277.

Radford L. (2015) Rhythm as an integral part of mathematical thinking. In Bockarova M., Danesi M., Martinovic D., Núñez R. (Eds.) *Mind in mathematics: Essays on mathematical cognition and mathematical method* (pp. 68-85). Munich: LINCOM GmbH.

Robson E. (2008) *Mathematics in ancient Iraq*. Princeton: Princeton University Press.

Vygotski L. (1985) *Pensée et langage*. Paris: Messidor.

Vygotsky L. (1997) *Collected works* (Vol. 3). New York: Plenum Press.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LA GÉNÉRALISATION ALGÉBRIQUE COMME ABSTRACTION D'INVARIANTS ESSENTIELS

Hassane SQUALLI[*]

Résumé - Cette étude s'inscrit dans les travaux de recherche portant sur le développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. Nous proposons dans ce texte un modèle d'analyse du processus de généralisation algébrique chez les élèves. Nous présentons ensuite quelques résultats d'une recherche ayant porté sur le rôle de la validation dans la construction de généralisations et leurs justifications.

Mots-clefs : (Pensée algébrique, généralisation, algèbre, early algebra)

Abstract - This study is part of a research on the development of algebraic thinking in elementary and middle school. In this paper, a framework for analysing the algebraic generalization's process is presented, along with a few results of a research examining the role of validation in the construction of generalizations and their justifications.

Keywords: (algebraic thinking, early algebra, generalization)

I. INTRODUCTION

Cette étude s'inscrit dans les travaux actuels menés par un groupe de chercheurs visant le développement d'un observatoire international de la pensée algébrique, dont les missions sont les suivantes :

- Favoriser la mise en réseau des chercheurs sur le thème de l'entrée dans l'algèbre et former de nouveaux chercheurs ;
- Constituer un lieu virtuel international d'archivage, d'échange et de diffusion des connaissances dans le domaine concerné, des données sur les pratiques enseignantes, et un lieu de mise en réseau en matière de développement de la pensée algébrique ;
- Être un lieu de veille à l'affut des questions vives intéressant l'OIPA ;
- Documenter les programmes de formation initiale et continue des enseignants, les pratiques professionnelles en enseignement, les ressources en lien avec le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et secondaire.

Par ailleurs, ces travaux s'inscrivent dans le courant Early Algebra, courant qui réfère à la fois à un domaine de recherche, une approche curriculaire et un domaine de formation des

[*] Université de Sherbrooke – QC, Canada – Hassane.Squalli@USherbrooke.ca

Squalli H. (2015) La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 346-356.

enseignants. Ce courant met l'accent sur le développement de la pensée algébrique dès le primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre. Cette stratégie a été implantée dans divers pays anglophones (Squalli, Suurtamm et Freiman, 2012; Squalli, Mary et Marchand, 2011). Au Québec, bien que le programme de formation n'intègre pas cette stratégie de manière explicite, différentes communautés de pratique travaillent dans ce sens, notamment dans le cadre de formations continues financées par le ministère d'éducation québécois (Squalli, Mary, Morin, 2010-2012; Mary, Squalli, Marchand, 2010-2012; Tremblay, Squalli, Adihou, Saboya, 2013-2015).

II. LE COURANT EARLY ALGEBRA

Early Algebra ne doit pas être perçue comme une version précoce de l'algèbre actuellement enseignée au secondaire ni comme une préparation à celle-ci, une préalgèbre. Elle est plutôt une stratégie pour enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire, en offrant aux élèves des opportunités pour développer la pensée algébrique et approfondir davantage certains notions et concepts mathématiques (le concept d'opération, d'égalité, d'équation, de régularité, de formule, de propriété, de variable et de variation, entre autres). Cette stratégie nécessite une vision renouvelée de l'algèbre scolaire.
Bien qu'il n'y ait pas de consensus sur la signification de l'algèbre, il ressort des discussions plusieurs aspects partagés par une grande majorité de chercheurs et éducateurs de ce mouvement :

- L'algèbre peut être approchée selon deux points de vue complémentaires et indissociables : comme un ensemble d'activités mathématiques (résolution de problèmes, étude de structures, modélisation, étude de relations fonctionnelles, etc.) et comme une manière de penser (pensée algébrique), soit un ensemble de processus de pensée utiles dans ce type d'activités.

- l'algèbre possède de multiples aspects. Plusieurs approches didactiques de l'algèbre sont alors possibles : une approche généralisation, une approche résolution de problèmes, une approche fonction et modélisation, une approche langage[1]. Dans l'enseignement de l'algèbre, toutes ces approches doivent être considérées.

- l'enseignement de l'algèbre doit insister sur le développement de la pensée algébrique chez les élèves. Deux composantes de la pensée algébrique sont particulièrement soulignées : 1) la tendance à généraliser; 2) la tendance à raisonner de manière analytique.

- Le développement de la pensée algébrique peut se faire sans l'utilisation du langage littéral de l'algèbre, il peut donc commencer dès le primaire.

Précisons que pour nous, une activité mathématique est algébrique si elle fait intervenir des opérations (lois de composition internes, externes, binaires ou n-aires) pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, translation, etc.), mais répétées un nombre fini de fois. La pensée algébrique est une manière de penser que l'on peut mobiliser dans ce type d'activités. Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen d'un ensemble de raisonnements particuliers et de manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (par exemple, une tendance à voir l'égalité comme une relation d'équivalence, une tendance à laisser les opérations en suspens; une tendance à symboliser et

[1] Pour une discussion de ces approches, voir par exemple (Bednarz, Kieran et Lee, 1996), (Squalli, 2000)

à opérer sur des symboles; une tendance à avoir une vision structurale[2] (voir par exemple une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul)

Cette signification de l'algèbre inclut une grande part de l'arithmétique et intègre des éléments de l'analyse et de la géométrie. Pour sa part, van Reeuwijk (1998) adopte un point de vue proche du nôtre :

> From a mathematical point of view, algebra deals with systems in which operations play a role: addition (of numbers or other ''thing''), multiplication (numbers, other ''thing''), and the relations with the inverses. In others words, algebra deals with structure. Algebra is the study of operation structures. Following this point of view, arithmetic is a subdomain of algebra.
>
> (…)
>
> Calculus deals with change of magnitude and continuous and discrete changes. Very large and very small are important in calculus; grasping the infinite small and infinite large is a way to draw conclusions about the finite space in between.
>
> (…)
>
> When talking about school algebra, I mean something other than mathematical algebra. Algebra in the context of school algebra is a coherent integration of elements from the three domains: arithmetic, algebra, and calculus. (pp. 83-84)

Dans ce texte, nous présentons les deux composantes essentielles de la pensée algébrique : la tendance à généraliser et la tendance à raisonner de manière analytique.

III. LA GENERALISATION ALGEBRIQUE

1. Introduction

La généralisation peut être vue à la fois comme processus et comme produit. Pour faire une distinction entre ces deux aspects, nous parlerons de généralisation quand il s'agit du processus et de généralité quand il s'agit du produit.

Une généralisation est algébrique quand la généralité produite peut être représentée dans le registre algébrique, par exemple par une expression faisant intervenir un nombre fini de fois, des opérations, des nombres, des lettres, des mots, des symboles. La présence d'opérations (lois de composition interne ou externe, binaire ou n-aires) en nombre fini est indispensable et assure le caractère algébrique de l'activité. Par contre, la présence des lettres n'y est pas indispensable. Nous rappelons qu'historiquement, l'algèbre, comme domaine scientifique bien définie, existe bien avant l'apparition du langage littérale de l'algèbre.

La généralisation est un processus essentiel dans l'activité mathématique et tout particulièrement en algèbre. Mason (1996) y voit même le cœur des mathématiques. En effet, la plupart des faits mathématiques sont de nature générale, comme :

- Le périmètre d'un carré est quatre fois la mesure de son côté.
- Un nombre est pair si et seulement si son chiffre des unités est pair.
- La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est 180 degrés.
- Si G est un groupe d'ordre n, l'ordre de tout sous-groupe de G est un diviseur de n.
- …

Pour sa part, Lee va jusqu'à penser qu'en algèbre les activités de généralisation sont les plus importantes et constituent les seuls moyens d'initier les élèves dans la culture algébrique. Elle

[2] Voir par exemple une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaine de calcul

ajoute : «Nor is it much of a challenge to demonstrate that functions, modeling, and problem solving are all types of generalizing activities, that algebra and indeed all of mathematics is about generalizing patterns.» (Lee, 1996, pp. 102-103).

2. *Quelques modèles du processus de généralisation*

Plusieurs auteurs proposent des modèles pour décrire le processus de généralisation en mathématiques. A l'image de celui de Dörfler, ces modèles s'inspirent souvent du modèle proposé par Piaget et Henriques.

1. La généralisation selon Piaget et Henriques

Comme pour l'abstraction, Piaget et Henriques distinguent deux formes de généralisation : la généralisation inductive et la généralisation constructive.

> [La généralisation inductive] part des observables attachés aux objets, donc d'abstractions empiriques, et s'en tient à eux pour vérifier la validité des relations observées, pour établir leur degré de généralité et en tirer des prévisions ultérieures (mais sans encore chercher d'explication ou de "raison" ce qui conduirait à dépasser les observables), est alors de nature essentiellement extensionnelle et consiste à procéder du «quelque» au «tous» ou du «jusqu'ici» au «toujours» (…).
>
> [La généralisation constructive] s'appuie ou porte sur les opérations du sujet ou leurs produits, elle est en ce cas de nature simultanément compréhensive et extensionnelle et aboutit donc à la production de nouvelles formes et parfois à de nouveaux contenus (…). Ces contenus sont alors engendrés par ces formes et non pas donnés dans des observables empiriques (…). (Piaget et Henriques, 1978b. p.6)

Pour illustrer ces deux processus, utilisons l'exemple de la commutativité de l'addition.

L'affirmation «l'addition de deux nombres naturels ne dépend pas de l'ordre des termes» est une proposition générale donc le produit d'une généralisation.

Cette proposition peut être induite à partir de l'examen de quelques cas spécifiques de couples d'entiers naturels (n , m) et du constat : les résultats des chaînes de calcul n + m et m + n sont identiques. Cette observation (la constance du résultat des comparaisons) peut alors être étendue à toutes les valeurs des variables m et n. Dans cette généralisation, l'extension se base sur les observables uniquement et non sur des arguments pouvant justifier la validité de la propriété. C'est donc une généralisation inductive.

La commutativité de l'addition peut être aussi le résultat d'une généralisation constructive. Par exemple, étant données deux collections d'objets A et B de cardinal n et m, respectivement. Calculer n + m revient à ajouter m objets de la collection B aux n objets de la collection A et à dénombrer le tout. Calculer n + m revient à ajouter les n objets de la collection A aux m objets de la collection B et à dénombrer le tout. On s'aperçoit que les deux opérations de réunion des deux collections forment le même tout. Une réflexion sur ces opérations - sans effectuation des dénombrements - conduirait à comprendre que ces opérations ne dépendent pas des cardinaux des deux collections. Le cas de ces deux collections devient alors *prototypique* de toutes les paires de collections possibles. La généralisation s'appuie alors sur les opérations du sujet et non uniquement sur les observables. Remarquons que le domaine de cette généralité est restreint au domaine des entiers naturels. Son extension au domaine d'une autre catégorie de nombres nécessite une généralisation constructive différente s'appuyant sur des arguments différents.

2. La généralisation selon Dörfler

Selon cet auteur, la généralisation est à la fois un objet et un moyen de la pensée et de la communication (1991). Selon lui, généraliser est un processus socio-cognitif qui conduit à quelque chose de général (ou de plus général) et dont le produit réfère à une multiplicité potentielle ou actuelle. Généraliser peut être vu comme un processus psychologique dans la cognition des individus, dont les produits sont alors les construits cognitifs correspondants (schèmes, formes). Cependant, les processus individuels sont toujours conditionnés et médiatisés socialement, puisqu'ils exploitent et dépendent des moyens préparés et mis en place par la société, comme le langage. On peut difficilement avoir accès directement à ces processus sauf ce qu'on peut observer au cours d'une communication sociale.

Dörfler distingue deux types de généralisation : la généralisation empirique et la généralisation théorique.

La généralisation empirique s'apparente à la généralisation inductive de Piaget et Henriques.

La généralisation théorique, quant à elle, réfère à un système d'actions dans lequel des invariants essentiels sont identifiés et remplacés par des prototypes. La généralité est construite à travers l'abstraction des invariants essentiels. Les qualités abstraites sont des relations entre les objets, plutôt que d'être elles-mêmes des objets. Attardons-nous à présenter de manière détaillée le modèle de la généralisation théorique de Dörfler. Ce modèle possède plusieurs ressemblances avec l'abstraction réfléchissante de Piaget. Un des points communs est de considérer les actions du sujet comme le point de départ de la genèse des conceptualisations mathématiques.

La figure 1, schématise une version simplifiée du modèle de généralisation théorique de Dörfler, qui est adaptée aux situations de généralisations algébriques mettant en jeu des concepts de l'algèbre élémentaire.

Détachement des invariants de leur véhicule original

↑

Les invariants comme prototypes- Extension du domaine de référence

↑

Formulation d'invariants - Description symbolique des invariants

↑

Réflexion sur le système d'actions

↑

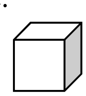
Système d'actions à partir d'une situation

Figure 1 *– Modèle simplifié de généralisation théorique de Dörfler (1991*

Pour rendre claire la présentation de ce modèle, nous l'illustrons au moyen de la résolution du problème suivant.

<u>Le problème des chaînes de cubes peints</u>

> *On crée une chaîne de cubes collés bout à bout et on se propose de les peindre. Trouver un moyen pour prédire le nombre de surfaces peintes en fonction du nombre de cubes de la chaîne.*



Le point de départ est une action ou un système d'actions. Les actions peuvent être physiques, imaginées ou symboliques, ce sont toujours des actions concrètes. Les buts des actions, les moyens utilisés ainsi que le cours des actions orientent l'attention du sujet vers certaines relations et connexions entre les objets sur lesquels portent ces actions.

Dans la situation des cubes peints, les objets sur lesquels portent les actions sont les chaînes de cubes, les faces des cubes, le nombre de ces cubes, la forme de la configuration géométrique formant la chaîne de cubes. Le but du système d'actions est décrit par la consigne du problème. Les actions sont ici imaginées, puisque les cubes sont dessinés.

Un système initial d'actions peut être le suivant : calculer combien de faces peuvent être peintes pour un cube, ensuite pour une chaîne formée de deux cubes, de trois cubes et ainsi de suite.

La répétition de ces actions conduit le sujet à une certaine constance dans les actions. Dörfler parle dans ce cas des invariants des actions. Dans notre exemple, les invariants des actions sont par exemple, « pour chacun des cubes du centre, deux faces ne peuvent être peintes» alors que «pour les deux cubes extrêmes, une seule face ne peut être peinte» ou encore, « quand on rallonge une chaîne de cubes d'un cube on augmente le nombre de faces qui peuvent être peintes de 4 (6 – 2).

Ces systèmes d'actions s'articulent alors autour de schémas d'actions, ou protocoles, qui sont ici la suite organisée d'actions que réalise le sujet pour calculer le nombre de surfaces peintes d'une chaîne donnée de cubes. Par exemple, un premier protocole consiste à déterminer le nombre de faces peintes d'une chaîne en calculant successivement le nombre de faces peintes des chaines de longueur 1, 2, 3 et ainsi de suite. Ce protocole bien qu'il puisse résoudre le problème pour une chaîne de n'importe quelle longueur, n'est pas pratique dans le cas des chaînes très longues, et nécessite une reconfiguration pour aboutir à une règle générale. Un autre protocole est de considérer que dans les chaînes de cubes expérimentés, il faut compter «2 fois 5 faces» pour les deux cubes extrêmes et «le nombre de cubes du centre fois 4 faces».

Comme nous venons de le faire, la formulation des invariants et des schémas d'actions nécessite une description symbolique, parce qu'il est nécessaire d'utiliser des symboles pour décrire les objets sur lesquels portent les actions (les cubes, les faces des cubes) ou pour décrire les transformations subies par le nombre de faces visibles lorsqu'on fait varier le nombre de cubes. Ces symboles peuvent être de nature verbale, iconique, géométrique ou algébrique. Les invariants sont potentiellement plus généraux que les actions elles-mêmes, ils peuvent être appliqués à n'importe quelle chaîne de cubes.

Un moment crucial dans le processus de généralisation se produit quand ces invariants sont remplacés par des *prototypes*. C'est-à-dire quand la formulation des protocoles ne sert plus uniquement à décrire les cas spécifiques examinés, mais aussi à envisager les cas potentiels. Ainsi, le schéma d'actions précédent, compter 2 fois 5 faces pour les deux cubes extrêmes et le nombre de cubes du centre fois 4 faces s'applique au cas de la chaîne de cubes sur laquelle a porté le système d'actions initial, mais aussi à n'importe quelle autre chaine de cubes (ayant plus de 3 cubes). Le fait que les invariants soient devenus prototypes, ou que le cas spécifique objet de l'activité du sujet soit devenue prototypique, est un changement qui s'effectue chez le sujet et non dans les objets. Le mouvement de pensée du sujet n'est plus *rétrospectif*, servant à décrire les actions et les invariants à partir des constances des actions, mais *prospectif*, les invariants ne couvrent plus seulement les cas examinés, mais aussi les cas potentiels. Ce changement est le fruit de l'expérience qu'a eu le sujet avec les différents cas spécifiques. Dörfler précise qu'un objet matériel, incluant les symboles n'est pas un *prototype* en soi. Il acquiert cette qualité en vertu d'une vision particulière qu'en a un sujet, vision qui est construite au cours d'une activité du sujet avec cet objet. En conséquence, un *prototype* ne peut pas être «passivement» perçu ou montré. En outre, les termes «cubes extrêmes» «cubes du centre» sont vus comme des variables qui varient. Notons que ce qu'on appelle exemple générique est un cas spécifique qui devient prototype pour un sujet. La généricité d'un exemple est une caractéristique émergente chez le sujet, non une propriété de l'exemple, elle ne se transmet pas, elle se construit.

Les invariants et leurs formulations symboliques sont alors détachés des actions originales. Dans notre exemple, le schéma d'actions peut dès lors être formulé de la manière suivante : le nombre de faces peintes d'une chaîne de cubes est : «2 fois 5 plus le nombre de cubes de la chaîne moins 2, fois 4», ou encore en langage numéro-littéral, $2 \times 5 + (n - 2) \times 4$ où n est le nombre de cubes dans la chaîne».

Dès le départ, les symboles possèdent un certain domaine de référence et ce domaine est étendu graduellement. Ce domaine se limitait d'abord aux cas spécifiques examinés. Il a été ensuite étendu aux cas potentiels générés par les prototypes; autrement dit, les cas pour lesquels on peut appliquer le même schéma d'actions tout en gardant stables les mêmes invariants. Dans notre exemple, la description symbolique de notre schéma d'actions s'applique à toute chaîne de cubes possédant deux cubes extrêmes et des cubes centraux, soit aux chaînes qui ont 3 cubes et plus.

En réfléchissant sur la description symbolique des invariants, les symboles utilisés commencent à se substituer graduellement aux éléments des actions et de leurs transformations. Cette réflexion peut permettre une autre extension du domaine de validité de la généralité. Dans notre exemple, par construction, notre formule $2 \times 5 + (n - 2) \times 4$ n'est valide que pour, $n \geq 3$. Mais on peut vérifier que cette formule marche aussi pour les cas $n = 1$ et $n = 2$. Bien que le système d'actions initial ne peut s'appliquer aux chaînes formées d'un ou de deux cubes.

Les symboles acquièrent les caractéristiques d'objets; ils deviennent eux-mêmes les objets des actions et, en tant que tels, ils deviennent les véhicules de différentes relations entre les invariants. Ces symboles sont alors de nouveaux objets de la pensée, des objets mathématiques, dont les significations résident dans les invariants. Le détachement total des actions originales permet d'écrire notre règle comme $4n + 6$, où n est un entier naturel non nul représentant le nombre de cubes dans la chaîne.

Cet objet mental est une généralité, parce qu'il a le potentiel d'un domaine de référence non limité. La réification des variables et des symboles complète le processus d'abstraction qui a commencé par fixer les invariants. Dans ce sens les invariants sont détachés de leur véhicule original, ils acquièrent une indépendance et forment la généralité abstraite.

3. *Quelques échos d'expérimentations auprès d'élèves*

Le modèle de Dörfler que nous venons de présenter s'est avéré fécond dans l'analyse fine du processus de généralisation chez les élèves. Voici quelques résultats tirés d'une recherche rapportée dans (Mary, Squalli, Schmidt, 2008). L'expérimentation didactique de la situation *Pentamino*[3] a eu lieu dans une école secondaire dite spéciale recevant des élèves en difficulté grave d'apprentissage puisqu'ils avaient au moins deux ans de retard sur le plan académique.

[3] Le matériel des *pentaminos* est tiré d'une activité présentée par Ralph Mason (2000) lors d'un Colloque du groupe canadien d'études en didactique des mathématiques.

Leur niveau scolaire en mathématique est variable, mais ne dépasse pas le niveau de secondaire 1 (grade 7).

Pour l'activité elle-même, on utilise une grille numérique formée de 7 lignes et 10 colonnes, contenant la suite des nombres de 1 à 80 (figure 2); sur laquelle on place une forme (constituée de cinq rectangles opaques sauf deux, voir figure 3) selon une orientation fixée. Le but de l'activité est de construire une stratégie gagnante pour une forme donnée, c'est-à-dire permettant de prédire, sans le support de la grille numérique, le nombre apparaissant dans la case nommée sortie ou case Arrivée (case bleu) étant donné un nombre initial connu dans la case nommée entrée ou case Entrée (case rouge).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33				37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

***Figure 2** – Grille numérique*

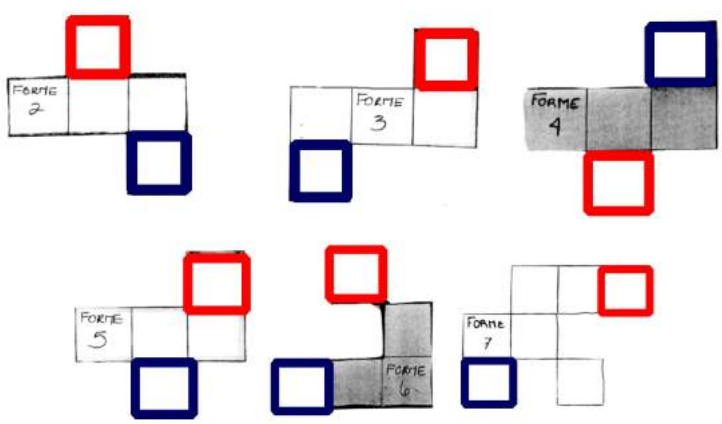


***Figure 3** – Différentes formes utilisées*

D'un point de vue mathématique, chaque forme est reliée à la règle d'une relation fonctionnelle affine qu'il s'agit de trouver. Une telle règle peut s'écrire en notation conventionnelle: $y = x + k$ où x représente le nombre de la case de départ, y celui de la case d'arrivée et k une constante. La régularité réside dans la constance des écarts $y – x$. La situation présentée aux élèves comporte trois tâches : 1) pour une forme donnée et sans la grille, prédire le nombre qui va apparaître dans la case d'arrivée (carré bleu) connaissant le nombre de la case de départ (carré rouge) ; 2) comparer des formes proposées par l'enseignant pour déterminer celle qui est la plus difficile pour réaliser la tâche de prédiction ; 3) construire la forme la plus difficile. La première tâche consiste en un jeu où les élèves doivent prédire le résultat sans la grille. Ceci vise la formulation d'une règle générale pour une forme donnée. Les deuxième et troisième tâches ont comme objectif d'amener les élèves à se détacher de la répétition des expériences puis à envisager une règle générale pour l'ensemble des formes présentées.

Les élèves ont utilisé différents systèmes d'actions qui peuvent être configurés en 3 grandes familles. Une famille étant une classe constituée des systèmes d'actions portants sur les mêmes objets des actions. Voici les familles identifiées dans la situation *Pentamino*.

F1: Cette famille regroupe les systèmes d'actions basées sur des déplacements horizontaux et verticaux sur la grille au voisinage de la forme. Les stratégies des élèves sont alors décrites sous forme d'une chaîne d'opérateurs: - 2, + 10, + 10, comme le cas d'Ulysse[4] par exemple pour la forme 3. Dans cette famille, le véhicule des actions est constitué par la forme du *pentamino*. Les invariants sont liés à la structure de la grille numérique et à la forme du *pentamino*.

F2: Cette famille repose sur le calcul du nombre de cases entre la case de départ et la case d'arrivée, une fois la forme posée sur la grille numérique. L'invariant mathématique est décrit sous forme d'un seul opérateur + 21, par exemple pour la forme 2, comme dans le cas de Cléopâtre :

> Quand elle me le donne, moi je regarde bien la forme. Là j'imagine, j'imagine le chiffre dans l'arrivée. Et là je compte les nombres qui sont dans l'autre et là, quand j'arrive dans ma case de départ, je le sais.

Dans cette famille, le véhicule des actions n'est pas la forme du *pentamino,* mais les positions relatives des nombres des cases de départ et d'arrivée dans la grille. Les invariants mathématiques sont liés à la constance de l'écart entre ces deux nombres quelle que soit la position de la forme sur la grille.

F3: Cette famille contient les systèmes d'actions reposant sur la comparaison des chiffres des unités et des chiffres des dizaines du nombre de départ et du nombre d'arrivée. L'invariant mathématique est décrit comme un couple d'opérateurs (- n, + m) que l'on applique respectivement au chiffre des unités et au chiffre des dizaines du nombre de la case d'entrée. Voici comment David détermine le nombre de la case de sortie quand on applique la forme 2 au nombre 25 :

> Moi j'ai trouvé de faire (inaudible). Tu as deux [le chiffre des dizaines de 25], tu rajoutes deux : 3, 4. OK. Pis ici [chiffre des unités de 25] tu en rajoutes juste un, ça va faire 6. Alors 4 et là 6 : 46.

Le tableau suivant présente la distribution des systèmes d'actions initiaux des élèves selon les familles.

Famille 1	Famille 2	Famille 3	Total
8 **73 %**	**2** **18 %**	**1** **9 %**	**11** **100%**

Figure 4 *- Répartition des systèmes d'actions initiaux sur les 3 familles*

[4] Tous les noms d'élèves sont des noms fictifs.

Comme attendu par l'équipe de recherche, la majorité des élèves ont utilisé les systèmes d'action de la famille 1. Compte tenu de la nature des médiations potentielles que permet la situation, les formes se prêtaient naturellement à être le véhicule des actions des élèves. Les invariants construits sont justifiés par la structure de la grille numérique. Les systèmes d'actions de cette famille ont permis des généralisations de nature théorique. Nous y reviendrons plus loin.

En revanche, les généralisations des familles 2 et 3 sont des généralisations empiriques. En effet, la régularité est dégagée à partir de la constance des résultats de quelques cas. C'est le schéma classique d'une généralisation empirique. Le domaine de validité du résultat est étendu sans une réflexion sur les raisons de la validité du résultat. Un des enjeux du développement de la généralisation algébrique chez les élèves consiste justement à les amener à s'éloigner d'une généralisation empirique et de tendre vers l'utilisation de généralisations théoriques.

Cette étude confirme le rôle essentiel que jouent les systèmes d'actions initiaux dans le processus de généralisation. Les généralités construites par les élèves sont empreintes des actions qui ont mené à leur formulation. Le système d'actions initial détermine d'une certaine façon la direction et le contenu de la généralisation (les invariants) dont la pertinence relève de l'activité du sujet. De plus, il détermine le registre sémiotique pour décrire les actions, les opérations sur ces actions, les invariants ainsi que les explications. Au début de l'activité, Ulysse décrit sa stratégie pour la forme 2 ainsi «Augmente de un, puis descend de un, puis descend encore de un parce que chaque ligne c'est dix». Cette description, porte sur trois objets : les actions réelles (par exemple, «descends de un»), les invariants mathématiques («augmente de 1») ainsi que la justification d'un invariant («parce que chaque ligne c'est dix» à propos de l'invariant implicite : «quand tu descends de 1 ajoute 10»). Plus tard, Ulysse décrit sa stratégie pour la forme 3 en une chaîne d'opérateurs «-2, +10, +10». Bien que cette description soit symbolique, elle tire son sens et son caractère opératoire du système d'actions initial («avancer de deux cases à droite, descendre d'une case, descendre encore d'une case»).

En outre, les systèmes d'actions initiaux sont déterminants dans la négociation de sens au cours des interactions. En effet, pour comprendre la stratégie d'un autre, il faut être capable de lier sa formulation au système d'actions qui lui donne sens ou de pouvoir l'interpréter dans son propre schème des actions. Cela paraît relativement facile quand les systèmes d'actions sont de la même famille. En effet, en utilisant des systèmes d'actions de la même famille, les élèves exploitent les mêmes véhicules des actions, arrivent aux mêmes invariants, partagent le même registre sémiotique pour décrire les invariants et leurs justifications. En revanche, l'adoption de la stratégie d'un élève qui se base sur un système d'actions d'une autre famille est plus difficile cognitivement. Elle nécessite un détachement de son propre système des actions. Un tel détachement est difficile quand le processus de généralisation n'a pas encore atteint ce niveau. Dans ce cas, l'élève doit changer de point de vue, abandonner son propre système d'actions et orienter l'attention vers un système d'actions d'une famille différente.

Finalement, l'analyse des processus de généralisation des élèves a mis en évidence le rôle de la validation dans la construction des généralités et de leur justification. Balacheff (1988) définit le processus de validation comme une activité de raisonnement dont la finalité est de s'assurer de la validité d'une proposition et éventuellement de produire une explication, une argumentation ou une démonstration. Cela suppose que le sujet a émis une telle proposition, ou que celle-ci est portée à sa connaissance par une tierce personne. Quand l'enjeu de la validation est le caractère général de la proposition, la généralité est donnée ou a déjà été produite. Nous sommes donc à la fin du processus de généralisation. La validation porte ainsi sur le produit de la généralisation. Elle ne peut donc être concomitante à la construction de la généralisation, car elle vient en aval de celle-ci. Au cours d'une activité de généralisation, les deux processus peuvent se chevaucher sans avoir lieu en même temps. En effet, le processus de généralisation passe par une série d'abstractions d'invariants essentiels; une fois que ces invariants sont formulés, un processus de validation peut s'enclencher pour en éprouver la validité. Mais dans une telle activité, c'est la généralisation qui conduirait l'élan de pensée du sujet. La généralisation est de nature prospective (ou extensionnelle selon Piaget), puisqu'elle est orientée vers le dépassement du spécifique, en anticipant le général. La validation, quant à elle, est rétroactive, puisqu'elle opère sur le produit de la généralisation.

REFERENCES

Balacheff N. (1988) *Une étude épistémologique du processus de preuve en mathématiques au collège*. Thèse présentée à l'Université National Polytechnique, Grenoble.

Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.) (1996) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Boston: Kluwer Academic Publishers

Dörfler W. (1991) Forms and means of generalization in mathematics. In Bishop A. J., Mellin-Olsen S., Van Dormolen J. (Eds.) *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp.63-85). Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Lee L. (1996) An initiation into algebraic culture trough generalization activities. In *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Piaget P., Henriques G. (1978) *Recherches sur la généralisation.* Paris : Presses Universitaires de France.

Mary C., Squalli H., Schmidt, S. (2008) Mathématiques et élèves en difficulté grave d'apprentissage : contexte favorable à l'interaction et au raisonnement mathématique. In Bisaillon J.-M., Rousseau N. (Eds.) *Les contextes d'intervention favorables aux jeunes en grandes difficultés* (pp.167-192). Montréal : Presses de l'université du Québec.

Mason J. (1996). Expressions of generality and roots of algebra. In Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.), *Approches to algebra* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Reeuwijk V.M. (1998) Structure in school algebra. In the *Proceedings of a National Symposium, may 27 and 28, 1997. The nature and role of algebra in the K-14 curriculum* (pp. 83-85). Washington, D.C.: National Academy Press.

Squalli H., Suurtaam C., Freiman V. (2012) Rapport du groupe de travail F : Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. Actes de la 36e rencontre annuelle groupe canadien d'études en didactique des mathématiques. Université Laval, Québec : 25 -29 mai 2012.

Squalli H., Mary C., Marchand, P. (2011) Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In Lebeaume J., Hasni A., Isabelle Harlé I. (Eds). *Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie*. Bruxelles : DeBoeke.

Squalli, H. (2000) Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat. Québec, Université Laval.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

SYMBOLISER ET CONCEPTUALISER, DEUX FACETTES INDISSOCIABLES DE LA PENSEE MATHEMATIQUE : L'EXEMPLE DE L'ALGEBRE

Joëlle VLASSIS[*]– Annick FAGNANT[**]– Isabelle DEMONTY[***]

Résumé – Dès les premiers instants de leur histoire, les mathématiques se sont développées en étroite relation avec les symboles qu'elles utilisent. Au départ d'une analyse épistémico-historique de l'évolution de la notation algébrique, cet article propose une réflexion sur la dialectique conceptualisation/symbolisation propre à la pensée mathématique. Il vise en particulier à mettre en lumière, dans la foulée des approches socioculturelles, le rôle et l'importance des activités de symbolisation dans les apprentissages mathématiques. Il vient également concrétiser ces perspectives par des pratiques de classe illustrant les propos théoriques. Une activité sur l'apprentissage de la résolution des équations est développée dans cet objectif.

Mots-clefs : symbolisation, conceptualisation, chaîne de signification, approches socioculturelles, histoire de l'algèbre

Abstract – From the very beginning of their history, mathematics were developed in close relationship with the symbols they use. Starting from an epistemico-historical analysis of the development of algebraic notation, this article proposes a reflection on the dialectic conceptualization/symbolization specific to the mathematical thinking. In particular, it aims to develop, on the basis of sociocultural approaches, the role and importance of symbolization activities in mathematics learning. It also proposes some classroom practices illustrating the theoretical principles. An activity on the learning of solving equations is developed in that objective.

Keywords: symbolization, conceptualization, semiotic chain, sociocultural approaches, history of algebra

I. INTRODUCTION

En mathématiques, les objets n'ont pas d'existence tangible et ne sont pas directement accessibles par la perception. Les notations symboliques sont donc cruciales puisqu'elles seules permettent de rendre compte des objets en question et d'y accéder. Leur utilisation autorise la communication, la réflexion et les échanges mathématiques. Toutes ces actions, impossibles sans ces notations, permettent ainsi le développement et le progrès de cette discipline.

[*] Université du Luxembourg – GD Luxembourg – joelle.vlassis@uni.lu
[**] Université de Liège – Belgique – afagnant@ulg.ac.be
[***] Université du Luxembourg – GD Luxembourg – isabelle.demonty@uni.lu

Vlassis J., Fagnant A., Demonty, I. (2015) Symboliser et conceptualiser, deux facettes indissociables de la pensée mathématique : l'exemple de l'algèbre. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 357-369.

Dans les pratiques d'enseignement, les symboles[1] mathématiques sont traditionnellement présentés comme des entités destinées à représenter une réalité mathématique externe, et dont il convient d'enseigner la grammaire et le vocabulaire. Ils sont donnés d'emblée aux élèves sous leur forme définitive. Le point de vue implicite sous-jacent à cette approche consiste à considérer les symboles de manière indépendante des concepts et opérations qu'ils représentent. Avec la redécouverte et la diffusion des travaux de Vygotsky, cette conception du rôle des symboles dans les apprentissages s'est profondément modifiée. Désormais, ceux-ci sont considérés comme constitutifs de la conceptualisation mathématique. Cette conception rejoint le développement même des mathématiques au fil des siècles où chaque avancée conceptuelle fut accompagnée, précédée ou suivie d'une avancée dans la symbolisation.

Dans la foulée des approches inspirées de Vygotsky, l'objectif de cet article consiste à développer une réflexion sur la dialectique conceptualisation/symbolisation propre à la pensée mathématique. Il vise en particulier à mettre en lumière le rôle et l'importance des activités de symbolisation dans les apprentissages mathématiques. Il se propose également de concrétiser ces perspectives par des pratiques de classe illustrant les propos théoriques.

Cet article est composé de trois parties. La première consiste à évoquer le rôle de la symbolisation dans le développement de l'algèbre au fil de l'histoire. La deuxième section discute, dans la foulée des thèses vygotskiennes, du processus de symbolisation en tant qu'élément incontournable des apprentissages mathématiques. Enfin, la dernière partie vient illustrer les principes évoqués en présentant des pratiques de classe basées sur des activités de symbolisation.

II. L'HISTOIRE DE L'ALGEBRE, UNE (R)EVOLUTION CONCEPTUELLE GRACE A UNE DECOUVERTE SYMBOLIQUE MAJEURE

L'histoire de la notation algébrique en Occident constitue un exemple éclairant de la dialectique entre symbolisation et conceptualisation dans le développement de l'histoire des mathématiques. Les analyses historiques montrent combien ces symbolisations ont été constitutives de l'émergence des objets mathématiques eux-mêmes.

Selon Ifrah (1994), c'est tout d'abord la découverte de la numération de position et du zéro par les savants indiens qui a ouvert la voix à l'élaboration d'une science algébrique. Car,

> « avec ce type de notations, les valeurs numériques, cessant d'être connotées par des symboles propres à chacune d'elles, perdent du coup de leur individualité qualitative […] la régularité cyclique de leur construction fournit une loi qui permet de les engendrer toutes à l'infini d'une manière toujours identique, et sans jamais que se perde la connaissances exact de leur rapport » (Massignon & Arnaldez, in Ifrah 1994, p. 454).

Cependant, toujours selon Ifrah, l'algèbre indienne n'aura pas su accomplir le pas décisif pour évoluer vers l'algèbre que nous connaissons. En effet, il lui manquait une notation générale, en l'occurrence la notation littérale, pour désigner des variables, inconnues ou constantes indéterminées. C'est la découverte de cette notation symbolique par Viète en 1591 qui a rendu possible la naissance de l'algèbre moderne. Ifrah souligne que c'est bien la notation littérale algébrique qui permit de passer du particulier au général, élevant la science algébrique à un niveau bien supérieur à celui de l'arithmétique ordinaire.

1 Dans cet article, nous utiliserons le terme « symbole » au sens large en référence à la définition de Cobb (2000) selon lequel les symboles sont des entités concrètes devant être interprétées comme signifiant quelque chose d'autre. Ainsi, les symboles ne se réduisent pas aux signes mathématiques conventionnels mais incluent aussi bien des graphiques, des tableaux, des diagrammes que des notations non standards comme de simples marques sur un papier voire un arrangement physique d'objets.

Plusieurs auteurs (Harper 1987 ; Kieran 1992 ; Ifrah 1994) s'accordent pour affirmer que l'évolution de la notation algébrique s'est réalisée en trois grandes phases.

La première phase est celle du *langage « rhétorique »* (Harper 1987) *ou terminologique* (Ifrah, 1994). Au cours de cette période, seul, le langage naturel est utilisé pour résoudre les problèmes. Aucun signe, ni symbole mathématique n'est utilisé. Les processus de calcul sont décrits verbalement.

La deuxième phase voit le développement d'un *langage syncopé.* C'est Diophante qui au III^{e} siècle après J.C. introduit des symboles pour désigner certains nombres. Radford (1992), rappelle toutefois que l'innovation majeure apportée par Diophante est l'idée d'*arithme* : une quantité indéterminée d'unités qu'il symbolisera sous la forme ζ (dzèta). Cet *arithme* correspond à la notion d'inconnue en algèbre moderne. Le changement conceptuel introduit par Dipohante avec l'*arithme*, c'est que cette quantité inconnue va être prise en compte dans les calculs. On va opérer avec elle ! Selon Radford (1992), l'objectif de Diophante n'était pas de résoudre des problèmes de la vie réelle appliqués au commerce, à l'agriculture ou à tout autre situation concrète mais des problèmes qui reflètent la structure de l'arithmétique. Diophante s'intéresse en effet au groupement des nombres (cubes, carrés, …) et les problèmes qu'il entreprend de résoudre concerne les nombres, leur différence, … Ses innovations symboliques ont consisté à abréger les mots. Celles-ci se sont imposées en raison des limites de l'écriture propre à l'époque, en tant que techniques efficaces pour copier plus rapidement les manuscrits mathématiques.

Ses innovations tant symboliques que conceptuelle conduisirent à des avancées importantes dans la résolution de problèmes et donnèrent lieu à une théorie arithmétique ouvrant de nouvelles perspectives (Radford 1992). La principale préoccupation des mathématiciens au cours de cette période consiste à découvrir l'identité des lettres et non d'essayer d'exprimer une généralisation. Le but de l'algèbre est donc de rechercher la valeur d'une inconnue (solution numérique d'un problème). Au cours de cette période se développe une utilisation de plus en plus extensive du symbolisme mathématique (symboles opératoires et littéraux) qui autorisa le développement d'opérations de plus en plus sophistiquées impossibles à réaliser avec les mots.

Enfin, dans la troisième phase, avec le *langage symbolique*, un changement radical se produit grâce à François Viète (à la fin du XVI^{e} siècle), lorsque les lettres vont également être utilisées comme paramètres, c'est-à-dire comme quantités données (Harper 1987). Cette simple mais brillante avancée conceptuelle allait changer la face de l'algèbre. Cette utilisation des lettres introduit un nouveau concept numérique en mathématiques : le concept de « nombre algébrique ». Les nombres représentés par ces lettres n'ont ni dimension spécifique, ni classement d'ordre particulier. Par exemple, dans $x + y = a$, a peut-être considéré comme une quantité donnée. Elle peut représenter tout nombre; x et y sont maintenant des variables corrélées. Kieran (1992) précise qu'avec ce langage symbolique, il devient possible d'exprimer des solutions générales et d'utiliser l'algèbre comme un outil pour démontrer les règles régissant les relations numériques. L'invention de Viète d'une notation condensée permit, selon Ifrah (1994), de passer d'un raisonnement individuel, portant sur des propriétés spécifiques, à un raisonnement global sur les propriétés communes à tous les cas d'une même espèce.

Ce dernier précise que :

> « L'usage de la lettre alphabétique pour désigner un paramètre ou une inconnue a défintivement libéré l'algèbre de l'esclavage du verbe, permettant dès lors de créer une sorte de « langue internationale » comprises sans équivoque possible par les mathématiciens du monde entier » (Ifrah 1994, p. 387).

Et c'est ce qui rendit possible, rappelle Ifrah, l'émergence d'autres concepts mathématiques, comme celui des fonctions, discipline qui constitue aujourd'hui l'un des fondements des mathématiques appliquées, mais également l'algébrisation de l'analyse et l'essor de la géométrie analytique.

Ce détour historique n'a pas pour but de montrer les différents cheminements « maladroits » entrepris par les savants au fil des siècles avant d'arriver aux mathématiques modernes abstraites, qui seraient considérées comme les seules « bonnes » mathématiques. Au contraire, nous pensons, à l'instar de Radford (1997), que les analyses historiques ont pour but de mieux comprendre la façon dont le savoir mathématique s'est développé dans une culture donnée, ainsi que la façon dont les significations ont émergé et se sont modifiées au fil des siècles. C'est davantage le processus d'émergence des idées mathématiques qui importe plutôt que la connaissance de la succession des événements et des faits historiques pour eux-mêmes. En l'occurrence, l'histoire de l'algèbre que nous venons d'évoquer brièvement, consiste à mettre en évidence le processus selon lequel les avancées symboliques se sont développées en étroite relation avec les avancées conceptuelles dans un contexte socio-culturel donné. Ces avancées symboliques permirent de poser de nouveaux problèmes et d'ouvrir à de nouveaux domaines requérant de nouvelles symbolisations plus adéquates dans un processus cyclique et récursif d'une société et d'une science en constante progression. Dans cette perspective, ainsi que le souligne Radford (1997), l'algèbre syncopée ne doit pas être considérée comme une étape intermédiaire entre une époque « primitive » et les mathématiques formelles, et qui serait caractérisée par des manques, notamment un manque de méthode générale. Au contraire, la découverte de l'*arithme* permit à Diophante de développer une méthode très sophistiquée de résolution de problèmes. En outre, le développement de la symbolisation syncopée fut façonné tant par les découvertes conceptuelles que par le contexte socio-culturel de l'époque. Les limites de l'écriture participèrent à son développement en rendant nécessaire l'abréviation des mots.

III. L'IMPORTANCE DE LA SYMBOLISATION DANS LES APPRENTISSAGES MATHEMATIQUES

Ce développement des notations algébriques au cours des derniers siècles, s'il a permis des avancées conceptuelles déterminantes, a souvent dû être poursuivi au détriment de l'évidence de sens pour les non-initiés. En effet, dans les phases rhétoriques et syncopées, le langage utilisé en mathématique correspondait ou restait encore proche du langage naturel. Mais depuis Viète et l'algèbre symbolique, les relations entre symboles et objets mathématiques se sont complexifiées de telle sorte que le lien entre de nombreuses expressions symboliques et ce qu'elles signifient n'est plus du tout direct. La plupart des symboles présentent plusieurs significations qui varient parfois au sein d'une même situation. Cette polysémie des symboles nécessite une formation aux conventions et aux règles qui régissent leur utilisation. Cela ne va pas sans difficulté pour les élèves du début du secondaire qui commettent un grand nombre d'erreurs en raison d'un manque de sens attribué à des symboles comme la lettre (Küchemann 1978 ; Booth 1984), le signe d'égalité (Kieran 1981 ; Theis 2005) ou encore le signe « moins » (Vlassis 2004, 2008, 2010). Une des raisons principales des difficultés observées chez les élèves trouve son origine dans un manque d'enseignement explicite et significatif du changement de sens de signes déjà connus tels que le signe d'égalité, la lettre ou le signe « moins ». En effet, la plupart du temps, ces changements pourtant majeurs sont de l'ordre de l'implicite et véhiculés dans des pratiques d'enseignement basées essentiellement sur l'application de règles et techniques dépourvues de sens aux yeux des élèves (Kieran 1992 ; Radford 2008).

L’objectif de cette section consiste à proposer une démarche d’enseignement alternative basée sur les approches socioculturelles issues des principes de Vygotsky (1997). Ces perspectives envisagent le développement conceptuel en étroite interaction avec le développement des symboles. Pour Vygostsky (1997) en effet, la communication et les interactions sociales sont considérées comme consusbstantielles à l’apprentissage et à la pensée. Le développement cognitif trouve son origine dans les interactions sociales médiatisées, c’est-à-dire instrumentées ou outillées, par des « signes » tels que le langage, l’écriture, les symboles, le dessin ou encore les schémas. En ce sens, les symboles mathématiques constituent des signes en tant qu’outils de la communication mathématique. C’est l’appropriation des signes qui, dans la pensée de Vygotsky (1997), marque de façon essentielle le passage des activités élémentaires aux activités supérieures. Dans les sections qui suivent, nous proposons tout d’abord une réflexion sur les signes, puis présentons un modèle d’apprentissage inspiré de Gravemeijer et Stephan (2002) basé sur les chaînes de signification et dans lequel concepts et symboles interagissent étroitement.

1. Signes et communication

Si la formation de la connaissance est considérée d’un point de vue social, l’utilisation des signes (et donc, notamment, des symboles mathématiques) devient un élément culturel central de la cognition (Radford 1998). Dans la perspective vygotskienne, si les signes ont d'abord une fonction générale communicative pour réguler l'interaction et le déroulement de l'activité, celle-ci précède et est à l'origine de la fonction intellectuelle. C'est parce qu'il est d'abord conduit à utiliser les signes pour agir sur l'autre (fonction sociale) que l'enfant devient capable de les utiliser pour agir sur lui-même (fonction individuelle cognitive). En ce sens, les théories sémiotiques de l’activité mathématique peuvent contribuer à affiner notre compréhension des principes qui viennent d’être évoqués. Sur la base des travaux des sémioticiens (Lacan/Saussure, cité par Gravemejer 2002), nous présentons une définition du signe schématisée dans la figure 1 ci-dessous.

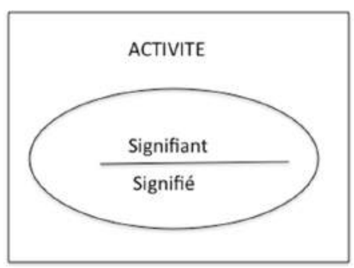


Figure 1 *– Proposition de définition du « signe » incluant la notion d’activité*

En sémiotique, un signe est généralement considéré comme étant constitué d’un « signifiant », l’expression matérielle perceptuellement accessible du signe, et d’un « signifié », renvoyant au contenu, au sens de cette expression. Les approches socioculturelles nous amènent à considérer le signe dans la foulée de sémioticiens, comme exprimant une relation étroite et sémantique entre signifiant et signifié. Un signe est ainsi représenté comme un ensemble composé de deux facettes inséparables (voir figure 1). Cependant, de notre point de vue, cette conception du signe ne peut suffire. Dans les approches socioculturelles, un signe n’est jamais une entité pour elle-même, il prend place et fait sens dans un contexte d’activité précis et est produit pour atteindre un objectif donné (Radford 1998). L’activité est envisagée comme l’environnement dans lequel s’insèrent les actions mathématiques des individus et qui les rendent nécessaires. Selon Radford (1998), l’activité présente deux caractéristiques importantes. La première c’est qu’elle est médiatisée par les signes et est donc enracinée dans la culture, la seconde c'est qu'elle est orientée vers un but. L'histoire de la notation algébrique, évoquée sans la section I, témoigne du même processus. Ainsi, de notre point de vue, un signe se définit par un signifiant et un signifié en étroite relation, médiatisant une activité donnée orientée vers un but. C'est pourquoi, nous suggérons de compléter la représentation du signe proposée par la sémiotique, en l'intégrant au cœur même de l'activité dans laquelle il est produit (voir figure 1).

2. Signes et chaîne de significations

À travers leurs analyses, Gravemeijer et al. (2000) ont mis en évidence le rôle crucial des activités de symbolisation qui se développent en relation avec l'évolution de pratiques mathématiques de la classe afin de faire émerger une réalité mathématique abstraite. Selon ces auteurs, les différentes étapes de symbolisation constituent une chaîne de significations dont la composante de base est le signe tel que nous venons de le définir. La chaîne de signification développée par Gravemeijer et al. (2000) et Gravemeijer (2002) présente une vision dynamique du signe selon laquelle une combinaison précédente du signe devient le signifié de la combinaison suivante (voir figure 2). Nous proposons dans la section IV un exemple de chaîne de significations modélisant une activité sur les équations (voir figure 5).

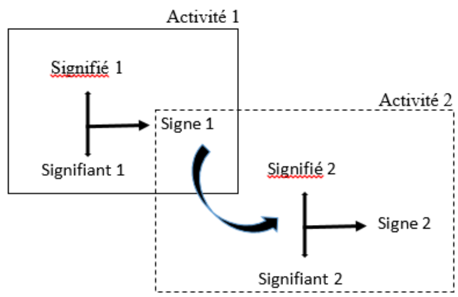


***Figure 2** – Chaîne de significations inspirée de Gravemeijer (2002) et adaptée à la définition du signe incluant la notion d'activité*

L'évolution des signes dans une chaîne de significations présentée dans la figure 2, implique que le nouveau signifié englobe le signe original, tandis que la signification du signe original change dans une mathématisation progressive de plus en plus abstraite. Ainsi, celle-ci s'installe de manière « *bottom up* » au départ des activités informelles des élèves (Gravemeijer et al. 2000). La signification initiale du signe précédent étant en relation avec des intérêts particuliers, elle est remplacée par une signification différente quand le signe suivant est utilisé dans des pratiques motivées par de nouvelles préoccupations. Cette évolution du signe est ainsi rendue nécessaire par des activités de complexité croissante. Il est à noter que Gravemeijer et al. (2000) insistent sur l'idée que l'évolution des signes émerge avec l'évolution des pratiques de classe. Cependant, leur schéma initial de chaîne de significations ne rend curieusement pas compte de cette dimension. C'est pourquoi nous l'avons adapté à notre définition du signe incluant les signes dans le contexte des activités qui évoluent au fil du temps (voir figure 2).

L'avantage de ce processus, selon Presmeg (2006), c'est qu'à chaque point de la chaîne existe la possibilité pour les élèves de revenir en arrière y compris aux actions initiales. Dans une perspective socioculturelle, cette production de symboles va entraîner des débats sur la pertinence de telle ou telle symbolisation en fonction de l'activité donnée. Ce va et vient entre le langage verbal, les symboles non conventionnels et les symboles mathématiques pour résoudre une tâche donnée contribue pleinement à la production de sens et à la compréhension des objets mathématiques étudiés. Rappelons à cet égard que les objets mathématiques appartiennent à une réalité intangible et qu'ils ne peuvent être appréhendés qu'à travers leurs différentes représentions. En ce sens, cette évolution à travers les différents types signes au cours des activités mathématiques contribue également puissamment à la conceptualisation des objets mathématiques.

IV. UN EXEMPLE D'ACTIVITE DE SYMBOLISATION EN ALGEBRE ELEMENTAIRE

La séquence d'enseignement de trois leçons sur la résolution d'équations que nous présentons ici a été mise au point par Radford (2002) et retravaillée par Radford, Miranda et Demers (2009) dans le but d'illustrer les caractéristiques d'une activité permettant un passage progressif à l'abstraction. Selon ces auteurs, abstraction et symbolisation sont intimement liées :

> « Les abstractions mathématiques partent d'une expérience sensorielle concrète […] Mais les abstractions mathématiques vont vite porter non pas sur des objets, mais sur des symboles les représentant » (p. 11).

1. Brève description de la séquence

La séquence, menée dans une classe de 2^{e} secondaire (grade 7 ; enfants de 13-14ans), s'organise au départ de problèmes de cartes de hockey dont certaines sont placées dans des enveloppes. La figure 3 présente un exemple de problèmes exploités.

Paulette et Richard

« La mère de Paulette et de Richard décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe. Paulette avait déjà 7 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe. Richard avait déjà 2 cartes et sa mère lui donne 2 enveloppes. Maintenant, les deux enfants ont le même nombre de cartes de hockey.

Combien y a-t-il de cartes de hockey dans chaque enveloppe ?

Figure 3 *– Un exemple de problèmes exploités dans la séquence (Radford et al. 2009, p. 31)*

Tous les problèmes travaillés peuvent se modéliser sous la forme d'une équation du premier degré à une inconnue où l'inconnue apparaît dans les deux membres de l'équation.

Les élèves de 2^{e} année du secondaire pourraient résoudre ces problèmes par une démarche arithmétique, par tâtonnements par exemple, mais la séquence a pour objectif de les amener à entrer progressivement dans une démarche de résolution algébrique. Cette démarche algébrique se distingue des démarches arithmétiques notamment par la nécessité de s'appuyer sur une propriété de l'égalité, qui autorise à ajouter ou à soustraire un même nombre aux deux membres d'une égalité. Dans ses interventions, l'enseignant guide donc les élèves vers une appropriation progressive de cette démarche algébrique, au départ de manipulation d'objets concrets, puis de symboles de plus en plus conventionnels. Trois activités avec des énoncés similaires sont proposées aux élèves pour exploiter les problèmes. Le sens de l'activité dans le contexte d'apprentissage répond aux mêmes critères que ceux évoqués précédemment. L'enseignant définit des « activités » en relation avec les contenus mathématiques visés qui seront médiatisées par des signes et rendront nécessaires les actions et les symbolisations des élèves en relation avec les apprentissages visés.

Lors de la première activité, les élèves disposent de cartes et d'enveloppes pour résoudre la situation. Le discours des élèves est principalement oral : il s'agit de construire et d'exprimer oralement une démarche permettant de retrouver le nombre de cartes présentes dans une enveloppe. Sur le plan de la conceptualisation, l'objectif de cette première activité est de mettre en évidence la propriété de l'égalité sur laquelle s'appuie la démarche algébrique de résolution d'équations, ancrée ici dans la situation concrète travaillée : « on peut ajouter ou enlever le même nombre de cartes à chaque enfant, tout en conservant l'égalité du nombre de cartes que possède chaque enfant ». Un exemple de production est présenté dans la figure 4 (première colonne).

Dans la deuxième activité, les élèves ne disposent plus du matériel concret : il s'agit de trouver une manière de résoudre le problème sous forme uniquement écrite. Les élèves sont ici amenés à exprimer sous la forme d'un schéma une stratégie de résolution du problème traité. Un exemple de production d'un groupe d'élèves figure dans la colonne centrale de la figure 4.

Lors de la troisième activité, les élèves sont invités à utiliser le symbolisme algébrique pour résoudre les situations. Les discussions sont d'abord axées sur la manière de symboliser le problème avec des nombres, des lettres et des signes opératoires. Une fois l'équation élaborée, le discours portera sur la symbolisation algébrique de la démarche de résolution. La troisième colonne de la figure 4 présente une production élaborée dans une classe.

La suite de la séquence amènera les élèves à résoudre des équations sans contexte, données directement sous une forme symbolique.

Activité 1 **Problème « Paulette et Richard »[2]**	**Activité 2** **Problème « Mat et Matik »[3]**	**Activité 3** **Problème « Mario et Chantal »[4]**
« On enlève 2 cartes à chaque enfant. Ensuite on enlève une enveloppe à chaque enfant. Finalement, on voit qu'une enveloppe comporte 5 cartes. »		$7+1n=3+3n$ $7^{-3}+1n=3^{-3}+3n$ $4+1n=3n$ $4+1n^{-1n}=3n^{-1n}$ $4=2n_{\div 2}$ $4\div 2=2n^{\div 2}$ $2=1n$

Figure 4 - Illustration des symbolisations des problèmes (Radford et al. 2009, p. 35 et p.40).

2. *Une vision sociale des apprentissages où les signes sont au cœur du débat mathématique.*

Le développement cognitif des élèves s'appuie, dans cette séquence, sur les interactions sociales, elles-mêmes instrumentées par des signes (objets concrets, dessins, symboles conventionnels et non conventionnels). Si les situations à résoudre sont finalement très semblables dans les trois activités (problèmes de partage de cartes), les signes utilisés pour les exploiter évoluent : au départ d'une résolution en actes, s'appuyant sur le langage courant et des objets concrets, les élèves sont amenés à enrichir ce discours oral par un système de

2 Cet exemple n'est pas repris tel quel de l'article de Radford et al. (2009) : il s'agit d'une reformulation d'un débat mené dans la classe lors de l'exploitation du problème « Paulette et Richard » (voir figure 8).

3 Ce problème, similaire au problème « Paulette et Richard », propose une répartition de cartes entre deux enfants : Mat et Matik. Il correspond à l'équation : x + 7 = 3x + 3. La symbolisation proposée a été élaborée progressivement lors d'échanges verbaux entre l'enseignante et les élèves (Radford et al. 2009, p. 35).

4 Ce problème est à nouveau très similaire au problème « Paulette et Richard ». Il correspond à l'équation 7 + n = 3 + 3n. La symbolisation du problème a à nouveau été réalisée de manière collective, à l'aide d'un débat entre l'enseignante et les élèves. (Radford et al. 2009, p. 40).

signes non conventionnels dans la deuxième activité avec un système composé de mots, de carrés, de rectangles et de barres pour modéliser les actions réalisées sur les deux membres de l'équation, puis conventionnels dans la troisième activité. Dans cette dernière activité, un signe particulier - une lettre - est donné au nombre inconnu du problème et aux opérations réalisées qui, dans les activités précédentes, consistaient en manipulations directes ou simulées d'objets.

Ce passage d'un système de signes à un autre a fait l'objet de nombreux débats au sein de la classe, débats orientés vers une meilleure compréhension du symbolisme algébrique et de la démarche algébrique de résolution des équations.

3. *Développement d'une chaîne de significations*

Nous proposons d'analyser la séquence présentée par Radford et al. (2009) à l'aide d'une chaîne de significations. La figure 5 ci-dessous présente cette analyse. Elle montre la manière dont les activités de symbolisations successives des problèmes soumis aux élèves permettent d'exprimer, à l'aide de trois types de signes, la démarche algébrique de résolution en passant d'une activité de manipulation de cartes et d'enveloppes à un système d'écritures symboliques.

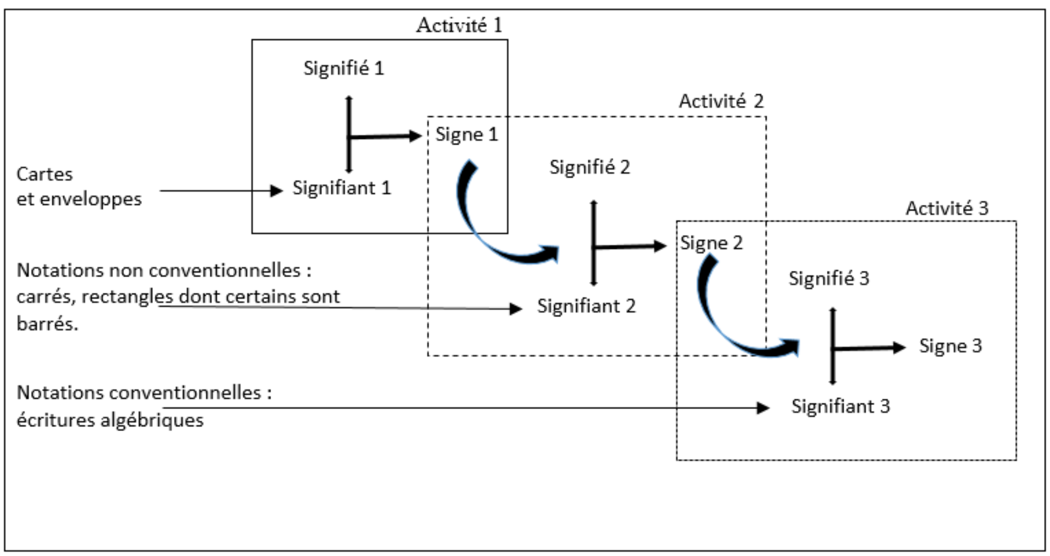


Figure 5 *– La chaîne de signification élaborée pour la séquence de Radford et al. (2009)*

Dans la figure 5, l'activité 1 confronte les élèves à du matériel concret (signe 1) : il s'agit de réaliser des opérations qui modifient le nombre de cartes de chaque enfant, mais pas le fait qu'ils en ont le même nombre de cartes[5]. Ces diverses manipulations sont orientées vers un même but : retrouver le nombre de cartes cachées dans une enveloppe. Les objets, ainsi que les opérations concrètes réalisées sur ces objets vont ensuite servir de point de départ à l'activité 2 : il s'agira cette fois de symboliser la situation à l'aide de notations non conventionnelles (signe 2), choisies par les élèves et qui rendent explicites les manipulations réalisées dans l'activité précédente. Au début de cette deuxième activité, le sens est

5 Illustrons cette idée au départ de la résolution du problème « Paulette et Richard » : selon l'exemple de résolution proposée dans la première colonne de la figure 3, on retire d'abord 2 cartes à chaque enfant : Paulette a donc des cartes en moins, de même que Richard. Toutefois, ce qui ne se modifie pas, c'est le fait qu'après cette suppression de cartes, les deux enfants conservent le même nombre de cartes (c'est-à-dire 2 de moins qu'au départ).

directement lié aux objets manipulés dans l'activité 1. Par la suite, au cours de l'activité 2, les élèves vont se détacher progressivement du contexte concret de la situation (partage de cartes entre deux enfants), pour se rapprocher d'un discours plus mathématique : on dispose au départ d'une répartition d'une même quantité de cartes en deux parts égales, certaines cartes étant cachées dans des enveloppes. Il s'agit d'effectuer des opérations de suppression (on barre des cartes ou des enveloppes des deux côtés de l'égalité) afin d'identifier, en fin de processus, le nombre de cartes correspondant à une enveloppe. Les élèves sont alors confrontés à l'activité 3 qui, bien qu'ancrée dans le même contexte, va les amener à modéliser le problème à l'aide de symbolisations algébriques conventionnelles (signe 3) et à revisiter, dans un contexte cette fois algébrique, les opérations de suppressions réalisées dans les deux activités précédentes, en vue de parvenir à résoudre une équation. Ainsi, le signifié évolue au fil de l'évolution des symbolisations. Au départ, les élèves parlent du nombre de cartes et du nombre d'enveloppes et des actions posées sur ce matériel, puis se détachant progressivement du contexte concret, ils focalisent leur attention sur les nombres de manière générale, en tant qu'objets mathématiques sur lesquels il s'agit d'opérer des opérations d'addition et de soustraction afin de retrouver un nombre inconnu. Le contexte concret est toujours présent en arrière fond mais ne se situe plus au cœur des réflexions. Il reste disponible dans la pensée des élèves si des problèmes de compréhension surviennent afin de rendre du sens aux différentes opérations formelles nécessaires pour résoudre le problème.

L'ancrage des trois activités dans un même contexte de partage équitable de cartes facilite la possibilité de revenir aux symbolisations réalisées à une étape antérieure pour donner sens à l'activité en cours.

La symbolisation présentée dans la figure 6 ci-dessous lors de l'activité 3 illustre la nécessité qu'ont ressentie certains élèves de proposer une écriture particulière pour identifier l'opération effectuée dans les deux membres de l'égalité. Cette opération est proposée en « exposant » pour la distinguer des autres opérations.

Le symbolisme garde trace de l'action de soustraction de 3 unités (-3) placée en exposant, effectuée dans chacun des deux membres de l'équation :

$$7 + 1n = 3 + 3n$$

$$7^{-3} + 1n = 3^{-3} + 3n$$

Figure 6 - *Symbolisation comportant des traces de transformations effectuées lors de la résolution d'une équation (Radford et al. 2009)*

Il semble encore important, à ce stade de l'apprentissage des élèves, de continuer à visualiser le fait que la résolution d'une équation implique des opérations (une soustraction dans l'exemple de la figure 6) qui doivent être effectuées simultanément dans les deux membres de l'équation pour conserver l'égalité de ceux-ci. Dans la suite des apprentissages, cette référence n'apparaîtra plus dans la symbolisation pour permettre de résoudre des équations de plus en plus complexes et abstraites.

V. EN GUISE DE CONCLUSION …

Les mathématiques sont bien connues pour présenter d'importantes difficultés aux élèves. La nature intangible et abstraite des objets mathématiques ne rend ceux-ci accessibles qu'à travers leurs diverses représentations. L'utilisation et la compréhension des symboles mathématiques jouent donc un rôle crucial dans les apprentissages. Or depuis longtemps, les recherches ont pointé de nombreux problèmes chez les élèves à ce sujet, notamment en algèbre où la compréhension des symboles tels que la lettre, le signe d'égalité, les expressions ou encore le signe « moins » représentent encore et toujours des obstacles régulièrement évoqués dans la littérature scientifique (Kieran 1992, 2007 ; Sfard & Linchevski 1994 ; Vlassis 2004, 2008, 2010).

Ces constats mettent plus que jamais en évidence la nécessité de développer des pratiques de classe centrées sur le symbolisme mathématique et envisageant la possibilité pour l'élève d'en construire le sens en étroite interaction avec les concepts. L'activité en algèbre qui vient d'être analysée, issue des approches socioculturelles, envisage une progression qui permet à l'élève d'ancrer les symbolisations formelles dans des activités utilisant dans un premier temps des notations informelles. Ces dernières évolueront selon une chaîne de significations, vers les symboles mathématiques usuels.

Cependant, nous tenons à souligner que ce type d'activités ne signifie pas que les symboles et les concepts émergeront « naturellement » des actions de symbolisations et des interactions sociales. Ainsi, le rôle de l'enseignant est déterminant et ne se limitera pas à planifier des activités adéquates et à faciliter les interactions entre élèves. Gravemeijer et al. (2000), et Radford (2008) partagent ce point de vue.

Les premiers (Gravemeijer et al. 2000) définissent en effet un rôle « proactif » pour l'enseignant. Cela signifie que celui-ci doit pouvoir tirer parti des contributions des élèves pour réaliser les finalités du curriculum. Il guide l'évolution de la classe tout en ne perdant pas de vue les objectifs mathématiques. Ce processus s'effectue à travers des négociations continuelles entre l'enseignant et les élèves, selon un processus de mathématisation progressive dans lequel le symbolisme et le raisonnement des élèves font l'objet d'une négociation explicite. Dans cette approche, l'enseignant est considéré comme le représentant de la culture mathématique et à ce titre, doit prendre part au discours de la classe, non seulement comme un guide lorsque le processus s'éloigne des intentions originales, mais aussi comme un véritable participant, suggérant des solutions possibles, des stratégies, des concepts, des questions et des objections. Il est en effet de la responsabilité de l'enseignant d'introduire dans le discours de nouveaux éléments mathématiques qui n'auraient jamais pu être découverts par les élèves eux-mêmes. Cela peut également se traduire par le fait de reformuler une idée ou de souligner davantage certaines contributions d'élèves indiquant par là que l'enseignant valorise certaines solutions plutôt que d'autres.

Pour Radford (2008), l'émergence, au cours des interactions enseignant-élèves, des connaissances mathématiques formelles, comme par exemple la méthode algébrique de résolution d'équations, représente plus qu'un échange de point de vue. Ce type de relation présente une profonde valeur épistémique. Il s'agit en effet d'un processus complexe et dialectique dans lequel le processus d'apprentissage est étroitement imbriqué dans celui d'enseignement. Pour Radford (2008), de la même manière que pour Gravemeijer et al. (2000), cela implique des interventions de l'enseignant comme reformuler, noter, interpréter, souligner, suggérer de nouveaux éléments, etc. Ces interventions permettent de « Parler les mathématiques » (Bednarz 2005) en utilisant divers types de signes, comme les représentations, les symboles conventionnels, les notations informelles, le langage verbal, les dessins, les gestes, les objets, etc.

En autorisant les élèves à mobiliser une large palette d'outils sémiotiques structurés en chaînes de significations, ces approches leur permettent d'attribuer du sens aux objets mathématiques mais aussi d'en élargir leur compréhension dans des contextes d'utilisation variés, favorisant ainsi la transition vers un usage formel détaché des environnements initiaux. En aucun cas, il ne s'agit de cantonner les élèves dans leurs démarches et symbolisations informelles. Au contraire, il s'agit bien d'utiliser celles-ci comme levier dans un processus progressif de conceptualisation-symbolisation en étroite interaction, semblable à celui qui s'est imposé dans l'histoire de la notation algébrique évoquée au début de ce chapitre.

REFERENCES

Bednarz N. (2005) Parler les mathématiques. *Vie pédagogique* 136, 20-23.

Booth L. R. (1984) *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor, UK: NFER-Nelson.

Gravemeijer K. (2002) Preamble: from models to modeling. In Gravemeijer K., Lehrer R., van Oers B., Verschaffel L. (Eds.) *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7-22). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer K., Stephan M. (2002) Emergent models as an instructional design heuristic. In Gravemeijer K., Lehrer R., van Oers B., Verschaffel L. (Eds.) *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145-169). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer K., Cobb P., Bowers J., Whitenack J. (2000) Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education. In Cobb P., Yackel E., McClain K. (Eds.) *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-274). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Harper E. (1987) Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics* 18(1), 75-90.

Ifrah G. (1994) *Histoire universelle des chiffres: l'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul.* Paris : Robert Laffont.

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra in the middle school through college levels. In Lester F. K. Jr (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). USA: National council of teachers of mathematics.

Kieran C. (1992) The learning and the teaching of school algebra. In Grouws D. (Ed.) *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Mac Millan.

Kieran C. (1981) Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics* 12(3), 317-326.

Küchemann D. (1978) Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school* 7(4), 23-26.

Presmeg N. (2006) Semiotics and the "connections" standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 61(1-2), 163-182.

Radford L., Miranda I., Demers S. (2009) *Processus d'abstraction en mathématiques.* Ottawa: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Radford L. (2008) Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education* 40(1), 83-96.

Radford L. (2002) Algebra as tekhne. Artefacts, symbols and equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 1(1), 31-56.

Radford L. (1998) On signs and representations, a cultural account. *Scientia Paedagogica Experimentalis* 1, 277-302.

Radford L. (1997) On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 17(1), 26-33

Radford L. (1992) Diophante et l'algèbre pré-symbolique. *Bulletin de l'Association des Mathématiques du Québec* 6(1), 73-80.

Sfard A., Linchevski L. (1994) The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* 26, 191-228.

Theis L. (2005) L'apprentissage du signe = : un obstacle cognitif important. *For the Learning of Mathematics* 25(3), 7-12.

Vlassis J. (2010) *Sens et symboles en mathématiques : étude de l'utilisation du signe" moins" dans les réductions polynomiales et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue.* Berne : Peter Lang.

Vlassis J. (2008) The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology* 21(4), 555-570.

Vlassis J. (2004) *Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'. Learning and Instruction* 14(5), 469-484.

Vygostsky L. (1997) *Pensée et langage.* Paris : La Dispute.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DIMENSION HISTORIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Compte-rendu du Groupe de Travail n°4

Abdelmalek BOUZARI[*] – Evelyn BARBIN[**] – Louis CHARBONNEAU[***]– Mamadou S. SANGARÉ[****]

Notre groupe voulait mettre un accent sur la place et le rôle de l'histoire des mathématiques et de leur enseignement dans l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux d'enseignement, du primaire à l'université. Nous proposions de décliner la réflexion autour des quatre grands thèmes suivants :

1. Les apports didactiques de l'introduction d'une dimension historique dans l'enseignement ;
2. Apports de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques à la didactique des mathématiques: études de cas et enjeux épistémologiques et méthodologiques ;
3. Les approches patrimoniales et ethnomathématiques de l'histoire des connaissances mathématiques à toutes les échelles (école, ville, pays ou région du monde) et leur articulation avec une pensée universelle des mathématiques;
4. L'histoire de l'enseignement des mathématiques dans les pays francophones : circulation et échanges.

Alors que le premier thème porte sur l'analyse didactique et épistémologique des expériences effectives d'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement, le second thème vise plutôt à susciter des échanges sur les difficultés méthodologiques rencontrées dans les recherches qui ont pour objet de mieux évaluer l'impact de l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans les classes de mathématiques. Le troisième thème cherche à susciter une réflexion sur l'apport du patrimoine culturel pour plonger l'histoire des mathématiques dans les différents contextes où elle a été construite par l'humanité. Ce thème tient compte du fait que les développements, à travers les âges, des concepts mathématiques ne sont pas les fruits instantanés et miraculeux de mathématiciens, mais des tentatives de réponses à des problématiques d'une société continuellement en développement et d'un effort collectif des

[*] ENS de Kouba (Alger) – Algérie – bouzari@ens-kouba.dz
[**] Université de Nantes – France – evelyne.barbin@wanadoo.fr
[***] Université du Québec à Montréal – Canada – charbonneau.louis@uqam.ca
[****] ENS de Bamako – Mali – mamadoussangare@yahoo.fr

Bouzari A., Barbin E., Charbonneau L., Sangaré M.S. (2015) Dimension historique dans l'enseignement des mathématiques – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°4.* In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*– Actes du colloque EMF2015 – GT4, pp. 370-373.

membres d’une communauté scientifique, effort fait de circulation d’idées, d’échanges, de ruptures et d’âpres controverses. L’enracinement, à travers le temps, de concepts mathématiques dans des contextes sociaux, culturels et idéologiques est une dimension à prendre en charge dans l'enseignement des mathématiques et dans la formation des enseignants. Enfin, le quatrième thème tire son intérêt du croisement de l'histoire de l'enseignement des mathématiques avec l'histoire des mathématiques et l'histoire sociale et institutionnelle. Ces dernières années, beaucoup d'études ont été proposées dans le cadre d'un pays ou d'une région, sans mettre beaucoup en avant la circulation des conceptions pédagogiques et celle des ouvrages, ainsi que les échanges entre interlocuteurs concernés. Il serait intéressant de développer cette thématique dans la zone francophone, pour laquelle la langue a pu servir de véhicule important.

Il y a eu cinq communications dans notre groupe de travail. Il va alors sans dire que les quatre thèmes n’ont pas été abordés.

Le thème sur les approches patrimoniales (3) a été abordé par Pierre Ageron qui a fait état d'une expérience qu'il a faite à Caen avec des étudiants en formation à l’enseignement des mathématiques. Celui des apports de l’histoire et de l’épistémologie des mathématiques à la didactique des Mathématiques (2) a été abordé dans trois présentations, celle de Slim Mbrabet en rapport avec le théorème de Thalès, celle de Slimane Hassayoune et Rahim Kouki qui traitait de la genèse de la pensée algébrique et aussi celle de Mounira Ighil Ameur et Rachid Bebbouchi sur l'enseignement des décimaux. Une présentation a abordé le thème de l'histoire de l'enseignement des mathématiques dans les pays francophones (4), celle de José Indenge Y'Esambalaka sur l'évolution de la didactique des mathématiques en République démocratique du Congo.

Le thème sur les apports de l’histoire à la didactique des mathématiques (2) n’a pas été abordé par les participants.

Le groupe était composé de deux (ou trois selon la période) mathématiciens, quatre historiens des mathématiques, trois didacticiens. Les discussions ont surtout porté sur la façon dont l’histoire a été traitée dans les différentes communications. Un certain malaise s’est manifesté de la part des historiens à propos des contenus historiques présentés dans les communications plus didactiques. En effet, les éléments historiques présentés ne prennent pas toujours en compte les derniers développements en histoire des mathématiques, particulièrement dans l’histoire des mathématiques arabo-musulmanes. Cela a pour conséquence de limiter la portée de l’analyse du contenu historique par les didacticiens. Plus spécifiquement, on se limite trop à une histoire des concepts mathématiques sans prendre en compte le contexte plus large, social et culturel, dans lequel les différentes étapes de l’évolution de ces concepts prennent racine. Il ressort de nos discussions que la prise en compte de ces contextes enrichit grandement la compréhension qu’on peut avoir de l’évolution de ces concepts, particulièrement dans l’esprit où on voit l’histoire comme une source d’inspiration vers une meilleure compréhension de l’articulation et de la dynamique de l’évolution de la pensée mathématique chez les élèves. La question se pose alors de savoir comment faire en sorte que les didacticiens puissent avoir accès plus facilement aux recherches de pointe en histoire des mathématiques. Une plus grande collaboration entre didacticien et historien est nécessaire. Il faudrait que des groupes de recherches composés à la fois d’historiens et de didacticiens se forment, groupes dans lesquels les besoins des didacticiens en ce qui a trait aux informations historiques pourraient amener les historiens à eux-mêmes orienter leurs recherches vers de nouvelles avenues. Des groupes, donc, dans lesquels la dynamique de recherche irait dans les deux sens.

Un irritant s'est aussi manifesté dans le fait que les historiens ne comprenaient pas toujours la signification du vocabulaire et la portée des théories didactiques. Plusieurs ont senti qu'il se faisait une lecture de l'histoire qui cherchait à la décrire dans les termes de ces théories, sans trop se donner la liberté nécessaire pour plutôt ajuster ces théories pour respecter ce qu'enseignent les données historiques. C'est comme si les théories didactiques avaient le statut de paradigmes qu'il ne saurait être question de remettre en question. L'histoire des mathématiques se montre d'une grande richesse, surtout lorsqu'on prend en considération les contextes socioculturels dans lesquels les idées et les concepts mathématiques prennent leur source. Cette richesse s'accompagne par ailleurs d'une grande complexité. Ce qui ne veut pas dire qu'il faille renoncer à l'intégrer dans des réflexions théoriques à caractère didactique. Bien au contraire. Mais, il importe de la respecter, et d'accepter que nos efforts ne mènent qu'à des organisations conceptuelles partielles et toujours sujettes à la confrontation avec l'état de nos connaissances historiques. Par ailleurs, de tels efforts de conceptualisation et de théorisation dans une perspective didactique peuvent se révéler riches pour les historiens en orientant leur attention vers des perspectives de recherches nouvelles.

Par ailleurs, nos discussions et nos échanges sur les contextes socioculturels ont montré à répétition qu'on aurait avantage à s'intéresser davantage à l'histoire de l'enseignement des mathématiques. Que ce soit lorsqu'on discute des problèmes de langue dans le contexte de l'arabisation de l'enseignement, ou plus généralement de la diversité des langues dans un même système national d'éducation, ou encore dans l'analyse des difficultés relatives à l'enseignement des fractions, les façons anciennes ou traditionnelles de faire éclairent sous un jour particulier nos fonctionnements actuels.

En résumé, les quelques points retenus à la suite de l'ensemble de nos discussions sont donc :

1. Les références à l'histoire dans les recherches en didactique manifestent parfois un manque de connaissances quant à l'état des connaissances de pointe en histoire des mathématiques. Il importe donc de faciliter les communications régulières entre les historiens, d'une part, et les didacticiens intéressés à l'histoire pour nourrir la réflexion didactique, d'autre part. Cela est particulièrement vrai en ce qui a trait à l'histoire des mathématiques arabes, du Maghreb aussi bien que du Machrek au sens large.
2. Il importe de ne pas négliger le contexte et les raisons d'être ayant mené à la production d'une œuvre ou d'un travail mathématique.
3. La difficulté, pour les historiens, de naviguer à travers le vocabulaire de la didactique des mathématiques. Ils ont parfois l'impression que les théories didactiques devraient être sujettes à adaptation pour pouvoir servir dans le cadre d'analyses de contenus historiques.
4. L'histoire de l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux et des contextes dans lesquels s'insère cet enseignement est un outil probablement révélateur des sources de certaines difficultés rencontrées aujourd'hui. On devrait lui consacrer plus d'attention.

Notre groupe de travail a permis des avancées théoriques et des clarifications nécessaires sur la portée et la signification de ce qui est appelé « intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement » ou « introduction d'une perspective historique dans l'enseignement ». Il ne s'agit pas d'introduire des éléments épars pseudo-historiques dans l'enseignement, mais, comme il a été dit fortement dans notre groupe, de prendre en compte les avancées historiques, ainsi que le contexte plus large, humain, social et culturel, dans lequel les connaissances mathématiques ont été construites. La prise en compte de la construction historique des connaissances dans un contexte élargi permet de savoir à quels problèmes elles permettaient de répondre, quelles furent les difficultés, les ruptures et les tensions auxquelles elles ont donné lieu. Elle enrichit grandement la compréhension des enseignants sur la portée des concepts et sur la signification de leurs changements. À ce compte, l'histoire constitue bien une source de réflexion et d'inspiration vers une meilleure compréhension de la dynamique de la pensée mathématique chez les élèves. Au-delà de cette clarification, notre groupe a avancé des éléments en faveur de la mise en œuvre d'une intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement qui réponde à nos attentes. D'abord, cette intégration suppose de ne pas s'enfermer a priori dans des cadres didactiques, mais au contraire, de procéder à des échanges ouverts avec les chercheurs en didactique. Ensuite, elle nécessiterait une réflexion sur la formation des enseignants à l'histoire et à l'épistémologie des mathématiques. Enfin, elle demande de prendre en compte le contexte institutionnel de cette intégration, et de ce point de vue, l'analyse de l'histoire de l'enseignement des mathématiques dans le contexte francophone apparaît comme essentielle. Ces trois éléments pourraient être pris en compte pour la continuation des travaux de l'EMF.

REFERENCES

Karp A., Schubring G. (Eds.) (2014) *Handbook on the History of Mathematics Education.* Springer.

Samedi **10 octobre 2015** **Hôtel Hilton**	**Dimanche** **11 octobre 2015** **Faculté des Mathématiques, CAM**	**Mardi** **13 octobre 2015** **Faculté des Mathématiques, CAM**
11h-11h25 : – Mots d'introduction des travaux – Modalités de travail	8h30-9h25 : Communication 2 *Les environnements mathématiques et les démonstrations du théorème de Thalès dans l'histoire.* (MRABET S.)	8h-8h55 :*La recherche en didactique des mathématiques en République Démocratique du Congo : une nouvelle voie pour l'amélioration de la qualité de l'enseignement*. (INDENGE Y'ESAMBALAKA, J. et BUAMOKE MONGA MONGBENGU, J.L.)
11h30-12h25 : Communication 1 *Engeigner l'histoire des mathématiques à l'université : de l'échelle locale aux dimensions du monde.* (AGERON P.)	9h30-10h25 : Communication 3 *La genèse de la pensée algébrique : ruptures et obstacles épistémologiques.* (HASSAYOUNE S. et KOUKI R.).	
	10h30-11h : Pause	10h-10h30 : Pause
	11h-11h55: Communication 4 *Enseignement de décimaux à l'école primaire et environnement algérien.* (IGHIL AMEUR et M.BEBBOUCHI R.)	

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ENSEIGNER L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES À L'UNIVERSITÉ : DE L'ÉCHELLE LOCALE AUX DIMENSIONS DU MONDE

Pierre AGERON*

Résumé – Je rends compte d'une expérience d'enseignement d'histoire des mathématiques au niveau universitaire appuyée sur l'histoire scientifique locale, notamment sur le patrimoine manuscrit conservé à la bibliothèque de Caen. J'explique comment j'ai été amené à faire varier les échelles, en passant à une approche « glocale » connectant les pratiques locales à des phénomènes macrohistoriques comme la circulation du savoir entre la Chrétienté occidentale et l'Islam.

Mots-clefs : histoire locale, Normandie, patrimoine manuscrit, circulation des savoirs, sciences arabes

Abstract – I report here on an experiment of teaching history of mathematics at university level based on local scientific history, especially on the manuscript heritage kept in Caen library. I explain how I was lead to vary scales, switching to a « glocal » approach connecting local practices to macrohistorical phenomena like knowledge circulation between Western Christendom and Islamic countries.

Keywords: local history, Normandy, manuscript heritage, knowledge circulation, Arabic sciences

I. UNE HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCHELLE LOCALE

1. *Le familier et l'étrange*

Pendant trois années, j'ai fait de la dimension locale l'axe pédagogique structurant d'un enseignement d'histoire des mathématiques à l'université de Caen.

Cette expérience ne partait pas de rien. Avec des collègues de l'IREM de Basse-Normandie, dont certains avaient une longue expérience en ce domaine et d'autres se lançaient avec enthousiasme, nous avions eu l'occasion d'expliciter notre conviction qu'« il est possible et fécond d'exploiter les objets du patrimoine local dans le contexte d'un enseignement de mathématiques » (Ageron, Jenvrin & Le Goff 2009). Il s'agissait de porter un regard « oblique » sur des objets patrimoniaux du domaine artistique, notamment architectural et pictural, par une approche mathématique. Notre intuition, confortée par nombre d'expériences réussies devant des publics variés, était que la motivation résultant d'une activité mixte est supérieure à l'addition des motivations que susciteraient, par exemple, une visite guidée traditionnelle et des exercices de mathématiques conventionnels. Il n'était donc pas question pour nous d'enrober une pilule amère dans un habillage sucré, mais bien plutôt de croiser démarche humaniste et démarche scientifique, en préservant toute la rigueur propre à chacune d'elles. Nous avions insisté sur le soin à apporter au choix des sites :

* Université de Caen Normandie – France - ageron@unicaen.fr

Ageron P. (2015) Enseigner l'histoire des mathématiques à l'université : de l'échelle locale aux dimensions du monde. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT4, pp. 374-385.

hors des murs de l'école, mais si possible accessibles à pied, au cœur de l'environnement quotidien des élèves, néanmoins peu connus, un brin mystérieux et habituellement fermés au public. Dans de nombreux cas, ces activités sollicitaient, à un degré ou un autre, l'histoire des mathématiques.

À la rentrée 2010, j'eus à concevoir un nouvel enseignement d'histoire des mathématiques en première année de master de mathématiques (quatrième année d'université). Il devait prolonger, tout en s'en distinguant nettement, l'enseignement assez classique de cette discipline que je dispensais déjà en troisième année de licence. Saisi d'abord d'un certain vertige devant l'océan des possibles, il me sembla naturel de prolonger les réflexions et expérimentations sur le patrimoine local conduites à l'IREM. Je fis cette fois un postulat quelque peu différent : celui que les mathématiques produites, rédigées, imprimées, enseignées, discutées, utilisées dans la ville ou la région où vivent les étudiants étaient de nature à attirer leur attention, à les leur rendre proches, à faire résonner en eux des échos familiers, à les impliquer plus intensivement ou les repositionner favorablement.

Connaissant bien l'histoire de la ville de Caen, où j'exerce aussi, ponctuellement, comme guide-conférencier, je savais que nombre d'institutions, d'entreprises, de rues, de maisons, de familles subsistent, sous une forme ou sous une autre, au sein desquelles s'est écrite cette histoire scientifique locale multiforme, permettant d'en éprouver la réalité. Par ailleurs, une enquête sur les manuscrits arabes de toutes sortes conservés en Basse-Normandie (Ageron 2013) m'avait conduit à visiter les fonds patrimoniaux de plusieurs bibliothèques de la région. J'avais alors remarqué qu'on y conservait aussi un nombre important de documents mathématiques anciens, imprimés ou manuscrits, pour la plupart d'origine régionale. La variété de ces documents m'avait paru à même d'illustrer une partie importante de mon cours ou de mes travaux dirigés. Comme beaucoup d'entre eux étaient des manuels ou des cahiers d'élèves, j'escomptais aussi, devant des étudiants essentiellement destinés au professorat, interroger les méthodes et les objectifs de l'enseignement des mathématiques à différentes époques. Je voulais encore qu'ainsi formés, il puisse leur venir un jour l'idée et l'envie d'utiliser de telles ressources pour construire des activités mono- ou pluridisciplinaires devant leurs propres élèves. Quant aux spécificités du fait local, elles étaient attirantes et plutôt flatteuses : l'antique et puissante tradition savante de Caen, l'*Athenæ Normannorum*[146], « la source de tous nos plus beaux esprits » comme l'assurait Madame de Sévigné, lui permit longtemps de s'affirmer sans complexe vis-à-vis de la capitale. Bref, il me semblait possible d'évoquer, non pas seulement quelques noms de mathématiciens nés en Normandie et sans lien entre eux, mais bien l'histoire des mathématiques en Normandie.

Lorsque j'ai commencé ce cours, trois difficultés sont apparues assez vite.

La première difficulté était inhérente au choix de l'échelle locale : il impliquait de renoncer aux majestueuses avenues de la science universelle, scandées de grands noms et de découvertes décisives, pour privilégier des mathématiques vernaculaires plus ordinaires, celles de savants de second rang, de modestes professeurs, de praticiens locaux, fortement insérés dans la société de leur temps, mais ignorés des résumés d'histoire des sciences. Je n'ai pas toujours su anticiper, ou plutôt assumer pleinement, les effets de ce choix didactique : je me suis senti coupable en découvrant dans les premières copies d'examen l'importance qu'y prenaient de tels mathématiciens par rapport aux hommes célèbres dont je n'avais pas parlé, pensant les avoir suffisamment évoqués dans mon cours de licence. Bien entendu, les étudiants ne faisaient rien d'autre que me donner ce qu'ils pensaient, en toute logique, que

[146] *Athenæ Normannorum* est le titre d'un dictionnaire alphabétique des savants de Caen composé par François Martin à la fin du XVII^e siècle. Son impression, entreprise au XIX^e siècle, s'est interrompue avant l'épuisement de la lettre C; elle comptait déjà 794 pages. Au-delà, il faut consulter le manuscrit 509 de la bibliothèque de Caen.

j'attendais d'eux. Il ne s'agissait pas ici de chauvinisme normand de leur part : qui connaît les Normands sait que la modération identitaire est un élément constitutif et paradoxal de leur particularisme. Il n'est pas impossible cependant que cette formule, transposée dans d'autres régions ou d'autres pays, puisse alimenter des formes de repli ou de revendication.

La deuxième difficulté est relative à la supposée proximité des étudiants avec la ville où ils étudient : elle était souvent une illusion dont j'ai dû me départir. La Basse-Normandie est une région rurale, maillée par d'innombrables bourgs de taille modeste, où beaucoup d'étudiants s'empressent de rejoindre leur famille en fin de semaine et pour les vacances. Le cas des étudiants en sciences est le plus accentué : même après quelques années à l'université, leur « espace vécu » dans la capitale régionale se limite souvent à leur campus, situé en périphérie, à l'hypermarché qui lui fait face, et à deux micro-secteurs du centre ville, très animés le jeudi soir. Beaucoup ne savent pas grand chose de la géographie et l'histoire de la ville, de ses grands monuments, et ignorent même les noms des rues principales, puisque ceux des bars et des fast-foods suffisent pour se donner rendez-vous. En fin de compte, Caen leur est, à peu de choses près, aussi étrangère que le seraient Paris ou Alger. Le postulat de mathématiques qui leur parleraient davantage, parce qu'élaborées localement, est alors pour le moins incertain. Curieusement, c'est parfois l'inverse qui s'est produit : les mathématiques sont devenues une occasion, que certains ont saisie, de découvrir la ville de Caen et son histoire.

La troisième difficulté était la plus prévisible : l'aspiration naturelle des jeunes à dépasser leur horizon quotidien, même, et surtout, lorsque celui-ci leur est en réalité si peu connu. Pour certains, un cours sur l'histoire des mathématiques en Normandie n'a *a priori* rien de bien attirant et est presque, au contraire, une promesse d'ennui. C'est en déplaçant la focale au maximum que j'aurais eu des chances de croiser leur désir de dépaysement, d'exotisme, de découverte, d'étrangeté, d'altérité. Je le savais d'ailleurs déjà par expérience : dans le cours « classique » d'histoire des mathématiques que je propose en troisième année de licence, le chapitre qui m'assure l'enthousiasme le plus visible et unanime de mon public est celui qui l'emmène, au plus loin de son quotidien, dans la Mésopotamie antique. Le premier mystère des cunéiformes sur tablettes d'argile est leur infini pouvoir de séduction.

Il existe cependant une étrangeté du familier. C'est elle qui a permis à ce travail sur les mathématiques locales de fonctionner de façon satisfaisante : je l'ai suscitée presque sans le savoir en faisant travailler les étudiants sur des manuscrits à la bibliothèque de Caen. À l'heure où les jeunes rencontrent des difficultés à lire l'écriture manuscrite de leurs parents, où certains pays renoncent à l'enseignement de l'écriture cursive et où le livre imprimé lui-même recule devant le livre électronique, je n'avais pas réalisé à quel point le contact avec un livre entier écrit à la main représente un choc, profondément dépaysant en lui-même. S'y ajoute sans doute l'émotion, que je ressens moi-même, liée à ce qui fait le propre du manuscrit : celui d'être un objet unique. Les bibliothèques de province, fort heureusement, autorisent encore leurs lecteurs, sans discrimination, à consulter physiquement tous les manuscrits dont ils font la demande. Pour mes étudiants, j'avais établi la liste des manuscrits mathématiques recensés à la bibliothèque centrale de l'agglomération de Caen ; grâce à l'IREM, un certain nombre d'entre eux ont été numérisés pour permettre un travail approfondi. Chaque étudiant(e) devait en choisir un et prendre le temps d'aller le voir : pour certain(e)s, c'était leur première visite à la bibliothèque ; pour tous, ce fut la découverte de la salle des fonds patrimoniaux. Le travail demandé était modeste. Il consistait en général : *a)* à présenter le manuscrit dans son aspect matériel, *b)* à évoquer sommairement son contenu, *c)* à y choisir, avec mon aide, un aspect mathématique intéressant et à en présenter et commenter le traitement de manière détaillée. Le tout faisait l'objet d'une présentation orale avec vidéoprojecteur, au début de chaque séance de travaux dirigés. Les efforts consentis pour déchiffrer les écritures du XVIII[e] siècle ou celles, souvent redoutables, du XVII[e] siècle, ont été méritoires. Certains étudiants sont allés plus loin, dans le cadre d'un mémoire soutenu au titre du « Travail d'étude et de recherche » de première année de master. Des étudiants de seconde année de master inscrits en histoire des sciences à Nantes ont aussi soutenu sous ma direction un mémoire plus approfondi sur des manuscrits caennais. Une partie de mes propres recherches ont aussi largement bénéficié de tous ces travaux et ces échanges.

2. *Quelques manuscrits témoins de l'histoire des mathématiques en Normandie*

Les ressources offertes par la bibliothèque de Caen en matière de manuscrits mathématiques couvrent huit siècles. Elles commencent au temps où l'arithmétique positionnelle décimale devient un concurrent sérieux des chiffres romains et du calcul sur l'échiquier, version normande de l'abaque (Schärlig 2003, pp.129-145). En Normandie, le *Carmen de algorismo* [Poème sur l'algorithme] d'Alexandre de Villedieu (v.1175-1240), un enfant du pays, en fut le véhicule. Ce court texte en vers expliquait le principe de la numération en base dix et comment effectuer les sept opérations arithmétiques élémentaires : addition, soustraction, duplication, dimidiation, multiplication, division, extraction de racine. Une copie du XIII^{e} siècle en est conservée à Caen, au sein d'un recueil de textes de comput ecclésiastique : c'est le plus vieux manuscrit mathématique de la bibliothèque (ms.14). Le texte est mutilé de la septième partie, relative à l'extraction de la racine. Il est précédé d'une sorte de résumé en prose, qui me semble peu ou pas connu, et plus aisé à exploiter pédagogiquement ; il se termine sur deux problèmes de partage, dont celui-ci :

> *Aliquis vult scire utrum serviens eius sciat computare. Precepit ei quod de XX^{ti} denariis emat XX piscis, aliquos ex obolo, alios ex pictos, alios ex duobus denariis, ita quod neque plus neque minus sint de denariis et pictis.* Traduction : Quelqu'un veut savoir si son serviteur sait calculer. Il lui ordonne d'acheter vingt poissons à partir de vingt deniers, certains pour une obole [demi-denier], d'autres pour un picte [demi-obole], d'autre pour deux deniers, de sorte qu'il n'y ait ni plus, ni moins de vingt poissons, et de vingt deniers.

L'invention et le popularisation de l'arithmétique fractionnaire en base dix furent beaucoup plus tardives que ce qu'imaginent en général les étudiants. Parmi les manuscrits non catalogués de la bibliothèque de Caen se trouve un écrit témoignant de l'introduction des nombres décimaux en Normandie (ms. 1008). Remontant certainement au deuxième quart du XVII^{e} siècle, il s'intitule *Arithmétique de dixme pratiquée en Holande*. Il est précédé, en partie de la même main, du *Traité de la fortification holandaize* d'un certain « Monsieur du Clos » et d'une *Table de verges de Holande reduittes en toises de France*. Comme le montre son titre, l'*Arithmétique de dixme* s'inspire des principes de la brochure *De Thiende / La Disme*, « premièrement descripte en flameng et maintenant convertie en français par Simon Stevin », publiée dans ces deux langues en 1585. L'auteur écrit :

> Simon Stevin est le premier qui a mis en lumière ceste arithmetique de dixme [...] Or les Flamants ayant vu ceste facilité ont divisé leur verge en 10 parties (qui estoit autrefois en 12). Dont la 10^{me} partie s'appelle pied, & le pied en 10 parties quilz appellent pouce, & le pouce en 10 parties quilz appellent grain, & cette verge ainsi divisée, il a fallu le secours de l'arithmétique de dixme de Stevin pour les mesures de la géométrie. La pratique de ceste arithmetique n'est point si utile qu'en Hollande, & aux autres lieux elle est inutille, & pour appliquer l'arithmetique de Dixme, il faut donner des exemples de Geométrie. Car de la donner comme a faict Stevin, il n'y a poinct apparence & cette arithmétique sera Geometrie & arithmetique tout ensemble.

Pas encore de virgule à cette époque : l'auteur adopte la notation de Stevin, où chaque décimale est suivie de son rang dans un cercle, par exemple 27⓪8①4②7③ pour 27,847. Il expose la façon de procéder aux opérations arithmétiques élémentaires (désormais au nombre de cinq, duplication et dimidiation n'en faisant plus partie). Il en donne des applications géométriques : la « multiplication de dixme » est ainsi appliquée à la mesure du cercle et la « règle de troys par la dixme » à des calculs de hauteurs de tours.

Ce problème récurrent de la hauteur d'une tour nous conduit de l'arithmétique à la géométrie pratique, qui, favorisée par le développement de l'art militaire, est la grande affaire du premier XVII[e] siècle. À la bibliothèque de Caen, un épais manuscrit anonyme intitulé *Traité de fabricomologie ou ergastice du point* m'intriguait (ms. 131). C'est une véritable encyclopédie de construction géométrique, où j'ai repéré de libres emprunts à des auteurs variés, notamment Dürer (*Décrire la circonférence d'une poire*) et Clavius (*D'un point donné hors le triangle, mener une ligne droite qui le divise en deux également*). Certains problèmes semblent originaux (*Diviser un cône en trois parties égales par des plans parallèles à la base*) et l'ouvrage témoigne d'une pensée personnelle profonde sur l'arithmétique des objets et les méthodes de construction. J'ai réalisé en 2011 qu'il était l'œuvre d'un certain Guillemme Le Vasseur (Dieppe, v. 1564 – Rouen, 1634), et que celui-ci fut le mathématicien le plus influent de son époque en Normandie (Ageron 2013a). Tisserand dans sa jeunesse, puis cartographe, pilote de bateau, hydrographe, architecte et ingénieur, il rédigea une série de traités de mathématiques, qu'il enseignait en privé, semble-t-il, aux gentilhommes protestants (Ageron 2016). Parmi eux, le *Traité de fabricomologie* conservé à Caen, dont deux autres manuscrits se trouvent à Paris et à New York. Mais aussi un *Traité de praticométrie*, c'est-à-dire de géométrie pratique mesurée ou nombrée, où Le Vasseur met en avant un compas appelé *gonomètre* permettant de mesurer, par exemple, des lignes ou des hauteurs inaccessible, et où il établit la formule de Héron donnant l'aire d'un triangle à partir de ses côtés. Et encore un *Traité de trigonométrie*, le seul qui fut imprimé, mais sans nom d'auteur : il y montre comment trouver la profondeur maximale de la mer d'un point de la côte normande à un point de la côte anglaise, comme, selon les versions, « entre Dieppe et La Rie » ou « entre Le Havre de Grâce et Blanquef ». De ces deux derniers traités, la bibliothèque de Caen conserve (ms. 130) des versions raccourcies, copiées de la main du grand orientaliste protestant Samuel Bochart (Courtin & Guênerie 2009) : celui-ci fut certainement l'élève de Le Vasseur. Les traités de Le Vasseur sont des mines d'or pour le professeur : les figures des manuscrits séduisent, les problèmes abordés intéressent et se prêtent bien à une infinité d'approches pédagogiques, par exemple avec un logiciel de géométrie dynamique.

Les hasards de l'histoire ont mené jusqu'à la Biblioteka Jagiellońska de Cracovie un petit manuscrit normand daté de 1637, intitulé *Questions mathematiques a sçavoir de geometrie et de fortification* (ms. gall. fol. 155). Son auteur, Jacques Louvel (Caen, v. 1600 - Caen, 1680), fut maître écrivain juré et professeur d'écriture et de mathématiques ès-collèges du Bois et des Arts de l'université de Caen. Son opuscule, qui semble en partie inspiré par la *Géométrie pratique* du professeur parisien Didier Henrion (1620), se distingue par la qualité et l'ornementation de sa calligraphie. Il a aussi la particularité, intéressante à exploiter pédagogiquement, de ne fournir les solutions des dix-neuf problèmes énoncés que sous forme d'une figure : on a donc des preuves visuelles, sans mots. Il est suivi, du même auteur, de la description de trois opérations d'arpentage sous le titre *De la Construction du demy-cercle et de son usage*, puis d'une compilation sans ordre de sujets attrayants relatifs à la chronologie et à la navigation, œuvre d'un certain Gilles Bellier, P.E.M. (comprendre : professeur ès-mathématiques) à Rouen, tirée entre autres des livres de l'astrologue Jean de Séville, premier titulaire de la chaire de mathématiques de l'université de Caen.

Le jésuite Georges Fournier (Caen, 1595 – La Flèche, 1652) fut élève des jésuites de Caen et la Flèche, professeur de mathématiques à la Flèche de 1628 à 1633, à Dieppe de 1633 à 1636, à Hesdin de 1639 à 1644, puis revint à Caen comme préfet des études. Ses traités de mathématiques manuscrits, autrefois conservés à la bibliothèque des jésuites de la Flèche, semblent n'avoir pas survécu. Mais plusieurs de ses ouvrages ont été imprimés, notamment son *Hydrographie*, écrite après plusieurs voyages en mer et publiée en 1643. Huit pages y sont réservées à des problèmes de construction géométrique (Fournier 1643, p. 481-488). On y trouve une erreur dont il est intéressant de tirer parti pédagogiquement :

> L'ovale ou ellipse est une ligne courbe que les mathématiciens ont accoustumé de nous exposer en coupant de travers un cosne ou un cylindre, en sorte que la coupe, ou diamètre de l'ovale, ne soit point parallèle aux costés du cylindre ou du triangle du cône, ni à leur base. Celle qui se fait par la coupe du cylindre se nomme simplement ovale. Celle qui se fait par la coupe d'un cosne ressemble parfois à un œuf dont l'un des bouts est plus menu que l'autre.

La section d'un cône n'a jamais, bien sûr, un bout « plus menu que l'autre », car c'est une ellipse, de même que la section d'un cylindre. L'erreur semble héritée d'Albrecht Dürer, qui, dans son *Underweysung der Messung* (1528), définissait l'ellipse comme section de cône et la traçait point par point, par double projection orthogonale, selon un principe parfaitement correct, mais obtenait un tracé ovoïde. Guillemme Le Vasseur, dans son *Traité de fabricomologie ou ergastice du point*, semble aussi penser qu'il y a deux courbes différentes : il définit l'ellipse comme section du cône et l'ovale comme section du cylindre.

Le thème de la construction d'ovales par raccord de cercles, riche en possibilités, est présent chez Le Vasseur, Louvel et Fournier. On le trouve encore dans un manuscrit anonyme conservé à Caen, daté de 1684 (ms. 480) : cet épais volume contient plusieurs traités dont un recueil de problèmes de 82 pages intitulé *De la réduction des figures géométriques ou transmutation d'icelles, appelée par les savants métaschématique*. Le cinquante-septième problème consiste à « construire une cornemuse », sorte de cardioïde. Le cinquante-huitième est la « construction de l'oval parfait par deux quarrés esgaux », c'est-à-dire un ovale circonscrit à un rectangle EFHG divisé en deux, tel un domino, par une transversale AB :

> CONSTRUCTION DE L'OVAL PARFAIT PAR DEUX QUARRES ESGAUX. En l'oval, si on considère un diamètre estre 11, un autre 7, soit mesuré le cercle duquel le diamètre est 7 : on aura 38 ½, qu'il faut diviser par 7, on obtiendra 5 ½, lesquels fault multiplier par 11, le produit sera 60 ½ qui est la juste superficie, d'aultan qu'il y a tel rapport de 38 ½ à 60 ½ que de 7 à 11. Les deux points A et B sont les centres des deux grands quarts de cercle BEF et AGH, et les deux points C et D sont les centres des deux petits quarts de cercle CGE et DFH. Pour trouver les centres et diamètres à tout oval proposé, cela se fait par la 44e proposition du second livre d'Apollonius Pergius.

Après la géométrie, l'algèbre. Elle pénétra avec beaucoup de lenteur dans l'enseignement des mathématiques. Au XVII[e] siècle, les réticences étaient encore fortes. Dans son cours, le jésuite Pierre Gautruche, professeur de mathématiques à Caen de 1667 à 1681, ne l'évoque que brièvement et prudemment, sur un seul exemple, très simple (Gautruche 1653, p. 31) :

> *Notabis præterea huc accedere & aliam regulam, quam ab inventore, Algebram nominant […] exemplum subjicio. Quaeretur numerus qui multiplicatus per 14, eandem reddat summam, quam si multiplicetur per 9. additis postea 90, ad ejus productum.* [Traduction : Tu noteras de plus, arrivé à ce point, une autre règle, qu'on nomme l'algèbre, du nom de son inventeur. […] je présente un exemple. On demande un nombre qui, multiplié par 14, rendra le même total que s'il avait été multiplié par 9, et qu'ensuite 90 aient été ajoutés à son produit.

Vers 1700, l'auteur d'un recueil de problèmes d'arithmétique à visée pédagogique (ms. 132) affiche qu'il entend les résoudre « sans aucun secours de l'algèbre ni ancienne ni nouvelle, mais par des raisonnements aisés tirés de la la nature même de ces questions et appuyés sur les principes les plus simples et les plus communs ». Car cette algèbre est, poursuit-il, une méthode « dommageable », qui « laisse l'esprit dans une étrange confusion » ; quant aux algébristes, ce sont « gens oisifs » dont le passe-temps consiste « à embrouiller » les problèmes ! Mais cette vive hostilité est paradoxale, car c'est au fond par l'algèbre, malgré ses dénégations, qu'il résout un problème comme celui-ci (Prigent 2011) :

> Un nombre inconnu a été multiplié par 20 et le produit ayant été soustrait de 70, on a reservé le reste. Le même nombre inconnu est ensuite multiplié par 30, et l'on ajoute 10 à ce nouveau produit. Après quoi,

> divisant par cette somme le reste que l'on avait réservé d'abord, le quotient étant soustrait de 2/5, le reste est 3/10. Quel nombre peut satisfaire a ces conditions ?

Il faut, dit-il, le « réduire aux termes les plus simples », ce qui est après tout l'essence de l'algèbre. Il désigne l'inconnue par *x*. Plus étonnant encore : tirant de Clavius le problème du *ludimagister*, il le résout par une démarche algébrique, alors que le jésuite allemand appliquait la méthode arithmétique de double fausse position (Ageron 2011). Ce problème est :

> Un maistre de mathematique dit qu'il a tel nombre d'ecoliers, que si chacun luy donnoit 8. pistolles, il ne luy en faudroit plus que 30. pour acheter une maison qu'on veut luy vendre ; mais que s'ils luy donnoient chacun 10. pistoles il auroit 40. pistolles au delà du prix de cette maison. On demande quel est le nombre de ses ecoliers et quel est le prix de la maison qu'on luy veut vendre.

Au XVIII^{e} siècle, les réticences sont effacées. L'algèbre semble même parée de toutes les vertus, comme le suggèrent plusieurs manuscrits anonymes conservés à Caen et probablement d'origine locale. L'auteur d'une *Nouvelle méthode pour trouver avec facilité la racine de tous les cubes parfaits et de tous les nombres proprement appelés sursolides* (ms. 133) prône « le secours des lettres » plutôt que la « méthode ordinaire » pour extraire la racine cubique d'un grand nombre comme 115714886617 une fois qu'on a estimé qu'elle « doit être de quatre caractères ». Celui d'un *Traité de géométrie* (ms. 482) venant de la bibliothèque des Jésuites de Caen, ayant commencé à établir sept propositions du livre II des *Éléments* d'Euclide « par les figures », se ravise, biffe ce qu'il a déjà écrit et entreprend de les reformuler algébriquement, car, dit-elle, elles « se démontrent plus aisément par le calcul ». Les techniques enseignées deviennent peu à peu plus complexes. Dans des *Élémens de mathématiques* en français venant en appendice à un cours de philosophie (ms. 465), certainement postérieurs à 1740 puisqu'on y évoque Mme du Châtelet, on trouve les règles de l'arithmétique des polynômes, avec les exemples de la division de $9x^4+12ax^3-4a^3x-a^4$ par $3xx-aa$ et de la racine carrée de $9aa-12ab+4bb$; cependant, les seules équations algébriques considérées sont celles du premier degré. Dans un manuscrit daté de 1763, on trouve, à la suite de cours en latin de botanique et géométrie, le problème de la couronne du roi Hiéron, en français, résolu par l'intermédiaire d'un système de deux équations à deux inconnues (ms. 717). Enfin, dans un cahier d'élève daté de 1742 (ms. 478), on découvre que le jésuite Yves-Marie André, qui fut professeur de mathématiques à Caen de 1726 à 1759 (Ageron & Bessot 2011), montrait à ses élèves comment résoudre certaines équations du troisième degré, comme $x^3+6xx+12x=117$:

> En ajoutant 8 de part et d'autre, nous aurons $x^3+6xx+12x+8 = 125$. Donc en extrayant la racine cubique de part et d'autre […]

II. DU LOCAL AU GLOBAL : UNE HISTOIRE "GLOCALE"

Réfléchissant à la manière d'éviter les écueils d'une approche exclusivement locale de l'histoire des mathématique, j'ai imaginé de lui substituer une stratégie qu'on pourrait qualifier de « glocale », c'est-à-dire connectant et articulant l'histoire locale à un vaste pan de macrohistoire. Plus précisément, j'ai tenté de trouver des textes produits ou étudiés à Caen ou en Normandie invitant, explicitement ou non, à s'intéresser à l'interaction des mathématiques européennes et des mathématiques des pays d'Islam. Aux textes normands répondaient ainsi d'autres textes, arabes et européens, relançant l'intérêt des étudiants. Ma pensée était que ces variations de latitude et d'échelle, à coup sûr fécondes du point de vue épistémologique, pouvaient aussi l'être du point de vue didactique. Au moins permettait-il, en théorie, de mettre en cohérence l'attachant et l'attirant, le quotidien et le pérégrin.

Ouvrant sur les questions très actuelles de circulation d'idées, d'hybridation de savoirs et d'appropriation de pratiques, cette approche pouvait aussi offrir une perspective non dépourvue de valeur pour de futurs enseignants, en lien avec les débats sur la coexistence, la perméabilité, la conflictualité dans un univers mondialisé et une société française métissée.

Certaines pistes sont faciles à suivre. Le *Carmen de Algorismo* d'Alexandre de Villedieu renvoie par son titre à Muhammad bin Mûsâ al-Khuwârizmî et à sa réception latine. C'est aussi le cas des livres de Guillaume Gosselin (v. 1545- v. 1590), né à Ifs, tout près de Caen, qui fut l'un des principaux passeurs de l'algèbre en France et le dernier à désigner l'algèbre par son nom arabe double (Gosselin 1578, seconde partie, déclaration) :

> De la Grand Art, dite en Arabe Algebre & Almucabale, ou Reigle de la chose, inuentée de Maumeth fils de Moïse Arabe

Les exposés élémentaires d'arithmétique et de géométrie pratique rédigés en Normandie aux XVII^e^ et XVIII^e^ siècles ne parlent pas de sciences arabes, mais peuvent être comparés avec intérêt aux manuels généralistes à l'étude dans les pays musulmans à la même époque, par exemple le *Miftâh al-hisâb* [La Clef du calcul] de Jamshîd Ghiyâth al-dîn al-Kâshî (m. 1429) et *Khulâsat al-hisâb* [La Quintessence du calcul] de Bahâ al-dîn al-'Âmilî (1547-1621). On peut ainsi distinguer des cas d'héritage antique commun, de transmission d'époque médiévale, de redécouverte indépendante. Le père André, avec l'équation $x^3+6xx+12x = 117$ qu'il proposait à ses élèves de Caen, nous renvoie sans le savoir à la Syrie du XII^e^ siècle, où al-Sulamî remarquait, concernant l'équation du type « un cube, des carrés et des choses sont égales à un nombre » (Rashed 2011, p. 82) :

> [Si] le tiers du nombre des carrés est égal à la racine carrée du tiers du nombre des choses […] alors elle est réalisable.

Davantage que les mathématiques, les recherches historiques et philologiques érudites furent la spécialité caennaise au XVII^e^ siècle. Certaines sont cependant directement liées aux mathématiques et à la langue arabe. Mes étudiants ont été surpris d'apprendre que parmi les intellectuels qui vivaient alors à Caen ou lui restaient liés, beaucoup maîtrisaient cette langue. Les protestants y excellaient : Samuel Bochart (1599-1667), Étienne Le Moyne (1624-1689) et Étienne Morin (1625-1700). Parmi les catholiques, Louis Thouroude (1615-1689) et Pierre-Daniel Huet (1630-1721) ne possédaient que de solides rudiments, mais Adrien Parvilliers (1619-1679) qui fit un bref séjour à Caen, Antoine Galland (1646-1715) qui y resta dix ans et Pierre Vattier (1623-1667) qui vivait à 67 km de là étaient des arabisants de premier plan.

Une controverse sur l'origine des chiffres dits « vulgaires », par opposition aux prestigieux chiffres romains, opposa Pierre-Daniel Huet et Étienne Le Moyne. Le premier les attribuait aux Grecs et les pensait issus de l'altération des premières lettres de l'alphabet grec (Huet 1679, p. 647 ; Huet 1722, p. 114) :

> […] Le β étant accourci de ses deux extrémités, a produit le 2. Si vous inclinez un peu le γ sur son côté gauche, & que vous en retranchiez le pied, & que vous arrondissiez un peu la corne gauche vers le côté gauche, vous ferez un 3. Le Δ a fait le 4 […]

Le second, avec un argument similaire, défendit une conclusion opposée : pour lui, les chiffres étaient des déformations des premières lettres de l'alphabet arabe, prises dans l'ordre dit *abjad* (Le Moyne 1685, p. 800, ma traduction) :

> Le 6 est un و inversé. Le 7 est le ز arabe, avec un point, parce que si on l'allonge et si on le trace de manière continue, on produit l e signe du nombre sept. La lettre ح et le chiffre 8 sont presque identiques, si on referme les parties supérieure et inférieure de la lettre […].

Huet suspecta Le Moyne de partialité, le décrivant comme très favorable aux Arabes : *Arabibus addictissimus* (Huet 1718, p. 181) ! Dans ce procès en arabophilie, qu'il intenta aussi à Bochart, je suis tenté de voir un peu de jalousie.

L’origine du mot *algèbre* faisait aussi débat. Beaucoup, comme le jésuite caennais Pierre Gautruche déjà évoqué, le faisaient dériver du nom de son inventeur : on hésitait entre Geber, astronome andalou du XII^{e} siècle, et Gerbert, le savant pape de l’an mille. En 1650, Gilles Ménage rendit publiques ses *Origines de la langue française,* premier dictionnaire étymologique français. Voici ce qu’il écrivit du mot *algèbre* (Ménage 1650, p. 26) :

> ALGEBRE. De Algebra, qui vient de l’Arabe الجبره Algiabarat, qui signifie rei redintegratio, reparatio ossis fracti, valetudinis reparatio, &c. De la racine جبر giabara qui signifie reparavit, roboravit, concinnavit, refecit, parce que l’Algebre est la perfection, & comme la reparation de l’Arithmetique, laquelle les Arabes appellent التكسير Altacsir, fraction. D’où vient qu’on dit les nombres rompus pour les parties de l’unité. Ceux-là se trompent qui dérivent Algebre d’un nommé Geber, qu’ils font Autheur de cette science.

Cette étymologie fit sensation et fut contestée, notamment par Furetière. J’ai pu montrer qu’elle avait été communiquée à Ménage, qui n’était pas arabisant, par Samuel Bochart. Le parisien Ménage était associé à l’Académie de Caen.

Ces débats sont d’intéressantes entrées en matière à des chapitres de l’histoire des mathématiques. Pour les arbitrer, je recours à l’étude de textes arabes, mais aussi européens. Ils permettent de montrer que les thèses de Huet et de Le Moyne sur l’origine des chiffres étaient toutes deux fausses, tandis que la définition de l’algèbre donnée par Ménage était pour l’essentiel correcte, avec des inexactitudes.

Le lecteur intéressé par l’histoire de la connaissance de l’origine du mot algèbre trouvera en annexe différents détails érudits, pour la plupart inédits.

III. EN GUISE DE CONCLUSION

Alors que j’avais le sentiment d’avoir trouvé une formule cohérente et équilibrée pour cet enseignement d’histoire des mathématiques en première année de master, qui, je le rappelle, venait en complément de celui dispensé de manière plus traditionnelle en troisième année de licence, la nouvelle réforme de la formation des enseignants décidée en 2013 modifia encore une fois la donne. L’une de ses conséquences fut le transfert de l’unité d’histoire des mathématiques de la première année de master à la seconde, avec un volume horaire réduit (30h au lieu de 65h). Ce nouvel enseignement fut mis en place en 2014-2015, et j’en ai été chargé. Les étudiants concernés avaient pour la plupart été reçus au concours de recrutement (CAPES) et se trouvaient à mi-temps en situation de stagiaires en responsabilité dans un établissement scolaire, soumis pour leur titularisation au jugement du corps d’inspection. Conscient de ce que cette première expérience d’enseignement serait l’essentiel de leurs préoccupations, je ne leur avais pas demandé, contrairement aux années précédentes, de travail personnel. J’avais seulement tenté de m’appuyer sur des comptes-rendus d’expériences vécues d’introduction d’une perspective historique sur les mathématiques au collège ou au lycée. Mais je n’avais pas réalisé avec quelle vitesse leur nouveau statut de fonctionnaire-stagiaire leur ferait abandonner leurs réflexes d’étudiants : tout ce qui sortait des programmes scolaires au sens le plus strict leur parut détaché de la vraie vie. Un questionnaire d’évaluation a démontré que les séances d’histoire des mathématiques ont été perçues par eux comme inutiles et peu intéressantes. Dans ce contexte peu favorable, je renouvellerai cependant l’essai, probablement en revenant à l’idée de demander à chacun un exposé, un petit article ou une expérimentation pédagogique. La microhistoire bas-normande des mathématiques et de leur enseignement, en connexion avec les courants mondiaux d’histoire des sciences, en constituera probablement à nouveau la ressource principale.

IV. ANNEXE : DE LA NATION ET DU SEXE DE L’ALGÈBRE

Dans les *Origines de la langue française* de Ménage (1650), l’entrée ALGEBRE est une des rares dans où apparaissent des caractères arabes plutôt qu’une translittération ; de plus, Ménage y explique le nom الجبرة – graphié الجبره – et le verbe جبر par des termes latins et non français. Ces deux éléments suggèrent qu’il a recouru à un dictionnaire arabe-latin. Or deux ouvrages de ce type seulement étaient disponibles en 1650 : le bref *Lexicon Arabicum* de Frans Raphelengius (Leyde, 1613) et, en quatre volumes, le *Thesaurus linguae arabicae* de Antonio Giggeius (Milan, 1632). Le premier, le *Lexicon*, ne donne à la racine جبر que :

> جبر Roboravit, reparavit, restauravit, restituit, sanavit. Alligavit. Item coegit.
>
> جبرة Reparatio. Gloss. victoria.

Ce ne peut être la source de Ménage, puisqu’on n’y lit aucune allusion aux mathématiques, ni aux fractures osseuses. En revanche, ces deux sens particuliers apparaissent dans l’article correspondant du *Thesaurus* (Giggeius 1632, vol. I, col. 583), où l’on retrouve par ailleurs l’ensemble des *definientia* de Ménage :

> الجَبَرُ Rei redintegratio. Reparatio ossis fracti. Rei fractae reparatio. Valetudinis reparatio. Rex. Dominus. Servus (sensu contrario). Fortis. Audax. Vir ut hebræum גבר. Divitiarum acquisitio post paupertatem. Impotentia. Adolescens. Reditus.
>
> الجبرة Reparatio. (inde Algebra Mathematicae pars, quasi sit numeri fracti reparatio.)
>
> جبره, & أجبره, & اجتبره, & تجبره Illud reparavit. Roboravit. Concinnavit. Refecit.

Le dictionnaire de Giggeius est donc la source directe de Ménage. Ce dernier ignorant l’arabe, il a nécessairement été guidé par un arabisant. Je fais l’hypothèse que ce fut par Samuel Bochart, qu’il connaissait bien, citait souvent et remercia dans la préface des *Origines*. Bochart était très familier du dictionnaire de Giggeius : il l’a à de nombreuses reprises mentionné dans sa colossale *Geographia sacra*, imprimée à Caen en 1646.

L’intérêt spécifique de Bochart pour le mot algèbre est démontré par le fait suivant. En 1652, l’érudit normand était à Stockholm, invité par la reine Christine, et travaillait à son *Hierozoicon*, traité de zoologie biblique qui paraîtra en 1663. Dans la bibliothèque royale,il tomba sur un manuscrit du *Qâmûs*, le parcourut en totalité et en copia de larges extraits relatifs aux animaux ou, parfois, aux plantes. Le résultat de ce travail occupe les pages 1 à 668 d’un gros manuscrit conservé à la Bibliothèque de Caen (ms. 198). Chaque mot arabe relevé y est suivi de son explication en arabe, tirée du *Qâmûs*, et de son explication en latin, tirée du *Thesaurus* : Bochart semble avoir exploité l’un et l’autre en parallèle. Il est très surprenant d’y trouver le terme mathématique الجبره, qui fait doublement exception à la règle : il est sans rapport avec les animaux ou les plantes, et il est absent du *Qâmûs*. Tout se passe donc comme si Bochart, particulièrement intéressé par ce mot *avant* son séjour en Suède, l’avait inséré là pour mémoire, juste avant le mot de même racine المتجبر, lequel appartient bien au champ lexical de la zoologie et est bien présent dans le *Qâmûs, traduit par :* الاسد (le lion). Ce qui donne les deux lignes suivantes (ms. 198, p. 87) :

> Reparatio, inde Algebra, q. numeri fracti reparatio. الجبره
>
> Leo. الاسد الْمتَجبّر

Un indice supplémentaire me renforce dans la conviction que Samuel Bochart est le véritable auteur de l’article de Ménage sur l’algèbre. Celui-ci fit parvenir son dictionnaire à Bochart et à Huet, en sollicitant leurs remarques en vue d’une nouvelle édition. Bochart renvoya son exemplaire à Ménage après en avoir, comme il le dit, « barbouillé toutes les marges »[147]. J'ai consulté cet exemplaire annoté : il est frappant qu'en marge de l'entrée ALGEBRE, Bochart n'ait apporté aucune précision ou correction. L'ouvrage ne fut pas réédité avant 1694. Son titre était devenu *Dictionnaire des étymologies de la langue française,* Bochart était mort depuis longtemps, beaucoup de définitions avaient été revues, mais la notice du mot algèbre n'avait aucunement changé.

Une question que je n'ai pu résoudre est de savoir à quelle source Giggeius a lui-même puisé. La source principale de son dictionnaire est le *Qâmûs* [L'Océan] de al-Fîrûzâbâdî (1329-1415), qu'il suit en général de très près. Mais ce ne peut être le cas ici : aussi bien le sens médical de الجبر que le sens mathématique de الجبرة sont absents du *Qâmûs*, qui donne seulement :

الجبر : خلاف الكسر والملك والعبد ضد والرجال الشجاع وخلاف القدر والغلام والعود

وجبره فجبر جبرا وجبورا وانجبر وتجبر واجتبره فتجبر : أحسن إليه أو أغناه بعد فقر

La *Vocabulista aravigo en letra castellana* de Pedro de Alcala (Grenade, 1505) traduit le verbe جبر par l'espagnol *cobrar* (< latin *recuperare*) et le nom الجبرة par *algebra arte*.

Un mot sur le *sexe* de l'algèbre. Tous les auteurs que j'ai cités jusqu'ici estiment que le mot algèbre présente en arabe la forme féminine الجبرة . Or celle-ci est en réalité inexistante dans l'histoire de l'algèbre arabe, qui ne connaît que la forme masculine الجبر , toujours associée comme on le sait à المقابلة *al-muqâbala*. On voit que l'erreur de genre était bien ancrée chez les orientalistes. Jacob Golius, qui ramena de Syrie en 1629 un manuscrit d'algèbre de 'Umar al-Khayyâm, fut le premier à la rectifier dans son *Lexicon Arabico-Latinum*, où l'on lit (Golius 1653, col. 462) :

جبر Religavit, consolidavit, integritati reddidi fractum (os).

الجبر Reductio partiam ad totum, seu fractionem ad integritatem. Et hinc Algebra nomen habet.

Explication que j'ai retrouvée presque à l'identique dans le *Dictionarium arabico-latinum* de François Pétis de La Croix, professeur au Collège royal de Paris, daté de 1696 et resté manuscrit (ms. BnF Arabe 4343) :

الجَبْرُ Consolidatio, reductio partiam ad totum, seu fractionem ad integritatem, vulgo l'algebre.

Que dire maintenant du lien supposé par Giggeius, Ménage, Golius et de nombreux lexicographes postérieurs entre l'algèbre et les « nombres rompus » ? Il était tentant et logique, puisque le *Qâmûs* définit الجبر comme contraire de الكسر *al-kasr*, lequel signifie rupture ou fraction, y compris dans le sens mathématique de ce dernier mot. Mais il ne rend pas compte du sens exact de l'opération appelée الجبر par les mathématiciens arabes : celle-ci est la restauration additive consistant à rétablir x à partir de $x - y$ en ajoutant y, et non la restauration multiplicative consistant à rétablir x à partir de x / y en multipliant par y. Ménage crut même pouvoir compléter l'explication de Giggeius en opposant l'algèbre à l'arithmétique, que les Arabes, selon lui, nommeraient التكسير (fractionnement, mot dérivé de كسر = fraction). Mais ce sens n'est, à ma connaissance, pas attesté : chez les mathématiciens arabes, l'arithmétique s'appelle علم الحساب *'ilm al-hisâb* (science du calcul), parfois علم العدد *'ilm al-'adad* (science du nombre), mais jamais التكسير, terme qui existe bel et bien, mais ressortit au vocabulaire de la géométrie pratique et signifie découpage ou, plus abstraitement, mesurage.

[147] Sur cette révision, voir la lettre de Bochart à Ménage datée du 22 août 1650 (inédite, ms. Caen 971, lettre 194) et une seconde non datée (British Library, coll. Egerton, n°17, publiée dans : Hector de La Ferrière, *La Normandie à l'étranger*, Paris, 1873, p. 384-385). L'exemplaire des *Origines* annoté par Bochart est conservé à Paris : BnF Res X 923.

En dépit de ces inexactitudes de détail, l’origine arabe et le sens général du mot algèbre étaient bien, dès 1650, à la disposition de tous, dans un ouvrage d’accès facile.

REFERENCES

Ageron P., Jenvrin O., Le Goff J.-P. (2009) De l’architecture aux mathématiques : des lycéens sur le terrain. In Escofier J.-P., Hamon G. (Eds.) (pp. 15-39) *Actes de la rencontre des IREM du Grand ouest et de la réunion de la Commission inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques*. Rennes : IREM de Rennes.

Ageron P. (2011a) Les sciences arabes à Caen au XVII[e] siècle. In Barbin É., Ageron P. (Eds.) (p. 95-121), *Circulation, transmission, héritage - Histoire et épistémologie des mathématiques*, Caen : IREM de Basse-Normandie.

Ageron P. & Bessot D. (2011) De Varignon au père André : tribulations normandes d'un cours de géométrie. In Barbin É. & Ageron P. (Eds.) (p. 181-200), *Circulation, transmission, héritage - Histoire et épistémologie des mathématiques*, Caen : IREM de Basse-Normandie.

Ageron P. (2011b) Le problème du ludimagister dans un manuscrit normand. *Le Miroir des maths* 8, 22-26.

Ageron P. (2013a) Le *Traité de fabricomologie ou ergastice du point.* In Barbin É. & Marc Moyon M. (Eds.) (p. 287-304), *Les ouvrages de mathématiques dans l'histoire, entre enseignement, recherche et culture*. Limoges : PUL.

Ageron P. (2013b) L’univers du manuscrit arabe, à travers les collections des bibliothèques publiques de Basse-Normandie. *Mémoires de l’Académie des sciences, arts et belles-lettres de Caen* XLIX, 69-86.

Ageron P. (2016) Le programme pédagogique de Guillemme Le Vasseur, « architecte, professeur de mathématiques, ingénieur et pilote en la mer océane » (v. 1564-1634). In *Éduquer et instruire en Normandie*, actes du 50[e] congrès de la Fédération des sociétés historiques et archéologiques de Normandie. Louviers : FSHAN (à paraître en 2016).

Courtin C., Guênerie N. (2009) *Étude du manuscrit* Pratique de géométrie *de Samuel Bochart*. Travail d’études et de recherche, sous la direction de P. Ageron. Caen : Université de Caen.

Fournier G. (1643) *Hydrographie contenant la théorie et la practique de toutes les parties de la navigation*. Paris : M. Soly.

Gautruche P. (1656) *Philosophiae et Mathematicae totius Institutio, Cum Assertionibus disputatis, et vario genere Problematum*, vol. III, *Mathematica*. Caen : A. & J. Cavelier.

Golius J. (1653) *Lexicon Arabico-Latinum*. Leyde : B. & A. Elsevier.

Gosselin G. (1578) *L’arithmétique de Nicolas Tartaglia Brescian.* Paris : A. Périer.

Huet P. D. (1679) *Demonstratio evangelica ad serenissimum Delphinum.* Paris : É. Michallet.

Huet P. D. (1718) *Commentarius de rebus ad eum pertinentibus.* Amsterdam : H. du Sauzet.

Huet P. D. (1722) *Huetiana ou pensées diverses de M. Huet.* Paris : J. Estienne.

Le Moyne É. (1685) *In Varia Sacra Notae et Observationes*, t. II. Leyde : D. van Gaesbeeck.

Prigent A. (2011) *Entre arithmétique et algèbre autour de 1700 : étude d’un manuscrit à visée pédagogique*. Mémoire de master 2, sous la direction de P. Ageron. Nantes : Université de Nantes.

Rashed R. (2011) *D’al-Khwârizmî à Descartes*. Paris : Hermann.

Schärling A. (2003) *Compter avec des jetons*. Lausanne : Presses polytechniques et universitaires romandes.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LA DIFFICILE GENÈSE DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE: RUPTURES ET OBSTACLES ÉPISTÉMOLOGIQUES

Slimane HASSAYOUNE[*]– Rahim KOUKI[**]

Résumé : Cet article rapporte les résultats d'une étude portant sur la genèse historique et la nature épistémologique de l'algèbre élémentaire (objet d'enseignement au niveau de la première année secondaire en Tunisie). Nous y décrivons particulièrement l'évolution diachronique des praxéologies algébriques dans les trois champs conceptuel, syntaxique et sémiotique.
Les principaux points dégagés montrent que la construction des concepts algébriques se réalise en étroite relation avec leur fonctionnalité procédurale ainsi qu'avec la mobilisation des techniques opératoires. Ceci nous ouvre de nouvelles perspectives de recherche orientées vers l'approfondissement des faits établis et leur exploitation dans une perspective d'ingénierie didactique.

Mots-clés : Algèbre élémentaire - épistémologie - histoire des mathématiques - praxéologie algébrique - champ conceptuel - champ sémiotique - champ syntaxique.

Abstract: This article reports the results of a study concerning the historical genesis and epistemological nature of elementary algebra (taught at the beginning of the secondary school in Tunisia). We particularly describe the diachronic evolution of algebraic praxeologies in the three conceptual, syntactic and semiotic fields.
The main points reached show that the construction of algebraic concepts is closely related to their procedural functionality and operative technics.
This may open new prospects for research oriented toward the deepening of established facts and their exploitation in a perspective of engineering didactics.

Keywords: Elementary algebra - epistemology - mathematics history - algebraic praxeology, conceptual field, syntactic field, semiotic field.

I. INTRODUCTION

L'objet de cet article s'inscrit dans la lignée des investigations qui cherchent à fournir des éclairages sur la nature des praxéologies algébriques visées par les programmes scolaires. Pour ce faire, nous envisageons de mener une analyse épistémologique relative à ces praxéologies en explorant particulièrement les principales phases historiques de leur émergence en tant que manifestations d'un savoir savant et de pratiques sociales de référence.

L'algèbre élémentaire telle qu'elle est enseignée au deuxième cycle de l'enseignement de base (12-14 ans) et au début de l'enseignement secondaire tunisien (15-16 ans) se manifeste à travers deux principaux champs praxéologiques :

[*]Slimane Hassayoune, Université de Tunis – Tunisie – slimhass@gmail.com
[**] Rahim Kouki, Université de Tunis El Manar – Tunisie – rahim.kouki@ipeim.rnu.tn

Hassayoune S., Kouki R. (2015) La difficile genèse de la pensée algébrique : Ruptures et obstacles épistémologiques. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT4, pp. 386-402.

- Le calcul algébrique : Manipulation d'expressions numériques et littérales (développement, réduction, factorisation, etc.)
- La résolution de situations-problèmes : Analyse, modélisation (mise en équation, en inéquation, en système, en fonction), résolution, contrôle des solutions.

De nombreuses études menées en Tunisie (Kouki 2004; Ben Nejma 2006; Achour 2005) ont montré que l'enseignement/apprentissage de l'algèbre élémentaire pose des problèmes cruciaux notamment aux niveaux :

- des compétences à développer chez les élèves,
- des choix didactiques à adopter dans les activités d'enseignement/apprentissage et
- de la complexité de son système sémiotique.

Nous allons nous intéresser effectivement à ces problématiques en revenant aux sources et en focalisant sur l'aspect épistémologique de l'algèbre élémentaire. Nous délimiterons les contours du domaine de cet objet de savoir en procédant à une analyse historique et épistémologique de son évolution à travers le temps. Ainsi les époques babylonienne, grecque, arabe et occidentale du XVI^e^ seront tour à tour explorées.

II. GENÈSE DE L'ALGÈBRE

Qu'est-ce que l'algèbre ? Quelle est son origine ? Quel est son rapport avec l'arithmétique ? Quels problèmes permet-elle de résoudre ? La réponse à ces questions doit tenir compte des phénomènes accompagnant l'évolution et le développement des théories mathématiques sous-jacentes ou mises en jeu et des obstacles rencontrés, et de la manière dont ils ont été franchis.

Le mot « algèbre » provient du terme arabe « al-jabr », qui signifie en médecine « réparation ou restauration d'une fracture ». Il a été utilisé, en mathématiques, dans « Al-kitâb al-mukhtasar f'il jabr w'al-muqâbala »[1], un important ouvrage écrit au début du IX^e^ siècle par Mohammad Ibn Mûssa Al-Khwârizmî (780-850). Dans ce traité, l'expression arabe « al-jabr » désigne l'opération qu'on fait subir à l'équation du second degré pour en supprimer les termes négatifs, alors que « al-muqâbala » signifie la réduction de termes de même degré dans une équation quadratique. Par la suite, le domaine de la résolution des problèmes en utilisant les méthodes décrites par Al-Khwârizmî, fut désigné par le terme unique « al-jabr ». À partir du IX^e^ siècle, l'algèbre devient progressivement, l'art de réduire et de résoudre les équations, puis la science des expressions algébriques et enfin l'art de résoudre des problèmes. Cette nouvelle science simplifie et unifie les techniques anciennes de résolution des problèmes posés par la vie quotidienne des gens sédentarisés et vivant en société. Il apparaît donc que les problèmes de la vie courante sont les vraies origines de cet art et des techniques opératoires que celui-ci engendre dans son développement. Par exemple, Al-Khwârizmî indique que l'utilité de l'algèbre réside essentiellement dans la résolution des problèmes d'héritage, de partition, de construction de canaux d'irrigation, etc.

Les Mésopotamiens, les Égyptiens, les Grecs et les Indiens ont résolu des problèmes à l'aide de procédures constituées d'enchainements d'opérations numériques et sous la forme de listes d'instructions appliquées à des cas particuliers.

Dans ces calculs, ils ne font aucune référence à une quelconque inconnue ni, d'ailleurs, à quelque justification théorique que ce soit. Seul Diophante d'Alexandrie (III^e^ siècle) introduit un symbole qu'il appelle « arithme » (quantité indéterminée d'unités) et fait subir à ce signe

---

[1] Le livre abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison.

les opérations usuelles (addition, soustraction, multiplication, division, inverse). Il représente, également, par des signes particuliers le carré de l'arithme, son cube, ses puissances quatrième, cinquième et sixième, par d'autres signes.

Après avoir pris connaissance de la traduction arabe du traité d'arithmétique de Diophante, Al-Karâjî (953-1029) utilise les concepts et lexiques algébriques (shay, mâl et kaab) créés par Al-Khwârizmî pour appliquer l'arithmétique aux expressions algébriques et résoudre les problèmes à l'aide de l'algèbre de Diophante. Al-Karâjî et son disciple Al-Samaw'al (1130-1175) introduisent les polynômes sous la forme de tableaux et explicitent les opérations usuelles sur ces tableaux.

Abdeljaouad (2002) précise que, parallèlement aux mathématiciens d'Orient, ceux du Maroc, comme Al-Hassâr (vivant en 1175) et Ibn Al-Yâssamîn (m. 1204) ont imaginé un système condensé pour représenter les équations et les termes standards utilisés en algèbre :

> La multiplication d'indices attestant la présence de symboles algébriques dans les traités maghrébins d'arithmétique indienne, nous confirme dans l'hypothèse d'une origine maghrébine des symboles algébriques, apparus comme conséquence logique de l'inclusion de l'algèbre comme chapitre complémentaire aux traités de hisâb al-ghubâr. (Abdeljaoued 2002, p22)

Ce symbolisme algébrique permet de représenter le nombre connu ('adad) : عـ l'inconnue (shay) : شـ, son carré (mâl) : مـ, son cube (kaab) : كـ , la quatrième puissance de l'inconnue (c'est-à-dire le carré du carré) : مـمـ et les termes : égal (ya'dilû) : لـ , soustraction (illa) : لا comme le montrent les fac-similés suivants :

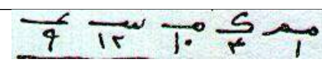
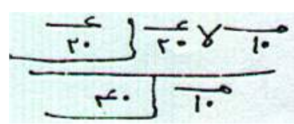
(Abdeljaouad, 2002, (26b), p26)		$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$
(Abdeljaouad, 2002, (63b), p26)		$10x^2 - 20 = 20$ $\longrightarrow 10x^2 = 40.$

***Tableau 1** - Les fac-similés* (Abdeljaoued 2002)

Dans son traité « Art analytique ou Algèbre nouvelle », Viète (1540-1603) introduit une véritable algèbre littérale, avec ses symboles, ses procédés calculatoires, ses transformations particulières et sa méthode spécifique (Boyé, 2003). Poursuivant l'élan donné par Viète, Descartes propose une méthode d'algébrisation de la géométrie, dans l'ouvrage intitulé « La Géométrie » et publié en 1637, il annonce :

> Par la méthode dont je me sers, tout ce qui tombe sous la considération des géomètres se réduit à un même genre de problèmes qui est de rechercher la valeur des racines de quelque équation. (Cité in Guichard 2000, p. 48)

Et il précise plus loin qu'il veut que sa méthode soit universelle pour :

> Résoudre généralement toutes les questions qui peuvent se présenter en n'importe quel genre de quantité aussi bien continue que discrète. (Ibid.)

Au XIX^e siècle, les algébristes anglais comme Boole ou Morgan, envisagent une algèbre beaucoup plus abstraite où les lettres peuvent représenter des objets quelconques. L'algèbre se métamorphose en une nouvelle science : L'algèbre des structures (groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, algèbres, quaternions, etc.). Cette algèbre va constituer un nouveau domaine appelé à structurer et unifier des secteurs divers de l'activité mathématique.

À la lumière de ce qui précède, il apparaît que le véritable essor de l'algèbre est amorcé lorsque la substitution des écritures formelles aux écritures verbales est devenue possible.

Mais pour arriver à cette étape décisive de son évolution, l'algèbre s'est plusieurs fois métamorphosée par une lente abstraction de ses objets d'étude : mesure de grandeurs, calcul sur des nombres abstraits et finalement manipulation d'écritures formelles avec des lettres désignant d'abord des nombres et ultérieurement toutes sortes d'objets. Nous envisageons dans ce qui suit d'analyser les caractéristiques de cette évolution en prenant en compte les trois champs épistémologiques qui se sont construits progressivement au cours de l'histoire : Le champ conceptuel, le champ syntaxique et le champ sémiotique.

Conformément au cadre théorique de notre recherche -la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992)- la variable observée tout au long de cette analyse est la praxéologie algébrique mobilisée.

III. ÉTUDE DIACHRONIQUE DE L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

Dans cette partie, nous menons une étude diachronique de la diffusion de l'algèbre élémentaire et nous faisons l'hypothèse que la connaissance des phénomènes s'y rapportant nous permet de mettre à profit la dialectique phylogenèse-ontogenèse et de tirer les meilleurs enseignements possibles sur les conditions et les contraintes pesant sur cette diffusion.

1. La phase mésopotamienne de l'évolution des praxéologies algébriques

Les savoirs mathématiques mésopotamiens sont essentiellement produits au cours de la période paléo-babylonienne, pendant les quatre premiers siècles du deuxième millénaire avant notre ère. Ces savoirs sont élaborés dans le contexte des écoles de scribes en vue de préparer ces derniers aux fonctions d'administrateur, de gestionnaire, de juriste ou d'écrivain public. Les buts poursuivis, divers et variables, ne semblent pas tous répondre à des besoins pratiques et certains d'entre eux présentent un caractère purement spéculatif. Néanmoins, les problèmes traités sont souvent présentés sous un habillage concret, reflétant les pratiques sociales de l'époque et portant sur les thèmes de l'arpentage, des constructions en briques, des travaux d'ingénierie, d'héritage, de calcul de taux d'intérêt, etc.

Dans les écoles de NIPPUR (grande capitale culturelle de la Mésopotamie), les apprentis scribes apprennent les mathématiques en résolvant des problèmes et en faisant usage des tables numériques (carrés, cubes, inverses, etc.) et des tables métrologiques qui leur servent d'outil de conversion des mesures de longueurs, d'aires, de capacités et de poids en nombres sexagésimaux positionnels et vice versa (Proust C., 2006). Les exercices de calcul font intervenir exclusivement des nombres abstraits sans aucune unité et sont toujours appuyés sur des tables numériques rappelées (dans un coin des tablettes scolaires) ou carrément mémorisées. Les historiens ont constaté que les scribes babyloniens dissocient déjà deux fonctions des nombres, à savoir la quantification (mesure) des grandeurs et le calcul ; pour la première, ils utilisent la notation métrologique et pour la seconde, la notation sexagésimale positionnelle. Ce fait est certainement dû aux différences de notations adoptées alors dans les deux contextes, contrairement à la situation d'aujourd'hui se caractérisant par l'isomorphisme des deux systèmes métrique international et décimal. Et si, par ailleurs, la résolution des problèmes nécessite des allers-retours incessants entre mesures et nombres abstraits, cela n'a pas empêché que des algorithmes de calcul généralisables se sont développés de façon autonome et hors de tout contexte métrologique, ce qui fait apparaitre l'appréhension du sens du nombre par les Babyloniens et leur maîtrise des premières techniques algébriques.

Ainsi, les praxéologies mobilisées au cours de cette période sont essentiellement algorithmiques sous-tendues par des types de tâches calculatoires stéréotypés appelant la mobilisation de techniques mécaniques calquées sur des exemples génériques. Tout se fait par imitation et application à la lettre des procédures arrêtées sans aucune démonstration ni justification, preuve d'une absence complète d'une quelconque technologie ou théorie sous-jacente.

En effet, les problèmes du second degré résolus par les Babyloniens prennent la forme de listes de procédures de calcul numérique. Høyrup[2] (2002) considère que ce ne sont pas de pures recettes découvertes par hasard et que les solutions sont guidées par des raisonnements géométriques, développés plus tard par les mathématiciens grecs et arabes. Toutefois, aucune conceptualisation n'est entamée au cours de cette période et seules *des connaissances-en-acte* (Vergnaud, 1990) sont mobilisées pour répondre aux besoins sociaux.

Le champ syntaxique et algorithmique commence à se faire jour numériquement et sans aucune ostension formelle. L'exemple suivant, relevé de la tablette BM 13901[3], est susceptible de nous éclairer davantage sur la nature des algorithmes numériques utilisés par les Babyloniens pour résoudre des équations quadratiques :

« J'ai additionné la surface et le côté de mon carré, et c'était 45' »

Ce problème porte sur la résolution d'une équation du second degré[4]. Si on note x le côté ducarré, le problème à résoudre peut être modélisé, en algèbre moderne, par l'équation[5] : $x^2 + x = \frac{3}{4}$

Høyrup(2002) traduit l'énoncé et la solution de ce problème comme suit :

« J'ai joint la surface et le côté de mon carré, C'est 45'.

1, tu poseras.

La moitié de 1 tu couperas : 30' $\qquad \frac{1}{2} = \frac{30}{60} \to 30'$

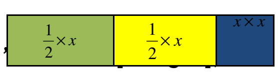
Tu croiseras 30' et 30' : 15' $\qquad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{15}{60} \to 15'$

15' et 45' tu accoleras : 1 $\qquad 15' + 45' = 60' \to 1$

1 a pour côté 1 $\qquad \sqrt{1} = 1 \to 1$

Le 30' que tu as croisé, du cœur de 1 tu arracheras : 30' est le côté du carré. $1 - 30' = 1 - \frac{30}{60} = \frac{30}{60} \to 30'$ »

Høyrup laisse ainsi entendre, par cette traduction, une probable assise géométrique ayant guidé les babyloniens dans leurs raisonnements sous-tendant l'algorithme de résolution. En voici une possible illustration (un carré de côté x, deux rectangles isométriques de dimensions



[2] Cité in : EducMath, *Institut Français de l'* … Disponible sur < http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/lecture/repertoire/hoyrup> (consulté juillet-Août 2014).

[3] Conservée au British Museum, cette tablette remonte à l'époque paléo-babylonienne et constitue l'un des plus anciens et des plus importants textes mathématiques portant sur la résolution des problèmes du second degré.

[4] Conformément à la tradition mésopotamienne, le nombre inconnu cherché est appelé le *côté du carré*, et le carré de ce nombre l'aire *du carré*. Mais le scribe n'hésite pas à ajouter un *côté* à une *aire* au mépris de l'homogénéité des grandeurs, ce qui a conduit certains historiens des mathématiques à parler d'algèbre mésopotamienne et d'équations, et à considérer que les Babyloniens manipulent des « nombres abstraits » et non simplement des grandeurs comme leurs contemporains Égyptiens ou leurs successeurs Grecs.

[5] Il est à noter que, dans le système sexagésimal babylonien, 20 et 1/3 sont notés de la même façon, de même que 45 et 3/4 et, plus généralement, tout nombre *a* est considéré comme *a*, *a*×60 ou *a*/60 selon le contexte.

½ et x assemblés de deux manières dans deux configurations différentes et un carré de côté ½):

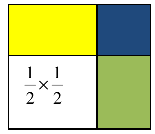


Figure 1 - *L'interprétation géométrique d'Høyrup* (2002)

2. *Contribution des méthodes euclidiennes à l'évolution des praxéologies algébriques*

Deux influences majeures des techniques mathématiques grecques sur les procédures «arithmético-algébriques» pratiquées dans les civilisations antérieures peuvent être relevées : La première a trait au recours aux raisonnements rigoureux prônés par l'école grecque, raisonnements nécessitant des démonstrations convaincantes pour toute affirmation mathématique et réfutant toute généralisation abusive, et la seconde porte sur l'usage des illustrations géométriques pour étayer les propriétés numériques, malgré la limite de sa portée.

Dans les Éléments d'Euclide, il est souvent question de construire géométriquement des grandeurs qui peuvent être interprétées comme des solutions d'équations. Mais le but n'est pas à proprement parler de résoudre des équations, bien que les transformations d'aires envisagées soient équivalentes à des manipulations d'expressions algébriques.

Les Grecs utilisent principalement ce qu'on appelle l'algèbre géométrique pour établir des propriétés algébriques comme les identités remarquables et la résolution d'équations du second degré. Les livres II et VI des Éléments illustrent bien cette méthode qui donne des preuves simples de certains résultats et développe une prise de conscience intuitive des aspects algébriques fort abstraits.

Les praxéologies ainsi développées sont donc essentiellement fondées sur des types de tâches de calcul de grandeurs géométriques nécessitant la mobilisation de techniques de transformations d'aires justifiées par des blocs technologico-théoriques relatifs à la géométrie euclidienne et à la mesure des grandeurs.

Les énoncés des Éléments se rapportent essentiellement aux mesures des grandeurs géométriques, mais ils se prêtent à une interprétation algébrique éclairant la démarche suivie par Euclide tout en étant étrangère à la conception mathématique de l'époque.

Nous décrivons, à titre d'exemples quelques propositions du livre II des *Éléments* (Peyrard, 1819) :

-Les propositions 1 à 3 illustrent géométriquement la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Elles s'énoncent par le fait que des rectangles de même hauteur, disposés côte à côte, forment un rectangle dont l'aire est la somme des aires de ces rectangles. Ce fait est illustré par la configuration géométrique suivante :

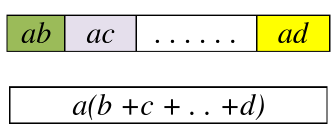


Figure 2 - *Interprétation géométrique de la proposition 3, livre II des Éléments*

Et traduit aujourd'hui algébriquement par la formule :

$$a(b+c+...+d)=ab+ac+...+ad$$

-La proposition 4 démontre géométriquement que, si une droite est coupée à volonté, le carré de la droite entière est égal aux carrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments. L'illustration géométrique support à cette démonstration est la suivante :

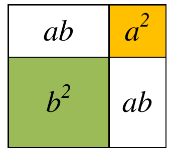


Figure 3 *- Interprétation géométrique de la proposition 4 du livre II des Éléments*

On reconnaît l'identité remarquable :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

-La proposition 11 illustre un problème du second degré. Euclide y expose comment « *couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments soit égal au carré du segment restant* ». Algébriquement, cela revient à résoudre l'équation :

$$ax = (a-x)^2$$

Euclide propose la construction suivante :

* Soit [DB] le segment donné. Il s'agit de construire à la règle et au compas le point F de ce segment de façon que le rectangle compris sous [DB] et [DF] soit égal au carré de [FB].

* Sur [DB] on construit le carré ABDE.
* Soit I le milieu de [AB].
* Construire sur [IB) le point C tel que ID=IC.
* Construire le carré BCHF comme indiqué sur la figure ci-jointe.
* Le point F répond à la question.

La justification donnée est basée sur la proposition (6, II) des Éléments et le théorème de Pythagore :

$AC.CB + IB^2 = IC^2$ (Prop 6, II)

Or : $IC^2 - IB^2 + DB^2$ (Pythagore)

Donc : $AC.CB = DB^2$

d'où : aire $(ACHK)$=aire $(ABDE)$

et alors : aire $(BCHF)$=aire $(KFDE)$

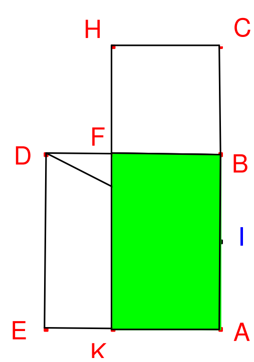


Figure 4 *- Interprétation géométrique de la proposition 11 du livre II des Éléments*

Cette dernière écriture est équivalente à : $BD.DF = (BD - DF)^2$ ou $ax=(a\text{-}x)^2$ où l'on a posé *a= DB et DF=x.*

Pour justifier sa procédure de construction, il est vrai qu'Euclide est amené à manipuler des nombres et des opérations sur ces nombres. Toutefois, ceux-ci sont intimement liés à des concepts géométriques, et les techniques de calcul utilisées restent peu développées et fondamentalement rhétoriques.

Le champ conceptuel, déjà bien installé en géométrie grâce aux apports théoriques des *Éléments*, contient implicitement les concepts algébriques qui ne seront découverts que douze siècles plus tard par les mathématiciens arabes par un changement de cadre, amorcé par Al-Khwârizmî.

Le champ syntaxique évolue parallèlement aux progrès réalisés dans le domaine du langage courant. Dans cette *algèbre rhétorique*, ni les opérations ni les inconnues ne sont représentées par des symboles, tout est écrit et communiqué verbalement en langue naturelle. Le champ sémiotique est fortement caractérisé par les figures géométriques accompagnant les preuves géométriques ainsi que par leurs dénominations lexicales et symboliques.

3. Apports de Diophante au développement des praxéologies algébriques

Grâce à sa méthode analytique, Diophante invente une théorie arithmétique nouvelle, considérée comme une *algèbre présymbolique*.

Sa méthode repose sur l'introduction d'une inconnue opérationnelle « arithme », notée ς, (Radford 1991), soigneusement reliée aux inconnues du problème et soumise aux mêmes traitements opérationnels que celles-ci. Cette façon de procéder favorise un changement conceptuel dans les activités de résolution de problèmes. Le langage construit par la symbolisation de l'*arithme* et des diverses catégories de nombres, conjuguée à une syntaxe convenable, a permis à Diophante de traduire les problèmes posés à l'aide d'expressions algébriques se prêtant au calcul formel sur *les espèces*[6] et qui aboutissent à des équations réduites donnant la valeur de l'inconnue opérationnelle et, par suite, celles des inconnues cherchées.

Les deux champs syntaxique et sémiotique se trouvent donc sensiblement enrichis, permettant ainsi une évolution importante des processus algébriques déployés.

Sur le plan sémiotique, Diophante réalise une avancée de taille en introduisant un symbolisme assez adéquat à une nouvelle classification des nombres par rapport à l'école pythagoricienne. Ainsi, ses « désignations abrégées » : Δ^{γ} pour les carrés, K^{γ} pour les cubes, $\Delta^{\gamma}\Delta$ pour les bicarrés, ΔK^{γ} pour les carrés-cubes et $K^{\gamma}K$ pour les cobo-cubes ont permis des manipulations aisées des *arithmes* lors des processus de résolution des problèmes. Par exemple, pour écrire l'expression $2ς^3+ς^2-5ς+4$ où ς désigne l'*arithme*, il utilise les symboles précédents et place les coefficients à droite de chaque puissance de ς, M sépare la partie variable de la partie constante et le symbole ⩚ exprimant une différence. Il obtient alors l'expression :

$$K^{\gamma}\beta\,\Delta^{\gamma}\alpha\,M\delta \ ⩚\ ς\varepsilon$$

Procédant de la sorte, il est donc en mesure de traduire en écriture abrégée les relations liant *l'arithme* aux données du problème et ouvre ainsi la voie à l'émergence d'une syntaxe spéciale facilitant un calcul formel en vue d'isoler l'inconnue et fournir la solution du problème proposé.

Toutefois, malgré sa relative efficacité, cette méthode présymbolique reste encore d'envergure limitée car elle ne se prête qu'à la mise en jeu pratique d'une seule variable. On pourrait faire l'hypothèse que Diophante était conscient de cette difficulté ce qui l'a amené à

[6] Monômes faisant intervenir les « arithme »

adopter une méthode se basant sur la recherche d'une seule inconnue (permettant, le cas échéant, de calculer les autres) : *l'inconnue opérationnelle* qu'est l'*arithme*.

Les praxéologies algébriques mobilisées sont articulées autour des types de tâches de résolution de problèmes nécessitant pour leur réalisation des techniques de modélisation à l'aide des inconnues opérationnelles et de manipulations d'écritures formelles sur les *arithme*s. Des éléments technologiques transparaissent implicitement dans la démarche diophantienne de calcul sur les espèces mais sans aucun support théorique notable.

Diophante introduit une méthode générale pour chaque type de tâches, qu'il expose sur un exemple générique (au sens de Balacheff), comme le montre l'exemple suivant (énoncé et solution du problème 27, Livre I, tels que traduits par Ver Eecke[7]) :

> « Trouver deux nombres dont la somme et le produit forment des nombres donnés »

Diophante procède par le traitement d'un exemple générique en choisissant des paramètres convenables (il cherche deux nombres *a* et *b* de somme 20 et de produit 96) :

> « Proposons que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités. »

Il choisit une inconnue opérationnelle :

> « Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes » : (a – b = 2x)

Il applique la première condition à savoir que la somme des nombres cherchés est 20, ce qui lui permet d'exprimer les nombres cherchés en fonction de l'arithme.

> « Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes »

Il trouve : $a = 10 + x$ et $b = 10 - x$:

Il applique maintenant la deuxième condition à savoir que le produit des deux nombres est égal à 96 :

> « Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités »

Il applique l'identité algébrique : $(10 + x)(10 - x) = 100 - x^2$ et obtient $100 - x^2 = 96$:

> « Or leur produit est 100 unités moins un carré d'arithme, ce que nous égalons à 96 unités, »

Il réduit l'équation obtenue et la résout. Il trouve $x^2 = 4$ et en-déduit $x = 2$.

> « et l'arithme devient 2 unités ».

En remplaçant x par sa valeur, il obtient la solution du problème.

> « En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités et le plus petit sera 8 unités».

Diophante n'oublie pas de vérifier que les nombres trouvés satisfont bien aux conditions du départ en disant:

> « et ces nombres satisfont la proposition ».

Cette technique de résolution diophantienne illustre la phase *syncopée* de l'histoire de l'algèbre. L'introduction et l'usage d'une lettre pour représenter une quantité inconnue permettent de résoudre des équations à une ou plusieurs inconnues. Mais les données des problèmes posés sont systématiquement remplacées par des nombres soigneusement choisis par Diophante et leur symbolisation par des lettres n'est pas encore amorcée.

[7] Cité in Radford, 1991, p. 4

L'invention de cet artifice heuristique -qu'est l'*arithme-* par Diophante, dénote une ouverture d'esprit et une maturité intellectuelle digne du courant novateur de *l'algèbre présymbolique* par rapport au courant « algébrique-géométrique » euclidien.

4. *La période arabo-islamique : Naissance de l'algèbre des équations*

Al-Khwârizmî (780-850) a le mérite de systématiser l'étude des équations de degré inférieur ou égal à deux et de la théoriser. On trouve dans son traité[8] :

- Une classification des équations quadratiques claire, logique et bien adaptée aux méthodes de résolution préconisées.
- Des techniques efficaces (*al-jabr*, *al-muqabala* et *al-hatt*) permettant de ramener toute équation à l'une des catégories annoncées dans sa typologie, ce qui favorise et donne du sens aux manipulations algébriques effectuées.
- Un algorithme de résolution étayé par des exemples numériques génériques et des justifications géométriques pour chaque catégorie d'équation.

Al-Khwârizmî distingue six types d'équations de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients positifs :

- Trois équations simples : $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$ *et* $bx = c$.
- Trois équations combinées : $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$ *et* $ax^2 = bx + c$.

Ces équations sont toutes exprimées en phrases, l'usage des symboles numériques et littéraux étant inconnu à cette époque.

Nous voyons là une construction systémique du concept d'équation ainsi qu'une extension notable du champ cognitif lié aux praxéologies algébriques. Celles-ci sont toujours de nature algorithmique et visent la réalisation de tâches de résolution de problèmes, via des techniques de modélisation verbale et des procédures numériques appliquées sur des exemples génériques.

Le bloc technologico-théorique justifiant ces techniques de résolution est essentiellement constitué par les savoirs géométriques de l'époque, notamment ceux qui ont trait à la transformation et à la conversion des aires planes.

Pour expliquer ses méthodes et ses procédures de résolution, Al-Khwârizmî explicite pour chaque type un ou plusieurs exemples numériques. L'exemple suivant permet de suivre la procédure de résolution de l'équation $x^2 + 10x = 39$.

> Les carrés plus les racines égalent un nombre, c'est par exemple lorsque tu dis : un carré plus dix racines sont égaux à trente neuf dirhams, c'est-à-dire que si on ajoute à un carré quelconque une quantité égale à dix racines, le tout sera trente neuf.

La solution d'Al-Khwârizmî est la suivante :

> Partage en deux moitiés le nombre des racines, il vient dans ce problème, cinq, que tu multiplies par lui-même, on a vingt-cinq ; tu l'ajoutes à trente-neuf, on aura soixante-quatre ; tu prends la racine qui est huit, de laquelle tu soustrais la moitié du nombre des racines, qui est cinq. Il reste trois qui est la racine de carré que tu veux, et le carré est neuf.

Al-Khwârizmî s'appuie donc sur un exemple générique pour établir un algorithme de résolution des équations du type $x^2 + bx = c$ où b et c sont des nombres positifs donnés. Son algorithme de résolution est le suivant :

---

[8] Considéré comme un ouvrage de référence, ce traité est intitulé : *Al-kitab al-mokhtasar fi hisab al-jabr wal muqabala* (livre concis du calcul par les procédés de la restauration et de la réduction) et rédigé vers 825.

1. Prends la moitié du nombre des racines : 5
2. Multiplie ce nombre par lui-même : 25
3. Ajoute 39 au résultat : 64
4. Prends la racine de 64 : 8
5. De 8, soustrais la moitié du nombre des racines : 3
6. La racine est 3 et son carré est 9

Il propose une justification géométrique, dans laquelle il représente le nombre inconnu par une longueur géométrique : Partant du fait que le produit de deux nombres est représenté par l'aire d'un rectangle et le carré d'un nombre par l'aire d'un carré, il s'appuie sur la figure géométrique ci-contre, où la longueur AB désigne le nombre inconnu, pour justifier son algorithme de résolution (Abgral Ph., 2011-2012).

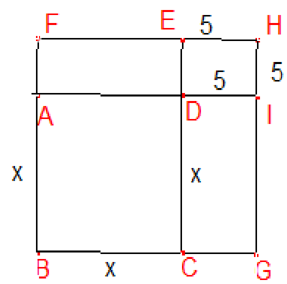


Figure 5 *- Interprétation géométrique de l'algorithme de résolution de l'équation $x^2 + 10x = 39$ par Al-Khwârizmî*

ABCD désigne un carré de côté AB, ADEF un rectangle de dimensions 5 et AB et donc d'aire 5.AB, DCGI un rectangle de dimensions 5 et AB et donc d'aire 5.AB, le carré EDIH de côté 5 est donc d'aire 25. En écrivant l'aire du carré FBGH de deux manières (Aire d'un carré de côté (AB + 5) et somme des aires de deux carrés de côtés respectivement AB et 5 et de deux rectangles isométriques de dimensions AB et 5) On obtient :

$(AB + 5)^2 \quad = AB^2 + 5.AB + 5.AB + 25$

$= AB^2 + 10.AB + 25$

$= 39 + 25,$ car $AB^2 + 10.AB = 39$, d'après l'équation (E)

$= 64 = 8^2$ *d'où* $AB+5=8$ *et* $AB=3$

Sans citer Euclide, qu'il ne semble connaître au moment où il rédige son traité d'algèbre, Al-Khwârizmî a su exploiter les résultats géométriques, déjà connus des Babyloniens et en vigueur chez les artisans géomètres de son époque. Il a ainsi pu justifier tous les algorithmes de résolution des équations étudiées par des méthodes géométriques. Il inaugure un nouveau domaine mathématique (*l'algèbre des équations*) dans lequel vont s'engager les futurs mathématiciens arabes (Abù Kâmil, Al-Khayyâam, Ibn Qurrâ, Al-Karâjî, etc.) et italiens (Del Ferro, Tartaglia, Cardan, Bombelli et al.) d'abord en usant du langage courant, ensuite avec l'utilisation des lettres désignant les inconnues.

Abù Kâmil (850-930) rédige un traité qu'il intitule *Kitab al-jabr wa'l mùqabalà* dans lequel il expose les principale règles de l'algèbre d'Al-Khwârizmî et propose outre les problèmes types du second degré[9] de l'époque, d'autres problèmes présentés sous forme rhétorique et sans aucun symbole. Il en donne les algorithmes de résolution et les justificatifs géométriques en se basant sur les résultats des *Éléments d'Euclide.* Ainsi, il applique la proposition 6 du livre II des *Éléments* pour fournir une argumentation géométrique de la résolution de l'équation $x^2+10x=39$. En voici, ci-dessous la configuration géométrique sur laquelle est basée sa démonstration :

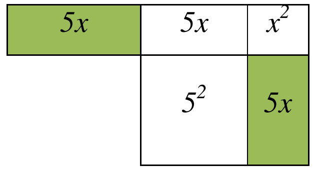


Figure 6 *- Interprétation géométrique de la résolution de l'équation* $x^2 + 10x = 39$ *par Abù Kâmil*

Abù Kâmil a donc eu le mérite d'intégrer l'ancienne tradition grecque avec les nouvelles trouvailles algébriques amorcées par Al-khwârizmî. Ceci n'a pas manqué de relancer les investigations portant sur la résolution d'équations algébriques de degrés supérieurs, les techniques du calcul algébrique sur les monômes et les binômes, les règles de calcul sur les radicaux etc.

Sur le plan syntaxique, le langage ordinaire reste de rigueur et, malgré l'introduction des symboles pour désigner l'inconnue ou ses puissances entières, il n'y a pas à proprement parler de manipulation d'expressions littérales où les lettres ont le statut de variable. Cependant, dans la démarche de résolution des équations, les algébristes maghrébins du XIIe siècle s'occupent de déterminer la valeur de la lettre «ش » représentant l'inconnue dénommée *shay*.

Dans cette étape de l'évolution des praxéologies algébriques, les manipulations verbales des expressions mathématiques n'étaient pas une fin en soi, mais elles étaient dictées par une nécessaire transformation des équations en vue de les résoudre, et par là, de proposer des solutions aux situations de la vie quotidienne qu'elles modélisent.

5. *La contribution de Viète à l'évolution des praxéologies algébriques*

Un des principaux avantages de la méthodologie analytique de Viète est l'obtention de formules générales et applicables à plusieurs situations, caractérisées par l'usage des paramètres littéraux, ce qui permet de conserver la trace de toutes les étapes du raisonnement et de se retrouver facilement lorsque l'on procède à un changement quelconque de ces paramètres. L'activité entreprise ne se réduit donc pas à la résolution d'un problème particulier, c'est plutôt une famille entière de situations qui se trouvent résolues par ce procédé. De plus, cette avancée dans l'évolution des praxéologies algébriques est illustrée par un processus tout à fait nouveau et efficace de résolution de problèmes dans différents domaines des mathématiques (arithmétiques, géométriques, trigonométriques, fonctionnels, combinatoires etc.)

Viète a le mérite de développer l'algèbre en tant qu'outil au service de la résolution des problèmes, mais il montre par la même occasion qu'algèbre et résolution de problèmes (analyse ou art analytique) sont imbriquées au point de se confondre. En effet le développement de l'une favorise celui de l'autre, voire nécessite celui de l'autre, c'est la signification du titre donné à son œuvre *Introduction à l'art analytique ou algèbre nouvelle.*

[9] Ces problèmes concernent les six équations quadratiques figurant dans la typologie développée par Al-khwârimî.

En passant de *l'algèbre rhétorique* (en langage courant et sans aucun symbole) et de *l'algèbre syncopée* (en langage naturel mais avec l'usage de quelques abréviations pour désigner notamment les nombres inconnus) à *l'algèbre symbolique*, Viète réalise une rupture dans le processus du fonctionnement des praxéologies algébriques par un nouveau paradigme, ouvrant la voie à ses successeurs du XVIIe siècle, en particulier Descartes (1596-1650).

Pour illustrer cette nouvelle variante des praxéologies algébriques, nous présentons ci-dessous un exemple de résolution de problème par VIÈTE (Boyé 2003, p. 10):

Énoncé du problème 1 du livre I:

« Étant donné la différence de deux côtés et leur somme, trouver les côtés. »

Solution de VIÈTE :

1. Il commence par symboliser les données et pose le problème en question :

   « Soit B la différence des deux côtés, et soit D leur somme. Il faut trouver les côtés. »

2. Il symbolise les inconnues et il traduit les hypothèses en les transformant ce qui lui permet d'établir des relations entre inconnues et données :

   « Soit A le côté le plus petit, donc le plus grand sera $A + B$. Pour cette raison la somme des côtés sera $2A + B$. Ce qui est la même chose que D. C'est pourquoi $2A + B$ est égal à D. Et par antithèse, 2A sera égal à $D - B$, et tout étant divisé par deux, A sera égal à $\frac{D}{2} - \frac{B}{2}$.

   Soit E le côté le plus grand. Le plus petit sera donc $E - B$. Pour cette raison la somme des côtés sera $2E - B$. Ce qui est la même chose que D. C'est pourquoi $2\,E - B$ sera égal à D, et par antithèse $2E$ sera égal à $D + B$; et tout étant divisé par 2, E sera égal à $\frac{D}{2} + \frac{B}{2}$. »

3. Il expose la solution et s'assure de sa validité :

   « Donc la différence des deux côtés et leur somme étant données, les côtés seront trouvés.

   En effet, la moitié de la somme des côtés moins la moitié de la différence est égal au côté le plus petit ; les mêmes quantités ajoutées donnent le plus grand côté. C'était la recherche à faire. »

4. Il illustre ses trouvailles en donnant un exemple numérique :

   « Soit B= 40, D=100, A fait 30 et E 70. »

Les praxéologies algébriques ainsi développées sont articulées autour de types de tâches de résolution de problèmes en mobilisant des techniques de symbolisation des inconnues et des données, de modélisation des relations entre celles-ci par des écritures algébriques formelles et de résolution d'équations paramétriques en vue d'obtenir des solutions générales. Nous passons, à ce moment de l'histoire, de l'algèbre syncopée à l'algèbre symbolique avec l'usage des abréviations (« A quadratus ou Aq» pour A^2, « A cubus ou Ac» pour A^3, « in » pour la multiplication, « aequatur » pour l'égalité, etc.) (Boyé, 2003)
Mais Viète prend garde de respecter l'homogénéité des degrés dans une égalité entre expressions littérales en complétant par les termes « solido », « plano » comme c'est le cas dans l'écriture suivante :

« A cub + B plano in A aequatur C in A quad + D solido pour : $A^3 + BA = CA^2 + D$ »

Cette précaution prise par Viète illustre son attachement à l'interprétation géométrique euclidienne et aux mesures de grandeurs manipulées dans les formules, ce qui témoigne du stade encore embryonnaire de son algèbre, mais également d'une nécessité de l'époque. Cette lourdeur dans les écritures algébriques va être levée plus tard par Descartes en montrant que l'on peut construire une longueur égale au produit de deux autres et, qu'en conséquence, tout peut être ramené à la dimension 1.

Le langage et les notations se trouvent alors simplifiés et les nouveaux outils ainsi construits favorisent la mise en place de nouveaux concepts, entre autres celui de fonction - concept initié plus tard par Euler- par le biais d'écritures des solutions générales en fonction des données, devenant respectivement variables dépendantes et variables indépendantes.

Les concepts d'équation et d'inconnue ont atteint le niveau structural en tant qu'objets autonomes sur lesquels on peut intervenir et leur appliquer des procédures de toutes sortes et le champ syntaxique se trouve alors élargi.

6. La nouvelle rupture opérée par Descartes : L'algébrisation de la Géométrie.

En publiant son œuvre *La Géométrie* en 1637 comme appendice au *Discours de la méthode*, Descartes (1596-1650) opère une nouvelle rupture dans le processus du développement des praxéologies algébriques. Il préconise de ramener tout problème à la résolution d'équations algébriques.

> Tout les problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les constructions. (Descartes , La Géométrie, édition 1637, p.297)

Ainsi, tous les problèmes de géométrie peuvent se réduire - par l'introduction d'un segment unité- à des calculs et des manipulations algébriques. C'est là l'idée-clé de Descartes sur laquelle sera fondé l'outil de sa méthode cartésienne qu'est la *Géométrie analytique*. Avec un flair pédagogique inouï, et un effort constant de *se rendre intelligible à tout le monde,* comme il le précise, il expose sa méthode de résolution :

- Première étape : Nommer les lignes de la figure en distinguant les lignes connues et les lignes inconnues.
- Deuxième étape : Mettre le problème en équations.
- Troisième étape : Résoudre les équations trouvées.

> Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une équation. (*Ibid*, p.300)

La première étape, appelée *analyse des anciens,* nous rappelle un procédé déjà utilisé par les géomètres Grecs (Pappus d'Alexandrie, IV^{è} S) pour résoudre des problèmes de construction géométrique et largement exploité par Viète dans son *art analytique*.

La deuxième et troisième étape, amorcées par les mathématiciens du siècle précédent (XV^{e}) avec l'usage d'un symbolisme assez réduit, sont alors étendues, avec Descartes, à des problèmes plus complexes et plus diversifiés tout en permettant de faire intervenir plusieurs inconnues et des paramètres. Ceci a eu pour conséquence de confronter les mathématiciens de l'époque à des difficultés calculatoires de plus en plus ardues et de les amener ainsi à développer davantage les techniques et les procédés du calcul algébrique.

7. *En guise de conclusion*

Cette étude historique des praxéologies algébriques nous a permis de constater que l'algèbre babylonienne était caractérisée par des algorithmes de calcul généralisables hors contexte métrologique et par l'apparition des premières techniques algébriques fondées sur une bonne maîtrise du sens des nombres, de leurs notations métrologique et positionnelle et de leurs usages dans la résolution des problèmes scolaires (au profit des apprentis-scribes) et de la vie courante.

Les Grecs ont eu ensuite une influence spécifique sur le développement des premières procédures algébriques initiées par leurs ancêtres, grâce à la rigueur du raisonnement qu'ils ont instaurée et par l'étayage géométrique des propriétés numériques accompagnant l'essor de la géométrie euclidienne.

Plus tard, l'introduction de l'inconnue opérationnelle (*arithme*) par Diophante d'Alexandrie, a permis d'insuffler un nouvel élan au processus de résolution des problèmes algébriques en les modélisant par des écritures symboliques se prêtant au calcul formel sur les espèces.

Les mathématiciens arabes ont continué le développement des praxéologies algébriques en systématisant l'étude des équations et justifiant les algorithmes de résolution par des preuves géométriques.

Six siècles plus tard, Viète invente l'art analytique et donne à l'algèbre un nouveau statut opérationnel avec la démarche analyse-synthèse.

Ce succinct tour d'horizon synthétisant l'analyse historique nous a permis de comprendre la difficile genèse du formalisme algébrique et de nous arrêter sur les obstacles et les ruptures épistémologiques qui l'ont caractérisé :

Le premier obstacle franchi est celui de l'écriture. Sans elle, il n'aurait pas été possible ni de communiquer ni de laisser trace de quelques œuvres que ce soient. Ensuite l'algèbre *numéreuse* prend place et se développe rendant d'importants services aux collectivités humaines qui commencent à se sédentariser et éprouver des besoins vitaux d'organisation et de gestion. Mais la complexité des problèmes rencontrés a fait que les exemples algorithmiques ont vite trouvé leur limite et demeurent insuffisants pour répondre aux nouvelles exigences de la vie économique et sociale. Un élan vers la généralisation et l'argumentation est alors exigé.

Avec l'avènement de *l'algèbre géométrique* des Grecs, une rupture eut lieu. Pour résoudre des problèmes de calcul de grandeurs, il n'est plus maintenant question d'appliquer des recettes toutes faites et de justification douteuse, mais il faut désormais démontrer la validité des propositions dans le cadre d'une axiomatique structurellement fondée sur des définitions et des postulats bien délimités.

Plus tard, *l'algèbre formelle* s'est construite progressivement au cours des deux millénaires qui suivent. Mais elle n'est apparue, à un aucun moment de sa genèse, artificielle ni accessoire, elle est dûment exigée par la nature même des problèmes posés (problèmes concrets ensuite équationnels et structurels) ainsi que par la recherche de meilleurs moyens permettant de les résoudre.

Nous résumons à présent cette étude diachronique des praxéologies algébriques en mettant en exergue les caractéristiques épistémologiques des principales phases marquant leur évolution :

La Mésopotamie (Période paléo babylonienne)	XX^{e} siècle Av. J.C.	***Pré-algèbre algorithmique :*** *Usage des tables numériques et métrologiques, algorithmes de calcul, procédures de résolution d'équations sur des exemples génériques.*
La Grèce antique: Les Éléments d'Euclide, livre II	III^{e} Av. J.C	***Pré-algèbre géométrique :*** *-Calcul de grandeurs géométriques (susceptible d'illustrer géométriquement des propriétés numériques et des algorithmes de résolution d'équations).* *-Rigueur dans les processus d'argumentation.*
Diophante d'Alexandrie	III^{e} siècle Ap. J.C.	***Arithmétique présymbolique syncopée:*** *-Méthode de l'inconnue opérationnelle (l'arithme).* *-Calcul sur les espèces.*
Al-Khwârizmî	780-850	***Algèbre des équations :*** *-Procédés d'al-jabr et al-muqâbala.* *-Algorithmes de résolution justifiés géométriquement.*
Abù Kâmil **Al-Karâjî** **Al-Khâyyâm**	850-930 953-1029 1050-1123	***Arithmétisation de l'algèbre*** *Généralisation des opérations arithmétiques aux expressions monômes et aux polynômes.*
Viète	1540-1603	***Algèbre littérale (spécieuse) :*** *-Calcul algébrique abstrait.* *-Résolution de problèmes via une modélisation et un langage algébrique (analyse/synthèse).*
Descartes	1596-1650	***Algébrisation de la Géométrie***

Tableau 2*- Les principales étapes historiques de l'évolution des praxéologies algébriques*

Suite à cette analyse historico-épistémologique, il apparait que, lors de sa genèse, l'algèbre s'est progressivement constituée, au fil du temps, comme un outil et une démarche de résolution de problèmes. De façon plus précise, en suivant le parcours de la conceptualisation, de la syntaxe et de la sémiotique algébriques, des Babyloniens à Viète en passant par Euclide, Diophante et Al-Khwârizmî, nous nous rendons compte que l'algèbre a lentement évolué vers un langage formel permettant de modéliser des situations-problèmes et de les résoudre via un calcul littéral approprié ; l'étude de ses concepts, en tant qu'objets de savoir, n'est venue que plus tard. Il est donc primordial de privilégier le travail de modélisation et les dialectiques Outil/Objet (Douady 1986) et Opératoire/Prédicatif (Vergnaud 1990) tout au long du curriculum, si l'on veut gagner le pari de donner sens aux activités algébriques et de favoriser une interaction intégrative des différents domaines des mathématiques. Mais ceci présuppose une autre façon d'envisager l'enseignement/apprentissage de l'algèbre et nécessite un plus grand effort en ingénierie didactique génératrice de situations ajustées à cette fin ; c'est ce qui constitue une véritable perspective de recherche en didactique de l'algèbre.

IV. PERSPECTIVES DE LA RECHERCHE

Au cours de ce travail de recherche, nous nous sommes intéressés à l'origine de l'algèbre élémentaire enseignée en première année du cycle secondaire tunisien. Notre objectif était de questionner les fondements épistémologiques de cet objet de savoir afin de mieux connaître les sources des difficultés des élèves et d'être ainsi en mesure de proposer les solutions didactiques qui conviennent.

Ce succinct tour d'horizon synthétisant l'analyse historique nous a permis de comprendre la difficile genèse du formalisme algébrique et de nous arrêter sur les obstacles et les ruptures épistémologiques qui l'ont caractérisée.

Ceci nous a révélé maintes caractéristiques épistémologiques de l'algèbre élémentaire dont nous citons ci-après les principales :

- L'algèbre est structurellement et fonctionnellement attachée aux activités de résolution de problèmes qui constituent sa véritable raison d'être et son ultime champ d'application
- Le développement des compétences algébriques nécessite la levée de l'obstacle du raisonnement arithmétique en assumant une rupture épistémologique *arithmétique-algébrique*.
- Prenant naissance dans le champ numérique, l'algèbre n'a pu s'en détacher qu'au prix d'une double transition : *procédural-structural* et *numérique- littéral.*

Nous nous demandons, enfin, si nous pouvons envisager une autre alternative curriculaire permettant de conjuguer les deux aspects conceptuel et opérationnel de l'algèbre dans une perspective dynamique et didactique et si nous pouvons faire en sorte que l'apprentissage de l'algèbre élémentaire soit une réponse pertinente à un besoin éprouvé par les apprenants, *in situ,* lorsqu'ils sont confrontés à un problème intra- ou extra-mathématique. Certaines réponses, à ces questions, pourraient faire l'objet de recherches futures.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2002) Le manuscrit mathématique de Jerba : Une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité, *Actes du 7e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes*, Marrakech, 30-31 Mai et 1er Juin 2002.

Abgral Ph. (2011-2012) *Histoire des mathématiques*, Cours de Mastère M1, ISEFC, Tunis.

Achour S. (2005) *L'introduction des fonctions linéaires et affines dans l'enseignement secondaire, d'une problématique de modélisation physique à l'ostension algébrique : Quelles alternatives possibles ?*, mémoire de DEA, Tunis : ISEFC.

Ben Nejma S. (2006) *Étude des rapports institutionnel et personnel aux équations via la mise en équation de problèmes en première année secondaire tunisien (3è en France) : Évolution de ces rapports dans la transition collège/lycée*, mémoire de DEA, Tunis : ISEFC.

Boyé A. (2003) *François Viète, inventeur de l'algèbre*. IREM, Pays de la Loire.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des Mathématiques* 12, 73-112.

Descartes R. (1637) *La Géométrie*, livre premier, édition 1637 publiée dans *The geometry of Rene Descartes* de David Eugene Smith et Marcia L. Latham.

Douady R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique des Mathématiques* 7(2), 5-32.

Guichard J. P. (2000) Qu'est-ce que l'algèbre ? Un domaine ou un langage ?, L'algèbre au lycée et au collège, *Publication de l'IREM de Montpellier*, p. 40-57.

Høyrup J. (2002) *Lengths, widths, surfaces: A portrait of old Babylonian algebra and its kin, studies and sources in the history of mathematics and physical sciences*. Berlin & Londres, Spinger.

Kouki R. (2004) *La logique des prédicats comme cadre d'analyses didactiques : Le cas des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue réelle au début du secondaire*, mémoire de mastère, ISEFC TUNIS.

Peyrard F. (1819) *Les œuvres d'Euclide traduites littéralement.* Paris, 1819 ; Réimpression Librairie A. Blanchard, Paris, 1993.

Proust C. (2006) Mathématiques en Mésopotamie, *Culture-Math*, ENS Ulm - DESCO, 2006.

Radford L. (1991) Diophante et l'algèbre présymbolique, *Bulletin AMQ*.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques* 10(2-3), 133-170.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ENSEIGNEMENT DES NOMBRES DÉCIMAUX A L'ECOLE PRIMAIRE ET ENVIRONNEMENT ALGÉRIEN

Mounira IGHIL AMEUR* – Rachid BEBBOUCHI**

Résumé – Les compétences futures des élèves concernant les nombres décimaux se jouent à l'école primaire ; cela a poussé de nombreux didacticiens à faire des recherches dans ce domaine. Nous nous sommes intéressés dans notre travail à l'enseignement des décimaux à l'école primaire algérienne, et en analysant les manuels scolaires officiels nous avons constaté que l'enseignement des décimaux en Algérie est basé essentiellement sur une approche numérique, et afin d'en faciliter l'apprentissage, nous avons fait quelques remarques et propositions.

Mots-Clefs : nombre décimal, fraction décimale, fraction ordinaire, approche numérique, approche par mesures

Abstract – The future competences of students concerning decimal numbers is played in primary school; this pushed many didacticians to make research in this area. We are interested in our work in the education of decimals in the Algerian primary school , and by analyzing official scholar books we noticed that the education of decimals is essentially based on a numerical approach. We give some remarks and suggestions in order to facilitate the learning of decimal numbers.

Key-words : decimal number, decimal fraction, ordinary fraction, numerical approach, approach by measures.

I. INTRODUCTION

Tout en étant une étape incontournable dans l'acquisition de notre culture mathématique, les nombres décimaux font partie de notre environnement. Ils servent à exprimer des mesures. Les exemples sont nombreux dans notre vie quotidienne (longueur, masse, température,…...). Malheureusement, des obstacles sont rencontrés lors de leur apprentissage, ce qui crée des difficultés pour l'utilisation de ces nombres par les élèves.

Une étude en France faite en 1998 a montré que sur 1742 élèves français de la troisième année de l'enseignement secondaire général, seulement 74,6% étaient capables d'ordonner correctement les nombres suivants 8,10 – 8,01 – 8,121 et 8,6. Alors qu'en est-il des élèves du primaire ?

* Usthb – Algérie -iamaths@yahoo.fr
** Usthb – Algérie- rbebbouchi@hotmail.com

Ighil Ameur M., Bebbouchi R. (2015) Enseignement des nombres décimaux a l'école primaire et environnement algérien. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT4, pp. 403-410.

Cela nous pousse à penser à une approche réfléchie qui facilite l'enseignement de ces nombres que nous appelons les DECIMAUX.

II. UNE PETITE HISTOIRE DES NOMBRES DECIMAUX (LE PASSAGE A LA VIRGULE)

Les avancées les plus précoces vers les nombres décimaux ont été faites par les savants arabes. Le premier manuel arabe connu pour avoir présenté les nombres décimaux est *Kitab al fusul fi-l-hisab al hindi* écrit par Ibrahim al Iqlidisi (920-980). Ce dernier les notait avec les chiffres indiens d'une manière semblable à celle de nos jours, mais surmontée d'un trait : le nombre 89 ,532 par exemple se notait $\overline{89'532}$.

Il explique que sa notation sans dénominateur permet d'effectuer plus rapidement les multiplications et les divisions en passant par les puissances de 10(non encore définies comme telles).

Deux siècles plus tard, Yahya al Samaw'al (1130-1180) indique qu'en faisant une division ou en calculant la racine carrée d'un nombre, on peut aller au-delà des entiers. Il utilise un tableau pour montrer que le chiffre des unités est une séparation entre les chiffres des dizaines, des centaines…... et les chiffres des dixièmes, des centièmes……

En 1427, le célèbre astronome de Samarkande, Jemshid al Kashi, affirme dans *Miftah al-hisab (La clé de l'arithmétique)* avoir découvert les fractions décimales. Il expose leur théorie et montre comment décomposer toute fraction en somme de fractions décimales.

Par ailleurs, il montre l'analogie des calculs dans les systèmes de numération décimale et de numération sexagésimale et donne les règles de conversion d'un système à l'autre. Al-Kashi utilise les nombres décimaux dans la résolution de quelques problèmes algébriques et dans les calculs d'aires et incite à leur usage pour la vérification des calculs dans le système sexagésimal.

Si les nombres décimaux tardent à venir en Occident**,** c'est tout simplement parce que l'écriture décimale des nombres a mis du temps à s'imposer. En 1579 , François Viète (1540-1603) incite l'usage des fractions décimales plutôt que celui des fractions sexagésimales .

C'est au belge Simon Stevin (1548-1620) qu'on attribue la découverte des nombres décimaux, et ceci pour deux raisons essentielles, d'abord parce qu'il semble que Stevin ait conçu sa théorie indépendamment des travaux antérieurs réalisés par les savants arabes, ensuite parce que le système de Stévin s'est répandu d'une façon très rapide et a été adopté en une dizaine d'années.

L'ouvrage de référence s'intitule « La Disme ». Stevin l'a écrit en 1585 sous la forme d'une petite brochure de trente-six pages. Il note par exemple le nombre 89,532 : 89(0)5(1)3(2)2(3)

L'avantage de cette écriture est d'éviter les calculs lourds de fractions pour se ramener aux règles opératoires d'arithmétique utilisées sur les entiers.

En 1592, un italien, Giovanni Antonio Magini (1555-1617), propose une notation proche de la nôtre et qui est encore utilisée dans les pays anglo-saxons : 89.532. En 1595, le suisse Jost Bürgi (1552-1632) fait surmonter le chiffre des unités par un petit rond : 89°532

C'est au début du XVIIème siècle que le néerlandais Willerbrord van Roijen Snell (1530-1626), aussi connu sous le nom de Snellius, puis l'écossais John Napier (1550-1617), utilisèrent la virgule dans l'écriture des nombres décimaux.

III. UN ETAT DES LIEUX DANS LE SYSTEME EDUCATIF ALGERIEN :

L'enseignement des nombres décimaux dans l'école primaire algérienne commence à partir de la quatrième année, la cinquième année étant la dernière année de l'enseignement primaire (élèves de 9 à 11 ans) ; il s'appuie essentiellement sur une approche numérique.

Le manuel scolaire de quatrième année comporte quatre cours sur les nombres décimaux précédés de trois cours sur les fractions :

Cours N°1 : intitulé « La partie entière et la partie décimale » (p. 100–101)

Objectif : Découvrir les fractions décimales.

Cours N°2 : intitulé « Nombres décimaux 1 » (p.102–103)

Objectif : Ecriture avec la virgule des fractions décimales.

Cours N°3 : intitulé « Nombres décimaux 2 » (p.104–105)

Objectif : Ordonner et comparer des nombres décimaux.

La règle graduée est introduite.

Cours N°4 : intitulé « Nombres décimaux N3 » (p.110–111)

Objectif : Additionner et soustraire des nombres décimaux.

Le manuel scolaire de cinquième année[3] comporte huit cours sur les nombres décimaux précédés de quatre cours sur les fractions :

Cours N°1 : intitulé « Nombres décimaux 1 » (p.54–55)

Objectif : Définir les nombres décimaux comme une deuxième écriture de fractions décimales.

Cours N°2 : intitulé : « Nombres décimaux 2 » (p.56–57)

Objectif : Rencontrer les nombres décimaux par une situation de mesure (longueur)

Cours N°3 : intitulé : « Nombre décimaux 3 » (p.60–61)

Objectif : Ordonner et comparer des nombres décimaux

Cours N°4 : intitulé : « Nombres décimaux 4 » (p.64–65)

Objectif : Découvrir que fraction décimale et nombre décimal étaient deux écritures de même nombre

Cours N°5 : intitulé : « Nombres décimaux 5 » (p.66–67).

Objectif : Additionner et soustraire des nombres décimaux.

Cours N°6 : intitulé : « Nombre décimaux 6 » (p.73–74)

Objectif : Multiplier un nombre décimal par un nombre naturel

Cours N°7 : intitulé : « Nombres décimaux 7 » (p.75–76)

Objectif : Multiplier un nombre décimal par 10,100,1000.

Cours N°8 : intitulé : « Nombres décimaux 8 » (p.94–95)

Objectif : Diviser un nombre décimal par 10,100,1000

L'analyse des livres scolaires officiels de la quatrième et de la cinquième année montre que l'apprentissage des nombres décimaux est basé sur le champ numérique. Ces ouvrages s'intéressent d'abord aux fractions ordinaires, puis aux fractions décimales. Les nombres décimaux sont définis comme une deuxième écriture des fractions décimales et sont ensuite situés sur la droite numérique graduée. Cette droite permet aux élèves de comparer des nombres décimaux.

Dans le livre scolaire officiel de quatrième année, l'approche est exclusivement numérique. Aucune référence aux grandeurs n'est indiquée. Pour étudier les nombres décimaux vingt activités ont été proposées et aucune d'entre elles ne fait appel à la mesure de grandeurs. Par contre, dans le livre de cinquième année, le concept de prix apparait dans quelques activités, ainsi que des situations de mesures de grandeurs telle que la longueur, ce qui permet d'approfondir les connaissances des élèves. En fin de cycle primaire, les élèves sont théoriquement capables de :

- placer des nombres décimaux dans le tableau du système décimal de position
- placer les nombres décimaux sur la droite numérique graduée
- ordonner et comparer des nombres décimaux
- additionner et soustraire des nombres décimaux
- multiplier un nombre décimal par 10, 100, 1000
- diviser un nombre décimal par 10, 100, 1000
- et multiplier un nombre décimal par un entier naturel

IV. QUELQUES REMARQUES SUR L'ENSEIGNEMENT DES NOMBRES DECIMAUX A L'ECOLE PRIMAIRE ALGERIENNE

En analysant les livres scolaires officiels de quatrième et cinquième année, on constate que les fractions et les nombres décimaux sont les deux apprentissages importants dans le domaine des nombres, mais un lien immédiat est mis entre fraction et nombres décimaux, ce qui ne laisse pas le temps à un enfant de bien maitriser les fractions.

Montrer que fraction et nombre décimal étaient deux écritures d'un même nombre n'a pas été un objectif que l'élève devait atteindre en fin de cursus primaire mais un apriori avec lequel il démarre son apprentissage.

L'utilisation du contexte monnaie a facilité l'apprentissage des nombres décimaux (dans quelques cas), par exemple dans les pays qui utilisent l'euro. Beaucoup d'enseignants ont affirmé qu'après l'arrivée de l'euro, les élèves comprennent plus vite les nombres décimaux. Mais, dans l'enseignement algérien, l'utilisation des prix ne contribue plus à approfondir les connaissances des élèves car, ces dernières années, après la dégradation de la valeur du dinar algérien, des prix du style 480,60DA, 68,03DA ne représentent plus des valeurs correctes sur le marché algérien (alors qu'on remarque que dans le livre de cinquième année plusieurs activités ont été proposées). Seul l'exemple du prix des médicaments mentionné sur les vignettes reste valable, des nombres à virgule y figurent.

Après la réforme du système éducatif faite par le Ministère de l'Education Nationale en 2003et basée sur l'approche par compétences, des cours sur l'utilisation de la calculatrice sont proposés, ce qui permet à l'élève de rencontrer les nombres décimaux en faisant des divisions.

Les cours de soutien de mathématiques pour les élèves, particulièrement ceux du primaire, sont devenus un phénomène qui s'est propagé d'une façon spectaculaire ces dix dernières années dans notre environnement algérien. Est-ce là la preuve que les élèves rencontrent des difficultés d'apprentissage à l'école ?

L'enseignement des nombres décimaux a évolué dans le monde, des logiciels ont été développés pour améliorer leur apprentissage. Malheureusement, pour des raisons économiques, une telle technique est loin d'être applicable dans plusieurs de nos écoles algériennes.

L'arabisation des mathématiques dans le système éducatif algérien, qui a été faite par des inspecteurs, a causé des difficultés d'apprentissage chez les élèves. Par exemple, pour le cas de la lecture des nombres décimaux :

125,53 est lu en arabe : cent, cinq et vingt virgule trois et cinquante.

125,03 est lu en arabe : cent, cinq et vingt virgule zéro trois.

Une telle lecture crée des confusions chez les élèves et ne peut être imputée à la traduction arabe.

V. UNE APPROCHE DIDACTIQUE DES NOMBRES DECIMAUX

L'analyse de quelques manuels scolaires belges, français, suisses et allemands faite par une équipe du Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques CREM, a montré que les approches des nombres décimaux pouvaient être variées. On peut regrouper ces manuels en quatre catégories :

Les manuels qui se basent essentiellement sur une approche numérique

Ces manuels procèdent parfois avec des approches différentes, certains s'intéressent d'abord aux fractions ordinaires puis aux fractions décimales et l'équivalence entre un nombre décimal et une fraction décimale est ensuite donnée ce qui est le cas par exemple pour la collection « A la conquête des maths », les auteurs proposent pour la première activité d'apprentissage une fiche où les élèves doivent (relier les fractions aux nombres décimaux), puis(relier chaque nombre décimal à sa situation sur la droite graduée), d'autres manuels n'insistent pas immédiatement sur les liens entre les fractions et les nombres décimaux. Les nombres décimaux naissent de l'extension du système décimal de position par la suite des fractions et des nombres décimaux étant situés sur une droite graduée, des égalités vont apparaitre (l'écriture en fraction d'un nombre décimal et son écriture avec la virgule sont situées au même endroit sur la droite graduée).

Les manuels qui se basent essentiellement sur les mesures de grandeurs

Ces manuels s'appuient sur l'approche par les mesures qui est bien évidement importante et ne peut être absente d'un dispositif d'enseignement des nombres décimaux, ce qui est le cas par exemple pour la collection « Faire les maths ».Les auteurs proposent dès la première page une situation où les nombres décimaux sont solutions de calculs de prix en euros. Les élèves doivent lire des étiquettes où le prix et le poids sont exprimés par un nombre à virgule. Il leur est ensuite demandé d'écrire les poids dans l'abaque, puis avec la virgule. Des situations de mesures de longueur et de transformation de l'unité permettent aussi d'approfondir les connaissances des élèves.

Les manuels qui s'appuient sur ces deux domaines complémentaire

La collection « Corome » et la collection « J'apprend les maths » s'appuient sur une approche mixte et complémentaire. La collection Corome propose une situation numérique à partir de laquelle les élèves vont constater que les nombres naturels, ne suffisent plus à résoudre des situations d'addition ou de soustraction. Ensuite des situations font appel à la mesure de grandeurs ou à la multiplication de nombres à l'aide de la calculatrice. Le lien avec les fractions n'apparait que plus tard dans le cursus. Celui-ci est construit à partir de la droite numérique.

Les manuels qui ne déterminent pas de choix mais juxtaposent des activités

Les auteurs de la collection « Archi m'aide » et « Cracks en maths » ne définissent pas vraiment une approche structurée.

Les difficultés d'apprentissage des nombres décimaux ont été étudiées par des didacticiens et des chercheurs (notamment Brousseau , Douady) et vers 2007, certains s'interrogent encore sur l'intérêt d'une approche réfléchie des nombres décimaux pour permettre aux élèves de comparer , ordonner des nombres décimaux et opérer sur ces nombres plus facilement qu'auparavant .

On constate que la notion de nombre décimal ne peut naître ni exclusivement de la notion de système décimal de position, donc du contexte numérique, ni exclusivement de la mesure de grandeur. Pour rencontrer les nombres décimaux, on a choisi de proposer aux élèves une situation qui leur pose problème, une situation qui crée un déséquilibre au niveau de leurs savoirs, de leur conception. On a proposé par exemple de travailler sur les aires des carrés oǔ on demande de trouver la longueur du côté d'un carré dont l'aire est 8cm².

On propose donc aux élèves une situation problème pour laquelle les nombres naturels ne suffisent pas. Pour pouvoir la résoudre, il est nécessaire aux élèves d'en utiliser d'autres : Les Nombres Décimaux.

Cette même équipe de recherche a développé, en collaboration avec un groupe d'informaticiens, un outil informatique d'évaluation diagnostique nommé : DECIVAL.

Ce logiciel permet de mettre en évidence la manière avec laquelle les élèves traitent des tâches relatives aux nombres décimaux.

DECIVAL propose des tâches relatives à :

- La comparaison de deux nombres décimaux (l'ordre).
- L'addition de deux nombres décimaux.
- La soustraction de deux nombres décimaux.
- La multiplication de deux nombres décimaux.

L'utilisation de ce logiciel figure actuellement dans le programme scolaire français.

Et afin de remédier à certaines difficultés rencontrées par les élèves du primaire lors de l'apprentissage des nombres décimaux, ce serait intéressant de privilégier, dans un premier temps, le travail sur le sens pour amener ensuite la technique et l'automatisation, et comme les nombres décimaux sont rarement vus comme une partie de plaisir chez les élèves de primaire, ce serait intéressant aussi d'ajouter un coté ludique aux activités . Plusieurs activités qui se basent sur le jeu ont été proposées par (Brissiaud 2012, pp.38-93).

VI. L'ENSEIGNEMENT DES NOMBRES DECIMAUX A L'ECOLE PRIMAIRE ALGERIENNE DE 1830 A NOS JOURS

Les travaux de S. Stevin amènent les mathématiciens et les autorités universitaires en Europe à s'intéresser à l'enseignement des nombres décimaux dés le seizième siècle.

Selon G. Brousseau, il a fallu deux siècles pour franchir le pas, et un siècle encore pour que cela soit traduit dans des pratiques d'écoles, où ce sont essentiellement les mécanismes indépendamment des justifications mathématiques qui sont enseignés.

De 1830 à nos jours, l'enseignement des nombres décimaux a évolué, mais il n'est devenu applicable aux algériens qu'après l'élargissement à l'Algérie des lois dites « lois de Ferry »en 1883, car de1830 à 1883 plus de 90% des algériens ont dû suivre leurs études dans les mosquées et les zaouiates. (Kadri 2007, pp.19-39).

Dans les premiers programmes, les poids et les mesures constituaient un champ privilégié pour l'apprentissage des nombres décimaux car dans cette période là, l'enseignement des mathématiques à l'école primaire avait pour objectif de préparer à la vie courante, les élèves quittaient tôt l'école pour aller travailler avec ou pour leurs familles. Après les guerres, en plus de la préparation à la vie courante, il s'est avéré nécessaire d'ajouter une préparation à la poursuite des études.

A la fin des années soixante, les mathématiques modernes apparaissent dans les programmes et suite à la révolution structuraliste des mathématiques, le lien entre les nombres décimaux et plus globalement les rationnels et les grandeurs, s'appauvrit : l'approche numérique est donc privilégiée.

Dans les années 1980, après la réforme du système éducatif algérien faite après l'indépendance (création de l'école fondamentale) et après l'abandon de la réforme dite « mathématiques modernes », le travail à partir des problèmes s'accentue, le rapport à la vie quotidienne comme élément de découverte est à nouveau mis en avant (on s'appuie donc sur une approche mixte).

Lier les mathématiques à la résolution des problèmes de la vie courante reste une préoccupation dans les derniers programmes parus après la réforme faite en 2003 basée sur l'approche par compétences, mais cette fois tout en emmenant les élèves à s'interroger et à réfléchir sur des « questions de structure ».

VII. NOS PROPOSITIONS

Pour améliorer l'apprentissage des nombres décimaux dans l'école algérienne il faut agir sur leur enseignement initial. Pour cela, nous proposons :

- d'introduire les nombres décimaux en quatrième année comme nombres à virgules sans faire appel à des fractions, une notion que les élèves voient aussi pour la première fois, tout en respectant l'approche didactique citée ci-dessus, et de laisser « l'équivalence entre un nombre décimal et une fraction décimale » comme un objectif à atteindre en fin de cinquième année.

(un élève de primaire est plus à l'aise devant un nombre à virgule que devant une fraction).

- d'agir sur les activités proposées aux élèves en faisant un choix réfléchi pour permettre aux élèves de construire des savoirs persistants.
- d'agir au niveau de la formation des enseignants (initiale et continue) car il est utile qu'ils aient en tête les différentes approches possibles et qu'ils puissent ajuster leur activité enseignante en fonction des difficultés des élèves, et il est nécessaire aussi que les enseignants puissent distinguer les difficultés « normales » des difficultés dues aux obstacles didactiques, et plus particulièrement aux obstacles épistémologiques .

Et pour conclure, nous confirmons ce qu'a dit N. Rouche que s'il est vrai que toute théorie répond à une question, ne nous arrive-t-il pas trop souvent d'enseigner les réponses ? C'est-à-dire la théorie avant les questions, avant que les élèves aient suffisamment éprouvé la nécessité de la théorie.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2005) *Les arithmétiques arabes*. Tunis : Collection quol lana.

Brissiaud R. (2012) *Apprentissage des fractions et des décimaux.* Polynésie Française : PIUFM 2012.

Brousseau G. (1998) *La théorie des situations didactiques.* Grenoble France : La pensée sauvage.

Grégoire J., Michaux C., Rouche N., Desmet L., Skilbecq P., Fanuel J., Soille S., Pliez G., Randour M. (2010) *L'apprentissage et l'enseignement des nombres décimaux*. Nivelles : Rapport final d'une recherche CREM 2010.

Kadri A. (2007) *Histoire du système d'enseignement colonial en Algérie*. Lyon : ENS éditions.

Rouche N. (1992) *Le sens de la mesure*. Bruxelles : Didier Hatier.

Saidan A.S. (1985) *Uklidisi , al-fusul-fi-l-hisab al-hindi (les sections sur le calcul indien).* Alep : Université d'Alep, institut d'histoire des sciences arabes.

Http://www.maths-et-tiques.fr/ : un site Web.

MANUELS SCOLAIRES

Livre scolaire algérien de quatrième année : les maths dans notre vie. ONPS avril 2006.

Livre scolaire algérien de cinquième année : les maths dans notre vie. ONPS mars 2007.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LES ENVIRONNEMENTS MATHÉMATIQUES ET LES DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE THALÈS DANS L'HISTOIRE

Slim MRABET*

Résumé - Le théorème de Thalès a résisté à tous les changements d'axiomatiques dans l'histoire des mathématiques et a profité de la diversité des formes avec lesquelles il peut être formulé pour évoluer dans des environnements mathématiques divers. L'analyse de certains traités de chercheurs qui ont marqué l'histoire montre les conditions d'apparition de ce théorème et l'évolution de certaines démonstrations qui lui sont associées, à des époques différentes de l'histoire des mathématiques et de son enseignement. Nous montrons comment certains chercheurs ont été confrontés à des obstacles epistémologiques, et soulevons la question de l'incommensurabilité qui a souvent été rencontré.

Mots-clefs : Théorème de Thalès, démonstration, commensurable, obstacle, triangles semblables

Abstract – Thales theorem has resisted to all changes of axiomatics in mathematics history. It took advantage of the diversity of forms with which it can be made, to evolve in different mathematical environments. The analysis of some treaties of researchers that have marked the history shows the conditions of appearance of this theorem and the evolution of its demonstrations, at different times of mathematics history and its teaching. We show how some researchers have been facing to epistemological obstacles, and raise the question of the incommensurabilite which has often been met.

Keywords: Thales theorem, demonstration, commensurable, obstacle, similar triangles

I. INTRODUCTION

Dans ce travail, nous choisissons d'étudier le théorème de Thalès pour des raisons multiples. Citons essentiellement que ce thème a résisté à tous les changements d'axiomatiques dans l'histoire des mathématiques, et que chez plusieurs chercheurs, depuis les Eléments d'Euclide, son évolution a été confrontée à des obstacles épistémologiques. En didactique, plusieurs recherches ont montré que c'est un moment redoutable d'enseignement, aussi bien pour les élèves que pour les enseignants.

L'intérêt de l'étude épistémologique que nous menons dans ce travail provient du fait que les choix d'enseignement effectués peuvent contribuer au dépassement, ou au contraire, au renforcement, de difficultés d'ordre épistémologique. Nous pensons également que la genèse historique d'une connaissance pourrait contribuer à une interprétation mieux fondée des difficultés remarquées chez les élèves. Selon Arsac (1987), il est important d'étudier la genèse historique d'une démonstration vu qu'on est amené à la reproduire en classe. Même si dans

* Université de Gafsa - Tunisie- mrabet_slim@yahoo.fr

Mrabet S. (2015) Les environnements mathématiques et les démonstrations du théorème de Thalès dans l'histoire. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT4, pp. 411-423.

l'enseignement actuel il n'est pas toujours possible d'expliciter les moyens de la rigueur, il semble que dans le cas du théorème de Thalès, on ne peut pas cacher un point important : celui de la difficulté des rapports incommensurables.

L'étude des conditions d'apparition du théorème de Thalès et des différentes démonstrations qui lui sont associées nous fournit des éléments de réflexion sur la place du numérique dans le géométrique. Dans ce travail, nous commencerons par pointer dans l'histoire sur des évolutions dans la vision de la géométrie et dans la démonstration. Nous analyserons ensuite quelques démonstrations du théorème de Thalès proposées à des époques différentes de l'histoire des mathématiques et de son enseignement.

Nous choisirons d'analyser, pour le thème qui nous intéresse, quelques traités d'auteurs qui ont marqué l'histoire et qui ont eu une influence à une période donnée, sur l'enseignement des mathématiques. Nous commencerons par préciser, brièvement, les orientations générales et les caractéristiques de la géométrie chez chaque auteur, puis, nous nous focaliserons sur le théorème de Thalès, préciserons les concepts qui ont contribué à son élaboration, et sa démonstration en l'inscrivant dans un cadre plus large, celui de l'axiomatique de la géométrie qui caractérise cet auteur.

Il s'agit des traités d'Euclide, d'Arnaul, de Legendre, et d'Hadamard. Nous nous référerons également à un exemple de démonstration du théorème de Thalès extrait d'un manuel scolaire, et qui caractérise une axiomatique particulière de la géométrie.

II. LES ELEMENTS D'EUCLIDE (VERS 300 ANS A.V J.C)

Notons d'abord que dans l'étude des démonstrations du théorème de Thalès, notre but n'est pas de juger de la possibilité de les enseigner de la même manière. Il est clair que souvent, elles ont un niveau d'abstraction qui dépasse celui des élèves. Le but est surtout d'étudier l'évolution de la niche écologique dans laquelle le théorème de Thalès vit et de découvrir les obstacles épistémologiques qui ont accompagné et qui ont expliqué cette évolution.

1. La géométrie chez Euclide

Les *Eléments* d'Euclide constituent un moment important de l'évolution de la géométrie. Dès l'Antiquité, ils étaient considérés comme un moyen de rompre avec l'appréhension perceptive dominante à ce moment. Caractérisé par une axiomatique qui se veut rigoureuse, par sa rigueur et par son enchaînement logique, le traité d'Euclide prend appui sur le monde sensible, et utilise des raisonnements logiques tout en ayant souvent recours à des procédés empiriques. La géométrie d'Euclide s'est basée sur la théorie des proportions d'Eudoxe pour faire face à la crise provoquée par les irrationnels apparue en lien avec le théorème de Pythagore, ce qui a permis d'éliminer le recours aux nombres autres que les entiers. Dans le traité d'Euclide, un des objectifs essentiels est d'établir des relations entre les figures semblables (du plan ou de l'espace) et des proportions.

Pour traiter les situations relatives aux triangles et plus généralement aux polygones et à différentes courbes et surfaces, Euclide utilise les cas d'égalité et la similitude des triangles. Le théorème de Thalès, traduit par Peyrard sous le nom de « proposition des lignes proportionnelles », nous semble un point essentiel de la géométrie d'Euclide puisqu'il permet de repérer des points forts sur lesquels se fonde cette géométrie. Nous citons essentiellement deux de ces points :

- la méthode des aires qui consiste à faire des découpages et des recompositions dans le but de comparer des aires. Ce procédé, rendu opérationnel par les cas d'égalités des triangles, est fréquemment utilisé chez Euclide et d'une façon générale chez les géomètres grecs.

- la théorie des proportions élaborée pour résoudre le problème de l'égalité de deux rapports incommensurables. Elle est développée par Eudoxe et exposée au livre V des Eléments. Dans la théorie d'Eudoxe-Euclide, le rapport de deux grandeurs n'est possible que si ces grandeurs sont de même nature. Le cas du rapport de deux grandeurs incommensurables est exclu et il n'est pas défini comme un nombre. Cette conception persiste longtemps jusqu'au XIX^{e} siècle et trouve une solution par la construction des nombres réels.

2. *Le théorème de Thalès chez Euclide*

Le traité d'Euclide nous a fourni le premier énoncé dans l'histoire du théorème des lignes proportionnelles. La proposition 2 du Livre VI relative à cet énoncé traite du cas d'un triangle et d'une droite parallèle à l'un de ses côtés. La proposition 2 du L VI stipule que:

> Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle, et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle.

Sa démonstration est basée sur une proposition précédente (proposition 1 Livre VI) qu'à la suite de Perrin (2006), nous appelons ***le lemme des proportions*** et sur un découpage et une reconstruction de figures.

Indépendamment du théorème de Thalès, la méthode des aires utilisée par Euclide présente au moins deux avantages :

- elle permet de contourner le problème des rapports incommensurables.

- elle interprète l'égalité des surfaces en termes de superposition et légitime la méthode empirique basée sur le découpage et la reconstruction de figures.

Dans le traité d'Euclide, les cas d'égalité de triangles forment un point fort de la méthode des aires puisqu'ils légitiment le procédé empirique.

Dans la démonstration de la proposition 2 du L VI, nous pouvons repérer cinq lemmes mobilisés dont quatre sont préparés dès le Livre I. Nous les exposons dans ce qui suit en utilisant les appellations proposées par Perrin (2006) :

1- Le lemme du trapèze (proposition 37 L I) qui stipule que :

> « Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux ».

2- Le lemme des proportions (proposition 1 L VI) qui stipule que :

> « Les triangles (et les parallélogrammes) qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases ».

Ces deux lemmes reposent sur un même autre lemme : celui du **demi-parallélogramme** (proposition 34 L I) :

> « Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les partage en deux parties égales ».

Pour démontrer le lemme du trapèze, Euclide se sert également d'un nouveau lemme que nous appelons celui du **double triangle** (proposition 41 L I) **:**

> « Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est le double du triangle », alors que la preuve de la proposition I du L VI (le lemme des proportions) est fondée sur la proposition 38 L I que nous appelons : le lemme des triangles à bases égales, et qui est conséquence du lemme de trapèze.

« Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entre eux ».

Outre le fait que la démonstration d'Euclide permet de contourner le problème des irrationnels, nous pensons qu'elle est à la fois simple et très visuelle, et qu'elle pourrait bien être enseignée à un élève de fin du collège ou du début du lycée.

3. *La démonstration d'Euclide*

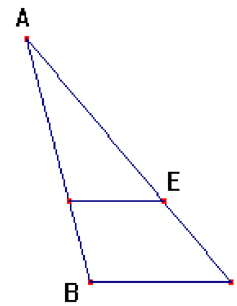


Figure1-La démonstration d'Euclide

Soit le triangle ABΓ et une droite ΔE // BΓ; je dis que l'on a: BΔ: ΔA = ΓE: EA

Joignons les droites BE et ΓΔ

Les triangles BΔE et ΓΔE sont égaux, car ils ont la même base, ΔE et sont situés entre les mêmes parallèles ΔE et BΓ (I.38)

AΔE étant un autre triangle quelconque, nous avons:

(BΔE): (AΔE) = (ΓΔE): (AΔE) (V.7)

car les grandeurs égales à une même troisième ont même rapport

Mais (BΔE): (AΔE) = BΔ: ΔA (VI.1)

Car ces triangles ont la même hauteur, la perpendiculaire à AB issue du point E; ils sont donc dans le rapport de leurs bases.

Pour la même raison, nous avons: (ΓΔE): (AΔE) = ΓE: EA

d'où BΔ: ΔA = ΓE: EA (V.11)

Chez Euclide, le théorème de Thalès a un rôle de transition assurant le lien entre les triangles équiangles et les triangles semblables définis comme étant des triangles équiangles dont les côtés sont deux à deux proportionnels. Le théorème de Thalès permet à Euclide de simplifier cette dernière définition et de montrer que la condition « équiangle » est suffisante pour dire que deux triangles sont semblables. Il permet également d'établir la propriété réciproque des triangles semblables :

« Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels ils seront équiangles, et ils auront les angles soutendus par les côtés homologues égaux entre eux » (proposition 5, L VI)

Le traité d'Euclide a marqué une grande partie de l'histoire des mathématiques et il est source d'inspiration pour de nombreux auteurs. Ceci n'a pas empêché certains de ses successeurs de le critiquer et de proposer d'autres conceptions de la géométrie et d'autres démonstrations du théorème qui nous intéresse.

III. LES ELEMENTS D'ARNAULD (1667)

1. La géométrie chez Arnauld

Au XVII^{e} siècle, le traité d'Euclide ne semble pas satisfaire certains mathématiciens. A cette époque s'est développée une arithmétique qui a renouvelé la notion de grandeur et qui a établi le lien entre les opérations sur les nombres et celles sur les grandeurs, ce qui a permis à Arnauld de fonder une théorie des proportions au début de son ouvrage.

A l'époque d'Arnauld sont apparus les nombres sourds comme étant le rapport de deux grandeurs incommensurables sans qu'ils n'aient un statut théorique bien défini. Arnauld se place du côté de la pratique de la mesure et pour lui, à une grandeur est associé un nombre comme étant le nombre de fois que cette grandeur contient l'unité ou une partie de l'unité avec éventuellement un résidu. De la même façon il définit le rapport de deux grandeurs homogènes en prenant comme unité une partie aliquote du premier. Par ailleurs, le traité d'Euclide a été objet de critiques d'Arnauld et Nicole. Un des points sur lesquels portent ces critiques porte sur le respect du vrai ordre de la nature. Dans l'axiome 32 du Livre V (annexes), Arnauld mentionne clairement que le vrai ordre de la nature impose l'antériorité des lignes par rapport aux triangles. Dans la démonstration du théorème de Thalès, Arnauld rejette le détour par les aires que fait Euclide et pose l'antériorité des lignes par rapport aux surfaces. Sa démonstration s'appuie sur le résultat qui stipule que sur toute sécante, des parallèles équidistantes déterminent des segments égaux. Dans la résolution des problèmes, il renonce aux triangles, chers à Euclide, comme moyen de traiter les situations qui relèvent du théorème de Thalès. Pour lui, l'inégalité triangulaire remplace les cas d'égalité par superposition et la notion d'angle occupe une place centrale.

2. Le chemin pour le théorème de Thalès

Dans le traité d'Arnaud, au début du Livre X consacré aux lignes proportionnelles, un ensemble de lemmes permet de préparer le terrain pour les énoncés liés au théorème de Thalès. Le premier lemme introduit la notion d'espace parallèle comme étant un espace compris d'une part entre deux parallèles et indéfini de l'autre, alors que le lemme 4 définit l'inclinaison d'une ligne dans un espace parallèle comme étant l'angle aigu qu'elle fait sur l'une et l'autre parallèle, ces deux angles sont toujours égaux.

Dans le lemme 6 du même Livre, Arnauld définit les angles semblables. C'est en fait une manière de considérer des triangles mais des triangles dont deux côtés sont infinis : les angles semblables sont des angles qui, lorsque étant égaux, c'est-à-dire superposables, les angles sur la base de l'un[1] sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun. Cette notion remplace le recours que fait Euclide aux triangles. Arnauld se distingue d'Euclide en considérant que les lignes sont infinies et sort du cadre des figures fermées dans lesquelles Euclide s'est enfermé. La proposition fondamentale qui suit les lemmes traite d'un cas de proportionnalité des côtés de deux triangles ayant un angle aigu égal, dans une formulation propre à Arnauld, se servant d'espace parallèle et d'inclinaison de lignes.

Le premier théorème du Livre X correspond à la proportionnalité des côtés des triangles équiangles, toujours en faisant appel à l'inclinaison de lignes. Par rapport à Euclide, les rôles se sont renversés : les triangles équiangles chez Arnauld, introduits à partir d'angles semblables, précèdent tout énoncé du théorème de Thalès dans un triangle, alors que pour Euclide, ces triangles sont revisités après la proposition VI. 2.

---

[1] Pour Arnauld, la base d'un angle correspond à une sécante aux côtés de l'angle.

3. *Les énoncés du théorème de Thalès*

La première forme ressemblant aux énoncés récents du théorème de Thalès apparaît dans un premier corollaire du premier théorème du Livre X. Cet énoncé se sert de plusieurs parallèles coupées par des sécantes.

Premier corollaire

14. Plusieurs lignes étant diversement inclinées dans le même espace parallèle, si elles sont toutes coupées par des parallèles à cet espace, elles le sont proportionnellement, c'est-à-dire que chaque toute est à chacune de ses parties telle qu'est la première, ou la deuxième, ou la troisième etc., comme chaque autre toute est à la même partie, première, ou deuxième, ou troisième etc.

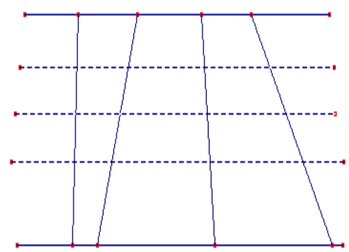


Figure 2*- Enoncé d'Arnauld*

Les angles paraissent chez Arnauld aussi importants que les triangles chez Euclide :

20. Si un angle a deux bases parallèles, il s'y trouve diverses sortes de proportions de grand usage.

Sa démonstration n'est qu'une application des deux premiers théorèmes (résultats 13 et 18) et du 9ème lemme comme conséquence des angles alternes internes introduits au résultat 57 du Livre VIII. (voir annexes)

IV. LES ELEMENTS DE LEGENDRE (1794)

1. *La géométrie chez Legendre*

L'ouvrage de Legendre marque un retour à Euclide et se propose de démontrer certaines propriétés admises par ce dernier, comme le 5^{e} postulat, en commençant par montrer que « Dans tout triangle, la somme des angles est égale à deux droits ». A partir de ce résultat, Legendre démontre l'égalité des angles alternes-internes et correspondants définis par deux droites parallèles coupées par une sécante. Il joint la rigueur euclidienne à sa théorie sur les mesures. Nous retrouvons la méthode des aires d'Euclide dans la proposition 1 du livre III intitulée : *les proportions des figures*, à laquelle sont ajoutées des propriétés d'algèbre après avoir défini au début du même livre, les notions de figures équivalentes, de figures semblables et d'angles homologues.

Notons que le traité de Legendre a été utilisé pour l'enseignement avec des modifications au fil des rééditions. Nous avons consulté une 14ème réédition de ce traité réécrite par Blanchet, et avons trouvé que Legendre se limite alors au cas d'un triangle, et l'abandon de la méthode des aires l'a amené à distinguer deux cas suivant que les longueurs sont commensurables ou incommensurables. Ainsi, la proposition XVI du livre III indique que :

« Toute parallèle DE à l'un des côtés BC d'un triangle ABC, divise les autres côtés AB, AC, en parties proportionnelles »

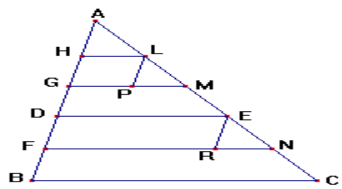


Figure 3- Enoncé de Legendre

Le cas des segments commensurables :

L'auteur traite un exemple générique : il divise les segments AD et DB suivant la commune mesure. Les parallèles menées de H, G, D et F déterminent sur le segment AC des segments égaux. Pour démontrer ce résultat, il montre l'égalité des triangles (par exemple LPM et ERN) en se basant sur les angles correspondants et alternes internes, puis il déduit que AE et EC sont divisés dans le même rapport que AD et DB.

Le cas des segments incommensurables n'est pas effectivement démontré, mais l'auteur précise qu'il suffit d'encadrer les rapports $\frac{AD}{DB}$ et $\frac{AE}{EC}$ par deux nombres consécutifs de dixièmes, de centièmes, de millièmes etc.., avec un raisonnement qu'il a utilisé dans un chapitre antérieur, et il déduit que les rapports sont égaux.

Le sens réciproque du théorème, toujours relatif au triangle, apparaît à la proposition suivante

La démonstration se sert du sens direct et du raisonnement par l'absurde :

Proposition XIV

Théorème

Réciproquement, si les côtés AB, AC d'un triangle ABC sont coupés proportionnellement par la ligne DE, en sorte qu'on ait $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

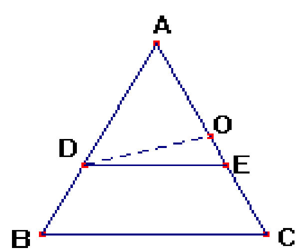


Figure 4- La réciproque chez Legendre

Je dis que la ligne DE sera parallèle à la base BC. Car si DE n'est pas parallèle à BC, supposons que DO en soit une ; alors suivant le théorème précédent on aura : $\frac{AD}{DB}=\frac{AO}{OC}$

Donc on aura : $\frac{AO}{OC}=\frac{AE}{EC}$, proportion impossible puisque, d'une part, AE est plus grand que AO, et que, de l'autre, EC est plus petit que OC; donc la parallèle à BC, menée par le point D, ne peut différer de DE.

2. Les applications du théorème de Thalès

Le théorème de Thalès réduit au triangle permet de traiter les propriétés des bissectrices d'un angle dans un triangle et du lieu géométrique des points dont les distances à deux points B et C sont dans un rapport donné $\frac{m}{n}$. Viennent ensuite les cas de similitude des triangles qui profitent des définitions des triangles équiangles et des triangles semblables, puis les applications aux polygones semblables en les décomposant en des triangles semblables. Comme nous l'avons remarqué chez Euclide, la cohésion Thalès-triangles semblables est nette. Dès leur apparition, les triangles semblables chez Legendre se substituent au théorème de Thalès et trouvent un terrain riche d'applications. Nous citons en particulier les applications aux rapports de périmètres et d'aires de polygones semblables et la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Dans des problèmes relatifs au livre III, l'obsolescence interne du théorème de Thalès est également assurée par des problèmes de type : diviser une ligne droite donnée en tant de parties égales qu'on voudra, ou en parties proportionnelles à des lignes données, trouver une quatrième proportionnelle à trois lignes données, trouver une moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

Dans les livres suivants du traité, les triangles semblables sont utilisés dans des problèmes de calcul d'aires relatifs à des polygones réguliers. Le théorème de Thalès ne sera revisité que dans l'étude de la géométrie dans l'espace, dans les sections d'une pyramide.

V. LE TRAITE D'HADAMARD (1899)

1. La géométrie chez Hadamard

Le traité de Hadamard est destiné à l'enseignement de la géométrie. Au début de son ouvrage, Hadamard signale qu'il compte se démarquer d'Euclide en insistant sur les aspects pratiques et intuitifs de l'enseignement de la géométrie. Chez lui, la géométrie est considérée comme plus simple, plus accessible du point de vue du raisonnement et plus concrète que les théories abstraites de l'arithmétique et de l'algèbre. Une importance particulière est accordée à l'étude des figures et des relations qu'elles ont entre elles ce qui explique la fréquence élevée des problèmes de construction géométrique qui occupent, en particulier, un chapitre entier (chapitre VI) du Livre III. Par ailleurs, la comparaison des figures et l'étude de leurs correspondances sont bien mises en avant en suivant deux méthodes :

- la méthode classique chère à Euclide qui consiste à appliquer le principe de superposition. Pour cela, apparaît dès l'introduction la définition de deux figures égales comme étant deux figures superposables.

- la méthode « moderne » qui fait appel aux transformations du plan. Ainsi, symétrie orthogonale, rotation et translations sont introduites dès le premier Livre et cohabitent avec les objets traditionnels de la géométrie. Ceci a permis de traiter de nouveaux types de problèmes tels que la recherche des lieux de points.

2. Un chemin pour Thalès

Dans les deux premiers livres, sont traités des propriétés classiques de géométrie que nous avons trouvées dans les traités précédents. Pour ce qui nous intéresse, nous citons les cas d'égalité des triangles, les propriétés des angles alternes internes et des angles correspondants, et l'étude des parallélogrammes.

En faisant la comparaison avec les autres traités analysés, notamment celui d'Euclide, nous pouvons dire que l'abandon de la méthode des aires a réduit le nombre des ingrédients utiles pour préparer le terrain à l'arrivée du théorème de Thalès.

3. Les énoncés du théorème de Thalès

Le premier énoncé du théorème de Thalès qui suit le rappel des proportions et de leurs propriétés au Livre III se sert de la notion de projection (Théorème fondamental, 113, annexes). Le cas général de cet énoncé est préparé par un cas particulier où les segments sur la droite de départ sont égaux. La démonstration de ce cas particulier est identique à celle qu'on a trouvée chez Legendre (14ème réédition), alors que la démonstration du cas général consiste à montrer que les rapports de distances sont égaux à 1/n près quel que soit n. Par rapport à la méthode classique par les aires, la démonstration d'Hadamard présente un nouveau point de vue: celui de la continuité et du passage à la limite pour montrer que les rapports de distances sont égaux s'ils sont égaux à 1/n près quel que soit n. Notons que dans la démonstration d'Hadamard, un cas particulier générique est traité et les positions de quelques points (I' et II') ne sont pas démontrées mais simplement lues sur la figure (annexes).

A l'instar de la majorité des démonstrations précédentes, celle d'Hadamard pose la difficulté du passage du cas des segments commensurables au cas des segments incommensurables. Hadamard traite d'un cas particulier (n = 5) et laisse implicites les encadrements des rapports et la propriété de la densité de **Q** dans **R**.

4. Les applications du théorème de Thalès

Les applications immédiates du théorème de Thalès traitent des propriétés des bissectrices internes et externes d'un angle ce qui a permis d'établir le théorème relatif à la recherche du lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport donné. Au chapitre suivant relatif aux similitudes des triangles, un premier théorème permet la transition entre le travail sur les lignes proportionnelles et celui sur les triangles semblables :

> « Toute parallèle à l'un des côtés d'un triangle forme avec les deux autres côtés un triangle semblable au premier »

Les cas de similitude des triangles qui suivent se substituent au théorème qui nous occupe et à l'instar des traités précédents, dorénavant ils vont être un outil puissant dans la résolution de toutes les situations de Thalès.

VI. LE THEOREME DE THALES DANS L'ALGEBRE LINEAIRE

Nous nous servons d'un manuel scolaire tunisien, celui de Troisième année secondaire de 1977 : le théorème de Thalès apparaît juste après la définition de la projection d'une droite sur une droite parallèlement à une droite. Il est énoncé comme suit (p.161) :

THEOREME 35 (de THALES)

Soit A, B, C trois points alignés avec $A \neq B$. Soit p une projection sur une droite parallèlement à une droite. En notant A' le point p(A), B' le point p(B) et C' le point p(C), on a : $\overrightarrow{AC} = \alpha\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{A'C'} = \alpha\overrightarrow{A'B'}$ (avec $\alpha \in IR$)

Une démonstration du théorème de Thalès est proposée par la suite : nous considérons p : la projection sur D_1 parallèlement à Δ.

Deux cas sont distingués suivant que (AB) est parallèle à Δ ou non. Dans le premier cas, le résultat est évident. Dans le deuxième cas, voici la démonstration :

On a vu que la projection de (AB) sur D_1 parallèlement à Δ est bijective donc $A' \neq B'$ et $(A'B') = D_1$. C' étant sur D_1, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$. En utilisant le théorème de CHASLES, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{CC'})$ avec $\overrightarrow{AC} \in$ dir (AB), $\overrightarrow{A'A} \in$ dir (Δ) et $\overrightarrow{CC'} \in$ dir (Δ) donc $(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{CC'}) \in$ dir (Δ). Cette démonstration a été faite dans un exercice obligatoire après le théorème 21.

De même $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'})$ avec $\overrightarrow{AB} \in$ dir (AB) évidemment, et $(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'}) \in$ dir (Δ). Comme $\overrightarrow{A'C'} = \lambda \overrightarrow{A'B'}$ on a : $\overrightarrow{A'C'} = \lambda[\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'})]$ donc $\overrightarrow{A'C'} = \underbrace{\lambda \overrightarrow{AB}}_{\in dir(AB)} + \underbrace{\lambda(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'})}_{\in dir\Delta}$. On a obtenu ci-dessus $\overrightarrow{A'C'} = \underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\in dir(AB)} + \underbrace{(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{CC'})}_{\in dir(\Delta)}$.

Puisque dir $(AB) \neq$ dir (Δ), le théorème 32 affirme en particulier $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$

On a par hypothèse $\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB}$. Le théorème 28 affirme : $\lambda = \alpha$

Conclusion : $\overrightarrow{A'C'} = \alpha \overrightarrow{A'B'}$ c.q.f.d

VII. CONCLUSION

A partir de notre analyse, nous pouvons dire que durant des siècles, le théorème de Thalès garde toujours une grande place dans l'organisation mathématique de la géométrie. Dans la majorité des ouvrages que nous avons consultés, le problème de l'incommensurabilité a été rencontré. Les démonstrations du théorème de Thalès sont souvent faites dans le cas des segments commensurables, et le passage aux segments incommensurables est admis. La problématique de l'incommensurabilité fait obstacle à l'enseignement d'une démonstration du théorème de Thalès, puisque les techniques utilisées dans les démonstrations citées ne sont pas au niveau d'un élève de fin de collège ou du début du lycée, et puisque au moment où cet enseignement devient possible (en terminale), d'autres outils se substituent au théorème de Thalès, les similitudes notamment. Nous pensons avec Abdeljaouad (2002) que l'un des intérêts de la démonstration du théorème de Thalès pour un enseignant est de concevoir la droite réelle sans « trous ». Ce travail a également tenté de montrer que le théorème de Thalès a résisté aux changements d'axiomatiques dans l'histoire, et a profité des différentes formes avec lesquelles il peut être formulé, pour évoluer dans des environnements mathématiques différents. Il serait utile de traiter ce sujet lors d'une formation d'enseignants.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2002) *Une démonstration du théorème de Thalès*. Miftah al-Hissab, n°100, Tunis.

Arnauld A. (1667) *Nouveaux éléments de géométrie*. Paris : Charles Savreux.

Arsac G. (1987) L'origine de la démonstration : essai épistémologique didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 8(3). Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau G. (1995) Promenade avec Thalès, de la Maternelle à l'Université, in "Autour de Thalès". *Bulletin Inter-IREM*, Commission premier cycle, p. 87-12.

Euclide (1993) *Les œuvres d'Euclide*. Traduites littéralement par F. Peyrard. Nouveau tirage argumenté d'une importante introduction par M. Jean Itard. Paris : Librairie Scientifique et Technologique Albert Blanchard.

Hadamard J. (1928) *Leçons de géométrie élémentaire*. Paris : 10è édition.
Legendre A.D. (1794) *Eléments de géométrie*. Paris : Firmin Didot.
Mrabet S. (2004) *Quelles conceptions ont les enseignants tunisiens du collège et du lycée sur le théorème de Thalès ?* Mémoire de DEA. Université de Tunis.
Mrabet S. (2010). *Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien: conceptions et pratiques des élèves, pratiques des enseignants.* Thèse de doctorat, Université Virtuelle de Tunis, Université Paris Diderot (Paris 7).
Perrin D (2006) *Autour de Thalès*. Conférence à l'université Paris 7.

MANUEL SCOLAIRE

Manuel Tunisien (1977), Mathématique 3, 3e de l'enseignement secondaire, Centre National Pédagogique.

ANNEXES

Le traité d'Arnauld

Livre V

32. [….] Ce qui doit faire regretter le scrupule qu'on pourrait avoir de recevoir cette proposition comme claire d'elle même c'est qu'on ne peut faire autrement sans troubler l'ordre naturel des choses et employer les triangles pour employer les propriétés des lignes, c'est-à-dire se servir du plus composé pour expliquer le plus simple, ce qui est tout à fait contraire à al véritable méthode [….].

Livre VIII

57. La même ligne coupant obliquement plusieurs parallèles, les coupe toutes avec la même obliquité. C'est-à-dire qu'elle fait sur toutes, les angles égaux.

Lemme 9

Lorsqu'une ligne est coupée par plusieurs lignes toutes parallèles, toutes les portions de cette ligne coupée sont également inclinées entre les parallèles qui les renferment.

13. Premier théorème

Si deux lignes inégalement inclinées dans le même espace le sont autant chacune que chacune de deux autres le sont dans un autre espace, les également inclinées sont en même raison

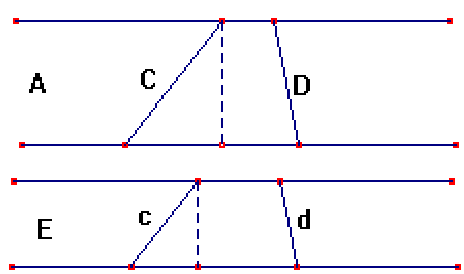


Figure 5- *Le premier théorème chez Arnauld*

Second théorème

18. Lorsque deux angles sont semblables (c'est-à-dire selon le sixième lemme, lorsqu'étant égaux, les angles sur la bases de l'un sont égaux aux angles sur la base de l'autre chacun à chacun), ces côtés sont proportionnels aux côtés, et la base à la base et la hauteur à la hauteur.

20. Si un angle a deux bases parallèles, il s'y trouve diverses sortes de proportions de grand usage

Démonstration

En traçant du sommet une parallèle aux deux bases, il se trouve trois espaces parallèles. D'après le 9ème lemme, T étant incliné dans W que P dans A et q dans E ; et de même, t étant autant incliné dans w que p dans A et g dans E, d'après le 1er théorème, on a : T.P :: t.p ; Tq :: t.g ; P.q :: p.g et alternado T.t :: P.p ; T.t :: q.g ; P.p ::q.g. Par Le 2ème théorème, chaque toute et sa première partie sont en même raison que la dernière base et la première T.P :: B.b ; t.p ::B.b et alternado T.B ::P.b ; t.B ::p.b Ainsi T.P ::P.p::B.b.

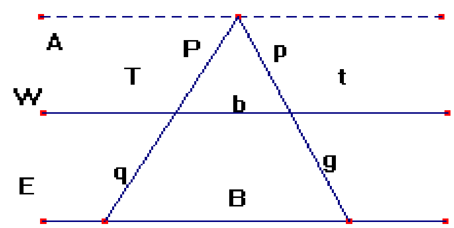


Figure 6- *Second théorème chez Arnauld*

Hadamard

113 Théorème fondamental

…..

2ème cas : les points A, B, C, D sont quelconques.Nous allons démontrer que les valeurs à 1/n près des deux rapports $\frac{CD}{AB}$ et $\frac{C'D'}{A'B'}$ sont égales, quel que soit n.

Soit, par exemple, $n=5$: divisons AB en cinq parties égales aux points 1, 2, 3, 4 et supposons que la cinquième partie de AB soit contenue deux fois mais non trois dans CD : soient I, II, III les extrémités de trois segments égaux au cinquième de AB et portés successivement sur la droite CB à partir du point C ; de sorte que les points I et II sont entre C et D (le dernier pouvant toutefois coïncider avec C), le point III au-delà du point D. par tous ces points 1, 2, 3, 4, I, II, III, menons des parallèles à la direction commune des droites AA', BB', CC', DD', jusqu'à rencontre en 1', 2', 3', 4', I', II', III', avec la droite A'B'C'D'. Nous avons ainsi divisé A'B' en cinq parties égales et porté trois fois l'une de ces parties à partir du point C' dans la direction C'D' (1°). Les points I', II' étant dans l'intervalle C'D' et le point III' au-delà du point D' (d'après la remarque faite tout d'abord) et théorème est démontré.

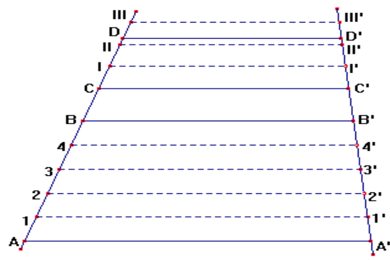


***Figure 7**- Enoncé de*

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LES INTERACTIONS ENTRE LES MATHÉMATIQUES ET LES AUTRES DISCIPLINES DANS LES FORMATIONS GÉNÉRALE ET PROFESSIONNELLE

Compte-rendu du Groupe de Travail n°5

Corine CASTELA[*]– Abdellah EL IDRISSI[**]– Fernand MALONGA MOUNGABIO[***]

C'est la cinquième fois qu'EMF dédie un Groupe de Travail au thème évoqué de manière générique dans l'intitulé figurant dans le titre de ce compte rendu. Les raisons évoquées par les responsables de ce groupe en 2012 pour justifier cette longévité n'ont pas pris une ride. Les sociétés contemporaines accordent de plus en plus d'importance à des apprentissages moins académiques, plus orientés vers le développement de compétences plutôt générales, présentées comme plus adaptées à l'intégration des nouvelles générations dans le monde social et économique tel qu'il est devenu. Elles orientent leurs politiques éducatives vers des réalisations interdisciplinaires, souvent appuyées sur une pédagogie de projets dans lesquels les élèves peuvent être conduits à solliciter en les adaptant à des contextes non scolaires des savoirs relevant de plusieurs disciplines (sans toutefois que ce soit forcément le principal enjeu visé). Ainsi, relativement tardivement par rapport à d'autres pays francophones, la France a donné récemment une ampleur plus importante à cette approche : la réforme de 2015 introduit dans la structure de l'enseignement du collège des Enseignements Pratiques Interdisciplinaires. Ces injonctions institutionnelles mettent donc le monde éducatif et celui des recherches en didactique des mathématiques au défi de concevoir, expérimenter et évaluer des réalisations interdisciplinaires dans le cadre de l'enseignement général. Il en est de même pour l'enseignement technique, au sein duquel, du fait de la proximité avec les finalités professionnelles, la nécessité d'interactions entre disciplines générales, disciplines professionnelles et pratiques d'atelier semble une évidence depuis longtemps. Mais la chose est moins simple que ne semblent le croire les décideurs. La complexité des difficultés soulevées par les interactions, aussi bien entre les disciplines scolaires qu'entre disciplines scolaires et pratiques professionnelles, est trop sous-estimée, faute d'avoir été suffisamment analysée. Autrement dit, il était légitime de maintenir en vie le GT5 à EMF 2015.

[*] LDAR Université Paris Diderot-Université de Rouen- France –corine.castela@univ-rouen.fr
[**] Centre de Formation des Inspecteurs, Rabat- Maroc-abdellah_elidrissi@yahoo.fr
[***] Université Marien Ngouabi – Congo (Brazzaville)- malongaf@gmail.com

Castela C., El Idrissi A., Malonga Moungabio F. (2015) Les interactions entre les mathématiques et les autres disciplines dans les formations générale et professionnelle – *Compte-rendu du groupe de travail n°5*. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 424-430.

13 personnes ont suivi plus ou moins complètement les travaux du groupe et ont entendu 9 communications. 5 nationalités étaient représentées : Congo Brazzaville, Maroc, Mexique, Tunisie et France.

I. AXE 1 : LES MATHEMATIQUES DANS LES PRATIQUES PROFESSIONNELLES, Y COMPRIS ARTISANALES, ET LES FORMATIONS QUI Y PREPARENT

1. Reprise d'une direction définie à l'issue des travaux du GT5 à EMF 2012

En 2012, deux axes de travail avaient été proposés : la modélisation comme lieu privilégié d'interactions entre les mathématiques et d'autres disciplines ; la problématique des interactions dans le cas particulier de la formation professionnelle. Sur les dix communications présentées en 2012, sept avaient concerné le deuxième axe. A l'issue du travail commun, les participants avaient insisté sur « la nécessité de maintenir au sein des colloques EMF un espace de partage des études didactiques sur les formations professionnelles mais aussi, et surtout, d'initier des recherches sur le terrain même des pratiques professionnelles visées par ces formations, où peuvent intervenir des mathématiques plus ou moins imbriquées à des savoirs non mathématiques. » (Ba & al. 2012) En effet, s'étaient manifestées dans plusieurs communications des difficultés de collaboration entre enseignants de mathématiques d'une part, enseignants des disciplines techniques et formateurs professionnels d'autre part dues à une méconnaissance chez les premiers des besoins spécifiques des seconds. Ces besoins se traduisaient par des formes particulières des savoirs et praxéologies mathématiques dans les contextes professionnels, parfois rejetées par les mathématiciens. En 2015, il a été considéré qu'aucun groupe n'ayant été créé sur le thème de l'enseignement technique et professionnel, le GT5 devait donner suite au souhait exprimé en 2012 en formulant donc deux questions :

> Sous quelles formes les mathématiques académiques vivent-elles dans les professions ? Comment la formation professionnelle s'accommode-t-elle des effets transpositifs inévitables de ces circulations interculturelles ?

2. Vers une ethnomathématique de langue française

Si l'on suit l'histoire du GT5, on constate que ce sont des phénomènes mis en évidence dans l'enseignement professionnel qui fournissent la raison d'être de la première de ces questions. Mais celle-ci ouvre une perspective à part entière, non immédiatement dirigée vers la formation. Cette perspective est plus épistémologique et anthropologique que didactique, intéressée par la productivité praxéologique des institutions professionnelles et ses effets sur les praxéologies mathématiques académiques. L'appel à communication de 2015 élargit encore ce champ de possibles recherches bien accueillies dans le GT5 : une continuité naturelle y est en effet postulée entre l'étude des mathématiques dans les professions donnant lieu à des enseignements professionnels et un domaine de recherche évoqué en 2009 à Dakar par la conférence plénière de P. Gerdes, à savoir l'ethnomathématique, domaine largement ignoré par l'espace francophone, y compris en Afrique. Le GT5 2015 s'est donc voulu groupe d'accueil de ce qu'on pourrait appeler une anthropologie du mathématique où les mathématiques savantes du XXIe siècle et leur histoire ne sont pas considérées comme permettant de tout dire des créations mathématiques imbriquées dans les pratiques humaines. Il s'agit de s'intéresser par exemple à des pratiques artisanales (tissage, construction, etc.), ayant une teneur mathématique sans pourtant utiliser les productions de la science mathématique, ce qui soulève les questions suivantes :

Qu'est-ce que le mathématique dans ce cas ? Où le trouve-t-on ? Quels sont les savoirs mathématiques ? Par qui sont-ils produits ? Comment sont-ils transmis ?

3. Quatre communications, des terrains et questionnements différents

Le texte de Diana Solares concerne les connaissances relatives aux écritures numériques et au calcul de différents acteurs du travail agricole dans le Nord du Mexique. Ce travail a été réalisé dans le but de concevoir un enseignement mathématique pour les enfants des ouvriers, travaillant dans les champs avec leurs parents mais cette partie de la recherche n'est pas évoquée dans la communication. La question d'une formation professionnelle des adultes n'est pas posée. Il s'agit donc exclusivement de traiter la toute première question évoquée à la fin de la section 1. ; l'on voit très clairement la nature anthropologique du travail à réaliser pour comprendre les différentes formes de l'activité sur le terrain et recueillir le faire et le dire des acteurs.

L'étude de Nathalie Auxire est centrée sur l'existant ordinaire : dans quelle mesure trois disciplines de la filière Productique-Usinage de l'enseignement professionnel français interagissent-elles autour de la notion de vecteurs ? Sont impliquées la bi-discipline Mathématiques-Sciences Physiques et chimiques, la Construction Mécanique (discipline intermédiaire) et la Productique-Usinage, dispensée en atelier et basée sur l'utilisation de machines-outils à dimension numérique. C'est un fonctionnement en parallèle et plutôt désajusté qui apparaît. Le programme de mathématiques est en retard sur les besoins des matières professionnelles. Par ailleurs, les interviews des enseignants montrent un réel cloisonnement entre Mécanique et Productique-Usinage, avec des usages différents d'une matière à l'autre. En particulier, le rôle très important de la sémiotique des machines-outils en atelier est ignoré à l'extérieur.

Le travail présenté par Avenilde Romo Vázquez et Alberto Camacho a une visée différente des deux précédentes soumissions puisqu'il s'agit de concevoir un enseignement de la notion de gradient d'une fonction pour des élèves ingénieurs. Les auteurs partent d'un questionnement et de pratiques relevant de la Topographie, relativement à la détermination des lignes de plus grande pente, sur une carte portant des lignes de niveau. Une telle réalisation suppose un travail de modélisation du problème topographique en jeu, travail qui aboutit, moyennant un traitement des accroissements infiniment petits, usuel en physique, à l'introduction de la fonction gradient comme outil. Cette situation pourrait donc effectivement constituer une base pour un enseignement de mathématiques. Toutefois, on peut entrevoir dans le texte que le mode de raisonnement qui est susceptible de conduire à l'introduction du gradient, peut être considéré comme probant dans un contexte non mathématique et entrer en conflit avec la théorisation formelle que peuvent vouloir enseigner les mathématiciens. On rejoint alors un débat, très présent en 2012 mais peu abordé en 2015, concernant notamment le niveau de rigueur et de formalisme des mathématiques pour les ingénieurs.

La quatrième soumission présentée par Thomas Morel concerne l'histoire de la formation professionnelle des personnels de l'Administration des mines dans les Académies de Freiberg (Saxe) et Schemnitz (en Basse-Hongrie), pendant la deuxième moitié du XVIIIe siècle. On y voit comment, dans ces Académies nouvellement créées, se met en place un enseignement des mathématiques (en particulier de ce qui est appelé géométrie souterraine) en rupture avec les pratiques universitaires en usage à l'époque en Allemagne. La résolution de problèmes professionnels y occupe une place centrale. En même temps, par la volonté des Administrations des mines, tutelles des Académies, la responsabilité de cet enseignement passe des maîtres de terrain à des professeurs de mathématiques. Cette contribution relève d'une épistémologie anthropologique. Elle met en évidence un processus de légitimation, par les institutions professionnelles supérieures, d'une organisation praxéologique (savoirs et pratiques) développée par des mathématiciens et ceci via des choix organisationnels dans une institution de formation. Cela confirme l'importance du didactique dans la production sociale des savoirs et encourage à lier comme le fait T. Morel recherches en épistémologie, histoire et didactique.

II. AXE 2 : L'INSERTION DE LA DISCIPLINE MATHÉMATIQUE DANS L'INTERDISCIPLINARITÉ AUX DIFFÉRENTS NIVEAUX DE LA SCOLARITÉ ET DANS LA FORMATION DES ENSEIGNANTS.

Le champ de la recherche sur la formation à la modélisation n'apparaît pas dans l'appel à communication du GT5 en 2015. Il était justifié en 2012 par le fait que la modélisation est un terrain privilégié pour des interactions des mathématiques avec d'autres disciplines. Mais il faut remarquer que d'une part certaines recherches sur ce thème sont strictement internes aux mathématiques (voir par exemple le Working group *Applications* and *Modelling* de CERME), et que d'autre part, c'est toujours en tant qu'outil pour d'autres disciplines que les mathématiques sont impliquées dans une situation de modélisation interdisciplinaire. Or, même si c'est à ce titre que la discipline mathématique contribue largement aux projets interdisciplinaires, ce n'est pas le seul rôle qui peut lui être attribué. Le deuxième axe proposé par le GT5 s'est donc voulu ouvert aux différentes modalités d'une interdisciplinarité visant à développer chez les élèves une compréhension multidimensionnelle des phénomènes en associant les mathématiques aux autres disciplines scolaires, qu'elles relèvent des sciences, des langues, des arts ou des humanités. Les questions proposées étaient les suivantes :

Quelles sont ces pratiques et quelles sont leurs caractéristiques spécifiques, en particulier au niveau du rôle des enseignants ?
Quels sont les apports effectifs de ces pratiques pour l'apprentissage des mathématiques et pour la formation des enseignants ?
A quelles difficultés se heurtent leur intégration dans les curricula ?
Comment « les vertus interdisciplinaires» de ces pratiques sont-elles légitimées et évaluées ?

Cinq contributions se sont inscrites dans cet axe, avec une centration quasi exclusive sur la présentation de réalisations et sur les difficultés rencontrées. Les questions portant sur le rôle de l'enseignant et l'évaluation des acquis mathématiques et interdisciplinaires ne sont pas abordées dans les présentations. Aucun exemple ne concerne la formation des maîtres.

1. *Les mathématiques comme pourvoyeuse d'outils*

Fernand Malongo présente un travail préalable à une possible interaction entre les mathématiques et la chimie. Cette interaction est voulue institutionnellement au Congo Brazzaville et se traduit par l'introduction dans le programme de mathématiques du logarithme décimal comme nombre en 4^{e} et 3^{e} dans la perspective d'être utilisé en chimie pour la notion de pH. L'étude des programmes des deux disciplines fait apparaître deux phénomènes concernant la progression didactique : d'une part, un désajustement important des progressions puisque le pH n'est défini formellement qu'en seconde en Chimie et n'est fortement utilisé qu'en Terminale C ; d'autre part, une discontinuité de trois ans en mathématiques entre l'introduction au collège du logarithme nombre et la reprise en Terminale du logarithme fonction. Comme le confirme l'analyse des manuels dans les deux disciplines, ces phénomènes qui relèvent de la responsabilité des concepteurs de programmes favorisent un cloisonnement entre disciplines mais aussi entre niveaux scolaires à l'intérieur des mathématiques.

Eric Laguerre rend compte d'une expérimentation réalisée en 3^{e} dans le double but de que les élèves comprennent au moins partiellement le phénomène d'éclipse totale du soleil et que soit introduite la notion de tangente. La situation fait intervenir une double modélisation : modélisation du phénomène astronomique par une situation physique de visée dont il est possible de faire vivre aux élèves une expérience directe, puis modélisation de celle-ci par un modèle géométrique, qui est l'occasion d'une première rencontre avec le concept de tangente comme outil. Il s'agit donc d'un exemple de réalisation qui pour les mathématiques est en cohérence avec le programme de la classe pour lequel il fournit un point d'appui. Mais la présentation détaillée de la situation fait bien apparaître sa complexité et son coût temporel : plusieurs séances sont nécessaires pour atteindre pleinement les objectifs visés au bénéfice des deux disciplines.

Les deux travaux précédents ne mentionnent pas une collaboration avec un chercheur ou un enseignant de la discipline non mathématique impliquée. C'est encore le cas de la soumission de Hicham Maadan, enseignant de mathématiques qui a présenté au groupe une de ses réalisations en classe. La séquence s'appuie sur un énoncé d'inspiration écologique proposé par un manuel de mathématiques. Dans le cadre d'un travail de groupes, les élèves sont conduits à modéliser la situation par des suites récurrentes et à étudier leur évolution. La séquence est riche du point de vue des mathématiques. Par contre, l'intervention de l'écologie est assez ponctuelle : la validité du modèle relativement au phénomène de déboisement étudié n'est jamais questionnée.

2. Les mathématiques comme une contribution à un projet multi-dimensionnel

La réalisation présentée par Marie-Hélène Lécureux-Têtu est un dispositif construit autour de la recherche sur les nanotechnologies et les questionnements éthiques associés. Expérimenté en classe de 3^{e}, il met à contribution les enseignants de mathématiques, physique-chimie, technologie, français, anglais et éducation civique, juridique et sociale mais aussi des chercheurs d'un laboratoire sur les nanotechnologies. Les mathématiques sont impliquées dans les questions d'échelle et de représentations de très petites longueurs. Les quatre séances de sciences sont analysées dans la communication, elles associent à chaque fois les enseignants de deux disciplines. Un phénomène que l'on pourrait nommer « oubli des disciplines non physiquement représentées» est constaté plusieurs fois : les apports des disciplines absentes sont négligés, c'est le cas des techniques de mesurage en l'absence de l'enseignant de technologie, des techniques de calculs de quatrième proportionnelle en l'absence de l'enseignant de mathématiques. Ceci peut s'expliquer par l'effacement des disciplines derrière l'objet du projet mais aussi par les effets transpositifs qui affectent les praxéologies dans leur passage d'une discipline à l'autre, par exemple le monopole du produit en croix pour la proportionnalité en dehors des mathématiques. Chaque enseignant importe dans les séances où il est présent la culture de sa discipline, rendre cohérent ce qui est au total présenté aux élèves exige certainement un travail de préparation hors classe conséquent.

3. Les mathématiques comme objet d'étude d'une autre discipline

La contribution de Charlotte de Varent s'inscrit dans un travail de thèse dirigé par un didacticien et une historienne, visant la réalisation d'une ingénierie didactique basée sur l'utilisation de textes anciens comme point d'appui pour l'enseignement des mathématiques. Les mathématiques n'y interviennent pas en tant qu'outil de résolution d'un problème issu d'une autre discipline. Au contraire, dans le texte présenté au groupe, l'histoire des mathématiques anciennes, grâce à la variété des éclairages qu'elle apporte sur les relations entre grandeurs et nombres, est mobilisée comme outil pour questionner des réalisations didactiques autour de la notion d'aire. Autrement dit, les connaissances historiques sont utilisées comme outils de la recherche didactique, elles pourraient de même l'être pour les enseignants de mathématiques, en les aidant à porter un regard critique sur un enseignement donné. L'hypothèse de la thèse est que l'introduction d'une dimension historique avec les élèves constituerait également un point d'appui pour un meilleur apprentissage de certaines connaissances mathématiques. Ceci est une forme de relation entre deux disciplines très différente des précédentes : aucune des deux disciplines n'est un outil pour l'autre, la discipline non mathématique est un outil pour leur enseignement et ce parce qu'elle prend les mathématiques ou certaines de ces productions comme objets d'étude.

III. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Comme on vient de le voir, les travaux discutés dans le groupe étaient d'une grande variété. Néanmoins lors du bilan final, les participants ont exprimé un avis très positif en mettant en avant la richesse des échanges. On peut avancer qu'une cohérence s'est construite, par delà les différences, en s'appuyant sur un point commun : une ouverture à la diversité des mondes de savoirs, ayant débouché pour chacun sur une rencontre concrète avec, ce que suivant la Théorie Anthropologique du Didactique, nous désignerons comme une ou des institutions scientifiques ou professionnelles non mathématiques. Chaque participant avait donc déjà fait l'expérience du besoin d'explorer les épistémologies et organisations praxéologiques des différentes institutions en jeu et d'analyser les effets transpositifs de la circulation des savoirs et, plus complètement des praxéologies. La réflexion commune a donc pu se développer à ce niveau.

Trois directions de recherche différentes sont apparues dans ce groupe qui, chacune, mériterait un développement autonome : une anthropologie épistémologique visant l'étude de la vie des savoirs mathématiques, une didactique de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement technique et professionnel et enfin l'interdisciplinarité. Faut-il créer des groupes autonomes ? Les participants à la session de 2015 ont plutôt plaidé pour un statu quo. Tout peut dépendre du nombre de soumissions reçues.

Faisons l'hypothèse que la création du dispositif des EPI (Enseignements Pratiques Interdisciplinaires) en France va être l'occasion d'un développement de recherches actions et de recherches académiques sur l'interdisciplinarité. L'organisation d'un colloque Inter IREM en mai 2016 associant enseignement en collège et enseignement professionnel en est un indicateur. Les questions rappelées plus haut et soulevées dans l'appel à communication du GT5 resteraient d'actualité pour un GT centré sur ce thème. Il serait important d'avancer sur la définition des enjeux d'apprentissage visés par ces dispositifs :

> *En quoi contribuent-ils à la formation disciplinaire ? S'expriment-ils en termes de compétences indépendantes des disciplines ? Existe-t-il des savoirs à construire dans l'un et l'autre cas ? Ces savoirs sont-ils explicités, institutionnalisés ? Plus généralement, par quelle organisation didactique cherche-t-on à s'assurer de la réalisation de ces apprentissages ? Comment évalue-t-on la réalisation de ces apprentissages par les élèves ?*

A propos de toutes ces questions, on pourrait appeler à une réflexion spécifique sur la forme d'interdisciplinarité qui ne consiste pas en une interaction dissymétrique entre deux disciplines (par exemple, les mathématiques permettant de résoudre un problème posé par une autre discipline) mais en la mobilisation quasi indépendante de plusieurs disciplines pour éclairer un objet commun.

Par ailleurs, il serait bienvenu que, pour toutes les formes d'interdisciplinarité, des communications abordent la question des modalités de travail des enseignants impliqués.

REFERENCES

Ba C., Bessot A., Caron F. (2012) Compte-rendu du Groupe de Travail n°5. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle-Actes du colloque EMF 2012* (pp. 663-667).

Castela C., Elguero C. (2013) Praxéologie et institution, concepts clés pour l'anthropologie épistémologique et la socioépistémologie. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 33(2), 79-130.

Fontolliet P.-G. (2002) Interdisciplinarité et nouvelle maturité. In Perrig-Chilello P., Darbellay F. (dir.) *Qu'est-ce que l'interdisciplinarité ? Les nouveaux défis de l'enseignement* (pp. 37-43). Lausanne : Réalités sociales.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

INFLUENCE DE LA SÉMIOTIQUE D'UNE MACHINE-OUTIL À COMMANDES NUMÉRIQUES SUR L'ENSEIGNEMENT DES VECTEURS DANS LA FILIÈRE PRODUCTIQUE-USINAGE EN LYCÉE PROFESSIONNEL

Nathalie AUXIRE* – Nicole BIAGIOLI* – René LOZI*

Résumé – Dans le cadre d'une approche comparatiste de l'enseignement des vecteurs par trois disciplines de la filière productique-usinage de lycée professionnel, nous montrons, en couplant l'analyse de discours d'enseignants et l'analyse épistémologique de l'objet vecteur, comment la sémiotique d'une machine à commandes numériques implantée dans l'atelier de productique-usinage influence le discours de l'enseignant de l'une des disciplines connexes : la construction mécanique. Nous discutons la cohérence et les limites qu'une telle influence exerce sur le discours enseignant à travers les ressources sémiotiques disponibles dans la discipline, la mémoire de la classe entre les disciplines et les objectifs disciplinaires.

Mots-clefs : mathématiques, vecteur, interdidactique, discipline technologique, sémiotique

Abstract – We have compared vector teaching in three subjects at vocational secondary French school : mathematics, mechanical machining, engineering and technical design. Our method is grounded in a cross-cultural approach and combines discourse analysis with epistemological analysis. We show how the semiotics of a computer numerical control machine, set in the machining classroom, influences teachers' discourse in engineering and, to a lesser extent, in mathematics. We examine the way in which this influence strengthens the coherence of general vector teaching in this educational program about the way of writing, as well as operating and modeling with vectors, due to the semiotic tools available in the context and the specific educational goals.

Keywords: mathematics, vector, cross-cultural approach, technological subject, semiotics

I. INTRODUCTION : LES VECTEURS, UN ENJEU DANS LA FILIÈRE PRODUCTIQUE-USINAGE

1. Le contexte de la filière productique-usinage

Le lycée professionnel, au sein duquel se trouve la filière productique-usinage, recrute après le collège, des élèves de 15 ans se destinant à des études courtes : pour un domaine d'activités professionnelles donné, une formation mixte (professionnelle et générale) de trois années y est dispensée conduisant à la délivrance d'un baccalauréat professionnel et à la possibilité d'occuper un poste de technicien.

* Université de Nice Sophia Antipolis, EA 6308. Laboratoire I3DL– France – auxire@unice.fr, biagioli@unice.fr, lozi@unice.fr

Auxire N., Biagioli N., Lozi R. (2015) Influence de la sémiotique d'une machine-outil à commandes numériques sur l'enseignement des vecteurs dans la filière productique-usinage en lycée professionnel, Actes EMF2015 – GT5, pp. 431-442.

La filière productique-usinage organise sa formation à partir de la discipline technologique *construction mécanique*, de la discipline professionnelle *productique-usinage* et de disciplines générales souvent bivalentes dont la discipline *mathématiques-sciences physique et chimiques*.

La productique-usinage est un domaine d'activités industrielles dans lequel des objets techniques sont d'abord conçus en réponse à un besoin matériel puis produits à partir de barreaux d'acier par enlèvement de matière à l'aide de machines-outils automatisées et enfin contrôlés en qualité. Dans le contexte d'une entreprise, le cycle de vie d'un projet de produit technique implique différents métiers (concepteur, dessinateur, usineur, contrôleur). Théoriquement, il résulte d'une approche systématique visant à rationaliser les procédures et à optimiser les ressources (temps de travail, matière, occupation des machines-outils, transmission des informations). Les documents techniques circulant entre les différents acteurs pour réaliser le projet d'un produit technique sont conçus dans cette perspective d'économie des ressources et de minimisation des erreurs.

En tant que discipline technologique, la *construction mécanique* enseigne la technologie des systèmes mécaniques et la lecture-écriture normalisée des dessins techniques. En tant que discipline professionnelle, la *productique-usinage* a pour objectif de rendre compétents et autonomes les élèves concernant la mise en œuvre de procédures de production unitaire ou industrielle (installation et maintenance de machine, contrôle de pièce, qualité de procédure), l'interprétation et la modification de documents techniques. Contribuant fortement à la modélisation géométrique et numérique des objets tridimensionnels, les mathématiques amènent à considérer ces deux disciplines comme mathématisées.

La filière productique-usinage, peu connue, recrute souvent des élèves dont le premier choix d'orientation à l'issue du collège était autre et dont le niveau en mathématiques est faible (en numération décimale et en opérations élémentaires notamment).

Il aurait été intéressant d'élargir notre étude à l'enseignement des mathématiques par les sciences physiques, d'autant plus qu'au lycée professionnel, les enseignants de mathématiques enseignent aussi les sciences physiques et chimiques. Cependant, nous ne l'avons pas fait car nous avons souhaité aborder l'apprentissage de l'espace mathématique dans des disciplines qui organisent leur enseignement théorique en situation, c'est-à-dire dans l'espace physico-technologique des machines, ce à quoi satisfont les disciplines *construction mécanique* et *productique-usinage*.

2. *Les vecteurs dans la filière productique-usinage*

En mécanique et en productique-usinage, les vecteurs sont omniprésents pour raisonner dans l'espace : orienter une surface dans un dessin technique, programmer des positions sur une machine-outil, calculer des efforts sur un élément d'un objet technique, décrire une liaison entre deux pièces d'un objet technique…

A partir des documentations disciplinaires de la productique-usinage et de la construction mécanique, nous avons répertorié quatre fonctions des vecteurs : (1) calculer numériquement des grandeurs physiques ou géométriques dans le plan affine euclidien, (2) calculer graphiquement dans le plan affine, (3) décrire des rotations ou des translations dans l'espace euclidien, (4) classer des liaisons entre surfaces.

Dans cette contribution, nous présentons des résultats relatifs aux vecteurs selon la fonction (3) uniquement. Ils sont issus de la thèse de N.Auxire, *Interdidactique de l'enseignement des mathématiques dans la filière productique-usinage du lycée professionnel*, soutenue en Novembre 2015, au laboratoire d'I3DL de l'université de Nice- Sophia Antipolis.

Nous analysons les discours enseignants sur les vecteurs relativement à l'activité de réglage d'une machine-outil dans les disciplines *construction mécanique* et *productique-usinage*.

3. Plan de la contribution

Premièrement, nous présentons le champ de l'interdidactique par ses présupposés, ses objets et ses méthodes. Ce champ constitue le cadre théorique de notre recherche.

Deuxièmement, nous décrivons nos données : elles sont constituées d'observations d'une machine-outil à commandes numériques en atelier et des discours de deux enseignants collectés au cours d'entretiens. Nous analysons la sémiotique[158] de la machine à commandes numériques ainsi que les discours enseignants autour des vecteurs en relation avec l'activité de réglage d'une machine-outil à commandes numériques.

Un enseignant de productique-usinage (noté E-pu2) fournit deux explications, l'une concernant l'activité de réglage d'une machine-outil précédant l'installation d'un outil, l'autre portant sur le concept de vecteur dans la filière productique-usinage. Un enseignant de construction mécanique (noté E-cm) improvise pour ses élèves une interrogation orale portant sur l'addition vectorielle.

Troisièmement, nous discutons d'une part la relation entre les modalités d'enseignement d'objets mathématiques et les ressources sémiotiques disponibles et, d'autre part, la liaison des enseignements par les mathématiques dans la filière scolaire de productique-usinage.

II. METHODES DE L'APPROCHE INTERDIDACTIQUE

1. Le champ de l'interdidactique et ses présupposés

Selon Biagioli (2012, p.3),

> l'interdidactique est un domaine de recherche qui concerne l'étude des phénomènes résultant de la coexistence des disciplines d'enseignement dans le cursus scolaire et universitaire. […] le terme 'interdidactique' désigne la partie des pratiques enseignantes et apprenantes concernée par l'articulation des apprentissages notionnels, discursifs et linguistiques des disciplines étudiées, et la recherche qui les prend pour objet. Les travaux […] s'organisent autour de trois thèmes :
>
> - l'impact des disciplines scolaires et universitaires sur la construction de l'identité professionnelle des enseignants et des apprenants ;
>
> - la complexité spécifique des phénomènes qui résultent de la mise en relation des disciplines au cours des apprentissages ;
>
> - l'influence de la mondialisation des savoirs sur les systèmes scolaires et universitaires, les curriculums et les pratiques d'enseignement, les dispositifs d'intégration scolaire et linguistique.
>
> Ces thèmes répondent au besoin de situer l'évolution des disciplines.

Dans cette contribution, notre approche interdidactique se focalise sur les discours enseignants relatifs à un même objet mathématique (le vecteur pour caractériser un déplacement) enseigné par deux disciplines de lycée professionnel. Les discours enseignants révèlent des variations interindividuelles de pratiques couplées à des variations culturelles induites par les spécificités disciplinaires et contextuelles.

---

[158] La sémiotique étudie les relations entre les signes (symbole, icône, indice), leurs référents (ce que les signes désignent) et les utilisateurs de ces signes : comment les signes sont-ils organisés pour former un message qui a l'effet voulu dans un système d'interprétation ?
Selon Peirce (1839-1914), un signe est un symbole s'il nécessite une convention sociale d'interprétation, une icône si l'interprétation s'appuie sur des ressemblances apparentes avec le référent, un indice si l'interprétation se fait grâce à la proximité (geste de pointer du doigt, soulignement d'un mot, …).

Notre démarche consiste d'abord à recueillir la représentation qu'un enseignant a de « la fréquentation des mathématiques qu'il organise pour [ses élèves] dans sa classe » (Robert & Rogalski 2002, p.3) ou pour lui-même et de croiser cette représentation déclarée, donc reconstruite, avec les pratiques disciplinaires. Notre analyse consiste à étudier les tensions, compatibles ou non, entre les différentes représentations recueillies.

La démarche comparatiste de l'interdidactique présuppose que les productions intellectuelles ou esthétiques, linguistiques ou scientifiques, scientifiques ou technologiques ne sont pas séparées : elles sont des éléments différents d'une même culture. L'école et les disciplines sont des constructions sociales de cette culture mais sont aussi des espaces de différenciation culturelle. Nous plaçons notre étude dans le champ de l'interdidactique pour chercher des phénomènes explicatifs des variations de l'enseignement des mathématiques à travers différentes disciplines. Ce présupposé inscrit l'interdidactique dans le champ de la Théorie Anthropologique du Didactique, les variations culturelles exprimant la dimension récursive de notre institution scolaire :

> Toute institution admet un environnement qui est un univers culturel ; tout univers culturel est une institution ; toute institution peut fonctionner comme univers culturel pour d'autres institutions (dont elle constitue alors l'environnement culturel). (Chevallard 1988, p. 97)

2. *Des objets de l'interdidactique*

Les acteurs d'une discipline recourent à une palette d'outils sémiotiques, parmi lesquels la langue naturelle et la sémiotique spécifiquement disciplinaire (jargon, notations, situations de référence, signes vestimentaires, gestes...). Or l'usage sémiotique est situé : il dépend des contenus disciplinaires prescrits mais aussi du contexte de recrutement des élèves, des moyens de production sémiotique, des valeurs accordées à l'oral et à l'écrit, des objectifs éducatifs de la discipline et enfin de la relation didactique de l'enseignant et de ses élèves entre eux et vis-à-vis des autres disciplines.

La notion de langage disciplinaire (Auxire, Biagioli & Lozi. 2014 ; Auxire 2014) exprime ce tissu complexe entre les outils sémiotiques, les acteurs et le genre dominant de communication. Dans cette perspective, la langue naturelle et les moyens de production sémiotiques (Barrier, Chesnais & Hache 2014 ; Radford 2006), témoignant de la dualité oral-écrit, apparaissent comme objets d'étude privilégiés de l'interdidactique pour leurs fonctions d'articulation entre :

- la tâche prescrite et l'activité,
- les différentes significations d'un concept d'une discipline à l'autre,
- les conceptions véhiculées par la langue naturelle et les conceptions scientifiques visées par les enseignements disciplinaires.

3. *Méthodes : couplage de l'analyse du discours et de l'analyse épistémologique*

L'interdidactique envisage les processus d'enseignement-apprentissage comme un espace-temps où coexistent différentes variétés culturelles (celle des acteurs, celle des disciplines) observables à travers les langages disciplinaires. Notre méthode d'analyse des productions langagières combine l'analyse de discours et l'analyse épistémologique des objets enseignés.

L'analyse du discours s'applique aux textes ou aux dires oraux. Celle-ci considère le type de discours (narration, argumentation, description), les marques de l'énonciation (marques expressives de la situation et de la subjectivité de l'énonciateur en lien avec le destinataire du discours), les valeurs modales, le genre de discours (présupposé, stéréotype), la diversité sémiotique (parole, geste, dessin). L'analyse du discours apporte en plus des données informatives, des données expressives habituellement cachées car elles ne sont pas écrites (Perrenoud 1993) et indicatrices de l'identité professionnelle acquise (Jouet Le Pors 2004).

L'analyse épistémologique d'un concept enseigné donne une fonction au concept selon les situations-problèmes résolues par ce concept et place ce concept dans un réseau de concepts. Dans une discipline, les fonctions et la situation réticulaire d'un concept établissent un rapport entre savoir, savoir-faire et compétence, rapport qui s'apparente à la notion de praxéologie de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1997). Pratiquement, l'analyse épistémologique permet de décrire les changements induits par un changement de discipline et outille la discussion sur les dispositifs institutionnels de liaison des enseignements disciplinaires.

Pour notre part, nous étudions comment un enseignant de construction mécanique opère et justifie certains choix vis-à-vis de la discipline de productique-usinage dans son discours didactique sur les vecteurs dans une situation de déplacement.

III. PRESENTATION ET ANALYSE DES DONNEES

A partir des discours de deux enseignants et de l'observation du préréglage d'une machine-outil, nous étudions quelle sémiotique se développe à propos du vecteur comme objet mathématique enseigné.

1. *Synthèse par un enseignant de productique-usinage*

Le discours ci-après résume les attentes de la filière productique-usinage telles que l'enseignant de productique-usinage (E-pu2) se les représente en répondant au chercheur (Ch).

1-Ch : quels sont les savoirs sur les vecteurs nécessaires pour le baccalauréat productique-usinage ?

2-E-pu2 : comprendre la différence entre sens et direction/ c'est la position dans le repère/ comprendre les changements de repère/ on recherche ce vecteur/ mais aussi la norme qu'ils recherchent/ / un vecteur reste un modèle mathématique d'une force/ d'une tension/ d'un déplacement// si j'enlève les éléments/ il reste la chaîne vectorielle

E-pu2 envisage des situations étudiées dans d'autres disciplines (construction mécanique ou sciences physiques) mais les indicateurs vectoriels qu'il cite font référence aux vecteurs d'un espace affine euclidien (repère, norme) et à leur décomposition (*chaîne vectorielle*) rendue possible par le choix d'un repère. La chaîne vectorielle évoquée ici est le modèle géométrique représentant les positions relatives des différents organes de la machine, assimilés à des points (origine-machine, origine-porte-pièce, origine-programme, origine-porte-outil, point générateur). Dans une base orthonormée directe, les vecteurs permettent de représenter des écarts orientés, d'abstraire le principe de réglage de la machine puis d'appliquer à différentes situations selon qu'on connaît les écarts entre l'une ou l'autre des origines. Lorsqu'on dessine les vecteurs, on obtient, selon chaque direction, des vecteurs bout à bout : d'où l'expression « *chaîne vectorielle* » que l'enseignant forme par analogie avec l'expression « chaîne géométrique » qui, en productique, désigne les positions relatives de la pièce et de l'outil par rapport à la machine.

2. *La machine à commandes numériques*

Une machine-outil à commandes numériques est un automate qui permet de régler les positions relatives du porte-outil et du porte-pièce et la vitesse d'avance ou de rotation de l'outil. Dans la discipline de productique-usinage, la fiche d'observation (figure 1) destinée aux élèves pour anticiper le réglage montre une représentation schématique d'une machine-outil et de son référentiel de mouvements.

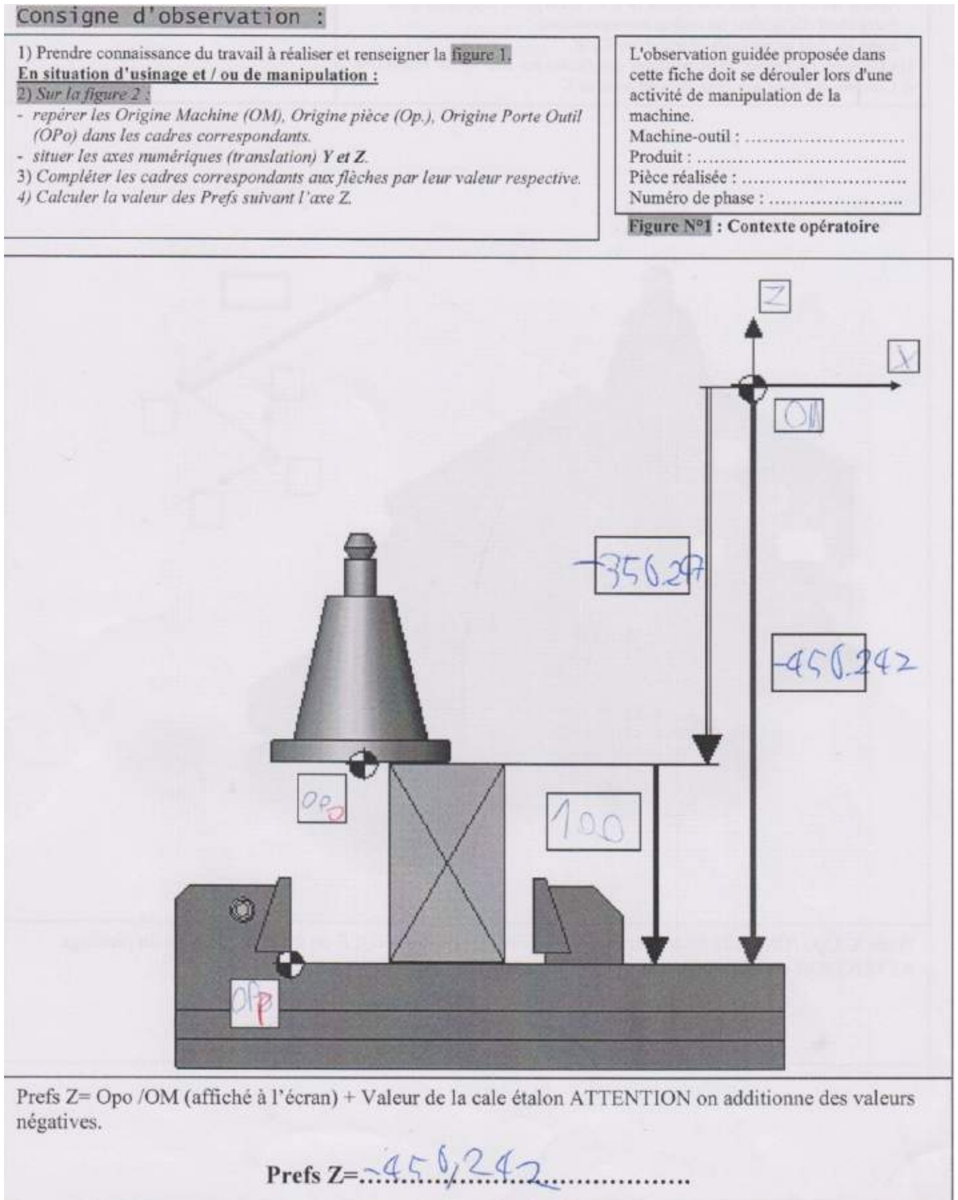


Figure 1–*Schéma du référentiel de mouvements associé à une machine-outil à commandes numériques. Document pédagogique transmis par E-pu1.*

Le modèle mathématique sous-jacent est un repère affine orthonormé direct dans lequel l'axe orienté des Z positifs est la direction modélisant la trajectoire rectiligne du porte-outil s'éloignant orthogonalement du plan contenant le porte-pièce.

Le technicien d'usinage programme la machine par une séquence d'instructions en code-machine correspondant à une phase d'usinage. Avant de lancer la machine, il doit replacer le porte-outil en position initiale. L'initialisation est commandée en entrée au clavier et contrôlée en sortie par lecture de l'écran (figure 2) ou observation directe du porte-outil.

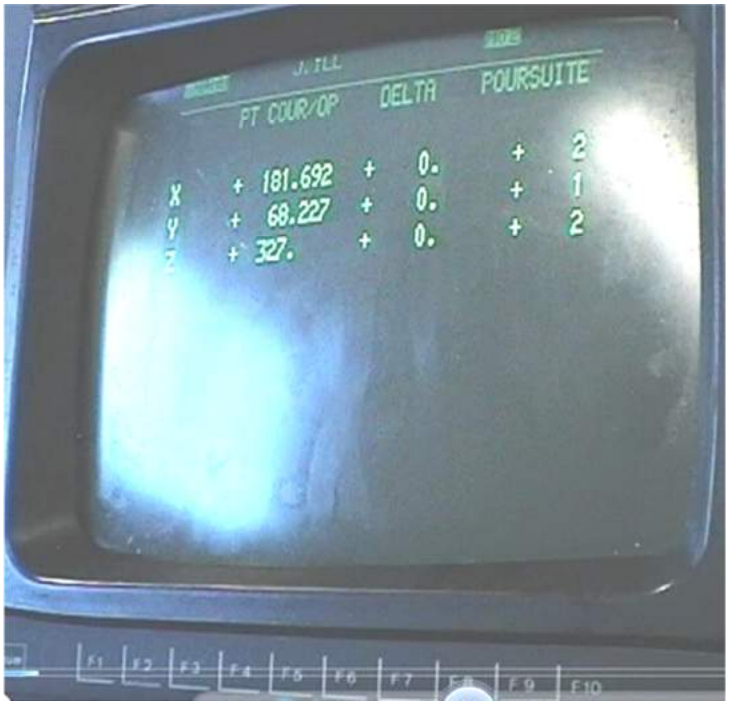


Figure 2– *Contrôle d'une machine-outil à commandes numériques.*

Expliquons la sémiotique de l'écran de la machine (figure 2).

Le porte-outil est modélisé par un point géométrique appelé *point courant* (PT COUR) dans un repère orthonormé direct défini par le constructeur et dont l'origine, appelée *origine mesure*, est notée Om dans les documents pédagogiques. Un point auxiliaire, appelé *origine programme*, noté OP, conceptuellement très proche de Om, sert de référence pour exprimer les mesures algébriques notées X, Y, Z à l'écran dans ce repère (PT COUR/ OP). En situation de réglage, elles sont interprétables comme les coordonnées du point courant ou comme composantes d'une translation. La sémiotique de la machine-outil est ergonomique :

- stable dans son organisation spatiale (type tableau, format décimal au millième),
- facilitatrice dans le lien aux référents (abréviation, acronyme, signe explicite contrairement à l'usage mathématique qui ne spécifie par le +),
- spécifique (unité du millimètre non spécifiée, DELTA pour différence, POURSUITE pour itérer manuellement une commande de déplacement selon chaque axe).

Mathématiquement, la sémiotique de la machine-outil se réfère au champ conceptuel de repère affine euclidien. Technologiquement, l'axe OZ, qu'il corresponde ou non à un axe vertical, modélise toujours la direction de déplacement du porte-outil, orienté positivement lorsque l'outil s'éloigne de la pièce. La sémiotique de la machine-outil rend donc compte d'un modèle technologique mathématisé.

3. *Explication par un enseignant de productique-usinage*

La séquence conversationnelle présentée ici se déroule dans l'atelier entre quatre interlocuteurs : l'enseignant de productique-usinage (E-pu2), deux élèves de première professionnelle (E1, E2) et le chercheur (Ch). E-pu2 et ses élèves organisent une explication conjointe à l'attention de Ch du modèle mathématique permettant de raisonner spatialement à partir de la machine-outil.

1-E-pu2: donc euh // prise d'origine machine/ c'est d'euh // faire en sorte de coïncider euh les éléments réels de la machine avec c'qu'on appelle l'origine machine // l'origine machine / c'est le départ si vou'voulez de l'origine constructeur qui permet euh / ensuite tous les préréglages euh qui vont v'nir par la suite euh/ en termes de position de pièce// donc euh on/ on va initialiser si vous voulez la machine/ c'est une une// on va déplacer euh essentiellement des axes en visualisant sur son écran et euh en //

(*à E1*) comment tu fais là ? comment t'as fait ? qu'est-ce que tu vas faire par exemple ?

2-E1: euh/ là je fais mode mode manu / j'ai mis en marche la machine / j'ai fait euh encor' mode mode manu parc'que c'était d'jà en mode manuel donc j'ai déplacé les / les axes X moins euh Y et Z

3-E-pu2: donc là / tu viens d'déplacer les axes euh/ négatifs de la machine pour témoigner justement de cette origine machine qui est que (*inaudible*) prise de butée// c't-à-dire que c'est vraiment une limite physique/ si on atteint cette limite physique/ la machine se met en défaut/ on coupe euh // le contact électrique/ on arrête la puissance (*inaudible*)une histoire de prise de risque/ on peut taper// donc le constructeur a mis également une limite / euh au contact électrique// donc là/ i's'est décalé d'sa butée parc'qu'i va revenir sur sa butée (*à E1*) mais en quel mode ?/ en quel mode ?

4-E1: mode POM

5-E-pu2-: donc c'est un mode POM/ prise d'origine machine

6-E2: c'est fait / m'sieur/ i' l'a déjà fait

7-E-pu2: (*à E2*) oh/euh/ il le refait là / (*à Ch*) donc là/ i'va y aller en positif/ maint'nant retourner vers cette origine et / c'est la machine qui va lui indiquer où s'arrêter/ c't-à-dire elle va s'arrêter tout'seule// c'qu'i' n'peut pas faire en mode manuel bien sûr / si i'fait ça donc/ i'rentrera sur une butée

8-E1: ça y est /c'est les POM

9-E-pu2: voilà / donc là/ quand euh euh l'opération est effectuée qu'est-ce qui ? comment la machine t'indique qu'les POM sont réalisées ?

10-E1: ben il arrête de clignoter

11-E-pu2: donc là il est / il est rev'nu su'c'qu'on appelle l'origine machine/ euh en réalité y 'a deux origines/ origine mesure / origine machine/ on leur dit qu'c'est un peu confondu/ mais on voit qu'elles sont à trois millimètres euh (*montrant l'affichage numérique sur l'écran*)

Les résultats que nous mettons en avant montrent comment la situation d'énonciation permet d'appréhender l'influence de la sémiotique de la machine-outil sur l'enseignement des vecteurs pour décrire un déplacement de l'espace.

La sémiotique non symbolique de la machine-outil comprend des composantes matérielles (3-*prise de butée*, 3-*limite physique*) ou communicationnelles (10-*clignoter*) qui influencent le mode de validation et la conceptualisation du déplacement vectoriel.

Si le vecteur de déplacement est anticipé par calcul, ses modes de validation peuvent être perceptif (1-*visualiser*, 2-*écran*, 3-*taper*) ou procédural (2-*je fais…j'ai mis…j'ai fait…donc j'ai déplacé…*).

La notion de sens vectoriel est verbalisée en lien avec les informations lues sur l'écran (2-*les axes* X *moins*, 3-axe négatif) ou bien avec les mouvements matériels perçus (1-2-*déplacer les axes*, 7-*retourner vers cette origine*, 7-*aller en positif*).

Sur le plan du discours, le déictique personnel révèle une mosaïque de points de vue de la part de l'enseignant. Les points de vue du technicien professionnel (1-*on va initialiser si vous voulez, 3-si on atteint cette limite physique… on coupe*), du compagnon d'apprentissage (1-*qu'est-ce que tu vas faire… ?* 3-*…tu viens d'déplacer les axes*), de l'enseignant (7-*il le refait là*, 11-*on leur dit qu'c'est un peu confondu…*) coexistent et donnent au discours didactique des ressorts de différentes natures : technologique, pragmatique, mathématique. La multiplicité des points de vue est un indicateur de professionnalité (Jouet Le Pors 2004).

Enfin, l'analyse de discours fait apparaître des modalisateurs épistémiques (3-*pour témoigner justement … c'est vraiment une limite physique*, 11-*en réalité…c'est un peu confondu mais on voit*…). Le discours de l'enseignant se positionne par rapport au système de connaissances technologiques relatives au concept de machine-outil.

L'enseignement des vecteurs dans le langage de la discipline de productique-usinage s'appuie donc sur un mode d'interprétation couplant perceptions et lecture symbolique et sur la pluralité des rôles sociaux de l'enseignant.

4. Mise en œuvre par un enseignant de construction mécanique

Dans un entretien à propos des compétences des élèves en mathématiques dans la filière productique-usinage, un enseignant (E-cm) de la discipline construction mécanique souligne la difficulté à enseigner une discipline mathématisée à des élèves en difficultés dans leurs apprentissages scolaires en mathématiques. Répondant à la question initiale du chercheur (Ch), E-cm improvise une interrogation des élèves présents dont les traces orales et écrites sont reproduites en parallèle (figure 3).

4 Ch: je voudrais que vous me parliez des connaissances mathématiques de vos élèves, me dire ce que vous avez repéré comme savoir-faire/ ceux qui sont maîtrisés/ ceux qui ne le sont pas/ ce genre de choses

5 E-cm :y'a d'gros problèmes en maths/ savoir mesurer/ savoir mesurer en millimètre / c'est la panique en dehors du centimètre// les surfaces/ les volumes/ les densités// dans la plupart des métiers il y a nécessité de métrer // aussi les vecteurs des efforts// la première chose c'est de pas parler des maths/ de s'détacher/ si on peut s'passer des maths/ c'est OK/ c'est l'résultat qui compte//(silence) y'a aussi les volumes/ les intervalles de tolérances/ le calcul de cote moyenne les conversions les échelles//mais je crois qu'vous vous rendez pas compte du niveau qu'i'ont/ tenez on va faire un test (*l'enseignant appelle cinq élèves en train de travailler en autonomie sur un logiciel, va au tableau et s'adressant à eux*) j'vais vous poser dix questions / vous répondez

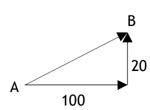
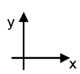
Ce que l'enseignant écrit au tableau	Ce que l'enseignant dit oralement
$A\left\|\begin{matrix}+0\\+12\\+26\end{matrix}\right.$   $B\left\|\begin{matrix}?\\?\\?\end{matrix}\right.$	j'suis sur une commande numérique/ j'fais un déplac'ment on est là/ vu de dessus (l'enseignant pointe le repère qu'il a dessiné avec le bâton de craie)

Figure 3*–Les discours d'un enseignant de construction mécanique.*

E-cm a fait s'appuie sur la situation de réglage d'une machine-outil (*j'suis sur une commande numérique/ j'fais un déplac'ment*) issue de la discipline connexe de productique-usinage pour dévoluer aux élèves la situation de calcul. Son évocation combine la sémiotique du dessin technique (repère orthonormé du plan (oxy)), du calcul graphique (dessin du triangle) et celle de la machine-outil (signes explicités composante par composante, matrice colonne sans parenthèse).

L'absence de réponses correctes parmi celles des élèves (figure 4) confirment une difficulté soit à utiliser le formalisme pour déterminer les composantes du vecteur de translation, soit à opérer entre coordonnées homologues, soit à interpréter les dessins (la vue de haut et la somme par le bout-à-bout).

Rappel de la question posée	Réponse attendue	Réponses des élèves
Calcul des coordonnées du point image de $A\begin{vmatrix}+0\\+12\\+26\end{vmatrix}$ par le vecteur de translation $\overrightarrow{v}\begin{vmatrix}100\\20\\0\end{vmatrix}$.	$B\begin{vmatrix}+100\\+32\\+26\end{vmatrix}$	$B\begin{vmatrix}0\\100\\20\end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix}100\\0\\46\end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix}20\\112\\26\end{vmatrix}$ $B\begin{vmatrix}0\\32\\126\end{vmatrix}$ Un élève ne répond pas.

Figure 4*–Les réponses des élèves.*

Malgré l'évocation d'une activité emblématique de la productique-usinage (le réglage d'une machine-outil), le milieu observé à l'occasion de cet entretien est peu comparable : il ne contient ni la machine-outil elle-même, ni son écran de contrôle. En productique-usinage, la signification donnée au vecteur de translation est ancrée dans la manipulation de la machine-outil avec, comme nous l'avons vu, des modes de validation combinés (perception, lecture numérique). Le langage de la discipline construction mécanique, ne disposant pas des mêmes ressources sémiotiques, rend nécessaire des outils sémiotiques spécifiques (la vue de haut, les figures auxiliaires). Les réponses incorrectes des élèves font apparaître des difficultés d'ordre mathématique sur la notation des composantes vectorielles en matrice colonne (ordre, correspondance, lien avec la projection dans le plan).

IV. DISCUSSION ET CONCLUSION

Notre discussion porte sur la manière dont les ressources sémiotiques fournies par la machine à commandes numériques influencent les discours disciplinaires d'enseignement de certains objets mathématiques. Afin de situer ces objets par rapport aux objets mathématiques déclarés dans la filière productique-usinage, nous avons interrogé le programme de mathématiques de la discipline *mathématiques-sciences physiques et chimiques (*BOEN[159] spécial n°2 du 19/02/2009. http://www.education.gouv.fr/pid20873/special-n-2-du-19-fevrier-2009.html).

En seconde, l'espace est travaillé « à partir de quelques solides connus, [dont sont extraites] des figures planes connues » permettant « de réactiver des propriétés de géométrie plane » du collège (Ibid. p.9). En première, lors de son introduction, le vecteur est décomposé dans un repère orthonormé du plan. En terminale, « le passage du plan à l'espace se fait de façon intuitive » (Ibid. p.22) et le vecteur se décompose alors dans un repère orthonormé de l'espace. Aucune translation, en tant que transformation du plan ou de l'espace, n'est citée dans le programme de mathématiques. Aucun système de notation des coordonnées vectorielles n'est préconisé pour lier les enseignements généraux et spécialisés. Lorsque les élèves entrent en seconde professionnelle, il leur appartient de coordonner l'enseignement de la discipline générale en mathématiques restreint au plan à ceux des disciplines spécialisées (*productique-usinage* et *construction mécanique*) de l'espace tridimensionnel. Dans le cadre de dispositifs de liaison des enseignements, la partie *mathématiques* de la discipline générale est éventuellement sollicitée pour consolider l'addition vectorielle graphique (dans le cas de bilan de forces) ou l'addition de nombres négatifs (figure 1).

Au premier abord, la sémiotique de la machine-outil à commandes numériques constitue une ressource qui rend possible l'enseignement informel des translations de l'espace. En effet,

[159] BOEN : Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale

dans la discipline *productique-usinage*, le modèle vectoriel est mobilisé en présence de la machine-outil et sa syntaxe est stable et non assujettie aux choix de l'enseignant. Les formes sémiotiques utilisées prennent sens au sein de la machine-outil et peuvent ne pas poser de difficultés d'interprétation aux élèves. En contexte professionnel, Rogalski et Vidal-Gomel (2007, p. 73) indiquent qu'une interprétation pertinente des formes sémiotiques de façon spontanée reste possible tant que la syntaxe de ces formes n'est pas perturbée ou que la tâche associée n'est pas modifiée. Les difficultés des élèves à calculer les coordonnées du point translaté (figure 4) montrent que le transfert d'une discipline à l'autre ne va pas de soi car ou bien les ressources sémiotiques ne sont pas conservées, ou bien leurs fonctions changent.

En productique-usinage, le contrôle du réglage de la machine-outil prévaut : la sémiotique est orientée vers la facilitation de la prise d'informations alpha-numériques et perceptives. Ainsi, on retrouve, un des résultats des travaux de Castela et Romo Vázquez (2011) : à travers les situations et le matériel (instrument, matière, logiciel), les disciplines technologiques convoquent les objets mathématiques dont la théorie reste enfouie.

En construction mécanique, la sémiotique est orientée vers l'analyse de données techniques et leur communication de manière anticipée à l'action. L'évocation d'une situation de référence de productique-usinage ne suffit pas à régler la différence d'activité mathématique.

La machine-outil à commandes numériques a toutefois une dimension interdidactique : elle ancre l'expression de la cohérence des deux disciplines spécialisées.

La discipline générale se démarque. Certes, elle fournit des outils conceptuels (point, vecteur, base orthonormée, etc.) pour raisonner dans l'espace de la productique-usinage. Mais, elle n'est pas synchronisée aux disciplines spécialisées (les vecteurs de l'espace ne sont programmés qu'en terminale) et est, seule parmi les trois disciplines, désignée pour dispenser des compléments (sur les vecteurs) en vue d'une poursuite d'étude (BOEN n°2 du 19/02/2009, p. 24).

En conclusion, nous avons étudié un objet enseigné porteur d'une même fonction épistémologique par différentes disciplines, comparables au sein d'une même filière. L'analyse des discours enseignants fournit des arguments explicatifs sur le partage ou le non-transfert de ressources sémiotiques entre deux disciplines, c'est-à-dire sur la faisabilité de la liaison des enseignements.

REFERENCES

Auxire N., Biagioli N., Lozi R. (2014) Analyse de discours d'enseignants de différentes disciplines de lycée professionnel à propos de l'enseignement des vecteurs. *Spirale Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques* 54, 103-128.

Auxire N. (2014) Conditions d'apparition et indicateurs de la présence des langages disciplinaires. In Hache C. et Spitalas C. (Dir.) *Séminaire national 2013 des jeunes chercheurs de l'ARDM* (pp. 11-20). Paris: IREM de Paris.

Barrier T., Chesnais A., Hache Ch. (2014) Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant. *Spirale : Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques* 54, 175-193.

Biagioli N. (2012) Les rencontres des chercheurs en interdidactique. In Lozi R. et Biagioli N. (Eds.) *L'initiation à la recherche dans la formation des enseignants à l'Université. Actes des Deuxièmes rencontres des chercheurs en interdidactique* (pp. 1-7). Université de Nice-Sophia Antipolis.

Castela C., Romo Vázquez A. (2011) Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79-130.

Chevallard Y. (1988) Esquisse d'une théorie formelle du didactique. In Laborde C. (Ed.), *Actes du Premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (pp. 97-106). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(3), 17–54.

Jouet Le Pors M. (2004) *L'évolution des représentations sociales des étudiants infirmiers sur la profession infirmière au cours de la formation : un chemin vers l'autonomie et la professionnalisation pour une mise en œuvre de l' ''Agir'' infirmier*. Mémoire pour l'obtention du diplôme des hautes études en pratiques sociales. Université de Rennes 2.

Perrenoud P. (1993) Curriculum: le formel, le réel, le caché. In Houssaye J. (dir.) *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd'hui* (pp.61-76). Paris: ESF.

Radford L. (2006) Elements of a cultural theory of objectification. *Revista Latino americana de Investigación en Matemática Educativa,* Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 103-129.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La Revue canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et des technologies*, 505-528.

Rogalski J., Vidal-Gomel C. (2007) La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences. *@ctivités, revue électronique* 4(1), 49-84.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DÉCONSTRUCTION-CONSTRUCTION D'UN CONCEPT MATHÉMATIQUE

Alberto CAMACHO[*], Avenilde ROMO-VÁZQUEZ[**]

Résumé – Dans cette communication, nous nous proposons de montrer la déconstruction du concept de gradient dans un contexte non-mathématique, la topographie. Du processus de déconstruction dans ce contexte résultent de nombreuses techniques qui aident à établir une définition du gradient. La définition qui en dérive fait intervenir des éléments venant de la topographie, des mathématiques et des mathématiques académiques. L'empirisme qui apparaît dans la déconstruction conduit à utiliser comme cadre théorique le modèle praxéologique étendu de Castela et Romo-Vázquez (2011). En considérant la démonstration associée à ce concept, il est possible de concevoir des organisations didactiques dont il fait partie.

Mots-clefs : déconstruction, reconstruction, définition, topographie, gradient.

Abstract – In this paper, deconstruction of the concept of gradient is examined in a non-mathematical context, topography. Many techniques and practices that help establish a definition of gradient are a result of such a deconstruction. The definition is developed using some elements of topography as well as mathematics and academic mathematics. The empiricism revealed in the deconstruction leads to the use of the praxeological extended model of Castela and Romo-Vázquez (2011) as a theoretical framework. It is possible to conceive didactical organizations related to this concept by considering the proof associated with it.

Keywords: deconstruction, reconstruction, definition, topography, gradient.

I. INTRODUCTION

Un des objectifs de cette communication est de fournir une déconstruction du concept de gradient située en dehors de toute praxéologie mathématique, tant disciplinaire que scolaire, le contexte choisi est la topographie, vue comme Institution. La déconstruction est vue comme le processus inverse de la construction d'un concept, c'est à dire qu'on part d'un concept et on essaie de trouver tous les éléments qui en font partie. Au moins dans le travail dont il est question ici, la déconstruction des concepts mathématiques est faite à partir d'une analyse des usages, du concept en question, dans les sciences non-mathématiques. Cette analyse permet de repérer des significations associées aux utilisations ainsi que d'autres éléments intervenant dans le processus de construction du concept.

[*] Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Mexique, camachoalberto@hotmail.com
[**] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, Mexique, avenilderv@yahoo.com.mx

Camacho A., Romo-Vázquez A. (2015) Déconstruction-construction d'un concept mathématique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 443-453.

Pour développer cette recherche, nous nous situons au sein de la Théorie Anthropologique du Didactique. Dans l'objectif de réguler des phénomènes didactiques, cette théorie s'intéresse à la modélisation du savoir et des activités scolaires qui lui sont associées. Nous utilisons les notions d'institution et de praxéologie. La notion d'institution est considérée dans le sens de Chevallard (1991), c'est-à-dire « comme un groupe des personnes aux yeux desquels au moins un objet existe » -cité dans Gantois (2012, p.48)- par exemple : l'école, l'œuvre mathématique des différentes époques, les manuels, etc. Nous considérons aussi le point de vue de Castela et Romo-Vázquez (2011) :

> Les *institutions,* c'est-à-dire des organisations sociales stables, encadrent les activités humaines et simultanément les rendent possibles par les ressources que ces institutions mettent à disposition de leurs sujets. Ces ressources matérielles et intellectuelles ont été produites par des communautés, tout au long des processus d'affrontement à des situations problématiques qu'il s'agit de surmonter avec régularité et efficacité. (Op. cité, p. 85)

Dans ce cadre, les organisations mathématiques (OM) sont reconnues comme praxéologies canoniques, principalement validées par la démonstration mathématique, validation dominante et privilégiée au sein de l'institution de production de savoirs mathématiques. Les praxéologies canoniques peuvent être explicités à partir de l'unité d'analyse [T, τ, θ, Θ] (op. cité), dont T est un type de tâches à résoudre dans un environnement scolaire, τ est la technique qui permet de réaliser la tâche du type T, θ la technologie est un discours qui produit la technique (théorèmes, axiomes, définitions, etc.) et Θ est un discours théorique qui à son tour produit, explique et valide la technologie.

On part de l'hypothèse que les praxéologies canoniques (OM) de l'institution enseignement des mathématiques, sont utilisées pour décrire des pratiques mathématiques habituelles sans prendre en compte des connaissances, des techniques et des pratiques issues des sciences non-mathématiques. Ce qui fait, par exemple, que les connaissances émergentes des sciences non mathématiques comme la topographie soient réduites à un type d'ethno-mathématique.

> L'utilisation de ressources de la physique et d'autres disciplines dans l'enseignement des mathématiques, est faite pour *motiver* l'introduction des sujets et d'objets mathématiques, pour interpréter des résultats des problèmes *pratiques* et même pour en résoudre. Ce type de résolution est demandé dans les programmes d'étude, principalement dans les formations du génie. Cependant, l'introduction de concepts externes à la pratique mathématique, implique d'autres types de techniques *pratiques* intermédiaires qui associées à des techniques mathématiques issues des théorèmes et définitions, permettent de résoudre certaines tâches. (Camacho & Sánchez 2015, p. 2)

La pratique est vue comme la capacité de l'homme à transformer et adapter les connaissances mathématiques aux circonstances des problèmes abordés, comme c'est le cas de l'activité d'ingénieurs et de topographes.

Notre objectif est de produire une définition du concept de gradient, qui, comme on le sait, associe un champ vectoriel à un champ scalaire, ce qui est fondamental tant dans la recherche en physique mathématique comme dans les mathématiques académiques, particulièrement dans l'enseignement du calcul vectoriel (enseignement centré sur la partie opératoire de l'analyse vectorielle).

La praxéologie du gradient peut être ainsi vue comme une codétermination entre praxéologies canoniques et praxéologies topographiques. Pour préciser les éléments technologiques qui l'intègrent, nous utiliserons le modèle praxéologique étendu de Castela et Romo-Vazquez (2011), c'est-à-dire un modèle praxéologie non-canonique en cours de construction, qui intègre des technologies théoriques θ^{th} et des technologies pratiques θ^{p}, schématisée ci-après :

$$\left[\begin{array}{cccc} T, & \tau, & \begin{array}{c}\theta^{th} \\ \theta^{p}\end{array} & \Theta \end{array}\right] \begin{array}{l}\leftarrow P(M) \\ \leftarrow I_u\end{array}$$

Figure 1- *Modèle praxéologique étendu proposé par Castela et Romo–Vázquez (2011), dans lequel sont incluses l'unité classique d'analyse [T, τ, θ, Θ] ainsi qu'une technologie pratique* θ^p.

Dans la figure 1, I_u représente l'institution utilisatrice des mathématiques, comme c'est le cas de la topographie, productrice de technologies pratiques θ^p. $P(M)$ représente la discipline mathématique dont la communauté de chercheurs qui produit des praxéologies mathématiques fait partie. Le type de tâches T et la technique τ correspondent à ceux de l'unité classique d'analyse [T, τ, θ, Θ] (Op. cité).

Tout ce qui précède, permet de dégager certaines questions : Comment les savoirs mathématiques peuvent-ils devenir des connaissances pratiques (utilisables) ? Leur utilité permet-elle de les organiser en des organisations de niveaux plus ou moins complexes (ponctuel, local, etc.) au sein des pratiques ? Et dans le sens inverse : Est-ce qu'une connaissance ou praxéologie pratique (utilisable) peut devenir un objet ou praxéologie mathématique ? Comment les connaissances pratiques peuvent-elles aider à concevoir des organisations didactiques pour l'enseignement des mathématiques ? Pour les aborder, nous procèderons à la déconstruction de l'objet gradient en utilisant un *media* de diffusion de connaissances topographiques, le manuel de Diaz-Covarrubias (1890). Dans ce manuel est présenté le savoir-faire de la localisation de la *Ligne de Plus Grande Pente* (LPGP), sur lequel nous nous centrons.

II. LE SAVOIR ENTRE DEUX INSTITUTIONS EXTREMES : MATHÉMATIQUES ACADEMIQUES E(M) ET TOPOGRAPHIE P(T)

1. *La praxéologie dominante du concept gradient*

Dans l'enseignement du calcul vectoriel pour futurs ingénieurs mexicains, la définition du gradient est établie de la manière suivante.

On considère les dérivées d'un champ scalaire, par exemple la variation de la fonction f en fonction de la position dans l'espace. Même si la fonction f est une fonction scalaire des variables x, y, z, ses dérivées partielles respectivement aux coordonnées prennent un caractère vectoriel :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} (f,\ \textit{fonction scalaire})$$

A partir d'un accroissement de f dans chaque direction, la différentielle de f est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Considérant ensuite le vecteur position :

$$\bar{r} = xi + yj + zk,$$

on a que :

$$\overline{dr} = dxi + dyj + dzk$$

Le gradient de f est la fonction vectorielle $\overline{\nabla} f$ définie par :

$$\bar{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k,$$

et l'opérateur vectoriel, connu comme opérateur Nabla :

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k.$$

La différentielle df peut donc s'exprimer comme :

$$df = \bar{\nabla} f \cdot d\bar{r}$$

Dans cet enseignement, la définition du gradient n'est présentée que par le biais de l´opération précédemment montrée. Le vecteur gradient est déterminé en un point (x_0, y_0, z_0) pour des cas particuliers de fonctions scalaires. La praxéologie scolaire peut être décrite de la manière suivante :

T : Calculer le gradient de la fonction scalaire $f(x, y, z)$

τ : La technique institutionnellement reconnue par E(M) et contenue dans θ^{th}, est une procédure qui implique le calcul des trois dérivées partielles de la fonction :

$$\overline{\nabla} f = \frac{\vec{\partial}}{\partial x}(f(x,y,z))i + \frac{\vec{\partial}}{\partial y}(f(x,y,z))j + \frac{\vec{\partial}}{\partial z}(f(x,y,z))k$$

θ^{th} : Lors de l'enseignement du calcul vectoriel, le gradient de la fonction scalaire *f* est un vecteur présenté sous la forme :

$\bar{\nabla} f = \frac{\vec{\partial} f}{\partial x} i + \frac{\vec{\partial} f}{\partial y} j + \frac{\vec{\partial} f}{\partial z} k$ *où* $\bar{\nabla} = \frac{\vec{\partial}}{\partial x} i + \frac{\vec{\partial}}{\partial y} j + \frac{\vec{\partial}}{\partial z} k$ est l'opérateur Nabla appliqué à f.

Θ : Elle n'est pas envisagée.

Une fois que la définition est établie, il est nécessaire de donner un sens réel à l'application $\overline{\nabla} f$; celui-ci est normalement donné à partir des cartes topographiques, prises comme des champs scalaires dont les vecteurs gradients indiquent la *direction de l'inclinaison maximale* d'une colline ou montagne. Notons que ce choix laisse de côté d'autres possibilités importantes dans le même contexte. Un exemple classique présenté aux étudiants pour leur faire comprendre ce concept, est le suivant (figure 2) :

On peut considérer la carte des courbes de niveau d'une montagne comme un champ scalaire qui attribue à chaque paire de coordonnées, latitude–longitude, une altitude scalaire (champ scalaire à deux variables). Dans ce cas, le vecteur du gradient a un point générique indique sur la carte la direction de la pente maximale de la montagne. Notez que le vecteur de gradient est perpendiculaire à la tangente à la courbe de niveau.

À partir des cartes qui présentent des lignes de niveau, une technique est suggérée :

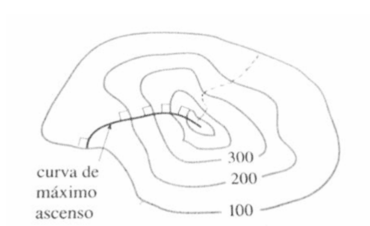


Figure 2- *Tracé d'une Courbe d'Ascension Maximale en utilisant seulement une paire d'équerres et un crayon. Prise de Stewart (2002), p. 935, Figure 12.*

Il s'agit de tracer des vecteurs gradients, en commençant par dessiner pour une suite de points choisis sur des courbes de niveau croissant (éminence) ou décroissant (dépression) la tangente en chaque point puis sa perpendiculaire, jusqu'à arriver à la partie supérieure ou inférieure du relief en question. La trace qui résulte suggère une ligne particulière de gradients sur la configuration, qui en effet établit une courbe d´ascension maximale (CAM) ou inversement, une courbe de descente maximale.

Cependant le discours traditionnel dans l'enseignement de mathématiques, normé par les manuels utilisés et par l'enseignant, se restreint à une intervention succincte de la CAM. D'une part, ne sont pas considérés les concepts fondamentaux des configurations des cartes appartenant aux pratiques topographiques, *courbe de niveau, versant, ligne de plus grande pente, crêtes, équidistance entre les courbes, les contrôles horizontaux et verticaux, des échelles, plan topographique*, etc. D'autre part, l'utilité du concept de gradient n'est que peu, voire pas, reconnue dans la topographie elle-même. En ce sens, la transposition praxéologique est limitée à une interprétation de la définition du concept, peu fiable pour améliorer la compréhension, puisqu'on part de la définition pour l'interpréter, en ignorant d'autres significations. Partant, « (…) cette situation problématique est immobile et non susceptible de développement » (Barquero, Bosch & Gascón 2010, p. 532).

La ligne pointillée qui apparaît dans la figure 2, est connue en topographie comme *Ligne de la Plus Grand Pente* (LPGP), elle correspond aux parties les plus abruptes par lesquelles l'écoulement de l'eau sur les flancs des montagnes ou des collines est le plus rapide. Dans l'enseignement de mathématiques, ce concept n'est pas exploité. Pourtant la topographie l'utilise pour concevoir des plans topographiques ; il serait donc possible d'utiliser la LPGP pour motiver l'introduction du gradient.

2. *La topographie*

La topographie est un système ordonné d'éléments géométriques dont les composants sont mis en relation par le biais d'arguments trigonométriques. Elle étudie l'ensemble des principes et des procédures permettant la représentation graphique de la surface de la terre, avec ses formes et détails ; autant naturels qu'artificiels, en associant les points de vue planimétrique et altimétrique. Cette représentation a lieu sur des surfaces planes, elle se limite à de petites zones des terrains. Une dimension importante est l'étude des versants dont il faut déterminer le profil, dans les parties les plus abruptes des terrains. La forme des versants détermine en effet le régime de ruissellement des eaux (pluviales au Mexique) le long des pentes de la montagne. En érodant les sols, les flux d'eau provoquent l'apparition de cônes de déjection dans certaines zones d'embouchure, entraînant parfois des retenues d'eau causes de graves inondations dans les vallées.

Les flux d'eau s'écoulent localement le long de la plus grande pente et ce faisant façonnent, par érosion, les versants, les creusant par exemple de sillons qui constituent une matérialisation des LPGP. Ceci explique plus généralement que localisation des LPGP et réalités topographique et géologique (hydrologique) se co-déterminent, ce qui à nos yeux rend envisageable de prendre appui sur l'étude de cartes topographiques pour introduire aux concepts de ligne de plus grande pente et de vecteur gradient. Nous allons voir que cette notion de LPGP est aussi au fondement des pratiques de délinéation pour le dessin de cartes topographiques.

3. *Le gradient dans la pratique de délinéation. La déconstruction*

La pratique de la délinéation a été un contexte dans lequel le gradient a montré sa grande utilité. Cette méthode, connue comme le *clair-obscur,* a été développée par l'ingénieur mexicain Francisco Díaz-Covarrubias au milieu du XIXe siècle et abandonnée au début du XXe siècle. Elle a été en elle-même une pratique du dessin topographique qui a donné le sens de la profondeur et du relief aux cartes topographiques. La pratique incorpore une technique conduisant à la localisation et la détermination de la LPGP, technique qui fait essentiellement référence à la configuration la plus abrupte entre courbes de niveau.

La figure 3 montre le plan topographique d'une montagne, qui apparaît dans Díaz-Covarrubias (1890, p. 559) : on peut voir dans l'image de droite le relief, aussi bien que les versants figurés entre les parties les plus obscures de la configuration. La méthode consiste principalement à graduer *l'ombrage* selon les pentes du terrain. A partir de cette idée, l'outil pour représenter les accidents verticaux a été associé aux courbes de niveau (les courbes de niveau sont visibles dans l'image de gauche de la figure 2, et sont remplacées par les *traits de plume*[160] du clair-obscur dans l'image de droite de la même figure), de sorte que la pente entre chaque couple de courbes est $p = \frac{e}{\Delta}$, où e représente l'écart constant de niveau entre courbes et Δ la séparation ou distance entre les projections horizontales de ces mêmes courbes. Plus abrupte est la pente, plus est forte la proportion du noir par rapport au blanc.

La *théorie* derrière la technique du clair-obscur, provient d'une pratique qui a comme référence la topographie :

> (...) si pour n'importe quel point du terrain compris entre deux plans sécants, on suppose qu'un corps lourd est abandonné à l'action de la gravité, celui-ci descendrait tout au long du versant suivant la ligne la plus courte, qui est perpendiculaire aux intersections du terrain avec les plans sécants : celle-ci est nommée la *ligne de plus grande pente,* car elle prend le plus grand angle avec l'horizontal relativement à toute autre ligne qu'on prend. (Díaz-Covarrubias 1890, p. 559)

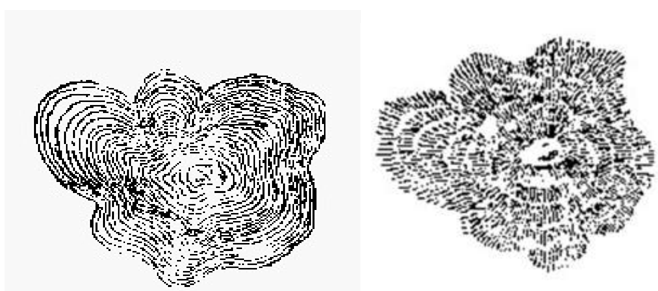


Figure 3- *Dans l'image de droite, apparaît un dessin d'une partie de la carte topographique où la technique du clair-obscur a été utilisée. L'image de gauche montre les courbes de niveau à partir desquelles s'obtient la réalisation du dessin de droite.*

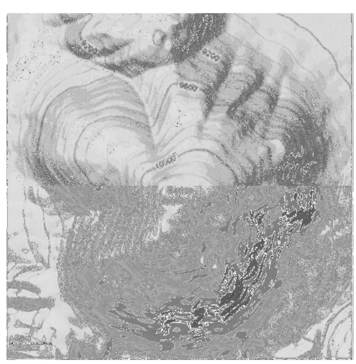


Figure 4- *Collines du Abrigo, Nouveau-Mexique U.S.A : tout au long des collines sont visibles les crêtes des courbes qui déterminent les versants. Dans certains cas, les versants sont localisés par les parties plus ombrées de la configuration. Image prise de* http://maps.google.com.mx

[160] En espagnol : *plumazos.*

La technique utilisée pour localiser dans la configuration la LPGP, est une « technique pratique » qui permet de l'identifier sur les crêtes consécutives entre chaque couple de courbes. En résumé, les deux étapes pour la localiser sont les suivantes : 1) on dessine une ligne pointillée continue, qui correspond essentiellement à la LPGP recherchée (voir la grande quantité de versants figurés entre les courbes de niveau et les crêtes correspondantes sur la carte de la figure 4), 2) puis des traits de plume à l´encre allant du blanc vers le noir, sont tracés tout au long de la carte topographique, restituant ainsi l´impression de profondeur et de relief des accidents du terrain.

Le concept de ligne de plus grande pente sert de base à une technique *produite* dans le cadre du dessin topographique, qui est habilitée par un savoir-faire, intégrant des connaissances mathématiques qui la justifient.

III. DÉFINITION DU GRADIENT A PARTIR DE LA LPGP

En utilisant des éléments de la technique du clair-obscur, avec un minimum d'arguments de la topographie, nous proposons un schéma d'enseignement qui mène à la définition du gradient sous la forme $\overline{\nabla} f$. La séquence commence par la *localisation* de la LPGP située entre deux courbes de niveau d'une portion de terrain sur un croquis. Ce croquis est ensuite incorporé à un environnement géométrique élémentaire qui permet de déterminer les vecteurs gradients entre courbes de niveau, ce qui permet aussi d'aller vers une application « variationnelle » sur les fonctions de deux variables comme celles qui figurent dans $\overline{\nabla} f$. Les éléments provenant de la topographie ne sont pas nombreux : *la partie d'une colline configurée par des courbes de niveau qui déterminent les versants.*

1. Le croquis. L'eau coule plus rapidement par les versants

La carte qui est présentée ci-après (figure 5) représente une certaine *partie d'une colline* dessinée par des courbes de niveau comme le font les topographes, les ingénieurs civils et les architectes dans leurs projets. En fait, la représentation de la colline est une tentative pour la montrer en trois dimensions. Dans la figure 6 apparaît un croquis montrant le versant qui est dans la partie inférieure gauche de la figure 5.

Figure 5- *Idéalisation : courbes de niveau sur une colline dans une image tridimensionelle. Par où suppose-t-on que l'eau coule lorsqu'il pleut ? Image prise de : http://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_nivel.*

Les courbes de niveau sont *équidistantes* dans le sens où la distance verticale entre les plans horizontaux contenant deux courbes de niveau consécutives est fixe. On peut voir, dans les deux figures (5 et 6) que les courbes de niveau se dirigent vers le haut en formant des crêtes pour après descendre à nouveau.

Des définitions *pratiques,* appartenant à la Topographie P(T), sont ensuite présentées :

- θ_1^P ***Courbe de niveau*** : Ce sont les intersections des surfaces de terrain avec des plans sécants équidistantes qui les coupent horizontalement (figure 5).

- θ_2^P ***Équidistance entre courbes de niveau :*** Distance verticale entre deux courbes consécutives, elle est généralement constante. Dans la figure 5 les équidistances sont les distances verticales entre les plans sécants qui coupent la colline.
- θ_3^P ***Échelle :*** Lorsque la réalité du terrain est représentée par une carte dans une certaine proportion, l'échelle exprime le coefficient de proportionnalité. Par exemple, une carte dessinée au 1 : 5000 signifie que 1 cm sur la carte représente 5000 cm ou 50 m du terrain.
- θ_4^P ***Pente entre les courbes de niveau :*** $p = \frac{e}{\Delta}$ c'est-à-dire, équidistance/longueur horizontale qui sépare deux courbes de niveau.
- θ_5^P ***Surface :*** Portion limitée du terrain qui correspond avec l'espace réel.

Dans la carte de courbes de niveau donnée, comment identifier la trajectoire par laquelle l'eau coule le plus rapidement quand il pleut ?

La façon de reconnaître la trajectoire la plus abrupte, c'est-à-dire celle par laquelle l'eau coule le plus rapidement, est d'examiner les « *vertientes*[161] » qui suivent les lignes les plus courtes entre chaque couple de courbes de niveau consécutives. Dans ce cas, *les plans sécants* sont représentés par les contours, et la trajectoire la plus courte est celle qui est placée dans les parties où les courbes se *tournent* vers le haut (dans l´espace) en simulant des crêtes qui unies déterminent le *vertiente*, par lequel le flux d'eau coule *de manière échelonnée* (figure 6).

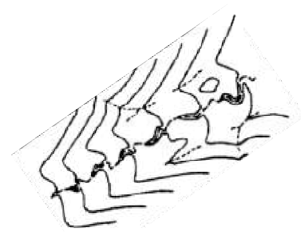


Figure 6*- Idéalisation : Croquis du versant, l'eau coule d'un échelon à l'autre. Qu'est-ce qui se passe à la limite, lorsque les plans sécants sont très proches les uns des autres ?*

2. *Modélisation géométrique du versant*

Le gradient est une des expressions différentielles les plus élémentaires qui peuvent représenter la manière dont une grandeur physique varie dans l´espace. Il est obtenu en considérant les dérivés d'un champ scalaire, par exemple la variation de l'espace $z = f\ (x, y)$ qui représente une colline. Même si z est un scalaire, les dérivées par rapport à x et y ont un caractère vectoriel.

Notre objectif est de chercher, en un point A de la surface $z = f(x, y)$ (la colline), la pente p d'écoulement de l'eau, c'est-à-dire la pente de la LPGP (figure 7). Dans ce qui suit, nous produisons un discours technologique qui ne serait pas reçu comme une validation légitime dans les institutions P(M) de la recherche mathématique et E(M) de l'enseignement académique de mathématiques. Par contre, il l'est dans les institutions analogues des sciences physiques. Ce choix nous permet de rendre accessible aux lecteurs de cet article, non nécessairement au fait de la théorie mathématique de la différentiabilité des fonctions de plusieurs variables, les raisons des liens entre gradient et LPGP. Autrement il s'agit d'un discours d'explication (Castela & Romo-Vazquez 2011, p. 89), pouvant appartenir à la praxéologie mathématique du type de tâches Localiser la LPGP.

[161] Ruisseaux dans les collines par lesquels l´eau coule plus rapidement.

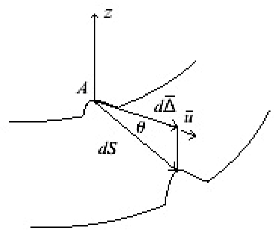


Figure 7 *- Triangle infinitésimal déterminé par la trajectoire $\overrightarrow{dS}$ parcourue par l'eau*

On assimile, comme les physiciens, petits accroissements et différentielles. A partir de $\Delta(x, y)$, projection horizontale de A, on se déplace horizontalement de $\overrightarrow{d\Delta} = (dx, dy)$. Alors l'altitude varie de $dz = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, la deuxième égalité s'obtenant selon une technique classique en physique, identifiant hypoténuse d'un triangle rectangle et côté, taux d'accroissement et limite, dans le cas d'accroissements tendant vers 0, la dérivée, partielle ou non, étant vue comme quotient des différentielles mathématiques). C'est dans cette phase que peuvent précisément être introduites les dérivées partielles, puis le vecteur gradient.

Par définition, la pente dans la direction (dx, dy, dz) est $\frac{dz}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}$ c'est-à-dire :

$p = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}dx}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|} + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}dy}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|} =< grad(f), (\frac{dx}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}, \frac{dy}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}) >$[162].

Mais on sait qu'un produit scalaire est maximum quand les vecteurs sont colinéaires, donc p est maximum quand les vecteurs $(\frac{dx}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}, \frac{dy}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|})$ et $\mathrm{grad}(f)$ sont colinéaires. Ainsi la pente est maximum quand Δ, projeté de A sur un plan horizontal ou représentation de A sur le plan topographique, se déplace tangentiellement au gradient, et on a $p = \|\overrightarrow{grad(f)}\|$ puisque le vecteur $(\frac{dx}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|}, \frac{dy}{\|\overrightarrow{d\Delta}\|})$ est unitaire. Si on note $\overrightarrow{dS}$ le petit déplacement correspondant le long de la ligne de plus grande pente, le triangle rectangle infinitésimal donne :

$\|\overrightarrow{dS}\|^2 = \|\overrightarrow{d\Delta}\|^2 + dz^2$, et donc $\frac{dz}{\|\overrightarrow{dS}\|} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$.

On voit ainsi qu'il est possible d'introduire le vecteur gradient comme pertinent dans le contexte topographique de la recherche de la LPGP. A partir de là, tout une technologie théorique, légitime du point de vue des institutions mathématiques peut être développée pour démontrer les affirmations tenues précédemment et les intégrer dans une théorie mathématique.

IV. RÉSULTATS

Nous avons présenté un processus de circulation des savoirs entre deux institutions mathématiques P(M) et topographiques P(T), des savoirs qui ont été utilisés dans la topographie mexicaine de la fin du XIXe siècle et même transformées pour donner lieu à la définition de la LPGP. Sans prendre trop de distance avec leur contexte et leur signification

[162] La notation <-,-> désigne le produit scalaire.

originaux, ces vestiges sont impliqués dans un processus en sens inverse, allant de la topographie vers la mathématique, pour définir le gradient.

Dans ce processus, deux activités sont mises en évidence : la première est une déconstruction du savoir qui permet de le situer au sein de problèmes issus des sciences non-mathématiques, comme c'est le cas de la topographie. La seconde présente une recontextualisation du savoir déconstruit dans la topographie, qui sert ensuite de point d'appui pour l'amener aux mathématiques. Dans le premier cas, le savoir a été l'objet d'une transposition vers P(T) qui a fait que sa relation à la technologie théorique θ^{th} s´est perdue, ainsi que son sens mathématique d'origine. Dans le second cas on ne peut pas parler d'une transposition didactique dans le sens classique, parce que la connaissance ne procède pas du savoir mathématique, mais des connaissances, compétences et procédures mixtes, mathématiques académiques et topographiques.

Deux techniques issues d'une discipline non-mathématique sont identifiées pour déterminer le gradient : celle qui est suggéré traditionnellement dans les manuels d'enseignement pour le calcul vectoriel et celle qui a été proposée dans cette communication à partir de la réalité des portions d'espaces topographiques, configurées par des courbes de niveau, s'appuie sur la notion de ligne de plus grande pente, déterminée par une technique pratique et introduit à la suite le gradient.

Dans ce sens, les disciplines non-mathématiques nourrissent la mathématique académique à travers des savoirs transformés dans le contexte.

V. CONCLUSIONS

1. Vers la conception d'une organisation didactique

L'analyse praxéologique présentée ci-dessus constitue une base pour concevoir des organisations didactiques adaptées pour l'enseignement mathématique et en particulier, pour celui-ci du calcul vectoriel. L'organisation aura comme axe principal la présentation du statut des éléments de la topographie, tels que le point sur le terrain $P(x, y, z = e)$, puis le passage au cadre des fonctions de deux variables comme $z = f(x, y)$. Pour la conception de l'organisation nous pensons qu'il faudra prendre en compte la modélisation en termes de macro-espace, méso-espace et micro-espace, utilisé par la recherche de Matheron et Noirfalise (2010). Les principales lignes directrices seront les suivantes.

Dans une première étape, afin que les étudiants puissent localiser et identifier les LPGP, il serait nécessaire de proposer des tâches sollicitant des techniques de la topographie sur croquis extraits de cartes topographiques (voir figure 8).

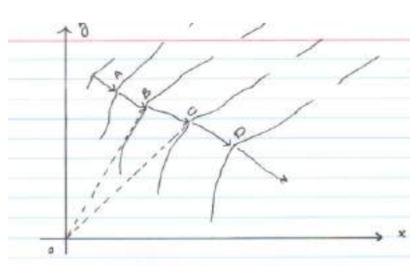


***Figure 8**- Obtention de la LPGP sur un plan topographique.*

Dans les croquis, les étudiants vont tracer la LPGP en l'identifiant au moyen des crêtes consécutives entre les couples de courbes. Ils font apparaître des vecteurs sécants $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, etc., dont les composantes dans un repère rectangulaire peuvent être déterminées en utilisant seulement une paire d'équerres graduées. Avec la réalisation de cette pratique, dans une deuxième étape, l'enseignant et ses étudiants auront des éléments géométriques pour introduire le gradient dans le cours.

Le gradient relie différents niveaux de connaissances qui permettent de tenir compte des processus de construction de connaissances empiriques déterminées par θ^P et des praxéologies non-canoniques. Comme concept décontextualisé, le gradient possède de vastes attributs opératoires, ce qui en fait un objet intéressant pour le faire circuler entre différentes institutions.

Ce qui précède montre une voie pour reconnaître et établir des relations entre les institutions, dans ce cas la topographie P(T) et les mathématiques P(M) - E(M). Ce qui de notre point de vue, est nécessaire pour former de futurs professionnels, montrant différentes manières dont les mathématiques sont utilisées et validées.

REFERENCES

Barquero, B. Bosch, M. & Gascón, J. (2010). Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitarias. In Bronner A, Larguier M, Artaud M, Bosch M, Chevallard Y, Cirade G, & Ladage C. (Eds.) *Diffuser les mathématiques comme outils de conaissansse et d´action (et les autres savoirs)* (pp. 527-549). Montpellier: IUFM de l'académie de Montpellier.

Camacho A., Sánchez B. (2015) Praxeologías y empiremas, recursos extremos para la construcción de conocimiento. XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México.
http://xiv.ciaem-iacme.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/464/257

Castela C., Romo-Vázquez A. (2011) Des mathématiques a l´Automatique: Étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79-130.

Chevallard Y. (2007) Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. In Ruíz-Higueras L., Estepa A., García F. J. (Eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 705-746). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Díaz Covarrubias F. (1890) *Manual de Topografía.* México: Imprenta del Gobierno en Palacio.

Gantois J-Y. (2012) *Un milieu graphique-cinématique pour l´apprentissage des dérivées dans une praxéologie "modélisation" : potentialités el limites*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Liège.

Matheron Y., Noirfalise R. (2010) Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER ». In Bronner A., Larguier M., Artaud M., Bosch M., Chevallard Y., Cirade G., Ladage C. (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 633-654). Montpellier : IUFM de l'académie de Montpellier.

Stewart J. (2002) *Cálculo Multivariable.* México: Thomson Learning, Cuarta Edición.

APPORTS DE LA PLURALITE DE SYSTÈMES MATHEMATIQUES ANCIENS POUR L'ENSEIGNEMENT

Charlotte DE VARENT*

Résumé – Nous nous intéresserons à l'utilisation de textes mathématiques anciens[163] sur le thème de l'aire du rectangle et notamment à l'intérêt des différents équilibres entre nombres et grandeurs qu'ils offrent. Dans le cadre d'une analyse préalable à une expérimentation utilisant l'histoire des sciences en classe, nous expliciterons comment ils ont influencé notre lecture de manuels scolaires de CM2 (10-11 ans, 5ième année d'élémentaire). Nous nous baserons sur cette analyse pour justifier l'utilisation de l'un de ces textes anciens dans un travail visant l'explicitation et l'approfondissement des thèmes aire et grandeurs avec des élèves de seconde.

Mots-clefs : histoire des mathématiques, grandeurs, aire, interdisciplinarité, ingénierie didactique

Abstract – We are interested in the use of ancient mathematical texts regarding the area of a rectangle, with a focus on the different equilibria that exist between numbers and the quantities they offer. We bring forward the way in which these texts influenced our reading of 10 and 11 year olds' (French "CM2" or fifth grade) textbooks within the framework of a preliminary analysis for an experiment that uses the history of sciences in the classroom. Our analysis should allow us to justify the use of one of these ancient texts in an experimentation intended to clarify and deepen the themes of area and quantities with 15-16 year old students (French "seconde" or tenth grade).

Keywords: history of mathematics, quantities, area, interdisciplinarity, didactic engineering

I. INTRODUCTION ET MÉTHODOLOGIE

Nous nous intéresserons à la justification de l'utilisation de l'histoire des mathématiques anciennes, dans la perspective d'une expérimentation en cours de réalisation en classe de seconde. L'intérêt en a été soulevé maintes fois (Hosson & Schneeberger 2011 ; Guedj, Laube & Savaton 2007) et peut sembler évident : motivation des élèves en classe, approche de la diversité culturelle, meilleur recul sur la nature de la science et le discours scientifique, etc. Cependant, les didacticiens et enseignants intéressés par le sujet ont dégagé une multitude de formes d'utilisation possible des sources historiques (De Hosson 2011, Bernard, Brechenmacher & Husson 2014) et les expérimentations ont révélé qu'elles ont des conséquences variables (Jankvist 2009).

* Université Paris 7 Diderot - ERC SAW - CNRS - SPHERE – en co-direction au LDAR – France – charlotte.dvarent@etu.univ-paris-diderot.fr

163 La recherche conduisant à ces résultants a reçu un financement du Research Council under the European Union's Seventh Framework Programme (FP7/2007-2013)/ERC Grant agreement n. 269804.

De Varent C. (2015) Apports de la pluralité de systèmes mathématiques anciens pour l'enseignement. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 454-467.

Du point de vue des sources historiques anciennes, nous avons d'abord choisi le thème de la multiplication dans le sens large des situations multiplicatives à plusieurs espaces de mesure qui ne sont pas toujours dépendantes de l'addition itérée (Vergnaud 1990, Roditi 2005). Cela nous a permis de découvrir, dans la lignée du travail mené par le projet « mathematical Sciences in the Ancient World » (SAW dans la suite – voir Saw ERC. Hypothèses », s.d.), diverses propositions d'équilibre nombres/grandeurs dans ces situations multiplicatives, comme les calculs d'aire, de volume, la règle de trois. La spécificité du projet SAW est la mise en valeur de la diversité des solutions mathématiques que les textes offrent sans « coller » une représentation actuelle sur un texte ancien. L'attention portée aux types d'éléments sur lesquels l'algorithme opère à chaque étape et au vocabulaire est l'un des piliers de cette historiographie. Le traitement des unités de mesure (ou leur absence) s'est ainsi révélé être l'une des clés de la diversité des approches mathématiques.

Du point de vue didactique de nombreux travaux sont à l'intersection de la géométrie et des grandeurs, notamment Rogalksi (1985) sur l'acquisition de la bidimensionnalité, Munier et Passelaigue (2012) sur l'importance de l'approche épistémologique des grandeurs mesurées et de la mesure. Les travaux de Chambris (2007, 2009), rappellent l'histoire de la suppression partielle des unités dans les années 1970 en France, en partie réintroduites mais avec un statut qu'elle propose de travailler en lien avec la numération décimale. Sur le thème de l'aire, Douady et Perrin-Glorian (1985, 1989), Perrin-Glorian (1990, 2002) montrent l'importance et la complexité du sujet. Roditi (2005, pp.74-79) rappelle des difficultés importantes à l'entrée en sixième.

Nous travaillons dans le cadre d'une ingénierie didactique (Artigue 1989). Cette méthodologie de l'ingénierie didactique est liée ici à celle, propre à l'utilisation de l'histoire des sciences, d'un dialogue entre les textes anciens, les travaux didactiques et l'analyse de manuels scolaires (Dorier 2006, p.29). C'est ce dialogue (Hosson & Schneeberger 2011 ; Décamp & Hosson 2012) qui nous a permis de cerner des points de diversité qui nous paraissent éclairants, d'interroger en profondeur les concepts de base, grâce au recul que permet la diversité historique. Ces allers-retours constituent pour nous l'analyse préalable, pour laquelle nous développerons l'apport de trois textes mathématiques anciens sur le thème de l'aire du rectangle.

Nous montrerons comment les réponses qu'ils offrent, révélées par les traductions au plus près des notations mathématiques, influencent l'analyse de contenus. Pour cela nous exposerons une grille d'analyse composée de questions qui nous ont permis de lire les manuels scolaires de CM2 (10-11 ans, primaire 5) à la lumière des textes anciens, mettant en évidence certains implicites. Travailler sur le même plan des systèmes mathématiques différents, anciens et actuels, nous a menés à construire des catégories particulières, adopter une approche textuelle et voir les procédures de calcul d'aire comme des algorithmes. Nous justifierons a priori l'utilisation de l'un des textes mathématiques anciens en classe de seconde (15-16 ans, secondaire 5)[164] . Nous faisons en effet l'hypothèse que les différentes variations précisées par cette approche amèneront l'élève à réinterroger ses connaissances sur le thème de l'aire du rectangle.

[164] La classe de seconde a été choisie pour revenir en profondeur sur une notion supposée stabilisée (aire du carré) et permettre la compréhension de la tablette : multiplication en base 60, inverses, système métrologique différent. Le cadre de « l'option découverte histoire des sciences », créée et animée à Levallois-Perret par l'historien des sciences médiévales au CNRS M. Husson, offrait un cadre souple pour ce travail préliminaire, bien que nous n'excluions pas l'inclusion ultérieure dans un cours de mathématiques.

II. PRESENTATION DES TEXTES ANCIENS UTILISES DANS LA RECHERCHE

Précisons ici l'apport théorique du dialogue entre trois textes anciens sélectionnés pour la diversité des réponses qu'ils apportent au thème de l'aire du rectangle et l'étude de manuels scolaires en classe de CM2 (10-11 ans).

- cunéiforme : une tablette de l'école de scribes de Nippur (Proust 2007, pp.190-197),
- chinois : un texte issu de la traduction des *Neuf Chapitres* (Chemla & Guo 2004, pp.153-155),
- sanskrit : un texte issu de la traduction du commentaire de Bhāskara sur le chapitre mathématique de l'*Āryabhaṭīya* (Keller 2006, pp.13-19 vol.1, pp.8-10 vol.2).

1. Un texte cunéiforme

Ce texte nous a semblé révéler un choix mathématique intéressant. Nous étudierons l'exemple de la tablette CBS 11318[165] (Proust 2007, p.191) provenant de l'école de scribes de Nippur.

***Figure 1** – CBS 11318 – Face*

Dans cette tablette (voir tableau 1 pour la traduction de Proust 2007, p.191), il est remarquable que le calcul exprimé dans la traduction en haut à gauche, ne soit pas du type « 1 kuš$_3$ × 1 kuš$_3$ » ou « 1 × 1 » mais « 5 × 5 ».

5 5 25	
	1 kuš$_3$ le côté (du carré). Quelle est sa surface ? Sa surface est 1/3 gin$_2$ 15 še

***Tableau 1**- CBS 11318, Traduction de Proust*

La première étape de la procédure permettant de calculer l'aire d'un carré consiste en effet selon Proust (Op. cité, pp.190-197) à traduire la longueur du côté en « nombres flottants » à

[165] JCS 36,251 (s.d.). Dans CDLI. Repéré le 09 septembre 2014 à : http://www.cdli.ucla.edu/search/archival_view.php?ObjectID=P254478

l'aide d'un dictionnaire appelé « table métrologique » (Proust 2005). Celle-ci donne pour une grandeur mesurée son équivalent en nombre flottant. Ici, 1 kuš$_3$ → 5 (la flèche ne figure pas dans le texte historique d'origine). Le 5 obtenu est flottant : c'est un élément sur lequel il est possible de calculer sans connaître l'ordre de grandeur. Il est exprimé dans un système numérique similaire à notre notation des heures-minutes, le SPVN (notation sexagésimale positionnelle). Mais en SPVN, bien que chaque position soit soixante fois supérieure à la précédente, on ne sait pas quelle puissance de 60 possède la toute première position donc il est impossible de connaître l'ordre de grandeur du nombre. Les longueurs comme 1 kuš$_3$, par contre (et les mesures en général), sont exprimées dans un système numérique qui n'est pas « flottant », comme c'est le cas dans notre système numérique.

Pour calculer l'aire du carré, le nombre flottant 5 ainsi obtenu grâce à la table métrologique est multiplié par lui-même. Il faut alors « convertir le résultat (ici 25) en surface » à l'aide de la table métrologique des surfaces[166], qui possède pour chaque mesure d'aire (à gauche) un équivalent en nombre flottant (à droite). Ici 25 est donc converti en « 1/3 gin$_2$ 15 še ». Ainsi le choix est fait de ne pas calculer sur des grandeurs (comme 1 kuš$_3$) mais sur des nombres flottants (comme 5). La gestion des espaces de mesure entrant en jeu dans le calcul de l'aire du carré paraît ainsi être faite par une séparation nette, la conversion (ou « traduction ») permettant de passer de l'un à l'autre. De même cette conversion permettra pour le cas de la règle de trois, de faire communiquer les différentes sortes de grandeurs en jeu. Cette conversion est nettement moins visible dans le système français actuel du fait de l'homogénéité des facteurs entre unités de mesure, ainsi que de l'utilisation des mêmes notations pour les nombres à calculer et les grandeurs.

2. *Le texte chinois*

Ce texte apporte une autre réponse sur le thème de l'aire du rectangle, quant au traitement des unités de mesure. En effet si la longueur d'un rectangle est en unité de mesure LI, le résultat du calcul d'aire sera en « LI du produit ». Selon une hypothèse suggérée par Chemla, il s'agit peut-être d'une transformation géométrique du rectangle en une « bande rectangulaire unité ». Si le rectangle est de 3 LI de longueur et 2 LI de largeur comme le propose l'un des exemples du texte, alors la bande rectangulaire unité serait de 6 LI du produit de longueur et de 1 LI de largeur (figure 2)

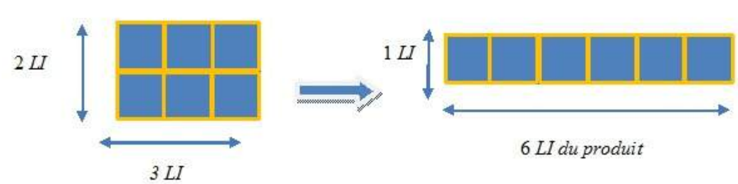


Figure 2- *Transformation en bande rectangulaire*

166 Pour expliquer le « nombre flottant », nous pouvons faire l'analogie avec les résultats intermédiaires de la multiplication posée (avant addition) de nombres décimaux actuellement utilisée en France. En effet ces derniers servent à calculer, à être les arguments d'un algorithme de multiplication ou d'inversion, sans se soucier provisoirement de la position de l'unité. La « conversion » depuis le nombre flottant se fait de manière implicite, probablement au moment où la virgule est positionnée après l'addition, puisqu'ainsi est rétabli l'ordre de grandeur.

Ensuite, la procédure précise qu'il faut convertir les LI du produit obtenus en unités de mesure MU si le nombre de LI est suffisant. Le MU est par ailleurs une unité qui n'est jamais une unité de longueur, il n'y a donc pas de MU du produit. Peut-être est-ce le moment où l'on quitte l'interprétation géométrique de l'unité de mesure pour une unité de mesure de statut différent. Cette relation entre les LI du produit et les MU nous a donné à réfléchir sur l'articulation entre « unité de mesure géométrique » et « unité de mesure arithmétique ».

3. Le texte sanskrit

Enfin, un troisième texte sur ce thème, issu du commentaire de Bhāskara (629) sur l'*Āryabhaṭīya* d'Āryabhaṭa est frappant par son absence d'unités de mesure. Dans le commentaire, il s'agit d'un algorithme pour élever des « quantités » (nombres avec partie entière et partie fractionnaire) au carré, avec des exemples numériques sans unité de mesure. En revanche, l'introduction de Bhāskara au traité de l'*Āryabhaṭīya*, nous indique qu'arithmétique et géométrie sont deux facettes d'un même monde. L'algorithme est directement présenté après une discussion géométrique sur la définition du carré ce qui laisse entrevoir un possible lien conceptuel entre les deux parties du texte, cristallisé notamment par le double sens du mot sanskrit « *phala* », signifiant à la fois « l'aire » et « le résultat » (après élévation au carré). D'autre part le commentateur Bhāskara annonce qu'ici l'algorithme est réalisé sur des « quantités », nombres auxquels il est facile d'apposer une unité de mesure, sans qu'il soit besoin de faire une étape de « conversion » si l'on souhaite appliquer cet algorithme à un exemple géométrique. L'ordre de grandeur n'est jamais perdu contrairement à l'exemple cunéiforme.

4. Un bilan préalable au passage à l'enseignement

Dans le texte en chinois, le changement de dimension paraît être géré par le passage à une surface intermédiaire qui fait un lien clair entre la multiplication issue de la mesure des côtés de rectangle et l'unité de surface. Cette solution nous semble apporter un pont intéressant entre « l'activité découverte » et la formule. Cela nous a conduits à nous intéresser au statut de l'unité de mesure cm^2 à chaque étape du manuel scolaire : comment le lien est-il fait entre unité de mesure représentée géométriquement et unité de mesure servant dans l'analyse dimensionnelle ? La question de la distinction entre : nombre à calculer (par exemple, des résultats intermédiaires), grandeur mesurée, quantité, est peut-être plus délicate dans un système comme le nôtre (et celui de Bhāskara) que dans un système cunéiforme où nombres flottants et grandeurs mesurées sont séparés et où les conversions entre les éléments sont apparentes. Cela nous a conduits à regarder précisément l'étape « d'apposition » de l'unité de mesure dans l'introduction de la formule des manuels scolaires. D'autre part, si le texte sanskrit est effectivement lu comme étant géométrique et arithmétique à la fois, le vocabulaire porte un double sens. Que veulent dire réellement les mots qu'emploient les auteurs de manuels? Sont-ils géométriques, arithmétiques, ou les deux ? Le vocabulaire est-il, comme dans les textes anciens, l'ultime trace de phases non explicitées ? Quelles sont les conséquences pour l'élève de ces implicites langagiers ?

III. ANALYSE DE MANUELS SCOLAIRES A LA LUMIERE DE CES TEXTES

Ainsi, la diversité proposée par ces trois exemples anciens nous semble illustrer différentes réponses à un même problème mathématique (de Hosson & Chorlay à paraître). Nous avons fait l'hypothèse que cette diversité est intéressante pour l'analyse de contenus. Il s'agissait de comprendre quelle réponse les manuels proposaient, dans cette situation didactique donnée, sur le même plan que les textes anciens. Pour permettre ce dialogue avec le passé, il fallait s'attacher à une grille d'analyse textuelle commune des éléments explicitement présents à l'écrit. Nous sommes conscients que du manuel aux pratiques, il y a un fossé plus ou moins grand selon l'enseignant.

Nous nous centrons ici sur cinq manuels scolaires déjà étudiés parmi treize, ils introduisent l'aire du rectangle en CM2. Le passage de l'activité « découverte » du manuel (justifiant pour l'élève la procédure de calcul d'aire) à l'institutionnalisation (se traduisant généralement par une formule de type « L × l », avec ou sans application à un exemple) a été au cœur de notre intérêt. Nous tenterons ici de donner les grandes lignes des résultats de cette analyse.

1. Une première analyse globale

La première impression qui se dégage est celle de l'homogénéité. L'activité découverte de cette séquence consiste généralement à compter des carrés-unités d'un centimètre de côté à l'intérieur de surfaces parfois originales, puis de rectangles et de carrés.

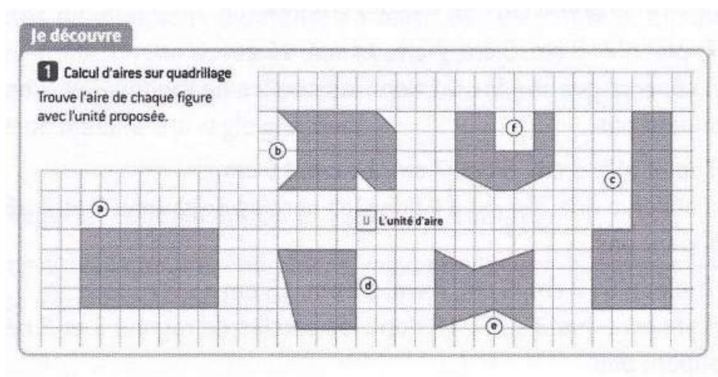


Figure 3 *– Compte de carreaux dans l'activité découverte (La clé des maths*[167]*)*

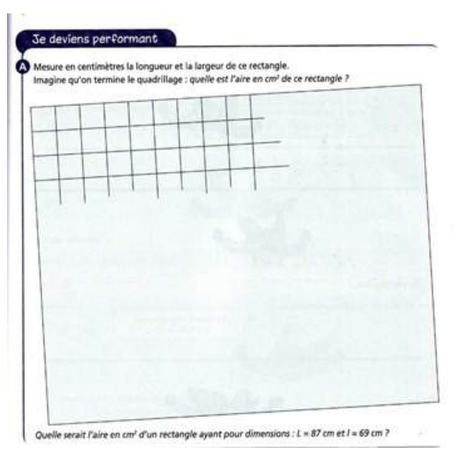


Figure 4 *– Compte de carreaux dans l'activité découverte (J'apprends les maths*[168]*)*

Tous les manuels analysés présentent l'utilisation d'une telle grille pour introduire la formule de l'aire du rectangle ou du carré (exemple figure 3). L'activité découverte amène l'élève

[167] *La clé des maths*, Séquence 39 sur 72 en période 3 sur 5, p.94.
[168] *J'apprends les maths*, séquence 47 sur 119 en période 2 sur 4, p.75.

(plus ou moins explicitement selon les cas) à réaliser qu'il est plus rapide de multiplier le nombre de carreaux de la longueur par le nombre de carreaux de la largeur que de compter les carreaux un à un. Il faut ensuite passer directement à la mesure des côtés à la règle, qui amène la formule. Cette dernière étape de mesure n'est en fait explicitement liée au compte de carreaux sur une ligne que dans 1/5 du manuel, *J'apprends les maths* (figure 4).

La formule « L×l » est alors introduite dans un encadré, dans 4/5 manuels, avec parfois un exemple précis d'application.

2. *Analyser à la lumière des textes anciens*

Pour dépasser ce sentiment premier d'homogénéité et en nous fondant sur la diversité des réponses présentes dans les sources anciennes, nous avons décidé de regarder les différents éléments, listés dans le tableau 2. Celui-ci explicite d'une part le lien entre le choix des critères et les textes anciens, d'autre part le lien entre ces critères et la méthodologie d'étude textuelle provenant de l'histoire (pouvant rejoindre l'analyse de contenus didactique). Il précise enfin si le critère a pu être appliqué à l'analyse des textes anciens eux-mêmes pour faciliter le dialogue.

Critère ou question adressé(e) aux manuels	Inspiré par le texte…	Méthodologie provenant de l'Histoire	Critère similaire appliqué aux textes anciens
Détail de l'algorithme associé à l'activité découverte et de l'algorithme associé à la formule (et son application à un exemple)	cunéiforme notamment (du fait de la différence explicite avec notre méthode et de l'explicitation des éléments sur lesquels on opère à chaque étape de l'algorithme dans ce texte)	Oui : attention portée aux procédures	OUI
Sur quel type d'élément est faite l'opération à chaque étape de l'algorithme ? (ex : mesure d'un côté exprimée par un nombre et une unité de mesure, nombre seul issu d'une mesure, nombre issu d'un compte de carreaux, élément implicite pouvant représenter les deux, etc.)	cunéiforme (du fait des nombres flottants pour les calculs/non flottants pour les mesures)	Oui : les éléments sur lesquels on opère sont des indices importants lorsqu'il faut naviguer dans des systèmes de mathématiques différents sans pouvoir interroger l'auteur	OUI
Type d'unité de mesure utilisé à chaque étape de l'algorithme (ex : carreau géométrique ou unité de mesure sur laquelle il est possible d'opérer une multiplication)	chinois (unité de mesure « LI du produit » qui fait référence à une transformation géométrique liée à la longueur d'un rectangle « bande », servant de transition)	Oui : -Attention portée aux traces écrites -Hypothèse de la « bande unité »	OUI

Gestion des étalons de mesure de dimensions 1 et 2 : -> a conduit premièrement : à la mise en évidence de trois phases (plus ou moins implicites selon les manuels) 1) compte de carreaux-unité un à un (activité découverte) 2) multiplication « nb de carreaux sur une ligne » × « nb de carreaux sur une colonne » (activité découverte) 3) mesure du côté pour connaître le nombre de carreaux (très souvent implicite) ->a conduit deuxièmement : à réaliser que chaque formule semble selon le manuel faire référence à une des trois phases selon la façon dont elle est exprimée	en cunéiforme (explicitation d'une proposition de transition entre mesures de longueur et mesures de surface par ce texte) en chinois (transition par les « li du produit »)	Oui pour le « deuxièmement » : attention particulière aux indices textuels mathématiques	OUI
Gestion/explicitation de « l'apposition » du terme « cm^2 » au moment de l'application de la formule à un exemple	comparaison du texte en cunéiforme par contraste avec le texte en sanskrit (utilisant des nombres sans unités de mesure auxquels il est facile d'apposer une unité de mesure après le calcul)		NON
Étude du vocabulaire à chaque étape (ex : traces de vocabulaire géométrique au moment de l'application de la formule), ce qui est réellement écrit, ce qui est sous-entendu	en sanskrit (traces du lien avec la géométrie dans une procédure arithmétique)	Attention particulière aux indices textuels pour chercher des indices de la pensée de l'auteur / du fonctionnement du système mathématique	OUI

Tableau 2 *– Grille d'analyse venant des textes anciens*

3. Analyse en terme d'algorithme

La décomposition en termes d'algorithmes a permis de mieux repérer les phases possibles (détaillées plus loin) dans la transition de l'activité découverte vers la formule, et de remarquer le degré d'explicitation des éléments sur lesquels l'algorithme opère à chaque étape. Nous y reviendrons. Par souci de synthèse nous ne donnerons pas ici les décompositions pour chaque manuel mais seulement une « moyenne ».

Algorithme associé à l'activité découverte	Algorithme associé à la formule lors de l'institutionnalisation	Algorithme associé à la tablette cunéiforme
Choisir un étalon (le carreau cm^2) -> *fait par le manuel* L'étape de choix de l'étalon est plus ou moins implicite selon les manuels, mais les séquences précédentes travaillent généralement sur le choix d'une unité géométrique « u » et l'expression de l'aire en fonction de l'unité « u » choisie.	Le choix de l'étalon est effacé (il faudrait s'en souvenir)	Le choix de l'étalon est effacé dans la tablette[169]
Compter le nombre de carreaux sur une ligne (ex : 3)	Mesurer un côté en centimètres : ex : 3 ou 3 cm selon les manuels (correspond implicitement à donner le nombre de carreaux d'1 cm^2 sur une ligne).	L'énoncé donne « le côté » du carré, 1 kuš$_3$
La transformation du résultat du compte de carreaux en nombre à calculer est inexistante	La transformation de la mesure du côté en élément (nombre de carreaux ? valeur issue d'une mesure ? nombre à calculer ?) est inexistante ou effacée par le système numérique	Le côté du carré est transformé en nombre flottant à l'aide d'une table métrologique : 5.
Multiplication du nombre de carreaux sur une ligne par lui-même $3 \times 3 = 9$	Multiplier l'élément par lui-même (il n'est pas précisé s'il s'agit du nombre de carreaux, d'une valeur issue de la mesure, d'une mesure, d'un nombre à calculer, etc.) *« $3 \times 3 = 9$ », ou : « $3\ cm \times 3\ cm = 9$ cm^2 »* *ou : « $3 \times 3 = 9$ cm^2 »*	Multiplier le nombre flottant par lui-même 5 5 25
Le nombre de carreaux donné est le nombre de cm^2 La transformation du résultat de la multiplication en mesure d'aire se fait par l'apposition du terme cm^2 après l'égalité ou dans la phrase réponse. Ici cette apposition prend un sens géométrique : il y a par exemple 9 carreaux (resp. 9 « u »), les carreaux « sont [170]» des cm^2 (resp. des « u ») donc il y a 9 cm^2 (resp. « 9 u »)	La transformation du résultat de la multiplication en mesure d'aire se fait par l'apposition seule du terme cm^2 après l'égalité ou dans la phrase réponse. Elle ne peut prendre un sens géométrique facilement s'il n'est pas fait de lien entre la mesure du côté en centimètres (dimension 1) et le carreau cm^2 (dimension 2).	Convertir le résultat en « surface » 1/3 gin$_2$ 15 še

***Tableau 3**- Algorithmes associés*

4. *Analyse en terme de phases de la progression*

Si l'on considère trois phases :

1) compte de carreaux un à un,

2) multiplication du nombre de carreaux sur une ligne par le nombre de carreaux sur une colonne pour trouver le nombre total de carreaux,

3) mesure des côtés pour trouver le nombre de carreaux sur une ligne et une colonne,

---

[169] Nous présenterons ultérieurement des textes cunéiformes plus anciens où la surface est décomposée selon des étalons standards.

[170] L'étalon de dimension 2 « u » étant une portion de surface décomposant la surface à mesurer, « u » prend un double statut de surface et d'unité de mesure d'aire, son statut est donc ambigu et par extension celui du cm^2 aussi.

le rapport qui unit les phases 2 et 3 est explicite dans 1/5 manuels seulement. La gestion des espaces de mesure est donc le plus souvent implicite et pourrait créer un conflit d'interprétation entre la formule de type « cm × cm » qui fait intervenir la dimension 1 et l'activité découverte utilisant des carreaux de dimension 2.

Manuel	Phase 1	Phase 2	Phase 1 ou 2	Phase 3
Pour comprendre les maths	Non, pas explicitement	Non, pas explicitement	Non, pas explicitement mais réalise peut-être la phase 1 (ou 2), étant donné la présence d'une grille	Non (même dans le livre du maître)
Vivre les maths	Oui (livre du maître)	Oui (livre du maître)		Non, pas explicitement
La clé des maths			Oui : le livre du maître évoque le « dénombrement ».	Non, pas explicitement
EuroMaths			Oui : le livre du maître évoque le « dénombrement ».	Non, il est demandé de prévoir l'aire d'un carré sans utiliser de quadrillage pour faire le lien entre l'aire du carré et la dimension du côté, ce qui pourrait correspondre à la phase 3. Un cm^2 valant quatre carreaux, il faut explicitement chercher l'étalon choisi, ce qui conduit peut-être à favoriser la phase 3.
J'apprends les maths	Non, la phase 1 n'est pas évoquée (mais ce manuel, comme d'autres, utilise la vision grille pour la multiplication depuis l'introduction de cette notion).	Non, car la phase 2 est rendue impossible intentionnellement pour conduire à la phase 3.		Oui : effacement de la grille qui impose la mesure du côté *pour* connaître le nombre de carreaux.

***Tableau 4** – Explicitation des phases selon les manuels*

A chaque étape les éléments sur lesquels l'algorithme de la formule opère la multiplication sont implicites. Cet implicite peut être géré plus ou moins positivement si les phases 2 et 3 sont (ou non) articulées explicitement dans le manuel. Il semble que les formules portent une trace de l'activité découverte (comptage de carreaux) ou de la mesure à la règle (ou les deux), ou bien d'une conversion de nombre à calculer en grandeur mesurée (ce pourrait être le cas d'une notation semi-séparative « $5 \times 4 = 20\ cm^2$ »), sans que ce choix soit expliqué dans le manuel ou le livre du maître et sans que le lien entre formule et activité découverte soit toujours possible du fait de la non explicitation de la phase 3.

5. Représentation de l'unité de mesure et apposition du terme cm^2

Dans tous les manuels, une introduction « géométrique » du cm^2, de type : « 1 cm^2 est l'aire d'un carré de 1 cm de côté » est donnée dans l'activité découverte. Mais dans la formule, il semble que son statut change. La formule notée « 5 cm × 4 cm = 20 cm^2 » par exemple, pourrait donner l'impression de multiplier des unités de mesure « cm » comme dans la notation : « cm × cm = cm^2 ». Or la possibilité factice de « multiplier » des « notations d'unités de mesure », liée à l'homogénéité de l'équation, est utile notamment en physique (Chevallard & Bosch 2001) pour vérifier des écritures de résultats mettant en jeu un grand nombre d'unités de mesure. Mais elle est sans réalité multiplicative géométrique (ou indirectement) et n'est pas introduite explicitement. L'unité de mesure passe donc dans cet exemple d'un statut quasi-géométrique (un carreau) à un statut « arithmétique » (un élément sur lequel on peut opérer), sans que ce soit explicité. Cette double conception n'est pas introduite comme telle dans le livre du maître. D'autres présentations (formules de type séparative : « A = 38 × 29 = 1102, 1102 cm^2 » ou semi-séparative : « A = 38 × 29 = 1102 cm^2 ») ne semblent pas non plus rendre limpide le lien à l'activité découverte. Elle n'explicite pas sur quoi opère l'élève, qui finira, faute de phase 3, par lier 38 à la mesure du côté, qu'il doit faire à chaque utilisation de la formule. Sans rejeter les trois types de notations, il est toutefois notable qu'elles ne soient nulle part explicitées, d'une part, et qu'elles donnent lieu à un conflit possible avec l'activité qui doit justement donner sens à la formule, d'autre part.

C'est l'unité de mesure qui semble porter la trace d'une transition entre étalons de dimension 2 et 1 qui parfois est à la charge seule de l'élève. La justification de l'apposition de l'unité cm^2 dans l'application de la formule est faite dans 2/5 manuels par un argument d'homogénéité du type : « si l'unité est en cm, le résultat sera en cm^2 ». L'un des deux spécifie même qu'il faut utiliser « la même unité » qu'au départ, bon exemple de l'ambiguïté régnante. Les autres manuels ne donnent pas de raison. Pour l'élève, est-il possible de créer une représentation géométrique erronée pour correspondre mieux à la formule ?

IV. CONCLUSION ET AUTRES QUESTIONS

Pour cette introduction d'une formule algébrique, il semble donc que les difficultés soient cumulées : représenter un nombre quelconque par une lettre, faire le lien entre la formule, le compte de carreaux de dimension 2 et la mesure à la règle d'étalons de dimension 1, utiliser une unité de mesure qui a une réalité « géométrique » et « arithmétique », opérer sur des éléments qui ne sont pas spécifiés clairement (nombre, grandeurs, carreaux ?). Le risque de conflit de représentation entre l'activité et la formule pouvant mener à une difficulté à donner du sens à cette dernière apparaît. Ces résultats nous semblent rejoindre et compléter les précédents travaux sur ce thème, en mettant particulièrement en avant l'importance d'un travail épistémologique de fond sur la métrologie en géométrie. Il nous semble que les parties distinguées par M-J. Perrin (1990) que sont les pôles géométrie (les surfaces comme parties du plan), grandeur (l'aire comme concept indépendant de la surface et de sa mesure), numérique (les mesures d'aires) sont maintenant travaillés en partie selon les manuels, l'influence des travaux didactiques se faisant sentir peu à peu. Nous remarquons notamment souvent des activités sur la distinction aire/périmètre, des découpages-recollement, l'utilisation d'un étalon quelconque « u » précédant l'étalon cm^2. En revanche, la présente analyse nous paraît mettre en valeur l'appartenance de l'unité de mesure à plusieurs pôles, sans explicitation. Celle-ci peut avoir une surface, une aire, une mesure d'aire et servir de mesure d'aire en étant une surface. Elle appartient aussi à un pôle « arithmétique » puisqu'elle paraît « multipliable » (cm × cm) ou produit d'une multiplication (cm × cm = cm^2). Les pôles qui ont pu faire l'objet de distinction au préalable nous semblent souvent mélangés du point de vue de la métrologie et au moment de l'institutionnalisation (formule) lorsque le lien entre les phases 2 et 3 n'est pas explicite.

La grille d'analyse issue du travail avec les sources anciennes a permis, grâce à la diversité mathématique et le traitement des grandeurs mesurées qu'ils apportent, de mettre en valeur l'importance et la possibilité d'un travail centré sur la métrologie dans les manuels. Le multiple statut des unités de mesure et l'introduction de la métrologie en géométrie comme en algèbre nous paraît être un aspect essentiel ignoré des livres du maître. Pourtant, il est au cœur de nombreuses applications de la géométrie et du lien entre mathématiques et physique. Les textes anciens, du fait de la place accordée au système métrologique et de la représentation de l'unité de mesure, proposent des solutions intéressantes qui nous semblent pouvoir servir à une réflexion de fond, en didactique comme en formation des enseignants.

D'autre part, la prise de conscience des implicites, permise par les textes anciens justifie l'hypothèse qu'utiliser ceux-ci avec les élèves pour revenir en profondeur sur les notions et les mettre en position « d'analyse de contenus » peut être intéressant. En ce sens, nous nous rapprochons de l'effet de réorientation souligné par Jahnke, Acarvi, Barbin, Bekken, Furinghetti., El Idrissi, da Silva et Weeks (2000). L'utilisation de la tablette cunéiforme nous a paru pouvoir apporter de nouvelles questions ou une meilleure compréhension de la situation et de sa part d'implicite.

REFERENCES

Artigue M. (1989) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(3), 281-308.

Bernard A., Brechenmacher F., Husson, M. (2014) Points cardinaux pour la conception de formations universitaires pluridisciplinaires en épistémologie et histoire des sciences pour les enseignants du secondaire, ou comment s'appuyer sur des dilemmes. SHS Web of Conferences, 13, 05004. http://dx.doi.org/10.1051/shsconf/20141305004

Chambris C. (2009) Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire). In Ouvrier-Buffet C., Perrin-Glorian M.J. (Eds.) *Approches plurielles en didactique des mathématiques* (pp. 211-222). Paris : LDAR, Université Paris Diderot.

Chambris C. (2007) Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM* 69, 5-31.

Chemla K., Guo S. (2004) *Les neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires.* Paris : Dunod.

Chevallard Y., Bosch M. (2001) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, (55), 5-32.

Chorlay R., de Hosson C. (à paraître) History of Science, Epistemology and Mathematics Education Research In Lagrange J-B., Kuzniak A. (Eds) Actes du colloque La didactique des mathématiques: approches et enjeux. Hommage à Michèle Artigue, 31 mai - 2 juin 2012, Université Paris Diderot, Paris.

Décamp N., de Hosson C. (2012) Implementing Eratosthenes' discovery in the classroom: some educational cares, *Science and Education* 21 (6), 911-920.

de Hosson C. (2011) *L'histoire des sciences : un laboratoire pour la recherche en didactique et l'enseignement de la physique.* HDR, Université Paris-Diderot.

de Hosson C., Schneeberger P. (2011) Orientations récentes du dialogue entre recherche en didactique et histoire des sciences, *Recherche en Didactique des Sciences et des Technologies* 3, 9-20.

Douady R., Perrin-Glorian M.-J. (1985) Aires de surfaces planes (2ème partie). *Petit X* 8, 5–30.

Douady R., Perrin-Glorian M.-J. (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics* 20(4), 387–424.

Dorier J.-L. (2006) *Recherche en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire, perspectives théoriques sur leurs interactions*, Cahiers Leibniz, 12.

Guedj M., Laube S., Savaton P. (2007) Vers une didactique de l'histoire des sciences. Éléments de problématiques et de méthodologie pour une didactique de l'épistémologie et de l'histoire des sciences et des techniques (EHST). In Marquet P., Hedjerassi N., Jarlegan A., Pacurar E., Remoussenard P. (Eds.) *Actes du colloque AREF*, Strasbourg.
http://www.congresintaref.org/actes_pdf/AREF2007_Muriel_GUEDJ_285.pdf

Jahnke N.-H., Acarvi A., Barbin E., Bekken O., Furinghetti F., El Idrissi A., da Silva C.-M.-S., Weeks C.(2000) The use of original sources in the mathematics classroom. In Fauvel J., van Maanen J. (Eds.) *History in MathematicsEducation: The ICMI study* (pp. 291-328). Dordrecht: Kluwer.

Jankvist U.-T. (2009) A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 71(3), 235–261.

Keller A. (2006) Expounding the Mathematical Seed, A Translation of Bhāskara I on the Mathematical Chapter of the *Āryabhaṭīya* (2 vol.)."Science Networks", *Historical Studies* (30), Basel: Birkhäuser

Munier V., Passelaigue D. (2012) Réflexions sur l'articulation entre didactique et épistémologie dans le domaine des grandeurs et mesures dans l'enseignement primaire et secondaire. *Tréma* (38), 106–147.

Perrin-Glorian M.-J. (1990) L'aire et la mesure. *Petit X* (24), 5–36.

Perrin-Glorian M.-J. (2002) Problèmes didactiques liés à l'enseignement des grandeurs. Le cas des aires. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques* (pp.299–315). Grenoble : La Pensée Sauvage éditions

Proust C. (2005) Le calcul sexagésimal en Mésopotamie.
Repéré à http://culturemath.ens.fr/content/le-calcul-sexagesimal-en-mesopotamie-2461

Proust C. (2007) Tablettes mathématiques de Nippur. *Varia Anatolica (XVIII).* Istanbul: IFEA, De Boccard.

Roditi E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques : entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris: Editions L'Harmattan.

Rogalski J. (1985) *Acquisition de la bidimensionnalité.* Thèse d'Etat.

SAW ERC Hypothèses. (s.d.) Mathematical Sciences in the Ancient World. Repéré à http://sawerc.hypotheses.org/

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques* (10/2.3), 133-170.

MANUELS SCOLAIRES

Blanc J.-P., Bramand P., Debû P., Gély J., Lafont E., Peynichou D., Vargas A., (2010) *Pour comprendre les mathématiques CM2. Programmes 2008*, Paris : Hachette

Brissiaud R., Clerc P., Lelièvre F., Ouzoulias A., (éd. 2013) *J'apprends les maths CM2. Programmes 2008*, Paris : Retz (Présente édition: 2010)

Champeyrache G., Evanno C., (2011) *La clé des maths CM2. Programmes 2008*, Paris : Belin

Corrieu L., Jardy Jacq., Jardy Jack., Rouy L., (2009) Vivre les maths CM2. Programmes 2008, Paris : Nathan

Peltier M.-L., Briand J., Ngono B., Vergnes D., (2009) *EuroMaths CM2. Programmes 2008*, Paris : Hatie

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

UNE MODÉLISATION D'UNE ÉCLIPSE TOTALE DE SOLEIL

Eric LAGUERRE*

Résumé – Nous étudions un processus de modélisation du phénomène d'éclipse totale de soleil. Nous prenons appui sur la Didactique des Domaines d'Expérience. Nous élaborons et mettons en œuvre une situation d'apprentissage liée à la trigonométrie. L'objectif est d'aborder avec des élèves une forme de modélisation par le biais de l'articulation qui peut s'établir entre le monde physique et les concepts mathématiques inhérents. L'objectif second est de tenter de comprendre comment une perspective dynamique liée à la modélisation au sein de la DDE peut aboutir à une planification d'activités enseignantes cohérentes.

Mots-clefs : éclipse, modélisation, domaine d'expérience, trigonométrie

Abstract – We study a process of modeling of the total sun eclipse phenomenon. We carry out the study in the framework of the Domains of Experience Didactics. We implement a learning situation involving trigonometry. The objective is to approach a shape of modeling with students using the articulation which could become established between the real world and the inherent mathematical concepts. The second objective is to try to understand how a dynamic prospect connected to the modeling within the DED can lead to planning coherent teaching activities.

Keywords: eclipse, modeling, domains of experience, trigonometry

I. INTRODUCTION

Dans cette recherche, nous nous intéressons à la modélisation d'une éclipse totale de soleil avec pour visée de mettre en relation ce phénomène avec des mathématiques enseignées au collège en France. Pour cela, nous illustrons notre approche en prenant appui sur une situation d'enseignement qui est construite dans le double but que les élèves comprennent le phénomène d'éclipse au moins partiellement et que soit introduite la notion de tangente en classe de troisième (neuvième année de scolarité). Dans un premier temps, nous définissons la modélisation du réel en prenant appui sur la Didactique des Domaines d'Expérience (DDE dans la suite ; Boero, Consogno, Guala & Gazzolo 2009). Dans un second temps, nous élaborons un domaine d'expérience en nous fondant sur les relations qui peuvent éventuellement être établies au sein d'une étude des éclipses totales de soleil entre le macro-espace, le méso-espace et le micro-espace. Nous pouvons signaler que d'autres chercheurs ont adopté une problématique d'étude similaire en prenant appui sur un autre cadre théorique que le nôtre (Matheron & Noirfalise 2010).

* Université Toulouse Jean Jaurès – France – eric.laguerre@univ-tlse2.fr

Laguerre E. (2015) Une modélisation d'une éclipse totale de soleil. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 468-477.

II. CADRE THEORIQUE

1. *La didactique des domaines d'expérience*

Nous fondons notre travail sur la Didactique des Domaines d'Expérience (Boero & al. 2009).

Qu'est-ce qu'un domaine d'expérience ?

Un domaine d'expérience (Dapueto & Parenti 1999) est relatif aux relations complexes qui se développent à l'école entre :

- la composante interne de l'élève qui est caractérisée par ses savoirs, ses pratiques et ses schèmes relatifs au domaine visé, avec leur part de subjectivité et de références culturelles parfois liées aux émotions ; cette composante permet à l'élève de faire un repérage des données qu'il juge pertinentes du monde réel, un choix d'hypothèses supplémentaires sur le monde réel si cela est nécessaire ce qui aboutit à une représentation du monde réel ;
- la composante interne de l'enseignant qui, elle aussi, est caractérisée par ses savoirs relatifs au domaine visé, ses pratiques, ses représentations, avec leur part de subjectivité, de références culturelles et bien sûr ses objectifs d'enseignement ;
- et la composante externe qui est liée, par exemple, aux contraintes provenant de la réalité même (comme le fait, dans le cadre des éclipses totales de soleil, que la lune et la terre ont des mouvements réguliers et qu'il est parfois impossible de procéder à certaines mesures de longueurs dans le macro-espace), aux moyens matériels (les instruments avec leurs fonctionnements), aux représentations symboliques (les schémas et les signes par exemple), aux règles et usages sociaux, etc.

L'objectif est de prendre appui sur les représentations des élèves et de les faire évoluer à partir de la composante de l'enseignant et de la composante externe. Le but est alors de repérer chez les élèves ce qu'ils savent déjà et ce qu'ils ne savent pas encore et de réfléchir aux conditions culturelles et didactiques de l'acquisition de savoirs. La conception des mathématiques dans un DE dépasse l'unique maîtrise des symboles, des règles et des procédures et sous-tend des compétences de raisonnement et de modélisation (Boero & Douek 2008).

Dans ce cadre, un modèle est construit à partir d'artefacts matériels et d'artefacts liés aux mathématiques ainsi qu'aux registres symboliques. Ces différents artefacts servent de médiateurs sémiotiques (Bartolini Bussi & Mariotti 2008).

Dans notre recherche, nous travaillons sur la modélisation d'un problème physique posé initialement dans le monde réel. A ce sujet, l'idée que nous prenons en considération est le fait qu'un modèle apparaissant à un certain niveau de la modélisation du réel constitue une nouvelle réalité, ce qui correspond à la prise en compte de l'existence de différentes interprétations de la réalité. Nous nous plaçons dans le cas d'expériences ou de faits réels directement observables.

Que pouvons-nous entendre par modélisation du réel dans le cadre de la DDE ?

2. *La modélisation du réel*

Les modèles sont construits en utilisant des artefacts matériels (supports, matériaux, objets, signes, ordinateur…) et des artefacts tels que les triangles rectangles, les angles etc., au sein des modèles mathématiques. Mais un modèle peut lui-même être employé comme artefact dans le but de construire d'autres modèles. A partir d'une situation tirée de la réalité, un déplacement s'effectue de modèle à modèle pour créer une nouvelle interprétation de la réalité initiale ou une nouvelle réalité. Ainsi la réalité peut se présenter sous une forme modélisée ou sous une réalité fruit elle-même de la construction de plusieurs modèles.

Mais avec Tiberghien et Vince (2000), nous pouvons considérer que certains modèles de la réalité physique sont difficiles à construire par les élèves eux-mêmes.

> Ces liens entre objets du monde des sensations perceptives et objets conceptuels de la physique, pour évident qu'ils puissent paraître au physicien, sont à construire pour l'élève. Les analyses du savoir de la physique et les difficultés des élèves déjà connues nous conduisent à considérer que ces liens ne sont évidents ni à construire ni à utiliser pour décrire et/ou prédire. (Tiberghien & Vince 2000, p.340)

Le fait de rendre les phénomènes liés au son visibles aux élèves par une modélisation physique que ces derniers élaboreraient est une chose difficile à mettre en place. C'est la raison pour laquelle les auteurs conçoivent un logiciel qui favorise une telle activité chez les élèves en simulant des phénomènes sonores simples. Ces simulations représentent une forme de modélisation proposée directement par les expérimentateurs. Nous faisons nôtre cette idée qui consiste à penser, en sciences expérimentales, qu'il est parfois nécessaire d'imposer à un moment ou à un autre un modèle d'un phénomène qui ne représente qu'une étape dans le processus de modélisation de ce dernier.

III. PROBLEMATIQUE

L'objectif est que les élèves, d'une part, parviennent à une interprétation approfondie du phénomène que nous aurons retenu et, d'autre part, qu'ils aient accès à l'étude d'un nouveau concept mathématique. Plus précisément, notre travail consiste à proposer aux élèves une modélisation d'une éclipse totale de soleil. En premier lieu, le but de la mise en œuvre de la situation est de favoriser chez eux la compréhension du phénomène qui peut être mis en rapport avec la notion de diamètre apparent (Martinez 1987) qui correspond à l'angle sous lequel est vu un objet (figure 1). Nous pouvons dire d'ores et déjà qu'étant lié à un objet comme la lune par exemple, le diamètre apparent est fonction de la distance D entre l'objet et l'observateur, de la taille de l'objet, ici le diamètre d de la lune, et de sa forme.

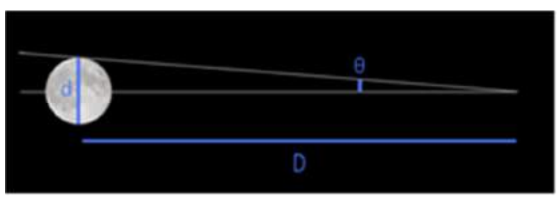


Figure 1 *- Le diamètre apparent de la lune est 2θ.*

Nous avons alors la relation : $tan\theta = \frac{d}{2D}$.

Aussi, en second lieu, après avoir mis en évidence l'égalité de certains rapports de mesures de longueurs, le but est de faire accéder les élèves à la définition de la tangente dans un triangle rectangle.

Du point de vue pratique, nous nous interrogeons, tant du côté des élèves que du côté de l'expérimentateur, au sujet des phases de modélisation des éclipses totales de soleil que nous proposons :

Quelle est, *a priori*, la composante externe de la situation de modélisation proposée par l'expérimentateur ?

Quels sont les tâches et les objectifs précis alloués aux élèves quant à notre approche de la modélisation ? Quelle organisation est prévue ?

En nous appuyant sur la mise en œuvre de la situation, quelles descriptions précises pouvons-nous faire des phases de modélisation du phénomène des éclipses de soleil au sein de la DDE ?

Nous chercherons en particulier à savoir comment le contexte interne des élèves au sujet des éclipses totales de soleil évolue après la mise en place de la modélisation. En d'autres termes, comment la représentation des éclipses totales de soleil a-t-elle évolué chez les élèves après la modélisation du phénomène qui se conclut par l'introduction de la tangente ?

IV. METHODOLOGIE

Nous analysons la composante interne des élèves ainsi que d'autres contraintes éducatives et nous planifions une situation d'enseignement. Pour cela, nous commençons par faire apparaître les contraintes liées aux connaissances initiales des élèves et aux programmes nationaux ainsi que leurs effets sur l'élaboration de la situation et sur les choix didactiques liés au développement de la modélisation en classe au regard de la perspective théorique choisie. Plus précisément, nous fondons notre réflexion sur une analyse culturelle en travaillant sur les programmes de Physique du collège et sur l'exploitation d'informations que les élèves de troisième, avec lesquels nous travaillons, ont récoltées sur le sujet. Cela nous permet de répondre à la question suivante : quelle est la composante interne a priori des élèves au sujet des éclipses de soleil ? Nous poursuivons par une analyse des contenus physiques et mathématiques relatifs aux éclipses totales de soleil avec pour objectif de répondre à la question suivante : quels sont les concepts de la physique et des mathématiques qui peuvent être approchés par le Domaine d'Expérience des éclipses totales de soleil ? Nous manquons de place dans ce texte pour exposer nos résultats à ce sujet (voir Laguerre 2014).

Dans la partie théorique, nous nous sommes interrogés sur la construction en classe de modèles de phénomènes physiques et plus précisément sur la part de cette construction qui peut relever uniquement de la responsabilité de l'enseignant, en complément de celle qui est également assumée par les élèves. Dans notre situation, parce que les élèves n'ont pas une prise directe sur le phénomène étudié lié au macro-espace, par choix, ce dernier est directement modélisé dans le méso-espace par l'expérimentateur. Nous considérons qu'une éclipse totale de soleil se produit lorsque le diamètre apparent de la lune est supérieur ou égal à celui du soleil. L'une des méthodes comparatives pour déterminer le diamètre apparent d'un objet consiste à comparer la taille de l'objet à estimer au champ d'un instrument donné comme des jumelles, une lunette ou un télescope. Nous avons décidé d'employer un objet plus simple : la lorgnette. Quinze d'entre-elles sont construites à partir de boîtes parallélépipédiques toutes de dimensions différentes. Chacune est percée d'un trou de visée et d'une fente. Les élèves ont à viser une mire constituée d'une bande de papier de 1m50 à l'aide de lorgnettes (figure 2). Cette visée va consister à faire coïncider les extrémités de la mire avec celles de la fente afin que la longueur de cette dernière se superpose le plus exactement possible avec celle de la mire.

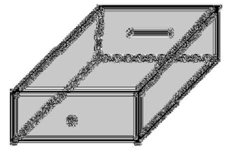


Figure 2 *–Lorgnette*

Les élèves ont alors à modéliser le phénomène du méso-espace dans le micro-espace dans le but de le comprendre dans le méso-espace puis dans le macro-espace et d'accéder au sens de la tangente dans un triangle rectangle.

V. ILLUSTRATION DE LA MODELISATION D'UNE ECLIPSE DE SOLEIL

1. Séance du modèle du méso-espace

Dans le cadre de travaux préalables dont nous ne pouvons rendre compte dans les limites du présent texte, les élèves ont bien pris conscience du mouvement des astres (Laguerre 2014). Ils ont noté que pour qu'il y ait une éclipse de soleil, il fallait que la terre, la lune et le soleil soient alignés sans bien sûr être conscients qu'une question de distances était à prendre en compte. La transposition du phénomène dans le méso-espace est totalement prise en charge par l'expérimentateur grâce à la situation de visée de la mire avec les lorgnettes. Il s'agit de transposer ce phénomène de l'espace à trois dimensions lié à l'alignement des astres que les élèves ont mis en avant à un phénomène plan (trou de visée, mire et fente de la lorgnette).

Analyse a priori

Décrivons la composante externe initiale, en particulier le matériel dont dispose les élèves et les actions qu'ils mènent avec ce dernier. Quinze binômes sont constitués. Chaque binôme vise successivement à l'aide de sa lorgnette une mire fixée sur un tableau en faisant coïncider les extrémités et le milieu de la mire avec les extrémités et le milieu de la fente de la lorgnette. Afin de faciliter cette visée, le milieu et les extrémités de la mire sont représentés par trois traits et le milieu de la fente d'une lorgnette est matérialisé par un morceau de ficelle. La longueur de la lorgnette et la longueur de sa fente ont des effets sur le positionnement des élèves qui assure la coïncidence fente-mire. Les binômes matérialisent ce lieu de la visée avec un carton identificateur.

Passons alors à la composante interne élève. Au sujet de la visée, un travail préalable sur l'alignement a été entrepris mais nous ne pouvons pas le développer ici. Les élèves ont pris conscience qu'il est nécessaire de faire coïncider les extrémités de la fente et de la mire et que pour cela, ils doivent se déplacer perpendiculairement au plan de la mire.

Intéressons-nous à la composante interne enseignant. Les lorgnettes sont fabriquées de telle façon qu'à la fin de la séance apparaissent trois lieux de visées représentés par trois rassemblements distincts de cartons dans la cour. L'objectif est que les élèves fassent ce constat. Pour cela, nous avons à prendre en compte d'éventuels écarts de visées. La taille des cartons identificateurs et le fait qu'ils sont rassemblés dans un rayon de 50 cm permettent qu'ils se superposent au moins partiellement. Les élèves doivent mesurer la distance approximative séparant un lieu de visée de la mire.

Analyse a posteriori

Nous allons mettre en évidence l'évolution de la composante interne élève. Dans la cour, après que tous les binômes ont procédé à la visée en ayant marqué l'emplacement de cette dernière, certains élèves remarquent rapidement que les cartons identificateurs sont regroupés en trois lieux (figure 3). D'autres rajoutent que des lorgnettes différentes peuvent avoir le même lieu de visée. Ils ont procédé à la mesure de la distance de visée pour chaque tas.

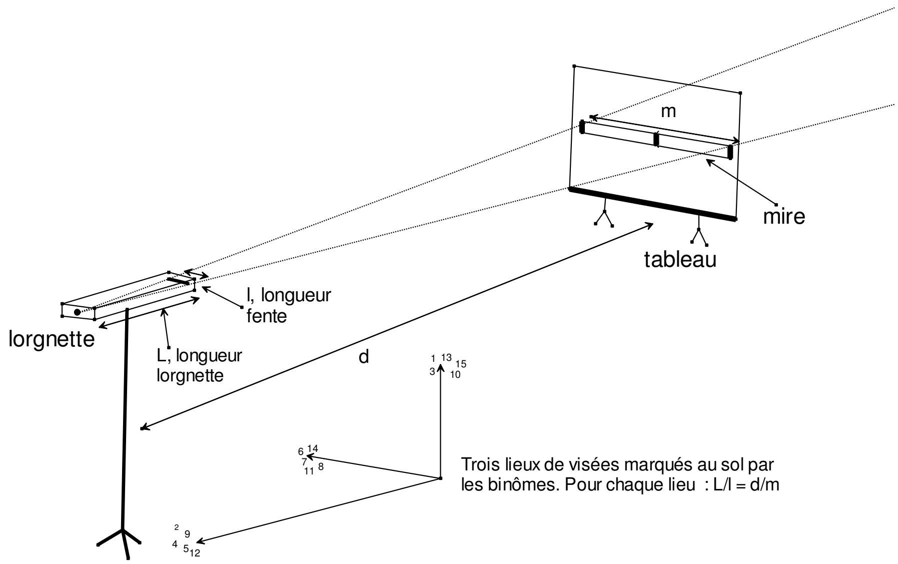


Figure 3 *–Représentation des lieux de visée*

2. *Séance de la représentation plane à l'échelle*

Analyse a priori

Pour ce qui est de la composante interne élève, une analyse des contenus mathématiques en jeu dans la modélisation des lorgnettes que nous ne détaillons pas, permet de dire que les élèves ont travaillé sur les représentations planes à l'échelle. Ces connaissances font partie de leur culture constituée par un travail en particulier en cours de technologie. Une analyse des contenus physiques liés à la situation de visée dans le micro-espace met en évidence que les élèves doivent transposer les contraintes du méso-espace (être bien « en face » et faire coïncider les extrémités de la mire avec celle de la fente de la lorgnette) au micro-espace (aligner trou de visée, milieu de la fente et milieu de la mire).

Composante externe : ces phases doivent permettre aux apprenants, en premier lieu, d'imaginer une façon de représenter la lorgnette ainsi que les longueurs qui sont retenues pour la modélisation. Modéliser des lorgnettes utilisées dans l'espace à trois dimensions par un dessin plan constitue une modélisation qui est loin d'être évidente. Une autre difficulté est liée au fait que des trajets lumineux immatériels doivent être tracés afin de matérialiser la visée dans le micro-espace.

Une fois les lorgnettes représentées à l'échelle sur papier calque, chaque binôme procède à une visée de la mire dans le micro-espace. La mire est représentée par un segment qui n'est bien sûr pas à la même échelle que les lorgnettes.

En ce qui concerne la composante interne enseignant, c'est-à-dire ici l'objectif principal de la représentation à l'échelle, le but pour les apprenants est d'aboutir à la création d'un artefact matériel grâce à une représentation plane et à l'échelle des lorgnettes par des rectangles en papier calque sur lesquels sont indiqués la « fente » et le trou de visée. Cette représentation doit permettre, d'une part, la matérialisation d'une visée du micro-espace et, d'autre part, d'aboutir à une première procédure d'anticipation d'une visée du méso-espace dans le micro-espace. Les élèves, après argumentation, doivent se mettre d'accord sur le fait qu'une représentation plane suffit et sur les longueurs qui sont retenues. Ensuite ils procèdent à une visée dans le micro-espace pour obtenir une première anticipation d'une visée du méso-espace.

Analyse a posteriori

Constatant collectivement que dans le méso-espace, la situation n'était pas facile à étudier, après avoir eux-mêmes proposé de la représenter par un schéma à l'échelle, les élèves discutent, sans disposer de support matériel, pour se mettre d'accord sur le type de représentation qu'ils doivent produire. Quelques élèves sont tentés de schématiser la visée dans l'espace à trois dimensions. Dans ce cas, ils représentent même parfois l'élève qui vise. D'autres produisent des schémas hybrides relevant à la fois du plan et de l'espace. Mais pour deux binômes, la représentation rectangulaire plane est proposée rapidement. Après exposé des schémas obtenus et après échanges entre élèves, les binômes se rangent du côté de la représentation plane. C'est la composante interne des élèves en général qui évolue par le fait qu'il faille parfois négliger certaines choses pour mieux appréhender des objets. Il leur reste à trouver les longueurs que nous allons retenir pour aboutir au modèle.

S'en suit un autre travail en binôme pour la mise au point définitive de la représentation des lorgnettes à l'échelle. Cette échelle est imposée à l'ensemble des groupes et tient compte du centrage de la « fente » et du trou de visée. Sont consignées au tableau de la classe et pour chaque lorgnette, les mesures des longueurs de la fente, de la longueur et de la largeur de la lorgnette (tableau 1). Les élèves disposent de feuilles de calque de format A4. Chaque binôme reproduit sa lorgnette en cinq exemplaires afin que chaque binôme d'un même groupe de cinq lorgnettes équivalentes possède les calques de chacune.

Du point de vue de la composante interne enseignant, nous pouvons dire que nous modélisons une chose visible dans le monde palpable. En effet, des rectangles de même type percés d'un point de visée et « fendus » d'un segment représentant les lorgnettes dans le plan peuvent aussi apparaître dans la situation.

Chaque binôme reçoit l'ensemble des calques des lorgnettes de sa catégorie (A, B ou C).

N°	1	2	3	4	5	6	7	8
Largeur fente	2,75	6,1	1,55	5,2	6,4	2,55	4	3,5
Longueur	27,5	18,3	15,5	15,7	19,2	16	25	22
Largeur	19	11,5	13	9,5	7,5	13	9	14,5
Catégorie	B	C	B	C	C	A	A	A

N°	9	10	11	12	13	14	15
Largeur fente	7,7	1,8	3	4,2	2,5	1	1,3
Longueur	23	18	19	12,7	25	12,5	13
Largeur	8,5	12,5	12	9,5	9,5	13	9
Catégorie	C	B	A	C	B	A	B

Tableau 1 *- Dimensions des lorgnettes avec répartition par catégorie.*

Après avoir modélisé une lorgnette et son champ de visée, l'action de visée d'une mire est elle-même modélisée grâce à cet artefact matériel. Les élèves de chaque groupe procèdent aussi à une visée dans le micro-espace avec l'un de leur calque. Ils ont globalement assimilé le fait que pour qu'une mire soit perçue correctement dans le micro-espace, il faut que deux points soient vérifiés. Les milieux de la mire, de la fente et le trou de visée doivent être alignés perpendiculairement à la mire. Cette dernière doit entrer dans le champ de visée de la lorgnette.

Du point de vue de la composante externe, nous dirons que c'est un premier exemple qui illustre le fait que la modélisation constitue une interface entre deux interprétations de la réalité en rapport avec deux artefacts distincts liés à un même phénomène. Ce rôle de médiation sémiotique est en effet apparent grâce au lien établi entre, d'une part, le fait qu'il faut, pour viser correctement dans la cour, être de face et que les extrémités et les milieux des deux objets doivent coïncider (approche outil) et, d'autre part, l'idée que dans le modèle plan, les extrémités et les milieux en question se situent respectivement sur les côtés et la bissectrice de l'angle de visée (approche objet).

3. *Séance de l'équivalence des lorgnettes*

Analyse a priori

Centrons-nous autour de la composante externe. Les groupes d'élèves sont conservés afin de percevoir les champs de visées identiques par superposition de cinq lorgnettes équivalentes. Dans un second temps, sont également consignées au tableau et pour chaque lorgnette, les mesures des longueurs de la fente, de la longueur et de la largeur de la lorgnette. Sont inscrites aussi celle de la mire ainsi que les distances dans le méso-espace des trois lieux de visée à la mire.

Pour ce qui est de la composante interne élève, l'analyse des contenus mathématiques permet de dire que les élèves doivent avoir travaillé sur l'égalité des angles et sur l'égalité de fractions. Cela a été fait en classe de sixième pour les angles et dans les classes de sixième à troisième pour les fractions.

Enfin, en ce qui concerne la composante interne enseignant, la représentation de la situation de visée doit permettre la mise en évidence de l'équivalence des lorgnettes à partir de la superposition de leur calque. Le fait que les lorgnettes qui appartiennent à la même catégorie de visée ont leurs rapports fente/longueur lorgnette égaux doit aussi émerger. Les contraintes de la composante externe incitent à particulariser les lorgnettes d'une des trois catégories (C) : elles sont telles que nous pouvons supposer que le rapport peut être facilement identifié (largeur fente/longueur lorgnette = 1/10). Dans le prolongement de ce que les élèves ont vu en classe de quatrième en trigonométrie la définition de la tangente complète le tout.

Analyse a posteriori

Pour ce qui est de la composante interne, les élèves d'un groupe obtiennent une bonne équivalence de leurs lorgnettes. Pour cela, ils tracent le champ visuel d'une lorgnette de leur tas et se rendent compte, par superposition, que les autres lorgnettes ont le « même angle ». Nous pouvons conclure que seul ce groupe a obtenu une bonne équivalence des cinq lorgnettes, mais que tous les autres, à part un, mettent en évidence cette équivalence pour au moins trois lorgnettes. La précision des schémas sur papier calque ainsi que sur la feuille blanche est avancée par certains élèves pour expliquer les erreurs apparentes. Une analyse de la composante interne enseignant nous donne alors ce qui suit. Le modèle des lorgnettes en papier calque constitue une nouvelle réalité qui fait émerger un nouveau constat. Dans la salle de classe, après avoir représenté les lorgnettes à l'échelle sur papier calque, les élèves constatent d'eux-mêmes par superposition des calques la coïncidence de cinq angles.

Une nouvelle interprétation peut être faite. Dans la salle de classe, après avoir représenté les lorgnettes à l'échelle sur papier calque, les élèves constatent que l'équivalence des lorgnettes correspond au fait qu'elles ont le même angle de visée (première interprétation mathématique). Il s'agit d'un deuxième exemple qui permet de stipuler que la modélisation est une interface entre un événement lié au modèle (même angle de visée) et un autre en rapport avec la situation initiale.

C'est par des allers et retours entre différents méta-niveaux d'interprétation de la réalité, dont les divers modèles sont une des composantes, que la modélisation se met en place et s'élabore étape par étape.

Par la suite, un nouvel événement dans le modèle lié à l'événement initial apparaît. Dans la salle de classe, après avoir énoncé que les champs de visée sont équivalents et après plusieurs échanges, des élèves finissent par dire qu'en divisant la longueur de la fente d'une lorgnette par la longueur de la lorgnette on trouve à peu près la même chose pour des lorgnettes équivalentes. Une fois cette étape franchie, nous poursuivons la modélisation de la situation et des événements initiaux par la définition d'un nouvel objet : la tangente d'un angle.

VI. CONCLUSION

La situation d'enseignement que nous avons mise en place a pour objectif d'aborder avec des élèves une méthode de modélisation d'un phénomène du réel et de légitimer l'introduction d'une nouvelle notion mathématique telle que la tangente. Nous nous appuyons sur les composantes internes élève/enseignant et sur la composante externe de la DDE. Nous pouvons dire que la modélisation s'établit par un certain nombre d'allers et retours entre différents niveaux d'interprétation de la réalité. Nous avons illustré ces dires à l'aide d'une situation de construction d'une modélisation d'une éclipse totale de soleil. Un autre objectif était de mettre en évidence la manière dont cette situation a pu favoriser chez des élèves la compréhension du phénomène et l'accès à la signification de la tangente.

Au début de la situation, les élèves devaient savoir qu'il y a une éclipse totale de soleil lorsque les trois astres terre, lune et soleil sont alignés, ce qui a été confirmé tant par leurs productions initiales que par les programmes de physique. Aucune condition sur les distances entre les objets célestes n'est apparue dans les écrits des élèves ni n'est exigée dans les textes officiels. Tout notre travail a consisté à faire émerger cette condition. Le choix de transposer le phénomène dans le micro-espace grâce aux lorgnettes s'est produit au vu des programmes et des connaissances initiales des élèves.

L'une des difficultés qui peuvent être rencontrées est que les élèves n'aient aucune fréquentation directe de certains phénomènes, ce qui ne leur permettrait pas d'amorcer seuls une première étape de la modélisation. C'est justement le cas en ce qui concerne les éclipses totales de soleil. Même si ce phénomène fait partie des programmes de collège et de la culture des élèves de ces âges, il s'agit d'un exemple où les représentations préexistantes chez eux sont peu nombreuses. C'est la raison pour laquelle l'expérimentateur a largement pris part à la mise en place du processus de modélisation grâce à la mise en œuvre de la situation des lorgnettes.

D'une manière un peu plus générale au sein de notre situation, en ce qui concerne des choix didactiques à long terme, nous suivons les travaux de Tiberghien. Nous émettons l'hypothèse qu'une des conditions pour aborder avec des élèves d'une façon cohérente la modélisation de phénomènes tirés de la réalité semble être parfois de leur proposer un premier modèle qu'ils ne peuvent pas construire. Par contre, la représentation plane et à l'échelle des lorgnettes est un modèle relevant du micro-espace qui a été construit par les élèves. Deux autres choix didactiques à long terme semblent déterminants en ce qui concerne la mise en œuvre de la modélisation en classe. D'une part, il faudrait s'assurer que le modèle du phénomène choisi est bien pertinent. D'autre part, au vu du temps qu'il faut consacrer à la mise en place d'une telle situation de modélisation, un choix judicieux de la notion mathématique à travailler à un niveau scolaire donné devrait être fait.

REFERENCES

Bartolini Bussi M-G., Mariotti M-A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom : artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In English L. (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education 2nd edition* (pp. 746–783). New York : Routledge.

Boero P., Consogno V., Guala G., Gazzolo T. (2009) Research for innovation : a teaching sequence on the argumentative approach to probabilistic thinking in grades I-V and some related basic research results. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 29(1), 59-96.

Boero P., Douek N. (2008) La didactique des domaines d'expérience. *Carrefours de l'éducation* 26, 99-114.

Dapueto C., Parenti L. (1999) Contributions and obstacles of contexts in the developpement of mathematical knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 39, 1-21.

Laguerre E. (2014) Une modélisation d'une éclipse solaire totale. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 34(2/3), 133-165.

Martinez P. (1987) *Astronomie, le guide de l'observateur (Tome 1).* Toulouse : Société d'Astronomie Populaire.

Matheron Y., Noirfalise R. (2010) Une recherche de la Commission inter-IREM (CII) didactique soutenue par l'INRP : « Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d'AER et de PER ». In Bronner A., Larguier M., Artaud M., Bosch M., Chevallard Y., Cirade G., Ladage C. (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 633-654). Montpellier : IUFM de l'académie de Montpellier.

Tiberghien A., Vince J. (2000) Simuler pour modéliser. *Sciences et techniques éducatives* 7(2), 333-366.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'ORDRE DE GRANDEUR NANO, UNE DIFFICULTÉ DIDACTIQUE INTERDISCIPLINAIRE ET UN ENJEU CITOYEN

Marie-Hélène LÉCUREUX-TÊTU*

Résumé –. Nous étudions ici un dispositif d'enseignement sur les nanotechnologies, mis en place dans un collège français de façon interdisciplinaire, dont l'objectif est de permettre la compréhension de l'ordre de grandeur nanométrique. Les nanotechnologies sont porteuses de questionnements sociaux et éthiques ; pour pouvoir répondre à ces questionnements, les citoyens doivent appréhender l'ordre de grandeur nanométrique et ce qui s'y joue. L'analyse du dispositif met en évidence les difficultés d'articulation entre les disciplines et plus particulièrement la difficulté à enseigner la notion d'ordre de grandeur.

Mots-clefs : interdisciplinarité, ordre de grandeur, nanotechnologies, TAD

Abstract– We study a teaching device on nanotechnologies set up in a French college in an interdisciplinary way. The aim of this device is to allow the understanding of the nanometric order of magnitude. Nanotechnologies are carriers of social and ethical issues; to answer these questions the citizens must understand the order of nanometer size and what plays it. The analysis highlights the difficulties of articulation between disciplines and especially the difficulty to teach the notion of order of magnitude.

Keywords: interdisciplinarity, order of magnitude, nanotechnology, ATD

I. INTRODUCTION

Dans le cadre de la promotion de la culture scientifique et technique en France, les professeurs des disciplines scientifiques ont la possibilité d'organiser des dispositifs d'enseignement permettant de rencontrer des chercheurs.

Nous nous intéressons à un dispositif de ce type, construit autour de la recherche sur les nanotechnologies, et aux questionnements éthiques associés. Ce dispositif a été mis en place dans quelques collèges français (classes de 3^e, élèves de 14-15 ans, 4^e année de collège). Nous analysons plus particulièrement la version initiale de ce dispositif, dans les années scolaires 2009-2010 à 2012-2013. La construction en a été pensée de façon interdisciplinaire. Notre analyse concerne plusieurs parties de ce dispositif :

1. Des séances d'enseignement autour de la question « qu'est-ce que les nanotechnologies ? », avec les professeures de mathématiques, physique-chimie, technologie. Nous appellerons ces séances les « séances de sciences » par abus de langage. Ces séances ont précédé la visite d'un laboratoire de recherche sur les nanotechnologies, le laboratoire d'analyse et

* Espé de l'académie de Toulouse, Université Toulouse Jean Jaurès – France – marie-helene.lecureux@univ-tlse2.fr

Lécureux-Têtu Marie-Hélène (2015) L'ordre de grandeur nano, une difficulté didactique et un enjeu pour le citoyen. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 478-489.

d'architecture des systèmes (LAAS). Des chercheurs du LAAS interviennent dans la dernière séance de sciences, et ont encadré la visite. Nous ne savons pas comment cette visite s'est déroulée, et en particulier comment les professeures des classes sont intervenus, si ce n'est en accompagnant les élèves.

2. Une partie débat en éducation civique, juridique et sociale (ECJS), menée par le professeur d'histoire-géographie. Une chercheure en sciences de l'éducation s'est engagée dans ce projet. Elle a travaillé plus particulièrement avec le professeur d'ECJS pour la mise en place du débat. Ce travail est réalisé en lien avec des chercheurs de l'équipe QSV (Questions Socialement Vives) de l'ENFA à Toulouse. Ces chercheurs ont publié à partir de l'analyse des débats, selon le point de vue QSV, on pourra consulter par exemple Brossais et Panissal (2013). Des études sur les relations aux sciences et le genre sont prévues, nous avons fait attention à garder les marqueurs de genre dans cette communication. Nos travaux apportent le regard plus spécifique de la didactique des mathématiques.

Par ailleurs, les élèves ont étudié en anglais du vocabulaire scientifique. En français, ils ont étudié un roman de science-fiction. Nous n'avons pas de trace du contenu de cette partie du dispositif.

Les résultats que nous présentons ici s'appuient sur l'analyse des séances de sciences, les enregistrements étudiés datant de l'année 2009-2010. Cette analyse a été réalisée à partir du cadre théorique fourni par la théorie anthropologique du didactique (TAD). Le débat en ECJS n'a pas été enregistré cette année-là, mais les années suivantes. Nous avons analysé deux débats : celui de l'année 2010-2011 et celui de 2012-2013. Cette analyse a été réalisée dans le cadre d'un mémoire de master recherche en didactique ; nous ne présentons ici qu'une petite partie des résultats.

Dans un premier temps, cette communication décrira les questionnements sociaux et/ou éthiques spécifiques aux nanotechnologies. Cette partie faisant appel à de nombreux sites internet, on trouvera après les références la liste des sites ressources. Nous mentionnerons dans cette partie certains points débattus par les élèves en ECJS, sans développer – faute de place – les contenus des débats. Dans un deuxième temps, nous décrirons certains résultats de l'analyse des séances de sciences. Enfin, nous nous attacherons plus particulièrement à l'enseignement de l'ordre de grandeur.

II. LES NANOTECHNOLOGIES, UN ENJEU CITOYEN

1. *Le nanomètre*

Intéressons-nous au préfixe *nano*. Ce préfixe est défini légalement en France et dans les 56 pays membres du bureau international des poids et mesures (BIPM) depuis la 11^{e} conférence générale des poids et mesures en 1960 : une nano unité correspond à 10^{-9} unité. Depuis cette conférence, d'autres préfixes ont été rajoutés en 1964, 1975, et en 1991, aussi bien pour des grands nombres que pour des petits nombres, ce qui met en évidence une évolution des besoins dans l'écriture des nombres.

Le nanomètre est l'ordre de grandeur de la dimension de certains atomes. Travailler à cette échelle donne de nouvelles propriétés. Ainsi les effets quantiques commencent à être perceptibles.

Certaines propriétés des matériaux sont liées à la surface, et non au volume. C'est le cas de la réaction chimique entre deux éléments, qui se fait par le contact, et donc par la surface. Considérons un cube de côté c : la masse est proportionnelle au volume, donc à c^3, et la surface est proportionnelle à c^2. Si on considère que le nombre de réactions chimiques est proportionnel à la surface, on obtient un rapport : nombre de réactions sur masse proportionnel à $1/c$. Un cube de l'ordre du nanomètre permet donc 1000 fois plus de réactions chimiques rapportées à la masse qu'un cube de l'ordre du micromètre.

En biologie, la dimension des cellules est de l'ordre de grandeur du micromètre. Les nanomatériaux présentent des dimensions bien inférieures et vont pouvoir interférer avec les cellules d'un organisme. Ainsi le nano-argent est utilisé pour ses propriétés antibactériennes.

Actuellement, l'homme est capable de fabriquer des objets dont au moins une dimension est de l'ordre du nanomètre, c'est ce qu'on appelle les nanotechnologies. Du point de vue savant, les nanotechnologies se positionnent d'emblée comme un objet pluridisciplinaire avec des recoupements entre informatique, biotechnologie, etc.

Les questionnements sociaux et éthiques liés aux nanotechnologies sont nombreux, et de différents types, nous présentons certains questionnements fondamentaux, en les reliant à ce qui a été travaillé par les élèves dans le cadre de l'éducation civique, juridique et sociale.

2. *Informatique et liberté*

Dans la visite du LAAS effectuée par les classes, les chercheurs montrent des expériences sur des objets connectés. Rappelons qu'en 2009 ce type d'objets n'était pas encore commercialisé. Au cours du débat de 2013, les élèves s'interrogeront sur la liberté de l'homme dans un monde très automatisé. Ils se questionneront aussi sur la sécurité informatique. Mais bien d'autres utilisations des nanotechnologies en informatique concernent le citoyen.

Les nanotechnologies ont permis une telle miniaturisation qu'on trouve maintenant des puces électroniques suffisamment petites pour les glisser sous la peau. Ce type de puce sert à marquer les animaux domestiques, ce qui permet d'identifier l'animal, de retrouver ses données médicales, en particulier les vaccinations. L'identification électronique est obligatoire pour ramener sur le territoire de l'Union Européenne un chat, un chien ou un furet.

De l'animal à l'homme, il n'y a aucune difficulté technique. Il est envisagé le marquage de malades difficiles aux USA, l'implantation de puces nanométriques utilisées comme badges pour entrer dans des locaux de la justice mexicaine, et utilisées sur des enfants au Mexique pour lutter contre les kidnappings.

La miniaturisation permet aussi un étiquetage qualifié d'« intelligent ». Ce système, appelé RFID, est composé d'une part d'une radio-étiquette, qui contient un émetteur et des circuits logiques (la puce électronique), et d'autre part d'un lecteur. La radio-étiquette n'a pas besoin d'énergie, celle-ci est apportée par le lecteur au moment de la lecture. Ce système est utilisé actuellement dans l'industrie : pour la gestion des stocks, les cartons d'objets fabriqués peuvent être ainsi marqués et suivis, le respect de la chaîne du froid peut être contrôlé. On imagine aussi des systèmes comme une machine à laver équipée d'un lecteur, et choisissant elle-même son programme en fonction des étiquettes du linge.

Les états européens disposent chacun d'une Commission Nationale de l'Informatique et des Libertés (CNIL). La CNIL française donne, dans une fiche pratique, les informations suivantes :

> La communication du 30 octobre de M. Philippe Lemoine, commissaire de la CNIL, sur le sujet de la radio-identification identifie 4 pièges qui concourent à minorer le risque que présente cette technologie en matière de protection des données personnelles et de la vie privée : l'insignifiance [apparente] des données, la priorité donnée aux objets [en apparence toujours vis-à-vis des personnes], la logique de mondialisation [normalisation technologique basée sur un concept américain de « privacy » sans prise en

> compte des principes européens de protection de la vie privée] et enfin le risque de « non vigilance » individuelle [présence et activation invisibles].
>
> Les technologies de radio-identification peuvent être utiles pour des finalités légitimes bien définies, mais, parce que le maillage dense de milliers d'objets qui entoureront une personne pourra ainsi être analysé, de façon permanente (le potentiel de rayonnement d'un RFID est illimité dans le temps car aucune batterie n'est nécessaire), permettant potentiellement le «profilage » des individus, elles font peser sur les individus un risque particulier.

Ce texte est à mettre en regard avec le débat 2013. Les élèves ont débattu de l'espionnage rendu possible par la miniaturisation des caméras ; l'insignifiance apparente des données se retrouve dans ce qu'ils expriment. Signalons que la CNIL fournit des documents pour les enseignants de collège. Il nous semble qu'il y a ici un travail conséquent à faire pour la formation du citoyen.

3. *Les risques sanitaires et environnementaux*

Nous nous appuyons ici sur de la documentation issue du site VeilleNanos. Ce site dépend de l'association de veille et d'information civique sur les enjeux des nanosciences et des nanotechnologies (AVICENN), dont l'objectif est de proposer une information transversale et indépendante sur les enjeux sociétaux soulevés par les nanotechnologies.

La fiche de ce site sur les portes d'entrées des nanomatériaux dans le corps humain indique qu'on distingue trois voies d'exposition potentielle aux nanomatériaux.

La première voie est celle de l'inhalation, qui concerne particulièrement les personnes qui travaillent dans les nanomatériaux.

La deuxième voie est celle du contact cutané par le biais des cosmétiques, comme le dioxyde de titane dans les crèmes solaires, mais aussi par les vêtements. Un exemple est donné par le nano-argent qui est utilisé pour ses propriétés antibactériennes dans la fabrication des chaussettes. La barrière cutanée est plus facile à franchir à l'échelle nanométrique qu'à l'échelle micrométrique.

La troisième voie est celle de l'ingestion. Certains additifs alimentaires contiennent des nanoparticules, comme les additifs E550, E551 (dioxyde de silice), utilisés pour les propriétés antiagglomérantes ou l'additif E 171 (dioxyde de titane) utilisé pour donner un aspect plus blanc et allonger la durée de conservation de certains bonbons. Les nanomatériaux sont utilisés dans les emballages alimentaires pour améliorer la conservation, la transparence, mais aussi l'écoulement des sauces. La question de la migration de nanoparticules dans l'aliment emballé n'est pas résolue.

La France est le premier pays à se doter d'un répertoire des nanomatériaux, R-Nano. Il s'agit du décret n° 2012-232 du 17 février 2012 ; son entrée en vigueur devait avoir lieu en 2013, elle a été effective en mai 2014. En voici un extrait :

> Art. R. 523-13. – Chaque fabricant, importateur et distributeur d'une substance à l'état nanoparticulaire, en l'état ou contenue dans un mélange sans y être liée, ou de matériaux destinés à rejeter cette substance dans des conditions normales ou raisonnablement prévisibles d'utilisation effectuent la déclaration exigée à l'article L. 523-1 dès lors qu'il produit, importe ou distribue au moins 100 grammes par an de cette substance.

On retrouve ces préoccupations dans les débats réalisés en ECJS. La question de l'impact environnemental des objets issus des nanotechnologies est une question qui prendra une place importante dans le débat de 2013.

4. *L'hybridation avec le vivant.*

On rencontre l'imitation du vivant en médecine dans la vectorisation des médicaments. Il est possible d'imiter les flagelles de bactéries pour que le médicament puisse être transporté jusqu'à la cellule malade.

Un premier questionnement a été soulevé dans la science-fiction, en imaginant la prolifération de nano robots. La gelée grise est une idée apparue dans un roman, *Engines of Creation, the Coming Era of Nanotechnology* publié en 1986 par Eric Drexler et traduit en français en 2005. Il s'agit de nano machines capables de fabriquer elles-mêmes des nano machines. Leur nombre pourrait croître de façon exponentielle, et finir par tout dévorer pour se reproduire. La gelée grise est la masse formée par ces nano machines. Un autre auteur, Michel Crichton, dans *La Proie,* utilise le concept de gelée verte. Cette fois-ci, il s'agit de nano robots fabriqués à partir de l'hybridation d'organismes vivants et de matériaux non organiques qui se répliquent de façon non contrôlée.

Les élèves ont rencontré la notion de gelée grise dans l'étude d'un roman en français. Ils l'évoqueront dans le débat de 2011.

Loin de la fiction, un rapport du Sénat (Lorrain & Raoul 2004, disponible en ligne) signale des risques éthiques liés à l'emploi détourné des nanotechnologies, non pour soigner, mais pour augmenter les performances humaines. On trouvera des exemples au chapitre trois de ce rapport, en voici un extrait :

> o Une équipe californienne travaille sur une prothèse électronique destinée à remplacer un hippocampe défaillant chez certains malades amnésiques. Lorsqu'on sait que l'hippocampe est une partie du cerveau indispensable à la mémorisation, on peut imaginer que certains pensent déjà à l'implantation d'une puce donnant accès à une mémoire illimitée. Ces électrodes, qui agissent si bien sur certaines zones du cerveau, peuvent aussi, demain, stimuler d'autres zones, sièges de plaisir. Et laisser croire à de proches paradis bioniques artificiels […]
>
> o Enfin, l'action d'électrodes sur des zones précises du cerveau permettrait de camoufler parfaitement le dopage sportif, puisque la surproduction de molécules endogènes, telles que les endorphines ne serait due qu'à une stimulation cérébrale.

On peut penser aussi à des applications d'ordre militaire, en augmentant différentes aptitudes des soldats. Ici, l'ordre de grandeur nanométrique permet d'agir sur les aspects biologiques du corps humain, plus particulièrement sur le cerveau. Ce point ne sera pas évoqué dans les débats. Néanmoins, il nous semblait important de le mentionner, dans la mesure où cette notion d'homme augmenté commence à faire débat dans la presse.[171]

III. LES SEANCES DE SCIENCES

1. *Le déroulement des séances de sciences*

Les deux premières séances ont été codirigées par les professeures de mathématiques et physique-chimie. La dernière séance, d'une durée double, a été codirigée par les professeures de physique-chimie et technologie.

Dans la première séance, les élèves ont eu à apporter « quelque chose de petit », la consigne est donnée dans ces termes par les professeures. Les élèves vont commencer par mesurer ce qu'ils ont apporté, ce qui permettra d'établir un tableau donnant des objets et les dimensions correspondantes. Ensuite, ils regarderont un dessin animé sur les nanotechnologies. Ce film (Martin Cerclier & Vieu 2009) est destiné à des collégiens et

[171] On trouvera des exemples dans des journaux comme Paris-Match, Les Échos, etc.

lycéens de 10-16 ans, il a été écrit par des chercheurs participant au dispositif. Un retour sera fait ensuite sur les objets mesurés.

Dans la seconde séance, il s'agit de représenter certains des objets apportés par les élèves sur un axe gradué. Après avoir constaté que le choix d'une échelle permettant de tout placer est rendu impossible par l'étendue des différentes mesures, les professeures amènent les élèves à placer les objets dans un tableau appelé « tableau de conversion » - même s'il ne servira pas à cet usage-. Nous reproduisons ci-dessous un tableau du même type.

dam	*m*	*dm*	*cm*	*mm*			*µm*			*nm*

Figure 1*- Tableau dit de conversion*

Cette séance se termine par un exercice sur un énoncé extrait du film : il est demandé aux élèves de calculer la dimension d'un atome de carbone sachant que le rapport de taille entre la Terre et une balle de tennis est le même que le rapport entre la balle de tennis et l'atome de carbone. La dimension concernée est le rayon, ce qui n'est pas précisé dans le film.

Dans la troisième séance, un des chercheurs du LAAS est présent. Les élèves devront d'abord évaluer la longueur d'un élément sur des images issues d'un microscope, les différentes images pouvant être issues de différents types de microscopes. Ainsi dans l'image en figure 2, les élèves ont eu à évaluer la longueur de ce qui est représenté par le trait rouge sur l'image, l'échelle étant en blanc sur celle-ci (en bas de l'image, la qualité de celle-ci ne permet pas une meilleure représentation).

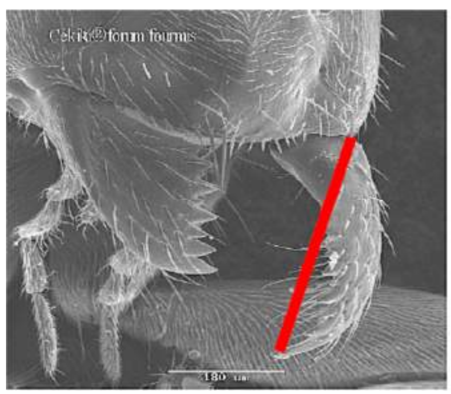


Figure 2*- Une des images manipulées*

Ensuite, les élèves auront à reconnaître ce qui est représenté, en s'appuyant sur l'ordre de grandeur de ce qu'ils ont évalué. Pour finir, le chercheur présente son travail de recherche aux élèves.

Nous avons analysé des praxéologies mises en place dans la classe. Certaines montrent des difficultés d'articulation entre les disciplines visibles au niveau de la technique, c'est celles que nous présentons dans cette partie.

2. *La mesure des objets apportés*

Lors de la première séance de sciences, les élèves ont eu à mesurer les objets de petite taille qu'ils ont apportés. Plusieurs problèmes concrets se sont manifestés.

Premier problème : un élève a apporté un filament de tabac. Est-ce la longueur ou le diamètre qu'il faut considérer ? Cette première difficulté a été résolue directement par les professeures, la consigne est donnée que, lorsqu'il y a plusieurs dimensions possibles pour un objet, on s'intéresse à la plus petite. Il ne sera jamais explicité que la seule grandeur considérée est la longueur.

Second problème : la technique de mesure. Les élèves disposent uniquement de double-décimètres gradués. Cet instrument n'est pas commode pour mesurer avec une précision inférieure au millimètre. De plus, il n'est pas adapté pour la mesure d'objets de forme sphérique comme la perle de cartouche d'encre apportée par un élève. Or il existe un outil de mesure adapté, qui est disponible – en principe – dans les collèges français : il s'agit du pied à coulisse. Celui-ci est mentionné dans le programme de technologie de la classe de 6^{e} (élèves de 11-12 ans, 1^{e} année de collège).

Par ailleurs, les comptes rendus montrent qu'il a pu être utilisé une technique d'estimation « à vue d'œil », comme le montre l'extrait du compte rendu :

> Bon, la taille du grain de sel, alors il l'avait estimé à zéro virgule zéro, zéro, un millimètre, je crois qu'il a vu un peu petit, on va dire zéro virgule un.

Nous voyons apparaître une première difficulté d'articulation entre les disciplines : les professeures de mathématiques et sciences physique et chimique n'ont pas questionné la technique de mesurage et n'ont pas utilisé la richesse apportée par l'enseignement de technologie.

En effet, le type de tâches « mesurer un objet » n'a pas été travaillé comme cela pourrait l'être en cours de technologie. La technique décrite très schématiquement par la liste d'actions suivante « placer l'objet dans un pied à coulisse et lire la mesure sur la graduation du pied à coulisse » est pratiquée dans cette discipline. La technologie (au sens de la TAD) associée à cette technique comporte l'existence du pied à coulisse. Il s'agit ici d'un élément de technologie pratique $\square^{p}$ comme ont pu le présenter Castela et Romo-Vásquez (2011, p. 82) dans leurs travaux sur l'enseignement de la transformée de Laplace en automatique et en mathématiques.

Nous avons pu remarquer aussi que la professeure de physique-chimie n'utilise pas pleinement le contenu du programme de sa discipline : l'incertitude de mesure est en effet au programme de 4^{e} (élèves de 13-14 ans, 3^{e} année de collège), la classe devait donc l'avoir travaillé auparavant. Cette activité de mesurage semble un prétexte pour travailler la suite, et n'a pas de raison d'être visible. L'explication de ce manque de relation avec l'enseignement de la technologie réside peut-être dans le rôle assigné à l'activité de mesurage, qui sert plutôt à introduire ce qui va suivre, et ne semble pas être un enjeu véritable de l'étude menée.

3. *Les différentes techniques de calcul de la proportionnalité*

Dans les deux dernières séances, la classe a été amenée à faire des calculs liés à des changements d'échelle.

La première fois, la professeure de mathématiques est présente, et va guider l'étude. Lors de la deuxième séance, un problème de calcul de proportionnalité a été donné aux élèves : il s'agit de déterminer la taille d'un atome de carbone, sachant que le rapport de taille entre une balle de tennis et l'atome de carbone est le même qu'entre la taille de la Terre et d'une balle de tennis. La vidéo permet de voir que la trace écrite au tableau n'est pas celle du produit en croix, mais semble s'appuyer sur un calcul de coefficient de proportionnalité.

La seconde fois, la classe retrouve le calcul d'échelle, à partir des images issues de divers microscopes. Les élèves doivent calculer la longueur réelle d'un élément apparaissant sur une image, en le mesurant, et en connaissant l'échelle. Les professeures de sciences physiques et chimiques, et de technologie imposent le produit en croix, ce qui pose problème à certains élèves, comme Laure :

Laure : Pour le produit en croix ça fait en même temps, j'ai un petit peu pareil.

Professeure de physique : J'ai pas compris Laure.

Professeure de technologie : Elle veut économiser l'écriture du produit en croix.

Actuellement, le produit en croix est une technique très répandue hors du champ de l'enseignement des mathématiques. Roditi (2014) dans ses différents travaux sur l'enseignement du calcul de doses médicamenteuses dans la formation aux soins infirmiers a montré le poids de cette technique et les croyances des formateurs à ce sujet. Nous retrouvons ici ce poids du produit en croix.

IV. LA NOTION D'ORDRE DE GRANDEUR

1. *L'ordre de grandeur en mathématiques et en sciences physiques*

Vignes et Bronner (2005) ont mis en évidence les difficultés d'articulation entre physique et mathématiques dans les anciens programmes pour l'enseignement des « mesures et ordres de grandeur » en classe de 2$^{\text{nde}}$ (élèves de 15-16 ans).

La notion d'ordre de grandeur était alors présente conjointement dans les deux programmes de physiques et de mathématiques. Apparaissaient alors dans les classes des définitions différentes. En mathématiques, l'ordre de grandeur d'un réel x écrit sous la notation scientifique $x = a \times 10^n$ s'obtenait en arrondissant a à l'entier le plus proche (entier à un seul chiffre). En physique, l'ordre de grandeur de x était défini comme la puissance de 10 la plus proche de x. Ainsi 394 avait pour ordre de grandeur 400 en mathématiques, et 100 en physique.

Actuellement, en physique-chimie, la notion d'ordre de grandeur n'est évoquée que dans le préambule du programme. Elle n'est plus définie, mais les recherches sur internet montrent une relative unanimité sur la définition utilisée par les professeures de sciences physiques et chimiques, correspondant à l'ancien programme de 2$^{\text{nde}}$. Une étude serait à mener sur l'utilisation de l'ordre de grandeur en physique, alors que cette notion n'apparait plus dans le corps du programme.

La notion d'ordre de grandeur apparait dans les programmes de mathématiques actuels au collège, programmes disponibles sur le site du ministère (MEN 2008). Ainsi les ordres de grandeur sont placés dans le domaine « nombres et calculs ». Voici une définition rapportée par une étudiante, réalisant un stage d'observation dans une classe de 6$^{\text{e}}$ (élèves de 11-12 ans, 1$^{\text{e}}$ année de collège) :

Calculer un ordre de grandeur d'une somme, c'est trouver mentalement un nombre "proche" de cette somme.

Dans ce programme, l'ordre de grandeur apparait aussi dans le bandeau de présentation du domaine « grandeurs et mesures » pour la classe de 6$^{\text{e}}$ (élèves de 11-12 ans, 1$^{\text{e}}$ année de collège) :

Il est important que les élèves disposent de références concrètes pour certaines grandeurs et soient capables d'estimer une mesure (ordre de grandeur).

On observe ici un autre concept : l'association d'une référence et d'une dimension. Quand on évoque l'ordre de grandeur, c'est souvent de cela qu'il est question. Un extrait du compte rendu de la deuxième séance de sciences montre bien cette association en action :

Professeure de mathématiques : Quel ordre de grandeur pour la cellule ?

Élève : zéro virgule… d'autres élèves interviennent

Élève : Ah bon ? Un millimètre ?

Professeure de mathématiques : Micromètre.

Élève : Ah bon ! Je me disais aussi.

L'élève a bien en tête une association entre une longueur et un objet de référence. Le micromètre convient, ce n'est pas le cas du millimètre. La question de la professeure de mathématiques a pour objectif de vérifier cette association. L'analyse des séances montre que l'un des grands objectifs des séances de sciences a été de créer cette construction d'une association entre des objets, très petits, qui vont servir de référence et l'ordre de grandeur.

2. *Un apport des sciences de la vie pour l'ordre de grandeur : l'échelle de taille*

Les professeurs de sciences de la vie et de la terre (SVT) sont confrontés à la difficulté de faire saisir aux élèves des dimensions hors de l'échelle humaine. Dans l'extrait du compte rendu ci-dessus, nous avons noté qu'un élève a bien en tête l'ordre de grandeur de la cellule. La notion de cellule est au programme des SVT dès le début du collège (classe de 6^{e}, élèves de 11-12 ans, 1^{e} année de collège).

Pour aider à la compréhension des différentes dimensions, il est usuel dans cette discipline d'utiliser un graphique appelé échelle de taille, ou échelle des dimensions. Nous donnons ci-après une échelle des dimensions (figure 3), qui a été utilisée dans un document à propos des nanotechnologies. Cette illustration est extraite d'une page qui fournit du rapport du Sénat que nous avons cité précédemment (Lorrain & Raoul 2004). Cette image est placée dans l'introduction, pour illustrer la taille nano.

Les échelles de dimension sont construites à partir d'un axe gradué. À chaque graduation est associée une puissance de 10 – on obtient donc, en fait, une échelle logarithmique. Sur cet axe, sont positionnées des images représentant des objets de référence. Ainsi, on peut voir sur la figure 3, à gauche, une fourmi, un cheveu, un globule rouge et à droite, un circuit intégré et un nanotube de carbone.

Lors de la troisième séance de sciences, le mur est orné d'une frise, reproduisant le décor du laboratoire dans le dessin animé. Cette frise (figure 4) est du même type que l'échelle des dimensions : il s'agit d'associer une référence, donnée sous forme illustrée à un ordre de grandeur de longueur.

Dans cette troisième séance de sciences, les élèves ont à manipuler des images issues de différents microscopes. Ils auront ensuite à placer ces images sur la frise, en correspondance avec l'ordre de grandeur.

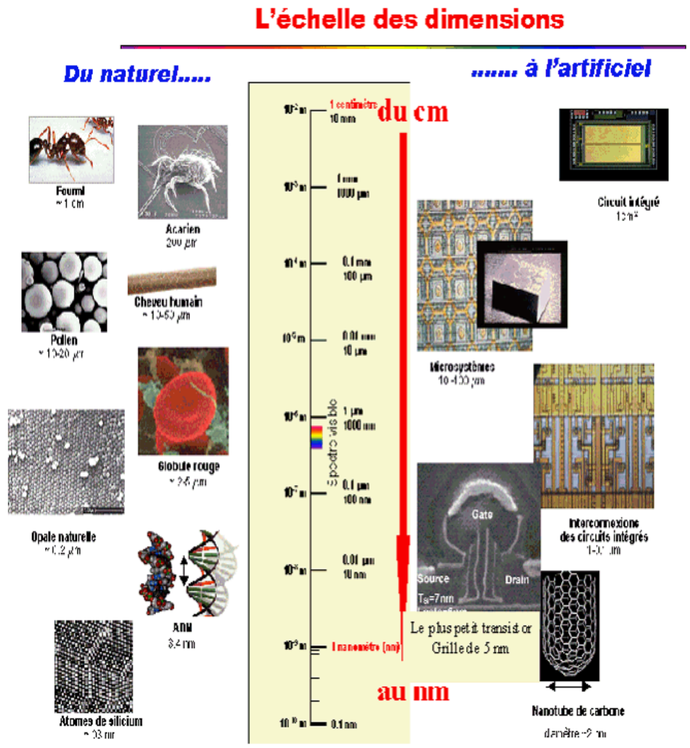


Figure 3- *Un exemple d'échelle des dimensions*

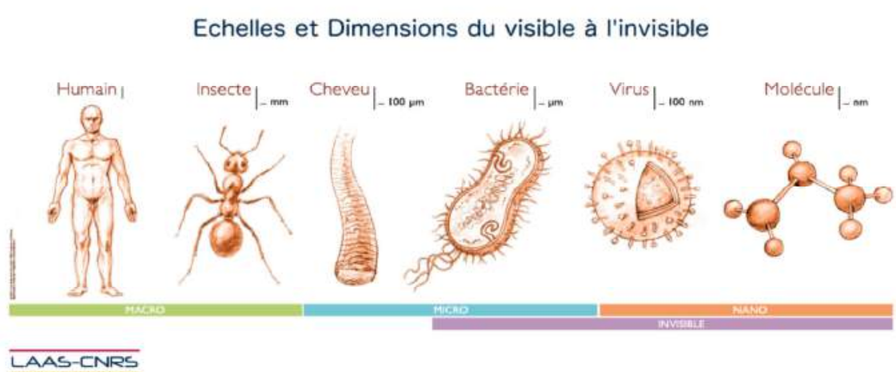


Figure 4- *Frise décorant la salle de classe*

Un point est intéressant à noter : on passe de l'insecte au cheveu en divisant par 10, du cheveu (100 µm) à la bactérie (1 µm) en divisant par 100. De la bactérie au virus, on divise à nouveau par 10, et du virus à la molécule, on divise par 100. Les rapports ne sont pas conservés. L'échelle n'est pas vraiment logarithmique. Il semble plus important de faire le lien entre objet et ordre de grandeur que de respecter les rapports des longueurs. On trouve parfois sur des documents de vulgarisation scientifique l'utilisation de rapports de longueurs pour essayer de donner une idée de l'ordre de grandeur de tel ou tel objet présenté. En comparant avec la frise présentée ici, nous pouvons nous demander si cette utilisation de rapports de longueurs est pertinente.

V. CONCLUSION

Le dispositif mis en place a eu, dans ses objectifs, la rencontre avec l'ordre de grandeur nanométrique. Nous avons vu que cet ordre de grandeur est un point essentiel pour comprendre les enjeux des nanotechnologies. Pour que la société puisse débattre sur les nanotechnologies, et prendre démocratiquement des décisions sur leur usage, il est indispensable que le citoyen puisse comprendre ce qui se joue à l'ordre de grandeur nanométrique. Or l'analyse didactique du dispositif montre que la notion d'ordre de grandeur est difficile à appréhender.

Les professeures qui sont intervenues dans les séances analysées ont modifié leur façon d'enseigner les nanotechnologies. Cette nouvelle forme permet-elle de mieux appréhender la notion de nano ? L'aspect théorique reste à approfondir : comment se jouent les liens entre les disciplines ? Quel est l'effet de la présence des chercheurs, comment se joue la transposition didactique dans ce cadre ?

REFERENCES

Brossais E., Panissal N. (2013) Nouvelles formes d'interaction science-société au collège : le cas de l'éducation citoyenne aux nanotechnologies. *Les dossiers des sciences de l'éducation. Les sciences et crises contemporaines*, 29, 81-108

Castela C., Romo Vázquez A. (2011) Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79-130.

Martin Cerclier C., Vieu C. (2009) DVD, A precious envelope for budding scientists. Film d'animation, *Heladon*, Toulouse.

Panissal N. (2014) *Apprentissage des savoirs socio-éthiques à travers le débat sur une Question Socialement Vive : l'exemple de l'éducation citoyenne aux nanotechnologies.* Mémoire de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches, tome 1, Université de Toulouse, 270 pages.

Roditi E. (2014) Le calcul de doses médicamenteuses. Pratiques professionnelles et choix de formation en soins infirmiers. *Recherches en didactique des mathématiques* 34(2/3), 103-132.

Vignes M., Bronner A. (2005) *Ruptures et continuités : mesures, nombres et ordres de grandeur en seconde.* Actes du 5e colloque international Recherche(s) et Formation «Former des enseignants-professionnels, savoirs et compétences», Nantes.

SITES CONSULTÉS

CNIL, fiche pratique non datée http://www.cnil.fr/documentation/fiches-pratiques/fiche/article/la-radio-identification/ (site consulté le samedi 29 août 2015)

Journal officiel de la République Française, n° 0043 du 19 février 2012, page 2863, http://www.legifrance.gouv.fr/affichTexte.do?cidTexte=JORFTEXT000025377246&categorieLien=id

Lorrain J.-L., Raoul D., (2004) Rapport sur « Nanosciences et progrès médical », site du Sénat http://www.senat.fr/rap/r03-293/r03-2932.html, (page consultée le samedi 31 janvier 2015)

MEN (2008) Programmes des enseignements de mathématiques, de physique-chimie, de sciences de la vie et de la Terre, de technologie pour les classes de sixième, de cinquième, de quatrième et de troisième du collège, disponibles sur http://www.education.gouv.fr/cid22120/mene0817023a.html.

VeilleNanos : *http://veillenanos.fr/wakka.php?wiki=PagePresentation* (site consulté le vendredi 28 août 2015)

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'ENSEIGNEMENT DU LOGARITHME AU COLLÈGE ET AU LYCÉE AU CONGO-BRAZZAVILLE :

LA RELATION MATHÉMATIQUE – CHIMIE EN QUESTION

Fernand MALONGA MOUNGABIO*

Résumé - Nous présentons ici quelques éléments d'un travail didactique portant sur la relation mathématiques - chimie pour ce qui concerne le logarithme au niveau des classes de troisième (collège) et terminale scientifique (lycée). Ces éléments concernent l'analyse des programmes et manuels scolaires de mathématiques (2009) et de chimie (éditions 2002). Dans les programmes de mathématiques de collège, une place est accordée au logarithme (mode d'introduction et de traitement) sans que le lien avec la chimie soit explicitement évoqué. Cette analyse montre que la continuité didactique que l'on est en droit d'attendre au regard du programme et des intentions dudit programme se heurte à de nombreux obstacles.

Mots-clefs : Mathématiques, chimie, enseignement, interdisciplinarité

Abstract - We hereby introduce some concepts of a didactic study that is focused on the relationship between mathematics and chemistry in the use of logarithm, both in grade nine (last grade in middle school) and in scientific grade twelve (last grade in high school). We are concerned with the analysis of curricula/programs as well as mathematics and chemistry textbooks (respectively 2009 & 2002 editions). In the middle school mathematics curriculum/program, the concept of logarithm is studied without explicit explanations about the link to chemistry. This analysis shows that the didactical continuity, which is supposed to establish connections between the two programs, faces many obstacles.

Keywords: Mathematics, chemistry, teaching, interdisciplinarity

I. CONTEXTE ET PROBLEMATIQUE

La volonté d'une mise en relation forte des disciplines scientifiques dans les programmes scolaires de collège et de lycée au Congo, en particulier entre mathématiques et sciences physique, a conduit à des choix de thèmes devant concrétiser cette connexion interdisciplinaire. Concernant la relation mathématiques – chimie, il s'agit de l'introduction du logarithme dès le collège en mathématiques, ceci est en relation avec le calcul du pH en chimie, au collège et au lycée.

L'enseignement des mathématiques se trouve donc face à un double défi :

- Celui d'un changement radical par rapport aux anciens programmes qui n'introduisaient le logarithme en tant que « fonction » qu'en classe de terminale scientifique (lycée). Actuellement, le logarithme est introduit comme nombre dès le

* Université Marien Ngouabi – Congo (Brazzaville)

Malonga Moungabio F. (2015) L'enseignement du logarithme au Collège et au Lycée au Congo-Brazzaville : la relation mathématique –chimie en question. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 490-503.

collège (classe de 4^{e}-$8^{ième}$ année de scolarité). Son traitement comme « fonction » se fait plus tard au lycée.

- Celui du lien avec l'enseignement de la chimie qui utilise le calcul du pH pour définir si un milieu est acide ou basique. Pourtant, l'enseignement de la chimie dans tout le cycle secondaire n'a pas explicitement à son programme l'application de ces objets mathématiques à l'étude de questions extra-mathématiques. Au collège, le lien avec le logarithme n'est pas immédiatement fait. C'est dans le programme de seconde que le pH est défini à l'aide du logarithme décimal. Il incombe au mathématicien de faire le lien avec la chimie.

Cependant la concrétisation d'un tel projet, tant dans l'élaboration des manuels scolaires que dans les pratiques des enseignants, ne peut se faire sans difficultés et conduit à se poser un certain nombre de questions.

Sur l'articulation entre les disciplines :

- Quelle est la place de l'enseignement des mathématiques dans le cours de chimie, et inversement ?
- Comment la relation mathématiques – chimie est-elle mise en œuvre dans les manuels de chacune des deux disciplines ?

Sur la cohérence interne aux mathématiques :

- Existe-t-il un passage du statut *nombre* au statut *fonction* ? Si oui, comment ce passage est-il pris en charge par les programmes et les manuels ? Les connaissances du Collège réapparaissent-elles au Lycée ?
- Les auteurs des programmes et des manuels de Collège peuvent-ils aisément éviter d'utiliser la notion de fonction ?

Nous nous intéressons ici à la manière dont cette approche interdisciplinaire apparaît (ou non) dans les manuels scolaires de mathématiques et de chimie, considérés comme premiers éléments du curriculum réel, au sens de Perrenoud (1993).

Nous présentons dans la partie suivante notre cadre théorique, constitué essentiellement de la notion de praxéologie issue de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1999). Nous présentons ensuite, à partir de quelques exemples, une analyse des manuels montrant la place, mais aussi les limites, de la continuité didactique entre les mathématiques et la chimie.

II. PRAXEOLOGIE OU ORGANISATION MATHEMATIQUE

Dans sa théorie anthropologique du didactique, Chevallard (1999) considère que l'analyse de l'activité humaine conduit à dégager des entités minimales, les praxéologies, qu'il désigne par l'organisation (ou la formule) $[T, \tau, \theta, \Theta]$ où T représente un type de tâches, τ une technique (manière d'accomplir les tâches du type T), θ une technologie (discours qui justifie et rend intelligible la technique τ) et Θ une théorie, technologie de la technologie θ.

Le bloc $[T/\tau]$ y représente la *praxis* (ce qu'il y a à faire et comment le faire), ou la pratique (si l'on regarde plutôt du côté de T), ou le savoir-faire (si l'on regarde plutôt du côté de τ), tandis que $[\theta/\Theta]$ y figure le *logos* (comment penser le faire et comment penser cette pensée du faire), qu'on nomme encore le savoir (si l'on regarde plutôt du côté de θ) ou la théorie (si l'on regarde plutôt du côté de Θ).

En nous appuyant sur ce cadre théorique (praxéologie), nous précisons notre questionnement :

- Quelle articulation entre le champ de référence (chimie) et le champ de traitement (mathématique) ? Quelle place pour les tâches de transition ?
- Le logarithme est-il simplement un objet des mathématiques et un outil pour la chimie, ou bien la praxéologie se joue-t-elle de façon subtile entre les deux disciplines ?
- Y a-t-il continuité didactique dans les concepts, méthodes et représentations entre les mathématiques et la chimie ?

Avant l'analyse des manuels, nous présentons très succinctement quelques éléments de la relation entre les mathématiques et la chimie dans le savoir savant.

III. LES MATHEMATIQUES ET LA CHIMIE DANS LE SAVOIR SAVANT

L'histoire des mathématiques est caractérisée par des phases d'expansion et des phases de consolidation. Dans les phases d'expansion, les mathématiques élargissent le périmètre de leur science en s'attaquant à des problèmes et en élaborant des concepts d'un type nouveau. Cette expansion est souvent irriguée par une problématique issue des relations avec les autres disciplines scientifiques.

L'histoire montre en effet comment les champs scientifiques que sont aujourd'hui les mathématiques et les sciences physiques et chimiques ont fait évoluer la science en se prêtant à un jeu d'échanges dialectiques. Les mathématiques sont considérées comme un *pourvoyeur d'outils* (ou bien *outil*) nécessaires à la compréhension et donc, au développement des autres sciences.

On peut citer le cas, en chimie, de la modélisation moléculaire qui désigne l'ensemble des méthodes de simulation numérique des propriétés de la matière, fondées sur une description atomistique de cette dernière. Dans cette acception, on englobe aussi bien les calculs quantiques *ab initio*, que les représentations simplifiées de la mécanique moléculaire, en passant par la physique statistique numérique.

La cristallographie est un autre domaine de la chimie qui s'appuie fortement sur les mathématiques. En effet, selon Defranceschi, Gracias, Toulhoat et Vidal (2005),

> ce domaine [la cristallographie] est une illustration naturelle et concrète de la théorie des groupes de permutation. L'existence des phases incommensurables et des quasi-cristaux a fait resurgir quelques aspects fondamentaux, parmi lesquels les notions d'invariance et de symétrie (géométrique), dans des perspectives très proches de l'esprit galoisien d'origine. (Op. cité, p. 69)

L'ordre géométrique le plus simple est celui des cristaux périodiques tridimensionnels où un même motif atomique est répété à l'identique dans trois directions. Les outils mathématiques de l'ordre cristallin sont ainsi un groupe abélien de translations qu'on compose avec des rotations et inversion qui constituent la symétrie d'orientation du cristal. Selon Defranceschi et al. (2005), les avancées les plus récentes dans le domaine de la cristallographie concernent :

> - l'extension aux groupes spatiaux à quatre dimensions utilisées pour décrire les structures magnétiques ;
>
> - l'introduction, dans cette communauté, des termes d'orbite, petit groupe, centralisateur, normalisateur, etc., provenant de la théorie d'action de groupe. (Op. cité, p. 81)

En définitive, comme les exemples précédents en ont donné une première idée, les mathématiques sont présentes dans la chimie et cela n'a cessé de se renforcer. Les théories en sciences chimiques s'imprègnent de plus en plus des connaissances mathématiques. Ceci montre bien que les relations entre les deux disciplines occupent une place privilégiée dans le savoir savant. Qu'en est-il dans le savoir enseigné ?

IV. LE LOGARITHME DANS LES PROGRAMMES ET MANUELS DE MATHEMATIQUES

Depuis plusieurs années, la littérature sur les relations entre les mathématiques et la physique dans l'enseignement secondaire et universitaire se multiplie. Diverses réflexions sont menées aussi bien en mathématiques qu'en physique ; elles sont de nature épistémologique et/ou didactique (Malonga Moungabio, Beaufils & Parzysz 2008, Malonga Moungabio 2009, Malonga Moungabio & Beaufils 2010, Bâ 2007, Rodriguez 2007, Mizony 2006, Rogalski 2006, Malafosse, Lerouge & Dusseau 2001, ...)

Cependant, si les relations entre les mathématiques et la chimie occupent une place privilégiée dans le savoir savant (voir plus haut), il existe très peu d'études sur la relation entre l'enseignement des mathématiques et celui de la chimie.

Dans ce qui suit, nous présentons une analyse praxéologique de la relation entre ces deux disciplines autour de l'enseignement de la notion de logarithme décimal au Congo (Brazzaville).

1. Les programmes de collège

Les nouveaux programmes, publiés en 2002 sous l'égide de l'Institut National de Recherche et d'Action Pédagogiques (INRAP), sont structurés en termes d'objectifs généraux « OG » (comportement final de l'élève attendu dans un domaine d'apprentissage) et d'objectifs spécifiques « OS » (niveau de réalisation d'un objectif général). Ces objectifs peuvent être assimilés à la notion de « type de tâches » au sens de Chevallard.

L'objectif général n°1, donné par la tâche « Connaître les nombres », présente les modalités de l'étude du logarithme.

La première rencontre de la notion de logarithme en base dix (couramment logarithme décimal) a lieu dans les programmes de la classe de 4^{e} au Collège (14 ans) : il est étudié comme étant un nouveau nombre à identifier.

> Il s'agit pour l'élève de reconnaître que (…) les logarithmes sont des nombres définis à partir des puissances : on a $a > 0$, $a = 10^n$, alors $\log(a) = n$. (Guide pédagogique[172], p. 36)

La principale tâche de l'élève est de reconnaître que n est le logarithme en base 10 du nombre a.

Cette étude se poursuit en classe de 3^{e} (15 ans) avec pour objectif général, d'effectuer des calculs sur le logarithme en base dix. Le guide pédagogique précise :

> Outre les nombres identifiés en classe antérieure, il est question ici d'insister sur le logarithme en base dix, leur caractéristique et mantisse puis d'aborder les nombres irrationnels. (Guide pédagogique, p. 46)

Ce commentaire laisse entendre que les logarithmes ne sont pas reconnus comme des irrationnels : les seuls irrationnels considérés à ce niveau sont les nombres qui s'écrivent avec le symbole $\sqrt{\ }$.

Les types de tâches attendus ici se rapportent à une identification du logarithme et à la détermination de la caractéristique et de la mantisse. La technique n'est pas explicitée. On peut supposer qu'elle se rapporte à la manipulation des puissances de 10 : elle est donc censée être disponible et accessible à l'élève.
Les programmes de collège ne mentionnent aucun lien avec la chimie.

---

[172] Le guide pédagogique est un document (officiel) d'accompagnement des programmes.

2. *Les programmes de lycée*

La notion de logarithme n'est pas traitée en classe de seconde et première. Elle apparaît dans les programmes de terminale dans la rubrique « Objectif général 3 : Réaliser des activités sur les fonctions et les suites numériques ». Dans ce programme, la fonction logarithme, ainsi que les fonctions exponentielle et puissance, sont traitées comme des fonctions parmi d'autres. Le programme n'indique pas le caractère particulier de ces fonctions.

La fonction logarithme fait l'objet d'une étude globale et locale à l'instar des fonctions numériques étudiées auparavant.

Aucun lien avec l'enseignement de la chimie n'est mentionné dans ce programme.

3. *Les manuels de mathématiques du Collège*

Pour chaque niveau du Collège, un seul manuel de référence, édité chez Nathan, est indiqué dans les programmes. Cependant le manuel de 4^{e} ne couvre pas tout le programme : le logarithme n'y apparaît pas, il est traité dans le manuel de 3^{e}.

Le logarithme est introduit par une activité de lecture et d'utilisation d'un tableau de 20 valeurs de x et de 10^x sans préciser que les valeurs de 10^x sont des valeurs approchées. Dans la suite, un résumé précise que :

> … Pour x strictement positif, $y = \log x$ équivaut donc à écrire $x = 10^y$. (Manuel Nathan 3^{e}, p. 83)

On remarque le changement de position de x et de y dans cette proposition au regard de l'activité mentionnée (qui présentent des valeurs de x et de 10^x). Nous supposons que ce changement de position est à mettre en relation avec la notion de fonction déjà abordée dans les pages précédentes du manuel.

Organisation praxéologique

L'essentiel du travail de l'élève dans ce chapitre est de nature purement calculatoire. Nous avons identifié trois types de tâches que nous appelons (T1), (T2) et (T3).

Type de tâches	*Technique associée*
(T1) : calculer le logarithme d'un produit	$\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$
(T2) : calculer le logarithme d'un quotient	$\log\left(\dfrac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$, où a et b sont réels strictement positifs
(T3) : calculer le logarithme d'une puissance	$\log(a^n)=n\log(a)$, a est un réel strictement positif

Tableau 1 *- Types de tâches identifiés dans le manuel Nathan 3^{e}*

Pour chaque type de tâches, une technique donnée sous forme de propriété, est proposée par l'auteur du manuel et accessible à l'élève (voir tableau 1). Pour chaque technique, aucune technologie n'est présentée.

De plus, nous avons identifié deux autres types de tâches associés au calcul du logarithme. Il s'agit des types de tâches

(T4) : Calculer la caractéristique du logarithme d'un nombre.

(T5) : Calculer la mantisse du logarithme d'un nombre.

Les techniques sont disponibles.

Pour la tâche (T4), les auteurs du manuel expliquent que si x est un réel strictement positif, on appelle *caractéristique* du logarithme décimal de x la partie entière de ce logarithme. Elle se détermine en examinant l'écriture décimale de x :

> Si $x \geq 1$, alors la caractéristique de $\log(x)$ est n-1, où n est le nombre de chiffres avant la virgule de x.
>
> Si $0 < x < 1$, elle vaut $-p$, où p est le rang (position) de la première décimale non nul - à partir de la virgule - du premier chiffre non nul.

Par exemple, la caractéristique de log(898,12) est 2, celle de log(3,14) est 0, celle de log(0,0071) est -3.

Pour la tâche (T5), les auteurs expliquent que la *mantisse* du logarithme décimal de x désigne la différence entre le logarithme de ce nombre x et la partie entière de ce logarithme, c'est-à-dire sa partie fractionnaire. La mantisse est le réel $\log(x)$ - c, où c est la caractéristique de $\log(x)$. La mantisse est toujours comprise entre 0 et 1 (et différente de 1).

L'activité sur le calcul de la mantisse et de la caractéristique du logarithme décimal d'un nombre peut être considérée comme un réinvestissement des connaissances sur les puissances et l'écriture scientifique d'un nombre. En effet, l'écriture scientifique d'un nombre x est donnée sous la forme de $x = a \times 10^n$ où a est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (exclu) et n un entier relatif. Puisque $\log(a \times 10^n) = n + \log(a)$ et que la fonction log est croissante, pour tout réel a compris entre 1 et 10 (exclu), $\log(a)$ est compris entre 0 et 1. L'entier relatif n est donc la partie entière de $\log(x)$ et $\log(a)$ la partie décimale à ajouter à n pour obtenir $\log(x)$. La partie entière de $\log(x)$ est bien la *caractéristique* du log. La partie décimale à rajouter à la partie entière est la *mantisse*.

4. Les manuels de mathématiques du lycée

Les programmes de terminale scientifique (C & D) se réfèrent à quatre manuels. Il s'agit du manuel de la Collection InterAfricain de Mathématiques (CIAM) édité chez EDICEF et de trois autres manuels français : Collection TERRACHER (édité chez HACHETTE), Collection DIMATHEME (édité chez DIDIER), Collection FRACTALE (édité chez BORDAS).

Au lycée le logarithme, qui n'apparaît ni dans les programmes de 2e, ni dans ceux de 1ère, est étudié en classe de terminale scientifique (séries C & D). Pour l'introduction du logarithme, la collection CIAM présente un contenu proche de celui des programmes de terminale congolais. Il étudie le logarithme avant l'exponentielle, contrairement aux trois manuels français cités plus haut. Conformément aux programmes, le logarithme est introduit comme fonction et l'étude commence par le logarithme népérien. Le logarithme de base quelconque est introduit plus tard. On retrouve les trois premières propriétés (techniques) que nous avons identifiées dans le manuel de collège (voir tableau 1).

L'introduction de la fonction logarithme se fait sans nécessairement faire le lien avec les acquis du collège. Le passage du concept de *nombre* au concept de *fonction* et le changement de notation peuvent ainsi donner lieu, chez l'élève, à la conception de deux objets mathématiques différents.

De plus, aucun lien avec l'enseignement de la chimie n'est mentionné.

V. LE LOGARITHME DANS LES PROGRAMMES ET MANUELS DE CHIMIE

1. *Les programmes de collège : classe de troisième*

Au collège, dans le programme de chimie de la classe de troisième, le pH est étudié dans la partie qui traite l'objectif général 3, à savoir « Caractériser les solutions aqueuses » :

Objectifs spécifiques	Commentaire	Stratégies d'enseignement	Activités d'apprentissage	Mode d'évaluation
3.2 Déterminer l'acidité et la basicité des solutions.	Le professeur apprendra aux élèves comment déterminer le pH des solutions, en utilisant toutes les méthodes de mesure du pH : le papier pH, le papier tournesol, les indicateurs colorés et le pH-mètre.	- Montrer aux élèves comment utiliser le papier pH, le papier tournesol, les indicateurs colorés et le pH-mètre. - Demander aux élèves de mesurer le pH de quelques solutions acides et basiques.	Les élèves suivent attentivement Les élèves mesurent le pH de quelques solutions acides et basiques.	Evaluation pratique et écrite

***Figure 1** - Extrait du guide pédagogique des sciences physiques (2010), classe 3^e^, Objectif 3 p. 75*

Il est précisé que l'évaluation portera avant tout sur la détermination pratique du pH et du titre des solutions acides et basiques, l'idée d'évaluation écrite renvoyant à une modalité fréquente dans les disciplines expérimentales : on pourra donner une description du résultat d'une expérience (couleur du papier pH par exemple) et demander d'écrire la valeur du pH.

Nous remarquons que le pH étant mesuré, le logarithme n'a pas à intervenir. Pourtant cet outil mathématique a déjà été abordé en mathématiques au collège dès la classe de 4^e^.

2. *Les programmes de lycée*

Classe de seconde

Dans le programme de seconde, le pH est traité dans l'objectif général 3, sous l'intitulé « Caractériser les acides, les bases et les sels ainsi que leurs solutions (17 heures) ».

Objectifs spécifiques	*Contenus notionnels*
3.3. Déterminer le pH d'une solution.	pH = - log $[H_3\,O^+]$ mesure de pH Papier pH, pH-mètre pH d'une solution acide pH d'une solution basique

***Tableau 2** - Extrait du programme de seconde (2002), p. 72*

On note un changement de point de vue par rapport à la troisième puisque le pH reçoit une définition formelle, faisant cette fois intervenir le logarithme. La détermination du pH d'une solution aqueuse se fait soit en utilisant le papier pH ou le pH-mètre, soit en appliquant la formule pH = - log [H_3O^+][173]. Aucune indication particulière n'est donnée quant à l'utilisation de cette formule ou du lien avec le cours de mathématiques.

On peut remarquer que le programme de seconde est moins explicite que celui de troisième présenté plus haut. Aucun document officiel, servant de guide pédagogique, n'accompagne ce programme.

Classe de première

La notion de pH n'est pas abordée en première.

Classe de terminale C

Le programme de classes de terminale scientifique a été conçu à l'instar des programmes des niveaux inférieurs : il a été écrit par objectifs et est censé tenir compte de la progression de l'ensemble des autres disciplines scientifiques.

Dans ce programme, le lien avec l'enseignement des mathématiques n'est pas immédiat. Cependant, ce programme se propose de :

> Créer progressivement chez l'élève une attitude scientifique, ce qui lui permettra de développer des aptitudes à :
>
> - la démarche scientifique,
> - la transmission de cette démarche scientifique,
> - la maîtrise des moyens et langues de communication,
> - la maîtrise du langage mathématique (interpréter des graphiques, savoir schématiser)
>
> (Extrait du Programme de sciences physiques 2002, p. 75)

Comme on le voit, la relation de l'enseignement de la chimie avec les mathématiques est à peine évoquée. Il nous apparaît important d'examiner la manière dont le langage mathématique apparaît dans les manuels de chimie qui se réfèrent au programme scolaire.

L'objectif général 3 consiste à « Réaliser l'étude des solutions aqueuses des acides et des bases (12 heures) » (voir tableau 3).

Il est attendu que les enseignants conduisent les élèves à dégager l'influence des propriétés électriques de l'eau sur la solubilité des composés ioniques et à décrire l'équilibre d'autoprotolyse de l'eau. Dans les contenus notionnels, le programme prévoit de définir le pH, sans en proposer une définition.

Relativement à notre étude, nous avons identifié un type de tâches, relatif à l'objectif spécifique (3.4) : « Déterminer le pH des solutions aqueuses ».

Pour ce qui concerne les acides et bases faibles, le programme préconise le calcul de Ka et du pKa. A la suite, il propose une méthode de résolution de problèmes d'équilibre relatifs à un acide ou une base faible en respectant les étapes suivantes : description des différentes étapes – détermination du coefficient de dissociation – établir la relation entre pH et pKa à savoir :

$$\mathrm{pH} = \mathrm{pKa} + \log \frac{[Base]}{[Acide]}$$

Le programme ne donne aucune indication sur la manière d'obtenir cette formule.

[173] La notation entre crochets représente la concentration, exprimée en moles par litre, ici de l'ion hydronium..

Objectifs spécifiques	*Contenus notionnels*
3.3 Établir l'échelle de pH	Établissement de l'échelle de pH - Définition du pH - pH de l'eau pure - échelle de pH - pH des solutions acides - pH des solutions basiques - Définition du pOH - Relation entre le pH et pOH
3.4 Déterminer le pH de solutions aqueuses.	Détermination du pH des solutions - Cas des acides et des bases faibles ● Ka et pKa des acides faibles, Kb et pKb des bases faibles. ● Méthode de résolution de problèmes d'équilibre relatifs à un acide faible ou une base faible. * description des différentes étapes * coefficient de dissociation * relation entre pH et pKa ; pH et pKb pH = pKa + log [Base] / [Acide]

Tableau 3 - *Extrait du programme de chimie, classe de terminale C (2002), p. 54*

3. *Les manuels de chimie : classe de Terminale*

Conformément aux programmes de collège et de lycée de chimie, le lien entre le pH et le logarithme n'apparait que dans les manuels de terminale. Nous analysons le principal manuel conforme au programme de terminale C. Il s'agit du manuel édité à l'INRAP en 2009.

Dans ce manuel (INRAP, 2009), les chapitres sont organisés (comme les programmes scolaires) en objectifs généraux et spécifiques. La notion de pH est étudiée dans l'objectif général n°6 « Réaliser l'étude des solutions aqueuses des acides et des bases ». Une définition du pH y est proposée :

IV – Établissement de l'échelle de pH « pouvoir hydrogène »

1 – Définition du pH

Le pH d'une solution est une grandeur sans unité, égale à l'opposé du logarithme décimal de la concentration en ions hydronium.

Soit pH = - log $[H_3O+]$ d'où $[H_3O+] = 10^{-pH}$

(Extrait du manuel INRAP 2009, p. 69)

Ka, la constante d'acidité et le pKa sont définis dans le cas des acides et des bases faibles. A partir de l'équation-bilan de la réaction de l'acide AH avec l'eau (figure 2), où AH est un acide et A^- sa base conjuguée, on a à l'état d'équilibre du système : Ka $= \frac{[A^-]\times[H_3\,O^+]}{[AH]}$.

$$AH + H_2O \rightleftharpoons A^- + H_3O^+$$

Figure 2 *- Équation bilan*

La définition du pKa est établie par analogie, il en résulte une relation entre pH et pKa :

Par analogie à la définition du pH, nous définissons également le pKa tel que

pKa = -logKa et Ka = 10^{-pKa}

Comme $\mathrm{Ka} = \frac{[A^-]\times[H_3\,O^+]}{[AH]}$.

Soit $\log \mathrm{Ka} = \log[H_3O^+] + \log\frac{[A^-]}{[AH]}$

D'où $-\log \mathrm{Ka} = -\log[H_3O^+] - \log\frac{[A^-]}{[AH]}$

alors $\mathrm{pKa} = \mathrm{pH} - \log\frac{[A^-]}{[AH]}$ ou $\mathrm{pH} = \mathrm{pKa} + \log\frac{[A^-]}{[AH]}$

(Extrait de manuel INRAP 2009, p. 76)

Par analogie, on définit la constante de basicité du couple Acide/base par la relation : $\mathrm{Kb} = \frac{[Acide]\times[OH^-]}{[Base]}$.

Ensuite, on établit la relation entre le pKb et le pOH : $\mathrm{pOH} = \mathrm{pKb} + \log\frac{[Base]}{[Acide]}$.
La relation entre le pH et le pKa (ou entre le pKb et le pOH) est obtenue à partir de la formule de Ka et de l'une des propriétés algébriques du logarithme étudiée en mathématiques, à savoir : $\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$.

Malgré l'emploi des propriétés du logarithme, aucune référence aux programmes des mathématiques n'est faite dans ce manuel pour justifier les calculs.

4. *Rôle des graphiques dans les relations acido-basiques*

L'étude du dosage acido-basique s'appuie sur une représentation graphique des données expérimentales.

Examinons le cas du dosage de l'acide éthanoïque (acide faible) par l'hydroxyde de sodium (base forte), l'allure de la courbe du pH en fonction du volume de la base est la suivante (voir figure 3).

La courbe présente quatre parties :

- la partie AB où le pH augmente rapidement,
- la partie BC où le pH augmente faiblement,
- la partie CD avec un « saut de pH »,
- la partie DF où le pH croît peu et tend vers une valeur limite.

Cette courbe est obtenue à partir des données expérimentales, on remarquera que le tracé est réalisé en lissant la courbe, il faut aussi supposer que le tracé des tangentes est réalisée de manière graphique (la tangente vue comme droite localement confondue avec la courbe). Elle est vue *a priori*, non pas comme la représentation d'une fonction mathématique, mais comme la représentation d'un phénomène chimique : ici, l'évolution du pH en fonction du volume de la base.

Les manuels en vigueur dans les classes de terminale ne proposent pas la recherche d'une telle fonction. Une activité développée autour de cette recherche devrait permettre non seulement de montrer la force des mathématiques pour modéliser certains phénomènes mais de mieux comprendre les différents moments du dosage acide/base en obligeant les élèves à s'interroger sur ce qui du point de vue du chimiste différencie les différents moments du dosage acide/base.

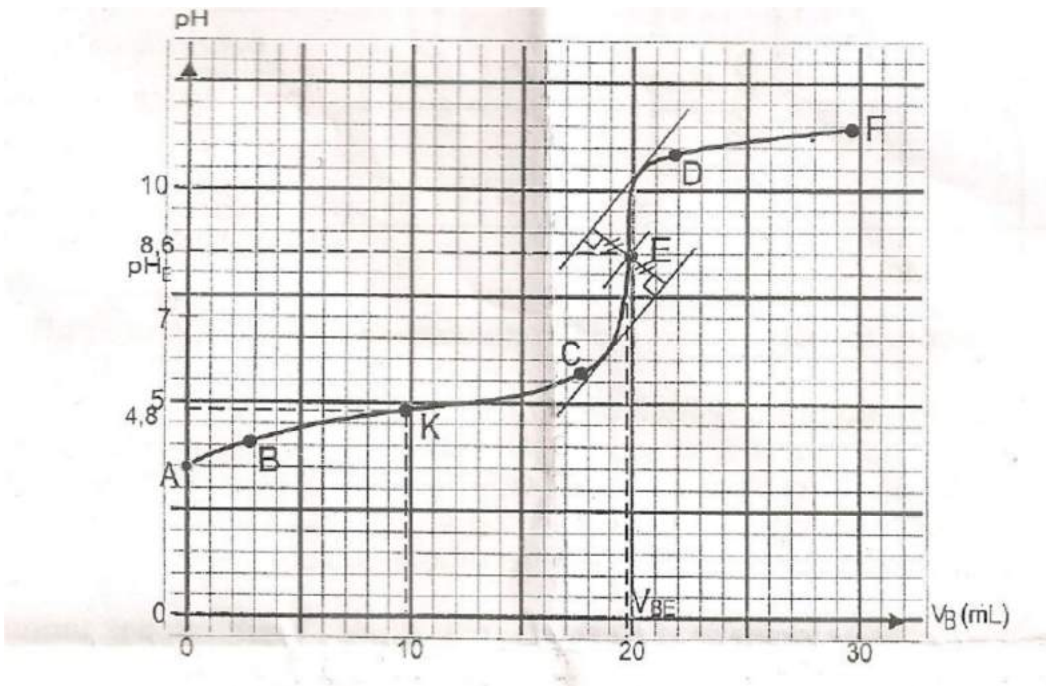


Fig. 9: Variation du pH en fonction du volume de base versé

Figure 3 *- Extrait du manuel INRAP (2009) p. 86*

Au cours de nos différents échanges avec les enseignants de chimie au lycée, nous avons constaté que l'expression d'une telle fonction n'est pas connue des enseignants. Cela leur apparaît peu intéressant car ils arrivent à expliquer le phénomène à partir de la théorie chimique, comme le précise un enseignant :

> la courbe (voir figure 3) permet de conclure que l'acide est consommé au fur et à mesure qu'on rajoute la base. La solution devient basique à partir du point d'équivalence.

Or il suffit d'observer la courbe pour constater que cette affirmation est fausse puisque dès qu'il y a autant d'ions hydroxyde que d'ions hydronium en solution, à 25°C, alors le pH est égal à 7. Le professeur semble distinguer trois phases : une première phase où l'acide n'est pas entièrement consommé, ce qui correspond à la portion AE de la courbe ; une deuxième phase où il y a autant d'ions HO^- que d'ions H_3O^+, c'est le point d'équivalence qui correspond sur la courbe au point E ; une troisième phase où l'acide est entièrement consommé, ce qui correspond à la portion ED de la courbe. Or ce modèle est erroné dans le cas cité car il faut tenir compte du fait qu'interviennent une base faible associée à l'acide faible et une base forte versée.

Nous nous sommes alors intéressés à la nature de la fonction mathématique permettant de modéliser ce phénomène chimique.

5. *Modélisation mathématique de l'évolution du pH*

Nous nous appuyons sur un exemple[174] pour illustrer notre propos. On considère le dosage de l'acide chlorhydrique de concentration C_0 égale à 0,1 mol.L^{-1}, dans un volume V_0 égal à 100 mL, par l'hydroxyde de sodium (soude) de concentration C_b égale à 0,5 mol.L^{-1}.

L'équation du dosage est :

$$Na^{+} + HO^{-} + H_3O^{+} + Cl^{-} \longrightarrow Na^{+} + Cl^{-} + 2H_2O$$

Figure 4 *– Équation du dosage*

Première phase : avant l'équivalence

Le nombre de moles d'ions hydronium (n H_3O^+) contenu initialement dans la solution est égal à $C_0.V_0$ si le volume est exprimé en Litres ; si le volume est exprimé en mL, ce que nous ferons dans la suite, alors c'est un nombre de millimoles que donne cette formule. Numériquement cela fait n $H_3O^+ = 0{,}1\times100$ soit 10 mmol. Si l'on ajoute un volume V de soude dans la solution d'acide chlorhydrique, le nombre de mmoles d'ions hydroxyde apporté est égal à $C_b.V$. Étant donnée la réaction entre les ions hydronium et les ions hydroxyde pour donner de l'eau, V étant inférieur à Ve (le volume équivalent), on aura un nombre de mmoles d'ions hydronium restant en solution qui sera égal à : $C_0.V_0 - C_bV$. Le volume de la solution étant devenu égal à $V_0 + V$, la concentration des ions hydronium restant en solution sera égale à :

$[H_3O^+] = \frac{C_0.V_0-C_b.V}{V_0+V}$ d'où l'expression $\text{pH} = -\log(\frac{10-0{,}5.V}{100+V})$

V étant la variable, que nous désignons par *x* exprimé en mL, nous avons donc la fonction :

$f_1(x) = -\log(\frac{10-0{,}5.x}{100+x})$ définie sur [0 ; 20[.

Deuxième phase : l'équivalence

On se ramène alors au calcul du pH d'une solution de chlorure de sodium puisque l'acide fort est exactement neutralisé par une base forte. Dans ce cas, le pH à l'équivalence vaut 7 à 25°C. Il faut avoir versé 20mL de base forte, ce que l'on peut écrire mathématiquement par $f_2(x) = 7$ pour x = 20. On peut aussi écrire $f_2(20) = 7$.

Troisième phase : après l'équivalence

On aura versé depuis le départ un volume supérieur à 20 mL pour accéder à cette portion de courbe. Si l'on appelle V ce volume total de soude versée, en mL, le nombre total de mmoles d'ions hydroxyde apportés est égal à $C_b.V$. Comme l'ion hydroxyde réagit avec l'ion hydronium, la quantité de mmoles d'ions hydroxyde en excès sera égale à : $C_b.V - C_0.V_0$.

La concentration des ions hydroxyde lorsqu'on aura versé un volume V de soude dans la solution d'acide chlorhydrique sera alors égale à :

$[HO^-] = \frac{C_b.V-C_0.V_0}{V_0+V}$

Le pH de la solution sera donné en écrivant : $\text{pH} = 14 + \log([HO^-])$

Dans l'exemple qui est choisi, il faudra écrire que : $\text{pH} = 14 + \log(\frac{0{,}5.V-10}{100+V})$

D'où la fonction : $f_3(x) = 14 + \log(\frac{0{,}5x-10}{100+x})$ définie sur]20 ; +∞[.

On obtient finalement une fonction de raccordement (définie par intervalles).

[174] Ce passage est inspiré du cours mis en ligne par F. Marsal http://marsal.univ-tln.fr/

L'obtention des différentes expressions algébriques de la fonction qui permet de modéliser le phénomène de dosage acido-basique peut conduire à confronter l'expérimentation et certains résultats théoriques. Il serait aussi intéressant de traiter mathématiquement le calcul des coordonnées du point d'équivalence.

Ce travail de recherche d'une expression mathématique permettant de traduire mathématiquement un phénomène chimique est nécessaire et peut être comparé à ce qui se fait en physique lorsqu'on étudie les phénomènes physiques dépendants du temps.

VI. CONCLUSION

Notre étude sur l'enseignement du logarithme en mathématiques a permis de constater deux « statuts » pour le même objet : *nombre* et *fonction*. Nous regrettons le fait que cet enseignement, lacunaire, laisse un vide didactique au niveau du passage du concept de nombre (collège) au concept de *fonction* (au lycée).

Du point de vue de l'articulation mathématiques-chimie, il est clair que l'enseignement du logarithme au Collège est légitimé par l'étude en chimie du phénomène du dosage acido-basique d'une solution aqueuse. Cependant les programmes de chimie ne font pas mention de la nécessité de cet enseignement. Si en classe de 3e, le pH permet d'évaluer la concentration des ions hydronium présents dans une solution aqueuse, aucune définition ne permet d'en réaliser un calcul impliquant le logarithme et la concentration des ions H_3O^+.

Prenant appui sur l'introduction en seconde d'une définition formelle du pH par le programme de chimie, nous cherchons actuellement à mieux explorer la relation entre les mathématiques et la chimie au lycée et à mettre en place des tâches de transition entre les deux disciplines. Notre souhait est de faire vivre dès le lycée, les interfaces entre les mathématiques et les autres sciences pour assurer une meilleure visibilité des mathématiques et en montrer l'intérêt pour la compréhension des avancées scientifiques et technologiques.

REFERENCES

Bâ C. (2007) *Étude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique – lien entre mouvement de translation et translation mathématique.* Thèse de doctorat (cotutelle). Université Lyon 1 et Université Cheikh Anta Diop – Dakar.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques des enseignants en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2), 221-265.

Defranceschi M., Gratias D., Toulhoat H., Vidal C. (2005) Mathématiques et sciences chimiques. In Yocooz C. (Ed.) *Les mathématiques dans le monde scientifique contemporain* (pp. 67-101), *Académie des sciences. Rapport sur la science et la technologie n°20.* Paris : Éditions TEC & DOC.

Malafosse D., Lerouge A., Dusseau J.-M. (2000) Étude en interdisciplinarité des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège: changement de cadre de rationalité. *Didaskalia* 16, 49-60.

Malonga Moungabio F. (2009) Les équations différentielles à l'interface mathématiques - physique : praxéologie et jeux de cadres de rationalité dans les manuels de terminale S. *Recherche en didactique des mathématiques* 29(3), 335-357.

Malonga Moungabio F., Beaufils D. (2010) Modélisation et registres sémiotiques : exemple d'étude de manuels de physique de terminale. *Revue de didactique des sciences et de technologie*, 1(1), 293-316.

Malonga Moungabio F., Beaufils D., Parzysz B. (2008) La méthode d'Euler dans l’enseignement de mathématiques et de physique en terminale S. *Bulletin de l’Union des Physiciens* 907, 1133-1152.

Mizony M. (2006) Relations entre mathématiques et physique, un problème épistémologique. L’héritage de Poincaré : de l’éther à la modélisation. *Repères Irem* 64, 91-111.

Perrenoud P. (1993) Curriculum : le formel, le réel, le caché. In Houssaye J. (dir.) *La pédagogie : une encyclopédie pour aujourd’hui* (pp.61-76). Paris : ESF.

Rodriguez R. (2007) *Les équations différentielles comme outils de modélisation mathématique en classe de physique et de mathématique au lycée : une étude des manuels et de processus de modélisation d’élèves en Terminale S.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourrier – Grenoble 1.

Rogalski M. (2006) Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs – Un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique. *Repères IREM* 64, 27-48.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ENSEIGNER LA GÉOMÉTRIE DANS UNE ACADÉMIE DES MINES EN 1795

ENJEUX DIDACTIQUES ET PRATIQUES SOCIALES

Thomas MOREL*

Résumé – Dans cet exposé, plusieurs aspects précis de l'enseignement des mathématiques dans les académies des mines de Freiberg et Schemnitz à la fin du XVIIIe siècle sont étudiés. Nous affirmons que dans ces académies nouvellement créées, un nouveau système d'enseignement des mathématiques se met en place, en rupture avec l'enseignement universitaire classique de l'époque. Il s'en distingue non seulement par ses objectifs et ses méthodes, mais aussi par l'interaction avec les autres disciplines et avec le monde professionnel des régions minières. Pour cela, nous entendons avoir recours à la fois à l'histoire – en se basant sur les archives de ces institutions – et à la didactique des mathématiques.

Mots-clefs : didactique des mathématiques, géométrie, histoire des mathématiques, académie des mines.

Abstract – In that report, several aspects of mathematics teaching at the mining academies of Freiberg and Schemnitz are analyzed. Our hypothesis is that a new system of mathematics teaching, different from the classical teaching in universities, is implemented in these new institutions. The differences are not only related to goals and methods, they also lie in the interactions with other disciplines and the professional environment of the mining states. We use methods both from history (based on the archive of these institutions) and the didactic of mathematics.

Keywords: didactic of mathematics, geometry, history of mathematics, mining academies.

I. INTRODUCTION

Cet exposé porte sur les enseignements de mathématiques dans les écoles des mines et leur évolution dans les décennies qui suivent leur création. Nous avons cherché, dans de précédents travaux, à esquisser les grandes lignes de leur développement dans la seconde moitié du XVIII^e siècle (Morel 2013, pp. 141-252 ; Morel 2015a). La perspective adoptée était alors clairement celle d'une histoire institutionnelle des sciences et d'une histoire de l'enseignement. Les premières académies, celles de Freiberg (en Saxe) et Schemnitz (en Basse-Hongrie), furent créées dans les années 1760. Si leur importance pour le développement des sciences de l'ingénieur et pour l'essor économique européen n'est plus à démontrer (pour un ouvrage récent réunissant plusieurs contributions sur ce sujet, voir (Konečný & Schleiff 2013)), la forme et le contenu des enseignements des mathématiques sont aujourd'hui encore mal connus. Une difficulté importante est qu'il s'agit d'un

* Université d'Artois (Laboratoire de Mathématiques de Lens) – France – thomas_morel@msn.com

Morel T. (2015) Enseigner la géométrie dans une académie des mines en 1795. Enjeux didactiques et pratiques sociales. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 504-516.

enseignement fortement tourné vers la pratique et profondément adapté à des problématiques locales. Dans la littérature secondaire, il s'efface généralement au profit des sciences minières, qui semblent être l'objet central de ces institutions (Konečný et al. 2013). Or la place des mathématiques dans ces institutions techniques fut tout à fait cruciale[175].

Nous entendons ici défendre la thèse suivante : dans ces académies nouvellement créées, un nouveau modèle d'enseignement des mathématiques se met en place, en rupture avec l'enseignement universitaire classique de l'époque. Il s'en distingue non seulement par ses objectifs et ses méthodes, mais aussi par l'interaction avec les autres disciplines et avec le monde professionnel des régions minières. Pour cela, nous entendons avoir recours à la fois à l'histoire et à la didactique des mathématiques. En croisant les méthodes, nous pourrons tenter de cerner en quoi exactement un nouvel enseignement des mathématiques pratiques se met en place dans le dernier quart du XVIII[e] siècle à la *Bergakademie* Freiberg – et dans une moindre mesure à la *Bergakademie* Schemnitz. Il s'agit donc d'un travail expérimental, « hybride » en quelque sorte, dans lequel la didactique des mathématiques sera appliquée à des situations d'enseignement ayant eu lieu il y a plus de deux cents ans.

Dans une première partie, après un bref rappel sur l'histoire des académies des mines et le rôle des mathématiques dans les régions minières, je décrirai le nouveau système d'enseignement mis en place à l'Académie des mines de Freiberg. Le second professeur de mathématiques, J.F. Lempe, actif du début des années 1780 à 1801, en est la figure centrale. Je montrerai ensuite que ce nouveau système d'enseignement permet d'intégrer étroitement les étudiants et professeurs aux pratiques d'exploitation minière, qui servent de pratiques sociales de références, au sens de (Martinand 2003). La seconde partie se focalise sur un débat, qui oppose professeurs et techniciens, portant sur la meilleure manière d'enseigner la géométrie souterraine. Il est significatif que ce débat ait eu lieu, aussi bien à Freiberg qu'à Schemnitz, dans le dernier quart du XVIII[e] siècle. Les deux groupes professionnels s'opposent sur les relations entre théorie et pratiques ; la question précise est de savoir qui doit enseigner la mise en pratique des savoirs géométriques dans les puits de mines.

II. UN NOUVEAU SYSTÈME D'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Ni l'utilisation de la géométrie, ni même la transmission organisée de connaissances dans les régions minières d'Europe centrale ne commencent avec la création des académies des mines (Morel 2015b). En 1765, la fondation d'une Académie des mines à Freiberg, dans l'État de Saxe, et l'ouverture d'une chaire de mathématiques à Schemnitz, dans l'Empire Austro-hongrois, marquent néanmoins une étape importante. Jusque-là, les seuls apprentissages proposés étaient d'ordre pratique : il s'agissait de la géométrie souterraine, pour diriger les travaux des mines, et de la docimasie, pour l'essayage des métaux. La formation initiale, l'apprentissage de la géométrie ou de l'arithmétique élémentaire, avait lieu dans la sphère privée ou dans d'autres écoles. La formation proprement dite était délivrée par des géomètres souterrains, c'est-à-dire des fonctionnaires des mines. L'arrivée dans ces régions de professeurs de mathématiques va fondamentalement modifier le système.

1. J.F. Lempe : un enseignement coordonné et adapté pour l'Académie des mines

Les premières années sont le théâtre de multiples expérimentations et vont contribuer à faire émerger des idées qui, bien qu'elles semblent aujourd'hui aller de soi, sont alors radicalement

[175] Le didacticien et historien des mathématiques Schubring a très bien illustré le danger, et l'inutilité de chercher à étudier l'enseignement des mathématiques « pour elles-mêmes », en soulignant la nécessité de prendre en compte les interactions (Schubring 2003).

nouvelles. Il en est ainsi de l'idée de cursus, inconnue dans les universités de l'époque : un programme d'enseignement où l'étudiant suit des cours selon un plan organisé et où les savoirs acquis ici sont mis en pratique ailleurs[176]. En 1770, lors de l'introduction d'un tel cursus à Schemnitz, son utilité est soulignée :

> les fruits que l'on a récoltés [avec la création de l'Académie] n'ont encore jamais pu parvenir à maturité, car la théorie n'était pas suffisamment liée avec la pratique, et qu'aucune division des classes et des années d'enseignement n'était prévue. (Décret d'avril 1770, Schmidt 1836, p. 156[177]).

À Freiberg, on trouve dès la création de l'Académie une division en année, mais le problème de l'interaction entre théorie et pratique – c'est-à-dire très concrètement l'utilisation de méthodes mathématiques théoriques pour les sciences des mines – se pose avec la même acuité (Morel 2013, pp. 157-160). Une première raison est qu'il n'y a à cette époque pas de méthode éprouvée pour rendre la théorie utile dans les travaux pratiques, et que cette idée même est encore contestée par certains. Les professeurs de mathématiques, J.F.W. von Charpentier (1738-1805) à Freiberg et le jésuite Nicolaus Poda (1723-1798) à Schemnitz, sont tous deux des universitaires. L'enseignement de la géométrie souterraine reste confié au *Markscheider*, le géomètre de Freiberg en charge du mesurage des mines et de la direction des travaux.

À l'Académie des mines de Freiberg, les choses vont évoluer au début des années 1780 avec l'arrivée d'un nouveau professeur de mathématique. Johann Friedrich Lempe (1757-1801) est un symbole de l'efficacité de l'Académie en tant que nouvelle institution d'enseignement, puisqu'il y a lui-même étudié. Il a appris à la fois la pratique – avec le directeur des mines (*Bergmeister*) Johann Andreas Scheidhauer (1718-1784) – et la théorie avec le professeur de mathématiques Charpentier. Celui-ci certifie lui avoir donné des cours particuliers dans lesquels il « lit avec profit et comprend les textes d'Euler, Käster, Karsten et bien d'autres » (UAF – OBA 242, f. 105r). Lempe étudie ensuite à l'université de Leipzig pour parfaire sa formation théorique, avant de revenir enseigner à Freiberg en 1783. Dans le rapport d'activité de l'Académie de cette année-là, on peut lire :

> Pour accroître l'utilité et l'application des théorèmes théoriques des mathématiques pures que ces jeunes gens [les étudiants] ont appris, et pour les leur rendre plus familiers encore, l'administration supérieure des mines a chargé Mr. Lempe d'entreprendre avec eux des exercices pratiques, et de les laisser travailler par eux-mêmes (UAF – OBA 244, f. 86v).

Plusieurs éléments doivent ici être soulignés. D'une part, on voit à quel point l'administration des mines encadre et encourage l'apprentissage des mathématiques. Les professeurs sont inspectés et encadrés, tandis que leurs propositions sont écoutées et le plus souvent mises en pratique. On est bien loin du système universitaire allemand de l'époque, où chaque professeur est indépendant. L'encadrement des études a pour but principal de rendre les mathématiques utiles pour l'exploitation des mines[178].

D'autre part, la forme du cours est radicalement différente. À l'université, le professeur lit généralement à voix haute un manuel théorique devant une audience parfois très nombreuse ; il arrive plus rarement qu'il procède à des expériences (par exemple en physique), devant des étudiants cantonnés au rôle d'observateur. Il n'y a pas ou peu d'exercices, ni d'examen régulier : comme le montre le dossier de J.F. Lempe durant ses études à l'Université de Leipzig, il se contente de collecter à la fin de chaque semestre des attestations de ses professeurs, qui certifient qu'il a été assidu. À l'Académie des mines, l'organisation est

[176] Ce système, aujourd'hui adopté dans les universités français, est d'ailleurs loin d'être universel, et ne s'applique par exemple toujours pas dans les universités allemandes.
[177] Sauf indications contraires, toutes les traductions sont de moi.
[178] Sur la notion « d'utilité » et celle de « mathématiques pratiques », voir Morel 2015c.

complètement différente. Les professeurs discutent avec l'administration le contenu des programmes, et dans les années 1770, un réseau d'écoles secondaires des mines se met en place (Kaden 2012). Pour s'assurer que les supports de cours sont adaptés, J.F. Lempe abandonne les ouvrages universitaires et publie lui-même ses manuels, son cours d'arithmétique et géométrie élémentaire (Lempe 1781), ses cours de géométrie souterraine (Lempe 1782, 1785 avec Beyer), son *Calcul minier* (Lempe 1787) et sa *Théorie des machines* en deux volumes (Lempe 1795-1797). De plus, ces enseignements sont coordonnés, d'une part car ils sont tous assurés par Lempe, et d'autre part car ils ont été conçus ensemble :

> Comme les mathématiques pures élémentaires forment la base des sciences susmentionnées [mathématiques appliquées] et sont même indispensables dans de nombreuses expériences de physique, leur plan d'enseignement figure ici en premier. Et tous les plans se suivent, tout comme chacune de ces sciences donne un coup de main aux autres (UAF – OBA 12, f. 21v).

Les cours ont ensuite lieu en petit groupe : pour les mathématiques, il y a généralement entre trois et une quinzaine d'étudiants. Cela permet à J.F. Lempe de proposer à chacun des exercices adaptés, comme nous allons le voir. Dans ses rapports annuels, il fait le bilan des progrès de chaque étudiant dans chaque matière.

2. *Un enseignement fortement lié aux pratiques sociales des mathématiques*

Prenons par exemple le rapport qu'il écrit pour l'année 1785 (UAF – OBA[179] 245, ff. 110r-122r et ff. 135r-161r). Il est divisé en deux grandes parties, la première où il présente (plus ou moins succinctement) les travaux effectués par les 16 étudiants, et la seconde où il présente une liste, un recueil de questions. On voit que certains étudiants sont des débutants, ce qui est confirmé par les listes d'inscriptions à l'Académie (Freiberg 1850, pp. 12-13). Deux étudiants se sont inscrits l'année même (1785). Lempe explique :

> Bachmann et Schmidt (de Eisleben) ont résolus des exercices d'arithmétique et de géométrie, la plupart en lien avec les mines, et fourni un travail le plus souvent très satisfaisant pour des débutants (UAF – OBA 245, ff. 120v).

Pour les élèves avancés, Lempe donne des exercices plus complets. À ceux qui ont assimilés les exercices courts et ciblés de (Lempe 1787), il propose des situations pratiques. Voici par exemple l'exercice donné à Schutze jun. qui étudie à ce moment depuis trois ans à l'Académie (voir la figure 1).

> Schutze jun (F 14)., Calcul des coûts d'extraction lors du creusement d'un puits d'extraction.
>
> Un tel puits est généralement long de 1 toise et demie et large de 5/8 toises[180] .
>
> Le calcul peut être mené facilement et néanmoins correctement, comme si la montagne était en train d'être creusée, toise après toise.
>
> Il faut pour cela supposer qu'il est possible de remonter en une équipe[181] 2 soixantaines de baquets, avec une profondeur de 10 toises (ou 3 échelles) si l'on utilise un treuil à une personne, avec une profondeur de 20 toises (ou six échelles) si l'on utilise un treuil à deux personnes, et que pour un lieu d'une toise de longueur, ½ toise de largeur et 1 ¼ toises de hauteur, ce doit être 6 baquets.
>
> À combien se montent à présent les coûts d'extraction pour le creusement du puits, dont la longueur mentionnée est de 6 échelles, en excluant les nécessaires [frais de] cordes et baquets : les sept questions de calcul suivantes doivent être résolues :

[179] UAF - OBA signifie "Universitätsarchiv Freiberg - Oberbergamt".
[180] La toise est l'unité de base, mesure environ 1,9 mètres. Elle est divisée en huitièmes, eux-mêmes composés de 10 pouces.
[181] Une équipe dure à cette époque en général huit heures. Plus généralement, on remarque dans ce problème un grand nombre de données « implicites » : la durée d'une équipe, la longueur d'une toise, la valeur de la monnaie. Cela est caractéristique de bien des milieux professionnels. Voir par exemple (Eric Roditi 2014).

1. Le lieu précédemment mentionné d'une toise de longueur, ½ toise de largeur et 1 ¼ toises de hauteur est à considérer comme un parallélépipède ayant ces mesures : déterminer le volume de ce lieu.

2. (le puits est aussi un parallélépipède) calculer le volume de ce puits, d'une longueur de 5/8 de toises et d'une toise et demie de longueur, pour une toise de profondeur ?

3. Indiquer ensuite le volume dudit puits pour sa profondeur totale de 20 toises.

4. Déterminer le nombre de baquets nécessaire pour une toise de ce puits, ainsi que pour les vingt toises.

5. Trouver le montant pour un treuil à une personne, pour lequel deux travailleurs sont nécessaires, chacun gagnant 4g. par équipe.

6. Trouver le montant pour le treuil à deux personnes. Pour celui-ci, trois travailleurs sont nécessaire, et chacun gagne 4g. par équipe.

7. Donner le montant total des coûts d'extraction du puits d'une longueur de 20 toises.

L'aspect le plus intéressant de cet exercice est la prise en compte de données réelles. Ce qu'apprend ici l'étudiant, outre l'arithmétique, ce sont les dimensions usuelles des puits de mines, les noms et le fonctionnement des instruments ou encore le salaire horaire moyen d'un travailleur. On trouve généralement le nom exact du lieu, puisque Lempe ne donne que des situations réelles. Un autre exercice réalisé par le même étudiant, se déroule dans la mine « *Neuglück und 3 Eichen* ». Dans cet exercice, il est demandé à l'étudiant d'étudier si l'installation d'un manège à chevaux pour remplacer un treuil serait rentable. Pour cela, celui-ci doit calculer les coûts de cordes, la location des chevaux et les salaires, puis évaluer les quantités extraites, pour calculer le bénéfice annuel. Il doit ensuite comparer ce bénéfice avec l'investissement réalisé pour déterminer le point d'amortissement.

Enfin, pour les meilleurs étudiants, qui maîtrisent donc l'arithmétique, la géométrie, la trigonométrie et souvent le calcul infinitésimal, Lempe propose des questions ouvertes (Morel 2013, pp. 166-170). L'étudiant doit lui-même trouver une mine dans la région où le problème est particulièrement important, formuler la problématique, trouver la modélisation et répondre à la question, sous la supervision de J.F. Lempe. Il s'agit de la dernière étape de la formation, qui prépare directement au futur emploi de l'étudiant : comme celui-ci se destine à l'administration moyenne ou supérieure des mines, il sera en permanence confronté à des problèmes de cet ordre.

En schématisant, on pourrait dire que J.F. Lempe propose un enseignement en trois temps : 1. l'étudiant apprend les bases de la géométrie et de l'arithmétique. 2. Il s'entraîne à résoudre des problèmes articulés, inspirés de situations réelles, apprenant par là même des informations relatives à son contexte professionnel. 3. l'étudiant est confronté à une situation typique de son futur métier, sans indication, et doit lui-même aller sur le terrain construire le problème avant de le résoudre. Lempe résume ses intuitions pédagogiques dans l'un de ses rapports :

> Un apprentissage fondamental des mathématiques et de la physique a été mis à profit par ces jeunes, qui ont certes de bonnes dispositions et font preuve d'application, mais qui sans cela ne sont pas préparés par leur éducation ; il faut seulement que l'enseignement soit présenté de manière à ce qu'ils sentent à quel point mathématiques et physique sont utiles dans l'exploitation des mines (UAF - OBA 246, f. 234r-v).

Dans cette première partie, j'ai cherché à montrer qu'une nouvelle forme d'enseignement se met en place à l'Académie des mines de Freiberg. Une plus large place est accordée à la coordination des enseignements, à l'interaction entre le professeur et les étudiants ainsi qu'à l'adaptation du matériau éducatif à des situations réelles, ou du moins plausibles. On peut cependant se demander dans quelle mesure cette volonté de l'administration des mines, mise en application par le professeur J.F. Lempe, avait pour but une véritable utilité de l'enseignement des mathématiques. S'agit-il simplement de sensibiliser les étudiants à leur futur métier, ou bien le but est-il de promouvoir les mathématiques comme outil par excellence pour améliorer l'exploitation ?

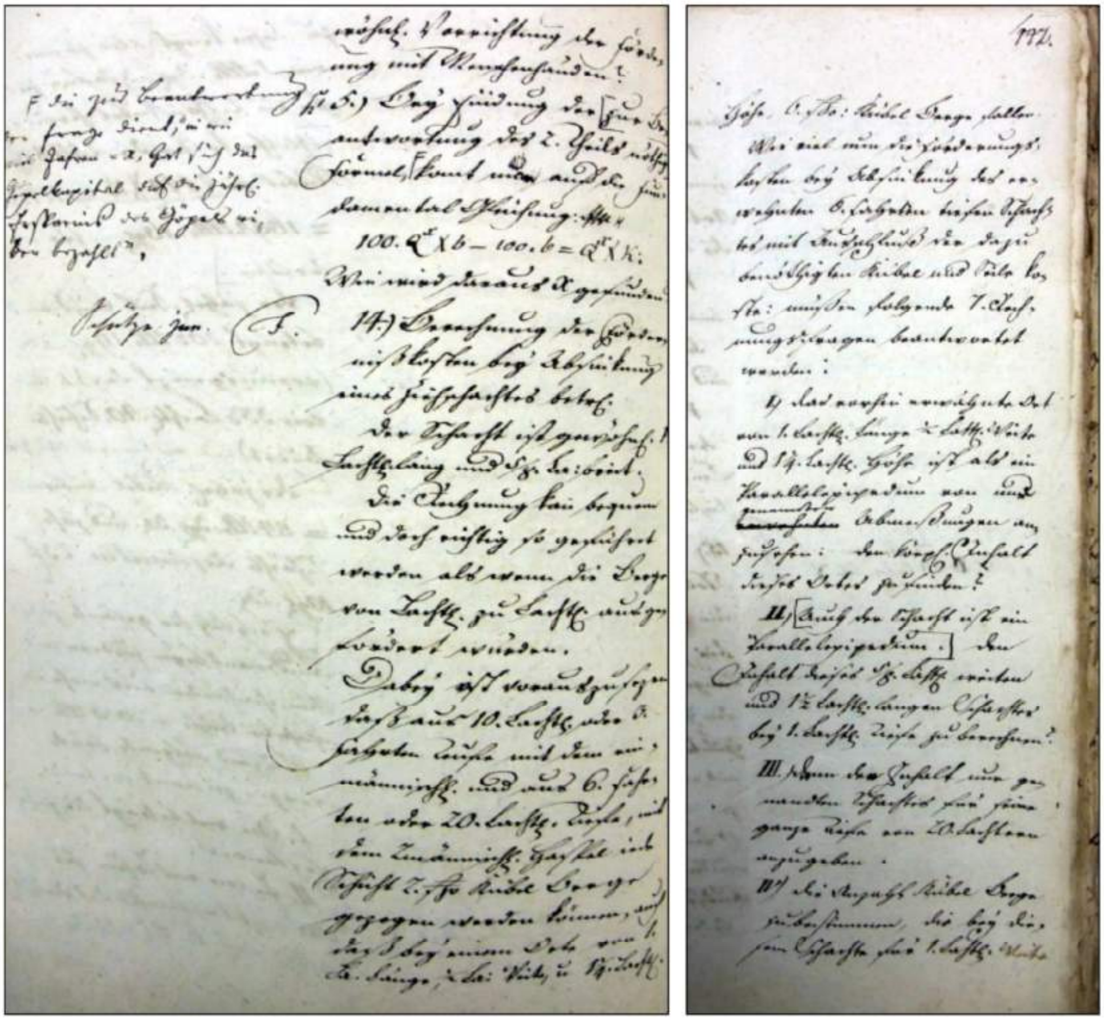


Figure 1 *- Exercice de Schutze jun. étudiant à l'Académie des mines de Freiberg en 1785.*

Source : UAF – OBA 245, ff. 142r-v.

3. *Une nouvelle conception des rapports entre mathématiques et technique*

Je pense qu'il s'agit véritablement de rentre les mathématiques utiles dans les mines ; en d'autre termes, s'assurer que chaque futur fonctionnaire des mines formé à Freiberg, sera capable : 1. d'utiliser ses connaissances géométriques et arithmétiques pour résoudre les problèmes qui se posent, et 2. d'assimiler les nouvelles réformes, méthodes et procédés proposés par l'administration des mines. C'est un problème que l'on retrouvera en détail dans la seconde partie, mais que l'on peut d'ores-et-déjà évoquer ici : une formation solide en mathématiques est nécessaire pour permettre de standardiser les pratiques et d'accélérer la diffusion des innovations.

Après la Guerre de Sept Ans (1756-1763), la Saxe entame un vaste mouvement de réforme nommé *Rétablissement*. Dans de nombreux États européens, les sciences mathématiques, au sens large, sont largement mises à contribution pour moderniser l'exploitation des mines à la fin du XVIII^{e} siècle. Cette évolution est bien sûr partielle, critiquée et inégalement couronnée de succès, elle n'est pas moins une tendance de fond, qui – et le fait est suffisamment important pour être souligné –, précède le début de la révolution industrielle en Saxe d'environ un demi-siècle[182]. Il est clair, et je l'ai montré dans ma thèse, que le rôle du professeur de mathématique dépasse largement celui de l'enseignement (Morel 2013, p. 190). Il sert d'expert vis-à-vis de l'administration, et collabore avec les directeurs des machines.

Mais ce sur quoi je voudrais insister aujourd'hui est qu'il fait tout cela en tant que professeur et avec ses étudiants : en d'autres termes, on trouve à l'Académie des mines de Freiberg une conception élargie du rôle de l'enseignant, mais aussi des étudiants. Quand il faut par exemple cartographier la région, et donc résoudre le problème épineux du calcul de la longueur de base servant de support à la triangulation, il s'attaque au problème avec plusieurs de ses étudiants.

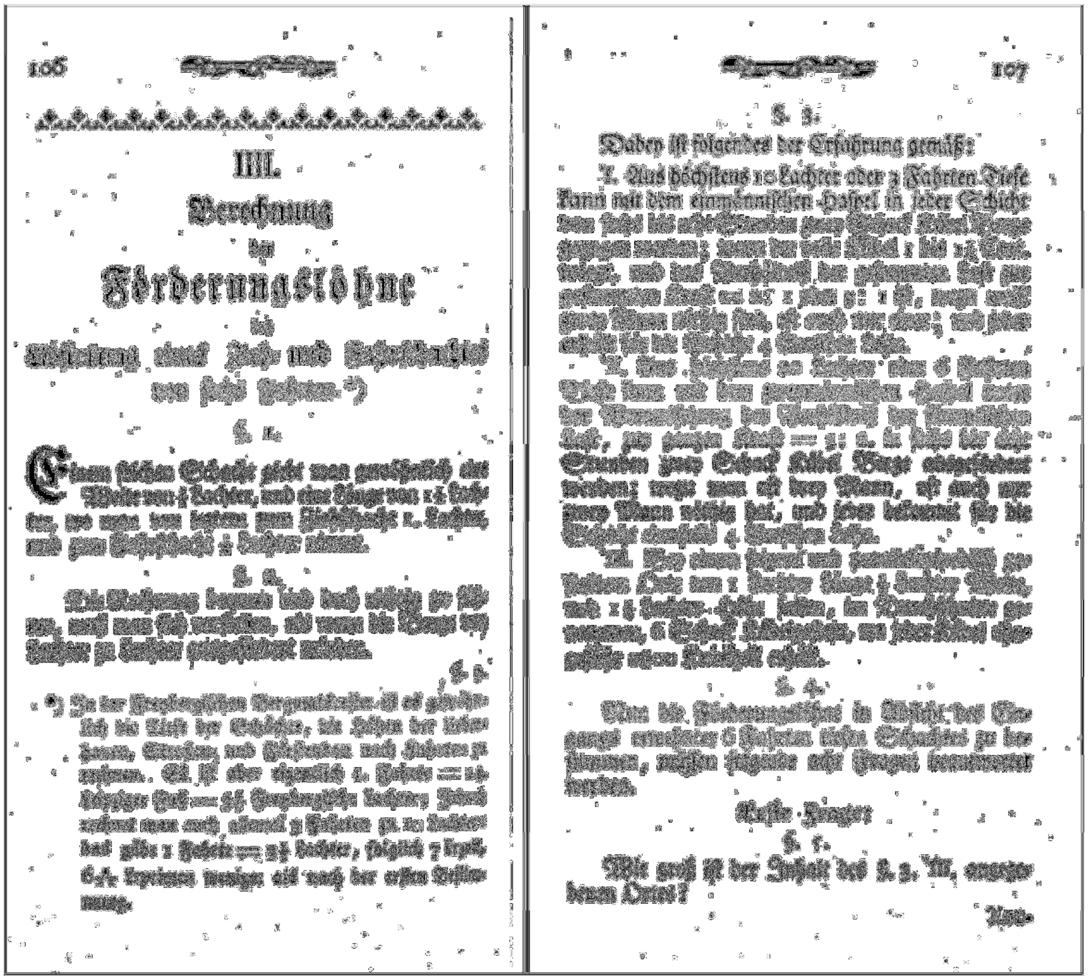
Il faut de plus souligner le caractère public des travaux réalisés avec les étudiants. Lempe est en effet éditeur d'un journal, qui est le journal de l'Académie des mines. Si les historiens ont longtemps cru que Lempe était le seul auteur des articles, ce n'est pas le cas. On voit très clairement, si l'on compare les archives de ses cours au journal, qu'il fait publier ses étudiants, ce qui est tout à fait novateur en cette fin de XVIII^e^ siècle. Dans la préface du premier numéro, il écrit :

> J'inclurai ici les travaux qui ont été réalisés, à mon instigation et sous ma supervision, par l'un ou l'autre de mes auditeurs ; bien sûr uniquement les travaux qui ne me sembleront pas indignes d'être publiés ; et ces travaux pourront être un exemple de mes efforts d'enseignement, pour rendre les mathématiques aussi utiles que possible à l'exploitation des mines (Lempe 1785, vol. 1, préface).

Dans le second numéro du magazine, publié en 1786, on trouve par exemple un article intitulé « Calcul des salaires d'extraction lors du creusement d'un puits d'extraction de six échelles [de profondeur] » (Lempe 1786, vol. 2, pp. 106-118). Les données du problème sont exactement les mêmes que celle du problème posé en 1785 à l'étudiant Schulze jun. (évoqué ci-dessus), et l'on retrouve les sept mêmes questions, auquel Lempe ajoute une huitième avant de donner une seconde méthode de calcul.

On voit ainsi que les exercices donnés aux étudiants servent bien l'objectif qui lui a été fixé : en tant que professeur de mathématiques, il doit proposer des méthodes simples et capables de mieux comprendre et d'améliorer la production. Il doit de plus les diffuser largement, ce qu'il fait au moyen de son journal. On pourrait donner d'autres exemples, comme par exemple la question du calcul et de l'optimisation du volume des baquets. On voit ainsi que l'enseignement des mathématiques s'intègre au sein d'un espace social bien particulier et que le professeur cherche à enseigner certaines compétences précises, qui seront directement mises en application dans un futur proche.

[182] Sur la modernisation de l'exploitation minière dans les États allemands et le rôle clé de Friedrich Anton von Heynitz (1725-1802), voir (Weber 1976).


106

IIII.

Berechnung

Förderungslöhne

§. 1.

107

§. 3.

Dabey ist folgendes der Erfahrung gemäß:

Figure 2 - *« Calcul des salaires d'extraction lors du creusement d'un puits d'extraction de six échelles [de profondeur] », in Magazin für die Bergbaukunde, vol. 2, pp. 106-118.*

III. PROFESSEURS OU GÉOMÈTRES : QUELLE RÉPARTITION DE L'ENSEIGNEMENT ?

Prenons maintenant un exemple précis, afin d'étudier quels bouleversements furent introduits par la création des académies des mines. Comme nous l'avons indiqué en introduction, il existe depuis au moins le XV^{e} siècle des géomètres souterrains (*Markscheider*). Avec la création de l'Académie des mines de Freiberg, la formation initiale des fonctionnaires des mines de Saxe, en arithmétique et en géométrie élémentaire, s'améliore considérablement. Ce nouveau système d'enseignement – qui comprend une véritable institution, un bâtiment, des classes, des professeurs, des manuels et des cours coordonnés – ne remplace pas immédiatement le système de compagnonnage qui lui préexistait.

Concrètement, les élèves suivent un enseignement théorique, puis certains vont étudier le maniement des instruments, la construction des cartes et la résolution de problèmes concrets dans les mines avec un *Markscheider*. Le système de certificats professionnels, en fonctionnement depuis de nombreuses générations, reste en place[183]. Symptomatiquement,

[183] Voir par exemple un certificat daté de 1784 dans UAF – OBA 244, f. 168r.

l'enseignant de géométrie souterraine pratique ne donne pas de rapport détaillé de ses activités ; il ne publie pas de manuel et continue d'utiliser ses manuscrits. Il reste en quelque sorte à l'écart de la nouvelle institution. Avec l'arrivée de J.F. Lempe au poste de professeur de mathématiques, les choses vont changer.

En 1784, et probablement sur demande de l'administration, le *Markscheider* principal de Freiberg, Johann Friedrich Freiesleben, accepte de fournir une liste complète des connaissances théoriques nécessaires à l'apprentissage pratique de la discipline (UAF – OBA 244, ff. 247r-253v). C'est un premier pas important, car la délimitation précise des rapports entre mathématiques théoriques et pratiques est nécessaire pour pouvoir coordonner les enseignements. Or ce partage des tâches n'avait depuis vingt ans jamais eu lieu.

4. La réforme de 1795 : un conflit entre professeurs et praticiens.

Si l'on sent clairement, à la lecture des rapports, que les professeurs de mathématiques – J.F.W. von Charpentier puis J.F. Lempe – voudraient se voir confier l'enseignement de la géométrie souterraine[184], un certain statu quo se maintient jusqu'en 1795. Il est cependant clair que J.F. Lempe commence à enseigner la géométrie souterraine d'un point de vue théorique ; on en trouve la trace non seulement dans son *Magazin*, mais également dans les rapports qu'il adresse à l'administration et dans certains exercices proposés à ses étudiants. En 1781, en 1782 et finalement en 1785, il a publié successivement trois manuels sur le sujet, dans lequel sa compétence n'est plus à démontrer. À chaque fois, il insiste sur la nécessité de traiter cette discipline comme une discipline scientifique, en utilisant plus de méthode analytique et moins de traditions.

On se trouve en fait dans l'une de ces périodes où l'organisation de l'enseignement, en particulier sa structure institutionnelle, ne correspondent plus à la réalité et aux besoins de la discipline à enseigner. Comme l'explique Yves Chevallard :

> On peut imaginer un monde institutionnel dans lequel les activités humaines seraient régies par des praxéologies bien adaptées permettant d'accomplir toutes les tâches voulues d'une manière à la fois efficace, sûre et intelligible. Mais un tel monde n'existe pas : comme on l'a suggéré, les institutions sont parcourues par toute une dynamique praxéologique, qu'on n'examinera ici que très brièvement.
>
> Les praxéologies, en fait, vieillissent : leurs composants théoriques et technologiques perdent de leur crédit et deviennent opaques, tandis que des technologies nouvelles émergent qui, par contraste, portent à suspecter d'archaïsme les techniques établies. (Chevallard 1998, en ligne)

Dans notre situation, la praxéologie correspond à l'ensemble des problèmes que le géomètre doit savoir résoudre. Ils demandent à la fois un savoir-faire dans le maniement des instruments et l'utilisation des cartes, et d'autre part un certain nombre de connaissances mathématiques. La discipline, théorisée et développée d'un point de vue théorique (analytique) par J.A. Scheidhauer puis J.F. Lempe, n'a que peu évolué dans sa réalité pratique. Carl Ernst Richter, de 1765 à 1779, puis Johann Friedrich Freiesleben à sa mort, perpétuent cette approche traditionnelle mathématico-pratique. Celle-ci est adaptée à la bonne marche quotidienne des mines, mais « dans un univers de tâches routinières surgissent à tout instant, ici et là, des tâches problématiques, qu'on ne sait pas – pas encore – accomplir » (Chevallard 1998).

La grande réforme de l'Académie des mines, décidée en 1794 et finalement adoptée en 1797, va être l'occasion de crever l'abcès et de discuter du partage des tâches entre professeurs et géomètres. Le directeur de l'Académie commence par demander à tous les enseignants

[184] Voir par exemple le rapport de Charpentier en 1781 (UAF – OBA 242, ff. 112-113), ou un rapport précédent de 1779 (UAF – OBA 242, f. 106r).

quels sont les problèmes à résoudre dans leurs disciplines respectives. La réponse du *Markscheider* Freiesleben est lapidaire : il explique que « en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie souterraine, aucun défaut ne m'est connu », et ne propose aucune évolution[185]. Charpentier, qui fait à présent partie de la haute administration des mines, est cependant d'un autre avis :

> Pour l'enseignement de la géométrie souterraine, je dois ici répéter par écrit ce que j'ai eu plusieurs fois l'occasion d'exprimer à l'oral : l'enseignement de la géométrie souterraine suppose une connaissance vraiment approfondie des mathématiques pures et en particulier une application habile de théorèmes et d'exercices trigonométriques souvent complexes ; et nos géomètres souterrains pratiques actuels ne la possèdent pas ; ils ne peuvent par conséquent pas présenter à leurs élèves la totalité des théorèmes concernés et des preuves nécessaires, ni les rendre suffisamment compréhensibles. (UAF – OBA 10, 173r. Partiellement cité dans Morel 2013, p. 234)

Pour résumer rapidement le long débat qui s'engage : il est finalement décidé que la géométrie souterraine sera une matière comme les autres. Le programme est redéfini en accord avec l'administration des mines et le professeur de mathématiques. J.F. Lempe crée alors une matière intitulée « *géométrie souterraine théorique* », et le *Markscheider* est cantonné à l'enseignement de l'application des connaissances obtenues dans ce cours. Cela permet de former la totalité des futurs fonctionnaires des mines à l'aspect théorique de la discipline, tandis que seuls ceux qui en ont vraiment besoin apprennent le maniement des instruments. La discipline est donc intégrée au cursus, son contenu est régulièrement discuté, et les examens ont lieu sous la surveillance des autres professeurs (UAF – OBA 77, ff. 39-41).

5. *Quels enjeux pour l'enseignement ? Comparaison avec l'Académie des mines de Schemnitz*

Il est instructif de comparer la situation à l'Académie des mines de Freiberg et à celle de Schemnitz, dans l'Empire Austro-hongrois. Il y a entre les deux pays de multiples différences ; les académies et l'enseignement des mathématiques ne jouent pas le même rôle. Malgré tout, il faut reconnaître au moins deux points communs fondamentaux : dans les deux cas, il existait avant la création de l'Académie une communauté de géomètres souterrains. Et comme à Freiberg, un débat va s'engager entre professeurs et praticiens sur l'enseignement de la discipline.

À la création de l'Académie de Schemnitz, l'enseignement pratique est bien sûr confié, comme le voulait jusque-là la tradition, à un géomètre souterrain. Une raison supplémentaire est que, contrairement à Freiberg, les professeurs de mathématiques vont se succéder à un rythme rapide. En 1772, un nouveau géomètre souterrain est recruté pour la formation pratique : il s'agit de Franz Dembscher, qui a lui même appris la discipline dans la région. L'année suivante, un nouveau professeur de mathématiques arrive, Johann Thaddäus Anton Peithner (1727-1792), un savant important à la cour de Vienne.

Le conflit va une fois de plus concerner la partie « théorique » de l'enseignement de la géométrie souterraine. S'il est clair que le *Markscheider* doit enseigner le maniement des instruments et le professeur de mathématiques la géométrie élémentaire, les méthodes mathématiques spécifiques à la géométrie souterraine sont disputées. Avant l'arrivée du nouveau professeur, Dembscher semble avoir enseigné la théorie et la pratique. Son enseignement

> consistait en ce que je leur [les apprentis] ai montré toutes les manières de décrire les mesures à la surface et donc aussi, par l'exercice, la théorie appliquée des bâtons [de mesure], du quadrant, de la corde d'arpentage (*Astrolab*), du viseur. Mais les jours où le mauvais temps ne permettait pas de travailler à la

[185] UAF – OBA 9, 21, Lettre de J.F. Freiesleben, 07.02.1794.

> surface, j'ai expliqué tout à la fois quelques exercices géométriques et trigonométriques sur la direction et l'inclinaison des filons […] et toute la théorie et l'utilisation des tables de sinus et de logarithme.(Štátny ústredný banský archív v Banskej Štiavnici, Oberkammergrafenamt (dans la suite du texte, ŠÚBA - HKG) Berichte 21.02.1774, f. 3r.)

Le géomètre défend son droit à enseigner la théorie spécifique à la géométrie souterraine, et affirme même, dans un document ultérieur, avoir « aussi rédigé un véritable manuel de géométrie souterraine pour les apprentis locaux, et [qu'il] peut le mettre sous presse » (ŠÚBA – HKG, résolution du 11.03.1774). Il y a donc, ici aussi, un conflit entre le savoir des universitaires savants et celui des praticiens. Dembscher affirme qu'on lui avait fait miroiter le salaire et le titre d'un professeur (ŠÚBA – HKG, compte-rendu du 21.02.1774, f. 1r.). Peithner, savant et professeur, cherche au contraire à se distinguer des praticiens et affirme la supériorité que lui donne la maîtrise de la théorie. Il va jusqu'à rédiger un véritable cours théorique de géométrie souterraine, qui ne sera cependant jamais publié (Leoben, Rara MSK/V/32 35583).

Du professeur Peithner, on possède également les questions posées à l'université de Prague en 1766, où il enseignait auparavant l'utilisation des mathématiques dans les sciences minières[186]. Les questions sont bien différentes de celles que les géomètres souterrains peuvent travailler avec leurs apprentis et relèvent plutôt d'une approche philosophique, souvent proche de la philosophie naturelle, caractéristique des universités allemandes de l'époque. Elles sont essentiellement qualitatives, du type « qu'est ce qu'un point ? une ligne ? un corps ? ». Même lorsqu'il s'attarde spécifiquement sur la géométrie souterraine, c'est pour demander au candidat d'expliquer « quels instruments sont nécessaires pour pratiquer l'art de la mesure souterraine, et leur emploi ». (Národní archiv, Praha - Staré Montanum MM 233, 4/10, partie « *Aus der Cörper Meß-Kunst* »)

À l'inverse, on peut voir comment la géométrie souterraine pratique était enseignée à Schemnitz. En 1777, un décret royal confirme que le *Markscheider* ne doit pas « répéter les principes théoriques algébrico-géométriques et trigonométriques » et se contenter de les appliquer dans des travaux en extérieur (Schmidt 1836, 2(14), p. 153). Une insistance particulière est portée sur le dessin : les étudiants doivent réaliser des mesures et faire des cartes. La même année, un programme d'enseignement est demandé au *Markscheider* Lorenz Siegel ; celui-ci propose un plan détaillé d'enseignement théorique et pratique (la partie théorique est bien sûr refusée par l'administration). L'année suivante, il propose un rapport détaillé sur le déroulement du cours, où l'on voit toutes les conséquences de la division de l'enseignement :

> Applications pratiques
>
> L'arpentage pratique, qui a été enseigné l'année dernière 1777 à Windschacht aux apprentis.
>
> On a tout d'abord expliqué et présenté l'utilisation des instruments nécessaires à l'arpentage, dont on se sert à la surface, et ceux-ci sont : le bâton, la tige de mesure, le cordeau de mesure, la chaînette de mesure, l'astrolabe […] Après la présentation de ceux-ci, nous sommes passés à l'exercice proprement dit à la surface, et avons tenu pour nécessaire de montrer [la résolution] pratique des exercices suivants, dans cet ordre :
>
> 1er exercice : Montrer la fabrication d'une échelle réduite, d'après une ligne arbitrairement choisie, ainsi que son utilisation et son application concrète. (ŠÚBA – HKG Ordinaria du 06.04.1778)

On voit donc que le cours, comme il avait été ordonné, se limite à des manipulations pratiques et à des mesures, en l'absence de toute théorie. De plus, le cours à lieu à Windschacht, une petite ville située à une heure de marche de Schemnitz. Le cours avait ainsi lieu dans la

[186] archiv, Praha - Staré Montanum MM 233, 4/10. Merci à Peter Konecny de m'avoir signalé cette source, et de m'avoir très gentiment fourni sa transcription partielle.

Markscheiderey, le quartier général des géomètres souterrains où étaient conservés les cartes et les instruments. Certains exercices des étudiants sont conservés dans les archives de l'Académie ; le soin porté à la finition des cartes contraste avec la rusticité des méthodes utilisées. Si celles-ci sont acceptables pour de l'arpentage, elles sont tout à fait insuffisantes pour réaliser des plans de mines précis. L'enseignement pratique se fait donc au milieu des praticiens, ce qui est un avantage. La séparation des lieux (Académie/*Markscheiderey*), des statuts (professeur/praticien) et le peu de communications entre les deux mondes va cependant, à terme, peser sur le développement de la géométrie souterraine à Schemnitz.

IV. CONCLUSION

Cette étude des méthodes et du contenu de l'enseignement des mathématiques dans les Académies des mines de Freiberg, et dans une moindre mesure de Schemnitz, montre donc qu'un nouveau modèle d'enseignement des mathématiques s'y met en place. Ce modèle possède plusieurs caractéristiques qui seront ensuite reprises par de nombreuses institutions d'enseignement scientifique et technique : on y trouve un cursus pluriannuel, dans lequel les enseignements sont progressivement coordonnés à la fois à l'intérieur d'une matière (sur plusieurs années) et à l'intérieur d'une classe (entre plusieurs matières).

J.F. Lempe innove et teste de nouvelles méthodes d'enseignement des mathématiques. Outre l'adaptation du contenu aux pratiques sociales de références, il rend l'apprentissage bien plus interactif ; l'introduction systématique d'exercices adaptés pour et discutés avec chaque étudiant est une nouveauté. L'enseignement des mathématiques a de plus lieu dans le contexte des régions minières. Les étudiants sont envoyés dans les mines pour faire des observations, et leurs résultats sont publiés dans un journal scientifique, ce qui montre qu'il s'agit bien là d'un « savoir utile ».

Si l'on se focalise sur un objet d'enseignement particulier, la géométrie souterraine, on s'aperçoit que ces évolutions ne se font pas sans frictions. Elles modifient en effet radicalement des méthodes d'enseignement et des pratiques en vigueur depuis plus de deux siècles. À Freiberg comme à Schemnitz, le conflit porte sur la « géométrie souterraine théorique », c'est-à-dire les méthodes, théorèmes et formules spécifiques à cette discipline. À Freiberg, l'administration va confier ces enseignements aux professeurs de mathématiques pour permettre d'imposer de nouvelles praxéologies ; après une période d'adaptation, la mathématisation de la géométrie souterraine sera un grand succès. Une tentative similaire à lieu à Schemnitz, mais le manque d'implication des professeurs de mathématiques ne va pas permettre d'arriver aux mêmes résultats.

REFERENCES

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In *Actes de l'université d'été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp. 91-12). IREM de Clermont-Ferrand.
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf

Freiberg (1850) *Die Bergakademie zu Freiberg: Zur Erinnerung an die Feier des hundertsjährigen Geburtstages Werners*. Freiberg : Engelhardt.

Kaden H. (2012) *Das Sächsische Bergschulwesen. Entstehung, Entwicklung, Epilog* (1776-1924). Köln : Böhlau.

Konečný P., Schleiff H. (2013, Eds.) *Staat, Bergbau und Bergakademie: Montanexperten im 18. und frühen 19 Jahrhundert, Vierteljahrschrift für Sozial- und Wirtschaftsgeschichte – Beihefte* n°. 223. Stuttgart : Franz Steiner.

Lempe J.F. (1781) *Erläuterung der Kästnerischen Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie.* Altenburg : Richter.

Lempe J.F. (1782) *Gründliche Anleitung zur Markscheidekunst.* Leipzig : Crusius.

Lempe J.F. (1785-1799) *Magazin für die Bergbaukunde*, 13 volumes.

Lempe J.F. (1787) *Bergmännisches Rechenbuch.* Freiberg : Barthel.

Lempe J.F. (1795-1797) *Lehrbegriff der Maschinenlehre, mit Rücksicht auf den Bergbau.* Leipzig : Crusius.

Lempe J.F., Beyer A. (1785) *Gründlicher Unterricht vom Bergbau, nach Anleitung der Markscheidekunst.* Altenburg : Richter.

Martinand J.-L. (2003) La question de la référence en didactique du curriculum. *Investigações em Ensino de Ciências* 8(2), 125-130.

Morel T. (2013) *Mathématiques et politiques scientifiques en Saxe (1765-1851) : institutions, acteurs et enseignements*, Thèse de doctorat de l'Université de Bordeaux.

Morel T. (2015a) Enseigner les mathématiques dans un domaine technique. Écoles et académies des mines au XVIIIe siècle. In Mathé A-C., Mounier E. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2014* (pp. 253-269). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM,.

Morel T. (2015b) Le microcosme de la géométrie souterraine : échanges et transmissions en mathématiques pratiques. *Philosophia Scientae,* cahier thématique « Échanges mathématiques : études de cas (XVIIIe-XXe siècles), 17-36.

Morel, T. (2015c) Usefulness and practicability of Mathematics: German Mining Academies in the 18th century. *Preprint of the Max-Planck Institute for the History of Science*, *« The Making of Useful Knowledge »*, à paraître.

Schmidt F.A. (1836) *Chronologisch-systematische Sammlung der Berggesetze der Königreiche Ungarn* 2(14).

Schubring G. (2003) Recent Developments in Research on the Institutional History of Mathematics. *Llull* 26(57), 1045–1059.

Weber W. (1976) *Innovationen im Frühindustriellen deutschen Bergbau und Hüttenwesen : Friedrich Anton von Heynitz.* Göttingen : Vandehoeck et Ruprecht.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ÉCRITURES NUMÉRIQUES ET CALCUL EN PLEIN CHAMP

Diana SOLARES*

Résumé – L'étude suivante analyse une activité agricole qui implique l'utilisation de l'écriture et du calcul numérique par des familles immigrantes de travailleurs agricoles. Elle a pour but d'identifier les connaissances mathématiques en jeu dans une activité extrascolaire spécifique afin de rassembler des éléments qui permettront d'analyser les relations entre les connaissances mathématiques extrascolaires et les connaissances enseignées à l'école primaire. De plus, elle présente un ensemble d'outils d'analyse résultant du dialogue entre perspectives théoriques de différents domaines, tout en soulignant l'importance des contributions de la Théorie Anthropologique du Didactique à l'analyse d'activités qui mobilisent des connaissances mathématiques dans des contextes extrascolaires.

Mots-clefs : éducation en mathématiques, travail agricole, Théorie Anthropologique du Didactique.

Abstract – This paper analyzes activities in which numerical writing is mobilized, in a context of agricultural work carried out by labor migrant families. The purpose of the study is to identify mathematical knowledge at play in a specific extracurricular activity in order to analyze possible relationships between knowledge that the children construct outside and inside school. Furthermore, this paper puts to consideration the use of the Anthropological Theory of Didactics and others theoretical perspectives to analyze activities in which mathematical knowledge is mobilized.

Keywords: Mathematics education, agricultural work, Anthropological Theory of Didactics

I. INTRODUCTION

D'après des statistiques officielles de 2011, environ 894 649 enfants et adolescents de 5 à 17 ans travaillaient dans le secteur agricole au Mexique ; il s'agissait de mineurs qui migraient avec leurs familles pour vendre leur force de travail. Des données officielles signalent qu'au moins 434 961 familles mexicaines se trouvaient en mouvement constant entre leurs communautés d'origine et les zones réceptrices du travail agricole.

Ces enfants interrompent constamment l'école primaire, raison pour laquelle il existe dans certaines zones agricoles des instances officielles qui organisent l'éducation primaire pour cette tranche de population. L'échec, l'absentéisme et la désertion caractérisent les parcours scolaires de nombre de ces enfants.

Nous avons constaté (Solares 2012a)[187] que d'une part, compte tenu de leurs activités et du contexte social dans lequel ils évoluent, ces élèves et leurs familles ont acquis une maîtrise de

* Universidad Autónoma de Querétaro – México – violetasolares@gmail.com. Traduction de l'espagnol vers le français par Pascale Beujard. Une version plus étendue de l'analyse de cette activité agricole ainsi que d'autres est présentée en espagnol dans les actes du IVe Congrès International sur la TAD, édition en préparation.

[187] Thèse de doctorat dirigée par David Block.

Solares D. (2015) Ecritures numériques et calcul en plein champ. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT5, pp. 517-526.

la numération orale et une connaissance efficace du calcul mental qui leur permettent de faire face à certaines situations relatives à leur travail. D'autre part, à l'école de nombreux élèves ont de sérieuses difficultés à écrire des nombres et à effectuer des algorithmes correspondant à leur niveau de scolarité. Face à ce constat, nous nous posons les questions suivantes : Quelles sont les connaissances des familles en mathématiques et dans quelles activités spécifiques les utilisent-ils ? Existe-t-il un lien entre les connaissances que les élèves utilisent à l'école et celles qu'ils utilisent en dehors de l'école ? Ce texte propose quelques éléments pour aborder ces questions.

II. OUTILS THEORIQUES ET METHODOLOGIQUES

1. Rapport entre connaissances et situations

Le point de départ méthodologique que nous adoptons est un principe épistémologique : pour identifier des connaissances mathématiques, *il est nécessaire de caractériser les situations* dans lesquelles ces connaissances sont mobilisées. Ce principe se base sur trois sources.

La première comprend plusieurs études latino-américaines visant à analyser les connaissances en mathématiques de populations vulnérables, telles que des adultes non alphabétisés, des communautés indiennes et des travailleurs qui n'ont pas encore atteint la majorité (Ferreiro, Fuenlabrada, Nemirovsky & Block 1987 ; Ávila 1988; Carraher, Carraher, & Schlieman 1995 ; Knijnik 2003). Ces études ont un dénominateur commun : les connaissances et la situation dans laquelle elles se développent sont étroitement liées ; le contexte, la culture ou le type d'activité exercent une forte influence sur le sens des connaissances mathématiques mises en œuvre.

La deuxième source regroupe des théories didactiques qui reconnaissent que les connaissances mathématiques fonctionnent de différentes manières, selon la situation ou l'activité où ces connaissances sont mises en œuvre : la Théories des Situations Didactiques déclare que les connaissances mathématiques peuvent avoir différents sens associés aux situations problématiques où elles interviennent (Brousseau 2000) ; de son côté, la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) caractérise les mathématiques comme une activité humaine parmi d'autres réalisées dans la société ; l'activité mathématique a lieu dans différents contextes autres que dans les milieux scolaire et scientifique (Chevallard, Bosch & Gascón 1998). Cette étendue et cette diversité de situations ont une incidence sur les connaissances mathématiques en jeu.

La troisième source est constituée, d'une part, des études qui s'inspirent de la perspective nommée « Cognition dans la pratique », qui explique que les sujets élaborent des manières particulières de problématiser et de résoudre des situations en fonction du rôle social attribué à ces situations, de l'interaction avec d'autres personnes et des contextes spécifiques dans lesquels ces interactions ont lieu (Lave 1991). D'autre part, étant donné que nous analysons des documents contenant des informations numériques, nous nous appuyons sur des études qui, selon la perspective de « Literacy Practices », reconnaissent l'alphabétisation (literacy) comme une pratique sociale, déterminée historiquement, qui ne relève pas uniquement des compétences de lecture et d'écriture, ni des textes écrits mais également des interactions entre les individus à propos de ces textes (Barton & Hamilton 1998).

Telles sont les trois sources qui constituent le cadre méthodologique de cette recherche : pour identifier des connaissances mathématiques déterminées, il est indispensable de caractériser les activités ou situations spécifiques dans lesquelles sont produites ou interviennent ces connaissances. Nous nous centrerons dans ce document sur les apports de la TAD.

2. Aspects permettant de caractériser des activités et connaissances mathématiques

En 2008 et 2009, nous avons réalisé des analyses dans un vignoble au nord du Mexique, près de la frontière avec les États-Unis, dans le but d'identifier les activités qui donnaient lieu à certaines connaissances mathématiques ainsi que les caractéristiques de ces connaissances. Une des activités identifiées est la suivante : pendant la récolte, la plupart des familles travaillent à la cueillette du raisin. Le nombre de caisses récoltées par chaque « cueilleur » est noté par les « marqueurs » (« *anotadores* ») qui sont chargés de tenir les comptes des caisses obtenues. On observe différentes manières de tenir ce registre, une des plus courantes étant par regroupements de cinq (figure 1).

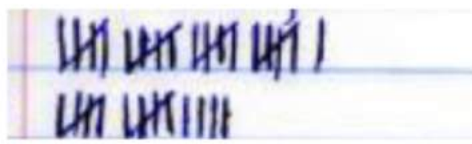


Figure 1 *– Registre des caisses par regroupements de cinq*

À la fin de la journée, les marqueurs comptabilisent ces traits pour obtenir le total en utilisant des nombres décimaux, puis ils transcrivent ces données sur différents documents fournis par l'administration. Ces registres numériques sont adressés à divers destinataires, dont le bureau chargé d'émettre les chèques.

La plupart des adultes et des mineurs interviewés ont dit qu'en tant que vendangeurs, ils n'écrivent rien lorsqu'ils réalisent leur travail ; ils « enregistrent » dans leur mémoire le nombre de caisses récoltées.

Parmi tous les documents produits à partir de l'information des marqueurs, le chèque et le justificatif de paiement sont ceux qui arrivent dans les mains des vendangeurs. Le justificatif indique les jours travaillés, le revenu correspondant à chaque jour de travail et la quantité totale à payer. Les vendangeurs sont quelquefois mécontents du paiement qu'ils reçoivent, ils affirment que les marqueurs enregistrent moins de caisses que celles qu'ils ont réellement vendangées et que par conséquent leur paiement s'en ressent.

Il existe donc pour une même activité agricole une diversité d'écritures numériques et de participants. Les intérêts des sujets étant en jeu dans la production et l'utilisation de ces écritures, ceci produit une tension constante qui dégénère quelquefois en conflit. Les vendangeurs n'ont que « leur mémoire » comme recours pour affronter ces conflits (plusieurs adultes interviewés ne sont jamais allés à l'école ou ont un degré de scolarité limité).

Les conditions dans lesquelles se réalise le registre agricole, ainsi que la révision des différentes études citées précédemment nous ont incitées à considérer les aspects suivants pour caractériser aussi bien les activités agricoles que les connaissances mathématiques en jeu lors de ces activités :

En quoi consistent les tâches spécifiques (quels sont les types de tâches) et quels sont leurs objectifs ?

Qui participent à ces tâches et quels sont leurs intérêts ?

Comment ces tâches sont effectuées (quelles sont les techniques) et avec quels outils,

Quels sont les discours concernant les manières de réaliser les tâches (quelle est la technologie) ?

On remarquera que plusieurs aspects ont à voir avec ce que la TAD considère comme *composantes d'une praxéologie.* Ceci s'explique par le fait que nous nous appuyons sur deux principes de la TAD :

- l'activité mathématique a lieu lors de pratiques concrètes réalisées dans des institutions spécifiques ;
- toute activité humaine peut s'analyser en termes de praxéologie puisqu'il est possible d'identifier les « types de tâches » effectuées dans une pratique déterminée, les « techniques » utilisées pour réaliser ces tâches, la « technologie » qui justifie et explique les techniques et la théorie qui justifie à son tour la technologie (Chevallard & al. 1998). Nous cherchons donc à identifier *les types de tâches* effectuées dans des activités agricoles spécifiques, *les techniques* utilisées dans ces tâches et *les discours technologiques* relatifs à ces techniques.

3. La composante pragmatique de la technologie

Nous tenons à apporter deux précisions sur l'utilisation que nous faisons de la TAD. Tout d'abord, bien que cette théorie n'aborde pas « les connaissances mathématiques » mais les praxéologies mathématiques existant dans des institutions spécifiques, nous utilisons le terme « connaissance » car nous cherchons à centrer la recherche sur les procédures, les stratégies, les erreurs et difficultés que les sujets expriment pendant leurs activités spécifiques. Deuxièmement, nous n'analysons pas les discours portant sur la technologie (la théorie) puisque nous n'avons pas identifié cette composante dans les discours des travailleurs agricoles. De plus, nous ne connaissons pas d'études qui abordent du point de vue de la TAD des praxéologies mathématiques d'institutions non scolaires. Cependant, des recherches soulignant les éléments « pragmatiques » des discours commencent à se développer. Nous voyons là une possibilité d'analyser des praxéologies mathématiques qui ont lieu dans les champs. C'est ce que nous allons tâcher de justifier maintenant.

Selon la TAD, la technologie d'une technique est « un discours rationnel -le logos- portant sur la technique ». Selon Chevallard (1999), ce discours remplit trois fonctions : justifier rationnellement la technique, l'expliciter ou la rendre intelligible et produire de nouvelles techniques. Quelles justifications et explications relatives à la technique y a-t-il dans les discours des travailleurs agricoles ? Comment aborder l'identification et l'analyse des discours lorsque ceux-ci se passent dans des espaces qui ne sont pas scolaires ?

Dans le cadre de la TAD, Castela (2008) précise qu'aux côtés des savoirs clairement définis par une composante théorique de la technologie, il existe un autre type de savoirs qui peuvent être qualifiés d'« opératoires, pragmatiques, pratiques ». Elle identifie ce type de savoirs comme « composante pratique » de la technologie. Ainsi, aux côtés des trois fonctions que la TAD attribue à la technologie, l'auteure en distingue six autres : décrire, faciliter, motiver, expliquer, valider et évaluer la technique. Ces fonctions ont été précisées par Romo (2009), qui utilise ce « modèle praxéologique élargi » pour analyser les praxéologies mathématiques mises en œuvre dans un contexte de formation d'ingénieurs. Cette étude souligne la tension existant entre théorie et pratique, surtout dans les cas où des techniques mathématiques sont utilisées dans des contextes non mathématiques (Castela & Romo 2011).

Sur la base des travaux de Castela et Romo, nous centrons notre attention sur les gestes et discours des travailleurs agricoles qui ont pour but de corriger les techniques utilisées par certains travailleurs ou qui prétendent enseigner certaines techniques à ceux qui viennent de s'intégrer aux travaux agricoles, afin de voir si certains de ces discours s'appuient sur des connaissances mathématiques ou s'ils ont une incidence sur ces dernières.

Voici, de manière synthétique, la définition de chacune de ces six fonctions. La manière dont nous interprétons et utilisons certaines fonctions sera traitée plus loin.

- Décrire la technique. Elle est comprise comme « la production d'un discours descriptif des gestes qui composent une technique » (Castela 2011, p.170). Ce discours descriptif est important dans le processus de transmission d'une invention technique au sein d'une communauté de pratiquants.
- Faciliter la mise en œuvre de la technique. Il s'agit de savoirs qui

> permettent aux usagers d'utiliser avec efficacité mais aussi dans un certain confort la technique. Ils sont porteurs d'améliorations et d'avertissements permettant d'éviter erreurs et maladresses connues comme fréquentes. (Op cité, p. 170).

- Motiver la technique. Ensemble de savoirs axés sur les objectifs de la pratique :

> ce sont les buts atteints qui justifient rationnellement les gestes en montrant leurs raisons d'être. Il s'agit d'écrire une histoire de la technique qui situe ses composantes les unes par rapport aux autres : pour quoi (¿para qué?) accomplit-on tel geste à tel moment ? (Ibid., p.171).

- Valider la technique.

> Il s'agit de savoirs qui établissent que la technique et les gestes qui la composent permettent bien d'atteindre les buts qui leur sont assignés. (Ibid., p.171).

- Expliquer la technique. Elle se réfère à une rationalité dans le sens

> d'une intelligence des causes. Il s'agit de savoirs qui analysent comment il se fait que la technique et ses différents gestes permettent bien d'atteindre les buts qui leur sont assignés. (Ibid., p.171).

- Évaluer la technique. Ce type de savoirs porte sur

> les conditions et les limites d'une technique relativement aux tâches du type T, par comparaison avec d'autres techniques possibles s'il en existe. Ils peuvent également concerner l'ergonomie de la technique du point de vue de ses utilisateurs. (Ibid., p. 172).

III. ANALYSE PRAXEOLOGIQUE DE L'ENREGISTREMENT DU TRAVAIL AGRICOLE

Les champs qui ont fait l'objet de notre recherche se consacrent à la culture du raisin et des asperges. Les travailleurs sont payés en fonction du nombre de caisses qu'ils récoltent par jour. Pour ce faire, chaque travailleur doit marquer sur chaque caisse le numéro de travailleur que l'administration lui a assigné. De son côté, le marqueur de chaque équipe de travailleurs tient une première liste sur laquelle il note le nom et le numéro de chaque travailleur. Établir la liste des travailleurs et marquer un numéro sur les caisses font partie des *multiples types de tâches* relatives à l'organisation et au contrôle du travail journalier dans les champs. Rappelons-nous que, selon la TAD, un « type de tâches » s'exprime de manière précise par un verbe tel que *diviser* un nombre entier par un autre, *résoudre* un problème mathématique scolaire déterminé.

Les marqueurs réalisent au moins trois types de tâches : faire les listes de travailleurs, noter les caisses de raisin vendangées par chaque travailleur et tenir le compte des caisses de raisin qui sont envoyées à l'entrepôt. Les documents élaborés pour ces types de tâches sont définis par un verbe spécifique : « faire la liste », « noter les caisses »… Les marqueurs utilisent ces expressions pour parler aussi bien du document lui-même que des actions concernant leur élaboration.

Une fois la liste élaborée, les marqueurs élaborent un autre document : ils recopient à partir de la liste le numéro de chaque travailleur (sans le nom) et écrivent, en face de chaque numéro, une marque correspondant à chaque caisse de raisin récoltée par le travailleur. Nous avons d'ailleurs trouvé dans plusieurs champs différentes manières de faire ; la figure 2 en présente quelques-unes (c'est, dans tous les cas, le nombre 10 qui est représenté) :

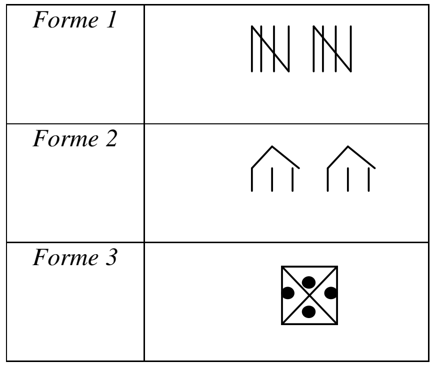


***Figure 2** – Différentes techniques pour comptabiliser*

Quelques marqueurs ont affirmé que certaines formes sont plus utiles que d'autres lorsque la production est importante et qu'il faut enregistrer le nombre de caisses très rapidement (la forme 1 est plus pratique que la 2) ; de même, la forme 3 s'utilise quand il y a peu de place sur le papier car au lieu d'un seul carré pour enregistrer 10 seaux ou 10 caisses, il faudrait deux figures de la forme 2 pour enregistrer cette même quantité.

La superviseure des marqueurs de ce champ nous a expliqué que la première forme est la meilleure. Le système étant facile, ordonné et « visible », les erreurs sont moins probables et s'il y en a, il est plus facile de les repérer. La superviseure souligne ces avantages surtout lorsqu'il y a des réclamations de la part des vendangeurs :

> Ici on utilise ce système, c'est plus facile pour trouver une erreur […] ceux qui mettent en caisse se méfient parfois du marqueur […] , ils se disent que peut-être qu'ils ont oublié de compter des caisses […] je leur explique [aux marqueurs] : […] si quelqu'un arrive, regarde votre travail et voit que c'est ordonné et s'il a une réclamation, alors vous, vous avez la preuve et vous pouvez lui dire : et bien, moi je crois que j'ai bien tout noté, c'est bien ordonné.

L'exemple précédent permet de montrer le caractère pragmatique de ce discours autour de la technique, les rôles qu'il joue en tant que facilitateur de la mise en place de la technique tout en motivant à l'utilisation de cette dernière : quand la superviseure affirme qu'il est plus facile de trouver une erreur en traçant des traits par groupes de cinq, elle souligne le fait que cette technique est « visible », et de cette manière elle essaye d'encourager les marqueurs à n'utiliser que cette manière de faire, puisque cela leur permettra d'avoir un travail plus ordonné et de se défendre face aux réclamations probables des autres travailleurs. Il semblerait que cette technique d'enregistrement soit utilisée essentiellement pour éviter les conflits avec les travailleurs agricoles.

Pour que les marqueurs puissent enregistrer les caisses remplies par chacun des vendangeurs, ces derniers doivent écrire leur numéro de travailleur sur un des côtés de la caisse, comme cela a été dit auparavant. Une fois que plusieurs caisses ont été empilées les unes sur les autres, les marqueurs se mettent à enregistrer les caisses de chaque travailleur.

À différents moments de la journée, des camions arrivent pour emporter les caisses pleines à l'entrepôt. Chaque fois qu'un camion emporte des caisses, le marqueur doit noter sur un

« bon d'envoi » le nombre de caisses que le camion emporte et le type de raisins transportés. Un bon est fait pour chaque voyage, les responsables du camion gardent l'original et les marqueurs, la copie. Ils se serviront ensuite de ces copies pour « faire les comptes », c'est-à-dire pour voir si le total de ce qui a été enregistré sur la liste des vendangeurs coïncide avec le total des bons d'envoi. Les marqueurs se servent normalement d'une calculatrice pour le faire.

Il s'établit alors une chaîne de documents où les données numériques d'un document servent à l'élaboration d'un autre. Ainsi, l'information donnée par chacun de ces documents permettra de vérifier les données lors d'une différence ou d'un conflit entre les différents participants.

Une des façons de prouver que la technique marche, c'est en montrant que les comptes coïncident (« *cuadrar* ») : le total des caisses enregistrées par les vendangeurs doit correspondre au total de caisses enregistrées sur les bons d'envoi (qui sont les caisses transportées à l'entrepôt). Si les nombres coïncident, cela permet au marqueur de montrer à ses supérieurs que son travail a été bien fait et de répondre en l'occurrence aux différends possibles avec les autres travailleurs. Si de fait, selon un travailleur, le nombre de caisses enregistrées est inférieur à celles qu'il a réellement remplies, la différence apparaîtra en comparant ce nombre avec le total de caisses envoyées à l'entrepôt et enregistrées sur les bons d'envoi.

Faire coïncider les quantités est à la fois une technique qui permet de vérifier les comptes et de répondre aux différends.

En ce qui concerne les travailleurs agricoles, leur réclamation peut être reçue jusqu'au moment où ils reçoivent le chèque ainsi que le talon de paiement ou récépissé qui fait état de la quantité gagnée par jour. Quelles sont les techniques utilisées par ces travailleurs pour tenir leurs propres comptes et comment confrontent-ils leurs comptes avec ceux des marqueurs ?

Il y a deux manières de tenir le contrôle de ces quantités : l'une s'appuie sur la mémoire et l'autre sur l'écrit, bien qu'un seul travailleur sur l'ensemble de ceux qui ont été interviewés affirme noter les caisses remises. Ce dernier reconnaît qu'à la différence des registres des marqueurs, les siens n'ont pas de valeur « officielle » au sein de l'exploitation.

Les deux types d'enregistrement identifiés chez les vendangeurs (noter sur papier et enregistrer « dans la mémoire ») partagent une même stratégie : chaque fois qu'un travailleur agricole remet des caisses de raisins, il tâche de le faire toutes les cinq ou 10 caisses, ces nombres étant faciles à contrôler, que ce soit par la mémoire ou par écrit.

IV. CARACTERISATION DES CONNAISSANCES MATHEMATIQUES IMPLIQUEES DANS L'ENREGISTREMENT DU TRAVAIL JOURNALIER

Les activités agricoles décrites mettent en contact les enfants et leurs familles avec des connaissances mathématiques telles que le comptage, des systèmes de représentation de quantités (allant des graphies qui correspondent une par une à des quantités jusqu'aux nombres écrits conventionnels) et différents sens des nombres écrits (comme code, cardinal et ordinal).

Compter et calculer sont deux types de tâches impliquées toutes les deux dans le travail des vendangeurs tout comme dans celui des marqueurs, bien qu'il y ait des différences notables dans la complexité du comptage et du calcul que chacun effectue. Les vendangeurs comptent et enregistrent de cinq en cinq ou de dix en dix, par écrit ou en mémoire. En revanche, les marqueurs doivent compter des quantités beaucoup plus importantes et au moment-même ; même s'ils utilisent des représentations graphiques individuelles, sous des formes basiques de regroupement de cinq éléments, ils doivent cependant au bout du compte quantifier en utilisant des nombres décimaux sur deux registres qui doivent coïncider l'un avec l'autre. Pour cette dernière opération, ils additionnent le plus souvent avec une calculatrice.

La complexité des connaissances mathématiques impliquées dépend donc de la fonction professionnelle et de la hiérarchie des participants. C'est pourquoi, afin de caractériser ces connaissances, il faut considérer le type de tâches, la fonction et hiérarchie des participants, les techniques et instruments employés, ainsi que les discours technologiques relatifs à l'exécution de la tâche.

Il est également important, pour caractériser la complexité des tâches et des connaissances impliquées, de voir si le contrôle des quantités est fait pour soi-même ou pour être interprété par d'autres personnes. C'est un élément implicite à la fonction et à la hiérarchie des participants mais il faut tout de même le signaler car son rôle est important quant à la production de techniques : les marqueurs doivent effectuer la tâche telle que leurs supérieurs le leur demandent et, en même temps, anticiper les différends qui peuvent apparaître avec les travailleurs. Les raisons que les marqueurs invoquent sur la manière dont ils exécutent leurs tâches prouvent qu'ils doivent considérer ces deux aspects.

À leur tour, les ouvriers agricoles ont besoin d'un moyen de contrôle qui doit leur permettre de comparer à la fin de la semaine leurs propres comptes avec ce qu'indique le chèque qu'ils reçoivent. Le fait que leur propre contrôle n'ait pas une fonction ou une validité équivalente au registre des marqueurs (puisqu'il n'est pas requis par d'autres personnes), semble avoir une incidence sur la portée des techniques utilisées : le travailleur agricole tient ses comptes pour lui-même, le registre ne doit pas être clair pour d'autres personnes, il n'y a pas d'obligation quant à la technique à utiliser ni un enseignement explicite le concernant. Les connaissances mathématiques impliquées sont, par conséquent, moins communicables et aussi moins complexes.

V. CONCLUSIONS

La caractérisation de certaines des connaissances mathématiques de la population en question cherche à identifier les rapports, écarts et/ou conflits entre les connaissances mathématiques scolaires et extrascolaires. Pour ce faire, il a fallu rechercher des alternatives théoriques et méthodologiques qui permettent d'analyser les activités agricoles impliquant des connaissances mathématiques.

Sur la base de la TAD et de perspectives théoriques de domaines autres que la didactique, nous avons pu établir les aspects suivants pour caractériser certaines activités spécifiques ainsi que les connaissances mathématiques mobilisées pour les réaliser : Quel est le type de tâches à réaliser et quel est son objectif ? Quels sont les participants et quels sont leurs buts ? Comment résolvent-ils la tâche et avec quels instruments ? (Quelle est la technique ?) Quelles sont les explications et justifications apportées à la technique ? (Quelle est la technologie ?).

À la lumière des données obtenues, nous considérons que ces aspects constituent des instruments qui permettent effectivement d'identifier non seulement des connaissances spécifiques mais aussi les fonctions de ces connaissances, leurs portées et leurs limites. Pour confectionner ces instruments, la TAD a joué un rôle fondamental ; il a fallu expérimenter quelques-unes de ses catégories, mettre en pratique cette théorie en-dehors du domaine scolaire et emprunter à d'autres études qui déploient, à partir de la TAD, un ensemble de possibilités mieux adaptées à notre domaine d'investigation.

En ce qui concerne les connaissances mathématiques identifiées dans le domaine agricole, il s'avère que s'il est vrai que les informations numériques sont riches, les connaissances mathématiques en jeu dépendent néanmoins de la fonction et de la hiérarchie des travailleurs. C'est pourquoi il ne suffit pas de dire que la production et la circulation de nombres écrits sont importantes pour en conclure que les enfants et leurs familles partagent réellement les connaissances mathématiques en jeu.

Un des facteurs qui semble mobiliser les connaissances mathématiques est le conflit : c'est lorsqu'il y a désaccord que la confrontation des données numériques et des calculs a lieu et c'est à ce moment-là que l'écriture numérique revêt toute son importance. Être capable de reconnaître les nombres et les calculs que l'autre a écrit devient fondamental. Mais lire et écrire des nombres et faire des comptes ne se limite pas à une codification de l'écriture ni à l'exécution correcte d'algorithmes, il faut également savoir à quoi sert le document qui contient ces nombres, qui l'écrit et pour quoi faire. Pour faire ces « autres lectures » l'intervention de l'école est fondamentale : c'est elle qui peut assumer la tâche de développer les compétences en calcul des familles et des enfants afin de les aider à se positionner face aux autres avec plus de pouvoir.

Nous pourrions approfondir l'analyse en nous appuyant sur la perspective des registres sémiotiques de R. Duval (1993) : qu'est ce qui changerait dans la connaissance quand nous passons du registre graphique de quantités au registre numérique, de la représentation numérique dans un cahier à la calculatrice ? Ces questions sont assez pertinentes puisqu'il y a des élèves avec des difficultés pour écrire des quantités de trois ou quatre chiffres de manière conventionnelle. L'école peut-elle profiter du registre graphique par regroupements de cinq pour améliorer l'écriture numérique des élèves ? Il faudrait en faire la recherche, mais nous pouvons dire, pour le moment, que nous voulons surtout profiter des hypothèses émises par les élèves sur l'écriture numérique conventionnelle en elle même.

Il est donc important de continuer à s'interroger sur la manière dont l'école pourrait se servir des connaissances identifiées pour stimuler l'apprentissage scolaire, ainsi que sur la manière dont les connaissances scolaires pourraient contribuer à ce que les familles affrontent en situations de travail et de migration. Il convient donc de se demander si certaines connaissances mathématiques sont abordables ou pas hors de l'activité spécifique où elles ont lieu, vu que certaines techniques et technologies ne sont possibles que dans des conditions déterminées (voir le cas de l'obtention du poids d'une caisse de raisin dans Solares 2012b). L'identification de telles conditions doit être un élément à considérer dans l'analyse des liens possibles entre les connaissances mobilisées dans des espaces différents.

REFERENCES

Ávila A. (1988) *Las estrategias de cálculo aritmético de los adultos no alfabetizados.* Tesis de Maestría. Facultad de Filosofía y Letras. México: UNAM.

Barton D., Hamilton M. (1998) *Local literacies. Reading and writing in one community.* Londres: Routledge.

Brousseau G. (2000) "Educación y didáctica de las matemáticas." *Revista Educación Matemática* 12(1), 5 – 38.

Carraher T., Carraher D., Schlieman, A. (1995) *En la vida diez, en la escuela cero.* México: Siglo XXI.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2), 135-182

Castela C. (2011) Développer le modèle praxéologique pour mieux prendre en compte la dynamique des savoirs. In Bosch M., Gascón J., Ruíz A., Artaud M., Bronne, A., Chevallard Y., Cirade, G., Ladage C., Larguier M. (Eds.) *Un panorama de la TAD. III Congreso Internacional de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. 2010* (pp. 163-185). CRM Documents 10. Centre de Recerca Matemàtica, Bellatera, Barcelona, 2011. http://www.crm.es/Publications/Documents/Documents_10.pdf.

Castela C., Romo A. (2011) Des mathématiques á l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79 – 130.

Chevallard Y., Bosch M., Gascón J. (1998) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* México: SEP.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques des enseignants en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(2), 221-265.

Duval R. (1993) Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives de l'IREM de Strasbourg* 5, 37-65.

Ferreiro E., Fuenlabrada I., Nemirovsky M., Block D., Dávila M. (1987) *Conceptualizaciones matemáticas en adultos no alfabetizados.* México: DIE-CINVESTAV.

Knijnik G. (2003) Educación de personas adultas y etnomatemáticas. Reflexiones desde la lucha del Movimiento sin Tierra de Brasil. *Decisio* 4(1), 8-12.

Lave J. (1991) *La cognición en la práctica.* Espagne: Paidós.

Romo A. (2009) *La formation mathématique des futurs ingénieurs.* Thèse de doctorat. Université Denis Diderot Paris 7.

Solares D. (2012a) *Conocimientos matemáticos de niños y niñas jornaleros agrícolas migrantes.* Tesis doctoral. México: DIE-CINVESTAV.

Solares D. (2012b) Conocimientos matemáticos en situaciones extraescolares. Análisis de un caso en el contexto de los niños y niñas jornaleros migrantes. *Revista Educación Matemática* 24(1), 5-33

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

RESSOURCES ET DÉVELOPPEMENT PROFESSIONNEL DES ENSEIGNANTS

Compte rendu du groupe de travail n°6

Sylvia COUTAT[*] - Mama FOUPOUAGNIGNI[**] -
Hussein SABRA[***] - Michela MASCHIETTO[****]

I. INTRODUCTION ET AMBITIONS INITIALES

Le thème des ressources pour l'enseignant est apparu avec le premier EMF à Tozeur (2003). Il a su s'adapter aux évolutions professionnelles des enseignants en intégrant les ressources technologiques dès EMF2006. Depuis il suit les questions vives liées au métier d'enseignant à travers les formations à distances, les ressources numériques et le développement professionnel. Le terme ressource a évolué au cours des différent EMF, nous avons repris comme définition celle choisie lors du précédent colloque, à savoir la définition de Adler : tout ce qui est susceptible de re-sourcer le travail des professeurs (Adler 2000).

Le texte de cadrage offre trois axes de réflexion. Un premier axe propose l'étude des ressources à travers leur conception, que ce soit par des chercheurs, des enseignants ou des collectifs hybrides ou non. Le deuxième axe vise l'analyse de l'exploitation des ressources par les enseignants. Enfin pour le troisième axe les ressources sont analysées de par leur implication dans le développement professionnel des enseignants.

La réflexion de notre groupe de travail s'est organisée autour de 10 participants et 8 communications. Pour la majorité des communications, deux des trois axes de réflexions étaient pris en charge, ce qui témoigne de leur corrélation. Il est difficile de considérer une ressource sans s'intéresser simultanément à sa conception, son usage et son impact sur son utilisateur. Les neuf nationalités présentent dans le groupe de travail 6 illustrent bien le thème du colloque EMF2015 portant sur les pluralités culturelles et l'universalité des mathématiques.

Nous reprenons, dans un premier temps, brièvement les huit communications en nous intéressant à leurs résultats. Les échanges en lien avec les communications seront introduits

[*] Université de Genève – Suisse – Sylvia.Coutat@unige.ch.
[**] Université de Yaoundé 1 et Institut Africain des Sciences Mathématiques - Cameroun - mfoupouagnigni@aims-cameroon.org.
[***] Cérep - Université de Reims Champagne Ardenne - France – hussein.sabra@univ-reims.fr.
[****] Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia - Italie - michela.maschietto@unimore.it.

Coutat S., Foupouagnigni M., Sabra H., Maschietto M. (2015) Ressources et développement professionnel des enseignants - *Compte-rendu du Groupe de Travail n°6.* In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT6, pp. 527-533.

ponctuellement. Afin de relater au mieux les échanges du groupe du travail, nous présentons tout d'abord l'axe exploitation de ressource, puis conception et développement professionnel. Dans un deuxième temps nous présenterons les questions qui ont émergées de nos discussions ainsi que les perspectives concernant les ressources et le développement professionnel des enseignants.

II. SYNTHESE DES ECHANGES

1. *Exploitation de ressources*

L'exploitation de ressources est étudiée à travers l'usage de manuels officiels (*Adel* et *Coutat*) ainsi que l'usage de ressources de diagnostic (*Chenevotot et al.*) par les enseignants.

Les études des manuels englobent les programmes officiels ainsi que les documents d'accompagnements aux programmes et/ou aux manuels. L'étude d'*Adel* présente les conséquences sur les pratiques des enseignants et les apprentissages des élèves de la présence d'un manuel unique en mathématiques. À partir des pratiques de trois enseignants étudiés *Adel* met en évidence trois types de conformités. La conformité conservatrice implique un scénario de l'enseignant extrêmement fidèle au scénario du manuel. Une conformité réductrice témoigne d'une pratique qui utilise le scénario du manuel en ne conservant que le nécessaire pour garantir les connaissances minimales des élèves. Enfin la conformité enrichissante caractérise une pratique qui utilise comme base le scénario du manuel pour ensuite l'enrichir et l'adapter aux besoins didactiques et mathématiques. Ces résultats sont issus d'observation d'enseignants en classe. Le manuel unique, dans un contexte où les documents d'accompagnements des programmes et manuels sont absents, implique une pratique de l'enseignant qui s'organise autour de cette ressource quasi-unique dont la cohérence et la fiabilité sont des critères centraux.

La recherche de *Coutat* s'intéresse aussi à l'exploitation d'un manuel unique, en s'appuyant sur l'observation de deux enseignantes. Bien que dans ce deuxième cas le manuel est complété par des programmes et des documents d'accompagnement, ces derniers apparaissent inadaptés aux besoins des enseignantes. La volontaire liberté offerte aux enseignants dans la mise en œuvre des tâches proposées devient une entrave à une exploitation maximale du potentiel des tâches. Les deux études (*Adel* et *Coutat*) concluent sur les variations dans l'exploitation des manuels par les enseignants qui parfois impliquent des différences de conformités (*Adel*) ou des réductions des possibilités (*Coutat*) dans les pratiques des enseignants.

2. *Conception de ressources*

La problématique de la conception de ressource est la cible principale de deux textes (*Chenevotot et al.* et *My Lhassan*) à travers la conception de ressources numériques.

Le projet *Pépite* vise le développement de ressources d'apprentissage et de diagnostic pour l'algèbre élémentaires. Ce projet a débouché sur le logiciel de diagnostic *Pépite* destiné à des élèves de fin de scolarité obligatoire en France (16 ans). Le texte de *Chenevotot et al.* présente les adaptations de l'outil de diagnostic pour des élèves de début du secondaire (12-13 ans). Une analyse épistémologique et anthropologique d'une part, et une analyse cognitive d'autre part, de l'algèbre élémentaire permet de définir une référence qui sera le fondement du diagnostic (Artigue et al. 2001). Les auteurs présentent comment la conformité aux fondements théoriques et contraintes institutionnelles ont dû être respectées lors du transfert du diagnostic *Pépite*. La conception de cette ressource pour le début du secondaire bénéficie largement de l'expérience acquise lors de la conception du diagnostic *Pépite* pour la fin du secondaire.

My Lhassan présente une réflexion autour de l'utilisation des tablettes dans les classes avec l'application *Geogebra*. Le développement de ces situations s'appuie sur la genèse instrumentale (Rabardel 1995, Trouche 2005), les registres de médiations sémiotiques (Duval 1995), les travaux antérieurs impliquant de la géométrie dynamique. L'analyse des apprentissages repose sur les Espaces de Travail Géométriques (Kuzniak & Richard 2014). L'utilisation des tablettes reste encore peu développée dans les écoles, cependant dans les établissements où elles ont fait leur entrée, elles ont trouvé leur place au même titre que les ordinateurs. Une réelle valeur ajoutée aux ordinateurs reste encore à prouver, cependant leur pertinence dans les processus d'apprentissage semble vérifiée.

Ces deux investigations s'appuient sur des cadres théoriques différents mais chacun adaptés aux exigences de leur recherche. Pour chacune, le réinvestissement des ressources existantes proches pour les adapter à un nouveau contexte (degré scolaire ou support) apparaît comme central.

3. *Ressources et développement professionnel*

Ce dernier axe d'étude est investi par quatre communications. L'investissement dans l'étude des relations entre les ressources et le développement professionnel est cependant en lien avec les deux précédents axes. Ainsi *Baheux et al.*, *Sokhna et al.* ainsi que *Sangaré et al.* utilisent l'activité de conception de ressource dans des contextes de formation et de développement professionnel. L'impact de l'utilisation d'une ressource, Mathenpoche, sur le travail collectif des enseignants est analysé dans le texte de *Sayah*.

La recherche de *Baheux et al.* s'intéresse à la conception de ressources mais étant dans un contexte de formation il trouve un fort écho dans l'étude des ressources dans le développement professionnel. En effet, la genèse du document créé au cours de la formation est utilisée comme un indicateur de développement des étudiants-professeurs. La recherche présentée se déroule en Afrique Centrale Francophone. Les étudiants de deux Ecoles Normales africaines sont amenés à produire une ressource, appelée document-ressource par les auteurs, couvrant le programme de terminal. Pour cette production du documents-ressource l'étudiant est encadré par un collectif (professeur, conseillé pédagogique et inspecteur) et collabore avec des experts d'Afrique et de France au cours de deux séminaires. Le cadre théorique de la conceptualisation des ressources (Adler 2010) est complété par l'enquête documentaire (Margolinas & Wozniak 2010). Le contexte de l'étude de rapproche de l'étude de *Adel* dans le sens où une ressource unique tient une place importante. Un des résultats de l'étude est l'évolution du document-ressource produit par les étudiants, ce qui témoigne de la prise en compte d'autres documents au cours de la formation et de l'évolution de la conception de la pratique mathématique scolaire. Cette évolution de la conception des pratiques s'accompagne d'un développement des compétences professionnelles relatives à la préparation d'un cours.

La conception de ressource dans un contexte de formation est aussi investie par la recherche de *Sokhna et al.*. Le cadre théorique utilisé reprend la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard 1997) ainsi que l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2008). Les travaux de Rabardel (1999) sont aussi réinvestis à travers la notion de médiation documentaire, prolongeant la médiation instrumentale. La ressource est traitée comme un outil qui ne demande qu'à évoluer en s'adaptant à l'enseignant qui se l'approprie, lui-même faisant évoluer sa pratique en s'adaptant à la ressource. Le document est l'aboutissement de cette genèse. Alors que l'étudiant est encadré par un collectif dans la formation exposée par *Chenevotot*, le dispositif de formation présenté par *Sokhna* propose un accompagnement par tutorat. Les ambitions de formations s'appuient sur l'échelle de perspectives de Hache et al. (2009) avec pour visée la perspective 4, c'est-à-dire le développement de formation autour des mathématiques enseignées. La collaboration avec les tuteurs devraient générer le développement de la *culture mathématique* en rapport avec celui de la *culture d'enseignement des mathématiques*. Les effets de cette formation sont encore objets d'études et laissent ouvertes des questions autour de l'approche documentaire et de l'analyse des processus d'appropriation par l'enseignant des ressources disponibles dans un jeu de collaboration.

Un autre choix de formation a été proposé par *Sangaré et al.* autour de l'usage des instruments géométriques. Ce choix de formation s'appuie sur les concepts de système de représentation sémiotique (Duval 2014) ainsi que sur la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard 2001). Les situations de formations sont construites dans le but de développer chez les élèves-professeurs une posture réflexive critique (Voz & Cornet 2009). Ainsi les situations s'appuient sur une rupture avec les expériences vécues par les élèves-professeurs lors de leur parcours élèves et l'émergence de conflits cognitifs et/ou sociocognitifs. Ces situations sont développées dans le cadre de la géométrie et plus spécifiquement sur les liaisons entre les techniques de constructions instrumentées et des configurations géométriques sous-jacentes.

L'aspect interculturel lié avec la conception de ressource d'un collectif à partir d'une ressource existante est abordée dans la communication de *Sayah*. Elle interroge le rôle d'un collectif d'enseignants organisé autour de la ressource Mathenpoche dans l'évolution du système de ressources et des pratiques des enseignants membres. Cette étude reprend l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2010). La méthodologie de suivi des enseignants s'inspire l'investigation réflexive (Gueudet & Trouche 2009) complétée par quatre outils : des entretiens de l'enseignant au cours de la période de suivi, des schémas représentant le système de ressources (individuel et collectif), un journal de bord pour le suivi de l'évolution de la ressource et des vidéos de classe. Les premiers résultats de cette étude menée dans un contexte hors de la classe (club de mathématiques) semblent montrer l'intérêt d'un travail collectif dans l'évolution du système documentaire de l'enseignante observée.

L'utilisation de la ressource francophone Mathenpoche dans un contexte arabophone a permis des discussions autour des difficultés dans l'utilisation de ressources étrangères. Ces difficultés concernent les curriculums mais aussi les significations des traductions qui parfois trouvent difficilement entière concordance.

III. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Comme le montre les textes de *Adel* et *Coutat*, l'appropriation des ressources par les enseignants peut-être très disparates voire incomplète relativement au potentiel des tâches proposées. Les échanges basés sur les communications présentées ont soulevé la nécessité de distinguer les ressources disponibles aux enseignants des ressources personnelles à chaque enseignant. Le terme document est utilisé dans l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2010) et permet cette distinction. Les discussions du groupe concluent que l'élaboration du document, personnel à un enseignant, obtenu à partir d'un ensemble de ressource est une compétence qui gagne à intégrer un contexte de formation ou de réflexion collective. Ainsi les ressources restent au centre de la réflexion avec un regard tourné vers les documents des enseignants.

1. *Les questions émergentes*

Au cours des discussions relatives aux différentes communications, de nouvelles questions émergent. Nous avions choisi de conserver une définition large du terme de ressource (Adler 2000), cependant cette définition nécessite d'être complétée afin obtenir une finesse sur le statut de la ressource. Afin de cibler les enjeux et les prochaines recherches, la nécessité de distinguer plusieurs ressources c'est imposée. Ainsi, nous nous appuyons sur les travaux de Gueudet et Trouche (2010) sur le travail documentaire et distinguons les ressources disponibles aux enseignants de la ressource de l'enseignant, les ressources sont les artefacts disponibles aux enseignants, ces ressources associées aux schèmes propres d'un enseignant deviennent des *documents*.

Dans l'exploitation de la ressource par l'enseignant, la réalisation des leçons en cours n'est qu'une étape dans le processus d'appropriation de la ressource. Les autres étapes restent personnelles à l'enseignant et sont souvent difficiles d'accès par le chercheur. Pourtant le processus d'appropriation des ressources par les enseignants est un processus qui doit être connu des concepteurs de ressources en particulier pour l'élaboration des documents d'accompagnement de ces ressources. Les principales questions qui ont émergé de nos discussions concernent ces schèmes et leur identification dans le processus de la genèse documentaire :

- Comment analyser la construction du document par l'utilisateur ?
- Comment développer des méthodologies didactiques autour des ressources ? Quels sont les outils qui permettent de modéliser les travaux de préparation, quelles seraient les bonnes conditions qui permettraient d'observer afin d'analyser les travaux de préparation de l'enseignant ?
- Les collectifs semblent donner accès à une grande partie de la genèse documentaire, mais il subsiste des zones cachées. Comment accéder à ces parties cachées ?

2. *Les nouvelles propositions et pistes pour EMF2018*

Comprendre comment les enseignants s'approprient les ressources pour construire leur document nous semble une réelle question qui devra être ciblée lors du prochain EMF. L'appropriation de ressource et le développement professionnel nous semble en lien avec la première question et devra aussi être interrogée. Les pratiques des enseignants étant relativement *stables*, l'observation de l'élaboration d'un document pourrait passer par l'introduction une perturbation dans la stabilité de la pratique ce qui impliquerait une adaptation de la pratique et une éventuelle observation de cette adaptation. Bien que la place des mathématiques à enseigner n'ait pas été très développée au cours de nos sessions, elle reste cependant essentielle dans l'élaboration du document. De ce fait, elle doit être impliquée dans l'étude de l'élaboration. Nous proposons ici quelques pistes qui pourraient être exploitées lors du prochain EMF.

- Le travail de la construction des documents par les enseignants est à investiguer par son travail en classe et son travail hors de classe. Pour cela les travaux de Margolinas et Wozniak, (2010), ceux de Gueudet et Trouche (2010) ou ceux de Robert et Rogalski (2002), peuvent être exploité afin d'identifier les schèmes des enseignants lots de la construction de leur document.
- Le développement professionnel a été aussi discuté en particulier en contexte de formation. Les atouts de l'enquête documentaire (Margolinas & Wozniak 2010) et le travail documentaire (Gueudet & Trouche 2010) peuvent être analysés plus finement dans un contexte de formation.

REFERENCES

Adler J. (2000) Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, 205-224.

Adler J. (2010) La conceptualisation des ressources. Apports pour la formation des professeurs de mathématiques. In Gueudet G. et Trouche L. (Eds), *Ressources Vives Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, (p. 23-37). INRP, Presses Universitaires de Rennes.

Artigue M., Grugeon B., Assude T., Lenfant A. (2001) Teaching and Learning Algebra: approaching complexity trough complementary perspectives. In Chick H., Stacey K., Vincent J. (Eds.) *The future of the Teaching and Learning of Algebra, Proceedings of 12th ICMI Study Conference* (pp. 21-32). Australia: University of Melbourne.

Chevallard Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(3), 17-54.

Chevallard Y. (2001) Organiser l'étude. 1. Structures et fonctions. In Dorier J.L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R. (Eds.) *Actes de la 11e école d'été de didactique de mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble : La pensée sauvage.

Duval R. (2014) Comment analyser le problème de la compréhension des mathématiques ? *Revista IberAmericana* 37, 9-29.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique* 2(3), 7-33.

Gueudet G., Trouche L. (2009) Conception et usages de ressources pour et par les professeurs : Développement associatif et développement professionnel. *Dossiers De l'Ingénierie Educative* 65, 78-82.

Gueudet G., Trouche L. (2010) Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires, In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) *Ressources Vives Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp.57-74). INRP : Presses Universitaires de Rennes.

Hache C., Proulx J., Moussa S. (2009) Formation mathématique des enseignants : contenus et pratiques Compte-rendu du Groupe de Travail n°1– EMF2009. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation* (pp. 34-39). Faculté des Sciences et Technologies de l'Education et de la Formation http://fastef.ucad.sn/EMF2009/ consulté le 27-01-2016.

Kuzniak A., Richard P.R. (2014) Espace de travail mathématique. Points de vue et perspectives. *RELIME* 17(4-I), 5-15.

Margolinas C., Wozniak F. (2010) Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In G. Gueudet et L. Trouche (Eds), *Ressources Vives Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, (p. 233-249). INRP : Presses Universitaires de Rennes.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris : Armand Colin.

Trouche L. (2005) Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de l'Université d'été de Saint Flour : le calcul sous toutes ses formes*, 265-275.

Voz G., Cornet J. (2009) Comment former de futurs enseignants réflexifs ? Quel est l'impact de la formation à la réflexivité ? Comment l'améliorer ? Réponses d'étudiants. In *ABC EDUC – journée d'étude : La formation des enseignants,* Bruxelles, 09/09/2009. (lien consulté le 18-01-2016).

LES CONTRIBUTIONS AU GT6

Adel F. (2015) Quand le manuel unique devient la ressource principale de l'enseignant !

Baheux C., Galisson M.-P., Chenevotot F., Gélis J.-M. (2015) Projet d'innovation au Cameroun et développement professionnel.

Chenevotot-Quentin F., Grugeon-Allys B., Delozanne E., Prévit D. (2015) Transfert du diagnostic Pépite à différents niveaux scolaires : tests diagnostiques pour les élèves et leurs usages par les enseignants.

Coutat S. (2015) Le jeu dans les moyens d'enseignement romands à travers les yeux de deux enseignantes.

Riouch M.-L. (2015) Utilisation des tablettes dans des activités mathématiques : Exemple activités de géométrie dynamique Application : Geogebra.

Sangaré M., Souleyman D.-S. (2015) Pour un usage réflexif des instruments de géométrie.

Sayah K. (2015) L'intégration des ressources mathenpoche un moteur pour le développement du travail collaboratif des enseignants de mathématiques de collège : le cas de l'Algérie.

Sokhna M., Trouche L. (2015) Formation mathématique des enseignants : quelles médiations documentaires ?

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

QUAND LE MANUEL UNIQUE DEVIENT LA RESSOURCE PRINCIPALE DE L'ENSEIGNANT ![1]

Fadhel ADEL[*]

Résumé – Dans cet article, nous nous basons sur notre travail de thèse (Adel 2014) pour comparer les pratiques de trois enseignants en terminale math en Tunisie sur le chapitre « isométries du plan », en comparant entre eux les scénarios (ensemble des cours et exercices) et les déroulements à partir des enregistrements vidéo de chacun des trois enseignants sur tout le chapitre. La reconstitution préalable du scénario du manuel « unique », à partir de l'étude détaillée de la partie cours et des exercices dans ce manuel, a permis de déterminer à quel point ce scénario a influencé les pratiques des trois enseignants dans sa structure, ses choix, sa façon de « faire fréquenter » aux élèves les mathématiques et même dans le niveau de rigueur qui semble exigé. Des conséquences sur les productions des élèves sont enfin recueillies.

Mots-clefs : manuel, pratiques enseignantes, pratiques induites, activités des élèves, scénario.

Abstract – In this article, we rely on our thesis (Adel 2014) to compare the practices of three teachers in terminal Math in Tunisia on the chapter "Euclidean plane isometrics" comparing between them, scenarios (the whole course and tasks) and workflows from the video recordings of each of the three teachers along the entire chapter. Then the preliminary reconstitution of the scenario of the 'unique' manual, from the detailed study of its Course and Tasks parts, allowed determining how this scenario has influenced the practices of the three teachers in its structure, its choices, its way of attending mathematics and even in its level of rigor required. Some findings about learners' feedbacks are noteworthy.

Keywords: manual, teaching practices, induced practices, student activities, scenario.

L'enseignement en Tunisie propose un manuel unique pour chaque discipline à chaque niveau scolaire y compris en mathématiques. Sans entrer dans les raisons de ce choix qui pourrait être d'ordre économique ou autre, nous avons essayé d'en étudier les conséquences sur les pratiques des enseignants et les apprentissages des élèves. Nous avons essayé entre autre de préciser le statut du manuel de mathématiques chez les enseignants. Cette étude était l'objet de ma thèse (Adel 2014), dans laquelle nous avons étudié le cas de l'enseignement des isométries[2] en terminale Math en Tunisie.

[*] LDAR – Tunisie – afadhel34@yahoo.fr

[1] Je remercie profondément madame Robert A. pour ses conseils et corrections pour affiner ce travail.

[2] Ce choix, qui a été précisé dans la thèse, est dû au fait que cette notion entretient des relations avec plusieurs autres notions dont certaines n'étaient plus objet d'apprentissage, et unifie des exemples d'isométries vus tout au long de la scolarité, ce qui mettra l'accent sur la nécessité de l'intervention de l'enseignant. De plus le niveau des élèves spécialisés en Math choisi permettra de neutraliser, même partiellement, la démotivation des élèves.

Adel F. (2015) Quand le manuel unique devient la ressource principale de l'enseignant ! In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT6, pp. 534-550.

L'analyse des parties cours et exercices du chapitre « isométries » nous a permis de reconstruire le scénario[3] préalable du manuel. Nous avons montré que, a priori, le contenu de ce manuel n'est pas à reproduire intégralement en classe, amenant à penser à des interventions complémentaires de l'enseignant qui l'utilise comme ressource principale (ou *ressource pivot*) (Gueudet & Trouche 2010, p. 68). Ce peut être pour changer la structure ou pour modifier les énoncées des théorèmes ou leurs démonstrations ou pour adapter les contenus pendant les déroulements.

D'autre part, l'étude des pratiques de trois enseignants expérimentés, appartenant à différentes circonscriptions et exerçant dans différents milieux sociaux, montre une certaine conformité de ces trois pratiques entre eux et au scénario du manuel, témoignant de l'existence de ce qu'on pourra appeler « pratique induite par le manuel», ce qui pourrait donner d'une part, l'idée d'utiliser le manuel pour agir sur les pratiques des enseignants et d'autre part l'idée de l'importance des formations sur l'utilisation du manuel ainsi que les autres ressources.

I. CADRE THEORIQUE ET NIVEAUX DE REFERENCES

Pour analyser et comparer le manuel, les pratiques des enseignants, notamment en classe et les activités des élèves, nous avons choisi de nous placer dans le cadrage théorique de la double approche telle qu'elle a été présentée par Robert A. et Rogalski J. (2002).

Ce cadre théorique nous a amené à déterminer « le relief[4]» sur la notion à enseigner, le « scénario envisagé » par les prescripteurs ou « scénario du manuel » ainsi que les scénarios réels des trois enseignants. De plus nous nous en sommes inspirés pour analyser les productions des élèves que nous avons recueillies.

Pour reconstruire le scénario envisagé, nous étions appelés à déterminer « l'état des connaissances visé » (Robert & al. 2012), ou ce que nous pouvons appeler « le degré de conceptualisation visé » par l'enseignement de la notion d'isométrie à ce niveau scolaire et que nous pouvons repérer par :

- La disponibilité[5] des définitions et théorèmes concernant la notion d'isométrie en terminale math exigée par le programme correspondant (caractère objet de la notion d'isométrie).
- La disponibilité des isométries comme outil pour résoudre les exercices et les problèmes qui peuvent êtres traités à ce niveau. Cette possibilité est exprimée en termes d'adaptation des théorèmes et définitions relatifs à la notion d'isométrie.

II. RELIEF SUR LA NOTION

La notion d'isométrie en quatrième année secondaire (classe terminale), a été rencontrée à travers des cas particuliers dans presque tout le programme actuel en Tunisie (celui de 2002), à partir de l'école primaire. La symétrie orthogonale est la première à être étudiée, elle est rencontrée tout au long de la scolarité, ce qui donne une idée sur son rôle prévisible pour l'étude des autres isométries. D'autre part cette première isométrie est rencontrée durant les premières années de scolarité d'une façon qui pourra favoriser l'étude analytique des

[3] Ensemble ordonné des cours et des exercices prévus pour un chapitre ou une séquence.
[4] Désigne les spécificités de la notion : caractérisation mathématique, insertion dans le programme, connaissances antérieures nécessaires, difficultés possibles des élèves…
[5] La possibilité de faire appel à ces connaissances, sans qu'elles soient indiquées, et les utiliser pour résoudre une tâche donnée.

symétries et des isométries en général. Ce point de vue est renforcé par l'introduction dès la deuxième année du collège de la relation entre les coordonnées des points symétriques par rapport aux axes et à l'origine du repère.

Cependant, ce point de vue analytique ne semble pas en adéquation directe avec les habitats ultérieurs occupés par la notion « isométries » et la tendance des programmes actuels, qui s'éloignent de l'analytique. De plus le fait de retarder la première rencontre avec la notion de « translation » jusqu'à la première année du lycée et attendre jusqu'à la deuxième année, pour l'introduire à l'aide des vecteurs, semble plus lié à l'ancienne approche (celle de 1993/1998) et s'intègre moins à l'approche actuelle de l'enseignement des isométries. L'introduction du pliage dans les premières années de scolarité ainsi que de certaines autres isométries à l'aide du mouvement, semble en revanche être mieux adaptée à l'approche actuelle (2007 en terminale). Nous pourrons voir plus loin dans l'analyse de déroulement de séances en classe, la gestion par les enseignants de cette contradiction apparente, et son effet présumé sur l'apprentissage des élèves quant à leur conceptualisation de la notion d'isométrie et leur aptitude à résoudre les problèmes en liaison.

III. SCENARIO DU MANUEL

L'analyse du chapitre « isométries du plan » permet de dégager les choix du manuel et de réfléchir aux marges de manœuvres des enseignants qui utilisent ce manuel. Ces choix du manuel sont caractérisés (Adel 2014) par l'instabilité que ce soit en ce qui concerne la position de l'énoncé d'un théorème par rapport à sa démonstration, ou du langage et des figures utilisés dans les énoncés des théorèmes, ou la nature même des questions. Ces choix sont caractérisés aussi, par une certaine imprécision, des implicites et un certain manque de rigueur et de cohérence. On constate aussi un manque certain de liaison avec les connaissances antérieures.

Ainsi l'énoncé d'un théorème est parfois en double langage mathématique et naturel et dans d'autres cas donné en un seul langage, sans qu'il y ait des raisons explicitées, derrière ce choix. Avec des imprécisions dans l'utilisation des équivalences dans ces énoncés.

La position de la démonstration par rapport à l'énoncé du théorème change d'un paragraphe à l'autre et à l'intérieur d'un même paragraphe, sans qu'on puisse reconstituer des raisons didactiques à cela. Quand elle précède l'énoncé, la démonstration est sous forme d'activité[6] dont l'ouverture des questions varie ; la stratégie de résolution est parfois fournie, parfois pas, sans relation visible avec la complexité de la tâche ; les connaissances nécessaires à la résolution peuvent être supposées disponibles dans certains cas et ne le sont pas dans plusieurs autres ; plusieurs questions posées sont porteuses d'ambigüités et manquent de précision. Et quand elle succède à l'énoncé, la démonstration est fournie donc considérée comme étant bien rédigée et pourrait représenter un modèle pour les élèves. Or ce n'est pas toujours le cas. Nous sommes, dans plusieurs occurrences, en présence de démonstrations incomplètes avec beaucoup d'implicites, des passages ignorés ou négligés et plusieurs adaptations qui ne sont pas suffisamment explicitées. L'utilisation de la figure ne semble pas bien étudiée par exemple la position des axes de symétries est toujours verticale, sans commentaire à ce sujet, ou l'utilisation des figures n'illustre pas le cas générique.

D'autre part, plusieurs notions qui interviennent dans ce cours sur les isométries nécessitent des précisions. La notion d'application en particulier n'est plus objet d'apprentissage et n'est rencontrée qu'à l'occasion des transformations planes ; or plusieurs

[6] Le terme activité est utilisé ici, conformément au manuel, pour désigner un exercice ou tâche mathématique.

propriétés concernant les applications sont présentées dans le cadre des isométries sans aucune précision sur leur validité ailleurs. De plus, plusieurs propriétés sont rencontrées dans les classes antérieures dans des exemples d'isométries, et la seule isométrie nouvelle est la symétrie glissante. Ce facteur n'est pas convenablement exploité vu l'absence de paragraphes de liaison et de phases introductives aidant à dynamiser[7]le scénario du manuel. Nous suggérons qu'il était plus intéressant d'exploiter le caractère généralisateur de l'isométrie en partant de propriétés connues pour passer ensuite à la généralisation.

Pour montrer un exemple de l'étude faite sur tout le chapitre « isométries planes » nous nous limitons ici à une seule séquence de ce chapitre, qui concerne la composée de deux isométries. L'étude *a priori* de cette séquence est résumée dans le tableau suivant :

Contenu du manuel			**Interventions possibles de l'enseignant**
Composée de deux isométries	Connaissances antérieures	**(fcr)**[8] : notion d'application : définition de la composée de deux ou trois applications du plan et associativité de la composée de trois applications du plan.	Les connaissances antérieures concernant la composée de deux rotations ne sont pas exploitées dans ce scénario proposé par le manuel. L'enseignant pourra donc prendre la décision d'insérer dans cette partie des activités concernant ces connaissances antérieures.
	Cours : composée de deux isométries quelconques.	Une **activité** contenant trois questions qui représentent des étapes de la démonstration du **théorème** qui suit.	Une synthèse entre ces trois questions est attendue, d'autre part l'enseignant pourra prendre une décision concernant l'avancement ou non de l'activité ayant pour objet la démonstration par rapport à l'énoncé du théorème correspondant.
	Activités pour appliquer	Il n'y en a pas.	L'enseignant pourra (selon le besoin et la possibilité) proposer un exercice d'application sur la composée de deux isométries connues (deux symétries centrales ou deux rotations ou deux translations…). Il pourra aussi proposer un exercice qui servira à la fois comme introduction au paragraphe suivant et comme application.

Tableau 1 *– Analyse a priori de la séquence*

Il paraît donc bien que la charge est laissée à l'enseignant utilisant ce manuel d'assurer une exploitation des activités et une gestion plus appropriées aux fins d'apprentissages.

Dans la totalité du chapitre, cette « meilleure » exploitation peut être rendue possible par :

- Une meilleure organisation du contenu et l'adoption d'une structure claire et justifiée. Que ce soit dans la position relative des théorèmes et des démonstrations ou dans la forme des textes des énoncés.

- Une meilleure mise en relation du nouveau et des connaissances antérieures, en posant différemment certaines activités et en aidant les élèves à conjecturer et prévoir les résultats, et en utilisant un discours explicatif allant au-delà du texte du manuel. Il est intéressant à ce

[7] Rendre le scénario dynamique par l'organisation des interventions de l'enseignant et des élèves.
[8] (fcr) : désigne une connaissance faussement connue et rappelée.

propos, de vérifier la disponibilité de certaines connaissances utiles aux démonstrations. De plus, la notion d'application pourra être objet d'apprentissage dans un paragraphe introductif à la notion d'isométrie.

- Une concentration sur les démonstrations fournies par le manuel pour combler les lacunes et surmonter les problèmes de rigueur. Sans oublier d'importer le cas échéant d'autres exercices pour appliquer le cours, sans se limiter nécessairement à ceux du manuel.
- Un changement du contrat sur l'usage du manuel, pour éviter l'idée qu'il représente un modèle à suivre. A force la répétition des manques dans plusieurs démonstrations et dans l'exercice résolu proposé, pourrait faire acquérir de mauvaises habitudes aux élèves dans l'argumentation et la rédaction.

Pour les exercices, nous pouvons voir aisément, à partir des analyses détaillées de la partie « exercices » (Adel 2014), qu'un travail de la part de l'enseignant est aussi nécessaire, que ce soit pendant la réalisation des exercices en classe par les élèves, avant le déroulement de la correction en classe ou pendant la correction de ces exercices en classe.

Il s'avère que toutes les parties du cours ne sont pas développées de manière équivalente dans les exercices.

Les analyses montrent aussi l'absence de tâches simples et isolées mais des adaptations qui portent beaucoup plus sur les connaissances antérieures que sur les nouvelles. Du coup ce qui est travaillé pour les nouvelles connaissances c'est plutôt le caractère objet et la mobilisabilité[9].

Le rôle de l'enseignant est avant tout le choix du moment convenable dans le scénario pour intercaler l'exercice, que ce soit avant le nouvel apprentissage pour la mise à jour des connaissances anciennes, ou après le nouvel apprentissage pour mobiliser certains théorèmes ou définitions. De plus, des modifications sur le contenu ou la forme de l'exercice sont nécessaires, dans le but de clarifier le contenu ou le texte ou la stratégie ou pour orienter l'exercice vers le but voulu. D'autres modifications peuvent concerner le rôle de la figure et sa production éventuelle (même partielle).

Le contenu du manuel suggère donc des adaptations de la part de l'enseignant qui l'utilise comme ressource principale, nous allons voir après, la prise en compte de ces adaptations par les enseignants dont les pratiques sont objets de cette étude.

IV. SCENARIOS DES ENSEIGNANTS

Une étude du déroulement en classe pour chacun des trois enseignants sur tout le chapitre nous a permis de déterminer les scénarios de ces trois enseignants. Chaque scénario donne une vue globale sur le déroulement en classe du chapitre « isométries » de point vue de sa structure et des contenus abordés et permet d'accéder aux choix de chaque enseignant en ce qui concerne les activités d'introduction, la gestion globale et le niveau de rigueur exigé dans les démonstrations, les activités pour appliquer et les exercices. Le schéma du scénario donne la structure générale du chapitre tel qu'il a été traité par l'enseignant, avec des couleurs (ici plus ou moins grisé) qui distinguent les parties ; cours (théorèmes, propriétés, corollaires, conséquences, démonstrations et activités pour démontrer) ; applications (activités pour appliquer) et exercices.

[9] Le fait de savoir utiliser des connaissances indiquées.

Comme pour le scénario du manuel, nous nous intéressons d'abord à la séquence ayant pour objet de démontrer que la composée de deux isométries est une isométrie, résultat énoncé sous forme d'un théorème.

1. Contenu mathématique de la séquence

La séquence telle qu'elle est présentée par le manuel, se compose de :

- Un rappel sur la notion d'application :

• Soit f et g deux applications du plan dans lui-même. L'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point g(f(M)) est appelée la composée de f par g. On la note gof.

• Si f, g et h sont trois applications du plan dans lui-même, (gof)oh=go(foh)=gofoh.

- Une tâche mathématique (appelée activité) :

  Soit f et g deux isométries et M et N deux points. On pose M'=f(M), N'=f(N), M''=g(M') et N''=g(N').
  1. Comparer M'N' et MN puis M''N'' et M'N'.
  2. En déduire que gof est une isométrie
  3. Montrer de la même manière que fog est une isométrie.
- L'énoncé d'un théorème :

  La composée de deux isométries est une isométrie.

Ce contenu mathématique a été traité par les trois enseignants avec quelques différences dans le déroulement, nous présentons ainsi la pratique de chacun des trois enseignants sur cette séquence :

2. Pratiques de l'enseignant 1

C'était la même tâche mathématique que celle du manuel (Activité 1 p. 40), ayant pour but la démonstration que la composée de deux isométries est une isométrie en utilisant la conservation de la distance. Puis le résultat a été énoncé sous forme d'un théorème. La structure de cette séquence pourra donc être schématisée comme suit :

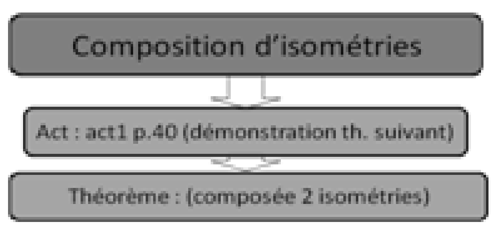


***Figure 1** – Schéma du scénario de la séquence de l'enseignant 1*

Cette séquence s'est déroulée selon la chronologie suivante :

<table>
<tr><th colspan="2">Durée</th><th>Déroulement</th></tr>
<tr><td colspan="2">43''</td><td>Ecriture du titre du paragraphe et de l'activité mathématique à réaliser : Activité 1 p.40.</td></tr>
<tr><td rowspan="6">9' 17''</td><td>23''</td><td>recherche</td></tr>
<tr><td>1'33''</td><td>Correction au tableau par un élève : l'élève écrit les données, une élève lui dicte du manuel.</td></tr>
<tr><td>1'56''</td><td>L'élève écrit au tableau ce qu'il entend concernant la réponse à la première partie de la première question.</td></tr>
<tr><td>1'6''</td><td>Une période de silence, l'élève efface le tableau suivant pour continuer.</td></tr>
<tr><td>3'6''</td><td>Résolution de la 2ème partie de la 1ère question de la même façon.</td></tr>
<tr><td>1'13''</td><td>Résolution de la deuxième question.</td></tr>
<tr><td colspan="2">23''</td><td>Enoncé du théorème et écriture au tableau par le même élève et sur leurs cahiers par les autres.</td></tr>
<tr><td colspan="2">15''</td><td>Silence : certains élèves continuent à recopier du tableau.</td></tr>
</table>

***Tableau 2** – Chronologie de l'enseignant 1*

3. *Pratiques de l'enseignant 2*

La tâche mathématique utilisée correspond à l'activité 1 p. 40 du manuel avec quelques simples modifications. Son résultat est énoncé sous forme d'un théorème suivi de conséquences sur la composée d'un nombre fini d'isométries. Ce théorème est suivi d'une activité pour l'appliquer, proposée par le professeur ; il s'agit de montrer que la composée de deux rotations et la composée d'une rotation et d'une translation sont des isométries. Pour finir, l'enseignant propose une remarque concernant l'associativité de la composée des applications du plan : elle existe dans le manuel sous forme de rappel en même temps que la définition de la composée.

Le schéma du scénario de l'enseignant 2 sur cette séquence est donc comme suit :

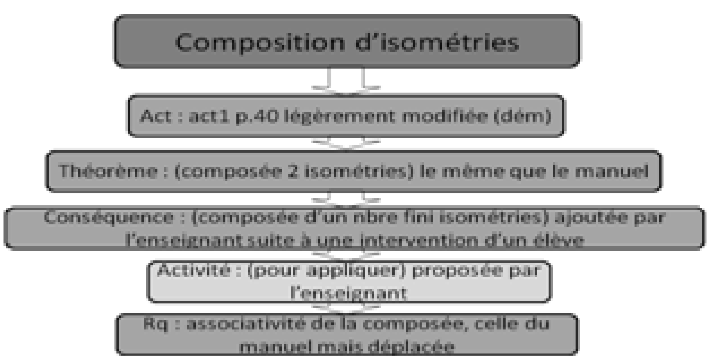


***Figure 2** – Schéma du scénario de la séquence de l'enseignant 2*

Cette séquence a été réalisée selon la chronologie suivante :

Durée		**Déroulement**
2'49''		Ecriture du titre et des données au tableau.
8' 32''	4' 01''	Recherche.
	1' 02''	Correction au tableau par un élève de la première question.
	50''	Correction au tableau par le même élève de la deuxième question.
	58''	Traitement d'une erreur dans la remarque d'un élève.
	30''	Comparaison de M'N' et M''N''.
	18''	Réponse à la deuxième question.
	53''	Réponse à la troisième question.
1' 42''		Enoncé du théorème.
01'		Conséquence.
5' 33''	1' 38''	Activité pour appliquer.
	2'	Silence.
	1' 55''	Réponse à l'activité.
1' 16''		Remarque sur l'associativité de la composée.

Tableau 3 *– Chronologie de l'enseignant 2*

4. *Pratiques de l'enseignant 3*

La tâche mathématique adoptée est l'activité 1 p. 40 du manuel. Cette activité a été faite par l'enseignant lui-même au tableau sans sa troisième question et sans aucun rappel sur la composée de deux isométries. L'énoncé du théorème a été cité oralement par l'enseignant puis relis à partir du manuel par une élève.

Le schéma du scénario de l'enseignant 3 sur cette séquence est donc comme suit :

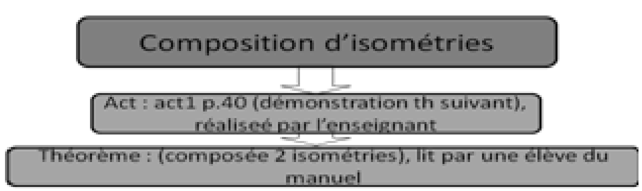


Figure 3 *– Schéma du scénario de la séquence de l'enseignant 3*

La chronologie du déroulement est la suivante :

Durée		**Déroulement**
1’ 48’’		Ecriture du titre du paragraphe et de l’activité mathématique à réaliser : Activité 1 p.40.
2’ 19’’	47’’	Expressions de gof(M) et gof(N).
	1’ 32’’	Réponse par l’enseignant, à la première et la deuxième question.
21’’		Théorème.

Tableau 4 *– Chronologie de l’enseignant 3*

Des résultats analogues au déroulement de la séquence sont trouvés sur tout le chapitre pour chacun des trois enseignants. Ce qui permettra de faire la comparaison de ces pratiques entre eux et de les confronter au scénario du manuel sur tout le chapitre « isométries ».

V. CONFRONTATION DES SCENARIOS

Nous avons procédé par une comparaison à deux niveaux : global et local.

1. Niveau global

La première remarque à tirer à partir d’une première observation est que les trois enseignants ont adopté la même subdivision du chapitre que celui du manuel. Cette similitude est plus nette avec les enseignants 2 et 3. La densité des activités pour appliquer et des exercices, d’après leurs couleurs sont comparables dans tous les schémas avec une légère hausse pour l’enseignant 1. D’après la forme générale des schémas c’est l’enseignant 3 le plus proche du manuel puis c’est l’enseignant 2. C’est donc l’enseignant le plus ancien qui semble le plus lié au manuel ; un résultat surprenant mais pourra trouver des explications dans son « rapport institutionnel » élevé.

D’autre part et d’après les couleurs de la partie cours, l’enseignant 2 semble celui ayant la partie cours la plus dominante, même plus que le manuel. L’enseignant 1 semble celui ayant la partie « activités pour appliquer » dominante. L’enseignant 3 est celui qui donne le plus d’importance aux exercices du manuel.

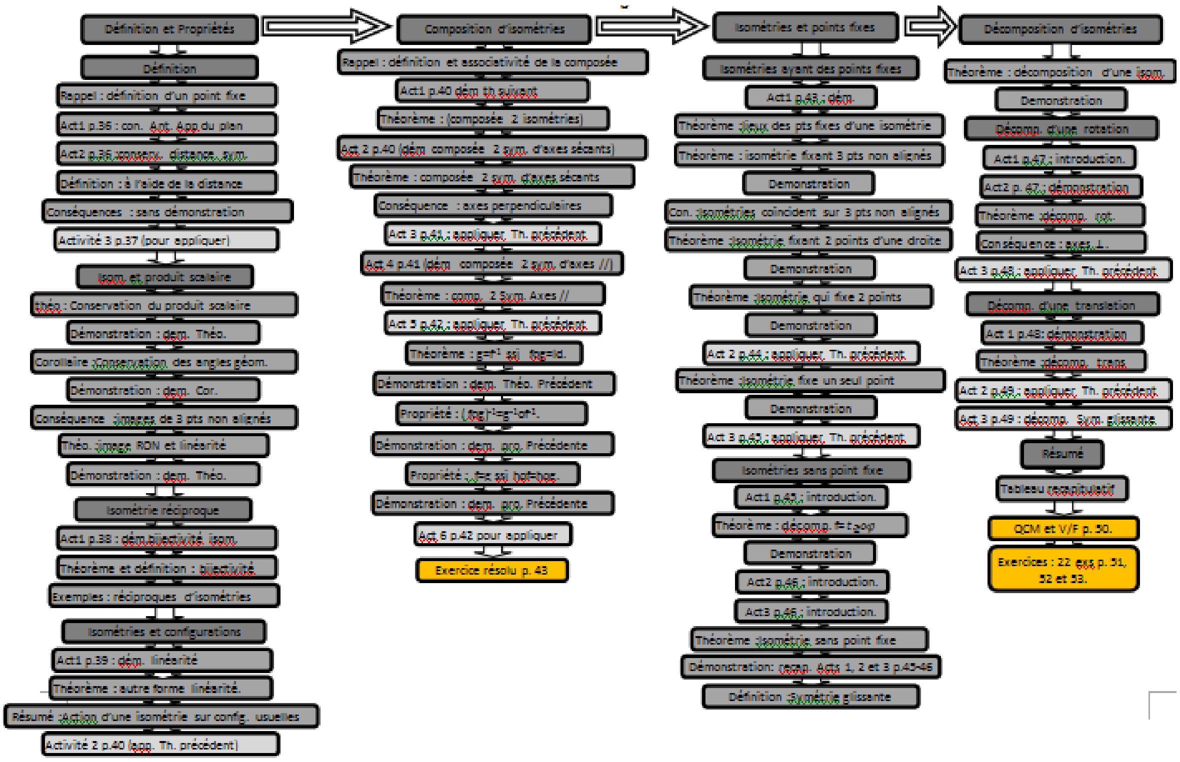


***Figure 4.1** – Schémas du scénario global du manuel*

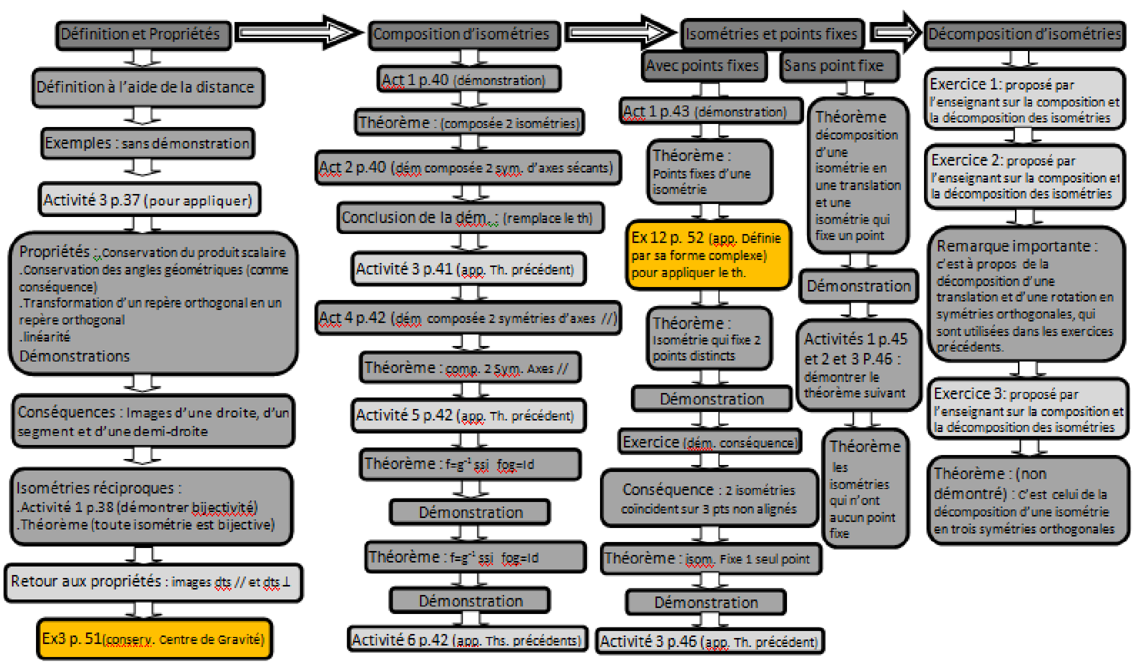


***Figure 4.2** – Schéma du scénario de l'enseignant 1*

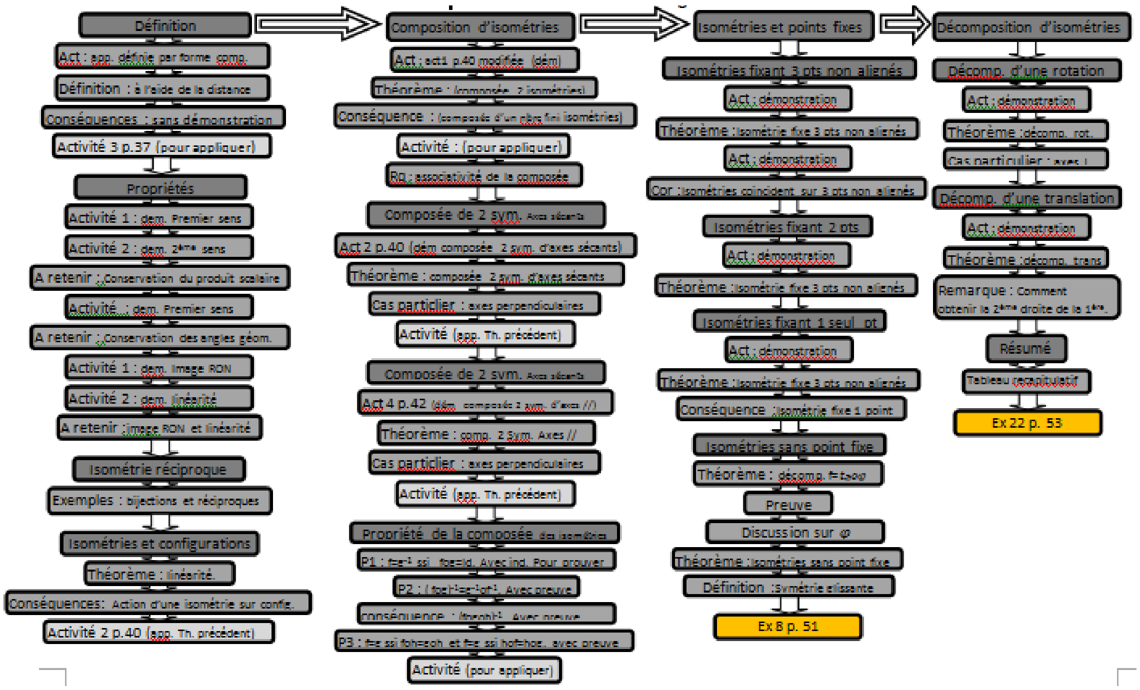


Figure 4.3 – *Schéma du scénario de l'enseignant 2*

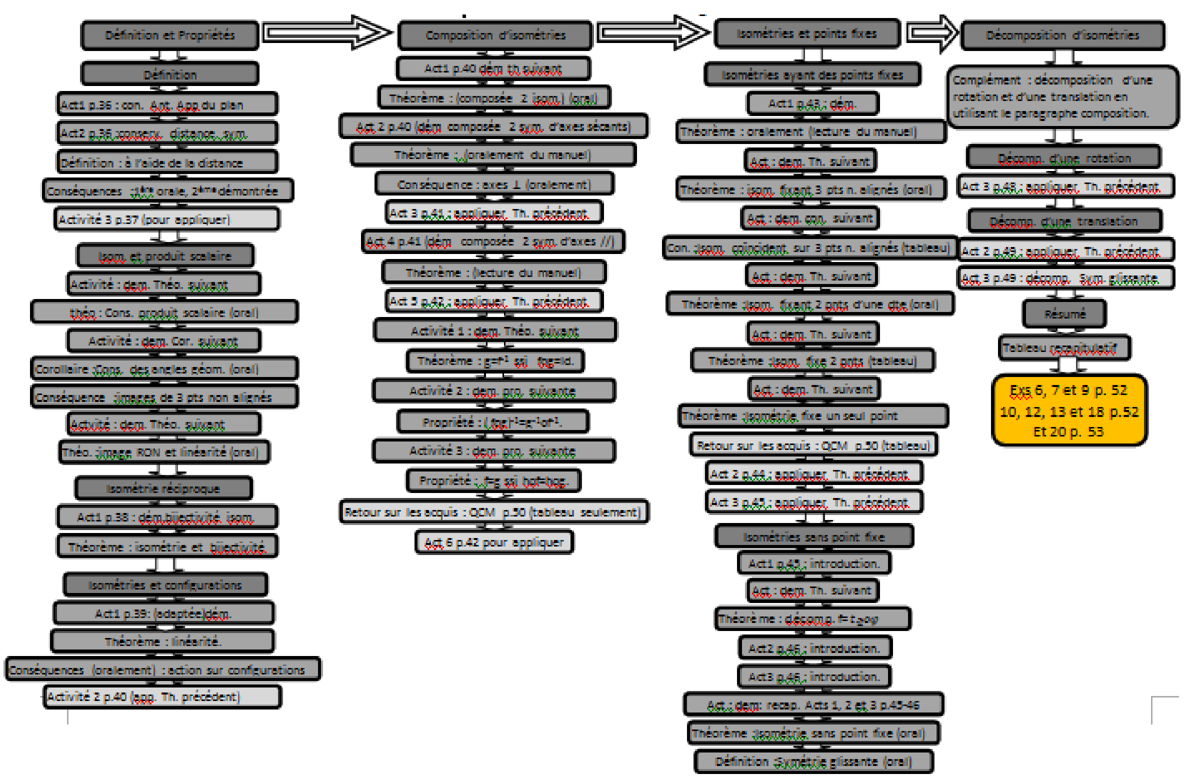


Figure 4.4 – *Schéma du scénario de l'enseignant 3*

La confrontation globale des pratiques des trois enseignants entre eux et au scénario reconstruit du manuel nous permet de conjecturer que le manuel scolaire est pour les trois enseignants le document principal, si ce n'est pas l'unique, pour préparer leurs leçons. En effet ; le schéma général du cours et le contenu mathématique présenté sont celles du manuel. L'action des enseignants sur le scénario du manuel est soit de reprendre ce scénario en le simplifiant par l'élimination de certaines questions ou démonstrations considérées comme difficiles ou même des paragraphes entiers, soit de reproduire d'une façon presque fidèle le contenu du manuel, soit de reprendre le contenu du manuel en l'enrichissant par des rappels ou des remarques ou des conclusions.

2. *Niveau local*

L'analyse des déroulements nous a permis de voir la dominance de l'enseignant, dans les trois cas, au dépend des activités des élèves. Cependant quelques variabilités se présentent dans le déroulement en ce qui concerne le temps de recherche accordé aux élèves et le temps accordé à la résolution de chaque activité mathématique. Concernant l'importance accordée à la partie cours, l'enseignant (E2) donne 55% de la durée totale de la séquence pour les activités à démontrer. Pour les autres enseignants l'importance est donnée à l'application avec 49% pour l'enseignant (E1) et 50% pour l'enseignant (E3). Cette catégorisation est compatible avec l'existence de deux points de vue parmi les enseignants : l'un donne le prima à la partie cours « point de vue cours » et le second point de vue considère que le but essentiel de l'apprentissage c'est pouvoir résoudre des exercices « point de vue exercices ».

Nous regardons dans la suite, dans les pratiques de chacune des deux catégories, les interactions avec le manuel pour le contenu de la séquence.

- Pour les connaissances antérieures : nous avons trouvé dans le déroulement, l'absence de la liaison avec les connaissances antérieures et que la notion d'application est une notion (fcnr)[10] pour les deux points de vue.
- Pour la première activité pour démontrer : nous avons trouvé, dans le déroulement que les interventions attendues sont réalisées partiellement par le « point de vue cours » mais d'une façon qui ne répond pas à la rigueur attendue. Le « point de vue exercices » semble plus conservateur que le premier point de vue mais le déroulement est presque pareil et ne tient pas compte des points de rigueur nécessaires.
- Pour le premier théorème : l'étude du déroulement a donné que l'enseignant (E2) tient à écrire lui même l'énoncé du théorème en tenant compte de la rédaction et de l'encadrement spécifique du résultat. De plus il n'a pas de souci pour aller plus loin que le théorème (ajouter une conséquence suite à l'intervention d'un élève) sans toucher à la forme du théorème proposée par le manuel. Les deux autres enseignants ont tiré eux mêmes le théorème de l'activité, et si le premier l'a dicté à un élève pour l'écrire au tableau le second s'est contenté de la lecture du manuel.
- Pour l'activité d'application : dans le déroulement effectif l'enseignant (E2) voyait peut être, la nécessité de donner une application même banale tout en cherchant des raisons pour légitimer ce choix.

[10] (fcnr) : désigne une connaissance faussement connue non rappelée.

3. *Conclusion de la confrontation*

Dans ce qui précède nous avons procédé à une comparaison des trois pratiques avec le manuel et entre eux en commençant du global au local et du mois fine au plus fine. Les différentes études se complètent entre eux et nous permettent de faire des catégorisations des enseignants à partir des régularités et des variabilités des enseignants observés. Chaque catégorie engendre un type de pratiques qui représente une certaine cohérence.

D'abord, et par rapport à la conformité au manuel, nous pouvons distinguer trois types de conformités : **une conformité conservatrice**, caractérisée par une fidélité remarquable au scénario du manuel qui représente un document indispensable en classe, pour l'enseignant et pour l'élève, il contient même une partie du cours (les théorèmes et les définitions dans le cas de (E3)). Ce choix n'est pas sans risque sur la rigueur et la cohérence des mathématiques fréquentées et l'apprentissage potentiel des élèves. Il y a ensuite une deuxième catégorie qui est la **conformité réductrice**, s'intéresse à la facilité et la simplicité du contenu présenté pour garantir un certain niveau d'interaction des élèves au dépend de la rigueur et de la cohérence du contenu présenté et sans déclencher un vrai apprentissage chez les élèves. Le but me semble-t-il, de cette pratique, est de garantir des connaissances minimales permettant d'aborder les exercices. La troisième conformité est **la conformité enrichissante**, caractérisée par une reproduction du contenu et la structure du manuel mais avec un enrichissement permanant des activités et quelques adaptations de ce contenu aux besoins didactiques et mathématiques. Cet enrichissement permet de combler certains problèmes de rigueur ou de cohérence.

D'autre part, l'étude du déroulement effectif, nous permet de distinguer une autre catégorisation par rapport à la gestion des activités, la chronologie et l'importance accordée au texte mathématique. Nous pouvons distinguer deux points vues l'une focalise sur le cours que nous appelons : « **point de vue cours** » et l'autre focalise sur les exercices, que nous appelons : « **point de vue exercices** ».

L'étude des pratiques, précédente, a éventuellement répondu à des questions sur la nature des pratiques se basant sur un document principal qui est le manuel unique. Mais d'autres questions pourront émerger sur les éventuelles variations de ces pratiques en présence d'autres manuels ou en présence d'un document d'accompagnement de ce manuel ou même en absence total de manuels.

VI. PRODUCTIONS DES ELEVES

Pour nous donner une idée sur les productions des élèves nous avons passé un test après enseignement de la notion d'isométries, à l'aide du quel nous allons essayer d'évaluer (ou au moins d'apprécier) dans les productions des élèves les points suivants :

- La disponibilité des théorèmes et définitions qui se rapportent à la notion d'application (et bijection).
- La disponibilité des connaissances antérieures (supposées acquises dans les années antérieures).
- La disponibilité des théorèmes et définitions liés à la notion d'isométrie et qui sont objets d'apprentissage en terminale Math.
- La prise en compte des cas particuliers.
- Le rôle accordé à la figure.
- L'importance donnée à la rigueur mathématique dans la rédaction des solutions.

- L'aptitude à faire des changements de points de vue pour résoudre un exercice.
- L'aptitude à faire des adaptations en termes d'introduction d'intermédiaires (introduction d'un point notamment).
- Le rapport à l'analytique.
- L'aptitude à considérer une isométrie comme un élément de l'ensemble des applications du plan.
- L'aptitude à exploiter des questions antérieures dans un même exercice.
- Les conceptions sur l'égalité vectorielle.

D'autre part on a demandé à chaque enseignant de corriger les copies de ses élèves pour essayer de relever son point de vue concernant leurs productions. (Voir annexe)

Après l'analyse des productions des élèves lors de la résolution du test ainsi que des points de vue de leurs enseignants et après l'étude des résultats obtenus par rapport aux objectifs visés pendant la préparation de ce test, nous pouvons signaler les points suivants :

- En général l'enseignant n'accorde pas d'importance aux cas particuliers et les élèves, eux aussi, se limitent généralement au cas de figure qu'ils ont à disposition ; cette pratique est renforcée par l'appréciation de la part des enseignants de ce type de réponses. De plus certaines techniques utilisées par les élèves et acceptées par les enseignants ont des portées limitées aux cas de figures dessinés (théorème des milieux pour un triangle).
- Plusieurs élèves réussissent à mobiliser certaines connaissances antérieures, cependant une grande difficulté est observée dans la mise en relation de l'ancien (déjà là) et du nouveau, surtout en ce qui concerne l'exploitation des connaissances anciennes sur les isométries particulières (translations, symétries et rotations) dans le contexte des isométries générales. Ce cloisonnement ancien/nouveau pourrait être rapproché de la façon dont la notion d'isométrie a été introduite, dans le manuel et en cours.
- Les notions d'application et de bijection représentent un problème non seulement chez les élèves mais aussi chez les enseignants. Ce qui entraine une difficulté de mobilisation des connaissances en relation avec ces notions et aussi une difficulté à placer les isométries dans l'ensemble des applications du plan. Le point de vue du programme et du manuel envers ces notions (qui ne sont pas considérées des objets d'apprentissages alors même qu'elles doivent être utilisées) nous parait à revoir.
- Les élèves réussissent généralement les tâches simples et isolées mais ils montrent des difficultés dans les exercices qui nécessitent des adaptations comme « l'introduction d'un changement de point de vue », « l'utilisation des questions précédentes et l'élaboration d'un raisonnement avec des étapes», ou encore « l'introduction d'un intermédiaire ».
- Certaines réponses acceptées par les enseignants sont des réponses intuitives, incomplètes, qui ne se basent sur aucune justification rigoureuse. Tout se passe souvent comme si le fait de retrouver (reconnaître) le théorème ou la propriété à utiliser soit une fin en soi pour l'enseignant.

En fin, on retrouve dans les productions des élèves ce qui correspond aux observations et remarques faites lors de l'étude des pratiques enseignantes : notamment sur le manque de relation entre ancien et nouveau, le manque de connaissances précises sur la notion d'application et le manque de rigueur dans certaines rédactions. Toutes ces insuffisances dans les productions des élèves peuvent trouver leurs origines dans le manuel, qui d'une certaine manière conforte et renforce les pratiques enseignantes, et qui est ainsi à son tour renforcé par elles aux yeux des élèves.

VII. CONCLUSION

L'étude précédente montre du premier abord, l'existence d'un document privilégié par chaque enseignant, qui est le manuel unique dans notre cas, à partir duquel il conçoit son cours. Ce résultat rejoint l'idée de l'existence « d'un document d'attachement » (Margoloinas & Wozniak 2009). L'étude montre aussi que ce manuel, par la façon dont il est présenté ne peut pas être reproduit par l'enseignant en classe et que son utilisation nécessite des adaptations et plusieurs interventions de la part de cet enseignant.

Du second abord, nous voyons une certaine conformité des pratiques des trois enseignants ce qui pourrait nous amener, d'un coté, à une certaine possibilité d'unification des pratiques avec des conséquences possibles de stabilité ou même de stéréotypie. D'un autre coté, nous pouvons parler d'une possibilité de changement des pratiques, ou de leur orientation, à travers le manuel rejoignant une idée de Niclot (2003).

C'est ainsi que l'utilisation d'un manuel unique pourrait être une arme à double-tranchant ; en effet elle pourra servir à l'orientation des pratiques des enseignants et même des productions des élèves vers les choix des prescripteurs à condition que ce manuel soit bien structuré, que ses démonstrations soient bien rédigées et que ses exercices soient bien ciblés avec la présence d'un document d'accompagnement lui servant comme guide ; cependant ce chemin n'est pas sans risque, compte tenue de la tendance naturelle des enseignants vers la stabilité dans leurs pratiques, qui pourrait être favorisée par l'unicité du manuel.

Dans tous les cas, il paraît que la formation des enseignants à l'utilisation du (ou des) manuel(s) ou toute autre ressource, reste l'indispensable que nous devons en penser la forme, les outils et les moyens.

REFERENCES

Adel F. (2014) *Enseigner les isométries en terminale math en Tunisie : une étude comparée du manuel officiel et de pratiques d'enseignants en classe-régularités et conséquences.* Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Diderot.

Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (2010) *Ressources vives : Le travail documentaire des professeurs en mathématiques.* Rennes : INRP.

Margolinas C., Wozniak F. (2009) Usage des manuels dans le travail de l'enseignant à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation* 35(2), 59-82.

Niclot D. (2003) *Et si les manuels scolaires étaient, par défaut, un outil de professionnalisation des enseignants ?* In Baillat G., Martin P-A. (Eds.) *Vers quelle professionnalité enseignante en France et au Québec ? Collect. Actes et Rapports pour la recherche.* Reims : CRDP.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe stable et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences mathématiques et technologiques* (2/4), 505-528.

Robert A. (2007) Stabilité des pratiques enseignantes de mathématiques (second degré) : une hypothèse des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques* (27/3), 271-312.

Robert A. *et al.* (Eds.) (2012) *Une caméra au fond de la classe de mathématiques.* Besançon : PUFC.

MANUELS SCOLAIRES

Smida H. et al. (Eds.) (2007) *Mathématiques (Tome 2). 3ème année de l'enseignement secondaire. Math.* Tunis : CNP. (Code 222 344).

Smida H. et al. (Eds.) (2007) *Mathématiques (Tome 2). 4ème année de l'enseignement secondaire. Math.* Tunis : CNP. (Code 222 443).

PROGRAMMES

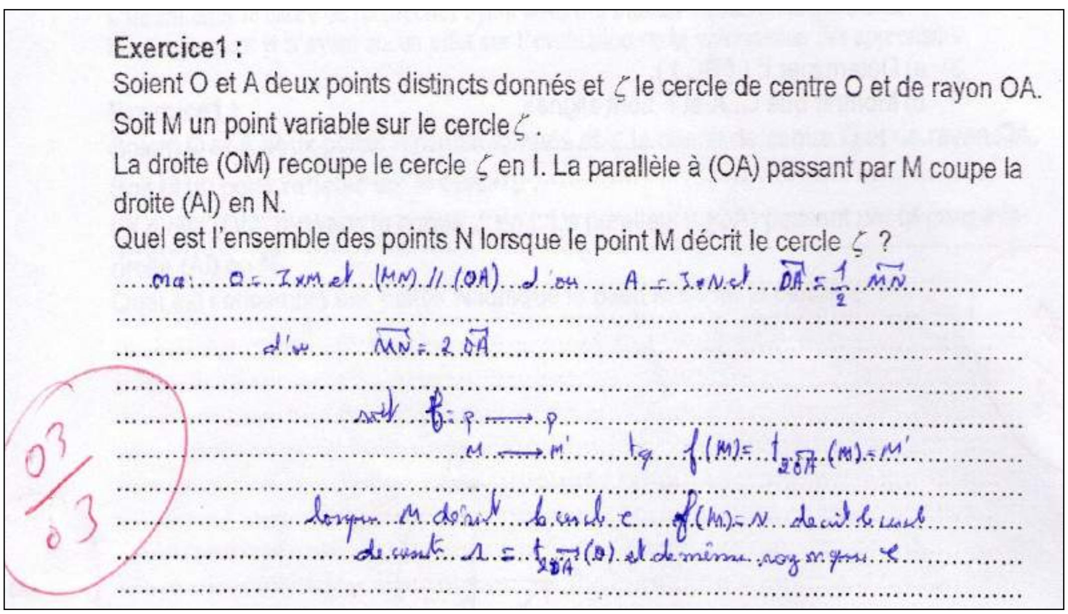
Programmes de mathématiques, 1ères et 2èmes années secondaires. Direction Générale des programmes et de la formation continue. Tunis. (2005).

Programmes de mathématiques, 3ère et 4ème années secondaires. Direction Générale des programmes et de la formation continue. Tunis. (2006a).

Programmes de mathématiques, étape préparatoire de l'enseignement de base. Direction Générale des programmes et de la formation continue. Tunis. (2006b).

ANNEXE

Le test composé de quatre exercices, a été présenté sous forme de quatre pages laissant la place à la réponse des élèves. Nous mettons en annexe l'exercice1 de ce test avec les réponses correspondantes de deux élèves ayant différents enseignants. Nous précisons que chaque enseignant est libre dans le choix du barème et que la note accordée dans les deux cas suivants est maximale.



Exercice1 :

Soient O et A deux points distincts donnés et ζ le cercle de centre O et de rayon OA.

Soit M un point variable sur le cercle ζ.

La droite (OM) recoupe le cercle ζ en I. La parallèle à (OA) passant par M coupe la droite (AI) en N.

Quel est l'ensemble des points N lorsque le point M décrit le cercle ζ ?

on a : O = I*M et (MN) // (OA) d'où A = I*N et $\vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{MN}$

d'où $\vec{MN} = 2\vec{OA}$

soit $f : P \longrightarrow P$

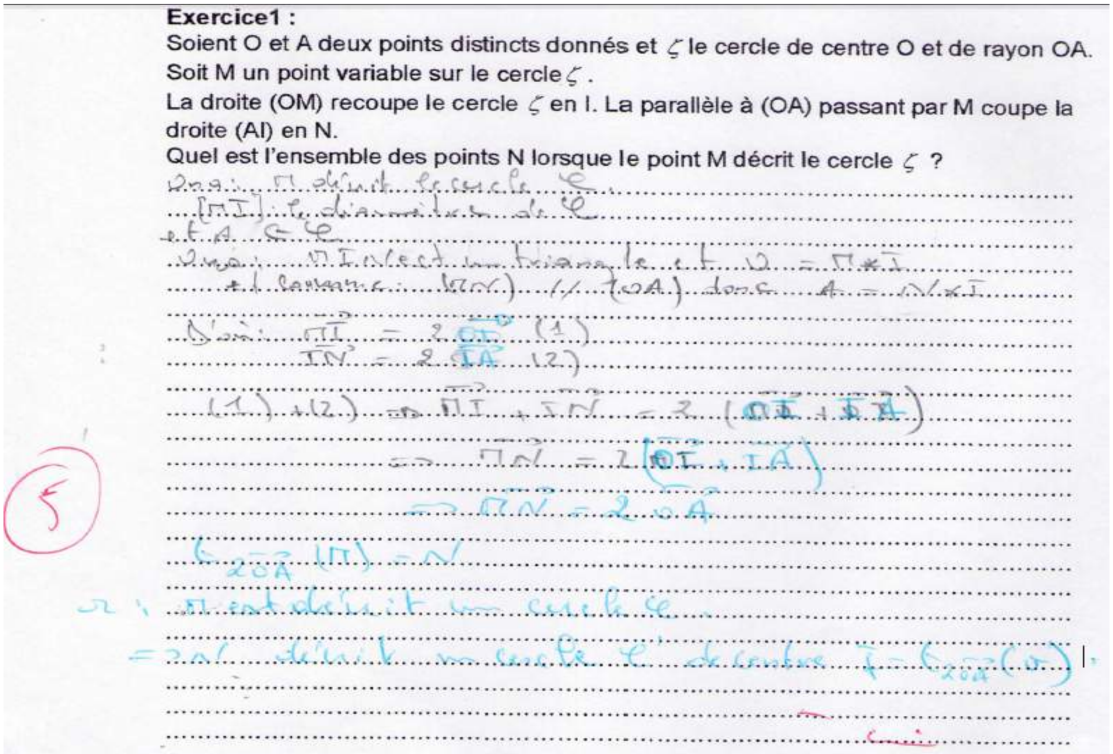
$M \longmapsto M'$ tq $f(M) = t_{2\vec{OA}}(M) = M'$

lorsque M décrit le cercle C $f(M) = N$ décrit le cercle

de centre $\Omega = t_{2\vec{OA}}(O)$ et de même rayon que C

03/03

Figure 5.1 *– Exemple de réponse d'un élève à l'exercice 1 du test corrigé par son enseignant*



Exercice1 :

Soient O et A deux points distincts donnés et ζ le cercle de centre O et de rayon OA.
Soit M un point variable sur le cercle ζ.
La droite (OM) recoupe le cercle ζ en I. La parallèle à (OA) passant par M coupe la droite (AI) en N.
Quel est l'ensemble des points N lorsque le point M décrit le cercle ζ ?

On a : M décrit le cercle $\mathscr{C}$.
[MI] le diamètre de $\mathscr{C}$
et $A \in \mathscr{C}$
on a : MIN est un triangle et $O = M*I$
et comme $(MN) // (OA)$ donc $A = N*I$
D'où : $\overrightarrow{MI} = 2\,\overrightarrow{OI}$ (1)
$\overrightarrow{IN} = 2\,\overrightarrow{IA}$ (2)
(1)+(2) $\Rightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IN} = 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA})$
$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = 2(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA})$
$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = 2\,\overrightarrow{OA}$
$t_{2\overrightarrow{OA}}(M) = N$
or M est décrit un cercle $\mathscr{C}$
$\Rightarrow$ N décrit un cercle $\mathscr{C}'$ de centre $I = t_{2\overrightarrow{OA}}(O)$

5

Figure 5.2 *– Exemple de réponse d'un élève à l'exercice1 du test corrigé par son enseignant*

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

PROJET D'INNOVATION AU CAMEROUN ET DEVELOPPEMENT PROFESSIONNEL

Carole BAHEUX* – Marie-Pierre GALISSON** – Françoise CHENEVOTOT*** – Jean-Michel GELIS****

Résumé – Notre étude porte sur le processus de conception d'une ressource par un futur enseignant camerounais. Ce processus s'inscrit dans le cadre d'un projet d'innovation franco-africain. Il repose sur le travail collaboratif d'étudiants et de formateurs camerounais et français. Nos objectifs consistent à identifier, d'une part, les ressources mobilisées et leurs effets sur le document-ressource produit, d'autre part, des traces de développement professionnel chez le futur enseignant et des éléments innovants pour la formation initiale.

Mots-clefs : innovation, conception de ressources, enquête documentaire, développement professionnel, formation initiale.

Abstract – Our study focuses on the design process of a resource by a Cameroonian student-teacher. This process is part of a Franco-African innovation project. It is based on the collaborative work of students and Cameroonian and French trainers. Our objectives are to identify, on the one hand, the resources mobilized and their effects on the resource-document produced, on the other hand, traces of professional development of the student-teacher and innovative new features for initial training.

Key words: innovation, resource design, documentary investigation, professional development, initial training.

Dans cette contribution, nous analysons un processus de conception de documents-ressources destinés à être mis en ligne dans le cadre d'un projet d'innovation au Cameroun. Ce processus repose sur la collaboration d'acteurs de statuts institutionnels et de cultures variés. A ce titre, notre étude s'inscrit dans le premier pôle de questionnement du groupe, à savoir la conception de ressources.

La genèse des documents-ressources produits par des collectifs (étudiants-professeurs encadrés par des professeurs, des inspecteurs, des universitaires), est un indicateur de développement des étudiants-professeurs, futurs professeurs. Nous ne cherchons pas à

* Laboratoire de Mathématiques de Lens – Université d'Artois – France – carole.baheux@univ-artois.fr
** Laboratoire André Revuz – Université Paris Diderot – ESPE Lille Nord de France – France – mpgalisson@espe-lnf.fr
*** Laboratoire André Revuz – Université Paris Diderot – ESPE Lille Nord de France – France – francoise.chenevotot@espe-lnf.fr
**** Laboratoire Ecole, Mutation, Apprentissages – Université de Cergy-Pontoise – France – jean-michel.gelis@u-cergy.fr

Baheux C., Galisson M.P., Chenevotot F., Gélis J.M. (2015) Projet d'innovation au Cameroun et développement professionnel. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT6, pp. 551-565.

appréhender des traces de développement à travers l'impact de ces documents-ressources sur l'évolution de leurs pratiques car nous n'y avons pas accès mais à travers l'évolution d'un document conçu comme une ressource pour l'enseignant. Nous adoptons la définition de ressource proposée par Adler : tout ce qui est susceptible de re-sourcer ce travail (Adler 2010). Ainsi, dans ce contexte limité de la conception d'un document-ressource pour l'étude d'un thème de savoir mathématique, nous cherchons à identifier en quoi et comment ce type de ressource témoigne d'un développement professionnel. Nous rejoignons ainsi le questionnement issu du troisième pôle de réflexion du groupe : le développement professionnel.

Ce projet d'innovation repose sur un partenariat entre institutions camerounaises et françaises et vise à améliorer la formation scientifique des élèves aux niveaux des classes de terminales. C'est pourquoi il convient de prendre particulièrement en compte l'influence des contextes culturels, des exigences épistémologiques et pédagogiques des acteurs dans ce processus de conception de ressources dont l'adaptabilité est un enjeu crucial.

Dans cet article, nos objectifs consistent à apporter des éléments de réponse aux questions suivantes. Comment le document-ressource se constitue-t-il ? A partir de quelles ressources ? Comment le document-ressource évolue-t-il ? Cette évolution traduit-elle des traces de développement professionnel chez les futurs enseignants ?

I. LE PROJET

Le projet PReNuM-AC[1] « Production de Ressources Numériques pour l'enseignement des Mathématiques en Afrique Centrale » part du constat que l'isolement des professeurs de mathématiques (en particulier dans le secondaire) est un écueil en Afrique Centrale Francophone. Il y a des besoins en termes d'outils pédagogiques pour le travail mathématique des élèves en classe et hors classe, mais des outils adaptés au contexte de l'Afrique centrale (classes à fort effectif, nécessité de ressources pour le travail hors classe…) (Touré 2002, Traoré & Barry 2007). Il y a des besoins en termes de formation des enseignants de mathématiques tant dans leur discipline que dans la didactique de cette discipline.

Par ailleurs, des opportunités existent : (1) les TIC pour l'enseignement des mathématiques et le développement de l'Internet pour le travail collaboratif et la mise à disposition de ressources ; (2) l'existence d'une langue commune, le français, du curriculum Harmonisation des Programmes de Mathématiques (HPM) dans vingt pays[2] pour le secondaire, les manuels de la Collection InterAfricaine de Mathématiques (CIAM) ; (3) un travail en commun au niveau universitaire dans les pays de la Communauté Economique et Monétaire d'Afrique Centrale (CEMAC) pour la mise en place d'un LMD (Licence Master Doctorat) intra-communautaire ; (4) la volonté d'organismes universitaires en France de contribuer à l'amélioration de l'enseignement des mathématiques en Afrique Centrale Francophone et au développement de la didactique de cette discipline à partir de projets adaptés au contexte.

Ce projet vise à favoriser l'articulation entre le secondaire et le supérieur en fournissant des outils pédagogiques aux enseignants des classes de terminales scientifiques : le cahier des charges du projet stipule que les documents-ressources sont constitués de cours, de bases d'exercices, de documents d'évaluation ainsi que d'éléments didactiques relatifs à la mise en

[1] http://prenum-ac.org
Les documents-ressources sont visibles à l'adresse précédente à la rubrique « Ressources Travaux Etudiants ».

[2] Bénin, Burkina Faso, Burundi, Cameroun, Centrafrique, Comores, Congo-Brazzaville, Côte d'Ivoire, Djibouti, Gabon, Guinée, Madagascar, Mali, Mauritanie, Niger, République Démocratique du Congo, Rwanda, Sénégal, Tchad, Togo

œuvre . Le projet s'inscrit dans le cadre d'un partenariat entre l'Université Paris Diderot avec le LDAR[3] et l'IREM[4] de Paris, les Ecoles Normales Supérieures (ENS) de Yaoundé (Cameroun) et de Brazzaville (République du Congo). Initié en novembre 2011, ce projet, financé par le Fonds francophone des Inforoutes, s'est terminé en janvier 2015[5].

Les 80 documents-ressources prévus, qui couvrent les programmes de terminale C et D en grande partie communs au Cameroun et au Congo, sont élaborés par des étudiants des deux ENS, futurs enseignants de mathématiques ; chaque étudiant est encadré par une équipe composée d'un professeur d'ENS, d'un conseiller pédagogique, d'un professeur de lycée et d'un inspecteur. Le suivi et le développement du document-ressource engagent l'équipe ; les rencontres, les réunions par « pools » thématiques et les échanges par mails rendent compte de ce travail collaboratif. Par ailleurs, au Cameroun, le document-ressource est une composante du mémoire de fin de formation. La production des documents-ressources s'effectue selon deux vagues. Nous limiterons notre étude à la production de la première vague des documents-ressources au Cameroun qui a mobilisé 28 étudiants.

Leur élaboration comprend deux phases. La première phase donne lieu à une pré-évaluation produite par un membre du comité d'experts français (enseignants de l'IREM de Paris et du LDAR). Le document-ressource est alors à nouveau travaillé par l'étudiant - encadré par son équipe - durant la deuxième phase qui se termine par l'évaluation finale du document-ressource conduite par des comités d'experts constitués d'inspecteurs du Cameroun et du Congo-Brazzaville, d'enseignants de l'IREM de Paris et du LDAR (figure 1).

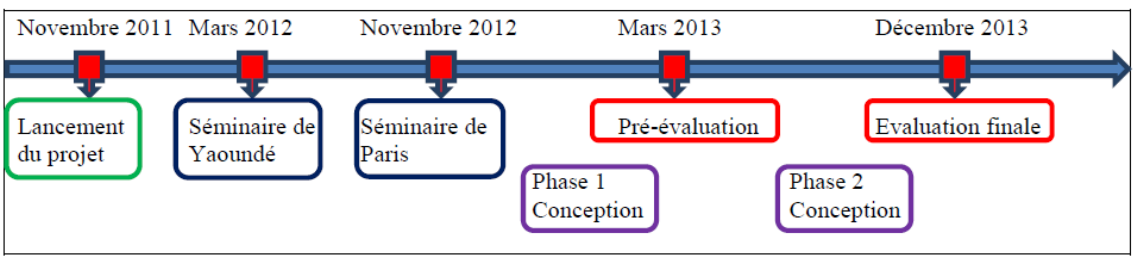


Figure 1 *- Déroulement du projet pour la première vague*

Le projet PReNuM-AC veut également contribuer à la formation des enseignants à la didactique et aux usages des TICE. La sensibilisation à la didactique des mathématiques et aux TICE des participants au projet est mise en œuvre au cours de séminaires. Le séminaire de Yaoundé (mars 2012), dédié aux étudiants et encadrants, a trois objectifs : une approche de la didactique, l'utilisation de la plateforme numérique WIMS[6] et la conception des documents-ressources. Le séminaire de Paris (novembre 2012), destiné aux encadrants, a pour enjeu de favoriser la concertation entre les différents participants du projet (en France, au Cameroun, au Congo-Brazzaville) sur l'avancement des documents-ressources et d'enrichir les apports en didactique des mathématiques.

[3] Laboratoire de Didactique André Revuz
[4] Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
[5] Les professeurs Lagrange (LDAR) et Foupouagnigni (ENS Yaoundé) ont principalement œuvré à la mise en place du projet et ont été rejoints par B.Denys (IREM Paris)
[6] www Interactive Multipurpose Server

II. REFERENCES THEORIQUES

1. Conceptualisation des ressources (Adler 2010)

Le dispositif de conception du document-ressource que nous suivons s'inscrit dans une formation dans laquelle le concepteur (futur enseignant) devra, si nous nous référons à la catégorisation d'Adler (2010), s'appuyer sur des ressources humaines (les connaissances mathématiques et professionnelles du futur professeur), des ressources matérielles (les manuels, les outils technologiques), des ressources culturelles (les connaissances, les pratiques sociales de l'élève, le temps dévolu à l'enseignement). En tant qu'enseignant débutant, dans ce contexte de formation, les ressources dont il pourra s'emparer proviendront non seulement de sa formation universitaire et de ses recherches documentaires personnelles (traités, manuels, sites web) mais aussi d'un travail collaboratif (un collectif d'étudiants, de formateurs, de professeurs, d'inspecteurs, d'universitaires). La conception du document final (outil pour re-sourcer des pratiques à venir) s'inscrit dans la dynamique d'un travail documentaire qui tend à collecter, transformer, réviser des ressources, dont nous pouvons identifier les "sources" dans ce cadre élargi "des ressources".

L'évolution du document (à défaut d'éléments sur son usage en classe) révèle des transformations dans la conception de la pratique des mathématiques scolaires. L'hybridation, telle que l'entend Adler, est un caractère spécifique de ces pratiques mathématiques scolaires. Les contenus mathématiques sont hybrides parce qu'ils articulent savoir mathématique et mise en contexte ; les pratiques sont hybrides parce qu'elles sous-tendent des pédagogies tantôt centrées sur l'élève, tantôt centrées sur l'enseignant. Dans notre étude, les contenus mathématiques (à travers la recontextualisation des mathématiques par le jeu des exemples proposés) et les pratiques (implicites à travers les stratégies pédagogiques suggérées) peuvent relever de ce modèle. L'hybridation est un outil d'analyse qui, dans cette étude limitée, permet d'identifier des modifications dans la conception de la pratique des mathématiques scolaires chez un futur enseignant.

2. Enquête documentaire (Margolinas & Wozniak 2010)

Nous considérerons la conception du document-ressource comme une réponse à une injonction de la formation, à une évaluation de compétences car elle constitue une composante du mémoire professionnel de l'étudiant. Mais elle est aussi une réponse au problème professionnel de tout enseignant : préparer son cours. Il s'agit pour le futur enseignant d'organiser l'étude d'un thème de savoir : élaborer une organisation praxéologique (Chevallard 1999, 2002) (identifier et choisir un type de tâches, construire les techniques et l'environnement technologico-théorique pour effectuer ces tâches et justifier de ces techniques). Le concepteur du document-ressource doit donc mettre en œuvre une enquête documentaire, explorer une diversité de documents, étudier les réponses déjà apportées pour élaborer la sienne. Il faut noter, comme le signale le descriptif du projet, la présence d'un ensemble de documents plus ou moins explicitement prescrits : les programmes HPM et les manuels CIAM. Pour l'enseignant débutant, ces documents se présentent comme le document générateur, ressource qui donnera naissance au document final (le document-ressource du projet).

L'enquête documentaire, au cœur de la production, engage le futur enseignant dans l'exploration d'une discipline qui est un construit historique et culturel référant à divers niveaux de réalité (la Pédagogie, l'Ecole, la Société) - les niveaux de co-détermination didactiques (Chevallard 2002). Au niveau de la discipline, le concepteur doit prendre en compte les programmes, les textes de savoir à enseigner (documentation officielle et officieuse) et leurs liens avec les savoirs académiques (formation universitaire). Au niveau de la pédagogie, il doit se conformer aux attentes des formateurs. D'autres niveaux de réalité, la Société et sa vision d'un processus d'acculturation mathématique, l'Ecole et l'ordinaire des pratiques enseignantes, interfèrent dans le processus de cette enquête. Le caractère marquant de ce projet est que l'existence, l'influence de ces niveaux de réalité, sont en partie identifiables au cours du temps (origines des ressources mises à profit notamment au cours du travail collaboratif). Il semble envisageable de dégager à partir de cette enquête des éléments pour caractériser un dispositif de formation novateur.

3. *Les exemples (Zodik & Zaslavsky 2008)*

Les documents-ressources produits dans le projet comportent des exemples dont la nature et le rôle se modifient au cours des versions. C'est la raison pour laquelle nous les étudions comme des indicateurs d'un potentiel développement professionnel en nous référant en partie aux travaux sur ce sujet.

Outil pour définir des concepts, généraliser ou pour donner sens à des notions abstraites, la notion d'exemple couvre un large champ qui comprend aussi les activités préparatoires, les applications… Omniprésents dans les manuels et en classe, les exemples sont aussi objets de médiation entre l'élève et des concepts ou des techniques. Le rôle des exemples dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques a fait l'objet de nombreuses études : citons par exemple Bills et al. (2006), Watson et Mason (2005), Goldenberg et Mason (2008) dont les travaux visent à fonder un cadre théorique « l'espace d'exemple ». Dynamique, évolutif, l'espace d'exemples traduit la capacité du sujet à produire des classes d'objets mathématiques. Du côté de l'élève, il témoigne de processus de conceptualisation ; du côté de l'enseignant, il rend compte de l'expertise de l'enseignant. L'espace d'exemples du professeur chevronné lui permet de choisir un exemple pertinent (les aspects saillants de la notion sont présents et adaptés au moment de l'étude) qu'il soit planifié (dans un cours), ou spontané (dans l'action en classe) ; les sources de cet espace sont issues des manuels et de la pratique (liée ici au travail collaboratif). En nous référant aux travaux de Zodik et Zaslavsky (2008) et en les adaptant au contexte de notre étude, il apparaît pertinent (dans le cadre limité des exemples planifiés du document écrit) d'utiliser des qualités retenues par les auteures pour caractériser les « bons exemples » : leur pertinence mathématique, le fait qu'ils prennent en compte les erreurs potentielles des élèves, le fait qu'ils mettent en évidence des aspects cruciaux, leur efficacité et leur économie.

Bien que les exemples ne constituent qu'une composante limitée de l'activité mathématique de l'enseignant, ils peuvent traduire des traces d'évolution de pratique dans notre étude exploratoire.

III. CONCEPTION DU DOCUMENT-RESSOURCE « COMPLEMENTS SUR LES SUITES »

1. *Une élaboration en trois étapes*

Le choix de ce document-ressource se justifie pour plusieurs raisons : il constitue l'objet de la réflexion des encadrants sur ce que doit être un document-ressource lors du séminaire de Paris (novembre 2012) ; il est construit par un étudiant qui travaille manifestement[7] en lien avec ses encadrants. Ce document-ressource est destiné aux terminales D.

[7] Fiche personnelle d'évolution de son projet, réponse à un questionnaire

Pour enseigner ce thème, un enseignant Camerounais peut se référer à trois sources.

- Les programmes officiels du Cameroun (figure 2) proposent un programme d'analyse commun en C et en D.

Contenu	Commentaires, Savoir, Savoir-faire
Suites récurrentes : exemples d'études de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$.	Des exemples d'approximation des solutions de l'équation $f(x) = 0$ seront donnés. La méthode de dichotomie et celle de Newton seront des objectifs raisonnables.

Figure 2 - *Extrait du programme camerounais*

- Le programme HPM (source http://maths.educamer.org) évoque les méthodes du point fixe et de Newton en TSM[8] (équivalent Terminale C), la notion de point fixe en TSE[9] (équivalent terminale D).
- Les manuels CIAM (notamment celui de TSM) avec le chapitre « Suites numériques » (figure 3).

3. Compléments sur les suites
3.1 Suites définies par récurrence
3.2 Travaux dirigés (Méthode du point fixe, Méthode de Newton)

Figure 3 - *Extrait du manuel CIAM TSM*

Nous disposons de trois versions successives pour ce document-ressource (V1 de septembre 2012, V2 de décembre 2012 et V3 de novembre 2013). Pour chacune d'entre elles, nous cherchons d'abord les traces des ressources utilisées dans le document-ressource. Dans un second temps, nous étudions l'organisation du document-ressource et les effets de la prise en compte de nouvelles ressources. Enfin, nous cherchons à caractériser la manière dont les exemples sont adaptés, développés et à préciser en quoi ils rendent compte des questions professionnelles que se pose le futur enseignant : comment il adapte ses réponses et développe sa représentation de l'activité mathématique de l'élève.

2. *La version élaborée en septembre 2012*

Ressources utilisées dans le document-ressource

Dans cette première version, l'auteur cite trois références : les manuels CIAM TSM et TSE et une adresse URL[10].

Il dispose du cahier des charges du projet qui lui indique qu'un document-ressource correspond à un chapitre de cours et doit être constitué d'un cours détaillé comprenant objectif du chapitre, place dans le programme, pré-requis, schéma pédagogique, déroulement (avec durée), activité pour le maître, activité pour l'élève. Il doit comprendre deux temps

[8] Terminale Sciences Mathématiques
[9] Terminale Sciences Expérimentales
[10] http://www.prepacom.net/archive/math/TD/enonces/suites/outils.pdf
Eléments de cours et techniques pour étudier les suites arithmético-géométriques et suites récurrentes linéaires.

d'activités (exposition d'une notion, travail sur une méthode), des objectifs spécifiques, des éléments de mise en œuvre. Il doit encore proposer une feuille d'environs 30 exercices WIMS (collectés sur le site ou modifiés) classés selon leurs objectifs pédagogiques pour l'élève (maîtrise des cours de terminale, approfondissement pour l'enseignement supérieur…).

Le séminaire de Yaoundé de mars 2012 l'a sensibilisé, tout comme ses encadrants, à des outils issus de la didactique, à l'usage de certains logiciels et de la plate-forme WIMS. Durant cette première période, le travail collaboratif est axé sur l'organisation du cours et sur les activités pédagogiques pour l'élève. Les apports du séminaire et de ce travail collaboratif constituent aussi des ressources.

Organisation du document-ressource

Ces ressources conduisent à une première version de 22 pages fortement inspirée par les manuels CIAM.

La première partie reprend le contenu du manuel CIAM TSM :

> Etude d'une suite (u_n) telle que $u_0 = a$ et pour tout n entier, $u_{n+1} = f(u_n)$, où a est un réel et f une fonction continue. Application à la détermination d'une valeur approchée de la solution d'une équation $g(x) = 0$.

La seconde partie reprend les travaux pratiques du manuel CIAM TSE :

> Application aux problèmes concrets.

Cette version possède encore les caractéristiques des manuels :

- Une seule propriété démontrée (TSM) :

> Soit (u_n) dont le terme général vérifie $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction. Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l, alors $f(l) = l$.

- Deux méthodes institutionnalisées (méthode du point fixe TSM), démarche de résolution pour les problèmes concrets TSE). En dehors d'une activité sans solution, les 9 activités ou exemples sont corrigés, comme dans les manuels. Le document-ressource propose encore 6 exercices non corrigés extraits ou inspirés des manuels CIAM.

Dans les manuels, les notions ou méthodes sont introduites par des exemples corrigés. Les techniques (au sens de Chevallard 2002) de résolution sont fournies et suivies par des exercices corrigés. Le document-ressource respecte cette caractéristique mais la touche du concepteur s'exprime dans le fait que les exemples n'ont pas été extraits tels quels des manuels. Le concepteur modifie les variables des situations proposées (fonction, intervalle de définition) : cette dimension témoigne de ses recherches dans les exercices non corrigés du manuel. Plus encore, des problèmes concrets (problèmes d'amortissement de capital, de remboursement) sont construits par l'auteur, en appui sur un contexte qui se veut familier. La recontextualisation des notions en jeu, la prise en compte d'une approche active de l'activité de l'élève (même très étayée et inspirée des manuels) traduit la volonté de l'auteur d'adapter les contenus à l'élève tout en lui laissant une autonomie pour construire ses apprentissages (amorce d'une pédagogie centrée sur l'élève).

Adaptation des exemples

Dans le manuel CIAM TSE, le paragraphe « Résolution de problèmes concrets » comporte trois exemples et trois problèmes corrigés visant à illustrer les étapes types de la résolution de tels problèmes, à savoir, modélisation du problème, résolution mathématique du problème, interprétation des résultats. Les exemples mettent en évidence un recours à des suites

arithmétiques et géométriques, les problèmes portent sur les thèmes de la démographie, de l'amortissement d'un capital, du remboursement des prêts bancaires.
Dans le document-ressource, le futur enseignant introduit les étapes de résolution (cf. CIAM TSE), propose deux exemples corrigés (placement en banque avec intérêt simple, avec intérêt composé) et un exercice d'application (placement avec intérêt composé). Voici l'énoncé du second exemple :

Une banque d'une localité accorde à tous ceux qui y gardent leur argent, une augmentation de 5 pour cent par an de la somme en banque. Une association villageoise de la place décide d'y garder leur collecte qui s'élève à 1 000 000 Francs CFA. Combien aura-t-elle au bout de trois ans ?

Du point de vue de l'analyse de la tâche, la phase de modélisation est plus pauvre que dans l'énoncé du manuel. Les exigences du futur enseignant en termes d'activités mathématiques de l'élève sont réduites, comparées à celles du manuel. Par contre la modification du contexte (une situation plus simple et plus évocatrice d'une certaine réalité) peut montrer le souci de faire un lien avec des pratiques sociales familières aux élèves (ou au vécu du futur enseignant). La modification des exemples rend donc l'usage de l'outil « suite géométrique » moins pertinent (au sens de Zodik&Zaslavski 2008) mais peut-être le souci de se mettre à la portée des élèves y est-il plus tangible (une pédagogie centrée sur l'élève, Adler 2010).

3. *La version élaborée en décembre 2012*

Ressources utilisées dans le document-ressource

Le travail collaboratif conduit plus ou moins implicitement chaque acteur à prendre en charge une tâche spécifique. Les inspecteurs prennent en compte les programmes et leurs objectifs ; les professeurs de lycée s'occupent de la question des activités pédagogiques pour l'élève ; les professeurs des ENS s'avèrent les garants de la scientificité des contenus.

Les non-dits du cahier des charges en termes d'objectifs et d'activités conduisent à la production d'un nouveau document de cadrage, un « canevas » tel que le dénomment les encadrants camerounais, lors du séminaire de Paris (novembre 2012). Pour ces derniers, ce canevas est la réponse à des besoins exprimés par les équipes : définir la notion d'objectifs spécifiques qui détermineront l'organisation du chapitre, concevoir des activités pédagogiques pour l'élève en fonction de leur place dans le déroulement de l'étude. Ainsi, le canevas propose des exemples d'activités de découverte (savoir ou savoir-faire), de rappel et « d'institutionnalisation ». Cette dernière activité (cf annexe) qui « doit permettre à l'élève de démontrer si nécessaire » est induite par une suite de tâches qui guide l'élève (charge à l'élève d'utiliser les techniques pour effectuer ces tâches). Très présente dans le document-ressource sous la désignation « activité d'institutionnalisation », nous la désignerons dans la suite par « activité de démonstration » pour la distinguer d'une démonstration classique prise en charge par l'enseignant. Les responsables français du projet complètent ce canevas par deux demandes : la fiche de lecture d'un article didactique en lien avec le thème du document-ressource (fourni par l'évaluateur), des analyses a priori et a posteriori.

Après le séminaire de Paris, une nouvelle version du document-ressource est écrite. Elle comporte 30 pages et une nouvelle ressource URL[11]. Cette référence pourrait témoigner d'un questionnement en articulation avec les enjeux d'une formation mathématique post-bac. Les sources des exemples et des exercices se sont diversifiées et ne relèvent plus seulement des

[11] http://mfritz.perso.sfr.fr/cours/
Cours en ligne d'un professeur de lycée français qui enseigne en classe préparatoire économique et commerciale.

manuels CIAM. L'étudiant s'est appuyé sur le canevas. L'enrichissement des ressources mobilisées a un effet sur le document-ressource.

Organisation du document-ressource

Le sommaire et le contenu du document-ressource montrent un nouveau découpage. La définition de quatre objectifs spécifiques déterminent quatre sous-parties : (1) Etude de la convergence et de la limite des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction satisfaisant certaines conditions ; (2) Utilisation des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ pour déterminer la valeur approchée d'une équation par la méthode du point fixe ; (3) par la méthode de Newton ; (4) par dichotomie. Suit une rubrique « Exercices ». Chacune des quatre sous-parties comprend en amont un paragraphe dédié aux résultats fondamentaux[12].

La première sous-partie commence par des pré-requis listés précisément (par exemple, théorèmes des valeurs intermédiaires, des accroissements finis) qui font l'objet d'un test (non corrigé). Dans les résultats fondamentaux, la propriété démontrée dans la version 1 est, cette fois, proposée avec une preuve de type «activité de démonstration » corrigée.

Le cours s'est enrichi d'un point de vue théorique et au niveau de la visibilité des résultats importants. L'architecture du document-ressource emprunte encore beaucoup au manuel CIAM (TSM) mais ne fait plus référence aux problèmes concrets (CIAM TSE), ce qui peut témoigner d'une volonté de l'étudiant et/ou de ses encadrants d'éliminer les problèmes relevant d'une modélisation de « phénomènes » sociaux (même plus complexes) ou plutôt du désir de recentrer l'activité de l'élève sur le travail des notions et méthodes purement mathématiques. L'organisation de chacune des sous-parties relève d'un même «schéma pédagogique » :

1. Une activité introductive qui est un exercice détaillé et non résolu et l'énoncé de la propriété introduite par l'activité ;
2. Une activité de démonstration qui consiste à questionner le lecteur de la même manière que dans la première activité mais cette fois dans le cas général ;
3. Des exemples avec solutions qui reprennent la trame du questionnement comme si la propriété n'avait pas été énoncée ;
4. Des exercices d'application non corrigés.

La description développée des méthodes (point fixe, etc…) est suivie par un exemple très détaillé (mobilisant la référence aux résultats fondamentaux). Chaque méthode donne lieu à deux exercices d'application non corrigés. La rubrique finale « Exercices » compte seulement deux exercices.

Adaptation des exemples

Le document-ressource comprend donc neuf activités introductives sans les solutions qui permettent de dégager neuf propriétés et neuf activités de démonstration relatives à ces propriétés. Il propose aussi six exemples corrigés (étude de convergence, détermination de limites, utilisation des méthodes) et neuf exercices d'application non corrigés. Le traitement des exemples témoigne du souci du concepteur de ne pas reprendre des exemples tirés explicitement des manuels. Un jeu sur les variables personnalise les exemples proposés, signe d'un travail d'adaptation et de prise en compte du rôle structurant des exemples (Zodik & Zaslavski 2008).

[12] Notions, propriétés qui vont justifier des techniques.

Ce document-ressource se particularise par son organisation réglée, la place accordée aux « activités de démonstration ». Les contenus mettent en évidence la présence d'un environnement théorique (les résultats fondamentaux, les propriétés) qui peut témoigner du souci de justifier les techniques mobilisées dans les exercices, de construire des organisations mathématiques autour d'un type de tâches (Chevallard 2002). Le document conçoit des activités pour l'élève (référence au canevas) qui dénotent d'une pédagogie centrée sur l'élève.

4. *La version finalisée en novembre 2013*

Ressources utilisées dans le document-ressource

La version précédente a fait l'objet d'une pré-évaluation dont l'objectif était d'évaluer sa conformité au cahier des charges du projet. Cette pré-évaluation souligne la pertinence des exemples et exercices en lien avec les attentes de l'enseignement supérieur. Elle révèle aussi des manques, à savoir, quelques erreurs, une liste de pré-requis limitée, l'absence de devoirs corrigés, d'une feuille d'exercices WIMS, d'éléments relatifs à la mise en œuvre du document-ressource. Cette pré-évaluation peut être considérée comme une nouvelle ressource.

Cette troisième version de 55 pages propose des références plus nombreuses : 9 dont 4 sont des manuels de terminale (comprenant les 2 CIAM), 5 des adresses URL (donc trois nouvelles)[13] proposant des cours, des exercices des annales de baccalauréat français. Ces ressources sont notamment mobilisées pour enrichir la rubrique dédiée aux exercices de fin de chapitre.

Organisation du document-ressource

Cette version se réfère explicitement aux manuels CIAM pour la liste des pré-requis qui est élargie. L'organisation du cours s'est modifiée : les méthodes sont développées dans le cadre des programmes officiels (extrait présent dans le document-ressource). Le concepteur intègre la méthode du point fixe dans une extension puisque seules les méthodes de dichotomie et de Newton sont des objectifs raisonnables. Le concepteur reprend textuellement l'exemple du manuel CIAM (TSM) relatif à la méthode du point fixe mais il en développe la description et ajoute une remarque à l'adresse du professeur :

> La difficulté pour l'enseignement de cette méthode en classe de terminale C réside sur le choix de la fonction f. En effet, la fonction f telle que l'équation $g(x) = 0$ soit équivalent à l'équation $f(x) = x$ ne vérifie pas toujours les propriétés de fonctions contractantes.

Le schéma pédagogique est le même que dans la deuxième version, mais la désignation « activité d'institutionnalisation » a disparu. Cette version montre le souci du concepteur de structurer son cours. Par exemple, le concepteur a réalisé un organigramme modélisant une méthodologie pour étudier la convergence d'une suite définie par récurrence. Des remarques explicitent plus précisément les contraposées de certaines propriétés, les distinctions entre conditions nécessaires et suffisantes, en les étayant par des exemples. La solution de l'une des activités de démonstration relative à l'application de la méthode de Newton est rédigée (elle était absente de la version 2). Ces éléments peuvent témoigner de la prise en compte des difficultés potentielles des élèves.

[13] http://mangeard.maths.free.fr/Terminale/S/exos-suites-numeriques
http://megamaths.perso.neuf.fr/Demoulin-Recueilannalessuites
http://mathematiques.daval.free.fr/spip.php?page=site&id_syndic=42

Parmi les 64 activités proposées à l'élève, 7 sont corrigées (dont 6 exemples). Cette répartition peut témoigner du souci de rendre l'élève acteur de ses apprentissage et de fournir parallèlement des exemples peu nombreux mais cruciaux pour l'apprentissage. Les nombreux exercices (29 au total), donnés à la fin du chapitre, illustrent encore une enquête documentaire élargie.

L'évolution des contenus et des stratégies pédagogiques « implicites » traduit le développement d'un environnement théorique au détriment d'une approche plus contextualisée. Notons par exemple la présence nouvelle d'une propriété et de sa « démonstration » (la seule du document) : « Toute fonction contractante admet au maximum un seul point fixe ». Le cheminement cognitif de l'élève, très balisé (schéma pédagogique) suggère un apprentissage par «imprégnation», une stratégie pédagogique centrée sur l'élève mais qui prend cette fois en compte certaines difficultés (pour l'élève, pour l'enseignant).

Ce document-ressource final, en lien avec les exigences des pré-évaluateurs, comporte une feuille WIMS de 4 exercices (3 non pertinents). Le travail documentaire du concepteur s'est davantage axé sur le cours et les activités pour les élèves, se conformant sans doute aux exigences d'un mémoire professionnel. S'il est notable que les potentialités de la plateforme WIMS sur ce thème n'ont pas été exploitées, cette enquête documentaire témoigne toutefois d'un travail de recherche et de synthèse assez remarquable : ce travail aboutit à une organisation mathématique novatrice réglée selon des objectifs pédagogiques (exprimés en termes de types de tâches) qui n'étaient pas donnés dans les programmes officiels. La conception des activités pour l'élève, en fonction du déroulement du cours, met en évidence des aspects de l'activité du professeur hors classe.

Adaptation des exemples

Par ailleurs, les exemples, toujours corrigés, jouent un rôle déterminant pour le cheminement cognitif de l'élève. Celui-ci, si on suit la progression de cette version, consiste d'abord (avec éventuellement le secours de l'exemple corrigé) à parcourir de lui-même les étapes de résolution, dégager une propriété fondamentale qu'il devra redémontrer dans le cas général, guidé étape par étape. L'exemple corrigé joue un rôle spécifique : il peut être à la fois outil pour aborder l'activité première, une aide à la démonstration de la propriété et modèle d'une résolution type. Il n'y a plus volonté d'utiliser à tout prix d'autres exemples que ceux du manuel CIAM, mais désir d'exposer une activité corrigée avec méthode. L'étude de l'exemple corrigé contribue à donner du sens aux notions et aux méthodes étudiées.

Cette mise en évidence des diverses fonctions de l'exemple peut être liée à une prise de conscience du futur enseignant de la richesse de ses enjeux pour l'élève (Zodik & Zaslavski 2008).

IV. RESULTATS

Ce document-ressource est emblématique pour diverses raisons : il témoigne de l'engagement d'un étudiant dans une enquête documentaire innovante ; il rend compte des questions partagées, des réponses apportées par un collectif (étudiant, encadrants de l'étudiant, évaluateur et responsables du projet) pour produire un document original. A ce titre, cette étude exploratoire nous permet de proposer des résultats.

1. Du côté de la constitution de la ressource

Premier résultat : Les origines des ressources mobilisées se sont diversifiées. Les effets de cet enrichissement sont illustrés figure 4. Le premier document-ressource met en évidence un travail documentaire sur les manuels CIAM en lien avec le cadrage du projet. La mobilisation des connaissances du professeur dans l'étude des manuels génère un document qui s'appuie fortement sur les manuels CIAM. Dans le dernier document-ressource, les apports du travail collaboratif et du canevas qui relèvent d'autres sources (éléments de la culture professionnelle, de la formation) déterminent une conception nouvelle de la pratique mathématique scolaire (Adler 2010). Les contenus mathématiques fortement contextualisés sont décontextualisés et intégrés dans un environnement théorique. Les stratégies pédagogiques, toujours centrées sur l'élève, se déplacent d'un mode « exposition/application » vers un mode « questionnement démonstratif ».

Schéma pédagogique	Etape 1		Etape 2	Etape 3	Etape 4	
	Activités introductives	Enoncé des propriétés	Activités de démonstrations des propriétés	Exemples corrigés	Exercices d'application non corrigés	Exercices fin de chapitre
Version 1 (22p)	1	1 propriété démontrée		9	6	1
Version 2 (30p)	9	9 non démontrées	9 (dont 1 avec solution)	6	9	2
Version 3 (55p)	9 (dont 1 avec solution)	9 non démontrées 1 démontrée	9 (dont 1 avec solution)	6	10	29

Figure 4 – *Composition des documents-ressources*

Deuxième résultat : A partir d'un document générateur (les manuels CIAM), l'impact du cahier des charges, du canevas et du travail collaboratif conduit la genèse d'un document-ressource qui constitue *in fine* le support d'organisations mathématiques locales (autour des types de tâches définis par les objectifs spécifiques) et met à jour une organisation de l'étude qui repose sur un schéma pédagogique de structure quaternaire : activité introductive et énoncé de la propriété, activité de démonstration, exemples corrigés, exercices d'application (figure 4). Nous pouvons en inférer l'influence de ressources qui relèvent de divers niveaux : la discipline, la pédagogie, l'école et une vision sociétale de l'éducation mathématique (Chevallard 2002). En témoignent des organisations mathématiques et didactiques implicitement réglées par un schéma pédagogique qui renvoie à la discipline (le statut de la démonstration, au cœur des préoccupations des universitaires garants de la discipline), à la pédagogie et à l'école (des objectifs déclinés en compétences exprimés en termes de tâches pour un élève « acteur », tels que les définissent les inspecteurs et les conseillers pédagogiques). L'émergence d'un schéma pédagogique original peut traduire enfin la conception d'une éducation mathématique en rupture avec le schéma classique d'un modèle transmissif dépassé.

2. *Du côté du développement professionnel du concepteur*

Troisième résultat : Le problème professionnel de l'étudiant concepteur est d'élaborer un cours approfondi. L'élaboration du document-ressource génère des questions professionnelles, engage le futur professeur à chercher, explorer, étudier, réviser des ressources pour élaborer des réponses. L'enquête documentaire qui aboutit à la production d'un texte de savoir organisé (fondements théoriques, tâches, techniques, exercices) structuré selon un « schéma pédagogique » conduit à trois constats :

- Le développement des connaissances relatives aux mathématiques du professeur ;
- Une réflexion sur la conception, les fonctions des exemples pour donner sens aux savoirs pour l'élève ;
- La prise en compte de l'ensemble des conditions nécessaires pour préparer un chapitre de cours (éventuelles difficultés cognitives des élèves, vigilance scientifique, instructions officielles).

Le travail produit atteste du développement de compétences professionnelles relatives à une composante des pratiques, la préparation d'un cours. Toutefois, nous ne disposons pas d'analyse a priori et a posteriori nous permettant de savoir si ce document-ressource a été testé en classe.

3. *Du côté de la formation*

Quatrième résultat : Ce développement professionnel s'inscrit dans un contexte où le canevas joue un rôle déclencheur. Ce canevas, qui traduit des attentes d'encadrants/formateurs et qui oriente l'enquête documentaire, met en évidence l'impact de la formation sur le développement professionnel du futur enseignant. Le travail sur la pertinence des activités, l'adoption d'un schéma pédagogique pour organiser l'étude et, en particulier, la place octroyée à l'activité de démonstration, proposée systématiquement, renvoient aux exigences formulées par les formateurs (une pédagogie active où l'activité de démonstration joue un rôle dominant pour la formation mathématique de l'élève).

Cinquième résultat : Ce projet de production de documents-ressources se caractérise comme un dispositif de formation initiale innovant au service des formateurs camerounais. Il présente l'intérêt de faire émerger des besoins professionnels et de fournir des ressources dont l'adaptation est l'enjeu d'un travail collaboratif. A ce titre, le projet est un dispositif de formation et un outil de développement professionnel.

V. CONCLUSION

Sur les 28 documents-ressources de cette première vague, 27 ont été évalués par les évaluateurs du projet et par des inspecteurs camerounais. Ils ont par ailleurs conduit à l'élaboration de mémoires de fin d'études qui ont été soutenus et validés. Les évaluations finales produites par les évaluateurs du projet mettent en évidence des disparités qui ne permettent pas de généraliser les résultats obtenus à partir de notre étude à l'ensemble des documents-ressources produits. Par contre, de façon unanime, les inspecteurs camerounais notent la conformité des objectifs au programme officiel. Ils soulignent souvent la richesse des activités mais déplorent parfois la persistance d'un modèle transmissif d'apprentissage. Ils attestent tous d'un travail sur les programmes et les activités pour les élèves.

A l'issue du projet, au-delà des résultats dont témoigne le document-ressource que nous venons d'étudier, des questions importantes pour l'enseignement des mathématiques et les TICE dans cette partie du monde émergent.

- Outre la production d'un document en édition électronique, les potentialités des TICE sont peu exploitées. Des exercices WIMS ont été proposés dans les documents-ressources, grâce au soutien d'un enseignant du Cameroun, expert TICE, qui a fortement guidé les étudiants. Quelles perspectives réalistes de développement des TICE sont à considérer en priorité ?

- Des documents-ressources vont être disponibles sur l'Internet. Quels usages les enseignants vont-ils en faire ? Quelle sera la mise en œuvre avec les élèves ?
- Le projet PRENUM-AC a mis en synergie différents participants pour produire des ressources. Cette synergie va-t-elle se poursuivre au-delà du projet ? Sous quelles formes ?

REFERENCES

Adler J. (2010) La conceptualisation des ressources. Apports pour la formation des professeurs de mathématiques. In Gueudet G., Trouche L. (dir.) *Ressources Vives Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 23-37). INRP : Presses Universitaires de Rennes,.

Bills L., Dreyfus T., Mason J., Tsamir P., Watson A., Zaslavsky O. (2006) Exemplification in Mathematics Education. In Novotna J. (Ed.) *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*. Prague, Czech Republic: PME.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-265.

Chevallard Y. (2002) Organiser l'étude. Ecologie et régulation. Dorier J. L., ArtaudM., Artigue M., Berthelot R et Floris R. (dir), *Actes de la XIème école d'été de Didactique des mathématiques*. Grenoble, La pensée Sauvage.

Goldenberg P., Mason J. (2008) Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 69.

Margolinas C., Wozniak F. (2010) Rôle de la documentation scolaire dans la situation du professeur : le cas de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. In Gueudet G., Trouche L. (dir.) *Ressources Vives Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 233-249). INRP : Presses Universitaires de Rennes,.

Touré S. (2002) L'enseignement des mathématiques dans les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien. *Zentralblatt für Didaktik des Mathematik (ZDM, International review on Mathematical Education)* 34(4), 175-178.

Traoré K., Barry S. (2007) La problématique d'une voie africaine en didactique des mathématiques : vrais et faux enjeux. *RADISMA* (2).

http://www.radisma.info/document.php ?id=476.ISSN 1990-3219

Watson A., Mason J. (2005) *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples.* Mahwah: Erlbaum.

Zodik I., Zaslavsky O. (2008) Characteristics of teachers' choice of examples in and for the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics* 69.

Manuel TSM (Terminale Sciences Mathématiques – terminale C), Collection Inter-Africaine de Mathématiques (CIAM), édités chez EDICEF (France).

Manuel TSE (Terminale Sciences Expérimentales – terminale D), Collection Inter-Africaine de Mathématiques (CIAM), édités chez EDICEF (France).

ANNEXE

Extrait du canevas discuté lors du séminaire de Paris (novembre 2012)

Exemple 4 (activité d’institutionnalisation)

La seconde activité dite d’institutionnalisation doit permettre à l’élève de démontrer si c’est nécessaire :

Exemple d’activité d’institutionnalisation :

Enoncé de l’activité (objectif visé : prouver que le module d’un produit de complexes est le produit des modules.)	Commentaire
Soient $z = r(cos\theta +\ isin\theta)$ et $z' = r'(cos\theta' +\ isin\theta')$. 1. a. Justifier que $(cos\theta\ +\ isin\theta)(cos\theta'\ +\ isin\theta')\ =\ cos(\theta + \theta') + i\ sin(\theta + \theta')$. a. En déduire que : ○ $\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$ ○ $arg(zz') = argz\ +\ argz'$ b. Quels sont alors les étapes clefs pour établir les résultats de 1.b. 2. Soit n un entier naturel non nul, a. Justifier que $(cos\theta\ +\ isin\theta)^{n} = \ (cos(n\theta)\ +\ isin(n\theta))$ b. En déduire les modules et argument de z^n c. Quels sont alors les étapes clefs pour établir…	Démonstration guidée L’élève est invité à se donner des repères pour la refaire de lui-même. Une activité peut concerner plusieurs propriétés sœurs.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

TRANSFERT DU DIAGNOSTIC *PEPITE* À DIFFÉRENTS NIVEAUX SCOLAIRES : TESTS DIAGNOSTIQUES POUR LES ELEVES ET LEURS USAGES PAR LES ENSEIGNANTS

Françoise CHENEVOTOT-QUENTIN[*] – Brigitte GRUGEON-ALLYS[**] – Julia PILET[***] – Elisabeth DELOZANNE[****] – Dominique PREVIT[*****]

Résumé – Cet article est consacré au transfert du diagnostic *Pépite* à différents niveaux scolaires. *Pépite* concerne l'algèbre élémentaire et s'adresse initialement à des élèves en fin de scolarité obligatoire en France (16 ans). Nous souhaitons étendre ce diagnostic du début des apprentissages en algèbre élémentaire (12-13 ans) jusqu'en fin de l'école obligatoire (16 ans). Nous présentons les cadres théoriques et les modalités du diagnostic *Pépite*. Nous caractérisons le modèle du test diagnostique et nous étudions son adaptabilité à différents niveaux scolaires. Nous détaillons l'analyse des réponses et nous expliquons comment la transférer. Enfin, nous abordons la question des usages par les enseignants de cet outil de diagnostic.

Mots-clefs : diagnostic, usages, technologies de l'information et de la communication pour l'enseignement (TICE), algèbre élémentaire, enseignement différencié

Abstract – This paper deals with the transfer of the diagnostic assessment *Pépite* at different grade levels. *Pépite* is relevant for elementary algebra and for students at the end of compulsory schooling in France (16 years old). We wish to extend this diagnostic assessment from the beginning of learning elementary algebra (12-13 years old). We present the theoretical foundations and the modalities of the diagnostic assessment *Pépite*. We characterize the model of the diagnostic test and we study how this model is compatible according to different grade levels. We detail the response analysis and also we explain how to transfer it. Last, we address the issue of the usages by teachers of this diagnostic tool.

Keywords: diagnostic assessment, usages, Information and Communication Technology (ICT), elementary algebra, teaching suggestions

I. LE CONTEXTE

Cet article s'adresse au GT6 « Ressources et développement professionnel des enseignants » et se situe à la croisée des deux premiers pôles de questionnement proposés dans ce groupe de

[*] Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) – Université Paris Diderot – France – francoise.chenevotot@univ-paris-diderot.fr
[**] Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) – Université Paris Diderot – France – brigitte.grugeon@univ-paris-diderot.fr
[***] Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) – Université Paris Diderot – France – julia.pilet@univ-paris-diderot.fr
[****] Laboratoire L'UTES – Université Pierre et Marie Curie – Paris – France – elisabeth.delozanne@upmc.fr
[*****] Laboratoire L'UTES – Université Pierre et Marie Curie – Paris – France – dominique.previt@gmail.com

Chenevotot-Quentin F., Grugeon-Allys B. (2015) Transfert du diagnostic *Pépite* à différents niveaux scolaires : tests diagnostiques pour les élèves et leurs usages par les enseignants. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT6, pp. 566-582.

travail. Pour le 1er pôle « Conception de ressources », nous présentons des ressources de diagnostic conçues par des chercheurs en didactique des mathématiques pour des enseignants de mathématiques. Pour le 2ème pôle « Exploitation de ressources », nous abordons la question des usages par les enseignants des ressources mises à disposition pour tous les niveaux du collège.

Les enseignants recherchent des outils pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages des élèves. En fait, pour permettre à chaque élève de progresser, les enseignants auraient besoin, même si ce besoin n'est pas toujours exprimé, d'un diagnostic détaillé concernant les apprentissages individuels des élèves. Toutefois, les enseignants ont aussi besoin de gérer la classe dans sa globalité, en lien avec le temps d'enseignement, en proposant des activités différenciées adaptées à des groupes d'élèves ayant des compétences proches ou nécessitant des stratégies d'enseignement similaires.

Notre recherche porte sur le développement et l'usage de base d'exercices en ligne pour le diagnostic et l'enseignement différencié dans le domaine de l'algèbre élémentaire. Elle se situe dans la lignée du projet *Pépite* dont l'objectif était de concevoir et d'implémenter des outils en ligne pour aider les professeurs de mathématiques à gérer la diversité cognitive de leurs élèves en algèbre (Grugeon & al. 2012).

Depuis 2011, nous disséminons les outils issus de nos recherches sur LaboMep (Pilet & al. 2013), la plateforme développée par Sésamath, une association regroupant des professeurs de mathématiques. Le succès de la plateforme LaboMep nous montre que de telles ressources en ligne peuvent répondre aux besoins des enseignants (Artigue & al. 2008) qui sont à la recherche d'informations sur la cohérence de l'activité algébrique des élèves et sur leurs erreurs. Nous avons d'abord implémenté le diagnostic *Pépite* pour des élèves de fin de 3ème / début de 2nd (15-16 ans). Puis nous avons implémenté un outil proposant automatiquement des parcours d'enseignement différencié correspondant aux objectifs d'apprentissage visés par l'enseignant tout en étant adaptés au diagnostic des élèves. Nous poursuivons ces travaux dans le cadre du projet Néopraéval accepté par l'Agence Nationale de la Recherche.[1]

Cet article traite la question du transfert du diagnostic *Pépite* à différents niveaux scolaires. Alors que le diagnostic initial s'adressait à des élèves en fin de scolarité obligatoire en France (16 ans), nous souhaitons étendre ce diagnostic à des élèves plus jeunes, dès le début des apprentissages en algèbre élémentaire (12-13 ans). Nous avons ainsi défini une échelle de l'activité algébrique pour suivre l'évolution de la compétence algébrique des élèves à différents niveaux scolaires. Nous présentons d'abord le dispositif de diagnostic *Pépite* et les éléments théoriques mobilisés. Ensuite, nous caractérisons le modèle du test diagnostique et expliquons la viabilité de ce modèle à différents niveaux scolaires. Puis nous détaillons l'analyse des réponses de l'élève et ses enjeux et expliquons comment la transférer à d'autres niveaux scolaires. Enfin, nous abordons la question du transfert des potentialités de ces outils pour réguler l'enseignement avant de conclure avec quelques perspectives de recherche. Nous indiquons en annexe les programmes français d'algèbre pour le collège.

II. LE DIAGNOTIC *PEPITE*

1. *Les fondements théoriques*

Le diagnostic *Pépite* n'utilise pas de modèles psychométriques mais se fonde sur une analyse épistémologique et anthropologique d'une part, et sur une analyse cognitive d'autre part, de l'algèbre élémentaire dans le but de définir une référence (Artigue & al. 2001). Dans sa

[1] Convention ANR-13-APPR-002-01. Site du projet : http://www.ldar.univ-paris-diderot.fr/page/praeval

dimension *outil* (Douady 1986), le domaine algébrique comprend les traditionnels problèmes arithmétiques, les problèmes de généralisation et de preuve, les problèmes pour lesquels l'algèbre apparait comme un outil de modélisation, les problèmes de mise en équation, les problèmes algébriques et fonctionnels (Chevallard 1989). Dans sa dimension *objet*, l'algèbre est considéré comme un ensemble structuré d'objets (les expressions algébriques, les formules, les équations, les inéquations) avec des propriétés spécifiques et des représentations sémiotiques (Duval 1993) associées à différents registres (Kieran 2007 ; Vergnaud & al. 1988). Le diagnostic *Pépite* repose sur une analyse globale et multidimensionnelle de l'activité algébrique (Grugeon 1997 ; Kieran 2007) qui permet d'identifier les cohérences de l'activité des élèves en algèbre puis d'en suivre l'évolution.

Selon une approche anthropologique, les connaissances mathématiques dépendent fortement de l'institution dans laquelle elles doivent vivre, être apprises et être enseignées. Les objets mathématiques n'existent pas pour eux-mêmes mais émergent de pratiques qui varient d'une institution à une autre. Chevallard (1999) les analyse en termes de praxéologies, c'est-à-dire en termes de type de tâches, de techniques utilisées pour résoudre ces tâches (praxis), de discours technologique développé dans le but d'expliquer et justifier ces techniques et, enfin, de théories qui structurent le discours (logos). Ici, le diagnostic *Pépite* dépend du curriculum jusqu'à la fin de la scolarité obligatoire. Pour chaque niveau scolaire, les tâches diagnostiques qui composent le test sont caractérisées par un type de tâches, la complexité des objets algébriques, les techniques attendues relativement aux éléments technologiques et théoriques visés.

2. *Le test Pépite*

Le test diagnostic Pépite comprend dix tâches diagnostiques (constituées de 1 à 3 items) qui peuvent être des questions à choix multiple ou des questions ouvertes de un à plusieurs pas de raisonnement.

Du côté du modèle didactique, les dix tâches diagnostiques Pépite recouvrent complétement le domaine algébrique et se répartissent selon quatre types de tâches : (1) les tâches de calcul (développer et factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations), (2) les tâches de production (d'expressions, de formules, d'équations), (3) les tâches de traduction ou de reconnaissance (des relations mathématiques), (4) les tâches de résolution de problèmes dans différents contextes mathématiques (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel) utilisant l'algèbre pour généraliser, pour prouver des propriétés, pour modéliser ou pour mettre en équation.

Du côté du modèle informatique, le modèle conceptuel de classe de tâches développé par Prévit (Delozanne & al. 2008) permet de caractériser des tâches équivalentes du point de vue du diagnostic. Prévit a développé PépiGen, un logiciel qui génère automatiquement les tâches et leur analyse. PépiGen s'appuie lui-même sur Pépinière, un logiciel de calcul formel qui génère les réponses anticipées (correctes ou erronées) des élèves selon l'analyse *a priori* des tâches.

Pour transférer le test diagnostique Pépite à différents niveaux scolaires, nous avons affronté deux problèmes majeurs. Du côté du modèle didactique, nous nous sommes appuyés sur les types de tâche du domaine algébrique et avons dû identifier des valeurs des variables didactiques associées aux tâches recouvrant le domaine mathématique, pour chaque niveau considéré. Du côté du modèle informatique, nous avons dû construire un test générique pour disposer de tests pour différents niveaux scolaires.

3. *L'analyse des réponses*

Pépite comprend trois niveaux pour l'analyse des réponses des élèves :

- Le diagnostic local (sur un seul exercice) analyse la réponse de l'élève à une question du test selon plusieurs dimensions et non seulement en termes de réponse correcte ou incorrecte ; le système de diagnostic produit un ensemble de codes qui caractérisent cette réponse selon des types de réponses anticipées ;
- Le diagnostic global individuel (sur un ensemble d'exercices) rassemble les codes similaires issus des différents exercices pour construire le profil cognitif de l'élève ; le système de diagnostic positionne l'élève par rapport à une référence selon plusieurs composantes et indique ses taux de réussite, leviers (connaissances sur lesquelles s'appuyer), faiblesses (connaissances à déstabiliser), règles fausses et règles correctes ;
- Le diagnostic global collectif positionne l'élève par rapport à des groupes d'élèves qui ont des profils cognitifs proches ; le système de diagnostic affecte l'élève dans un groupe dont il précise les caractéristiques.

Pour transférer le test diagnostique Pépite à différents niveaux scolaires, nous avons gardé la même démarche de diagnostic en trois niveaux. Cependant, pour le 1er niveau de diagnostic (diagnostic local), pour chaque tâche, nous avons dû anticiper les différents types de réponses et leurs différentes formes pour que le logiciel de calcul formel Pépinière soit capable de réaliser l'analyse automatique. Pour le 2ème niveau de diagnostic (diagnostic global individuel), nous avons dû adapter l'algorithme qui calcule le profil cognitif de l'élève pour les différents niveaux scolaires considérés tout en gardant la même référence pour positionner les élèves selon chaque composante. Enfin, pour le 3ème niveau de diagnostic (diagnostic global collectif), les modalités de constitution des groupes sont restées inchangées.

Nous allons maintenant exposer le transfert du diagnostic *Pépite* au niveau 5ème / 4ème (12-13 ans) en précisant les conditions de réussite.

III. LE TRANSFERT DES TACHES DIAGNOSTIQUES

La première étape pour transférer le diagnostic *Pépite* a consisté à concevoir des tâches diagnostiques conformes aux fondements théoriques exposés ainsi qu'aux contraintes institutionnelles.

1. *Un transfert des tâches qui assure la couverture du domaine mathématique*

Pour garantir que le test prend bien en compte tous les types de tâches du domaine algébrique, nous caractérisons chaque item d'une tâche diagnostique par le ou les types de tâches impliqués (Chenevotot & al. 2011). Ces types de tâches, présentés dans le tableau 1, sollicitent l'algèbre dans sa dimension *outil* (Produire une expression algébrique, Traduire ou reconnaître, résoudre des problèmes relevant de l'algèbre) comme dans sa dimension *objet* (Calculer sur des expressions algébriques). Nous considérons que le test diagnostique recouvre les types de tâches du domaine si tous les types de tâches interviennent. Comme on le voit sur le tableau 1, les dix tâches (27 items) du test initial niveau fin de 3ème / début de 2nd recouvrent le domaine algébrique. Le test conçu pour le niveau fin de 5ème / début de 4ème se compose également de dix tâches diagnostiques (22 items). Le tableau 2 montre que ces tâches font elles aussi intervenir tous les types de tâches du domaine. Cependant, à ce niveau scolaire, les connaissances numériques jouent un rôle important pour entrer dans l'activité algébrique. C'est pourquoi nous avons ajouté un type de tâche : « *Produire une expression* *numérique* ». Nous supposons que savoir si un élève réussit ou pas à produire une expression en ligne avec un parenthésage correct est un indicateur important pour son interprétation des expressions algébriques. Nous illustrons ce nouveau type de tâche au paragraphe III.2 sur la figure 3.

Types de taches relatifs à	**Nombre d'items**	**Items du test**
Calcul	4 / 27	5.1 / 5.2 / 5.3 / 5.4
Production d'expressions algébriques	7 / 27	3.1 / 8.1 / 8.2 / 8.3 / 9 / 10.2
Traduction ou reconnaissance	16 / 27	1.1 / 1.2 / 1.3 / 1.4 / 2.1 / 2.2 / 2.3 / 3.2 / 4.1 / 4.2 / 4.3 / 4.4 / 4.5 / 6 / 7 / 10.1
Résolution de problèmes (mise en équation, preuve) dans différents contextes mathématiques	3 / 27	8.3 / 9 / 10.3

***Tableau 1** – Organisation du test de niveau 3ème / 2nd en termes de types de tâches*

Types de taches relatifs à	**Nombre d'items**	**Items du test**
Calcul	4 / 22	7.1 / 7.2 / 8.1 / 8.2
Production d'expressions numériques	1 / 22	5
Production d'expressions algébriques	3 / 22	3.1 / 6
Traduction ou reconnaissance	14 / 22	1.1 / 1.2 / 1.3 / 2.1 / 2.2 / 2.3 / 3.2 / 4.1 / 4.2 / 9.1 / 9.2 / 9.3 / 9.4 / 10
Résolution de problèmes (preuve) dans différents contextes mathématiques	1 / 22	6

***Tableau 2** – Organisation du test de niveau 5ème / 4ème en termes de types de tâches*

2. *Un transfert par adaptation des tâches existantes ou par ajout de nouvelles tâches*

Pour être conforme avec les curricula des élèves français en classe de 5ème, le transfert du test demande un travail spécifique sur les tâches. Nous avons distingué deux cas : d'un côté, les tâches caractéristiques du domaine algébrique que nous avons transférées par adaptation du niveau 3ème / 2nd à un niveau scolaire inférieur et, de l'autre côté, les tâches relatives au domaine numérique, spécialement conçues pour le niveau 5ème / 4ème. Nous avons adapté les tâches du domaine algébrique en ajustant des valeurs des variables didactiques telles que la structure des expressions algébriques ou le choix des nombres. Ces adaptations sont justifiées à la fois par le curriculum et par l'activité algébrique attendue au niveau scolaire considéré. Nous présentons un exemple d'adaptation d'item : l'adaptation de l'item 3.1 du test initial (figure 1) pour le niveau 5ème / 4ème (figure 2). Dans les deux cas, le type de tâches est le même : « *Produire une expression algébrique* » et les exercices se situent tous les deux dans le cadre géométrique. Dans le test initial (respectivement le nouveau test), la tâche concerne l'aire (respectivement le périmètre) d'un rectangle (respectivement une figure). L'aire du rectangle s'exprime par une expression du second degré dont la structure est trop complexe pour le niveau 5ème / 4ème. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi une figure qui conduit à une expression plus simple pour le niveau inférieur. De plus, ce choix permet d'identifier les élèves qui concatènent les termes (réponse $11x$) ou ceux qui sont encore dans l'addition itérée (réponse $x + x + x + x + 7$).

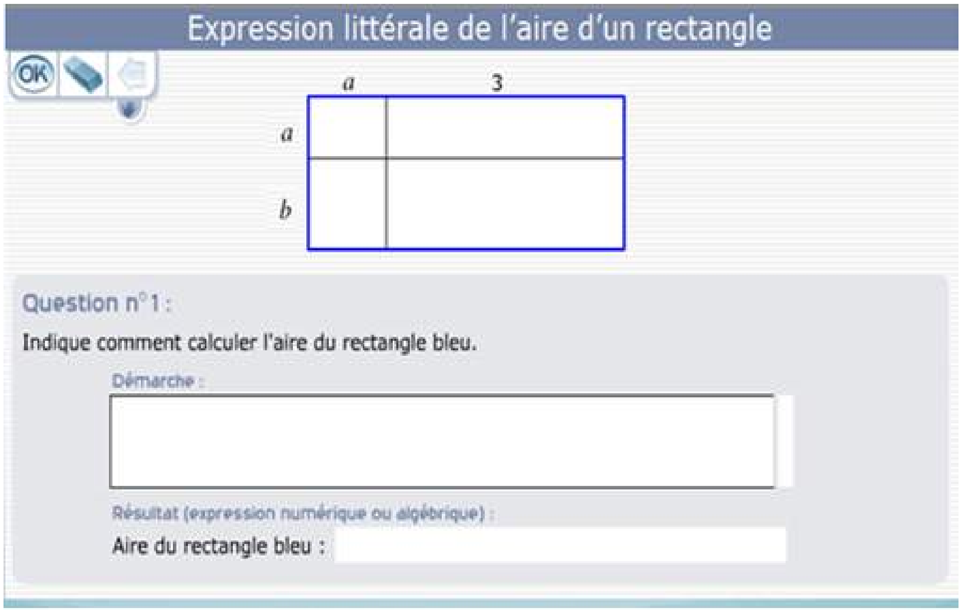
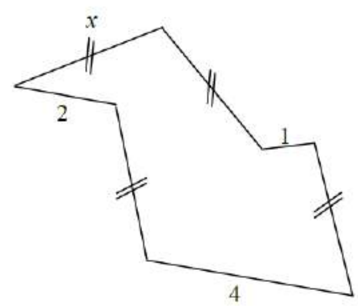


Figure 1 – *Item 3.1 du test initial*

Exercice 3 :



Calcule le périmètre de la figure	
Brouillon pour les calculs	Périmètre de la figure

Figure 2 – *Item 3.1 du test de niveau 5ème / 4ème : un exemple d'adaptation de tâche*

Pour prendre davantage en compte les connaissances numériques des élèves qui découvrent tout juste l'algèbre, nous avons conçu des tâches du domaine numérique. La figure 3 présente l'une de ces tâches qui relève du type de tâches « *Produire une expression numérique* ». Cette tâche permet de comprendre si un élève peut produire une expression numérique correcte avec des parenthèses ou si des raisonnements de type « pas à pas » persistent.

Exercice 5 :
13 filles et 15 garçons vont au cinéma. Chacun d'eux paye sa place à 6,80€, s'achète un soda à 3€, du pop-corn à 3,20€ et une glace à 2,50€.
Ecris une seule expression permettant de trouver la somme dépensée par le groupe sans faire le calcul
Résultat

***Figure 3 –** Item 5 du test de niveau 5ème / 4ème : un exemple de nouvelle tâche*

IV. LE TRANSFERT DE L'ANALYSE DES REPONSES

Nous allons aborder la question du transfert de l'analyse des réponses dans le diagnostic *Pépite* en visitant successivement les trois niveaux du processus : le diagnostic local, le diagnostic global individuel, le diagnostic global collectif.

1. Le premier niveau : le diagnostic local

Tout le processus de diagnostic repose sur la qualité de cette première étape : analyser chaque réponse d'élève. Les réponses des élèves ne sont pas seulement étiquetées selon qu'il s'agit de réponses correctes ou incorrectes. Elles sont aussi codées en termes de cohérences de l'activité algébrique de l'élève, grâce à une analyse *a priori* (connaissances, erreurs récurrentes) de chaque tâche. Nous définissons six codes issus d'une étude théorique : (1) la Validité des réponses (V), le statut du signe Egal (E), l'utilisation des Lettres en tant que variables (L), l'utilisation des règles d'Ecriture et de réécriture Algébriques (EA), la Traduction d'un problème d'un cadre vers un autre (T) et le type de Justification (J). La figure 4 (respectivement figure 5) montre les réponses d'un élève en classe de 3ème / 2nd (respectivement 5ème / 4ème) à la tâche présentée en figure 1 (respectivement figure 2) ainsi que l'analyse des réponses.

Coche la ou les égalités correctes			
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

Choix	Analyse a priori	Code
1	Calcul incorrect basé sur un produit en croix	V3 EA5
2	Addition des numérateurs et des dénominateurs	V3 EA42
3	Addition des numérateurs et produit des dénominateurs	V3 EA33
4	Correct	V1 EA1

***Figure 4 –** Diagnostic local pour l'item 1.4 du test niveau 3ème / 2nd*

Coche la ou les égalités correctes			
$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{9}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{18}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

Choix	Analyse a priori	Code
1	Addition des numérateurs sans mettre au même dénominateur	V3 EN33
2	Addition des numérateurs et des dénominateurs	V3 EN42
3	Addition des numérateurs et produit des dénominateurs	V3 EN33
4	Correct	V1 EN1

Figure 5 – *Diagnostic local pour l'item 1.1 du test niveau 5ème / 4ème*

Ces six codes sont-ils pertinents pour transférer le diagnostic à des élèves en classe de 5ème / 4ème ? Il nous est apparu nécessaire de compléter les six codes précédents en leur ajoutant deux nouveaux codes pour étudier l'utilisation des règles d'Ecriture et de réécriture Numériques (EN) et les connaissances sur les Nombres négatifs et décimaux (N). En effet, le code EN a été créé car les connaissances algébriques se construisent à partir des connaissances numériques. C'est la raison pour laquelle les codes EA et EN ont une structure similaire. Or, dans le test initial, nous ne les avons pas distingués. Nous l'illustrons dans les figures 4 et 5.

Le diagnostic local est basé sur l'étude a priori des réponses envisageables et, pour la compléter, sur les réponses anticipées recueillies lors d'expérimentations. L'analyse du corpus des réponses par des didacticiens des mathématiques a permis de réaliser une grille d'analyse. Cette méthode est adaptée pour permettre l'informatisation du diagnostic. Les deux logiciels PépiGen et Pépinière génèrent automatiquement les tâches ainsi que leur analyse en comparant les réponses de l'élève avec les différentes réponses anticipées.

2. *Le deuxième niveau : le diagnostic global individuel*

Le diagnostic global individuel s'effectue sur l'ensemble des dix exercices du test. Le système analyse les réponses de l'élève et calcule son profil cognitif grâce à une analyse transversale des différents codes récoltés sur toutes les réponses au test.

Pour construire le profil cognitif de l'élève, en croisant les approches cognitive et anthropologique, nous avons défini une référence caractérisée par trois composantes à partir de l'étude théorique initiale : l'Usage de l'Algèbre pour résoudre des problèmes (UA), la Traduction Algébrique avec la flexibilité pour traduire différents types de représentations (géométrique, figure, représentations graphiques, langage naturel) (codé TA) et le Calcul Algébrique avec l'habileté et l'adaptabilité des différents usages de l'algèbre (code CA). Pour chacune de ces trois composantes, une échelle avec différents niveaux a été élaborée, avec des critères spécifiques pour chaque niveau (Delozanne & al. 2005). Voici le résultat du diagnostic global individuel pour un élève en classe de 3ème classé en CA3-UA3-TA3 (figure 6). Cet élève donne peu de sens aux activités algébriques et n'utilise pas l'algèbre comme outil pour résoudre des problèmes.

Composantes	Caractéristiques	Repères
Calcul algébrique : avec peu de signification	Taux de réussite sur les questions techniques*	2 sur 12
	Taux de réussite sur l'interprétation des expressions algébriques*	7 sur 23
	Maîtrise du calcul algébrique	Défaillante
	Maîtrise des règles	Défaillante
	Interprétation des expressions	Défaillante
Usage de l'algèbre : non motivé et non compris	Taux de réussite sur les questions de mathématisation*	1 sur 9
	Maîtrise de l'outil algébrique	Défaillante
	Type de justification	Scolaire prééminente
Traduction algébrique : pour schématiser	Taux de réussite sur la mise en équation*	5 sur 24
	Maîtrise de la traduction algébrique	Insuffisante
	Traduction des relations mathématiques**	Abréviative

Figure 6 *– Profil cognitif d'un élève en classe de 3ème*

Pour transférer le diagnostic à d'autres niveaux scolaires, nous avons complété l'algorithme de calcul des profils en ajoutant une quatrième composante destinée à évaluer les différents usages du Calcul Numérique (codé CN). La composante CN a été créée pour prendre en compte que les connaissances algébriques se construisent à partir des connaissances numériques. C'est la raison pour laquelle les niveaux sur les échelles des composantes CA et CN se définissent de manière similaire. Ce test est en cours d'informatisation et nous n'avons pas encore de profils calculés automatiquement.

3. *Le troisième niveau : le diagnostic global collectif*

Les deux premiers niveaux de diagnostic sont individuels. Or, les enseignants ont davantage besoin d'identifier des groupes d'élèves dont les compétences en algèbre sont voisines pour mettre en place des stratégies de différenciation dans leur classe. Pour le troisième niveau de diagnostic, le logiciel PépiMep propose automatiquement trois groupes d'élèves (les groupes A, B et C) dont les profils cognitifs en algèbre sont proches (Grugeon-Allys & al. 2012). Ces groupes sont tout d'abord constitués en fonction du niveau de l'élève sur la composante « Calcul Algébrique » (CA). Les élèves du groupe A (CA1) donnent du sens au calcul algébrique et commencent à développer une pratique intelligente et contrôlée du calcul algébrique. Les élèves du groupe B (CA2) pratiquent un calcul algébrique peu contrôlé, souvent à l'aveugle, mobilisant de façon plus ou moins fréquente des règles fausses. Les élèves du groupe C (CA3) donnent peu de sens au calcul algébrique. Chaque groupe X est ensuite découpé en deux sous-groupes (X+ ou X-) selon le niveau de l'élève sur la composante « Usage de l'Algèbre » (UA). La figure 7 montre le résultat du diagnostic global collectif d'une classe de 3ème (14-15 ans) dont les 23 élèves sont répartis dans les groupes B+ (1 seul élève), B- (6 élèves) et C- (16 élèves). La référence que nous utilisons est établie pour la fin de la scolarité obligatoire (16 ans) ; c'est pourquoi, pour cette classe d'élèves plus jeunes (14-15 ans), il n'y a aucun élève dans le groupe A.

L'algorithme de calcul des groupes est identique pour tous les niveaux scolaires ; le transfert du diagnostic global collectif ne pose donc aucun problème.

Les trois groupes A, B et C peuvent correspondre, en première lecture, aux groupes des « bons, moyens, faibles » traditionnellement établis par les enseignants. Ils ne sont pas seulement caractérisés par des taux de réussite, des listes d'erreurs ou des capacités à travailler dans un contexte de remédiation local, mais aussi par des traits de plus haut niveau (par exemple un calcul peu contrôlé), donnant une vision globale de leur rapport à l'algèbre. Grâce à une analyse épistémologique, ces traits permettent d'organiser des activités différenciées adaptées aux besoins d'apprentissage des élèves sur une séquence complète d'enseignement. Ces informations permettent à l'enseignant d'organiser, si nécessaire, des reprises, des moments de travail de la technique, pour poursuivre la construction d'éléments techno-logico théoriques sur des savoirs anciens.

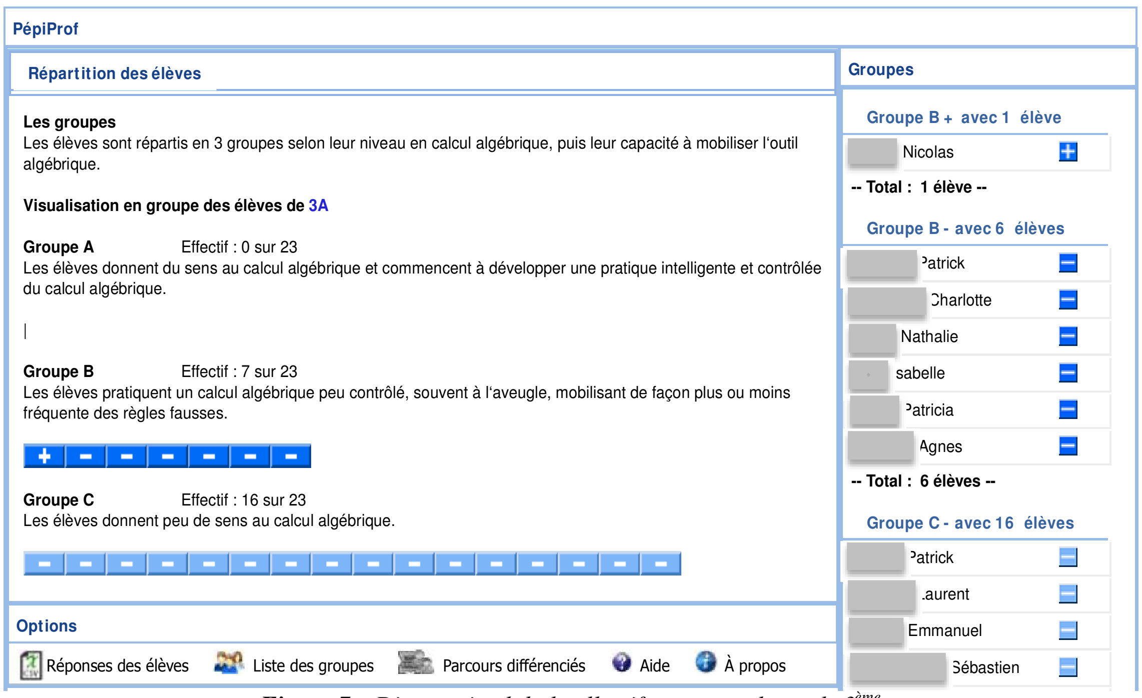


***Figure 7** – Diagnostic global collectif pour une classe de 3ème*

V. LES POTENTIALITES DES TESTS POUR REGULER L'ENSEIGNEMENT

La définition des profils et des groupes offre de réelles potentialités pour permettre aux enseignants de réguler leur enseignement en fonction des besoins de leurs élèves en algèbre. Pour les tests diagnostiques de niveau fin de 3ème / début de 2nde et début de 3ème, nous avons conçu un modèle de parcours d'enseignement différencié (Grugeon-Allys & al. 2012) qui prend appui sur les besoins d'apprentissage caractéristiques de chaque groupe. Les parcours sont conçus pour organiser une gestion de l'hétérogénéité au sein de la classe et non pour intervenir dans un dispositif de personnalisation de l'enseignement. Ainsi, chaque parcours est défini par un objectif d'enseignement et constitué de tâches, pour la plupart convoquant les mêmes types de tâches, qui sont « adaptées » en fonction des groupes issus du test. Le jeu sur les variables didactiques, l'intervention de registres de représentation sémiotiques spécifiques (Duval 1993), les aides apportées par l'enseignant, ou encore le découpage des énoncés, sont autant de variations possibles pour adapter les parcours aux besoins d'apprentissage des élèves. Par exemple, nous avons défini un parcours pour revenir sur le rôle de l'algèbre dans des problèmes de généralisation et de preuve afin de permettre aux élèves des groupes A-, B- et C- de redonner du sens à l'algèbre à travers la résolution de problèmes (Grugeon-Allys & al. 2012).

Dans le cadre d'un groupe IREM de l'Université Paris-Diderot, nous avons travaillé avec des enseignants de collège et de lycée qui ont mis en place les parcours d'enseignement différencié dans leurs classes. L'analyse des vidéos des séances de classe et des productions d'élèves recueillies a montré que l'appropriation du test et des parcours par les enseignants les avaient conduits à faire évoluer leurs pratiques en algèbre tant du point de vue des tâches proposées aux élèves et de leur gestion en classe que du point de vue de leur rapport à l'algèbre et à son enseignement (Pilet & al. 2013). Ainsi, les tests diagnostiques de niveau fin de $3^{\text{ème}}$ / début de 2^{nde} et de niveau début de $3^{\text{ème}}$ suivis par les parcours d'enseignement différencié ont permis à des enseignants d'organiser leur enseignement en fonction des besoins repérés des élèves.

VI. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Différentes études comparant le diagnostic *Pépite* à d'autres formes de diagnostic ont attesté que *Pépite* est fiable et valide, même pour les questions à réponses ouvertes (Delozanne & al. 2008, Delozanne & al. 2010).

Depuis 2011, nous avons implémenté sur LaboMep un test pour les élèves de $3^{\text{ème}}$ (14-15 ans) et deux tests pour les élèves de $3^{\text{ème}}$ / 2^{nd} (15-16 ans). La programmation informatique pour les questions à choix multiples (QCM) est plus facile que pour les questions à réponse ouverte. En effet, pour les QCM, l'analyse est robuste et générique. Pour les questions à réponses ouvertes, 10 à 15% des réponses ne sont pas analysées par le système en raison de la complexité des raisonnements algébriques mis en œuvre qui nécessiteraient des traitements spécifiques pour chaque type d'exercices. Nous avons réalisé un modèle de tâche diagnostique et nous avons conçu deux tests et leur analyse a priori : l'un pour le niveau $4^{\text{ème}}$ / $3^{\text{ème}}$ et l'autre pour le niveau $5^{\text{ème}}$ / $4^{\text{ème}}$. Nous sommes en train de les disséminer sur la plateforme LaboMep et prévoyons de procéder ensuite à des expérimentations.

A partir des fondements théoriques, nous avons défini une échelle de l'activité algébrique, qui permet de suivre l'évolution de la compétence algébrique à différents niveaux scolaires. La figure 8 permet de suivre l'évolution des compétences de 191 élèves qui ont passé les tests implémentés sur LaboMep. Cette figure montre que les compétences des élèves augmentent depuis le début de la classe de $3^{\text{ème}}$ jusqu'à la fin de la classe de 2^{nd}. Nous prévoyons d'étendre cette étude pour des élèves depuis la $5^{\text{ème}}$ jusqu'en seconde.

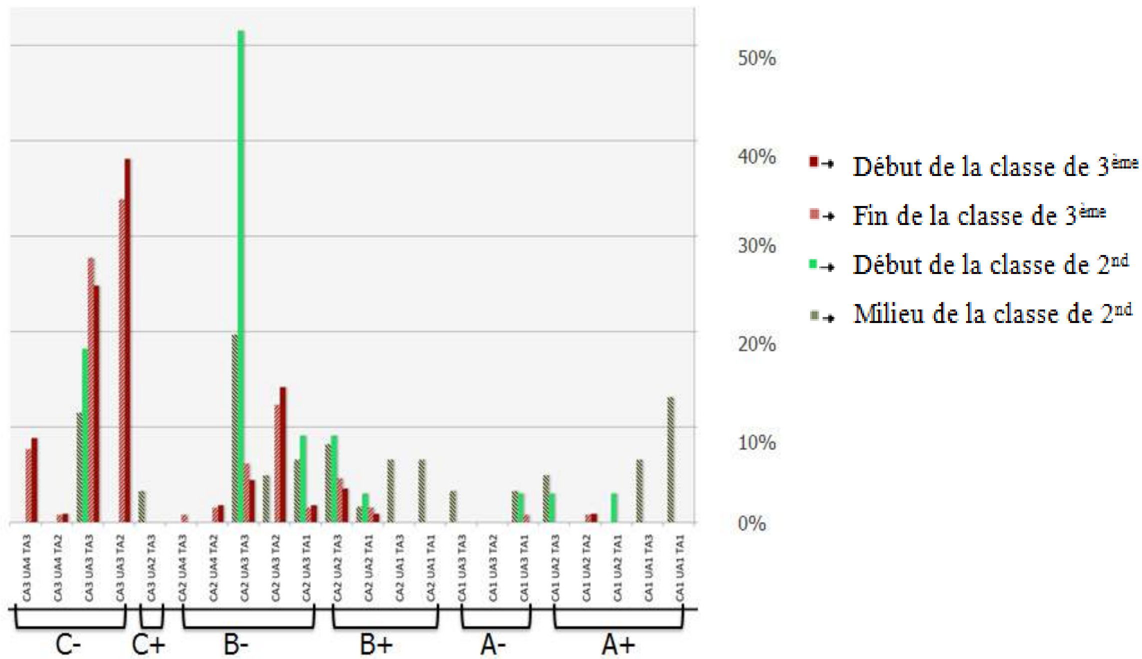
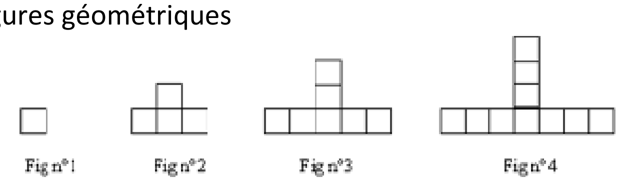


Figure 8 *– Diagnostic collectif global pour des élèves de $3^{ème}/2^{nd}$ (191 élèves)*

Quelles sont nos perspectives de recherche ? Nous envisageons d'étendre les outils fournissant automatiquement des tâches différenciées à des groupes d'élèves d'une classe en fonction des objectifs d'enseignement. Nous faisons l'hypothèse que, comme pour le transfert des tests, le modèle de parcours d'enseignement différencié est transférable à tous les niveaux scolaires du collège. Par une étude épistémologique, en prenant particulièrement en compte l'entrée dans la pensée algébrique (Pilet & al. 2013), nous allons identifier les objectifs d'enseignement à travailler pour chaque niveau scolaire. Ainsi, nous allons adapter les situations d'apprentissage visant à travailler les aspects épistémologiques des objets de l'algèbre introduits en $5^{ème}$ et souvent peu suffisamment explicités dans les programmes : sens des lettres dans les problèmes de généralisation, équivalences des expressions (Grugeon-Allys & al. 2012). Cette recherche est déjà engagée dans le cadre du projet LéA du collège Roger Marin du Gard[2].

Voici deux exemples de tâches de généralisation (figure 9 et figure 10). Plusieurs variables permettent d'adapter la tâche aux différents groupes : les schémas, les programmes de calcul, la présence d'outil (tableur).

Voici une suite de figures géométriques



1) Quel sera le nombre de carrés pour la figure numéro 5 et la figure numéro 10 ?
2) Quel sera le nombre de carrés pour la figure numéro 100 ?
3) Et dans le cas d'une figure de numéro quelconque ?

Figure 9 *– Production d'une expression générale*

2 http://ife.ens-lyon.fr/lea/le-reseau/les-differents-lea/college-martin-du-Gardl

<table>
<tr><td colspan="3">On donne les trois programmes de calcul suivants</td></tr>
<tr><td>Programme 1
- Choisir un nombre.
- Multiplier ce nombre par 4.
- Ajouter 3 au produit obtenu.</td><td>Programme 2
- Choisir un nombre.
- Multiplier ce nombre par 7.</td><td>Programme 3
- Choisir un nombre.
- Multiplier ce nombre par 4.
- Ajouter au produit obtenu le triple du nombre choisi.</td></tr>
<tr><td colspan="3">On se demande si les programmes sont équivalents.
1) Teste ces trois programmes de calcul avec plusieurs nombres. Tu peux utiliser une calculatrice, un tableur ou un grapheur. Que remarques-tu ?
2) Ecris les trois expressions littérales qui traduisent chaque programme de calcul.
3) Avec ces trois expressions, on peut écrire une égalité toujours vraie. Laquelle ? Justifie.</td></tr>
</table>

Figure 10 *– Equivalence d'expressions littérales*

REFERENCES

Artigue M., Grugeon B., Assude T., Lenfant A. (2001) Teaching and Learning Algebra: approaching complexity trough complementary perspectives. In Chick H., Stacey K., Vincent J. and Vincent J. (Eds.) The future of the Teaching and Learning of Algebra, Proceedings of 12th ICMI Study Conference. Australia: University of Melbourne.

Artigue M., Gueudet G. (2008) Ressources en ligne et enseignement des mathématiques, Université d'été de mathématiques, Saint-Flour. http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/UE2008/prog_UE_2008.htm

Chenevotot F., Grugeon B., Delozanne E. (2011) Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009*, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation (827842). Dakar, Sénégal, du 5 au 10 avril 2009.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-265.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* (19), 43-75.

Delozanne E., Vincent C., Grugeon B., Gélis J.-M., Rogalski J., Coulange L. (2005) From errors to stereotypes: Different levels of cognitive models in school algebra, In Richards G. (Ed.) *Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education 2005* (pp. 262-269). Chesapeake, VA: AACE.

Delozanne É., Prévit D., Grugeon B., Chenevotot F. (2008) Automatic Multi-criteria Assessment of Open-Ended Questions: a case study in School Algebra. *Proceedings of ITS'2008*, 101-110.

Delozanne E., Prévit D., Grugeon-Allys B., Chenevotot-Quentin F. (2010) Vers un modèle de diagnostic de compétence. *Revue Techniques et Sciences Informatiques*, 29(8-9 / 2010), 899-938.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7.2, 5-32.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 37-65.

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 17.2, 167-210.

Grugeon-Allys B., Pilet J., Chenevotot-Quentin F., Delozanne E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.-P., Dorier J.-L., Robert A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (pp. 137-162). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Frank K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762).

Pilet, J., Chenevotot, F., Grugeon, B., El-Kechaï, N., Delozanne, E. (2013) Bridging diagnosis and learning of elementary algebra using technologies. *In proceedings of the Eighth Congress of the European society for Research in Mathematics Education CERME8* (pp. 2725-2735). Antalya, Turquie.

Pilet, J., El-Kechaï, N., Delozanne, É., Grugeon-Allys, B., Chenevotot-Quentin, F. (2013) Séances différenciées en algèbre élémentaire : une étude de cas. In Choquet C. et al. (Eds.) *Actes de la conférence EIAH2013* (pp. 5-16)*,* Toulouse, du 29 au 31 mai 2013. IRIT Press 2013 : Toulouse,.

Vergnaud G., Cortes A., Favre-Artigue P. (1988) Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. In Vergnaud G., Brousseau G., Hulin M. (Eds) Didactique et Acquisition des Concepts Scientifiques. *Actes du Colloque de Sèvres*, Mai 1987 (pp. 259-279).

Annexe
Extraits des programmes français d'algèbre au collège (2008)

VII. CLASSE DE CINQUIEME (12 – 13 ANS)

1 Organisation et gestion de données, fonctions
Objectifs :

La résolution de problèmes a pour objectifs
• d'affermir la maîtrise des principaux raisonnements qui permettent de traiter les situations de proportionnalité,
• d'initier les élèves au repérage sur une droite graduée ou dans le plan muni d'un repère,
• d'acquérir et interpréter les premiers outils statistiques (organisation et représentation de données, fréquences) utiles dans d'autres disciplines et dans la vie de citoyen, de se familiariser avec des écritures littérales.

Connaissances	Capacités	Commentaires
1.2. Expressions littérales [Thèmes de convergence]	Utiliser une expression littérale. *Produire une expression littérale.*	De nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine grandeurs et mesures, conduisent à utiliser des expressions littérales (formules).

2 Nombres et calculs
Objectifs

La résolution de problèmes a pour objectifs :
• d'entretenir et développer la pratique du calcul mental, du calcul à la main et l'utilisation raisonnée des calculatrices ;
• d'assurer la maîtrise des calculs d'expressions numériques sur les nombres décimaux positifs et prévoir l'ordre de grandeur d'un résultat ;
• d'initier aux nombres relatifs et aux calculs sur les nombres en écriture fractionnaire ;
de familiariser les élèves aux raisonnements conduisant à des expressions littérales ;
• d'apprendre à choisir et interpréter l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation, • d'apprendre à effectuer des transformations simples d'écriture ;
• d'initier à la notion d'équation.

2.1 Nombres entiers et décimaux positifs : calcul, divisibilité sur les entiers

Connaissances	Capacités	Commentaires
Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.	- Sur des exemples numériques, utiliser les égalités $k(a+b)=ka+kb$ et $k(a-b)=ka-kb$ dans les deux sens. - * *Sur des exemples littéraux, utiliser les égalités* $k(a+b)=ka+kb$ *et* $k(a-b)=ka-kb$ *dans les deux sens.*	- Dans le cadre du socle commun il convient de privilégier l'exploitation de cette propriété sur des exemples numériques. *L'intégration des lettres dans ce type d'égalités est une difficulté qu'il faut prendre en compte. Elle s'appuie sur des situations empruntées aux cadres numérique ou géométrique.*

2.4 Initiation à la notion d'équation

2.4. *Initiation à la notion d'équation*	- **Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.*	Une attention particulière est apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique. *Les programmes du collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens* **La classe de cinquième correspond à une étape importante avec le travail sur des égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner.* La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun.

VIII. CLASSE DE QUATRIEME (13 – 14 ANS)

2 Nombres et calculs

La pratique du calcul numérique (exact ou approché) sous ses différentes formes en interaction (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) permet la maîtrise des procédures de calcul effectivement utilisées, l'acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres ainsi que la réflexion et l'initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre suivant la situation.

Le calcul littéral qui a fait l'objet d'une première approche en classe de cinquième, par le biais de la transformation d'écritures, se développe en classe de quatrième, en veillant à ce que les élèves donnent du sens aux activités entreprises dans ce cadre, en particulier par l'utilisation de formules issues des sciences et de la technologie.

Objectifs

La résolution de problèmes a pour objectifs :
• d'entretenir et d'enrichir la pratique du calcul mental, du calcul à la main et l'utilisation raisonnée des calculatrices ;
• d'assurer la maîtrise des calculs sur les nombres relatifs et les expressions numériques ;
• de conduire les raisonnements permettant de traiter diverses situations (issues de la vie courante, des différents champs des mathématiques et des autres disciplines, notamment scientifiques) à l'aide de calculs numériques, d'équations ou d'expressions littérales ;
• de savoir choisir l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation.

2.2 Calcul littéral

Connaissances	Capacités	Commentaires
2.2. Calcul littéral Développement.	- Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.	L'apprentissage du calcul littéral est conduit très progressivement à partir de situations qui permettent aux élèves de donner du sens à ce type de calcul. Le travail proposé s'articule autour de trois axes : - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; - *utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers* ; - *utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).*
	- Réduire une expression littérale à une variable, du type : $3x - (4x - 2)$, $2x^2 - 3x + x^2$...	*Les situations proposées doivent exclure tout type de virtuosité et viser un objectif précis (résolution d'une équation, gestion d'un calcul numérique, établissement d'un résultat général).*
	- Développer une expression de la forme $(a + b)(c + d)$.	*L'objectif reste de développer pas à pas puis de réduire l'expression obtenue. Les identités remarquables ne sont pas au programme.* *Les activités de factorisation se limitent aux cas où le facteur commun est du type a, ax ou* x^2.
Résolution de problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.	*- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.*	*Les problèmes issus d'autres parties du programme et d'autres disciplines conduisent à l'introduction d'équations et à leur résolution. À chaque fois sont dégagées les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.* Les élèves, dans le cadre du socle commun, peuvent être amenés à résoudre des problèmes se ramenant à une équation du premier degré sans que la méthode experte soit exigible.

IX. CLASSE DE TROISIEME (14 – 15 ANS)

1 Organisation et gestion de données, fonctions

1.2 Fonction linéaire, fonction affine.

Connaissances	Capacités	Commentaires
Coefficient directeur de la droite représentant une fonction linéaire.	*- Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.*	type « je multiplie par *a* ». *Cette formulation est reliée à* $x \mapsto ax$. Pour des pourcentages d'augmentation ou de

2 Nombres et calculs

La pratique du calcul numérique (exact ou approché) sous ses différentes formes en interaction (calcul mental, calcul à la main, calcul à la machine ou avec un ordinateur) a les mêmes objectifs que dans les classes antérieures :
- maîtrise des procédures de calcul effectivement utilisées ;
- acquisition de savoir-faire dans la comparaison des nombres ;
- réflexion et initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre suivant la situation.

Pour le calcul littéral, l'un des objectifs visés est qu'il prenne sa place dans les moyens d'expression des élèves, à côté de la langue usuelle, de l'emploi des nombres ou des représentations graphiques. C'est en développant notamment des activités où le calcul littéral présente du sens et où il reste simple à effectuer que l'on amène l'élève à recourir à l'écriture algébrique lorsqu'elle est pertinente.

Objectifs

La résolution de problèmes a pour objectifs
- d'entretenir le calcul mental, le calcul à la main et de l'usage raisonnée des calculatrices,
- d'assurer la maîtrise des calculs sur les nombres rationnels,
- d'amorcer les calculs sur les radicaux et de poursuivre les calculs sur les puissances,
- de familiariser les élèves aux raisonnements arithmétiques,
- de compléter les bases du calcul littéral et d'en conforter le sens, notamment par le recours à des équations ou des inéquations du premier degré pour résoudre des problèmes,
- de savoir choisir l'écriture appropriée d'un nombre ou d'une expression littérale suivant la situation.

2.3 Ecritures littérales

Connaissances	Capacités	Commentaires
Factorisation.	*- Factoriser des expressions algébriques dans lesquelles le facteur est apparent.*	Les travaux se développent dans trois directions : - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ; *- utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes ;* *- utilisation pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique).* *Les activités visent la maîtrise du développement ou de la factorisation d'expressions simples.*
Identités remarquables.	- Connaître les identités: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *- Les utiliser dans les deux sens sur des exemples numériques ou littéraux simples.*	Dans le cadre du socle commun, les élèves connaissent l'existence des identités remarquables et doivent savoir les utiliser pour calculer une expression numérique mais aucune mémorisation des formules n'est exigée.

2.4 Equations et inéquations du premier degré

Connaissances	Capacités	Commentaires
2.4. Équations et inéquations du premier degré *Problèmes du premier degré : inéquation du premier degré à une inconnue, système de deux équations à deux inconnues.*	*- Mettre en équation un problème.* *- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques ; représenter ses solutions sur une droite graduée.* *- Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.*	La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun. Néanmoins, les élèves peuvent être amenés à résoudre des problèmes du premier degré (méthode arithmétique, méthode par essais successifs, …).
Problèmes se ramenant au premier degré : équations produits.	*- Résoudre une équation mise sous la forme A(x).B(x) = 0, où A(x) et B(x) sont deux expressions du premier degré de la même variable x.*	*L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est hors programme.*

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LE JEU DANS LES MOYENS D'ENSEIGNEMENT ROMANDS À TRAVERS LES YEUX DE DEUX ENSEIGNANTES.

Sylvia COUTAT*

Résumé – Cette proposition présente une analyse de deux pratiques enseignantes relativement à la résolution de problème en primaire à partir d'une même ressource. Après avoir présenté le contexte de l'étude, nous partagerons notre analyse de la tâche étudiée. La réalisation en classe de la tâche ainsi que les intentions et impressions recueillies des enseignantes observées nous renseignera sur l'exploitation du potentiel de la tâche relativement aux informations mises à dispositions des enseignantes par la ressource.

Mots-clefs : résolution de problème, primaire, pratiques enseignantes, analyse de manuels, jeu

Abstract – This proposal presents an analysis of two teaching practices about problem solving in primary scholl with the same manual. After presenting the context of the study, we will share our analysis of the activity observed with two teachers. The observation of the realization in the class as well as the intentions and impressions gathered observed teachers will inform us about the use of the potential of the activity in relation to information made available by the teachers manual.

Keywords: problem solving, primary school, teaching practices, manual analysis, game

I. INTRODUCTION

Cette contribution présente une étude sur l'appropriation d'une tâche des moyens d'enseignement suisses romands par deux enseignantes, elle s'insère dans le deuxième pôle du groupe de travail 6 : Ressource et développement professionnel des enseignants. Nous nous appuyons sur les travaux de Daina (2013) qui analyse l'usage des ressources suisses romandes. Nous présentons dans un premier temps brièvement la ressource suisse romande et ses particularités, pour ensuite se focaliser sur une tâche et son analyse à travers l'étude des stratégies et objectifs d'apprentissage envisageables. Nous exposerons notre méthodologie de recherche, qui s'inspire de la méthodologie de Daina (2013) et notre problématique en lien avec la tâche présentée. Enfin nous présenterons quelques résultats d'analyses issus de notre observation de la réalisation en classe de la tâche par deux enseignantes.

* Université de Genève – Suisse – Sylvia.Coutat@unige.ch

Coutat, S. (2015) Le jeu dans les moyens d'enseignement romands à travers les yeux de deux enseignantes. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT6, pp. 583-596.

II. SPECIFICITES DES MOYENS D'ENSEIGNEMENTS POUR LA SUISSE ROMANDE

1. Dans leur globalité

Précisons tout d'abord que les moyens d'enseignements pour le primaire ont été conçus entre 1996 et 2006 (suivant les degrés) avec le plan d'étude de l'époque. Chaque degré possède sa ressource de la 1ère primaire (1P) jusqu'à la 6ième primaire (6P) (élèves de 6 à 12 ans). Nous renvoyons à Marechal-Vendeira (2010) et Daina (2013) pour des analyses plus poussées de ces ressources. Nous retiendrons que les enseignants ne possèdent que cette ressource officielle, que les tâches proposées sont sous forme de situation-problème avec une conception constructiviste de l'enseignement/apprentissage. Un nouveau plan d'étude romand[1] est en place depuis 2010 il concerne la première année de l'école[2], appelée 1ière HarmoS (élèves de 4 ans) jusqu'à la dernière année du secondaire 1, classe de 11ième. De nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques pour le primaire sont en cours d'élaboration.

Pour chaque degré de 1P à 4P, l'enseignant dispose d'un livre du maître, d'un fichier élève, d'un livre de l'élève et d'un fichier de classe. Le livre du maitre est présenté comme un « ouvrage ressource » qui est un recueil de situations-problèmes commentées réparties en 7 modules, chaque module ayant un objectif d'apprentissage spécifique. Le module 3 par exemple propose des tâches pour connaitre l'addition, le module 7 pour travailler sur la mesure. Pour chaque module, les auteurs présentent leurs intentions didactiques. Pour chaque tâche l'enseignant dispose de quelques éléments d'analyse par exemple sur la gestion de classe, quelques stratégies, des éléments pour la mise en commun, des prolongements possibles, voire des variantes envisageables. Tous ces éléments ne sont pas systématiquement proposés. Les tâches ne doivent pas toutes être travaillées en classe, c'est à l'enseignant de construire sa propre progression. Enfin, le livre du maitre est complété de commentaires didactiques pour les degrés 1P à 4P (Gagnebin, Guignard, Jaquet (1998)). Ces commentaires ont pour objectifs d'éclairer l'enseignant sur les intentions des auteurs pour ces 4 années d'enseignement. Ainsi les modules sont repris avec une analyse plus globale des intentions et objectifs d'apprentissage envisageables.

2. Le module Recherche

Pour la suite de notre étude nous nous focalisons sur le module 1 : « Des problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement ». Ce module est décomposé en deux champs. Le champ A de problèmes vise à apprendre à sélectionner des informations, à comprendre des énoncés. Le champ B a pour objectif d'apprendre à développer des stratégies de recherche. Chaque champ possède ses propres tâches, cependant les auteurs insistent sur la corrélation entre l'organisation et la sélection de données et l'élaboration de stratégies. Les intentions de chaque champ sont exemplifiées à l'aide de certaines tâches du module.

La résolution de problèmes, dans les commentaires didactiques, est abordée à travers trois catégories de problèmes : situation-problème, problème ouvert et jeu. La situation-problème est différenciée du problème ouvert par plusieurs aspects que l'on retrouve dans la littérature classique (Charnay (1992), Georget (2009), Coppé & Houdement (2010)). Nous retiendrons principalement qu'une situation-problème vise l'acquisition d'une nouvelle connaissance alors que le problème ouvert s'oriente vers une initiation à la recherche. Ces deux catégories

---

[1] PER : http://www.plandetudes.ch.

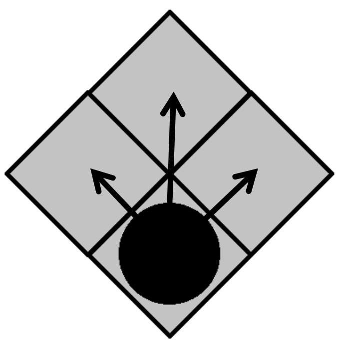
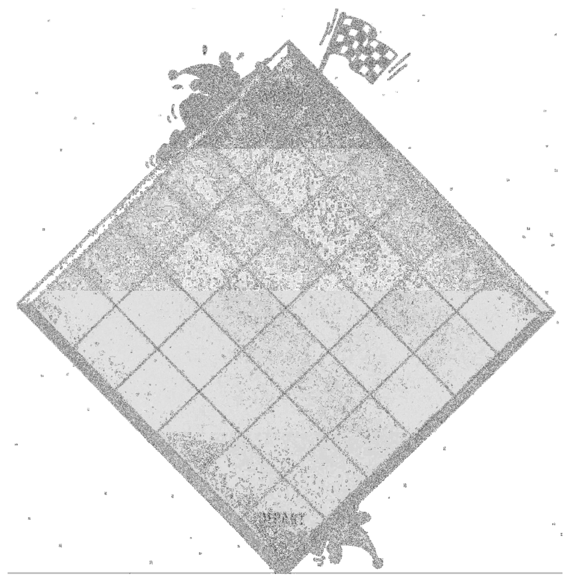
[2] Voir annexe A pour les correspondances degrés de classe et âge des élèves.

de problèmes sont complétées par le jeu. La résolution de problème à travers le jeu vise des attitudes et des recherches de stratégies en s'appuyant sur le caractère ludique qui caractérise ce type de problème. Les jeux proposés dans les moyens d'enseignement romands reprennent certaines caractéristiques des situations-problèmes et problèmes ouverts, ils ont cependant aussi leurs spécificités à travers le caractère ludique, l'aspect répétitif, et l'enjeu qui participe à rendre la tâche abordable.

III. PRESENTATION DE L'ETUDE

1. La tâche

La tâche « Grimpe » (Danalet, Dumas, Studer, & Villars-Kneubühler (1999)) est issue des Moyens d'enseignement romands de mathématiques pour le degré 4P (classe de 6^{ième} HarmoS). Cette tâche appartient au le module 1, champ B, catégorie de problème jeu.

<table>
<tr>
<td>Règles du jeu pour deux personnes : placer le jeton sur la casse « Départ ». À tour de rôle chaque joueur déplace le jeton d'une case, en montant ; le jeton ne peut se déplacer que comme ceci :

Le but est d'être celui qui amène le jeton sur la case « arrivée ».</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Fiche élève et plan de jeu

Tâche : chercher une stratégie gagnante dans un jeu de déplacement simple.

Mise en commun : après plusieurs parties, dès que les élèves gagnent à coup sûrs, ils comparent leurs stratégies et en justifient l'efficacité. Si nécessaire, ils déterminent les cases qui sont, à coup sûr, gagnantes ou perdantes.

Variables : matériel, l'activité est reprise en un jeu plus petit, par exemple, 4x4 cases. Ainsi, les élèves qui n'anticipent que lorsque la fin de la partie est proche seront amenés à analyser plus systématiquement les possibilités qui s'offrent à eux.

Fiche professeur dans le livre du maitre

Dans les intentions didactiques données pour les tâches du champ B les auteurs encouragent les stratégies d'essais-erreur, de conjecture, d'anticipation.

2. *Le cadre théorique d'analyse et problématique*

Cette étude de l'usage de la ressource suisse romande pour la résolution de problème utilise plusieurs références théoriques. Tout d'abord Charnay (1992) nous permet d'analyser la tâche choisie du point de vue de la démarche de recherche. L'analyse de la tâche s'appuie sur la théorie des situations de Brousseau (1998) avec une analyse des variables didactiques, des stratégies et des objectifs envisageables. Cela nous permet de nous interroger sur le statut d'une phase d'institutionnalisation pour un tel problème et ainsi sur les connaissances mathématiques que les élèves pourraient acquérir. Afin d'identifier comment les enseignants s'approprient cette ressource, nous utilisons le cadre de la double approche de Robert et Rogalski (2002). L'analyse des séances observées s'appuie sur découpage en épisodes selon l'organisation sociale du travail. Ce découpage est ensuite analysé à travers les différents échanges entre les élèves et l'enseignante pour déterminer la composante médiative de l'enseignante (Robert & Rogalski, 2002). Nous analysons les pratiques de deux enseignantes réalisant la tâche «Grimpe». Chaque enseignante est brièvement questionnée avant la réalisation en classe de la tâche, cela dans le but de connaitre leurs intentions et définir quelques bribes de leur composante cognitive. Un deuxième entretien suit la réalisation en classe de la tâche afin de recueillir leur impressions à chaud sur le déroulement de la séance.

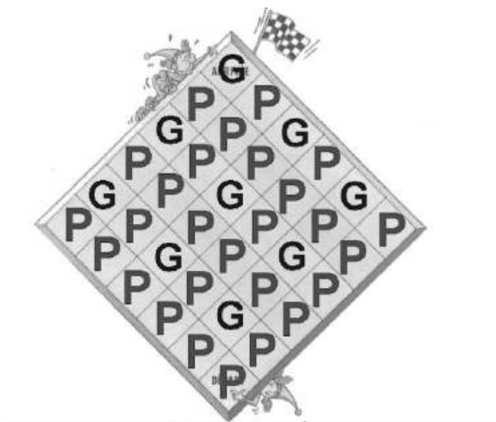
Les enseignantes choisies pour cette étude ont chacune un profil spécifique. Marie est une enseignante de primaire chevronnée ayant plus de quinze années d'expérience dans l'enseignement. Elle collabore activement à des groupes de recherche en didactique des mathématiques et des sciences. Tatiana vient d'obtenir son diplôme d'enseignante pour l'école primaire et vit depuis quelques mois seulement la responsabilité entière d'une classe. Marie et Tatiana enseignent toutes les deux dans le même établissement et se partagent les deux seules classes de 6$^{\text{ième}}$ HarmoS. Marie étant la plus expérimentée, elle est la meneuse du binôme.

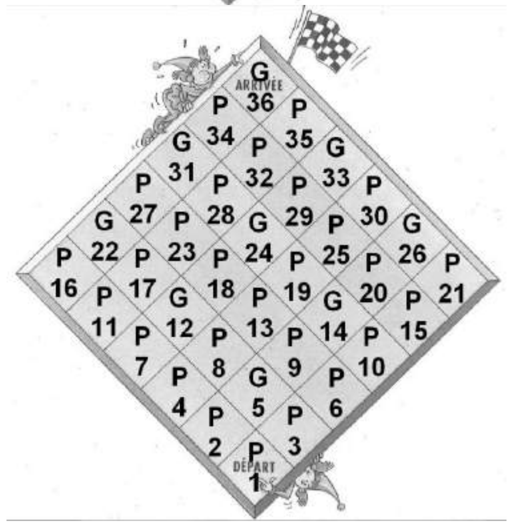
3. *Analyse de la tâche*

La description de la tâche dans le livre du maitre donne des informations sur la mise en commun et les variables didactiques, peu d'éléments apparaissent sur les différentes stratégies ou un déroulement envisageable. La mise en commun proposée se focalise sur la comparaison des stratégies pour gagner découvertes par les élèves. L'identification des cases gagnantes ou perdantes est une possibilité d'exploitation sans être une priorité. Aucune information sur une stratégie gagnante n'est proposée dans le livre du maitre. Les caractéristiques des cases (gagnantes ou perdantes) ne sont pas données. Nous pouvons préciser que les enseignants n'ont jamais la solution des tâches. Les auteurs considèrent que la résolution de la tâche fait partie de la tâche d'appropriation par l'enseignant. En ce qui concerne les variables didactiques, les auteurs proposent de réduire la taille du jeu dans le but de rendre plus accessible une analyse systématique des possibilités.

De notre point de vu, la résolution de cette tâche de type jeu s'appuie sur une posture scientifique. Elle a toute sa place dans un module de problèmes pour apprendre à conduire un raisonnement car les différentes étapes de résolution peuvent être rapprochées de celle du chercheur en mathématiques. Dans un premier temps l'élève accumule un ensemble d'observations, obtenues par des parties successives. Ces observations lui permettent de produire des conjectures, qui seront testées par essai-erreur, étude de l'ensemble des choix possibles ou chainage arrière. Les conjectures validées, peuvent être réinvesties sur l'ensemble du plan de jeu pour identifier la stratégie gagnante du jeu, c'est à dire l'ensemble des cases gagnantes.

Résolution :





Pour gagner au jeu, il faut commencer en déplaçant le jeton vers la case du haut, puis déplacer le jeton sur les cases « G » du plateau (« G » pour gagnante).

Pour trouver les cases gagnantes du plateau de jeu, une stratégie consiste à jouer la partie à l'envers. La dernière case gagnante du jeu est la case « Arrivée », case 36. Les cases qui l'entourent sont des cases perdantes. En effet, lorsque le joueur amène le jeton sur une de ces cases (cases 32, 34, 35), il offre la victoire à son adversaire qui ne peut que déplacer le jeton sur la case « Arrivée ».

Ensuite il est possible de restreindre l'analyse du plateau de jeu en se focalisant sur une des deux bandes obliques supérieurs des côtés du plateau, cases 16-22-27-31 ou cases 21-26-30-33. Sur ces bandes, un seul déplacement du jeton est possible, ce qui restreint les possibilités de déplacement, de plus ces deux bandes sont symétriques l'une de l'autre. Ainsi les deux cases perdantes 34 et 35 sont précédées, dans le déroulement du jeu, par des cases gagnantes, ce qui donne cases 31 et 33 gagnantes. Ce raisonnement est réitéré pour les autres cases de chaque bande, ce qui donne une alternance de cases gagnantes avec des cases perdantes.

Il est possible maintenant de commencer à étudier les cases intérieures du plateau, toujours en commençant par le haut du plateau. Les cases qui collent par le bas les cases gagnantes identifiées, sont des cases perdantes. Par exemple la case 31 est une case gagnante et les cases 27-23 et 28 sont des cases perdantes. En effet si un joueur place le jeton sur l'une de ces trois cases, le joueur adverse pourra déplacer le jeton sur la case 31 qui est une case qui lui assure la victoire. Ce raisonnement est reproduit pour les cases 33-22 et 26. Nous continuons l'étude des cases en partant du haut du plateau ce qui nous amène à la case 24. Lorsqu'un joueur amène le jeton sur la case 24, son adversaire ne peut déplacer le jeton que sur les cases 28-32 ou 29 qui sont trois cases perdantes. On en conclut alors que la case 24 est une case gagnante et que les cases précédentes, 18-13 et 19 sont des cases perdantes. On réitère ce raisonnement pour les cases 12 et 14, puis pour la case 5. On peut donc en conclure que pour gagner au jeu il faut commencer et déplacer le jeton sur la case 5, puis se déplacer sur les cases « G ».

4. *Démarches vs stratégies*

Dans le processus de recherche, les élèves travaillent sur la découverte d'une stratégie gagnante du jeu. Cette stratégie repose sur l'identification de cases gagnantes et de cases perdantes. Une institutionnalisation portant sur les caractéristiques des cases du plateau de jeu ne présente pas d'intérêt comme savoir de classe. En effet un tel savoir n'est réutilisable que pour le jeu «Grimpe». Cependant pour trouver ces cases, les élèves passent par différentes étapes qui, comme nous venons de le présenter, peuvent se rapprocher d'une posture scientifique. Ces étapes comme l'observation, la pose de conjectures, les essais-erreurs, la validation par l'étude systématique des choix possibles peuvent faire l'objet d'une institutionnalisation. En effet ces éléments de recherche peuvent être reproduits dans d'autres jeux ou dans d'autres problèmes de recherches. Afin de distinguer les connaissances relatives au jeu exclusivement, comme les caractéristiques des cases, des connaissances relatives à une posture de chercheurs nous utiliserons le terme de *stratégies* de recherche en référence aux connaissances du jeu et *démarches* de recherche en référence aux connaissances liées à une posture de recherche. Nous reprenons la terminologie utilisée dans l'introduction du module 1. «Grimpe» n'est donc pas un simple jeu de plateau et peut permettre la mise en évidence de démarches de recherche qui peuvent être institutionnalisées et réinvesties dans d'autres tâches mathématiques. Ces éléments relatifs à la démarche de recherche ne sont pas explicitement associés à des tâches proposées dans le livre du maitre. Pour « Grimpe » le livre du maitre propose l'anticipation et l'analyse systématique des possibilités qui peuvent être associées à des démarches, cependant ces démarches ne sont pas contextualisées pour la tâche « Grimpe ».

IV. ANALYSE DES SCENARIOS OBSERVES

L'analyse de la mise en œuvre de « Grimpe » en classe s'appuie sur l'observation de Marie et Tatiana. Nous présentons quelques observations et analyses des deux enseignantes. Pour rappel la séance est découpée en épisodes selon l'organisation sociale du travail. Nous focalisons notre analyse sur les épisodes qui contiennent des moments collectifs. En effet, les épisodes de recherches en petits groupes offrent peu d'éléments exploitables du fait du manque de dialogues. Pour chaque épisode étudié, l'analyse des interactions entre élèves et/ou enseignants s'intéresse à distinguer les interactions qui concernent les stratégies (propre au jeu) de celles qui concernent les démarches (propre à la démarche de recherche). Ces analyses ont pour but de définir les savoirs exposés en classe. Lorsque les savoirs exposés sont définit, on s'intéresse aux modalités de travail afin d'identifier la part de contribution des élèves et de l'enseignant dans l'apprentissage visé. Enfin l'analyse des épisodes est complétée par l'étude des aides apportées par l'enseignant, à l'échelle de l'épisode et de la séance.

1. Tatiana

Avant de réaliser la tâche, nous avons interrogé Tatiana sur ces intentions relativement à la tâche. Tout d'abord Tatiana nous informe qu'elle n'a pas choisi elle-même la tâche mais a suivi sa collègue Marie, bien plus expérimentée. Elle n'a jamais travaillé sur « Grimpe » même dans sa formation. Pour préparer sa séance, Tatiana a regardé les objectifs généraux du champ « Apprendre à développer des stratégies de recherche » auquel appartient « Grimpe ». Selon elle, ces objectifs n'étant pas dans le (nouveau) Plan d'Étude Romand, elle n'a pas utilisé ce dernier comme aide pour mieux cerner les attentes de la tâche. Elle a identifié des cases gagnantes, d'autres perdantes, d'autres gagnantes et perdantes. Voici son plan global de la leçon :

- Lecture de la règle du jeu, reformulation (manque d'autonomie des élèves)
- Travail par 2 : 20 mn de jeu, trouver des stratégies et anticiper
- Mise en commun en proposant aux élèves de donner des astuces, des stratégies, les cases où l'on gagne à tous les coups.
- Travail par 2
- Institutionnaliser le fait qu'il faut anticiper

Tatiana nous confie qu'elle ne réalise pas systématiquement des institutionnalisations par manque de temps. Elle se justifie par une classe très (trop) active et difficile à gérer. Les tâches comme « Grimpe » l'effraient un peu car elle doute de pouvoir garder les élèves concentrés sur le jeu et elle ne sait pas vraiment quoi institutionnaliser.

Tatiana reprend la terminologie du livre du maitre (anticiper), sans faire de référence à une stratégie gagnante. Elle s'appuie sur les éléments de mise en commun donnés par les auteurs, introduit l'anticipation comme connaissance à institutionnaliser sans donner d'exemples où l'anticipation pourra émerger. Le flou volontaire du livre du maitre se retrouve dans le discours de l'enseignante. Si ce flou se justifie dans le livre du maitre il est plutôt questionnable chez une enseignante qui est sur le point de réaliser la tâche dans sa classe. Il est aussi possible que le projet de Tatiana soit plus élaboré que le projet qu'elle nous livre. Cependant devant son angoisse apparente nous avons prolongé la discussion pour qu'elle explicite des objectifs plus concrets. Nous avons tout d'abord résolu ensemble la tâche, puis nous avons considéré que l'important était que les élèves argumentent leurs propositions en utilisant des justifications autour de l'étude des choix possibles et l'utilisation des cases déjà analysées (mettre en œuvre un chainage arrière). Enfin nous avons défini conjointement le scénario suivant :

- Consigne (5mn)
- Moment de jeu à deux (15mn) objectif : accumuler des observations, des parties gagnantes et perdantes.
- Moment collectif pour le partage des observations (5 – 10 mn)
- Moment de jeu à deux (10mn) objectif : valider ou invalider certaines observations et identifier comment gagner.
- Bilan sur les démarches (chainage arrière et étude des choix possibles) (15mn maximum)

Tatiana a lancé sa classe sur « Grimpe » quelques minutes après notre discussion. Le scénario mis en œuvre reprend assez fidèlement le scénario issu de notre échange. Pour chaque épisode (annexe B) nous spécifions les consignes annoncées par Tatiana afin d'identifier quelles sont ses attentes. Dans le premier moment collectif les élèves proposent des caractéristiques de cases (perdantes ou gagnantes) et des parcours pour gagner. Parfois les parcours servent de justifications, parfois les parcours sont donnés sans conclusion explicite. L'enseignante recueille les propositions des élèves sans les valider. Elle précise à plusieurs reprises que les élèves auront encore un temps de travail pendant lequel ils pourront « tester » ces propositions. Dans ce premier moment collectif quelques stratégies propres au jeu émergent à travers l'énonciation parfois justifiée de propriétés de cases (gagnante ou perdante). L'enseignante se dégage de responsabilités de validations en laissant les éventuelles validations émergées des échanges entre élèves. Elle reformule éventuellement certaines propositions.

Dans le deuxième moment collectif, les élèves travaillent davantage sur des caractéristiques de cases (gagnante ou perdante). Les justifications sont parfois soutenues par l'enseignante. Les outils de justifications utilisés sont :

- des simulations de parties « si je mets le jeton ici, où est-ce que tu joues ? » qui pourrait être rapprochées d'une démarche d'essai-erreur ou d'étude des choix possibles.

- le voisinage des cases perdantes ou gagnantes : autour d'une case gagnante, les cases sont perdantes, après une case perdante, la case est gagnante (justification pas toujours efficace)

- l'alternance gagnant-perdant sur les bandes des bords supérieurs (cases 15 à 36 et 21 à 36), lié à la propriété des bandes obliques supérieurs (une seule direction possible)
- la symétrie du plan de jeu (lorsque la caractéristique d'une case est trouvée on peut l'appliquer sur la case symétrique par rapport aux à l'axe vertical du plan de jeu).

Ces outils de validation sont explicités ponctuellement au cours du déroulement de la séance, ils ne sont pas repris en fin de séance.

Des démarches apparaissent dans la séance comme le chainage arrière ou l'étude des différents choix possibles et essais-erreurs. Ces démarches ne sont pas explicitées ni reprises en fin de cours.

Une fois la séance terminée Tatiana nous a fait part de ces impressions « à chaud ». Elle est plutôt satisfaite de sa séance. Pour elle les élèves sont restés investis dans leur tâche jusqu'à identifier la première gagnante, la case 5. Elle pense que les élèves ont surement appris quelque chose, mais pas tous la même chose. Elle nous fait part de quelques difficultés chez les élèves comme le manque d'anticipation, des coups au bol, des difficultés dans la verbalisation. Si elle devait refaire « Grimpe » elle chercherait la possibilité de prendre des notes sur plusieurs grilles afin de conserver une mémoire des parties. Nous avions échangé sur ce point dans l'entretien réalisé juste avant la séance.

Il nous semble que pour cette séance, les élèves ont été confrontés aux stratégies et aux démarches. La position de médiatrice de Tatiana au cours des échanges permet un bon investissement des élèves dans la tâche et dans l'activité de justification. Tatiana reste cependant disponible pour soutenir les formulations des élèves. Ces postures de validations ne sont pas explicitées et ne peuvent, de notre point de vu, être décontextualisés. Ainsi la composante médiative de Tatiana pourrait être caractérisée par une position de médiatrice. Sa composante cognitive vise un travail sur les stratégies et démarches.

2. *Marie*

Tout comme pour Tatiana, Marie nous a donné ces intentions avant le début de la séance. Elle a choisi « Grimpe » mais de l'a jamais réalisée en classe. Pour préparer ses séquences, elle parcourt toutes les tâches du module, décide d'une progression entre les tâches, puis d'une planification pour chaque trimestre, enfin, pour chaque trimestre elle choisit quelques tâches pour des périodes de 2 mois. Pour Marie, « Grimpe » fait travailler la récurrence, elle fait penser au « Pion empoisonné »[3]. Il s'agit de trouver quelles sont les premières cases impossibles, faire la récurrence, revenir à zéro et voir comment on fait pour gagner à tous les coups. Elle attend pour la fin de la séance que les élèves soient capables de refaire l'exercice en gagnant à tous les coups, et capables de dire que ça ressemble au « Pion empoisonné ». Elle a cependant peu d'espoir pour ce dernier point. Pour préparer la tâche elle a fait un gros travail pour trouver les cases gagnantes et, réfléchir aux relances. Elle prévoit une séance de 60mn, et sait déjà que certains élèves ne pourront pas suivre. Son scénario est le suivant :

- Lire la consigne, reformuler la consigne, deux élèves au tableau pour assurer les déplacements autorisés.
- Travail en groupe
- Échanges et partage de ce qu'ils ont trouvé, discussion pour savoir si on garde ou non

On peut noter que Marie ne prévoit pas d'institutionnalisation, mais une discussion.

[3] Tâche du même champ, variante de la course à vingt.

Le découpage en épisode de la séance est donné en annexe C. Lors de la réalisation en classe, l'entrée dans la justification se fait dès le premier moment collectif bien que ce ne soit pas systématiquement proposé par les élèves. Lorsque les élèves justifient leurs propositions ils utilisent :

- des parcours, que l'on peut rapprocher à une démarche d'essais-erreurs
- la symétrie du plan de jeu,
- l'étude de l'ensemble des choix possibles.

L'enseignante reformule ou « teste » une grande partie des propositions à travers des parties entre élèves ou entre elle-même et un élève. Ces tests agissent comme un moyen de valider les propositions des élèves. L'enseignante revient régulièrement sur les règles du jeu au cours de ce premier moment collectif à travers les déplacements autorisés, l'enjeu et l'alternance des coups joués. Les élèves ont compris que certaines cases impliquent une victoire assurée ou un échec assuré, cependant ils ont des difficultés à identifier à qui revient la victoire ou l'échec : est-ce que c'est le joueur qui vient d'arriver sur la case qui va gagner, ou est-ce que c'est le joueur qui va jouer à partir de cette case qui va gagner ?

Dans le deuxième moment collectif, les justifications qui utilisent les parcours sont majoritaires (9 validations sur 12). Les parcours utilisés ne se terminent pas systématiquement sur la case 36, mais dès la première case gagnante validée comme telle par la classe. La démarche de chainage arrière est utilisée sans être explicitée. La stratégie gagnante du jeu est explicitée rapidement lors du troisième moment collectif.

La stratégie principale utilisée au cours du déroulement de la séance pour valider les propositions est la symétrie du plan de jeu. Les démarches qui apparaissent au cours de la séance sont :

- chainage arrière,
- étude de l'ensemble des choix possibles
- essai-erreur

Tout comme pour Tatiana, ces démarches ne sont pas reprises à la fin de la séance, cependant les élèves font le rapprochement entre «Grimpe » et « Le pion empoisonné ».

Après la séance, Marie nous a confié qu'elle est satisfaite, malgré le petit souci de compréhension lors du premier moment collectif (case gagnante pour qui ?). La séance a été plus courte que prévu, et les élèves ont fait le lien avec l'autre tâche du champ, ce qui est une bonne chose. Cependant une partie des élèves n'a pas tout suivi, ni les justifications, ni l'enjeu de la tâche (aller sur les cases gagnantes que l'on connait) bien que tous soient entrés dans la tâche. Enfin pour elle, la tâche a permis aux élèves qui connaissaient la récurrence (aller en arrière) de mettre en pratique leurs connaissances mais n'a pas permis aux autres de s'approprier cette nouvelle connaissance. Les courts moments de recherche à deux sont justifiés par le comportement de certains élèves qui deviennent vite difficile à gérer dès qu'ils ont compris des choses.

La composante médiative de Marie pourrait être caractérisée par le contrôle dans le contenu et les échanges avec peu d'improvisations et d'écart par rapport aux objectifs qu'elle se donne. Les justifications et validations sont présentes dans tous les échanges souvent stimulés par l'enseignante.

3. *Résultats – bilan (provisoire)*

Les deux enseignantes observées, malgré leurs différences, nous ont livré des séances relativement proches. Les composantes médiatives diffèrent quelques peu, mais leurs composantes cognitives semblent assez proches. Les deux enseignantes se sont ainsi données les mêmes objectifs de travailler sur des démarches de recherche et se donne chacune les moyens d'y parvenir, même si aucune explicitation des démarches apparait. Les démarches de recherches sont effectivement travaillées au cours de la séance à travers les justifications et validations des élèves mais aucune institutionnalisation n'est faite autour de ces démarches. Marie ne maitrise pas vraiment le vocabulaire en nous parlant de récurrence, bien qu'elle maitrise la démarche de chainage arrière. Il nous semble que les deux enseignantes sont très prudentes avec « Grimpe » en se donnant des objectifs d'enseignement qui nous semblent modestes. Tatiana qui nous semblait peu confiante face à son projet a su faire vivre dans sa classe des stratégies de recherches relativement variées, en faisant entrer les élèves progressivement dans la validation en utilisant des démarches.

Lors de l'entretien précédent la séance, Tatiana nous a fait part de son manque d'assurance quant à « Grimpe » car elle ne savait pas vraiment quel objectif elle pouvait associer. Marie avait une idée plus précise de ces objectifs, bien que mal formulés. À la décharge des enseignantes, le livre du maitre ne donne que peu d'information sur la réalisation de la tâche, et aucune connaissance n'est explicitée. On pourrait supposer que l'expérience et le profil de Marie favorise une analyse en terme de démarches de recherche possibles de la tâche. De son côté Tatiana sans expérience se trouve quelque peu démunie face à une telle tâche.

La contrainte institutionnelle pourrait sembler faible du fait d'une grande liberté dans l'organisation des séquences. Pourtant elle apparait comme une contrainte forte chez Tatiana qui semble dépourvue face à la réalisation en classe de la tâche. « Grimpe » n'est en aucun cas une tâche particulière du module de recherche pour le livre de 6$^{\text{ième}}$ HarmoS. Elle reflète tout à fait la philosophie des auteurs qui considèrent les enseignants comme des professionnels de l'enseignement leur laissant ainsi une liberté totale dans la mise en œuvre des tâches proposées. Notre étude ne remet pas en question cette philosophie qui nous semble tout à fait justifiable pour d'autres modules liés à des notions mathématiques plus classiques comme le nombre ou l'addition. Cependant comme le montre l'analyse de « Grimpe » par Marie, la résolution de problème pour travailler les démarches de recherche n'est pas un champ des mathématiques forcément maitrisé par les enseignants, et ce n'est pas dans la ressource qu'ils vont trouver toute l'aide dont ils pourraient avoir besoin.

V. CONCLUSION

Notre proposition avait pour but de présenter une étude autour de l'utilisation d'une ressource pour la mise en œuvre de tâches de résolution de problème. Cette étude s'appuie sur l'analyse de deux séances réalisées chacune par deux enseignantes différentes. L'analyse des scénarios réalisés croisée avec les attentes préalables et impressions a posteriori des enseignantes révèlent une exploitation optimale de la tâche étudiée du point de vue des enseignantes. En utilisant les composantes cognitives et médiatives de chaque enseignantes, il nous semble qu'elles sont assez cohérentes avec leur projet d'enseignement si ce n'est la décontextualisation des démarches mise en œuvre. Lorsque ces données sont croisées avec notre analyse de la tâche et de son potentiel de recherche, il nous semble que le potentiel de la tâche n'est pas exploité à son maximum. En effet, les moments collectifs dirigés par les enseignantes n'ont pas débouché sur l'explicitation de démarche de recherche, alors qu'elles sont mises en œuvre par les élèves. Il nous semble que la ressource propose trop peu d'éléments pour que les enseignants parviennent à une exploitation optimale du potentiel de recherche de la tâche. Le livre du maitre ne donne pas d'éléments de résolution, ce qui peut être tout à fait justifiable. Cependant dans ce contexte particulier cela ne fait que fragiliser les enseignants qui visent des connaissances a minima afin de s'assurer une séance réalisable.

Notre étude s'est largement focalisée sur l'analyse de la place de l'enseignant dans la gestion des moments collectifs. Daina a démontré dans sa thèse (Daina 2013) que les connaissances mathématiques et didactiques ainsi que les habitudes de gestion de classes sont centrales pour une mise en œuvre adéquate d'une suite de tâches. Cela est indépendant de la ressource car Arditti arrive aux mêmes conclusions (Arditi 2011). Les connaissances mathématiques des enseignantes observées relativement à la résolution de problème restent fragiles. Il nous semble que cela pourrait expliquer pourquoi les enseignantes n'exploitent pas entièrement le potentiel des tâches proposées. La ressource disponible n'apporte peut-être pas une aide optimale mais une ressource plus étoffée pourrait aboutir au même résultat. Il nous semble qu'alors l'étude pourrait se poursuivre sur l'analyse des formations continues et initiales disponibles pour les enseignants romands comme ressources autour de la démarche de recherche par des problèmes ouverts, des situations problème ou des jeux.

REFERENCES

Arditi S. (2011) *Variabilité des pratiques effectives des professeurs des écoles utilisant un même manuel écrit par des didacticiens.* Thèse de doctorat en didactique mathématiques. Université Paris Diderot.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La pensée sauvage.

Charnay R. (1992) Problème ouvert problème pour cherche. *Grand N, 51,* 77-83.

Coppé S., Houdement C. (2010) Résolution de problèmes à l'école primaire française : perspectives curriculaire et didactique. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Ed.), *Actes du XXXVIème colloque COPIRELEM. L'enseignement des mathématiques à l'école : où est le problème ? (Auch 2009)* (48-71). Paris : ARPEME.

Daina A. (2013) *Utilisation des ressources : de la préparation d'une séquence à sa réalisation dans la classe de mathématiques / cinq études de cas sur la notion d'aire dans l'enseignement primaire genevois.* Thèse de doctorat : Université de Genève.

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C., Villars-Kneubühler F. (1999) *Livre du maître. Mathématiques 4P.* Neuchâtel : COROME.

Gagnebin, A., Guignard, N., Jaquet, F. (1998) Apprentissage et enseignement des mathématiques, Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire. Bienne : COROME.

Georget J.-P (2012) Expérimentation d'une ressource pour une situation de recherche de preuve entre pairs. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012 (GT6, pp. 838–848).

Georget J-P. (2009) Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants. Thèse de doctorat : Didactique des mathématiques. Paris : 2009

Robert A., Rogalski, N. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: Une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(4), 505-528.

Vendeira-Maréchal C. (2010) Effets des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé : une analyse didactique à partir du cas de l'introduction à l'addition. Thèse de doctorat : Université de Genève.

Annexe A

Tableau de correspondance des âges et degrés de scolarité en Suisse romande

Cycle /établissement	Année scolaire HarmoS	Age
Cycle 1 Ecole primaire	1ière HarmoS	4-5 ans
	2 ième HarmoS	5-6 ans
	3 ième HarmoS	6-7 ans
	4 ième HarmoS	7-8 ans
Cycle 2 Ecole primaire	5 ième HarmoS	8-9 ans
	6ième HarmoS	9-10 ans
	7ième HarmoS	10-11 ans
	8ième HarmoS	11-12 ans
Cycle 3 Cycle d'Orientation	9ème du cycle	12-13 ans
	10ième du cycle	13-14 ans
	11ième du cycle	14-15 ans

Annexes B – Scénario de Tatiana

Découpage en épisodes	Consignes
1. Consigne 7 :39	
2. Premier temps de recherche 16 :26	Le but c'est de réfléchir aussi pendant qu'on joue, ce n'est pas seulement de jouer.
3. Premier moment collectif 9 :30	Est-ce qu'il y a des choses que vous avez remarquées ? Pour l'instant je vous crois sur parole vous n'avez pas besoin de me prouver si c'est juste ou pas. On accepte toutes les propositions et on les essaye après.
4. Deuxième temps de recherche 11 :14	Je vous laisse expérimenter les techniques que l'on a vues ensemble.
5. Deuxième moment collectif 13 :35	Est-ce que vous avez pu expérimenter toutes ces techniques que l'on a vues ? Moi j'aimerai comprendre comment vous faites pour gagner.
Séance de 58 :24	

Annexe C – Scénario de Marie

Découpage en épisodes	Consignes
1. Consigne 5 mn	
2. Premier temps de recherche 4 mn	Vous jouez un peu et on en discute, les remarques que vous avez à faire
3. Premier moment collectif 13 :30 mn	Qu'est-ce que vous avez remarqué ?
4. Deuxième temps de recherche 4 :30 mn	« On va chercher les autres cases gagnantes »
5. Deuxième moment collectif 8 :20 mn	Qu'est-ce que vous avez trouvé comme cases gagnantes ?
6. Troisième temps de recherche 4 :10 mn	« L'objectif c'est comment commencer pour être sûr de gagner. »
7. Troisième moment collectif (4 mn)	Qui a une case gagnante ? Comment gagner ?
Séance de 45 :15	

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

UTILISATION DES TABLETTES DANS DES ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES :
EXEMPLE ACTIVITÉS DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE APPLICATION : GEOGEBRA

My-Lhassan RIOUCH*

Résumé : Dans cette contribution, on s'intéresse à l'introduction de la tablette dans l'enseignement des mathématiques et à son apport dans l'enrichissement du milieu d'apprentissage des élèves. La tablette est utilisée pour concevoir des situations favorisant les interactions entre les élèves et le travail de groupe. Nous limitons notre étude à l'application GeoGebra sur tablette pour concevoir des situations de géométrie dynamique permettant de construire de nouveaux savoirs et résoudre certains problèmes mathématiques. La tablette est un outil qui favorise la communication, la collaboration et l'échange de donnés (Josef & Dollaire 2015). Elle permet de concevoir des situations permettant de conceptualiser les notions mathématiques et donner du sens aux savoirs. Elle permet aussi d'expérimenter et de modéliser des problèmes mathématiques.

Dans notre étude, on s'intéresse à la conception des nouvelles ressources numériques sur tablette et à la genèse instrumentale des outils : tablette et applications et à leurs apports sur l'apprentissage des mathématiques. On essaye d'enrichir cette étude par la description de quelques exemples en s'intéressant aux interactions sujet- milieu et à la gestion de notre espace de travail géométrique et ses différentes composantes.

Mots-clefs : tablette, géométrie dynamique, application Geogebra, genèse instrumentale, problème mathématique, espace de travail mathématique, ressources numériques.

I. INTRODUCTION – CONTEXTE

Selon plusieurs études récentes, l'introduction des tablettes en classe présente des avantages tels que : la facilité d'utilisation, la motivation des élèves, l'autonomie de l'élève, la collaboration élève-élève et élève-enseignant, le travail collectif et le développement de nouvelles compétences technologiques Karsenti et Fievez (2013). L'apparition de nouveaux outils technologiques et de nouveaux espaces d'apprentissages et de formations telles que les plates formes de formation à distance et le M-Learning : apprentissage par mobile, importeront des changements sur la façon d'enseigner et de se former et imposeront des défis sur l'enseignement de demain. Plusieurs universités et centres de recherches expérimentent les tablettes comme par exemples :

- Sommet de l'IPad et du numérique en éducation (université Montréal Canada 2013-2014).

* Délégation Meknès Tafilalt MEN Maroc - Maroc – riouchmymath@hotmail.com

Riouch M.-L. (2015) Utilisation des tablettes dans des activités mathématiques : Exemple activités de géométrie dynamique Application : Geogebra. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT6, pp. 597-611.

- Apprentissage avec les technologies mobiles opportunités et défit pour moderniser l'école marocaine (université Alakhawayn Maroc 2015).

L'instrumentalisation des outils tablette et applications et la conception de nouvelles ressources et leurs mise en œuvre n'est pas une affaire simple pour les enseignants et nécessitent des recherches au niveau didactique et pédagogique. Le changement de l'environnement de travail, l'assimilation et l'adaptation des nouvelles technologies au contexte scolaire nécessitent des innovations en pédagogie.

« La technologie à l'école sera nouvelle si la pédagogie qui l'emploi est nouvelle » (Bibeau 2007)

Au Maroc, malgré les efforts considérables de l'état pour l'équipement des établissements (programme génie 2006-2013) et les programmes de formation continue du plan d'urgence de 2009 sur les ressources numériques et sur le logiciel cabri II plus, on constate que la majorité des enseignants des mathématiques hésitent encore à introduire la technologie dans leurs pratiques quotidiennes de classe. Actuellement, quelques enseignants commencent à utiliser la tablette en classe malgré le manque de vision et de formation sur cet outil .Notre point de vue est de diriger les réflexions vers les usages possibles de cet outil et de faire des expérimentations sur des situations similaires et proches de celle déjà vu sur PC et conçus par les logiciels Cabri ou Geogbra .En général toute expérience antérieure avec un outil augmente la capacité d'utilisation avec un outil similaire (Sabra & Trouche 2008). La familiarisation avec les outils et l'expérience accumulée facilitent l'instrumentalisation, l'acceptabilité et l'adaptabilité de nouveau outils.

L'objectif de notre étude est de concevoir des situations permettant l'éclaircissement du processus de la genèse instrumentale de ces outils : tablette et application Geogebra .On essaye d'enrichir cette étude par la description de quelques exemples en se basant sur des modèles théoriques existants concernant le géométrie dynamique et son espace de travail géométrique (ETG) (Coutat & Richard 2011). Dans certaines situations, la manipulation des objets géométriques, le déplacement et la visualisation des traces et des lieux ne peuvent se faire que par le biais des logiciels de géométrie dynamique comme par exemple Geogebra, Cabri II plus, Math graphe. Le déplacement, l'ajustement des positions et le changement des paramètres facilitent l'émergence des conjectures et l'exploitation des propriétés géométriques dans la preuve. Dans ce contexte nous citons l'exemple des situations de déplacement conçu par Coutat (2006) dans le cadre de la géométrie dynamique ou l'ajustement permet la conceptualisation des propriétés géométriques du parallélogramme et nous inspirons de cette recherche pour créer d'autres situations de déplacement en intégrant l'application Geogebra sur tablette. La mise au point des relations et des interactions entre la genèse instrumentale et les deux autres genèses sémiotique et discursive permet à l'enseignant d'organiser l'espace de travail et de gérer l'activité cognitive de l'élève. Il est donc pertinent de poursuivre les recherches sur la géométrie dynamique et de bénéficier des expériences et du cumul des recherches sur ce sujet. Le passage du travail sur papier-crayon vers la tablette nécessite la gestion rationnelle de l'environnement de travail et la gestion de la classe au niveau pédagogique et didactique. Il est important aussi de rappeler que ce ne sont ni la tablette, ni ses applications qui favoriseront la réussite des élèves, mais bien le bon usage qui en sera fait par les enseignants et par les élèves. En fait, la tablette tactile n'aura sa place en classe que si elle participe à l'atteinte des objectifs de l'enseignement des mathématiques. Nous prévoyons que la tablette et ses applications permettrons à l'enseignant de renouveler et compléter son espace de travail mathématique et de diversifier ses méthodes de travail en classe ou hors classe.

II. PROBLEMATIQUE

L'introduction d'un nouvel outil technologique dans la classe n'est pas une affaire simple surtout pour les enseignants qui n'ont pas d'expérience suffisante dans la manipulation de la technologie et qui résistent encore à son utilisation. Les renouvèlements de la technologie posent des difficultés de choix, de différentiation entre les fonctionnalités et les usages possibles. Le processus d'appropriation et d'expérimentation d'un outil et sa mobilisation au service de l'activité mathématique demande plus de temps (Aldon et al, 2008) et il n'est pas le même pour tous les enseignants et pour tous élèves vu leurs expériences et leurs représentations. La complexité de conception des situations intégrant la technologie est liée à la prise en main des outils technologiques, à l'instrumentalisation des outils et à la scénarisation des activités pour organiser le temps et l'espace de travail et mettre en œuvre la situation (Trouche 2005).

Comme enseignant innovant en TICE primé au concours des enseignants du Maroc catégorie scénarisation pédagogique j'ai travaillé avec l'équipe d'inspection d'Elhajeb sur l'introduction en classe des logiciels de géométrie dynamique Geoplan, Geogebra et Cabri ainsi que sur la production et l'expérimentation de quelques ressources numériques. Actuellement avec l'apparition des tablettes, je consacre ma recherche à l'étude de l'application Geogebra sur tablette. Le but principal est de concevoir des situations d'apprentissage dans lesquelles la genèse instrumentale des artefacts tablette et son application Geogebra permet d'exécuter un ensemble de taches et d'utiliser les différentes registres géométrique, numérique, figural, symbolique, graphique et algébrique pour comprendre le processus de conceptualisation des notions mathématiques. En effet la compréhension et la maitrise d'un concept mathématique nécessite l'articulation et la complémentarité de plusieurs registres sémiotiques (Duval 1993). Dans ce contexte nous allons traités dans l'exemple de l'activité 1 conçu pour les élèves du tronc commun science la première année du lycée marocain (âge 15-16ans) le concept monotonie d'une fonction. L'activité proposée utilise le registre figural pour l'introduction de la notion et introduit d'autres registres pour la conceptualisation. La genèse instrumentale des différents outils de l'application nous permet de traiter et de la transformer les informations à l'intérieur d'un registre ou de passer progressivement d'un registre à l'autre, La conversion de registres permet d'introduire et comprendre le concept d'une fonction strictement croissante ou décroissante.

$$\left((\forall x\in I, \forall y\in I): x<y \Rightarrow f(x)<f(y)\right),\ ou\ \left((\forall x\in I, \forall y\in I): x<y \Rightarrow g(x)>g(y)\right)$$

Dans l'exemple de l'activité 2, on vise les élèves des premières années du collège (âge 12-13ans) et la partie du programme concernant les définitions et les propriétés caractéristiques des différentes droites sur le triangle : médiatrice, médiane, bissectrice, hauteur. L'ingénierie didactique de cette situation est constituée de deux phases.

Première phase : Nous avons produit une ressource numérique sous forme d'une animation englobant tous les acquis des élèves concernant les droites usuelles du triangle. Elle sera à leurs disponibilités avant et durant l'activité. Son but c'est d'interagir avec son contenu pour rappeler et renforcer tous les acquis et créer des discutions en classe ou hors classe. Nous essayons de créer un environnement permettant l'auto évaluation des acquis des élèves et de rendre leur travail collaboratif en leur laissant une part d'autonomie. Notre ressource est en phase d'expérimentation, son utilisation induira des changements pour améliorer sa qualité et son ergonomie.

Deuxième phase : nous avons conçu une situation permettant de découvrir l'existence du cercle circonscrit et inscrit du triangle puis donner la preuve. Puis une autre situation problème dont la résolution nécessite la mobilisation des savoirs et des savoirs faire de l'élève. Le travail se fera en petit groupe pour expérimenter et discuter les conjectures et proposer les preuves. L'application Geogebra permettra de tracer facilement les figures et faire des essais pour vérifier et expérimenter une solution. Le groupe peut revenir à chaque fois l'environnement papier/crayon pour rédiger le raisonnement et la rédaction des solutions. Le problème posé à la nature d'un problème ouvert qui a plusieurs solutions et qui nécessite un travail collaboratif des élèves.

Le travail sur l'environnement tablette favorisera l'interaction et la discussion entre les groupes et permettra d'échanger les écrans des tablettes ou d'afficher la réponse d'un groupe sur l'écran de classe. Nous revenons ici au travail déjà fait sur TI-Navigateur et le travail en réseaux (Hivon, 2008) pour diffuser le travail des groupes. Le travail avec les tablettes en groupes en classe ou hors classe peut s'inspirer et se baser sur la dynamique des groupes et sur les théories d'apprentissage concernant le constructivisme et le socioconstructivisme et leurs rôles dans le travail collaboratif. L'appropriation et la mobilisation des nouveaux outils technologiques dans de telles situations nécessitent des orchestrations instrumentales Trouche (2005) pour les mettre au service de l'activité mathématique des élèves et l'aider à instrumentaliser ses outils et les exploiter. On parle déjà dans des expérimentations de la tablette du passage à la classe inversée et de l'apprentissage par mobile le M-Learning et son rôle dans l'auto formation et la formation à distance. Les plates formes offrent des cours en lignes ouvert CLOT ou MOOCS pour un grand public et le téléchargement des applications peut se faire gratuitement.

Dans notre étude, nous limiterons nos questions à l'apport de la tablette et son application Geogebra sur l'apprentissage des élèves. Nous nous interrogeons sur la conception des situations et sur la planification des activités en classe pour mettre en œuvre les différentes relations possibles entre les trois genèses de notre espace de travail mathématique. La conception de notre espace se base sur le cadre théorique général ETM de (Kuzniak & Richard 2014), et s'inspire particulièrement des recherches faites sur ETG géométrique de (Coutat & Richard 2011). On essaye d'articuler les trois genèses sémiotiques, instrumentale et discursive et de comprendre les interactions de toutes les composantes liées au milieu épistémologique et au sujet épistémique dans le but de contrôler et réguler les activités cognitives de l'élève. Notre recherche essaye de rependre à un ensemble de questions liées à l'intégration des tablettes en classe, à la conception des situations d'apprentissage et à l'instrumentation des outils tablette et ses applications.

- Quels sont les usages possibles de la tablette dans la classe des mathématiques ?
- Comment instrumentaliser la tablette et ses outils surtout l'application Geogebra ?
- Comment ses nouveaux outils peuvent aider à la découverte et à la construction de nouveaux savoirs et à les mobiliser pour résoudre les problèmes ?
- Comment peut-on organiser notre espace de travail et gérer les activités cognitives de l'élève pour construire son savoir ?
- Comment concevoir une situation problème en utilisant l'application Geogebra ?
- Quels sont les scénarios pédagogiques à concevoir pour instrumentaliser ses outils et gérer les activités des élèves ?
- Quels est l'apport de la tablette sur l'enseignement des mathématiques et sur l'activité cognitive de l'élève ?
- Quel rôle peut jouer l'apprentissage mobile M- Learning sur la formation à distance ?

III. CADRE THEORIQUE

1. *Conception des nouvelles situations d'apprentissage.*

La conception des situations d'apprentissage se fait en général dans le cadre des institutions scolaires. Les orientations pédagogiques des mathématiques incitent les enseignants à concevoir des situations permettant à l'élève de construire son savoir en interaction avec son milieu en se basant sur la théorie du constructivisme. Elles insistent aussi sur le travail collaboratif en groupe et son rôle dans la socialisation de l'apprentissage socio constructiviste. En mathématiques, la construction des savoirs est liée à la conceptualisation des objets pour leur donner des significations. La construction d'un concept et sa signification sont dissociables et la distinction entre un concept et sa construction est impossible (Bruno d'Amore, 2001). Le processus de conceptualisation est cyclique et comporte trois composantes. La construction joue un rôle essentiel pour donner une signification au concept voir Fig1.

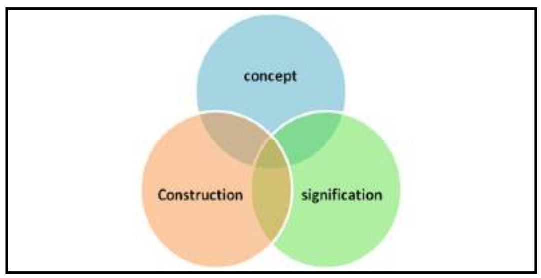


***Figure 1** – les relations entre les composantes de conceptualisation*

La conceptualisation des notions mathématiques dépend de la capacité d'utiliser différentes registres sémiotiques et les conversions possibles entre ces registres. En général la construction d'un concept passe par les actions suivantes : la représentation, le traitement et la conversion (Duval 1995). Voir Fig2.

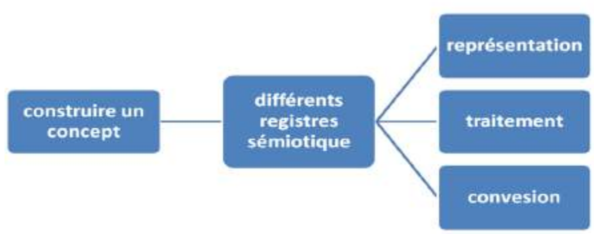


***Figure 2** – construction de concept par les registres sémiotique*

Pour Duval (1995) le recourt à plusieurs registres est une condition nécessaire pour distinguer les objets mathématiques et leurs représentations sémiotiques. Dans une situation d'apprentissage, l'interaction du sujet avec son milieu lui permet d'introduire ces registres pour traiter et analyser les informations et transformer les symboles liés aux registres en signes. L'introduction des instruments technologiques dans une telle situation peut enrichir l'activité cognitive de l'élève et faciliter le traitement de l'information à l'intérieur d'un registre ou par conversion de registres. La genèse instrumentale est le processus de construction des instruments par le sujet. Ce processus nécessite le développement des schèmes et des techniques de l'utilisation des artefacts tablette et application (Rabardel 1995).

Cette genèse participe à la construction par le sujet des signes en transformant les objets mathématiques. Elle contribue à la découverte des relations entre ces signes et à l'introduction des propriétés déjà étudiées pour analyser la situation et donner des preuves et les discuter pour enfin institutionnaliser le savoir. Dans la situation proposée concernant la monotonie les signes sont le dessin géométrique, les symboles algébriques, et les graphes, (Kuzniak & Richard 2014). La gestion rationnelle de ces signes facilite la conceptualisation des notions et la construction du savoir. Elle permet de modéliser mathématiquement la situation et de comprendre le phénomène étudié dans sa totalité. L'introduction de la tablette dans ce type de situations peut favoriser le travail de groupe, l'échange d'idées, les discutions entre les éléments d'un même groupe ou avec les autres groupe, l'échange et la diffusion des résultats vu que la tablette peut se relier à un écran de projection. Notre intérêt ici est de socialiser les apprentissages et rendre le travail des élèves plus collaboratif.

2. *La tablette un nouvel environnement technologique de travail - avantages et apport*

La tablette est un outil qui peut aider à la communication et la collaboration entre les élèves. La navigation simple entre ses différentes applications facilite son utilisation et son adaptation au contexte scolaire (Karsenti & Fievez 2013). La prise en main facile de ses outils tablettes et ses applications, la rapidité d'exécution des taches conçus par les enseignants minimise le temps des séances et augmente l'acceptabilité de ses outils dans la classe d'ailleurs une bonne relation avec l'outil technologique, facilite l'engagement des élèves dans l'exécution des taches et dans la résolution des problèmes (Aldon & al. 2008).

Les technologies mobiles tablettes et téléphones mobiles commencent à prendre leur place en classe et surtout sur la formation à distance et sur la production des contenus multimédia tels que vidéo, livre électronique, animation, simulation, jeu éducatif, visioconférence. La tablette électronique est un petit appareil portatif doté d'une interface avec un écran tactile, qui offre de nombreuses possibilités de personnalisation, comprend plusieurs applications et permet l'accès à l'internet, et dont les fonctionnalités se rapprochent souvent de l'ordinateur de bureau (Josef & Dollaire 2015). On peut résumer ses avantages et son apport sur la portabilité, la connectivité à internet, la facilité de production du multimédia et des animations et simulations. Cet outil est léger par rapport au PC portable et permet l'échange de donnés. La production des applications sur tablette s'accentue sur tous les domaines, en mathématique l'apparition de l'application Geogebra aide à introduire la tablette dans les activités liées à la géométrie dynamique. Les ressources déjà produites sur ce domaine peuvent se refaire dans un nouvel environnement. La tablette facilite l'autonomie de l'apprentissage des élèves en leurs permettant de l'utiliser selon leurs besoins et d'apprendre selon leurs rythmes (Sabra & Trouche 2008). Les TICE peuvent aider, dans certains de leurs aspects d'utilisation, au développement de l'autonomie : elles peuvent enrichir le milieu permettant aux élèves de confronter conjectures et hypothèses, de développer leurs démarches et de contrôler leurs solutions. L'enseignant peut planifier et alterner des phases de médiation et des phases d'autonomie des élèves durant les séquences d'apprentissage. Le travail de groupe peut se faire facilement avec et sur tablette et facilitera le travail collectif en autonomie des élèves.

Les situations proposés sur l'environnement tablette amèneront les élèves à prendre des initiatives comme expérimenter, instrumenter, découvrir, conjecturer, chercher des preuves, discuter. Elles aideront au développement les méta-connaissances du sujet et faciliteront son interaction avec son milieu pour construire son savoir (Brousseau 2004). L'enseignant peut dans ce nouvel environnement d'apprentissage gérer et favoriser l'activité cognitive de l'élève en respectant le processus de perception suivant (fig3).

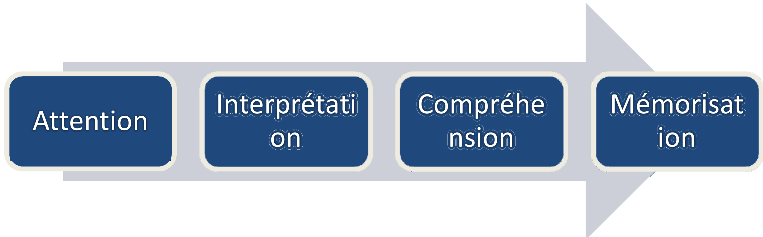


***Figure 3** – phases de perception pour gerer l'activité cognitive de l'elève*

La situation proposée comme exemple concernant la monotonie permet d'attirer l'attention de l'élève et le motive pour être capable d'analyser et interpréter les relations entre les objets mathématiques, traduire ses relations en langage mathématique pour donner du sens aux objets afin que l'élève découvre les nouveaux savoirs et les mémorise sous forme de définitions ou propriétés. Ce qui permet aussi à l'enseignant d'institutionnaliser les savoirs.

3. La genèse instrumentale des outils tablette et applications

Pour introduire les TICE dans sa pratique, l'enseignant doit être capable d'adapter les ressources existantes comme logiciels, animations, simulations, films éducatifs à ses besoins et aux contenus mathématiques. L'enseignant doit concevoir des nouvelles situations et instrumenter un ensemble d'outils pour tracer des figures dynamiques, faire des calculs, relier des objets mathématiques, tracer un lieu, et gérer l'activité mathématique de l'élèves de tel façon à favoriser son interaction avec le milieu. Les instruments permettent à l'élève d'exécuter des taches et le mettent dans des situations de recherche, d'expérimentation et de preuve. Parfois l'enseignant peut détourner les fonctionnalités d'un logiciel, ajouter une macro nécessaire pour la réussite d'une tache, ou produire lui-même de nouvelles ressources en combinant ces outils. Exemple utiliser plusieurs logiciels ou ressources pour produire un film éducatif. Selon Trouche :

> L'instrumentalisation est un processus de personnalisation de l'artefact, c'est donc processus de différentiation des artefacts, par lequel chaque usager met cet artefact à sa main…. Ce processus peut être considérer comme un détournement ou comme une contribution de l'usager au processus même de conception de l'instrument. (Trouche 2005)

L'enseignant doit orienter ses élèves et les amener à produire eux même leurs instruments et les aider à combiner ces instruments pour exercer les taches. Un instrument produit peut aider à exercer plusieurs taches selon le contexte d'utilisation. C'est ce qu'appelle Trouche les orchestrations instrumentales.

> Pour marquer cette nécessaire prise en compte de la construction des instruments, nous avons introduit la notion d'orchestration instrumentale. Les orchestrations instrumentales sont les dispositifs que le maître doit construire dans la classe pour guider la constitution des instruments des élèves et faciliter leur contrôle. Ces dispositifs règlent (sur le plan de l'espace et du temps) l'agencement des outils dans la classe. (Trouche 2007)

L'introduction des nouveaux outils comme la tablette ou téléphone mobile dans l'apprentissage des mathématiques doit se faire progressivement. L'échange et le partage d'expériences sont nécessaires pour mieux instrumentaliser les outils et les mettre au service de l'apprentissage. La communauté de travail de chaque établissement peut produire ses ressources numériques fonctionnant sur tablette exemples : animations –simulations –petits films éducatifs selon ses besoins. La conception des scénarios pédagogiques ou d'usage est nécessaire pour introduire ses nouveaux outils et les intégrer dans l'enseignement des mathématiques.

4. Le scénario pédagogique pour la mise en ouvre des situations d'apprentissages

Nous définissons le scenario pédagogique comme étant le résultat du processus de conception d'une activité ou d'une séance d'apprentissage. Il élabore les étapes de déroulement de la séance. Dans sa conception il faut tenir compte des objectifs, de la durée, des acquis et des savoirs et des savoirs faire des élèves, des compétences acquises ou à développer, des compétences technologiques nécessaires et du matériel à utiliser et ses potentialités. Il faut aussi préciser les taches de l'enseignant et de l'élève au cours du déroulement de la séance. Le scénario est constitué d'une fiche de l'élève pour guider ses activités, d'une fiche de l'enseignant pour gérer la classe et le temps et d'une fiche technique du matériel à utiliser. Comme le souligne Trouche :

> Plus simplement, nous dirons ici qu'il est nécessaire de préciser des scénarios donnant des éléments d'organisation du temps et de l'espace pour la mise en œuvre de la situation dans la classe. La prise de conscience de la nécessité de ces scénarios est apparue depuis quelques années en ce qui concerne l'intégration de logiciels conçus pour l'enseignement, par exemple Cabri (Capponi 1998). On trouve, depuis, un certain nombre de scénarios pédagogique s'accompagnant des situations. Ils précisent en général le découpage temporel en différentes phases de la situation et leurs modes de gestion : durée et nature de chaque phase (exploration, validation, travail de la technique…), organisation de la classe (en petits groupes, par binôme, …), en relation avec le problème posé. (Trouche 2005)

Dans le scénario, La nature de la situation à étudier et le processus de la genèse instrumentale des outils permettent d'élaborer un schéma qui décrit les phases de déroulement d'une séance d'apprentissage.

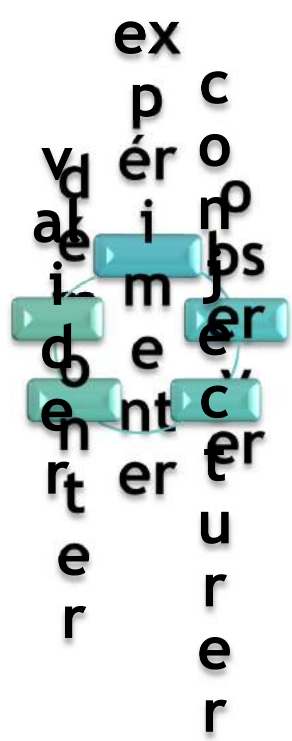


***Figure 4** – Exemple d'un processus de déroulement d'une séance d'apprentissage (schéma d'une activité expérimenter en classe Production personnelle)*

IV. EXEMPLES D'ACTIVITES SUR TABLETTE

1. Monotonie d'une fonction : conceptualisation

L'objectif de cette activité est d'introduire la notion de monotonie d'une fonction en partant d'une situation géométrique pour construire cette notion et la conceptualiser. L'expérience montre que les élèves ont des difficultés à assimiler algébriquement la définition et le changement des inégalités $>$ et $<$ et des difficultés à utiliser cette notion dans d'autre contextes exemple en terminale pour étudier la monotonie d'une suite récurrente $u_0 = a$, $U_{n+1} = f(U_n)$. L'introduction de cette notion nécessite la conception d'une situation permettant de construire la notion et de la conceptualiser progressivement en utilisant les différents registres sémiotiques. L'instrumentalisation des outils permet de passer d'un registre à l'autre c'est-à-dire une conversion de registre. Elle permet aussi de faire des relations de va et vient entre la genèse sémiotique et discursive pour donner du sens aux objets mathématiques et devenir des signes qui contribuent à la conceptualisation de la notion monotonie.

<u>Enoncé de la situation 1</u> :

ABCD un rectangle tel que $AB = 4cm$ et $BC = 3cm$. E un point sur $[A, B]$ tel que $BE = 1cm$.

F et G deux points mobiles sur $[C, D]$. On pose $DF = xcm$ et $DG = ycm$. On suppose que si $x < y$

-Tracer une figure dynamique permettant de déplacer F et G et calculer DF et DG

-Tracer les polygones AEFD et AEGD puis comparer leurs airs respectivement $f(x)$ et $f(y)$

-Tracer les polygones EBCF et EBCG puis comparer leurs airs $g(x)$ et $g(y)$
-Reprendre les questions si $x > y$

-Comparer $f(x)$ et $g(x)$

La comparaison d'airs se fait par différentes méthodes graphique ou algébrique et par les Courbes des fonctions linéaires.

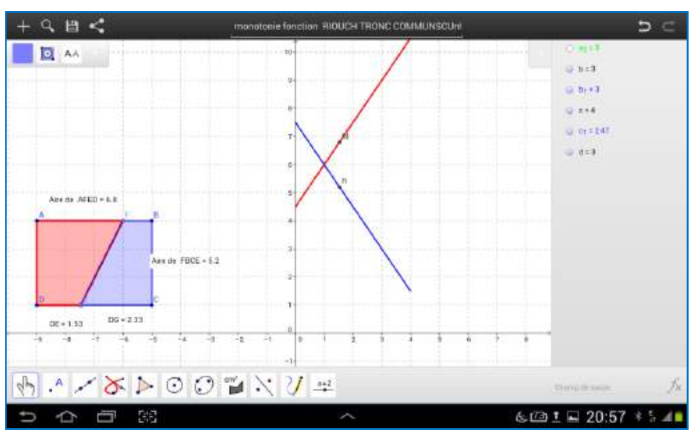


***Figure 5 –** figure de la situation1 sur tablette*

Le but de notre situation est d'introduire la définition d'une fonction monotone :

$$((\forall x \in I, \forall y \in I) : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)) , ((\forall x \in I, \forall y \in I) : x < y \Rightarrow g(x) > g(y))$$

Puis résoudre algébriquement et graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ et l'inéquation $f(x) > g(x)$, pour comprendre le comportement des airs des polygones AEFD et EBCF.

La gestion de notre espace de travail et ses différentes genèses reliant les deux plans milieux et sujet et les articulations entre registres pour conceptualiser la notion monotonie se résume sur la carte suivante :

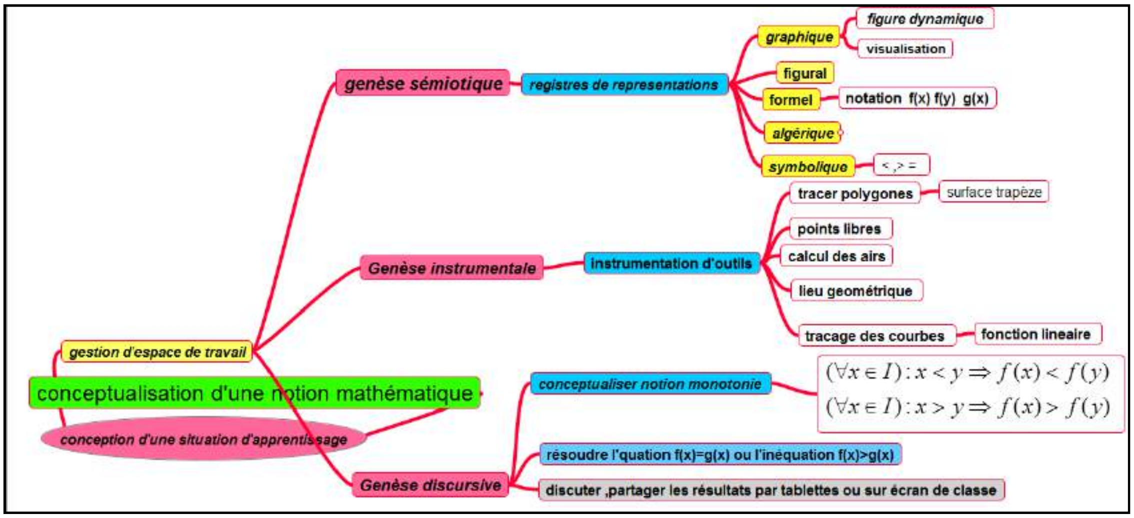


Figure 6 – *Description de notre espace de travail et ses différentes genèses*

Dans la genèse discursive l'utilisation de la figure dynamique et des graphes des fonctions linéaires induitla dévolution de la situation et la production des preuves pour institutionnaliser la définition de monotonie de f et g . Le déplacement et la visualisation des objets et leurs lieux sur la figure permettent de comparer numériquement puis algébriquement $f(x)etf(y)$ et $g(x)etg(y)$ et de comprendre le comportement des surfaces $f(x)etg(x)$ et de découvrir graphiquement la solution de l'équation $f(x)=g(x)$ et de l'inéquation et $f(x)>g(x)$ puis produire un discours et un raisonnement logique dans la résolution. L'élève produit les preuves et le raisonnement en suivant les étapes de la situation et en se basant sur la figure c'est ce qu'appelle Richard le raisonnement discursivo-graphique qui se construit à partir des inférences produite par la figure.

> …le registre figural peut à lui seul démontrer visuellement une propriété en fixant des « moments significatifs » du développement d'images significatifs du développement d'image mentales. ……lorsqu'un élève passe d'un énoncé à un dessin, ou d'un dessin à un texte la coordination entre registre discursif et registre figural suppose une activité cognitive de conversion (Richard 2004)

Sur la figure dynamique la visualisation permet de voir que la fonction f(x) est croissante et la fonction g(x) et décroissante. Le moment significatif pour l'équation c'est le moment ou $f(x)=g(x)$ numériquement sur la figure et graphiquement lorsque les courbes C_f et C_g se rencontrent en un point.

La genèse discursive induit aussi des relations entre les instruments à utiliser et les objets mathématiques à transformer en signes pour comprendre algébriquement la situation. Elle induit ainsi des relations entre les instruments utilisés et les registres sémiotiques. Donc la situation proposée essaye de gérer les interactions entre les trois genèses sémiotiques instrumentales et discursives. Dans l'ETG conçu par (Coutat et Richard) et repris par (Kuzniak & Richard 2014) on a introduit trois plans pour expliquer la coordination entre ces genèses.

> ….les plans verticaux ainsi introduits vont pouvoir être reliés aux différentes phases du travail mathématique mis en œuvre dans l'exécution d'une tâche : découverte et exploration, justification et raisonnement, présentation et communication. La réalisation effective de ces phases définira, de fait, un certain nombre de compétences mathématiques cognitives fondées sur la coordination des genèses dans leurs relations avec le plan épistémologique. (Kuzniak & Richard 2014)

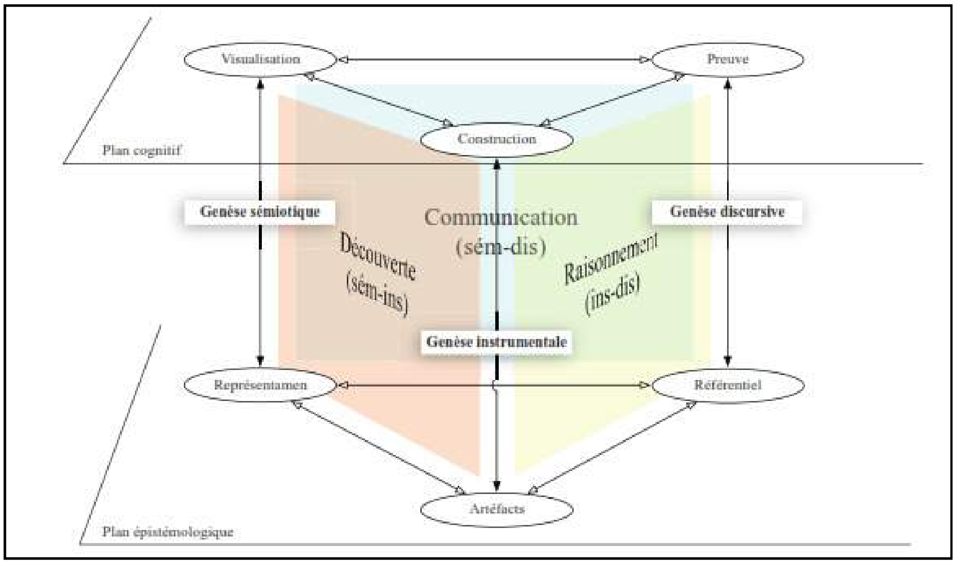


Figure 7 – *les plans verticaux de l'ETM géométrique conçu par Richard*

Le passage de l'environnement tablette vers l'environnement papier/crayon est obligatoire dans la rédaction des solutions algébriques. On utilise les relations d'ordre dans la comparaison et dans la résolution de l'équation et de l'inéquation.

2. *Les différentes droites du triangle : cercle inscrit circonscrit.*

Nous avons produit une animation permettant d'évaluer et renforcer les acquis des élèves concernant les propriétés des droites sur le triangle. Son interface se compose d'un menu et des boutons pour se déplacer sur tous ses composantes.

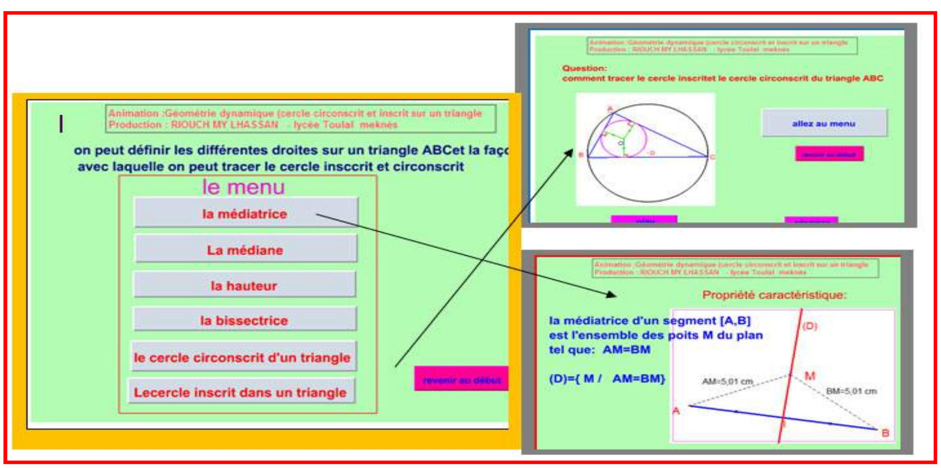


Figure 8 – *interface et quelques fenêtres de l'animation*

On peut utiliser cette animation même sur internet et sera mis à la disposition des élèves en classe et hors classe. Son objectif est de rappeler structurer tous les acquis des élèves concernant les droites sur le triangle et leurs propriétés caractéristiques. Après l'utilisation de cette ressource on peut consacrer une séance en classe pour le cercle inscrit ou circonscrit sur tablette en utilisant l'application Geogebra.

Enoncé de la situation 2 : cercle circonscrit :

En utilisant votre application Geogebra :

1) Construire les trois médiatrices des cotés d'un triangle ABC puis donner une conjecture

2) Montrer que les trois médiatrices se rencontrent en un point O et tracer le cercle de centre O et de rayon OA, puis donner une conclusion

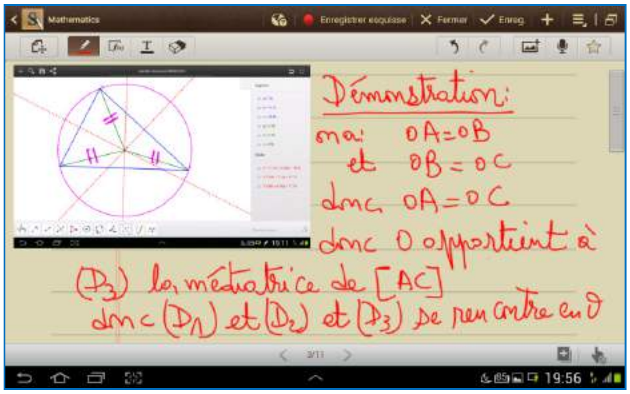
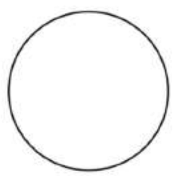


Figure 9 – *Une réponse sur tablette à la situation proposée*

3. *Situation problème sur tablette*

Enoncé :

Un technicien veut percer un disque métallique en son centre pour installer un arbre sur ce centre. Pouvez vous aidez ce technicien et lui proposez des solutions pour déterminer précisément le centre et donnez les preuves



Le but de tel problème est de mobiliser les savoir et les savoirs faire des élèves et les mettre dans des situations réelles dans la vie pour intégrer leurs savoirs et leurs donner du sens. On peut proposer ce type de problème en groupe pour discuter les solutions proposées et mener un débat en classe.

La situation a l'aspect d'un problème ouvert ou celle de la situation de recherche et de preuve entre pairs. Elle a les trois potentiels décrits par (Georget 2012) : un potentiel de recherche puisque la solution n'est pas évidente, un potentiel de résistance puisque la solution même s'elle est perçue nécessite une preuve et un potentiel de débat puisque le problème possède plusieurs solutions qu'on doit discuter en groupe. L'apport de la tablette est de tracer facilement et avec précision la figure de la solution proposée et de l'expérimenter. La tablette permet aussi d'accompagner ce débat en échangeant les figures proposés ou on affichant la solution d'un groupe sur l'écran de classe et la discuter ensemble. La tablette peut favoriser le travail collectif et surtout collaboratif des élèves.

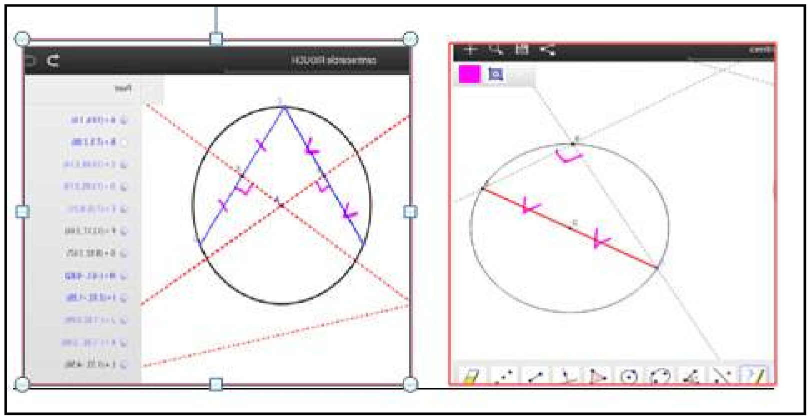


Figure 10 – *Deux solutions se basant sur le cercle circonscrit et sur le triangle rectangle*

V. CONCLUSION

Dans la description des exemples précédents, il apparait que la tablette peut remplacer les outils technologiques déjà utiliser en classe calculatrice, ordinateur, écran de projection. Les recherches déjà faites peuvent aider à la conception des situations intégrant la tablette. Son introduction est seulement une question du temps, les élèves sont déjà familiarisés avec la tablette et les smart phones. Dans plusieurs pays Canada, France, Turquie, Malaysie, son expérimentation en usages scolaires est en cours vu son apport sur la conception, l'échange et la mutualisation des ressources et sur l'amélioration des apprentissages. On peut l'utiliser pour accéder aux ressources sur internet, pour voir mes films, des animations et pour produire du multimédia. En mathématique on peut l'intégrer facilement sur le domaine de la géométrie, des statistiques, des probabilités, sur la création des simulations et sur la résolution des problèmes. Toutes les activités liées à la géométrie dynamique, à l'optimisation, aux simulations du hasard, aux tableurs et à la modélisation mathématique peuvent se refaire sur tablette (voir exemples sur annexe). C'est donc un outil qui rassemble plusieurs fonctionnalités déjà utilisé sur d'autres supports technologiques. La tablette peut renouveler l'environnement d'apprentissage, faciliter les tâches aux enseignants, minimiser le temps de déroulement des activités et favoriser l'apprentissage collaboratif. Son expérimentation dans plusieurs domaine a déjà donné de bon résultats surtout ce concerne la formation à distance et l'apprentissage mobile.

REFERENCES

Aldon G., Artigue M., Bardini C., Baroux-Raymond D., Bonnafet J.-L., Combes M.-C., Guichard Y., Hérault F., Nowak M., Salles J., Trouche L., Xavier L., Zucchi I. (2008) Nouvel environnement technologique, nouvelles ressources, nouveaux modes de travail : le projet e-colab (expérimentation collaborative de laboratoires mathématiques). *Repères IREM* 72, 51-78.

Aldon G. (2012) Conception collaborative de ressources : l'expérience E-colab actes EMF 2012.

Bilan de l'expérimentation d'usage pédagogique de tablettes numériques sur l'académie de Nice. (2011) http://www.ac-nice;fr/matrice/.

Bibeau R. (2007) Les technologies de l'information et de la communication peuvent contribuer à améliorer les résultats scolaires des élèves. *Revue de l'association EPI. EpiNet*, 94.

Brousseau G. (2004) *Théorie des situations didactiques.* La pensée sauvage éditions.

Coutat S., Richard P.R. (2011) Les figures dynamiques dans un espace de travail mathématique pour l'apprentissage des propriétés géométriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 16, 97-126.

Coutat S. (2006) Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison école primaire collège : une ingénierie didactique sur la notion de propriété. Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble.

D'Amore B. (2001) Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétiques : Interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis* 38(2), 143-168.

Darhmaoui H. (2015) Rapport journée d'étude sur l'apprentissage avec les technologies mobiles, opportunités et défis, pour moderniser l'école Marocaine.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de didactique et des sciences cognitives* 5, 37-65.

Duval R. (1995) Sémio et pensé humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.

Drissi M. (2003) Guide pour concevoir un scénario pédagogique intégrant les TIC, environnement informatique et apprentissage humain.

Georget J.-P. (2009) Apport de l'ergonomie des EIAH pour l'analyse et la conception des ressources. EMF 2009.

Georget J.-P., Labrouse B. (2012) Expérimentation d'une ressource pour une situation de recherche et de preuve entre pairs. Actes EMF2012

Hivon L., Manuel P., Rouché L. (2008) Un réseau de calculatrices à la construction collaborative du savoir dans la classe , *Educ Math.*

Josef G., Dollaire F. (2015) *Guide sur l'apprentissage mobile et son impact sur la formation à distance dans la francophonie canadienne.* http://www.pch.gc.ca.

Karsenti T., Fievez A. (2013) *L'iPad à l'école: usages, avantages et défis : résultats d'une enquête auprès de 6057 élèves et 302 enseignants du Québec (Canada).* Montréal, QC : CRIFPE.

Kuzniak A., Richard P.R. (2014) Espace de travail mathématique. Points de vue et perspectives.

Orientations pédagogiques mathématiques du ministre de l'éducation Maroc 2007.

Rabardel P. (1995) Les hommes et les technologies une approche cognitive des instruments contemporains.

Rapport national du programme Génie du ministre de l'éducation Maroc 2010.

Richard P. R. (2011) L'inférence figurale : un pas de raisonnement Discursivo- graphique.

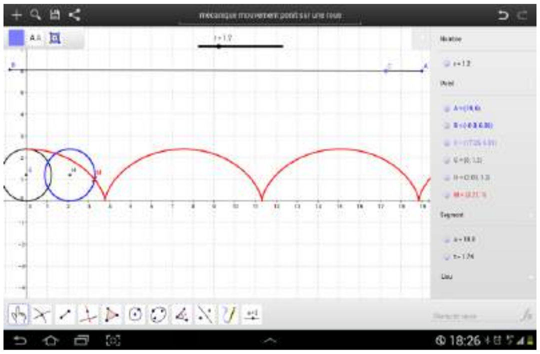
Sabra H., Trouche L. (2009) *Enseignement des mathématiques et TICE, Revue de la littérature de recherche francophone (2002 – 2008).*Lyon : INRP.

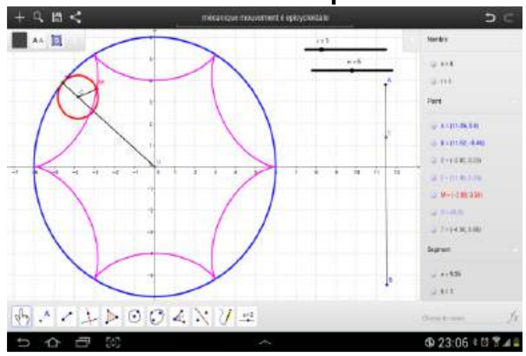
Trouche L. (2005) Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. *Actes de l'Université d'été de Saint Flour : le calcul sous toutes ses formes*, 265-275.

Trouche L. (2007) Environnements informatisés et mathématiques Quels usages pour quels apprentissages.

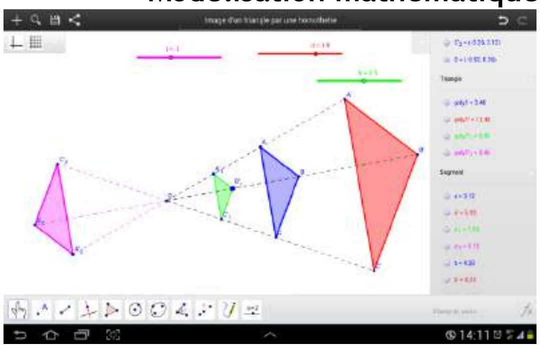
ANNEXE

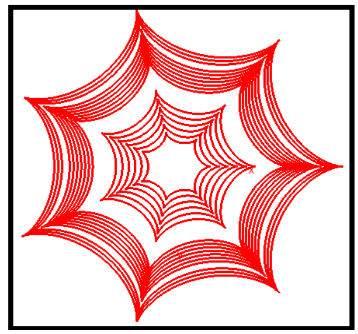
Autres activités liés à d'autres domaines mathématiques :



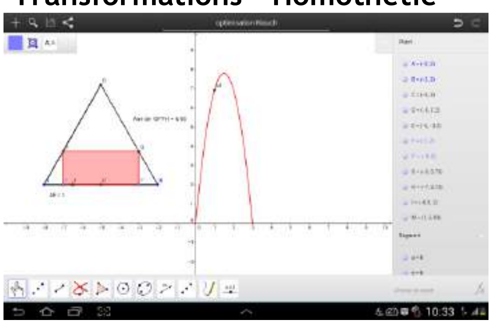


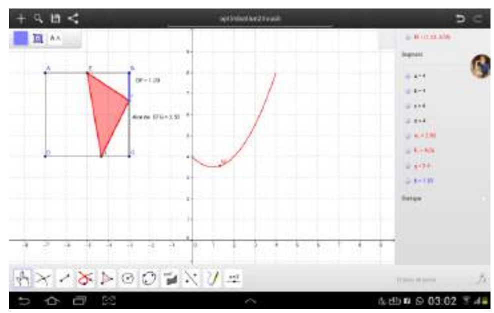
Modélisation mathématique et simulations : trajectoires des points





Transformations – Homothétie **arts et mathématiques**





Optimisation surfaces **(voir exemple : L'inférence figurale, Richard)**

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

POUR UN USAGE RÉFLEXIF DES INSTRUMENTS DE GÉOMÉTRIE

Mamadou Souleymane SANGARÉ[*] – Sinaly DISSA[**]

Résumé : Cette contribution présente les premiers résultats à mi-parcours d'une recherche-développement sur la production de ressources pour la formation d'élèves-professeurs en géométrie plane. Nous élaborons et mettons à l'épreuve certaines activités géométriques centrées sur des usages réflexifs des instruments de géométrie dans des tâches de construction. A cet effet, nous proposons une situation de formation fondée sur la prise en compte interactive et réflexive des types de tâches suivants : « construire un dessin géométrique codé », « décrire sous forme de programme la construction effectuée » et «formuler une justification théorique de la construction ».

Mots clés : ressource de formation ; instruments de géométrie ; pratiques de classe ; tâche complexe ; réflexivité.

Abstract: This paper presents the first results halfway through a research and development production resources for student teachers training in plane geometry. We develop and test some geometric activities centered on reflexive uses of geometry instruments in construction tasks. To this end, we propose a training situation based on taking into account the interactive and reflexive types of tasks: "Building a coded geometric design", "describe as a program construction done" and "formulate a theoretical justification of the construction ".

Keys word: training resources, geometry instruments, classroom practices, complex task, reflexivity

I. INTRODUCTION

La présente communication est une synthèse du bilan à mi-parcours d'un projet de recherche-développement (Perrin-Glorian, 2011) sur la réalisation de ressources pour la formation d'enseignants en mathématiques. L'étude porte en particulier sur l'usage des instruments de géométrie en formation d'enseignants au Second Cycle Fondamental (équivalent du collège en France). De façon récurrente, nous nous sommes posé la question sur les approches d'élaboration de ce type de ressource de formation, sur les méthodes de sa mise en œuvre. Le dispositif conçu à cet effet, s'appuie sur les concepts de système de représentation sémiotique, de système de représentation non sémiotique (Duval, 2014) et celui de configuration géométrique dans le plan. Ce travail succède à une première expérience de formation d'enseignants centrée sur une caractérisation non usuelle des transformations géométriques (Sangaré, 2010) ; les résultats obtenus ont permis aux élèves-professeurs de prendre conscience de l'intérêt didactique lié aux opérations de reconfiguration d'une figure (Duval, 2003) lorsque celle-ci est composée des figures objet et image homologues dans une

[*] École Normale Supérieure de Bamako – Mali – email : mamadoussangare@yahoo.fr
[**] École Normale Supérieure de Bamako – Mali – email : dissasinaly@gmail.com

Sangaré M.-S., Dissa S. (2015) Pour un usage réflexif des instruments de géométrie. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT6, pp. 612-623.

transformation donnée ; cependant, ils demeurent le plus souvent démunis face à des activités de mise en relation pertinente dans l'enseignement, d'une technique de construction d'un dessin géométrique, de la description de celle-ci sous forme de programme de construction, et surtout de la formulation des propriétés géométriques qui y sont sous-jacentes.

II. CONTEXTE

Nous entamons ce travail au moment où l'École Normale Supérieure de Bamako se trouve dans une phase de mise en œuvre du plan de basculement vers le système Licence-Master-Doctorat (LMD) amorcé depuis 2011. Il coïncide avec l'opérationnalisation au second cycle fondamental et au lycée, de la reformulation des contenus d'enseignement au Mali en termes d'Approche Par Compétences (APC). Par ailleurs, cette recherche s'effectue en filière « Professeurs d'Enseignement Fondamental (PEF)[1] – option mathématiques et sciences expérimentales». Recrutés à l'entrée sur concours professionnel après cinq années d'expérience professionnelle, les impétrants de cette filière sont chargés à leur sortie de rehausser la qualité de l'enseignement au second cycle fondamental. L'objet d'étude porte précisément sur le module intitulé « enseignement de la géométrie » ; il vise un triple objectif afin de permettre aux élèves-professeurs :

- de s'approprier le statut et les fonctions de la géométrie à travers les programmes, et leurs évolutions respectives du second cycle fondamental au lycée ;
- d'appréhender la géométrie en tant que domaine de modélisation de problèmes connexes aux mathématiques (physique, chimie, etc.), ou de problèmes « concrets » ;
- de construire des ressources pédagogiques en géométrie conformes au curriculum en vigueur, de les mettre à l'épreuve de la pratique de classe en adoptant constamment une attitude réflexive sur les résultats obtenus.

Aussi, nous nous proposons de mettre en place un cadre conceptuel et une approche méthodologique pour élaborer et mettre à l'épreuve certaines ressources de formation liées à des usages d'instruments de géométrie, qui tiennent compte des expériences scolaires et professionnelles des élèves-professeurs tout en s'inscrivant dans la nouvelle formulation des contenus d'enseignement.

III. CADRE CONCEPTUEL

Nous développons deux notions-outils encore en chantier, qui sont couramment utilisées dans l'enseignement de la géométrie au second cycle fondamental et au lycée. La première est relative à la notion de configuration géométrique dans le plan. La seconde concerne l'usage d'instruments de géométrie en référence au concept de représentation non sémiotique des objets géométriques (Duval 2014). Leurs origines respectives découlent d'observations effectuées lors des séances de formation liées à des activités géométriques proposées aux élèves-professeurs.

1. La configuration géométrique

Dans la littérature relative à la didactique des mathématiques et à la formation des enseignants en géométrie, la notion de configuration apparaît le plus souvent dans les recherches menées sur la problématique dessin/figure ou encore, connaissances pratiques/connaissances

[1] Au Mali, le Professeur d'Enseignement Fondamental enseigne au second cycle fondamental (équivalent du collège en France).

théoriques. Ainsi, Robert (1998) énonce que dans le vocabulaire courant au niveau de l'enseignement actuel de la géométrie, le terme " configuration " est utilisé pour remplacer celui de figure, « notamment lorsque la figure concernée, d'usage fréquent, est souvent rencontrée par les élèves et doit leur devenir familière Ibid. 1995, p. 26». Pour Destainville (1990), le " dessin codé " peut être considéré comme la représentation spatio-graphique de propriété(s) géométrique(s) que l'on veut privilégier par rapport à d'autres à propos d'une figure géométrique de référence donnée.

Notre point de vue est que la notion de configuration relève de deux exigences de l'enseignement de la géométrie au second cycle fondamental et au lycée: l'une résulte de sa légitimité théorique par rapport aux mathématiques, l'autre relève de la recherche d'une présentation ostensive minimale pour assurer la réussite d'un apprentissage provoqué (Sangaré, 2000). Aussi, nous qualifions cette légitimité théorique de la notion de configuration par une des propriétés caractéristiques[2] de la figure géométrique concernée. Elle est alors considérée comme une des significations de la figure géométrique visée. Autrement dit, une telle conception met en relief la polysémie de la figure géométrique. Cependant, cette conception est en rupture avec certaines pratiques de classe, particulièrement en résolution de problème de géométrie sur les figures planes ; en effet, la définition d'une figure géométrique préconisée par les contenus institutionnels d'enseignement devient si prégnante qu'elle inhibe le plus souvent l'appréhension des autres propriétés caractéristiques. Une illustration est donnée comme ci-dessous à propos de deux configurations du triangle rectangle avec les dessins géométriques associés (*Figure 1*) ; 73% des élèves-professeurs interrogés affirment qu'ils utilisent très peu ces deux configurations :

- un triangle dont le milieu d'un côté est équidistant de ses trois sommets est un triangle rectangle ;
- un triangle dont deux angles sont complémentaires est un triangle rectangle.

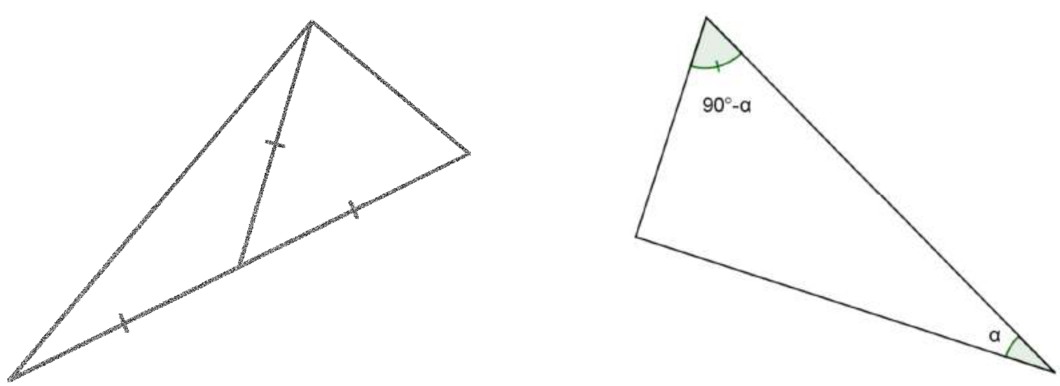


***Figure 1** – Deux dessins géométriques codés associés à deux configurations géométriques du triangle rectangle.*

[2] En référence au Dictionnaire des Mathématiques de Bouvier A., George M. Le Lionnais F. (1996) qui dit à propos de« Propriété caractéristique d'un objet mathématique » ce qui suit : « Lorsque plusieurs assertions sont équivalentes, si l'une d'entre elles est choisie comme définition d'un objet mathématique, les autres sont alors dites propriétés caractéristiques de cet objet. Ainsi, lorsque pour un triangle T, les assertions suivantes sont équivalentes : « T possède deux côtés isométriques » et « T possède deux angles de mesures égales ». Usuellement, la première assertion est choisie comme définition d'un triangle isocèle ; la seconde en est alors une propriété caractéristique. Ce choix est évidemment arbitraire et n'est motivé que pour des raisons psychologiques ou pédagogiques, non mathématiques. (1996, p. 115)

La disponibilité de configurations différentes d'une même figure géométrique favorise a priori l'entrée des élèves dans un processus de changement de point de vue pour résoudre un problème de cette classe. Elle doit permettre une exploration heuristique de la figure dans une perspective de rupture avec les pratiques de classe qui favorisent la fixation des élèves sur la seule propriété caractéristique choisie comme définition au niveau des programmes officiels.

2. *Les instruments de géométrie comme système de représentation non sémiotique*

Dans la réalisation d'un type de tâche (Chevallard 2001), tel que « construire à l'aide des instruments de géométrie une figure géométrique donnée », nos pratiques de classe privilégient le plus souvent la stratégie fondée sur la mise en relief de deux étapes : la traduction dans le spatio-graphique des données de la construction et la production du "dessin géométrique codé solution". Ainsi, les étapes intermédiaires sont occultées, leurs traces sont en général effacées au profit du "dessin solution". Nous relevons deux inconvénients de nature didactique au niveau de cette stratégie d'usage courant au second cycle fondamental, en enseignement de la géométrie.

Le premier inconvénient est que l'occultation des traces de construction dans les pratiques de classe, occulte par la même occasion l'appréhension de certaines connaissances géométriques qui sont sous-jacentes aux gestes techniques effectués pour réaliser le dessin "géométrique solution". Cette hypothèse se fonde sur les résultats obtenus par Parzysz (2006) ; ceux-ci montrent que les futurs professeurs d'école en France «ne relient pas nécessairement les savoir-faire (constructions géométriques classiques) aux théorèmes qui les justifient, (ibid., p. 128) ». En guise d'exemple, la construction de la droite (*D'*) parallèle à une droite (*D*) et qui passe par un point *A* extérieur à (*D*) à l'aide du jeu d'instruments, {*règle non graduée, équerre*} peut s'effectuer par plusieurs techniques ; nous en donnons deux comme sur la (*Figure 2*). La mise en relief des traces de construction (en pointillés) permet d'appréhender les propriétés pouvant être attachées respectivement aux techniques de construction :

- Si une sécante commune découpe sur deux droites des angles correspondants de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles ;
- Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.

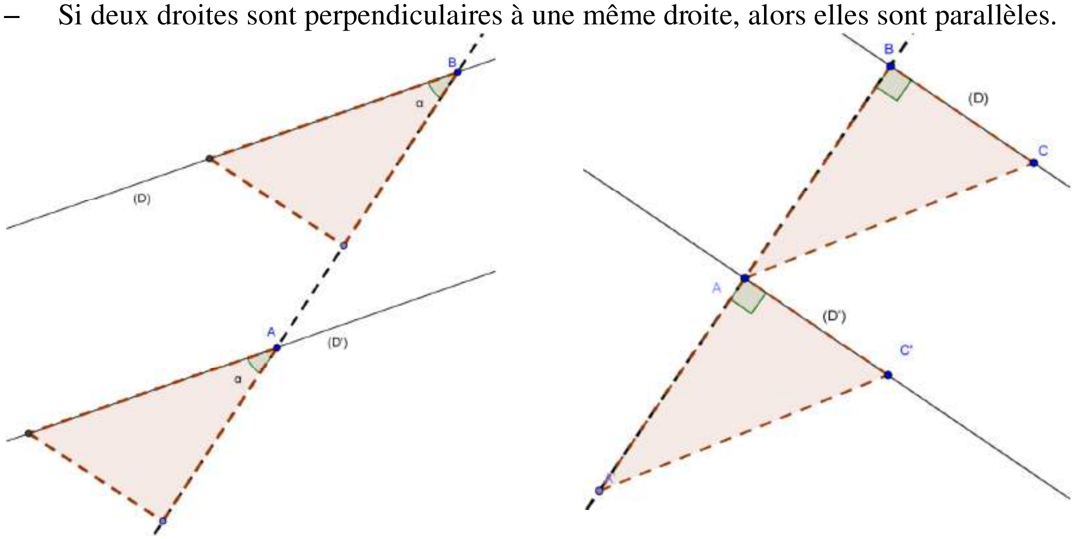


Figure 2 *– Deux techniques de construction de la parallèle à une droite (D) donnée et passant par un point A extérieur à (D).*

On peut remarquer que la deuxième propriété citée peut être considérée comme un cas particulier de la première.

Le second inconvénient est que dans nos pratiques de classe, la construction instrumentée en géométrie apparaît comme un type de tâche où l'essentiel de l'évaluation des productions d'élèves repose en général sur un contrôle expérimental du dessin géométrique codé. La description de ce type de production d'élèves est souvent absente ; elle se réduit à des explications orales qui stabilisent en classe, des échanges stéréotypés sur l'usage des instruments de géométrie. Par ailleurs, considéré comme système producteur de représentation non sémiotique, le système des techniques de construction instrumentée se prête néanmoins à des opérations caractéristiques d'un registre au sens de Duval (2014) : le traitement et la conversion.

Le traitement : Le même jeu d'instruments peut produire des dessins géométriques qui renvoient à la même figure géométrique, mais se distinguent par les configurations géométriques respectivement sous-jacentes à ces dessins géométriques : l'illustration donnée par la Figure1 en est un exemple. Par ailleurs, deux jeux d'instruments distincts peuvent produire des dessins géométriques qui renvoient à la même figure géométrique et à la même configuration géométrique sous-jacente à ces dessins géométriques ; c'est le cas des jeux d'instruments {règle non graduée, compas} et {règle non graduée, rapporteur} à propos de la construction de la droite parallèle à une droite donnée (D) passant par un point A extérieur à (D) par la technique liée aux angles associés à deux droites parallèles. Ainsi, nous considérons les jeux d'instruments comme des variables didactiques dans toute situation de construction instrumentée au regard de leur influence sur les techniques de production d'un dessin géométrique et par la suite, sur les propriétés géométriques sous-jacentes à ces techniques.

La conversion : Le processus de réalisation d'un dessin géométrique codé utilisant un jeu d'instruments peut être représenté par une suite ordonnée de gestes techniques qui se décrit sous forme de programme de construction dans la langue d'enseignement. Ce choix permet a priori d'inciter le constructeur à mettre en rapport les connaissances techniques et les connaissances langagières de description, en particulier celles qui sont liées à la langue d'enseignement. Il permet également de *prolonger la classe en dehors de la classe* : une bonne description d'une construction géométrique favorise la reprise par les élèves des activités géométriques en dehors de la classe, afin de consolider les acquisitions faites en présentiel. La description retrouve alors un intérêt didactique en tant que moyen de communication et d'institutionnalisation des acquis même si ceux-ci ne sont que partiels.

En résumé, nous rejoignons le point de vue de Rabardel (1995) pour dire que les instruments ne sont pas neutres, au moins pour les premiers apprentissages de la géométrie. Certaines traces de construction instrumentée peuvent jouer un rôle heuristique en début d'apprentissage de la démonstration en 8$^{\text{ième}}$ (4$^{\text{ième}}$ de collège en France). L'inhibition de ces traces représentées par les traits en pointillés, freine (bloque souvent) le processus d'appréhension perceptive des propriétés sous-jacentes à la construction : les élèves se contentent alors de ce qui leur reste en mémoire des seuls gestes du constructeur. C'est en nous fondant sur ce cadre conceptuel, qu'un type de tâche est proposé aux élèves-professeurs dans une perspective d'élaboration de ressource de formation.

IV. APPROCHE MÉTHODOLOGIQUE

L'approche méthodologique est structurée à travers une prise en compte conjuguée des aspects mathématique, didactique et pédagogique en formation d'enseignants. Pour cela, nous nous inspirons du point de vue développé par Perrin-Glorian (2011, p. 69) sur « l'ingénierie didactique pour le développement et la formation (I.D.D.) ». Les activités géométriques proposées dans cette étude résultent de certains choix liés aux pratiques de classe observées en géométrie au second cycle fondamental et même en début de lycée.

Nous nous appuyons sur le concept de réflexivité critique comme outil de construction de ces compétences en incitant les élèves-professeurs à adopter une « …posture qui vise une transformation, qui se travaille collectivement et avec méthodes, qui mobilise et permet de s'approprier des savoirs théoriques et pratiques » (Voz & Cornet 2009, p.2). En effet, il s'agit d'amener les élèves-professeurs à problématiser certaines traces de construction comme objet d'étude ; cette problématisation pourrait être introduite à partir d'interrogations sur la (ou les) signification(s) attribuable(s) à ces traces en termes de configurations géométriques pour une justification théorique du dessin produit par une technique de construction instrumentée.

1. *Situation de formation proposée : une « tâche en quatre sous-tâches » étroitement liées*

Le type d'activité géométrique choisie comme situation de formation proposée aux élèves-professeurs est relatif à la mise en relation de quatre sous-tâches suivantes :

- *ST_1 : construire à l'aide de jeu d'instruments un dessin géométrique codé d'une figure géométrique donnée ;*
- *ST_2 : décrire dans la langue d'enseignement, le programme de construction effectuée ci-dessus ;*
- *ST_3 : justifier la construction effectuée.*
- *ST_4 : Identifier les effets possibles d'une présentation isolée des trois premières tâches en enseignement de la géométrie ? Même question pour une présentation interactive des trois premières tâches en enseignement de la géométrie ? Formuler à chaque fois les arguments justificatifs aux réponses données.*

Deux items sont proposés :

Item 1 : Construction de la parallèle (*D'*) à une droite (*D*) donnée et qui passe par un point *A* donné extérieur à (*D*).

Item 2 : Construction de la perpendiculaire (*D'*) à une droite (*D*) donnée et qui passe par un point *A* donné extérieur à (*D*).

Consigne : les jeux d'instruments autorisés sont {règle non graduée, équerre}, {règle non graduée, compas}, {règle non graduée, rapporteur}.

2. *Justification du choix de la situation de formation : une « tâche en quatre sous-tâches» étroitement liées*

Nous avançons trois arguments pour le choix de la situation de formation.

- Cette situation de formation est en rupture avec les expériences vécues par les élèves-professeurs lors de leur cursus au second cycle fondamental ou au lycée. En effet, nos pratiques de classe présentent les trois premières sous-tâches énoncées plus haut isolément les unes des autres. De ce fait nous voulons d'abord problématiser en formation, la prise en compte interactive de l'action liée à : la construction instrumentée effective du dessin géométrique codé, la formulation à travers une description de la construction effectuée précédemment, et la justification théorique de toute situation de construction géométrique par une configuration de la figure géométrique en jeu (Brousseau, 1987). Au vu des résultats obtenus, sur ces trois premières sous-tâches, il s'agit de faire réagir les élèves-professeurs sur la possibilité d'un éventuel réinvestissement des acquis dans les pratiques enseignantes par l'adoption d'une posture réflexive.

- D'un autre point de vue, nous avons constaté qu'au niveau des pratiques de classe, la mise en œuvre des techniques de construction géométrique est totalement déconnectée de la technologie (Ibid. 2001). Or c'est la seconde qui rend à la première sa légitimité théorique au sens de la géométrie euclidienne ; en dehors de cette vision interactive, l'exercice des seules techniques risque de modifier la tâche de construction instrumentée en une tâche artisanale. Ceci nous semble être un facteur qui pourrait nuire à l'exercice d'une vigilance épistémologique dont la responsabilité incombe à l'enseignant.

- Le choix d'une méthode fondée sur la prise en compte des interactions entre construction – description – justification pourrait faciliter au niveau des pratiques de classes une certaine désacralisation du dessin géométrique initialement obtenu (ou donné), en le considérant comme une représentation spatio-graphique pouvant être l'objet de modifications dans un processus de *sur-construction/déconstruction*, faisant éventuellement apparaître d'autres configurations favorables à l'adoption d'une démarche heuristique dans les activités géométriques. En particulier, la résolution d'un problème s'avère plus ardue lorsque pour la figure géométrique en jeu, la (ou les) configuration(s) les plus pertinente(s) sont les moins sollicitées dans les pratiques de classe comme l'illustre les exemples donnés en (*Figure1*).

3. Choix d'un modèle de scénario de mise en œuvre

Le scénario de déroulement de la séquence de mise en œuvre repose sur le respect des consignes données pour leur accomplissement, dans une perspective de prise d'attitude réflexive sur les productions réalisées au niveau de la quatrième sous-tâche. A cet effet, le public cible étant constitué d'adultes, nous choisissons de leur faire vivre lors des séances « des moments collectifs (Robert 2005, p. 82) ». Ainsi, le travail proposé est effectué par *21* élèves-professeurs repartis en *7* groupes d'égal effectif, avec l'exigence le plus souvent, de retravailler d'avantage les productions initiales après une séance de bilan à mi-parcours. La réalisation des activités géométriques proposées exige a priori des opérations de traitement et/ou de conversion dans les registres de représentation sollicités (Duval 2003). Le respect des contraintes fixées doivent permettre l'émergence de conflits cognitifs et/ou sociocognitifs au sein des groupes ou au moment des séances de bilan à mi-parcours. Ce choix repose sur la préconisation institutionnelle pour une plus grande professionnalisation de la formation d'enseignants dans le système LMD.

V. PRÉSENTATION DE QUELQUES PRODUCTIONS

L'analyse des productions d'élèves-professeurs se focalise en particulier sur les argumentations développées par les groupes de travail sur chacun des trois premières sous-tâches lors de la séance de bilan. La quatrième sous-tâche a fait l'objet d'une attention particulière suivant d'éventuelles retombées en termes d'activité de formation sur l'enseignement de la géométrie au second cycle fondamental.

1. Place et fonctions des traces de construction dans les pratiques enseignantes

L'examen des productions, montre que certaines traces de construction sont inexistantes ou effacées partiellement ou entièrement (2 groupes sur 7). Par ailleurs, la fonction qui apparaît majoritairement est celle d'auxiliaire temporaire (5 groupes sur 7) pour la construction du dessin géométrique en jeu. On perçoit cette pratique sur la production du Groupe 4 (*Figure 3*).

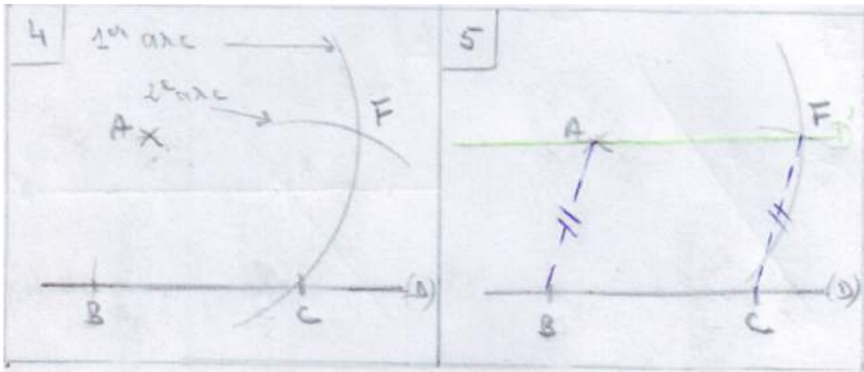


Figure 3 - *Production du Groupe 4 pour la construction de la parallèle (D') passant par A à (D) à l'aide du jeu d'instruments {règle non graduée, compas}.*

Cependant, suite à une suggestion lors du bilan dirigée par le formateur au Groupe 4 de reprendre cette production en traçant entièrement les cercles au lieu des deux arcs indiqués, un second point d'intersection des deux cercles est apparu (*Figure 4*). La technique du groupe est fondée sur les propriétés géométriques du parallélogramme, en particulier sur l'égalité des longueurs deux à deux des côtés opposés. Pour relancer l'activité, il a soumis la question ci-après à toute la classe : « quel critère faut-il donner à des élèves du fondamental pour choisir l'un des deux points d'intersection des deux cercles pour que le quadrilatère correspondant soit un parallélogramme ? » Après un bref débat au sein de la classe, le critère de « convexité du quadrilatère-solution » a émergé. Or nos pratiques de classes en géométrie font apparaître la convexité d'un quadrilatère comme une de ses propriétés devant être perçue sur le dessin géométrique et utilisée de façon implicite dans les activités géométriques. De plus, la catégorisation des quadrilatères (Buekenhout 2006) selon des critères géométriques est rarement l'objet de problème dans nos pratiques de classe.

Cet épisode du bilan a permis de montrer que les traces de construction ne sont pas neutres dans l'apprentissage de la géométrie, particulièrement pour les tâches de construction instrumentée : il est possible de leur attribuer une fonction didactique dans les pratiques de classe en géométrie.

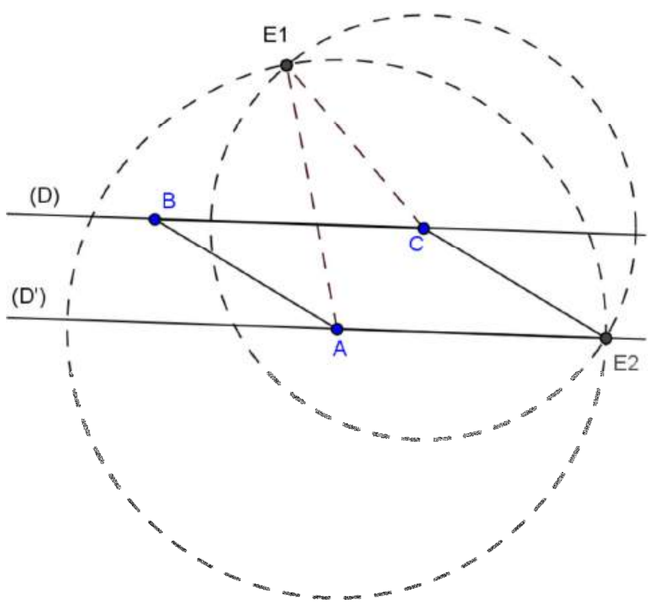


Figure 4 - *Une reprise de la Figure pour le tracé entier des deux cercles*

2. *Les productions d'élèves-professeurs sur le type de situation présentée*

L'un des objectifs de ce travail est de mettre à l'épreuve la pertinence de la situation de formation donnée sous l'étiquette « tâche en quatre sous-tâches » : *construction instrumentés – description en programme de la construction – justification théorique de la construction.* Nous donnons ci-après une analyse de deux productions.

Groupe 4 : En conclusion du bilan de la production de ce groupe (***Figure 3** et **Figure 4***), la nécessité de prendre en compte les interactions possibles entre les trois premières sous-tâches de construction instrumentée est apparue plausible chez les élèves-professeurs ; nous l'interprétons de la façon suivante.

- La construction effective des deux cercles sur le dessin géométrique (***Figure 4***) a montré de visu, la présence des deux points E_1 et E_2 : cette prise en compte des traces de construction a permis de rendre problématique le choix du point-solution entre E_1 et E_2, même si ce choix repose ici sur des critères de nature perceptive ; nous sommes dans la réalisation de la *sous-tâche1*.
- C'est ainsi que la question sur le critère choix du quatrième sommet du parallélogramme solution s'est posée ; la recherche a été menée à l'aide du dessin géométrique ; de façon précise, une réécriture de la description initiale s'est avérée nécessaire : nous sommes dans la réalisation de la *sous-tâche2*.
- Cependant, la description du choix entre E_1 et E_2 doit a priori s'appuyer sur des critères de nature géométrique (la convexité du quadrilatère-solution) : nous sommes dans la réalisation de la *sous-tâche3*.

Groupe 5 : Une copie de la production effectuée par ce groupe sur la tâche de construction de la parallèle (*D'*) à (*D*) passant par le point *A* extérieur à (*D*) à l'aide du jeu d'instruments {règle non graduée, rapporteur} est donnée en (***Figure 5***).Elle nous a permis d'analyser la cohérence entre les trois premières sous-tâches, et la pertinence de l'acception une « tâche en quatre sous-tâches».

- La technique de construction est fondée sur les relations entre les angles associés définis par une sécante commune à deux droites parallèles (ici angles correspondants). Cependant, on peut noter l'équivoque observable entre la mesure commune supposée exacte des angles correspondants sur le dessin (*60°*) et la description associée à travers l'extrait « Trace une[3] droite passant par *A* et qui coupe la droite (*D*) en *B* ». Une autre incohérence est perceptible entre d'une part le dessin géométrique et la description, et d'autre part la justification théorique (l'énoncé du postulat d'Euclide). En définitive, la prise en compte des interactions deux à deux des trois premières sous-tâches n'est pas spontanée chez les élèves-professeurs dans les pratiques de classe en géométrie des figures. Ceci semble conforter l'hypothèse selon laquelle cette lacune peut être considérée comme objet de formation.

[3] C'est nous qui le soulignons.

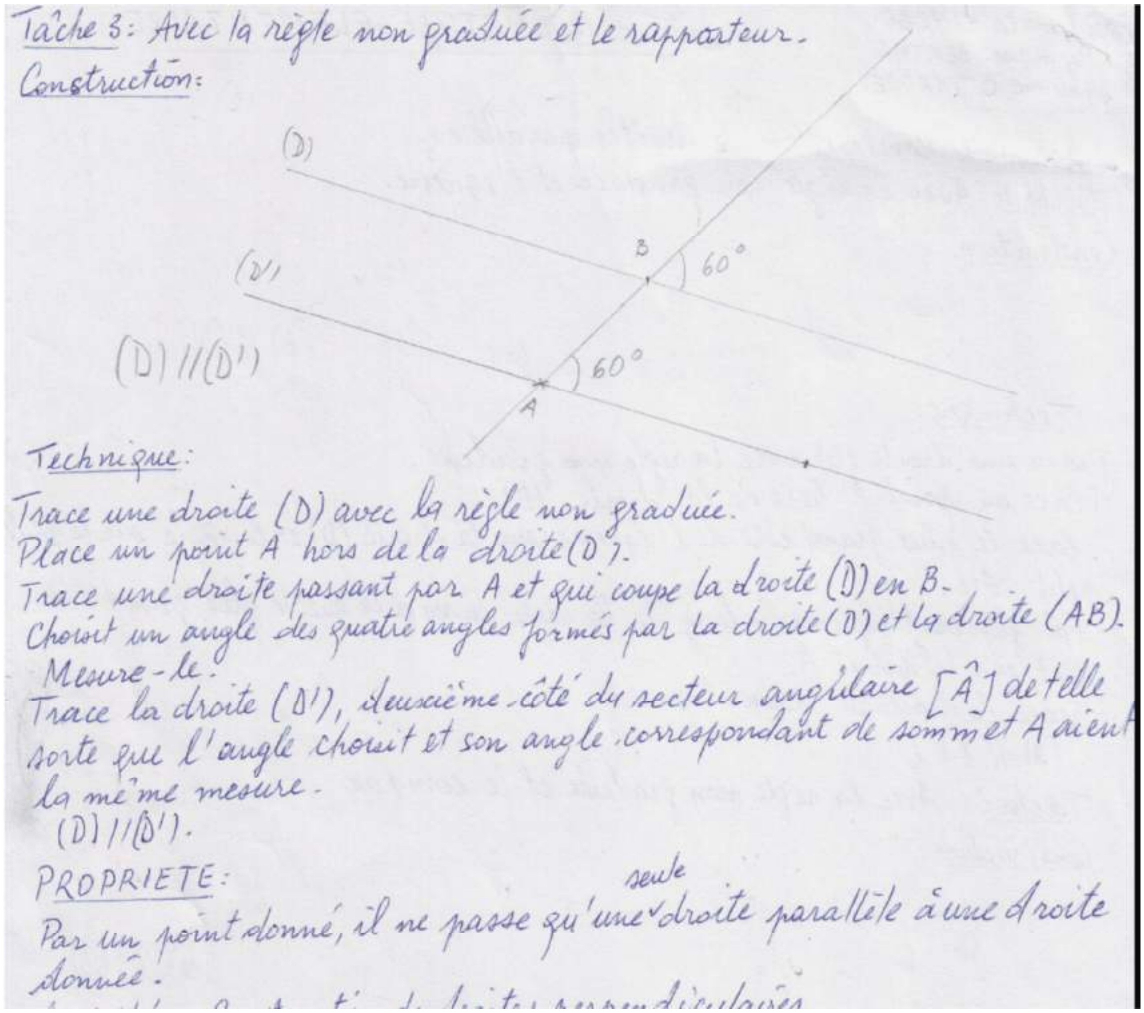


Figure 5 - *Production du Groupe5 pour la construction de la parallèle (D') passant par A à (D) à l'aide du jeu d'instruments {règle non graduée, rapporteur}.*

3. *Les productions d'élèves-professeurs sur la quatrième sous-tâche* ST_4

L'objectif principal ici était de mettre à l'épreuve l'attitude de réflexivité chez les élèves-professeurs par l'extériorisation des équivoques pouvant se manifester en classe de géométrie sur les trois premières sous-tâches, puis chercher leur origine afin de proposer d'éventuelles solutions.

Fonction des traces de construction : Les propos échangés lors de la phase de bilan ont fait ressortir une seule fonction des traces par rapport au point de vue des élèves-professeurs sur les pratiques de classe en géométrie : les traces sont des auxiliaires de construction ; elles ne sont pas mises en relation avec les propriétés sous-jacentes à la production du dessin géométrique codé. Par ailleurs, plusieurs groupes (*4* sur *7*) ont soulevé la question liée au fait que trop de traces de construction rend difficile l'appréhension visuelle des propriétés géométriques sur le dessin : « comment faire alors le choix de traces pertinentes? »

Fonction de la description sous forme de programme de construction : *6* des *7* groupes trouvent que la description d'une construction géométrique se réduit le plus souvent à une explication orale circonstancielle des gestes techniques effectués lors de la construction. Cette explication est rarement l'objet d'une institutionnalisation, et en général détachée de toute intention pédagogique comme par exemple, lui attribuer une fonction de mémorisation écrite de la construction géométrique. Or c'est par cette fonction de mémorisation que l'enseignant peut offrir la possibilité aux élèves de *prolonger la classe en dehors de la classe.*

La justification théorique de la construction : Sur deux items, un seul groupe sur les *7* a pu produire une justification théorique cohérente de la technique de construction, avec cependant une description assez confuse. Les raisons évoquées pour cet échec massif pour une telle tâche est que la justification théorique est très peu sollicitée dans les pratiques de classe en construction géométrique : on se contente le plus souvent de la conformité perceptive du dessin géométrique produit, ou des fois, d'un contrôle expérimental.

En particulier, *4* groupes sur *7* reconnaissent que les propriétés géométriques d'une figure donnée sont le plus souvent sollicitées de façon ostensive (rarement par écrit) comme outil de construction géométrique. De plus, ils attribuent cette lacune au fait que les pratiques de classe privilégient peu l'usage d'une diversité assez large de configurations géométriques associées à une figure géométrique donnée. Ainsi, l'activation de l'une des deux configurations représentées dans le spatio-graphique en (*Figure 1*) s'avère problématique dans une tâche de construction instrumentée d'un triangle rectangle en raison de la prégnance de la définition préconisée par les programmes (présence d'un angle droit dans le triangle).

VI. CONCLUSION

Les jeux d'instruments renvoient à des techniques gestuelles dont le produit est le dessin géométrique codé ; un travail d'investigation et de diversification de leur usage pourrait enrichir la classe des activités de construction géométrique instrumentée. Certaines traces de construction pertinentes (dont le choix est de la responsabilité didactique de l'enseignant) doivent permettre aux élèves de lier les techniques de construction instrumentée à des configurations géométriques sous-jacentes ; cette liaison donne par la suite un sens théorique au geste technique ; l'absence de cette liaison fait de la construction instrumentée une tâche artisanale. Le système producteur de dessins géométriques codé, fondé sur des techniques gestuelles de construction ne doit pas s'ériger en une ressource implicite souvent source de malentendus dans les relations didactiques en classe de géométrie au moins pour les premiers apprentissages de la démonstration : toute technique de construction instrumentée doit être finalisée au moins par la technologie sous-jacente.

Par ailleurs, les instruments ne sont pas neutres dans l'apprentissage de la géométrie ; dans nos pratiques enseignantes, leur usage artisanal semble prendre le dessus sur leur usage en posture réflexive : la conception de ressources autour des traces et des configurations constituent une tentative didactique pour inverser cette tendance. L'instrument et le jeu d'instruments sont au service des tâches de production dans le spatio-graphique, mais la mise en relief de certaines traces constitue un levier pour faire entrer les élèves dans la construction d'une signification théorique du geste technique accompli. Les traces de construction judicieusement mises en relief, et le type de situation de formation « une tâche à quatre composantes interactives » constituent un vivier potentiel pour concevoir des ressources pertinentes en formation autour de connaissances de nature diverse, qui demeurent le plus souvent implicites dans les pratiques de classes en géométrie.

Enfin, ce travail nous a permis d'identifier quelques pistes pour l'étude des rapports entre situation d'enseignement et situation de formation d'enseignants. Ce travail doit se poursuivre en approfondissant l'étude de cette catégorie de situations de formation puis, envisager des expériences similaires dans un environnement de géométrie dynamique.

REFERENCES

Bouvier A., George M., Le Lionnais F. (1996) *Dictionnaire des mathématiques*. Presses Universitaire de France.

Brousseau G. (1987) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Buekenhout F. et al. (2006) Classification objective des quadrilatères. *Les Cahiers du CeDoP à l'adresse : http://www.ulb.ac.be./cedop/index_12.html*

Chevallrd Y. (2001) Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions. In Dorier et al. *Actes de la 11e école d'été de didactique de mathématiques*, (pp. 3-22). La Pensée Savage – Éditions.

Destainville B. (1990) *Transformations et configurations du Collège à la Seconde*. In Bulletin INTER-IREM (1989-1990), pp.119-124

Duval R. (2014) Comment analyser le problème de la compréhension des mathématiques ? *Revista IberAmericana* 37, 9-29. *www.fisem.org/Web/union*

Duval R. (2003) Décrire, visualiser ou raisonner : "quels apprentissages premiers" de l'activité mathématique ? *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives* 8, pp. 13-62.

Parzysz B. (2006) La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in Didattica* (17), 128-151

Perrin-Glorian M-J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formation des enseignants. In En amont et en aval des ingénieries didactiques. *XVe école d'été de didactique des mathématiques* 1, 57-78.

Rabardel P. (1995) Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mise en situation. *Outils pour le calcul et le traçage des courbes. CNDP-DIE,* 61-65.

Robert A. (2005) Sur la formation des pratiques des enseignants de mathématiques du second degré. *Recherche et formation* (50), 75-89.

Robert A. (1998) L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques. *I. Géométrie, 2e édition, ellipses.*

Sangaré M. (2010) Une caractérisation non usuelle des transformations géométriques du plan pour une formation d'enseignants. *Petit x* 82, 31-54.

Sangaré M. (2000) *La rotation : approche cognitive – approche didactique. Une étude de cas au Mali.* Thèse de doctorat Université du Mali

Voz G., Cornet J. (2009) Comment former de futurs enseignants réflexifs? Quel est l'impact de la formation à la réflexivité ? Comment l'améliorer ? Réponses d'étudiants. In *ABC EDUC – journée d'étude : La formation des enseignants,* Bruxelles, 09/09/2009. https://www.google.com/search?q=reflexivit%C3%A9&ie=utf-8&oe=utf-8#q=VOZ+G.%2C+CORNET+J.+%282009%29 (consulté le 19-08-2015)

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'INTEGRATION DES RESSOURCES MATHENPOCHE UN MOTEUR POUR LE DEVELOPPEMENT DU TRAVAIL COLLABORATIF DES ENSEIGNANTS DE MATHEMATIQUES DE COLLEGE: CAS DE L'ALGERIE

Karima SAYAH[*]

Résumé – Le programme de la réforme Algérien vise la restructuration du système éducatif, privilégiant l'approche par les compétences (Perrenoud 1997) et l'introduction des TICe. Dans ce contexte, la mission didactique de l'enseignant de mathématiques devient plus complexe, elle requiert de sa part un questionnement de ses pratiques, ses ressources et ses connaissances professionnelles. Notre questionnement porte sur la capacité qu'a l'intégration des ressources Mathenpoche sur le travail collectif des enseignants. Pour éclairer nos questions, nous nous appuyons sur l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2008), que nous élargissons pour un suivi collectif. Nous présenterons dans cet article les résultats concernant une enseignante. Son travail avec le collectif a convergé vers la conception d'une nouvelle ressource (QCM) qui met en évidence une amorce d'évolution de son système documentaire.

Mots-clefs: Approche documentaire, approche par les compétences, travail collectif, développement professionnel, enseignement des mathématiques et TICE.

Abstract – The program of the Algerian reform is the restructuring of the education system, emphasizing the approach by skills (Perrenoud 1997) and the introduction of ICT. In this context, the educational mission of the mathematics teacher becomes more complex, it requires from him a questioning its practices, professional resources and knowledge. Our inquiry is about the ability of integrating Mathenpoche resources on the collective work of teachers. To illuminate our questions, we rely on the documentary approach of didactics (Gueudet & Trouche 2008), as we expand to a collective monitoring. We present in this paper the results for a teacher. His work with the group converged on the design of a new resource (QCM) that highlights a primer of changes in its documentation system.

Keywords: Documentary approach, approach by competence, collective work, professional development, mathematics and ICT

I. INTRODUCTION

Plusieurs pays, ont adopté l'approche par les compétences dans l'organisation de leurs curriculums, Le programme de la réforme Algérien (PARE[1]) vise la restructuration du

[*] Laboratoire Sciences et Société ; Historicité, Education et Pratiques (S2HEP), Université Claude Bernard Lyon 1 et École Normale Supérieure de Lyon. – FRANCE – lasmars@yahoo.fr
Sayah K. (2015) L'intégration des ressources MathEnPoche un moteur pour le développement du travail collaboratif des enseignants de mathématiques de collège: Cas de l'Algérie. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT6, pp. 623A-623Q

système éducatif, privilégiant l'approche par les compétences (Perrenoud 1997) et l'introduction des TICe.

À l'instar de nombreux pays et à l'ère du numérique, cette réforme du programme de l'éducation nationale a montré une forte volonté quant à l'intégration des technologies de l'information et de la communication dans l'enseignement (TICe). Ces derniers sont particulièrement bien adaptés aux champs des mathématiques. Pour (Marcel 2014) c'est le temps de la génération C, autrement dit la génération Connectée des trois « C » : communiquer, collaborer, créer qui chevauchent aussi bien pour les élèves que pour les nouveaux enseignants. Hormis dans sa tache professionnelle, ces actions sont désormais présentes via les réseaux sociaux pour cette génération. Nous pourrons à titre d'exemple marquer la présence des enseignants bénévoles de mathématiques d'Algérie via des sites non institutionnalisés ou via des associations[2].

Dans ce contexte, la mission didactique de l'enseignant de mathématique devient plus complexe, elle requiert de sa part un questionnement de ses pratiques, ses ressources et ses connaissances professionnelles. Nous fixons notre regard sur la documentation des enseignants de mathématiques, et sur leurs pratiques individuelles et collectives et leurs impacts sur leur développement professionnel (Engeström 1994).

Un bon exemple des activités collectives des enseignants aussi de mathématique est l'association *sésamath* née en 2001 de la fusion de plusieurs sites dédiés à l'enseignement de cette discipline, est un vrai modèle de mutualisation et de diffusion gratuite de ressources mathématiques. S*ésamath* est très connue du grand public pour ses manuels, ses cahiers d'activités et sa banque d'exercices connue sous le nom de l'exerciseur Mathenpoche (noté par la suite MEP[3]).

Notre communication vise à aborder la mise en oeuvre d'un travail collectif autour de Mathenpoche pour la conception d'une ressource dans l'enseignement des mathématiques. Nous tenons en compte le travail de l'enseignant en classe et hors classes et ses interactions avec les ressources mobilisées dans le collectif.

II. LE POSITIONNEMENT THÉORIQUE ET QUESTIONS DE RECHERCHES

1. L'approche documentaire et travail collectif des enseignants de mathématiques

Nous assistons ces dernières années à un foisonnement de ressources pour l'enseignement des mathématiques. Cette évolution entraîne des mutations profondes, non seulement des ressources, mais du travail même de l'enseignant de mathématique, et de son développement professionnel (Gueudet & Trouche 2008). Ce constat a été à l'origine de l'élaboration d'une approche spécifique: l'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2010). Pour assurer sa tache didactique, l'enseignant de mathématiques utilise, modifie, et adapte un ensemble de ressources matérielles et immatérielles dans un contexte individuel et/ou collectif. Dans notre recherche, nous nous positionnons sur l'approche documentaire sous son aspect à la fois individuel et collectif et sur la notion de ressource que l'enseignant de mathématique mobilise pour accomplir sa tache didactique.

---

[1] PARE: Programme d'appui de l'UNESCO à la réforme du système éducatif. En ligne: http://unesdoc.unesco.org/images/0015/001583/158372f.pdf

[2] Exemple de site Physique48 de Relizane www.physique48.com et l'Association Algérienne de Développement de l'Enseignement des mathématiques et des technologies de l'information. En ligne: www.aademti.dz

[3] Mathenpoche noté par la suite MEP. Logiciel d'apprentissage des mathématiques conçu par l'association *sésamath*. En ligne:http://mathenpoche.sesamath.net

Cette approche théorique permet d'analyser le travail documentaire des enseignants de mathématiques (Gueudet & Trouche 2009), mettre en relief les ressources individuelles, et les ressources développées dans un contexte collectif. Ces auteurs considèrent que le travail du professeur, se nourrit des ressources disponibles dans le collectif pour construire ce qui est nécessaire pour faire son métier. Ils considèrent que le professeur, dans son travail documentaire, dispose d'un ensemble de ressources de diverses nature qui vont donner naissance, pour une classe de situation[4] donnée, au cours d'une genèse documentaire, à un document (Gueudet & Touche 2010). Le travail documentaire du professeur est considéré le moteur d'une genèse documentaire, qui développe conjointement une nouvelle ressource (composée d'un ensemble de ressources sélectionnées, modifiées, recombinées). Toute genèse documentaire, pour un enseignant, est porteuse de développement professionnel. En ce sens que l'enseignant acquiert de nouvelles savoirs, de nouvelles compétences et de nouvelles pratiques (Gueudet & Trouche Ibid). Par «ressource» mathématique, ou en mathématique, nous regroupons, les manuels scolaires, les guides pédagogiques, les programmes scolaires et aussi les logiciels et les bases d'exercices libres tels que Mathenpoche (MEP) et les cahiers sésamath. La ressource mathématique selon (Adler 2010) provient du mot «Re-sourcer». Gueudet et Trouche (2010) accordent au même mot une place primordiale dans l'activité professionnelle, leur définition du terme s'aligne avec celle d'Adler (ibidem): Re-sourcer: « tout ce qui est susceptible de re-sourcer le travail des professeurs ». (Gueudet & Trouche 2010) Au terme ressource mathématique, nous acceptons toute entité ou élément matériel, humain ou culturel, numérique ou non ayant un trait avec l'activité professionnelle. L'approche documentaire distingue la ressource du document. Les ressource (humaines, matérielles, numériques, cahiers et manuels sésamath) constituent les ingrédients, des input dont l'enseignant a besoin pour créer son propre document, son Output. Cette conception se déroule dans un cycle fini pouvant faire retour aux actions et/ou ressources: les input. Contrairement à la ressource, (Pédauque 2006) définit le document par son usage, son intention didactique, et par l'information qu'il porte.

Nous utiliserons les termes ressource primaire et ressource intermédiaire dans le sens où l'enseignant s'approprie de ressources initiales (*primaires*), pour créer ses documents, on leur attribue le statut de ressources *intermédiaires*, après usage, elles seront révisées, réajustées, pour l'enseignant cette ressource est toujours en évolution dans un cycle de vie récursif déterminé, au bout duquel elle passe au statut de ressource *stabilisée*, qui fera partie de son système de ressource, et qui pourra contribuer à la création de nouvelle ressource.

A sa question « Pourquoi un enseignant refuserait-il de travailler en équipe? » (Perrenoud 1994, pp. 1) affirme « N'est-ce pas une façon de mettre en commun des idées, des hypothèses, des solutions, de tirer parti des différences de points de vue et de compétences, de favoriser une division optimale du travail, de renforcer l'identité de chacun? », le collectif d'enseignants collaborent, ainsi pour construire collectivement un certain nombre d'outils pédagogiques et didactiques ; c'est le cas lorsqu'ils décident de redéfinir des items d'évaluation (Marcel 2006), d'élaborer des modalités de corrections communes, de créer des fiches pédagogiques communes, etc. Pour (Grangeat 2011, pp.76-100-) « le travail collectif n'implique pas nécessairement une équipe, une communication en face-à-face ou même une régularité : il est déterminé par l'existence d'une mission ou d'un projet commun ou par la nécessité de partager des connaissances ou des ressources». Ce travail collectif franchit les murs de l'école pour instaurer une nouvelle forme du travail enseignant hors l'école en

[4]Ensemble de situations d'activité professionnelle voisines en termes de tâches à accomplir et de conditions à prendre en compte, qui vont engendrer des modalités d'action voisines. (Rabardel & Bourmaud 2005).

utilisant les technologies de l'information et de la communication. Ainsi les enseignants en s'auto-prescrivant de nouvelles tâches professionnelles agissent collectivement afin d'ajuster les finalités pédagogiques et didactiques aux contraintes et ressources dont ils disposent « réellement » dans l'école (Marcel 2004). Ces pratiquent individuelles alimentent le collectif d'enseignants, l'école tend donc à s'organiser et à fonctionner comme un réseau de compétences collectives où les compétences de chacun peuvent enrichir le réseau qui pourra être mobilisé à son tour par chaque acteur (Le Boterf 2006).

Pour notre cas nous soutenons que les pratiques des enseignants de mathématiques « novices »[5] évoluent vers celles des enseignants « experts ». Lors de ce processus les enseignants s'approprient, des possibilités techniques offertes par MEP, de son contenu mathématique, de l'intégration de ses manuels, de ses cahiers *sésamath* en les adaptant au contexte, et spécialement de ses outils pour l'enseignement de la géométrie ceci donne naissance à un développement d'un instrument (Trouche 2005).

2. *L'approche par les compétences et la notion de situation problème dans l'enseignement des mathématiques*

La compétence est un savoir-agir complexe qui prend appui sur la mobilisation et la combinaison efficace d'une variété de ressources internes et externes à l'intérieur d'une famille de situations (Tardif 2006), (Jonnaert 2009) (Figure 1). Evoquer l'approche par les compétences dans l'enseignement des mathématiques, nous renvoie aux référentiels institutionnel: «il s'agit d'identifier deux ou trois compétences par année (par exemple une compétence dans le domaine numérique, une compétence en géométrie, une compétence en grandeurs) ». Cette approche requiert de la part de l'enseignant de faire d'autres mathématiques celles qui placent l'activité de résolution de problèmes (Perrenoud 1995) comme moteur de l'apprentissage des mathématiques.

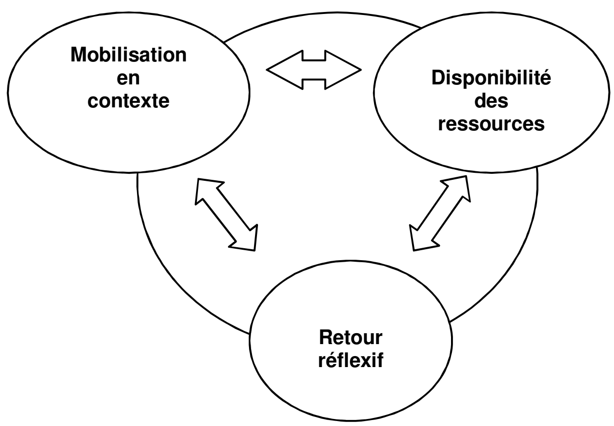


Figure 1 - *Les trois aspects de la compétence* [6]

Pour les mathématiciens comme pour les didacticiens, apprendre les mathématiques c'est faire des mathématiques. Chevallard (1981) éclaire cette spécificité: « les mathématiques sont moins un ensemble de connaissances (à acquérir) ou un corpus d'énoncés (à apprendre)

[5] Par enseignant novices, nous désignons tout enseignant de mathématique stagiaire, débutant ou tout enseignant débutant dans l'usage des Tice

[6] Citer dans: Développement des compétences professionnelle. Nicole tardif. En ligne: www.vitrinefrancais.qc.ca/img/ppt/comp_prof.ppt

qu'une activité spécifique dont les éléments essentiels sont des problèmes que l'on s'essaie à résoudre et qui sont en quelque sorte le moteur de l'activité mathématique, et des outils (concepts, méthodes,techniques) dont la construction elle-même est un problème mathématique et qui seront mis en fonctionnement pour résoudre des problèmes ».

Selon Meirieu (1989), Jonnaert (2002) la finalité de ces situations d'apprentissage conçues par l'enseignant est de créer un espace de réflexion et d'analyse autour d'un problème à résoudre. C'est dans ces situations problèmes que sont élaborées les notions et prouvées les connaissances opératoires et que sont extraites les propriétés pertinentes.

Dans la communication présente, nous nous centrons sur un objet d'étude, à savoir le travail collectif des enseignants de mathématiques autour des ressources de *sésamath* (MEP, manuels sésamath et les cahiers d'activité *sésamath*) et leur impact sur la conception des ressources et sur le développement professionnel des enseignants notamment stagiaires. le cadre théorique sur les compétences a été évoqué pour approcher la place des situations problème.

III. QUESTIONNEMENT ET MÉTHODOLOGIE

Nous proposons, dans le cadre de cette recherche, de nous intéresser à l'évolution des pratiques collectives des enseignants à l'école et hors l'école en utilisant un outil dédié au mathématique MEP et ses ressources. Plus précisément, nous étudierons en quoi le collectif d'enseignants organisé autour des ressources Sésamath (MEP et les cahiers d'activités) jouent un rôle dans l'évolution du système de ressources et des pratiques des enseignants membres.

Nous défendons l'hypothèse que le développement du travail collectif autour des ressources sésamath (MEP et les cahiers d'activités) a un retour sur le développement professionnel des enseignants, sur son système de ressource et sur ses connaissances, en se posant comme question: le travail collectif des enseignants autour des ressources sésamath (MEP, manuels sésamath et les cahiers d'activités) constituent-t-ils un appui pour la conception et la mise en oeuvre de ressources pour un enseignement des mathématiques basé sur les compétences en mettant en exergue la notion de situation problème et d'activité? et quels impact aura cette collaboration sur leur développement professionnel?

1. Nos outils méthodologiques

Le collège IMTIYAZ est un collège privé arabophone, selon les règles institutionnelles, tout enseignement doit se faire en langue arabe. L'enseignement des mathématiques n'en fait pas exception, toutefois, l'écriture et le symbolisme mathématique se font de gauche à droite en lettre française. Notre choix pour ce collège est lié à deux critères: Le collège dispose d'enseignants de mathématiques de différents profil (diplôme de mathématique, diplôme de biologie, diplôme de physique) et d'enseignants assez expérimentés et de formation bilingue, (assez expérimentés dans l'enseignement des mathématiques et dans l'usage des TICe). Le deuxième critère de choix de ce collège réside dans l'intégration des ressources francophone mais dans une classe non institutionnelle et hors des séances officielles de classe à savoir : le club de mathématiques.

Ce club active d'une manière exclusive au collège il est est animé par la coordinatrice pédagogique, ex enseignante, de longues expérience dans la formation, l'enseignement et l'inspection. Dans ce club adhérent des élèves de différentes classes et de différents niveaux, qui se rencontrent chaque semaine au cours d'une séance d' une heure trente minute. Les activités mathématiques pour chaque niveau, choisis (par la coordinatrice seule) sont issues de ses diverses ressources étrangères indépendamment du programme institutionnel et dans leurs langues d'origine. Ce club a donc servi pour les enseignants du collège, comme milieu de découverte de MEP, des cahiers d'activités et des manuels sésamath. Initialement, les enseignants sont invités par leur coordinatrice à assister au club. Leur rôle était double: découvrir d'autres ressources et approcher l'enseignement par les compétences par la mise en situation problème des élèves sous la direction de la coordinatrice.

Nous envisageons donc de suivre nos enseignants dans deux collectifs différents: Le premier collectif est composé de l'enseignante Meriem et de la coordinatrice dans le club de mathématiques, et le deuxième collectif composé de Meriem et de ses collègues Youcef[7] et Adam[8] assez expérimentés. On ne présente dans cet article que les données relatives au suivi de Meriem dans ces deux collectifs.

Notre méthodologie pour le suivi de nos enseignants s'inspire de la méthodologie d'investigation réflexive (Gueudet & Trouche 2009), elle est toujours en cours de développement. Nous précisons que cette méthodologie fait abstraction à l'aspect collectif. Nous proposons d'autres outils qui sont toujours en cours de développement:

<u>Des entretiens</u>: l'enseignant suivi a été interviewe en 3 temps. Un premier entretien au début de sa période de suivi, un deuxième entretien avant l'observation en classe, un troisième après le déroulement de sa séance.

<u>Des représentations schématiques du système de ressources</u>: Nous demandons à l'enseignant de reproduire sur un même support un schéma représentant son système de ressources individuel et son travail au sein du collectif. Notre question était formulée comme suit: «Merci de nous compléter ce canevas où vous précisez vous même en tant qu'acteur et tous les acteurs internes et externes à l'établissement avec qui vous collaborez, ainsi les ressources mobilisées par chaque acteur (ressources numérique ou autres), en précisant leur organisations sur les supports merci aussi de préciser votre colonne en couleur différentes, nous vous recommandons d'utiliser la légende qui se trouve sur ce canevas qui vous permet de représenter facilement votre schéma». Ce schéma est par la suite photocopié, il sert de canevas. Au cours de l'entretien précédant la séance observée, nous demandons à l'enseignant de reprendre la photocopie et de préciser les ressources et les acteurs qu'il a mobilisé pour créer sa ressources intermédiaire. Nous remettons par la suite à l'enseignant le canevas élaboré initialement et nous lui demandons de le commenter par rapport à celui qu'il a modifié pour concevoir sa ressource intermédiaire.

<u>Journal de bord:</u> Nous sollicitons l'enseignant de tenir un journal de bord pour renseigner son travail avec le collectif et l'évolution de sa ressource intermédiaire. Une fois cette ressources crée d'une manière individuelle, elle est révisée et discutée en collectif, après usage en classe, cette ressource intermédiaire est encore révisée par l'enseignant et par le collectif, sur le journal de bord doit donc figurer toute cette traçabilité d'activité, et ce n'est qu'en affectant le statut de ressource stabilisée à la ressource intermédiaire que l'enseignant clôture son journal de bord relatif à la ressource en question.

<u>Observation en classe enregistrée en video</u>: Nous demandons à l'enseignant de nous remettre sa ressource intermédiaire qu'il a préparé avec la date et l'horaire de son déroulement. Certain enseignants ont refusé d'être filmé, ce qui nous a obligé à filmer sans

[7] Youcef: Enseignant de formation bilingue, longue expérience dans l'enseignement des mathématiques et dans l'usage des TICe (diplôme universitaire pour l'enseignement de mathématiques)

[8] Adam: Enseignant de plus expérimenté des enseignants, titulaire d'une licence pour l'enseignement des mathématiques, exerçant à la fois de ce collège et dans un collège public. Aucune expérience dans l'usage de sTICe

leur apparition. L'objectif était d'étudier les usages des ressources sélectionnées par l'enseignant individuellement ou collectivement.

2. *Le choix de Mathenpoche (MEP)*

Sésamath est une association d'enseignants de mathématiques, dont la plupart des membres sont enseignants au collège. L'association a été fondée en 2001, par un petit groupe de professeurs qui souhaitaient mutualiser les ressources qu'elles développaient. Ils sont ensuite passés à la conception commune d'un exerciseur, MEP, couvrant l'intégralité du programme Français du collège. MEP a été immédiatement utilisé par de nombreux professeurs français et étrangers. Son action est placée dans une perspective de service public et considère les ressources éducatives qu'elle génère comme des biens communs qui peuvent servir à tous. Ses ressources sont structurées selon deux grands domaines : Les ressources pour les enseignants : afin de préparer ses cours, de les illustrer tels que les cahiers et les manuels sésamath. - Les ressources directement pensées pour les élèves, les parents ou toute autre utilisateur non enseignant. tels que le site MEP et qui peut être aussi utilisé par les enseignants. Notre choix pour MEP et les ressources sésamath est lié à la proximité de programmes de mathématique algériens et français. Nous ne s'intéressons pas à l'usage de MEP en ligne en classes mais à l'appropriation et l'adaptation de ces ressources (activités, QCMs etc..) parmi les ressources locales de l'enseignant dans sa pratique. Nous élargissons notre regard sur l'usage des cahiers d'activités sésamath qui ont pris leur place dans le cursus scolaire au niveau du collège.

IV. QUELQUES DONNÉES RECUEILLIES ET LEUR ANALYSE

L'objectif de notre communication est d'analyser le travail documentaire et l'impact du travail collectif autour de MEP pour la conception de ressources, d'une enseignante que nous nommons Meriem en s'appuyant sur un entretien général, ses représentation schématique de son système de ressources et sur notre participation à une séance de travail collective.

Meriem est à l'origine une enseignante d'informatique, elle est ingénieur d'état (Bac+5), elle n'a commencé à enseigner les mathématiques que dans le collège Imtiyaz, il s'agit d'une conversion de sa fonction, par besoin du collège. La réglementation en vigueur permet à un enseignant d'informatique d'enseigner les mathématiques au collège et même au lycée. Elle a trois (3) années d'expérience en enseignement des mathématiques au moment du démarrage de notre expérimentation. Durant sa carrière d'enseignante en informatique, elle a enseigné l'algorithmique pour les élèves du collège même, pendant aussi trois années. Le programme d'algorithmique traite les exercices mathématiques du programme institutionnel, elle entretient un travail collectif fréquent donc avec les enseignants de mathématiques. Nous avons suivi Meriem dans deux collectifs: au niveau du club de mathématique (donc en classe non institutionnelle) et au niveau de ses interactions avec ses collègues (en classe officielle).

Meriem est toujours encadrée par la coordinatrice pédagogique, et par un autre enseignant de longue expérience au collège. De part sa formation d'informaticienne, elle évoque un grand intérêt à l'usage des TICe dans ses pratiques. Nous lui avons demandé de nous établir un schéma représentant son système de ressource lors de son premier entretien (figure. 2) que nous avons gardé. A l'issue de ce schéma, de notre entretien et de son journal de bord, nous remarquons que Meriem entretient une collaboration timide avec l'ensemble des collègues: travail collectif avant chaque examen généralement, sur ce elle affirme « J'utilise les officiels je suis les recommandations de la coordinatrice lors des séances de coordination ».

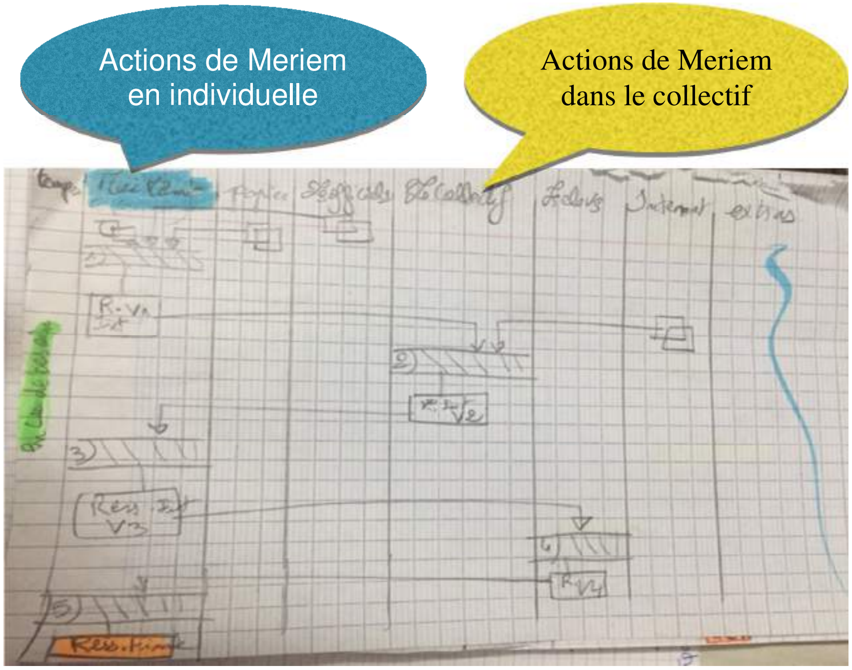


Figure 2 *–Schéma initial du système de ressource de Meriem à la fois individuel et collectif*

VII. *1. Observation de Meriem dans le club de mathématique*

Au cours de la même année de son suivi, Meriem est appelé à assister au club de mathématique, où elle découvre les activités des manuels MEP et des cahiers d'activités de sésamath mais en langue française. La coordinatrice témoigne que Meriem la sollicite souvent: « depuis qu'elle assiste au club, elle me demande souvent de lui prêter mes livres, malgré qu'ils sont en français, elle travaille dessus et me demande parfois de revoir sa traduction....pas littéraire mais surtout mathématiques». Meriem rajoute lors de l'entretien général: «On a de la chance dans ce collège, on est encadré d'enseignants, expérimentés, et qui sont prêts à nous aider à tout moment non seulement dans les séances officielles de coordination, mais on discute même entre les heures; pendant la récréation, avec d'autres enseignants même les stagiaires, je ne peux imaginer travailler seul, le groupe rapporte toujours un plus». Ces séances du club étaient considérées pour Meriem des séances de formation surtout à l'approche par les compétences: «J'apprend toujours de la coordinatrice qui anime ce club, j'apprend comment elle gère les groupes de sa classe, comment elle gère surtout le temps, comment elle guide les élèves à trouver la solution, ils sont très autonomes, et je prend toujours une copie de l'activité de la séance du club» Les activités du club étaient beaucoup plus structurées sous forme de QCMs, Meriem observait à la fois le travail des différents groupes et analysait en même temps le contenu du QCMs. Elle voyait que ces activités, à la fin d'un cours, peuvent lui servir à la fois, d'une évaluation et, pour les élèves comme outil de consolidation ou d'une révision : « Cette méthode me plait énormément, certes on l'a sur nos manuels mais je ne l'ai jamais utilisé, vu que les questions sont trop faciles, mais là c'est différents, ça pousse à réfléchir ». (Figure.3)

Figure 3*- L'atelier de mathématique: A gauche la coordinatrice en interaction avec les élèves. Au centre et à droite, interactions de Meriem avec les élèves.*

La documentation collective de Meriem, semble s'enrichir non pas de toute l'équipe pédagogique, mais elle détient une forme de relation assez rapprochée avec deux autres enseignants plus expérimentés et la coordinatrice, mais la collaboration apparait timidement avec les autres enseignantes de moindre expérience. Sur ce elle rajoute « *Moi, j'ai toujours un penchant vers les enseignants expérimentés, et il se peut aussi de trouver un enseignant débutant dont sa documentation est très riche surtout d'Internet mais je n'en fais pas vraiment confiance »*.

VIII. *2. Interactions de Meriem avec l'enseignant Adam pour la conception de sa ressource intermédiaire (QCM pour un contrôle).*

Nous avons observé Meriem au sein d'une réunion de travail[9] avec Adam, pour la conception de sa ressource intermédiaire, nous lui avons demandé de nous faire parvenir à la fin, sa représentation schématique pour l'élaboration de la dite ressource. Ceci nous servira pour la confronter avec sa représentation initiale de son système de ressource.

Figure 4*- Interactions de Meriem avec Adam au cours de l'élaboration de sa ressource intermédiaire (QCM)*

Nous nous appuyons donc, sur la représentation schématique, sur notre observation et sur l'entretien mené juste après la réunion pour analyser les interactions de Meriem avec son collègue Adam. Nous classons ses interactions sous quatre (4) aspects:

- Des interactions se rapportant au choix du thème du QCM,
- Lecture, discussion autour des questions, adaptation en cas de nécessité,
- Retour sur certaines notions du cours,
- Traduction et mise en œuvre du QCM.

Meriem et Adam discutent d'abord le thème du QCM selon l'avancement dans le programme, sur ce elle ajoute « j'envisage de donner un QCM en géométrie, nos élèves semblent se désintéresser de cette spécialité des mathématiques… » Adam rajoute « j'ai vu

[9] Réunion non officielle organisée par le collectif, nous étions inviter à assister à cette réunion entant qu'observateur

quelques uns sur ces cahiers sésamath, ils sont très intéressants, tu as terminé ton cours sur la géométrie dans l'espace… on peut voir ça pour les classes de 6ème ». Meriem ne semble pas avoir ramené au préalable un travail personnel, sur recommandation de la coordinatrice, il suffit dans un premier temps d'adapter les QCMs des manuels sésamath. Un QCM se rapportant au cours de la géométrie dans l'espace a donc été sélectionné pour les classes de 6ème. Meriem rajoute « on fait de même alors pour les classes de 4ème, un QCM en géométrie qu'est ce que vous pensez? ». En lisant les QCM (du manuels de 4ème) seul, Adam avait une autre idée, « nous avons bien traité la géométrie dans nos contrôles précédents.., regarde le QCM sur les statistiques… ».

La lecture des QCM a entrainé plusieurs moments de pauses caractérisé de la part de Meriem par une incompréhension de la consigne (contexte mathématique) et qui nécessite l'intervention de Adam pour une éventuelle traduction, tel que la consigne « ABCDEFGH est un pavé droit » ou encore « La moyenne des vitesses moyennes sur les deux parties d'un trajet est égale à la vitesse moyenne sur tout le trajet » où parfois discuté les réponses qui lui paraissent ambiguës et très rapprochées, exemple à la question: « Avec quatre notes, la moyenne de Louise en Mathématiques est de 12? », Meriem a prouvé une ambiguité quant à la compréhension des propositions R3 et R4 (Figure. 5), d'autres moments de temporisations pour incompréhension de la terminologie mathématique « triangle équilatéral, isocèle »

Questions	R1	R2	R3	R4
Avec quatre notes, la moyenne de Louise en Mathématiques est de 12.	Elle a pu avoir trois fois la note 16	Elle a eu autant de notes au dessus de 12 qu'en dessous	Ses trois premières notes ont pu être 8,5 ; 10 et 11,5	Elle a pu avoir une moyenne de 11 sur ses trois premières notes et 13 pour la dernière

Figure 5- *Une question extraite du QCM sur les statistiques pour les classes de 4ème*

D'autres interactions ont eu des retours à certaine notions du cours, telle que la question « Trouve les affirmations vraie » (Figure.6), Meriem est indécise face au couple de réponses (R1, R2), elle temporise, elle intervient auprès de Adam, « un cube est un pavé particulier mais pas l'inverse? je crois », « effectivement..comme ont dit aussi qu'un carré est un parallélogramme particulier dans le plan» rajoute Adam.

Questions	R1	R2	R3	R4
Trouve les affirmations vraies.	Un cube est un pavé particulier	Un pavé est un cube particulier	Toutes les arêtes du cube ont la même longueur	Les pavés ont autant de sommets que de faces

Figure 6- *Une question extraite du QCM sur le cours l'espace pour les classes de 6ème*

Le derniers aspects d'interactions de Meriem avec Adam, a porté sur le barème de notation du QCM, sur ce, elle rajoute « je ne veux pas appliquer la méthode de notation du QCM, c'est à dire avec des plus quand c'est juste et des moins qu'on c'est faux », Adam, est entièrement d'accord, « nous allons juste donner pour chaque question 0,5 noté quand c'est juste, nos élèves ne sont pas habitués ni à ce type d'exercice dans les contrôles, ni à ce type de notation…il faut aller doucement ». Quant à la traduction des QCMs, Meriem se propose de la faire et de la proposer à la coordinatrice pour validation, « j'ai pris note des nouveaux mots mathématiques, le reste c'est bon »

Meriem voyait qu'avec ce type d'exercice l'élève apprend mieux son cours par les situations proposées elle rajoute «Ils comprennent très bien!..... C'est à dire ce qui lui manque dans le cours, il (l'élève) le comprend avec le QCM». Elle reconnait que les aspects collectifs du travail documentaire avec son collègue sont très bénéfiques pour elles, comme elle l'annonce: « Ces QCMs présentent chacun, huit situations, ils apparaissent comme un seul exercice, mais en réalité ils présentent huit situations dont j'ai discuté avec mon collègue, leurs réponses, ceci m'a apporté un plus dans mes connaissances mathématiques et surtout dans la façon d'élaborer ce type de ressources». De ce fait, on peut affirmer l'importance que Meriem accorde au travail collectif pour l'évolution de ses ressources ainsi que pour le développement de sa propre documentation. Les données préliminaires recueillies lors de cette séance de travail, montrent l'importance des échanges autour de la ressource QCM de sésamath pour son adaptation dans un contexte arabophone. Il est apparent aussi que cette documentation collective influe en retour sur sa tache d'enseignement en classe mais surtout sur son système de ressources et son système documentaire.

En analysant à postériori, son système de ressources, les taches que Meriem énumère au niveau de l'acteur collectif (figure 8) sont plus élevées en terme de fréquence et qui aboutissent généralement à la conception de sa ressource intermédiaire. Cette représentation apparait en adéquation avec sa représentation initial de son système de ressource. La colonne Meriem, sur le schéma, montre bien son travail individuel. Nous représentons les interactions de Meriem avec Adam lors de la séance d'élaboration de sa ressource par un modèle inspirée de la méthodologie d'analyse des système d'information (MERISE[10]). L'acteur collectif dispose de ses propres ressources et c'est autour d'un travail collectif que Meriem discute et échange des idées sur sa ressource QCM à élaborer (Figure 9). Notons qu'aucun travail au préalable en individuel a été effectué de la part de Meriem, seulement elle a pris connaissance

---

[10] Méthode d'analyse des sytème d'information, analysant un système en différents modèle, nous adaptons le modèle conceptuel et organisationnel des traitements qui répondent aux questions: QUI fait quoi et comment. http://www.lsis.org/espinasseb/publis/LivreMerisePDF-total-12sept14.pdf

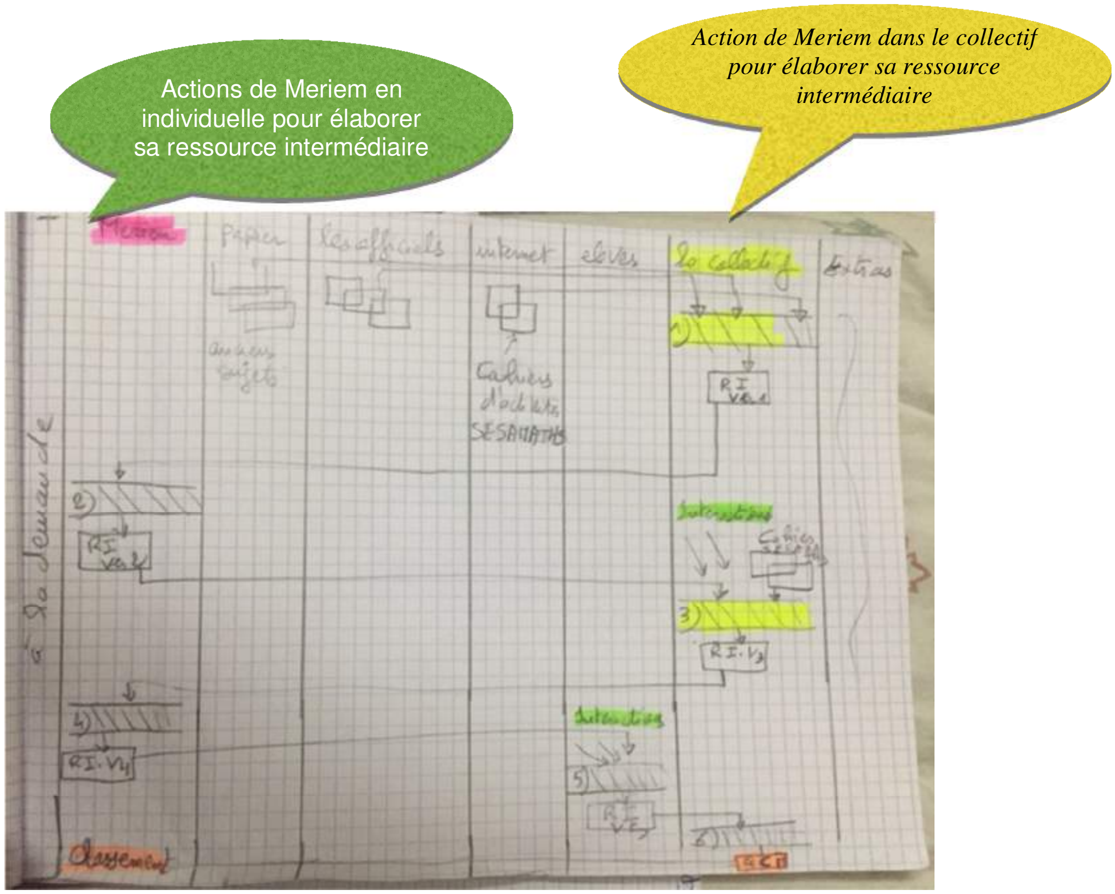


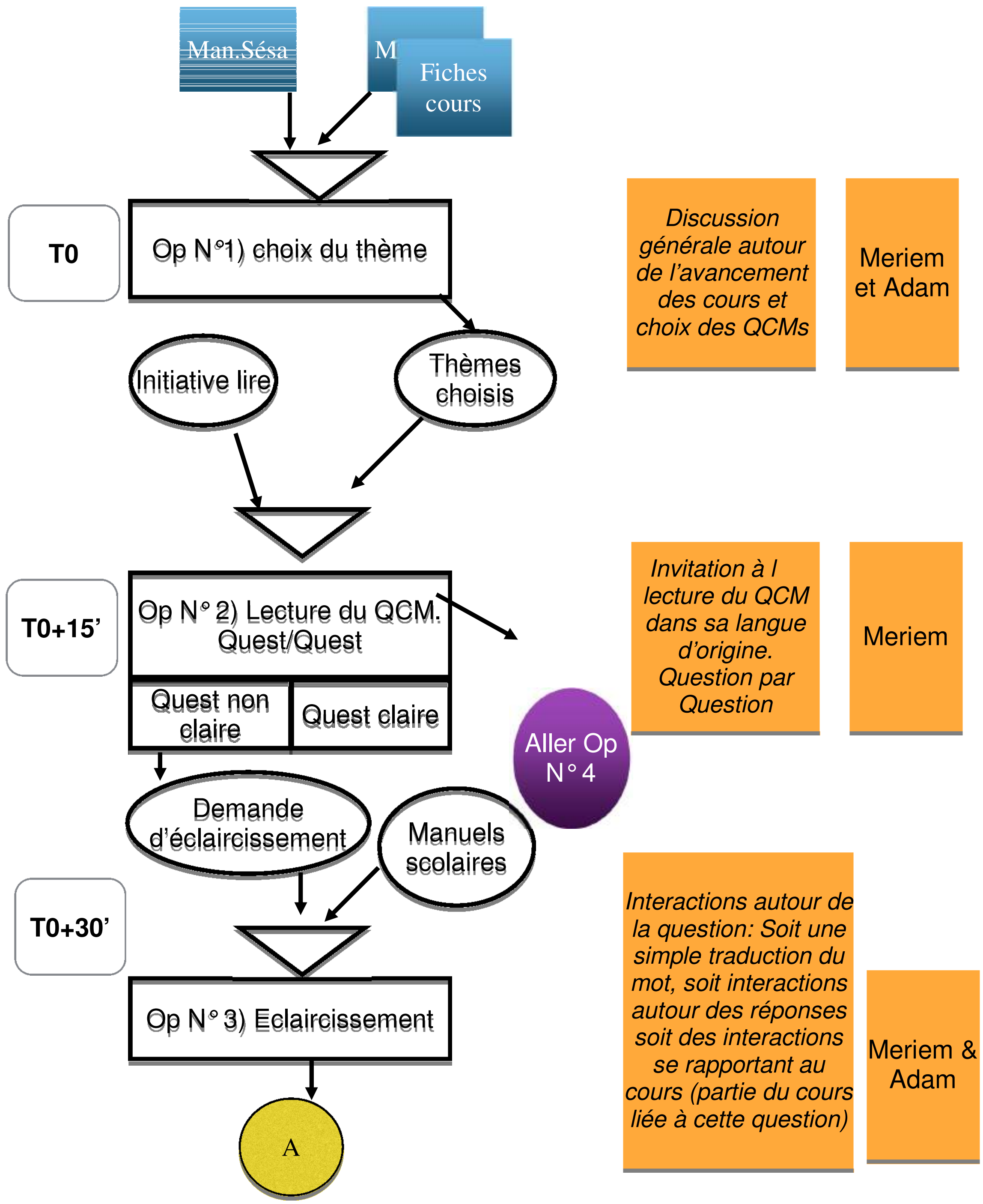
Figure 8 *–Schéma du système de ressource de Meriem à la fois individuel et collectif pour l'élaboration de la ressource QCM*

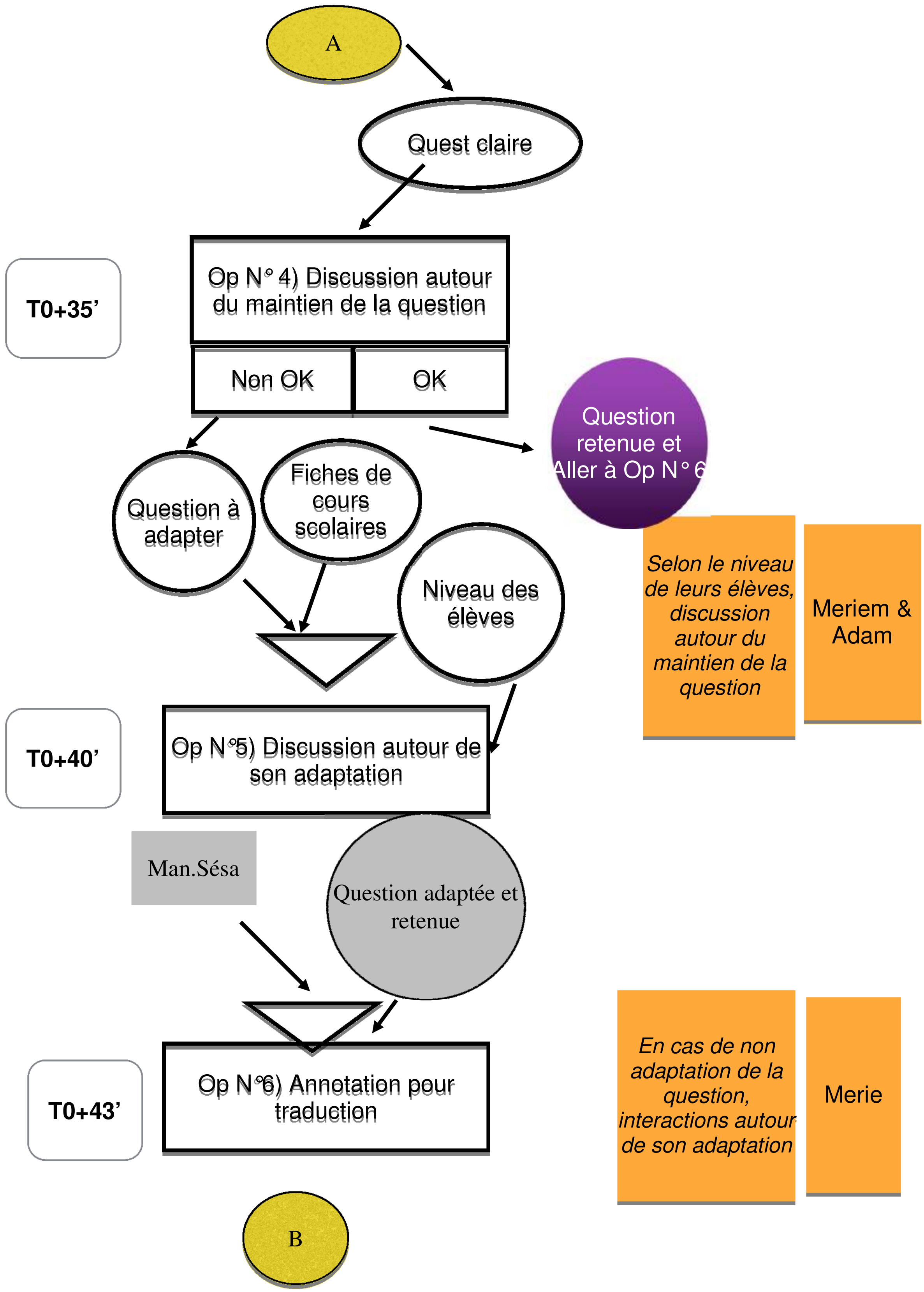
Dans son domicile des différents QCMs se rapportant à ses cours pour les classes qu'elle partage avec son collègue Adam. Notons aussi que le sujet de contrôle est commun à toutes les classes du même niveau. Les flèches sur le schéma illustre le flux d'informations échangées entre les différents acteurs.

Analyse des interactions de Meriem avec Adam pour l'élaboration de sa ressource intermédiaire

Nous nous inspirons de la méthodologie d'analyse des systèmes d'information « Merise » pour décrire et analyser les interactions/actions entre Meriem et Adam pour l'élaboration de sa ressource intermédiaire (QCM). Ce modèle répond aux question: QUI? fait QUOI? QUAND? et COMMENT?. Nous désignons par: Man Sésa, les manuels sésamath, OP, les opérations et T0 l'instant de démarrage de la réunion de travail.

Temps	Intéractions/actions	Descriptions des opérations	L'acteur (s)
Quand?	Opérations réalisées	Quoi?	Qui




A
Quest claire
T0+35'
Op N° 4) Discussion autour du maintien de la question
Non OK
OK
Question retenue et Aller à Op N° 6
Question à adapter
Fiches de cours scolaires
Niveau des élèves
Selon le niveau de leurs élèves, discussion autour du maintien de la question
Meriem & Adam
T0+40'
Op N°5) Discussion autour de son adaptation
Man.Sésa
Question adaptée et retenue
T0+43'
Op N°6) Annotation pour traduction
En cas de non adaptation de la question, interactions autour de son adaptation
Merie
B

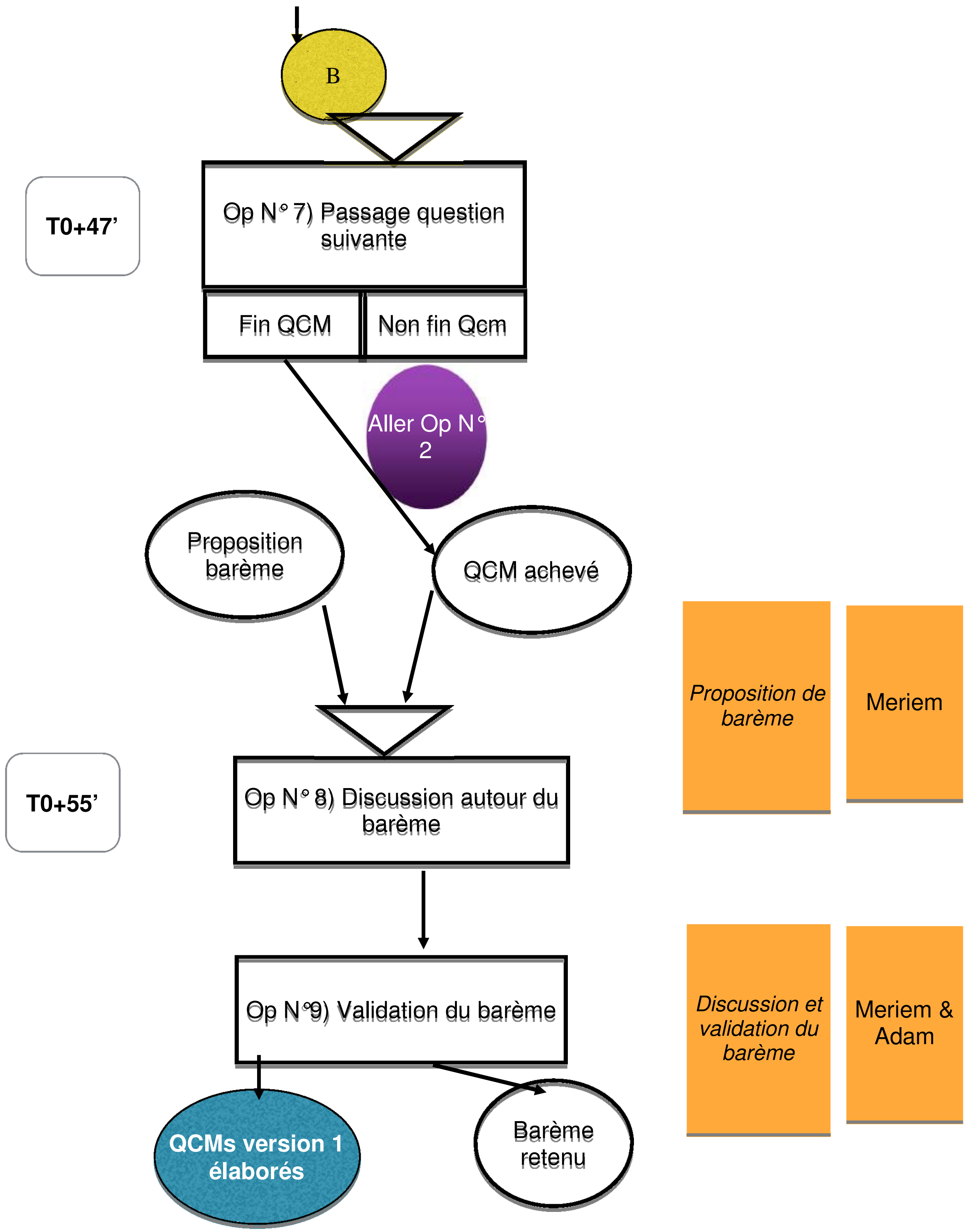


***Figure 9**- Modélisation des interactions de Meriem avec Adam pour la conception de sa ressource intermédiaire QCMs (Inspiré de méthode d'analyse MERISE*

.

Notre synthèse pour la vision de Meriem pour le travail collectif peut se résumer ainsi: «Communiquer, échanger, c'est comprendre plus et surtout échapper à l'enseignement des mathématiques classique et réussir un enseignement basé sur les compétences autour des ressources sésamath» tel est le but principal que Meriem tient à mettre en oeuvre pour répondre aux directives institutionnelles. « Je n'est pas de problèmes dans la connaissance mathématique, mais généralement j'éprouve des difficultés dans le choix des activités à mettre en oeuvre pour mettre mes élèves en situation problème réelle». Meriem semble donc avoir pris connaissance des aspects collectifs de son travail documentaire. Les données préliminaires collectées montrent un amorçage d'activités collectives, elle considère donc que son développement professionnel dépend de la documentation collective et de son activité dans le collectif.

Par conséquent, ce travail collectif autour des ressources MEP a conduit à une modification des idées de Meriem sur la façon de construire un contrôle ou une évaluation ; Il s'agit donc ici d'une évolution de son système documentaire.

V. CONCLUSION

Ces premiers résultats semblent amorcer un travail collectif que prône l'enseignante Meriem pour l'évolution de son système documentaire. Il est à signaler que cette documentation collective constitue un appui pour la conception et les usages de ressources MEP dans un milieu arabophone. Nous signalons que ces conclusions préliminaires, sont issues d'entretiens, d'analyse de ses représentations schématiques de son système de ressource, et de ses interactions avec son collègue lors de la séance d'élaboration de sa ressource intermédiaire.

Notre méthodologie se développe au fil du temps pour observer d'autres terrains expérimentaux. Des observations en classes, des entretiens ont été réalisé mettant en relief l'impact du travail collectif autour des ressources MEP sur le développement professionnel des enseignants de mathématiques. Après le club de mathématique, les ressources MEP (dont seulement les activités des manuels *sésamath*) ont été expérimentées dans les classes, cette expérimentation jugée par le corps enseignants positive a été généralisée avec la traduction collective des cahiers d'activités de *sésamath* et leurs usages parmi les ressources officielles dans le collège. Une équipe pluridisciplinaire s'est constituée regroupant, une informaticienne, l'ensemble des enseignants de mathématique, et d'enseignant de langues arabe, supervisée par la coordinatrice. Nous signalons, que lors du démarrage de notre expérimentation, le collège n'était pas doté d'une connexion Internet, les ressources de *sésamath* étaient accessibles en hors ligne, actuellement, et avec l'arrivée de la 3G au collège, notre méthodologie évoluera vers l'usage en ligne de MEP.

REFERENCES

Adler J (2010) La conceptualisation des ressources. Apports pour la formation des professeurs de mathématiques. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) (pp. 23–37) *Ressources vive., Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Collection Paideia. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Chevallard Y. (1981) Pour la didactique, IREM d'Aix-Marseille.

Engeström Y (1994) Teachers as Collaborative Thinkers : Activity-theoretical Study of an Innovative Teacher Team. In Carlgren I., Handal G., Vaage S. (Eds.) *Teachers' Minds and*

Actions : Research on Teachers' Thinking and Practice (pp. 43-61). Londres: TheFalmer Press

Grangeat M. (2011) Le travail collectif enseignant : éléments de modélisation du développement professionnel. In Grangeat M. (Ed.) *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique. Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves* (pp. 76-100), INRP.

Gueudet G., Trouche L. (2008) *Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques.* Éducation et didactique.

Gueudet G., Trouche L. (2009) Conception et usages de ressources pour et par les professeurs : Développement associatif et développement professionnel. *Dossiers De l'Ingénierie Educative* 65, 78-82.

Gueudet G., Trouche L. (2010) Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires.

Jonnaert P. (2009) *Compétences et socioconstructivisme : un cadre théorique. Perspective en éducation et formation.* Bruxelles : De boeck,.

Jonnaert P. (2002) *Compétences et socioconstructivisme – Un cadre théorique*. Bruxelles : De Boeck.

Lebrun M. (2014) *Les MOOC, une occasion historique pour redonner du sens à la présence ... même à distance*. Conférence à Brest Bretagne

Pédauque R. T. (Ed.) (2006) *Le document à la lumière du numérique.* Caen : C & F éditions.

Perrenoud P. (1994) *Travailler en équipe pédagogique, c'est partager sa part de folie.* En ligne: http://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_1994/1994_08.html

Perrenoud P. (1997) *Construire des compétences dès l'école*. 5 éd., ESF, 2008

Perrenoud P. (1995d) Des savoirs aux compétences : les incidences sur le métier d'enseignant et sur le métier d'élève. *Pédagogie collégiale* (Québec) 9(2), 6-10.

Rabardel P., Bourmaud G. (2005) Instruments et systèmes d'instruments. In Rabardel P., Pastré P. (Eds.) *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement* (pp. 211-229). Toulouse : Octarès.

Tardif J. (2006). L'évaluation des compétences. Documenter le parcours de développement, Montréal : Chenelière Éducation.

Trouche L. (2005) Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. In *Actes de l'université d'été de Saint-Flour, Le calcul sous toutes ses formes*.

FORMATION MATHÉMATIQUE DES ENSEIGNANTS : QUELLES MÉDIATIONS DOCUMENTAIRES ?

Moustapha SOKHNA[*] – Luc TROUCHE[**]

Résumé - Cette étude s'intéresse à l'usage et à la conception de ressources par les enseignants de mathématiques dans le cadre d'une formation hybride. Elle porte sur le rôle du tutorat et son impact sur la formation mathématique des enseignants et s'inscrit ainsi dans les travaux du groupe 6. Les éléments de réponses proposés sont issus d'une recherche en cours sur le lien entre conception et usage de ressources et développement professionnel de professeurs de mathématiques qui n'ont suivi ni formation mathématique universitaire, ni formation professionnelle initiales.

Mots-clefs : Professeur de mathématiques, développement professionnel, usage et conception de ressources, travail collaboratif, tutorat.

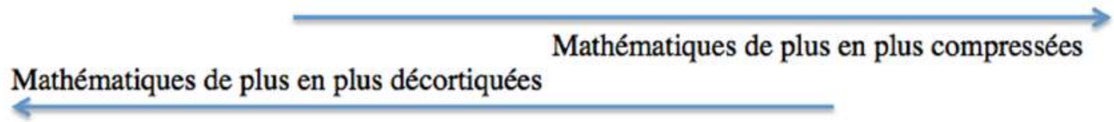
I. INTRODUCTION

Depuis quelques années, on peut observer un intérêt croissant, dans le domaine de la didactique des mathématiques, pour les modalités de conception et d'usage des ressources pour/par les enseignants (Assude 2009, Gueudet & Trouche 2008, Hitt et al. 2012). Cet intérêt est motivé, en particulier, par le développement de dispositifs *hybrides* de formation, i.e. combinant phases en présence et phases à distance (Sokhna & Sarr 2010), et par un questionnement sur la nature même de la formation mathématique des enseignants.

Ce questionnement (Hache et al. 2009) situe cette formation mathématique sur une échelle de perspectives de 1 à 4 : plus on va vers la perspective 4 (figure 1), plus les mathématiques sont « décortiquées », « défaites », « détaillées », alors qu'elles sont de plus en plus « compressées », « condensées », « compactes » quand on s'approche de la perspective 1.

[*] Faculté des Sciences et Technologies de l'Éducation et de la Formation, Université Cheikh Anta Diop de Dakar– moustapha.sokhna@ucad.edu.sn
[**] Institut Français de l'Éducation, École Normale Supérieure de Lyon – luc.trouche@ens-lyon.fr

Sokhna M., Trouche L. (2015) Formation mathématique des enseignants : quelles médiations documentaires ? In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT6, pp. 624-639.



Perspective 4	Perspective 3	Perspective 2	Perspective 1
Le travail des mathématiques « scolaires »	Le travail de mathématiques nouvelles, en lien avec les contenus de l'école	Le travail des mathématiques académiques, avec des liens systématiques et explicites avec les contenus à enseigner à l'école	Le travail des mathématiques académiques enseignées à l'université pour le futur mathématicien

Figure 1 - *Les perspectives de formation mathématiques des enseignants (Hache et al. 2009).*

Comment penser des dispositifs de formation prenant en compte cette nécessité de « *décorticage* » et de «*décompression* » ? Quelles médiations penser, du point de vue des ressources et des acteurs impliqués ? Ce questionnement est particulièrement aigu dans des pays où l'on considère que la formation mathématique des enseignants est insuffisante.
Nous proposons ici de mettre en évidence, dans le cadre d'un dispositif expérimental, l'importance des interactions entre tuteurs et stagiaires. Dans un premier temps, nous préciserons les cadres théoriques qui soutiennent ce questionnement, nous présenterons ensuite le terrain d'étude, puis la méthodologie mise en œuvre ; nous analyserons enfin, et discuterons, les premières données recueillies.

II. QUELQUES OUTILS THEORIQUES

Notre étude s'enracine dans deux cadres principaux, la *théorie anthropologique du didactique* (Chevallard 1997) *et l'approche documentaire du didactique* (Gueudet & Trouche 2008) qui nourrissent une approche dynamique de la formation des enseignants.

1. *Théorie anthropologique du didactique*

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) situe l'activité *d'étude* des mathématiques, comme l'activité *d'enseignement* des mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines. Elle se fonde sur le postulat que toute activité humaine, régulièrement accomplie, peut être décrite grâce au modèle unique de praxéologie, défini comme un quadruplet (*types de tâches, techniques, technologies et théories).* Ainsi pour Chevallard (1997, p. 44) :

> L'une des premières tâches auxquelles s'affronte le professeur en tant que directeur d'étude d'une classe donnée, consiste à déterminer, à partir des indications du programme d'études officiel, les organisations mathématiques à étudier en précisant, pour chacune d'elle, son contenu précis et, en particulier, le socle des types de tâches mathématiques qu'elle contient ainsi que le degré de développement à donner aux composantes techniques, technologique, théorique.

Dans une institution donnée, on ne rencontre que très rarement des praxéologies ponctuelles, c'est-à-dire des praxéologies intégrant un seul type de tâches. Les organisations praxéologiques contiennent le plus souvent plusieurs types de tâches et plusieurs techniques. Si toutes les techniques sont rattachées à une seule technologie on dit que l'organisation praxéologique est locale. Une organisation est régionale si elle est construite à partir d'une théorie mathématique donnée et elle est globale si elle intègre plusieurs théories. La dialectique organisation locale/globale nous semble intéressante à prendre en compte en formation, particulièrement pour soutenir les processus de compression et de décorticage (figure 1) des mathématiques. Elle doit, selon nous, être complétée par une approche qui permette de penser la conception et les usages des ressources, supports de ces organisations.

2. *Approche documentaire du didactique*

L'approche documentaire du didactique (Gueudet & Trouche 2008) vise à analyser l'activité de l'enseignant sur, avec, et pour les *ressources*. Elle peut être décrite autour de deux points fondamentaux : la distinction entre ressources et *documents*, et le processus de *genèse documentaire* (figure 2) : un ensemble de ressources donne naissance, pour une classe de situations, au cours d'une genèse documentaire, à un *document*. Le document se construit ainsi, progressivement, par et pour le professeur, à travers deux processus duaux : *l'instrumentation* (le processus qui fait émerger les fonctions constituantes des ressources) et *l'instrumentalisation* qui est liée au développement des fonctions constituées des ressources.

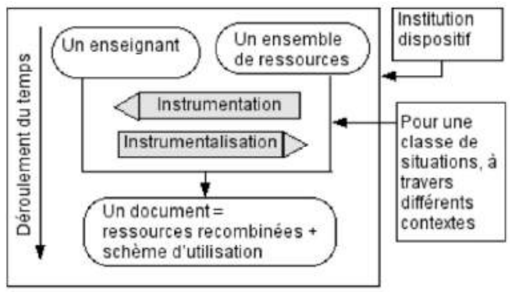


Figure 2. *Représentation schématique de la genèse d'un document* (Gueudet & Trouche 2010)

Le travail documentaire du professeur est le moteur d'une genèse documentaire, qui développe conjointement une nouvelle ressource (composée d'un ensemble de ressources sélectionnées, modifiées, recombinées) et un schème d'utilisation de cette ressource. Un schème d'utilisation comporte en particulier des règles d'action, et des invariants opératoires qui se forgent au cours de l'activité de l'enseignant. L'ensemble des ressources d'un professeur est un ensemble vivant, en permanent renouvellement, et en interaction avec l'activité qu'il déploie. La notion de *système de ressources* (Gueudet & Trouche 2008) décrit bien cet ensemble structuré, produit et ressort de l'activité du professeur.

Dans cette perspective théorique, nous proposons d'introduire la notion de *médiation documentaire,* prolongeant la médiation instrumentale qui, pour Rabardel (1999), « apparaît comme un concept central pour penser et analyser les modalités par lesquelles les instruments influencent la construction du savoir ». Ce concept de médiation documentaire nous permettra de penser et d'analyser les modalités par lesquelles l'évolution des ressources et le développement des connaissances des enseignants se nourrissent mutuellement.

3. *Une approche dynamique de la formation des enseignants*

Nous faisons l'hypothèse que, dans le cadre de la formation des enseignants en mathématiques, les *médiations documentaires* doivent se développer à partir de ressources spécifiques permettant aux collectifs de stagiaires un jeu de décorticage et de compression des concepts mathématiques à introduire en classe. Ces médiations jouent pour les deux types d'acteurs qui nous intéressent ici : les tuteurs qui s'appuient sur ces ressources pour soutenir la *collaboration* entre stagiaires ; les stagiaires qui utilisent les ressources pour « faire leurs cours ». Ces médiations jouent entre ces acteurs et l'objet de leur activité, mais aussi entre les acteurs eux-mêmes, et entre chaque acteur et lui-même. La figure 3 ci-dessous traduit ces différentes médiations, qui se prolongent, via les ressources, au sein des classes des stagiaires, impliquant alors les élèves.

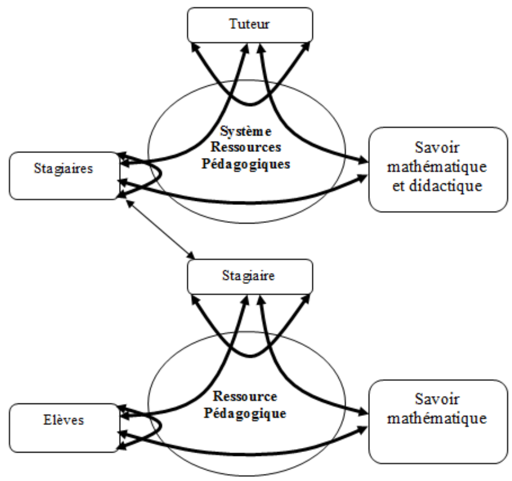


Figure 3 - *Schéma représentant les différentes médiations à l'œuvre dans un dispositif de formation continue, impliquant le tuteur, le stagiaire et les élèves, autour d'un jeu sur les ressources (Sokhna 2006)*

Cette imbrication des médiations doit être comprise comme le cœur d'un dispositif de formation qui implique nécessairement chaque tuteur dans un rôle *proactif. D'ailleurs*, pour Duplàa *et al.* (2003, p. 483), ce rôle conduit le tuteur à intervenir dès la conception des ressources :

> En collaboration avec l'expert des contenus, il déterminerait les nœuds difficiles, conceptuels et stratégiques de la ressource ou des activités. Ensuite, dans la phase de mise en œuvre, cet acteur serait proactif en provoquant des réflexions et débats sur des nœuds difficiles, conceptuels ou stratégiques.

Duplàa *et al.* (ibidem, p. 481) soulignent que « ce tutorat proactif est d'autant plus délicat à mettre en œuvre qu'il ne doit pas rétablir une relation pédagogique à dominante transmissive ». Il nous semble donc que la formation doit s'appuyer aussi sur l'expérience propre des stagiaires, leur créativité, leur *réflexivité* et sur leur *travail collaboratif* (Soury-Lavergne *et al.* 2013).

Nous faisons l'hypothèse que le développement des systèmes de ressources des enseignants, est en grande partie lié au développement des interactions entre tuteurs et collectifs des stagiaires, au cœur des médiations documentaires.

III. TERRAIN EXPERIMENTAL

Notre étude porte sur le lien entre ressources et formation des enseignants de mathématiques dans le cadre de dispositifs hybrides de formation, avec un intérêt particulier pour le rôle des interactions entre tuteurs et stagiaires. La situation actuelle de la formation d'enseignants au Sénégal nous paraît constituer un bon terrain d'étude. En effet, pour faire face aux besoins d'enseignement, de nombreux professeurs contractuels sont recrutés, sans formation professionnelle et avec, pour la plupart, une formation mathématique très modeste, souvent du seul niveau du baccalauréat. Il s'agit donc, pour le système sénégalais, de concevoir des dispositifs de formation continue pour un grand nombre d'enseignants, qui ne peuvent pas s'éloigner de leur classe. Nous présentons dans cette section la structure de la formation des enseignants au Sénégal, puis l'environnement de travail des professeurs contractuels que nous suivrons plus particulièrement et enfin les ressources sur lesquelles repose leur formation.

1. *La structure de la formation des professeurs de mathématiques au Sénégal*

Au Sénégal, la formation des professeurs de collège et de lycée est prise en charge par la Faculté des Sciences et Technologies de l'Education et de la Formation (FASTEF) à travers deux dispositifs : un dispositif de formation initiale en présentiel (FIP) pour les étudiants et un dispositif de formation continue[1] à distance (FCD) pour les professeurs contractuels. Ces deux dispositifs sont organisés chacun autour de deux filières (figure 4) : une filière qui regroupe les étudiants de niveau licence (section A dont la durée de la formation est d'une année) et de niveau maitrise (section B dont la durée de la formation est deux ans), et une filière qui regroupe des étudiants de niveau baccalauréat (section C dont la durée de la formation est deux ans). Dans la première filière, il s'agit d'assurer la formation *professionnelle* des étudiants, dont la formation *académique* a été prise en charge par d'autres facultés, pour en faire des professeurs de l'enseignement moyen (PEM) et/ou des professeurs de l'enseignement secondaire (PES). Dans la deuxième filière, il s'agit d'assurer la formation académique en première année *et* professionnelle en deuxième année pour faire de ces étudiants des Professeurs de Collèges d'Enseignement Moyen (PCEM). Ces PCEM sont bivalents : en mathématiques, ils sont des professeurs de mathématiques et physique-chimie (F1C MPC) ou Mathématiques et les sciences de la vie et de la Terre (F1C MSVT).

Nature du dispositif	Niveau des étudiants	Formation dispensée
Formation initiale en présentiel : étudiants recrutés sur concours par la FASTEF, qui seront, pour la plupart d'entre eux, s'ils réussissent leurs examens, recrutés comme enseignants titulaires	Etudiants qui ont acquis une licence (F1A) ou une maîtrise (F1B) dans une autre faculté	Formation professionnelle en un (F1A) an ou deux ans (F1B)
	Etudiants de niveau baccalauréat (F1C). En mathématiques ils sont F1C MPC (mathématiques et la physique-chimie) ou MSVT (mathématiques et les sciences de la vie et de la Terre.	Formation académique en première (F1C1) année sanctionnée par un examen de passage, suivie d'une formation professionnelle pendant la deuxième année (F1C2).
Formation continue à distance : enseignants recrutés comme contractuels, qui ont accès à la formation sous certaines conditions (cf. III-2) qui seront, s'ils réussissent leur examen, recrutés comme enseignants titulaires.	Etudiants qui ont acquis une licence (F1A) ou une maîtrise (F1B) dans une autre faculté, et enseignent comme contractuels dans des lycées	Formation professionnelle en un (F1A) ou deux ans (F1B)
	Etudiants de niveau baccalauréat (F1C), enseignant comme contractuels dans des collèges. En mathématiques ils sont F1C MPC (mathématiques et la physique-chimie) ou MSVT (mathématiques et les sciences de la vie et de la Terre.	Formation académique en première année (pour les F1C1) de niveau licence 1 de mathématique sanctionnée par un examen de passage, suivie d'une formation professionnelle pendant la deuxième année (pour les F1C2).

Figure 4 - *Les différentes filières de formations des enseignants assurées par la FASTEF.*

[1] Qualifier de *continue* cette formation est sans doute ambigu, car ces enseignants n'ont pas eu de formation intiale. Cependant cette formation n'intervient pas au début de la carrière de ces enseignants, mais en cours de carrière, nous préférons donc parler dans ce cadre de formation continue (même si, nous le verrons, ce sont les ressources, plus que les formateurs, qui assurent cette continuité de la formation). Il faut noter également que le qualificatif « à distance » est tout aussi ambigu, surtout pour les étudiants de la section C. En effet, pour ces enseignants, les seuls moments d'échanges officiellement organisés avec leurs formateurs sont les périodes de regroupement de deux jours à la FASTEF pour la remise des tapuscrits. Une plateforme de formation à distance existe « http://www.fad-fastef.org » mais elle est réservée aux étudiants des sections A et B.

En section C, en mathématiques, les deux dispositifs (FIP et FCD) semblent proches : ce sont les mêmes formateurs qui interviennent dans les deux cadres ; ce sont les mêmes ressources qui sont proposées aux étudiants ; la réussite à l'examen de la première année conditionne l'accès à la deuxième année. Ces deux dispositifs diffèrent cependant profondément : dans le premier cas, les étudiants suivent leurs études à la FASTEF et les ressources d'enseignement sont délivrées par les professeurs dans des cours ordinaires en présentiel tout au long de l'année (FIP) ; dans le deuxième cas les contractuels sont la plupart du temps dans leurs classes, et les ressources – des tapuscrits - leur sont remises lors d'un regroupement de deux jours à la FASTEF. Les contractuels ne reviendront à la FASTEF que pour l'examen final (FCD).

Ainsi les profils des étudiants de la FIP étant différents de ceux de la FCD, on peut s'interroger sur la pertinence du choix de duplication du dispositif de formation. En effet, en première année de la section C, tous les étudiants (ceux de la FIP comme ceux de la FCD) suivent des cours de niveau L1 mathématiques et c'est seulement en deuxième année qu'ils suivent une formation professionnelle. Or, les étudiants de la FCD étant déjà dans les classes et donc confrontés quotidiennement aux difficultés d'ordre professionnel, il est difficilement compréhensible que la formation en première année soit seulement académique et qu'il faille attendre la deuxième année pour suivre une formation professionnelle. Par contre, les étudiants de la formation initiale en présentiel qui ne vont pas en stage qu'en deuxième année acceptent plus facilement de travailler en première année sur les mathématiques plus compressées (figure 1). En deuxième année, Ils bénéficient d'un encadrement rapproché auprès d'enseignants expérimentés et des formateurs de la FASTEF qui organisent ainsi la transposition des notions apprises en première année.

Notre étude portera sur le dispositif de formation continue à distance, plus particulièrement pour les contractuels qui n'ont que le niveau du baccalauréat et qui enseignent dans des collèges (la section C), car c'est à ce niveau que le besoin de formation semble être plus pressant.

2. *L'environnement de travail des professeurs contractuels*

Le grand nombre de professeurs contractuels à former, que nous appellerons *stagiaires* dès lors qu'ils seront impliqués dans le dispositif de formation, a imposé aux institutions (Ministère et FASTEF) de faire des choix : ce sont les contractuels qui ont le plus d'ancienneté dans le métier qui sont prioritaires pour la formation. En 2013-2014, 1262 stagiaires se sont inscrits en première année de cette section C de la FCD. Ainsi les contractuels qui commencent leur formation ont, en moyenne, de l'ordre de 5 ans d'ancienneté. Ils ont donc commencé à construire leur système de ressources (cf. II-2) pour enseigner et pour cela certains stagiaires peuvent s'appuyer sur les cellules d'établissement[2]. Les ressources disponibles peuvent beaucoup varier d'un établissement à l'autre (existence d'une bibliothèque ou non, interactions possibles avec d'autres contractuels ou non, existence d'une équipe pédagogique ou non, appui du pilotage de l'établissement ou non…). Nous

[2] Dans chaque lycée et collège ou regroupement de collège d'une localité et pour chaque discipline, existe une structure qui regroupe les enseignants de la discipline et qui sert de cadre pour se concerter autour des activités de formation (organisation des ateliers de formation ou d'autoformation etc.) et des activités d'enseignement (discussion autour des progressions communes, de la façon dont seraient abordées certaines parties difficiles du programme). Ces structures sont appelées cellule et la métaphore biologique prend tout son sens. Les cellules ne vivent pas toutes au même rythme : celles qui sont très dynamiques organisent régulièrement des sessions de formation et d'autres peuvent rester toute l'année sans une seule rencontre

décrirons plus précisément ces ressources support de notre expérimentation dans notre dispositif expérimental §IV-4.

Rappelons que ces professeurs de niveau du Baccalauréat sont tous bivalents. Il faut noter également que la bivalence n'est pas la seule difficulté : ces enseignants doivent travailler 25 heures par semaine dans des classes souvent pléthoriques (en moyenne près de 68 élèves, PDEF 2003). Il faut signaler aussi que, durant la formation aucune réduction horaire ne leur ait accordé. Toutes ces difficultés pourraient conduire ces enseignants à faire des choix : privilégier leur formation et la préparation de l'examen au détriment de leur enseignement ou inversement.

3. Les ressources de la formation des professeurs contractuels

La formation des professeurs contractuels repose sur des tapuscrits, conçus par les formateurs titulaires des cours en FIP. Ces ressources de formation, que nous appellerons désormais ReF, sont toutes conçues, pour chaque cours, sur un même modèle, en quatre blocs (description des objectifs et des prérequis, proposition d'activités d'apprentissage, présentation du contenu d'enseignement et enfin des exercices ; voir un exemple annexe 1). La première année, ces ressources (ReF1) sont structurées en trois grands ensembles : deux cours (algèbre - voir annexe 2 le programme d'algèbre - et analyse) de niveau première année universitaire (correspondant à la perspective 1, Figure 1) et un cours de géométrie de niveau collège (correspondant à la perspective 4, Figure 1). La deuxième année, les ressources (ReF2) présentent les notions à enseigner, depuis la définition d'un objectif pédagogique à des propositions de solutions d'exercices de niveau collège (correspondant à la perspective 4, Figure 1).

La remise des tapuscrits aux stagiaires a lieu à la FASTEF et est accompagnée de séances d'échanges de 4 à 6 heures, entre les contractuels et les formateurs, sur les contenus et sur les modalités de formation. Ces échanges peuvent aller de l'explication d'une notion jusqu'à des propositions de méthode d'organisation du travail. Des échanges informels peuvent aussi avoir lieu pendant l'année entre contractuels et entre contractuels et formateurs.

A distance, des stagiaires, la plupart du temps encouragés par l'existence de regroupement dans des établissements, appellent au téléphone ou envoient des courriels aux responsables de cours pour des éclaircissements. D'autres, toujours en groupe, sollicitent et obtiennent des séances de travaux dirigés en présentiel avec des formateurs de la FASTEF. Notre étude portera plus particulièrement sur les ReF1 et sur la façon dont elles s'intègrent dans le système de ressources des stagiaires de première année, qui nous paraît être l'année la plus sensible pour l'entrée dans une dynamique de formation. On peut faire l'hypothèse que, compte tenu de leur niveau académique et de la quantité de travail qu'ils doivent assumer, les stagiaires n'ont pas, dans des conditions ordinaires, les moyens d'intégrer seuls les ressources de formation dans leur propre système de ressources : soit leurs ressources propres et les ressources de formation restent étanches les unes par rapport aux autres, soit les ressources de formation sont « parachutées » telles qu'elles dans la classe.

Le dispositif expérimental que nous avons mis en place est limité, pour une « simple » étude de cas : il s'est agit pour nous d'injecter dans le dispositif ordinaire des acteurs jouant le rôle de tuteurs proactifs en relation avec un groupe de stagiaires de première année exerçant dans le même établissement. Nous voulons étudier les effets de cette modification du dispositif, dans l'hypothèse que l'interaction d'un tuteur proactif avec des stagiaires jouant le jeu de la collaboration sera décisive pour le développement des médiations documentaires. Il devra travailler avec les stagiaires des organisations mathématiques locales pour soutenir leur activité d'enseignement, en faire un ressort pour enclencher l'étude d'une organisation mathématique globale dans un objectif de formation mathématique. Les phases d'instrumentation des ressources de formation par les stagiaires appuient leur enseignement. Les enseignants qui ont une certaine maitrise de la ressource, dans leur enseignement, comprendront mieux leur organisation mathématique et sauront mieux réguler les organisations didactiques. Les phases d'instrumentalisation par les stagiaires des ressources soutiennent quant à elles leur formation. En effet, les enseignants qui, à travers les ressources de formation tentent de les modifier à des fins d'enseignement, en feront une meilleure appropriation et auront ainsi une meilleure idée de leur formation. L'activité propre du tuteur se déploiera en synergie avec l'activité des stagiaires dans l'établissement. L'importance des échanges entre le collectif des professeurs stagiaires au sein de leur établissement d'exercice est en effet un élément majeur, qui apparaît dans de nombreuses études sur la formation continue des enseignants (voir par exemple Soury-Lavergne *et al.* ibidem). Nous faisons l'hypothèse que l'activité du collectif et la proactivité des tuteurs pourront nourrir conjointement les genèses documentaires.

IV. LES ELEMENTS METHODOLOGIQUES

Dans cette section nous présentons, en plusieurs points, la méthodologie qui a sous-tendu cette étude : seront précisés le thème mathématique qui sera abordé, les acteurs qui vont endosser le rôle de tuteur et les stagiaires dont la formation va être étudiée.

1. Le choix du thème mathématique

Le choix du thème est guidé par trois préoccupations majeures :

- Le premier critère est la présence du thème à la fois dans programme d'enseignement au collège et dans le programme de formation des stagiaires ;
- Le deuxième critère est la rareté des ressources relatives à ce thème permettant de motiver davantage l'intégration des ressources proposées ;
- Le troisième critère est relatif à difficulté du thème, motivant davantage le soutien d'un tuteur proactif et des échanges entre pairs.

Nous avons ainsi choisi le thème de la logique : en effet, au Sénégal, l'enseignement du raisonnement et de la logique est présent dans tous les ordres d'enseignement. Le programme de mathématiques de collège demande « de renforcer la maitrise de la pensée logique et mathématique de l'élève» (Programme de $6^{ème}$ 2006, CNM 2006) et contrairement aux autres parties, le programme ne propose pas de ressource et ne suggère pas de technique d'enseignement ; enfin tous les étudiants de même niveau arrivant à l'université éprouvent des difficultés sérieuses en logique (Durand-Guerrier & Ngandop 2009).

2. Des tuteurs proactifs

Les tuteurs n'existant pas dans le dispositif actuel de formation, il s'agit de « recruter » des personnes susceptibles de devenir des tuteurs proactifs. Ces tuteurs doivent être suffisamment proche des situations professionnelles des stagiaires pour être en mesure d'anticiper certaines difficultés et capable de leur proposer des solutions adaptées à leurs préoccupations, ils doivent être ouverts et considérer les stagiaires comme des partenaires dans le processus de formation. Suivant ces critères, deux « candidats tuteurs », Nourou et Martin[3], ont été choisis parmi les étudiants de la FASTEF : ils ont un master de mathématiques et ont validé une

[3] Pour respecter l'anonymat des personnes, les noms réels sont changés par les noms que voilà.

année de formation professionnelle. Ils ont aussi une certaine ouverture par rapport aux mathématiques et à leur enseignement, ouverture repérée à partir des rapports de stage (qualité académique et professionnelle, capacité d'écoute des autres, capacité d'accueil à des solutions alternatives proposées par d'autres). Afin de leur permettre de jouer le mieux possible leur rôle, une préparation spécifique est organisée par le concepteur de cours (un des auteurs de cet article) en deux séances de deux heures, préparant aussi une répartition des rôles : Nourou se charge de trouver des ressources appropriées pour la formation des stagiaires et Martin organise des sessions de formation en présentiel en s'appuyant sur les ressources proposées par Nourou.

3. Choix des stagiaires

Nous avons mené cette étude auprès des 1262 stagiaires en mathématiques qui se sont inscrits en première année de la section C de la FCD (784 en mathématiques et sciences de la vie et de la terre MSVT et 478 en mathématiques et physique-chimie MPC). Parmi ces 1262 stagiaires, 39 (19 MSVT et 20 MPC) ont sollicité et obtenue des séances gratuites de formation en présentiel pendant trois semaines avec le concepteur de cours de logique (un des auteurs de cet article). Trois stagiaires parmi les 39, tous d'une même cellule pédagogique de la région de Dakar (Diène, Moussa et Félicité) et tous volontaires, sont choisis pour le dispositif expérimental. Ce choix de travailler avec des enseignants d'une même cellule est motivé par un besoin d'éprouver l'idée selon laquelle la collaboration peut être décisive pour le développement des médiations documentaires.

4. Le dispositif expérimental de recherche et de formation

Le dispositif de formation et de recherche peut être subdivisé en deux phases.

La première phase du dispositif permet de recueillir des données nécessaires au travail de tuteurs proactifs (la détermination de nœuds difficiles, conceptuels et stratégiques sur la conception et la mise en œuvre de ressource) et prépare ainsi les activités de la phase 2. Elle s'appuie sur l'examen de passage en $2^{ème}$ année des étudiants de la section C (voir § III-1) : Les 1262 stagiaires qui se sont inscrits en première année de la section C de la FCD ont fait cet examen en octobre 2014. En logique et algèbre l'épreuve est de niveau Licence1 mais elle s'appuie sur le programme de collège. Elle comprend deux exercices : l'exercice 1 avec 16 questions à choix multiples sur l'algèbre et la logique et un exercice 2 spécifiquement sur la logique (voir annexe 3 l'épreuve de 2014). Ainsi nous allons analyser les ressources (ReF1-Algèbre et Logique) et l'épreuve d'algèbre et logique, nous analyserons ensuite les résultats des 1262 stagiaires puis ceux particulier des 39 qui ont suivis des formations en présentiel et nous allons enfin analyser les copies de Diène, Félicité et Moussa.

Dans la deuxième phase, nous allons mettre en place un dispositif expérimental que nous allons analyser. La phase de réalisation de l'expérimentation est organisée autour de quatre étapes (Figure 5) :

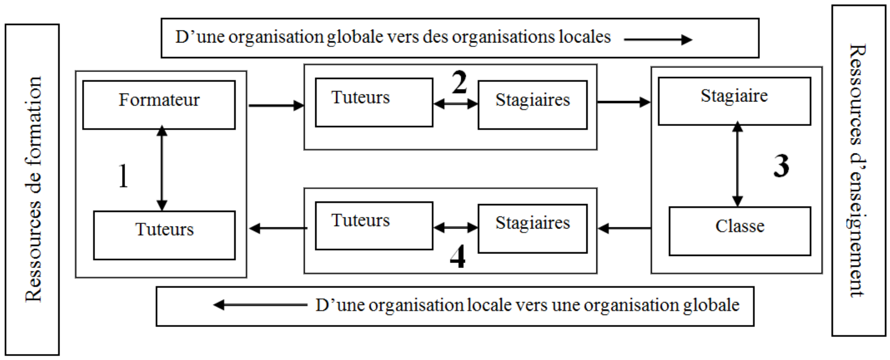


Figure 5 - *Dispositif de formation et de recueil de données.*

S'adossant sur notre proposition de tutorat proactif (figure 5) et de notre choix d'organiser les collaborations pour les formations le concepteur de cours aménage, à *l'étape 1* du dispositif, des échanges avec les tuteurs sur les résultats de l'examen et sur l'articulation entre différentes organisations mathématiques ponctuelles et leur mise en œuvre en classe afin d'analyser des ressources ReF1. Cette étape permettra de dégager des critères d'un tutorat proactif de formation des enseignants. A *l'étape 2* un travail collaboratif de conception d'une fiche de cours sera organisé entre tuteurs et stagiaires qui s'appuie sur l'analyse des ressources ReF1 de l'étape 1. A *l'étape 3*, la fiche cours de l'étape 2 sera mise en œuvre par un stagiaire en présence des deux autres stagiaires et des deux tuteurs. Cette étape permettra d'étudier les corrélations entre critères de proactivité choisis en phase 2 et le niveau d'instrumentation du stagiaire. *L'étape 4* sera une séance de formation au module de logique organisée par les deux tuteurs pour les trois stagiaires en s'appuyant sur les difficultés observées lors de l'étape 3 (on notera les modifications opérées sur les ressources ReF1). L'étude de cette 4ème étape permet d'analyser, avec les critères éprouvés, le niveau de proactivité des tuteurs. Un 2nd cycle de 4 étapes se déroulera dans les mêmes conditions pour vérifier la solidité des résultats obtenus lors du 1er cycle.

5. *Les données à recueillir et la méthode de recueil des données*

La conception des outils de recueil de données s'inspire fortement de la méthodologie d'investigation réflexive (Gueudet & Trouche 2008), c'est-à-dire qu'elle mobilise le regard des acteurs sur leur propre activité. Ces outils permettront le suivi du travail documentaire des tuteurs et des stagiaires (sous la forme de journaux de bord) et le suivi de l'intégration de nouvelles ressources dans leurs systèmes de ressources (sous la forme de représentations graphiques des ressources qui organisent l'enseignement de la logique). Dans cet article ne seront présentés que les résultats tirés de la première phase du dispositif expérimental § IV-4, ceux de la 2nd phase faisant l'objet d'une étude en cours.

V. ELEMENT D'ANALYSE

Cette étude est en cours, l'analyse qui sera présentée dans cet article se limitera à la phase 1 du dispositif expérimental.

L'analyse des ressources (Ref1 Algèbre et logique) montre que ces ressources s'appuient sur des activités qui peuvent faire sens chez les enseignants avant de construire des mathématiques abstraites condensées et compressées (figure 1, perspective1) : dans l'esprit d'une formation mathématique pour des mathématiciens cela a du sens de faire une incursion dans l'algèbre de Boole, mais pour un enseignant qui doit expliquer, justifier, décortiquer et décompresser la tendance devrait être orientée vers la perspective 4. L'analyse de l'épreuve et des résultats des stagiaires le confirme.

L'analyse de l'épreuve montre que 8 des 16 questions de l'exercice 1 peuvent être traitées avec des connaissances mathématiques du collège. Il s'agit des questions 3, 4, 6, 10, 11, 13, 14 et 16. Les questions 3, 6, 10 et 13 sont sur le sens de l'implication. Qu'est-ce qu'une condition nécessaire ; Qu'est-ce qu'une condition suffisante ? C'est le cas de la question n°13 : Pour qu'un parallélogramme ABCD soit un rectangle il suffit que ABC soit un triangle rectangle en B. Les autres questions utilisent les quantificateurs (Pour tout réel x, est-ce qu'il existe un réel y tel x +y = 0 question n°14). Les 8 autres questions de l'exercice 1 sont en rapport avec des mathématiques abstraites qui ne sont pas mobilisables par l'enseignant dans sa classe (par exemple la question 2, est ce que toute relation symétrique est une relation reflexive ?). Dans l'exercice 2, l'idée était de travailler sur la validité d'un énoncé quantifié et de construire sa négation « il existe un entier naturel mutiple de trois et dont la somme de ses chiffres est 7 ». Pour prouver que cet énoncé est faux, il faut écrire sa négation qui fait appel à l'écriture de la négation des quantificateurs « Quel que soit l'entier n, s'il est multiple de 3 alors la somme de ses chiffres est multiple de 3 (***donc différents de 7***)». Si un entier n = $\sum_{k=0}^{n} c_k 10^k$ est divisible par 3 alors $\sum_{k=0}^{n} c_k (3\times 3+1)^k$ qui est égal à $3\times\sum_{k=0}^{n} c_k\alpha_k + \sum_{k=0}^{n} c_k$ est divisible par 3. Donc $\sum_{k=0}^{n} c_k$ est divisible par 3. Or 7 n'est pas divisible par 3 donc la proposition est fausse.

Malgré la proximité de ces exercices avec ce que ces stagiaires sont sensés enseigner, seulement 44,06 % d'entre eux ont eu la moyenne. A l'exercice 2 par exemple, leur principale difficulté apparait dans la justification de leur réponse. Même, s'ils ont eu, pour la plupart, le sentiment que la proposition est fausse, pour la prouver, les méthodes utilisées montrent les difficultés qu'ils ont à intégrer les ressources de formation dans leur propre système de ressources. Ils prennent par exemple plusieurs multiples de 3 *(3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30; 33; 36; 39; 42; 45; 48; 51; 54)* pour constater que la somme de leurs chiffres est différente de 7. Ceux-là sont dans une attitude très « scolaire » et ne parviennent pas à organiser le processus de démonstration en lien avec leurs ressources de formation; d'autres sont sur une compréhension formelle du cours de logique et ne parviennent pas à le relier aux mathématiques scolaires. Ils savent que *la négation de « $\exists x\ p(x)$ »* est *« $\forall x\ \rceil p(x)$»,* que celle de *« $P \wedge Q$»* est *« $NonP \vee NonQ$ »*. Pour eux la négation de la proposition est alors « **Quel que soit** l'entier multiple de 3 **ou** dont la somme de ses chiffres est multiple de 3 ». Ceci ne veut pas dire que ces enseignants sont incapables d'enseigner : ils manifestent seulement des difficultés à faire par eux même les liens entre les mathématiques abstraites et les mathématiques qu'ils enseignent. On peut même faire l'hypothèse que ces mathématiques abstraites, cachent et parfois font écran aux mathématiques scolaires. Parmi les 39 qui ont suivis des séances de décorticage et de décompression des mathématiques abstraites plus de 82 % ont eu la moyenne. Il est évident que ces enseignants étaient également très motivés et engagés dans leur formation pour consacrer trois semaines de vacances scolaires à leur formation et l'écriture des quantificateurs et de la négation de l'implication leur était familière. Ils écrivent correctement la négation même si certains ont eu des difficultés à aller jusqu'au bout de leur démonstration. C'est le cas de Moussa et Félicité. Diène lui, a montré un niveau tout à fait appréciable aussi bien sur les mathématiques abstraites que sur les mathématiques scolaires. Nous verrons dans la deuxième phase comment leur comportement par rapport aux mathématiques va impacter sur leur pratique de classe.

De l'analyse de ces ressources, des épreuves et des résultats que nous allons poursuivre, on peut noter d'ores et déjà que les difficultés rencontrées par ces enseignants sont liées à l'organisation du dispositif et l'articulation entre les mathématiques abstraites qu'ils apprennent et les mathématiques scolaires qu'ils enseignent.

VI. CONCLUSION

Perriault (2002, p. 14) appelle l'effet diligence : « Phénomène que connaît bien l'histoire des techniques : les premiers wagons ressemblaient aux diligences tout comme bien des cours mis en ligne ressemblent, aujourd'hui, à des manuels scolaires ». Le fonctionnement d'un dispositif de formation à distance non repensé mais vécu comme une duplication du dispositif en présentiel était loin d'être une panacée. L'analyse des ressources et des résultats montrent que le problème ne se pose pas en terme de « qui peut le plus peut le moins » comme si les « connaissances » des mathématiques supposées plus « difficiles » facilitent l'enseignement des mathématiques scolaires. La mise en œuvre du dispositif expérimental que nous avons présenté ici permettra, nous l'espérons, de valider notre hypothèse que la formation doit se faire autour des mathématiques que ces stagiaires enseignent, en s'appuyant sur leur travail collaboratif au sein des cellules d'établissement, avec des tuteurs qui puissent prendre en compte le développement de la *culture mathématique* en rapport avec celui de la *culture d'enseignement des mathématiques*. Ces compléments d'analyse, essentiels, seront au cœur de notre communication au colloque EMF2015.

REFERENCES

Assude T. (2009) Une approche systémique et fonctionnelle de la conception de parcours de formation. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation* (pp. 827–842). LIENS, numéro spécial http://fastef.ucad.sn/EMF2009

Chevallard Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *17*(3), 17-54.

Duplàa E., Galisson A., Choplin, H. (2003) Le tutorat à distance existe-t-il ? Propositions pour du tutorat proactif à partir de deux expérimentations de FOAD. In Desmoulins C., Marquet P., Bouhineau D. (Eds.), *Actes de la conférence EIAH 2003* (pp. 477-484), ATIEF et INRP.

Durand-Guerrier V., Ngandop J.-N. (2009) Questions de logique et de langage à la transition secondaire – supérieur. L'exemple de la négation In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de* formation (pp. 1033-1047). LIENS, numéro spécial http://fastef.ucad.sn/EMF2009

CNM (2006) *Programme de mathématiques de l'enseignement moyen et secondaire,* Inspection Générale de l'Education Sénégal*,* [http://igen.education.sn], dernière consultation, décembre 2014.

Gueudet G., Trouche, L. (2010) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, INRP et Presses Universitaires de Rennes.

Gueudet G., Trouche L. (2008) Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et didactique* 2(3), 7-33.

Hache C., Proulx J., Moussa, S. (2009) Formation mathématique des enseignants : contenus et pratiques Compte-rendu du Groupe de Travail n°1– EMF2009. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de* formation (pp. 34-39). LIENS, numéro spécial http://fastef.ucad.sn/EMF2009

Hitt F., Maschietto M., Trgalova J., Sokhna M. (2012) Ressources et développement professionnel des enseignants. In Dorier J.-L. (Ed.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2012* (pp. 772-783), Genève, Suisse http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

PDEF (2003) *Programme de développement de l'éducation et de la formation du Sénégal,* [http://www.education.gouv.sn/politique/Fichiers/pdef-ept.pdf], dernière consultation, février 2006

Perriault J. (2002) *L'accès au savoir en ligne*. Paris : Odile Jacob.

Rabardel P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In Bailleul M. (dir.) *Actes de la X^e^ Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 202-213). Caen : IUFM.

Sokhna M. (2006) *Formation continue des enseignants de mathématiques du Sénégal: genèse instrumentale de ressources pédagogiques.* Thèse de Doctorat. Université Montpellier 2. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00917620

Sokhna M., Sarr J. (2010) L'Université Virtuelle Africaine: passage d'une formation d'enseignants aux mathématiques à une formation d'enseignants de mathématiques au Sénégal. *Scientific Annals of "Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi, Educational Sciences Series* 13, 75-94

http://www.psih.uaic.ro/cercetare/publicatii/anale_st/rezumate/cuprinsSE09.htm

Soury-Lavergne S., Trouche L., Loisy C., Gueudet G. (2013) *Le travail collectif et les pratiques réflexives au cœur des dispositifs hybrides de formation : de Pairform@nce à M@gistère*, rapport à destination du MEN et du MESR, IFÉ-ENS de Lyon. https://www.academia.edu/5014855/Soury-Lavergne_S._Trouche_L._Loisy_C._and_Gueudet_G._2013_Le_travail_collectif_et_les_pratiques_r%C3%A9flexives_au_coeur_des_dispositifs_hybrides_de_formation_de_Pairform_at_nce_%C3%A0_M_at_gist%C3%A8re

Annexe 1	**Annexe 2**
STRUCTURE D'UN COURS	Programme Algèbre et Logique (Cours annuel de 6 heures semaine cours et TD)
I.IDENTITE	**THÈME 1 :** LOGIQUE ET RAISONNEMENT; **THÈME 2 :** RELATIONS ET GRAPHE D'UNE RELATION ; **THÈME 3 :** GROUPE ; **THÈME 4 :** ANNEAU ET CORPS ; **THÈME 5 :** LES NOMBRES COMPLEXES ; **THÈME 6 :** ANNEAU DE POLYNOMES ; **THÈME 7 :** ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINEAIRES ; **THÈME 8 :** MATRICES **THÈME 9 :** DETERMINANTS ET APPLICATIONS ; **THÈME 10 :** ARITHMETIQUE ; **THÈME 11 :** LES ENTIERS NATURELS ET L'ANALYSE COMBINATOIRE.
1.1. Titre du cours	
1.2. Volume horaire	
1.3. Auteur(s) du cours	
1.4. Contacts de l'auteur	
2. INTENTIONS PEDAGOGIQUES	
2.1. Objectifs généraux	
2.2. Objectifs spécifiques	
3. CONDITIONS REQUISES	
3.1. Pré-requis	
3.2. Outils didactiques	
4. CONTENUS	
4.1. Résumé du cours	
4.2. Plan détaillée	
4.3. Organisateur graphique (conceptogramme)	
5. RESSOURCES COMPLEMENTAIRES	
5.1. Glossaire des principaux concepts	
5.2. Références bibliographiques	
6. ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	
6.1. Résumé de l'activité	
6.2. Description détaillée	
6.3. Evaluation formative	
7. EVALUATION	
7.1. Auto-évaluation des acquis	
7.2. Synthèse de remédiation	
7.3. Evaluation sommative	
Tableau de Planification	

Annexe 3

Université Cheikh Anta Diop

(1) FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques

Examen algèbre C1 FAD octobre 2014
Section : MPC ☐ MSVT. ☐
Prénom et Nom :……………………………………………………
Date et lieu de naissance : ……………………………………………
Tel : ………………………… Série du Baccalauréat ☐

METTEZ VOS RÉPONSES DIRECTEMENT SUR CETTE FEUILLE QUI SERA RAMASSÉE.

EXERCICE 1 :

A CHACUNE DES QUESTIONS CI-DESSOUS, SOULIGNER LA OU LES RÉPONSE(S) JUSTES.

n°	La proposition n°i est-elle	vraie ?	fausse ?	ni vraie ni fausse ?	à la fois vraie et fausse ?
1	Pour que ($P \Rightarrow Q$) soit fausse il faut et il suffit que ($P \wedge \rceil Q$) soit vraie				
2	Toute relation symétrique est une relation reflexive.				
3	Soient a et b deux réels, pour que le produit ab soit égal à 0 il faut et suffit que b soit égal à 0				
4	Il existe un réel x tel que pour tout réel y, xy = y				
5	Il existe un réel x tel que pour tout réel y, (x + y)(1+xy) = y				
6	Pour qu'un quadrilatère ABCD soit un losange il faut que la diagonale (AC) soit perpendiculaire à la diagonale (BD).				
7	Pour que ($P \Rightarrow Q$) soit vraie il faut et il suffit que ($\rceil Q \Rightarrow \rceil P$) soit vraie				
8	La fonction ln est un homomorphisme du groupe (IR^*_+, .) vers le groupe (IR, +)				
9	Pour que l'implication ($P \Rightarrow Q$) soit vraie il faut que les deux assertions (P et Q) soient toutes deux vraies.				
10	Pour qu'un parallélogramme ABCD soit un rectangle il faut que ABC soit un triangle rectangle en B.				
11	Pour tout réel x, il existe un réel y tel que xy = 1				
12	Soient A et B deux ensembles non vides, pour que $A \cap B = \{\ \}$, il faut que $A \subset \overline{B}$				
13	Pour qu'un parallélogramme ABCD soit un rectangle il suffit que ABC soit un triangle rectangle en B.				
14	Pour tout réel x, il existe un réel y tel x +y = 0				
15	Soient A et B deux ensembles non vides, pour que $A \cap B = \{\ \}$, il suffit que $A \subset \overline{B}$				
16	Il existe un réel y tel que pour tout réel x, x +y = 0				

EXERCICE 2

Dites si la phrase ci-dessous est vraie donner sa négation. (Vous devez justifier votre réponse)
« il existe un entier naturel mutiple de trois et dont la somme de ses chiffres est 7 »

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AUX NIVEAUX POST-SECONDAIRE ET SUPÉRIEUR

Compte-rendu du Groupe de Travail nº7

Alejandro S. GONZÁLEZ-MARTÍN[*] – Stéphanie BRIDOUX[**] –

Imène GHEDAMSI[***] – Nicolas GRENIER-BOLEY[****]

I. PRÉSENTATION

Les activités du groupe de travail ont été organisées dans un esprit de continuité avec les groupes de travail sur l'enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et universitaire lors des manifestations précédentes de EMF à Sherbrooke (2006 – GT6), à Dakar (2009 – GT7) et à Genève (2012 – GT7). Dans ce sens, nous avions identifié trois points d'intérêt prioritaires dans l'appel à communications :

- PI1. les difficultés liées à l'apprentissage de certains contenus mathématiques ; les organisations mathématiques dans ces niveaux et leurs conséquences sur l'apprentissage ; les difficultés liées au raisonnement, au formalisme et au symbolisme ;
- PI2. les difficultés liées à la transition secondaire/supérieur, notamment les micro-ruptures qui ont été mises en valeur entre ces deux institutions et dont l'accumulation conduit à une véritable rupture (Bloch & Ghedamsi 2005 ; Praslon 2000 ; Robert 1998) ;
- PI3. les difficultés liées aux pratiques des enseignants, par exemple le fait qu'elles prennent en partie pour référence les pratiques "expertes" des mathématiciens professionnels, cette référence n'étant toutefois ni explicite, ni tout à fait analogue d'un enseignant à l'autre (Robert 1998).

En nous appuyant de plus sur la thématique du colloque EMF 2015 « *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour enseignement et apprentissage* », nous avons choisi de ne pas occulter la double dimension, plurielle et universelle, des mathématiques. Les tensions entre ces deux dimensions se nourrissent, dans

[*] Université de Montréal – Canada – a.gonzalez-martin@umontreal.ca
[**] Université de Mons – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be
[***] Université de Tunis – Tunisie – ighedamsi@yahoo.fr
[****] Université de Rouen – France – nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr

González-Martín A.S., Bridoux S., Ghedamsi I., Grenier-Boley N. (2015) Enseignement des mathématiques aux niveaux post-secondaire et supérieur - *Compte-rendu du Groupe de Travail nº7.* In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT7, pp. 640-649.

une même institution, entre autres, des conceptions ou représentations qu'ont aussi bien les élèves/étudiants que les professeurs des notions mathématiques en jeu et du formalisme qu'elles requièrent. De plus, le caractère plus formel et plutôt universel des notions abordées dès la fin de l'enseignement secondaire est susceptible d'accentuer ces phénomènes et de rendre plus difficile le travail des étudiants et la gestion du professeur.

Dans ce contexte, l'appel à contribution du groupe de travail témoignait d'un double enjeu :

- situer les travaux du groupe dans la continuité de recherches antérieures faisant état de différents types de difficultés agissant sur l'enseignement/apprentissage des mathématiques à ces niveaux : celles liées à des contenus mathématiques spécifiques, celles liées à la transition secondaire/postsecondaire, celles liées aux pratiques des enseignants ;
- questionner les liens entre ces difficultés et certaines spécificités ou différences culturelles, voir dans quelle mesure les résultats de recherche obtenus ou les ressources conçues dans un certain contexte culturel en dépendent, voire pourraient être adaptés à d'autres contextes culturels.

Les propositions reçues et qui ont été retenues pour les actes du colloque traitent plutôt du premier enjeu. Par ailleurs, des questions relatives à la transition[1], au rôle du formalisme et à la pluralité des racines culturelles ont été abordées dans nos discussions. Nous y reviendrons à la fin de ce texte.

Les présentations qui ont eu lieu dans le groupe ont particulièrement abordé les aspects épistémologiques, institutionnels et cognitifs de l'enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur. Les discussions au sein du groupe ont par ailleurs permis de soulever de nouveaux éléments de réflexion que nous explicitons dans la section suivante. Plus précisément, les travaux ont notamment concerné :

- l'importance de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques dans le travail didactique ;
- l'analyse des difficultés des élèves/étudiants ;
- les propositions d'interventions didactiques ;
- la collaboration entre chercheurs et enseignants pour concevoir des situations d'enseignement.

Nous en venons maintenant à la synthèse des présentations qui ont eu lieu et que l'on décline suivant ces quatre axes, en ajoutant aussi les éléments principaux que ces présentations nous ont amenés à discuter.

II. TRAVAUX PRÉSENTÉS DANS LE GROUPE

Comme nous venons de le dire, les présentations qui ont eu lieu au sein de notre groupe ont été organisées autour de quatre axes. Ces quatre axes suivent, d'une certaine façon, les étapes du travail de recherche visant à intervenir aux niveaux postsecondaires : les analyses épistémologiques, les analyses institutionnelles et des difficultés des étudiants, l'élaboration et l'expérimentation d'alternatives ainsi que le travail de collaboration entre chercheurs et enseignants. Dans ce qui suit, nous résumons le contenu qui a été présenté dans le groupe de travail.

[1] Les articles ayant comme sujet principal des questions relatives à la transition ont fait l'objet des travaux du Projet spécial 3 (voir la section consacrée à ce projet spécial dans ces actes).

1. *L'importance de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques dans le travail didactique.*

Plusieurs travaux soulignent l'importance de la dimension épistémologique dans la recherche en didactique des mathématiques (voir par exemple les articles classiques de Artigue 1990, 1992), en particulier aux niveaux postsecondaires étant donnée la complexité des notions mathématiques en jeu (voir par exemple l'article récent de González-Martín, Bloch, Durand-Guerrier et Maschietto 2014). Dans ce sens, le travail présenté par González-Martín et Correia de Sá fait une revue du développement historique des séries numériques pour identifier les différents ostensifs utilisés par les mathématiciens. Leur travail fait ressortir l'importance que le cadre géométrique a eu dans l'évolution des premières intuitions relatives aux séries numériques, questionnant son absence dans les pratiques d'enseignement postsecondaire. Le travail mathématique dépend d'une façon fondamentale des ostensifs disponibles et de ceux qui sont accessibles aux étudiants (y compris à travers le professeur) ; or les ostensifs généralement mis en œuvre dans le cadre géométrique présentent des opportunités suffisamment conséquentes du point de vue de la visualisation. En lien avec la thématique du colloque EMF 2015, cette absence du cadre géométrique peut être justifiée, entre autres, par des phénomènes de transposition didactique qui véhiculent une vision universelle des mathématiques, où l'utilisation du langage formel prime, rendant plus difficile le travail des étudiants. Cette difficulté qui est liée à l'usage du symbolisme mathématique a déjà fait l'objet de plusieurs travaux de recherche (Bridoux 2011; Chellougui 2009 ; Durand-Guerrier & Arsac 2003 ; Weber & Alcock 2004). Ces travaux et d'autres ont clairement montré que la maîtrise par les étudiants du symbolisme mathématique (y compris formel) ne peut s'appuyer exclusivement sur une manipulation syntaxique d'ostensifs spécifiques.

Dans cet ordre d'idée, l'analyse de l'évolution des signes utilisés par les mathématiciens tant pour l'avancée du savoir mathématique que le développement de la pensée mathématique, peut s'avérer une piste prometteuse dans la construction d'ingénieries didactiques (Bloch & Gibel 2011). En particulier, les situations conçues sur la base d'une prise en compte des changements de cadres (Douady 1986) et/ou des conversions entre divers registres de représentations sémiotiques (Duval 1995), permettraient le maniement par les étudiants d'un canevas d'ostensifs (Bosch & Chevallard 1999) allant dans le sens d'une meilleure acquisition des savoirs du post-secondsaire et du supérieur. En lien avec les points d'intérêts PI2 et PI3, l'étude de pratiques enseignantes intégrant l'utilisation de plusieurs cadres et/ou registres de représentations sémiotiques dans l'approche de certaines notions mathématiques abstraites pourrait donner des pistes sur la mise en œuvre de nouvelles organisations mathématiques pouvant faciliter, dans certains cas, la transition entre les niveaux pré-universitaire et universitaire.

Nos discussions nous ont, de plus, menés à mieux souligner le rôle des symboles mathématiques et de la visualisation dans l'acquisition des mathématiques du niveau postsecondaire et supérieur. Le rôle des représentations visuelles dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques aux niveaux postsecondaires a déjà fait l'objet de plusieurs travaux anglophones mais aussi de travaux issus de la communauté francophone tels que ceux de Maschietto (2001) et de Bloch (2003). Il nous a, néanmoins, semblé que ce sujet est toujours d'actualité et peut donner lieu à un champ de recherche de plus en plus fécond. Ainsi, il nous a paru primordial de développer davantage de recherches aux niveaux postsecondaires afin de mieux comprendre le développement des différents ostensifs liés à certains concepts mathématiques abstraits, tant dans une perspective historique que par leur usage en pratique, et de voir dans quelle mesure l'utilisation de certains ostensifs pourrait permettre une meilleure appréhension d'autres ostensifs. Par exemple, Aspinwall, Haciomeroglu et Presmeg (2008) ont élaboré un modèle pour mesurer la préférence d'usage d'ostensifs algébriques ou d'ostensifs visuels (de types graphique ou géométrique) en ce qui concerne les dérivées. Leurs résultats semblent indiquer que les étudiants qui réussissent le mieux basent leur travail sur un usage mixte d'ostensifs. Par ailleurs, il semblerait qu'un usage approprié du langage verbal permettrait aussi bien de maitriser les divers types d'ostensifs que des liens qu'ils entretiennent. D'autres travaux sont encore nécessaires, surtout pour des notions mathématiques plus abstraites, pour mieux comprendre l'utilisation des différents ostensifs par les étudiants et mieux comprendre comment cette utilisation (et les liens construits entre les différents ostensifs et représentations) permet aux étudiants d'appréhender les notions mathématiques en jeu.

2. *L'analyse des difficultés des élèves/étudiants.*

Le travail de Litim, Zaki et Benbachir fait une analyse des difficultés rencontrées par les étudiants de première année universitaire dans l'apprentissage de la convergence des suites numériques, identifiant plusieurs origines pour ces difficultés. Parmi ces difficultés, ressortent celles liées à la manipulation de symboles abstraits, à la confusion entre suite et série, à l'application incorrecte de propriétés et de théorèmes et à l'interprétation des propriétés topologiques. Les résultats de ces auteurs rejoignent ceux qui ont été identifiés par d'autres chercheurs depuis longtemps (par exemple, le travail de Cornu 1991 ; Robert 1983). La persistance de ces difficultés chez les étudiants semble témoigner de l'absence d'une réelle prise en compte de celles-ci au sein de l'enseignement aux niveaux postsecondaires : pour quelles raisons les résultats de recherche au niveau postsecondaire ont-ils eu aussi peu d'impact sur les pratiques ordinaires d'enseignement (sujet déjà abordé, entre autres, par Artigue 2001) ?

En lien avec le point d'intérêt PI1, nos discussions dans cet axe nous ont menés à discuter de la pertinence de considérer la notion de convergence en tant que notion FUG (formalisatrice, unificatrice, généralisatrice – voir Robert 2008) et des difficultés d'apprentissage que cela implique. La conception d'une séquence d'enseignement consacrée à la notion de convergence considérée comme notion FUG est justement traitée dans le travail de Grenier-Boley et ses collègues, que nous discutons plus bas. Nos échanges nous ont fait aussi réfléchir à l'effet qu'ont les pratiques d'enseignement habituelles sur l'apprentissage des étudiants et au fait que les tâches présentées dans certains livres ou recueils conduisent les étudiants à développer certaines (in)compréhensions, voire à des représentations erronées de la notion, pouvant même mener certains d'entre eux à un niveau de réussite technique acceptable, en dépit d'une compréhension des notions en jeu. Ce type de résultats a été explicité depuis longtemps (Boschet 1983) et la situation ne semble pas s'améliorer plus de trente ans plus tard. Dans ce sens, l'étude des différentes micro-ruptures dans le passage lycée – université, mais aussi entre différents domaines des mathématiques (*Calculus – Analyse, Analyse – Algèbre, …*) semble être l'une des pistes prometteuses pour mieux comprendre certaines difficultés et proposer, dans le même temps, des interventions didactiques (voir par exemple le cas des espaces duaux dans Winsløw, Barquero, De Vleeschouwer & Hardy 2014).

Tenant compte de la thématique du colloque EMF 2015, il serait intéressant de développer des travaux ayant pour but d'amener une dimension plutôt plurielle (et moins universelle, du moins au tout départ) des mathématiques postsecondaires. Étant donné le fait que plusieurs des difficultés identifiées par la littérature sont en lien avec le langage et les modes de raisonnement formels, une co-construction de certaines notions et de leur sens pourrait éventuellement aider à pallier à certaines de ces difficultés (voir par exemple Ghedamsi 2008).

3. Les propositions d'interventions didactiques.

Dans cet axe, les travaux de Grenier-Boley et la Commission Inter-IREM Université, ainsi que de Rogalski et Rogalski ont été présentés. Le premier en lien avec l'introduction à la définition formelle de limite (tant pour les fonctions que pour les suites numériques) et le deuxième en lien avec la problématique d'enseignement des méthodes pour la résolution de tâches (avec le cas particulier des suites numériques). Dans les deux cas, les auteurs ont en particulier discuté des conditions pour la mise en place effective de pratiques innovantes au niveau postsecondaire, en parallèle de conditions permettant d'assurer le déroulement efficace de telles innovations en termes de recherche. En reprenant deux ingénieries didactiques du début des années quatre-vingt, Grenier-Boley et ses collègues démontrent comment les aspects épistémologiques liés à une notion mathématique peuvent être pris en compte pour sélectionner des variables didactiques permettant de les adapter à un public d'étudiants actuels. En revanche, le travail de Rogalski et Rogalski montre dans quelle mesure la transposition du travail du mathématicien en salle de classe par le biais des méthodes de résolution de problèmes revêt un caractère général dans ses modalités d'enseignement.

Ces travaux font un lien entre les points d'intérêt PI1 et PI3, démontrant – s'il en était besoin – le rôle clé que les analyses préalables peuvent jouer pour l'essai de nouvelles approches. En particulier, des liens avec les deux axes précédents ont été discutés, tels que l'utilisation de différents ostensifs, l'importance de la prise en compte d'une dimension épistémologique et la prise en charge par la nouvelle séquence didactique des difficultés des étudiants. Ces éléments deviennent clés aux niveaux postsecondaires et essentiels pour la construction d'ingénieries (voir par exemple González-Martín et al. 2014), tel que souligné dans des colloques EMF précédents, par exemple, dans le cas de la topologie. Le travail de Bridoux (2011), centré sur les premières notions de topologie, là encore interprétées comme des notions FUG, propose une gradation d'ostensifs pour élaborer une séquence d'introduction aux premiers concepts de topologie et les résultats indiquent que l'intervention a permis aux étudiants de mieux mettre en fonctionnement les notions dans les exercices proposés par l'enseignant, notamment dans la manipulation du formalisme et dans l'utilisation d'ostensifs graphiques.

Nous voyons là encore des liens avec la thématique du colloque EMF 2015. Les interventions didactiques citées dans cette section témoignent bien du fait que le caractère universel et formalisé des mathématiques, surtout aux niveaux postsecondaires, n'est pas toujours la meilleure porte d'entrée pour les étudiants et qu'il est possible, à travers des interventions adéquates, de permettre un accès graduel aux notions mathématiques. La création d'une nouvelle culture et le passage progressif à la « culture mathématique » semblent possibles à travers diverses gradations qui soient plus sensibles aux aspects épistémologiques et aux difficultés des étudiants. Cette co-construction d'une culture commune est abordée dans l'axe suivant.

4. La collaboration entre chercheurs et enseignants pour concevoir des situations d'enseignement.

Le travail de Squalli, Bombardier, Adihou et Raymond introduit la notion de *situation signifiante* comme outil de travail collaboratif entre les chercheurs et les enseignants de mathématiques au niveau postsecondaire (*collégial* au Québec). Il est montré que la combinaison de différentes expertises dans des travaux de recherche-action peut être à l'origine de la production d'activités mathématiques où la modélisation acquiert un rôle fondamental. De plus, les tensions qui existent parfois entre la communauté de mathématiciens et celle des didacticiens pourraient être minimisées par des éléments qui relient ces deux communautés, surtout aux niveaux « avancés », donnant ainsi naissance à des collaborations fructueuses (voir par exemple Nardi 2008).

Cette présentation, en lien avec les points d'intérêt PI2 et PI3, souligne les difficultés de la double transition vécues au Québec par les étudiants du *collégial* (deux années de préparation à l'université) : une première transition est vécue entre la fin du secondaire et le *collégial*, puis une deuxième aura lieu entre le *collégial* et l'université. Dans le travail présenté, une acclimatation à la « nouvelle culture » du *collégial* a lieu et de nouvelles tâches sont construites par une équipe composée de mathématiciens et de didacticiens, impliquant un processus de modélisation. La recherche internationale a évoqué l'importance croissante de la modélisation pour l'apprentissage des mathématiques et ce, du primaire à l'université (Blum, Galbraith, Henn, Niss 2007). En particulier, la recherche a souligné récemment l'intérêt d'aborder l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques auprès de clientèles avec un profil plutôt professionnel (tel qu'en ingénierie, par exemple – voir Artigue, Batanero , Kent 2007). Le rôle des mathématiques pour ces clientèles, en particulier ses aspects très formalisés, est questionné et des approches qui mettent la modélisation (surtout de phénomènes qui feront partie du quotidien des futurs professionnels) au cœur des pratiques d'enseignement semblent être des pistes à explorer. De plus, il a été souligné que les connaissances, les croyances et les pratiques des enseignants de mathématiques aux niveaux postsecondaires n'ont fait l'objet que de recherches récentes (Rasmussen, Marrongelle, Borba 2014), et qu'il serait en particulier primordial de développer davantage de travaux de recherche sur les pratiques d'enseignement au niveau universitaire (Speer, Smith, Horvath 2010). Le type de travail collaboratif présenté dans cet axe pourrait être l'une des façons de mieux documenter ces pratiques, en plus de pouvoir avoir une incidence sur le manque de formation à l'enseignement habituel aux niveaux postsecondaires.

Ces éléments de discussion nous ont amenés à revenir à la thématique du colloque EMF 2015, pour voir qu'il est possible de reconstruire une certaine « culture de l'enseignement des mathématiques avancées » auprès des enseignants de ces niveaux. De plus, le contexte est très présent dans le travail discuté ici, car il s'agit d'aider les étudiants dans la double transition que leur contexte éducatif impose. Ces résultats, pourtant, peuvent être transférables dans d'autres contextes, dans la visée de donner à la modélisation un rôle clé et de promouvoir le travail collaboratif entre didacticiens et enseignants des mathématiques aux niveaux postsecondaires.

III. PISTES POUR LA RECHERCHE À VENIR

Nos discussions se sont situées de façon naturelle en continuité avec les trois thématiques identifiées par les participants au GT7 dans le colloque EMF 2012 (Azrou, Bridoux & Tanguay 2012) :

- Les difficultés récurrentes en matière de formalisme et le rôle du registre symbolique dans la formalisation des notions enseignées, ainsi que l'importance d'un travail sémantique sur les notions enseignées à mener en parallèle avec un travail syntaxique.
- Le développement d'interventions pour prendre en charge les difficultés des étudiants, ainsi que le développement d'aptitudes plus « transversales » aux mathématiques.
- Le rôle de l'enseignant, le rôle du discursif et celui des commentaires méta-mathématiques.

Cependant, plusieurs thématiques ont été identifiées comme absentes (ou peu présentes) tant dans les présentations faites au sein de notre groupe que dans la recherche en général. Nous en citons ici quelques-unes :

1. Un peu par hasard, le contenu mathématique abordé dans les présentations ne concernait que des notions de l'Analyse (suites, séries, limites et convergence). La remarque faite par Artigue (2001) sur le fait que la recherche au niveau postsecondaire s'était centrée sur un nombre limité de notions semble être toujours d'actualité. Bien que de grands pas aient été amorcés pour aborder d'autres notions (l'algèbre linéaire, la théorie de groupes, la statistique, la topologie…), il semble que les notions des premières années de l'Analyse dominent encore les travaux de recherche. Ceci a été souligné aussi récemment dans le cas du congrès PME, où la proportion d'articles traitant les fonctions, les dérivées, les intégrales et les limites est très grande en comparaison avec le nombre d'articles traitant d'autres sujets (équations différentielles, fonctions à deux variables… – voir Hitt & González-Martín, à paraître).

2. Il existe peu de travaux dans la littérature sur les pratiques des mathématiciens professionnels et une meilleure compréhension de leurs pratiques et appréhension des mathématiques pourrait permettre de mieux guider les étudiants au niveau universitaire (Harel, Selden & Selden 2006). Dans ce sens, par exemple, le travail de Inglis et Alcock (2012) a analysé la façon de lire des démonstrations formelles chez des mathématiciens et chez des étudiants, identifiant des différences significatives; ces différences, ainsi que la prise en compte des éléments importants pour la lecture d'une preuve chez les mathématiciens, ont eu des implications pédagogiques importantes.

3. En lien avec le point précédent, nous n'avons pas une connaissance suffisante, en tant que communauté de recherche, de l'utilisation que font les mathématiciens experts de la visualisation (dans un sens large), en particulier dans les domaines mathématiques très abstraits. Nous avons besoin de recherches sur le rôle que les différents ostensifs peuvent jouer dans leur compréhension des notions mathématiques, ainsi que pour avancer dans leur travail (faire des conjectures, construire un modèle…), car cela pourrait mener à introduire ces usages dans les pratiques d'enseignement.

4. Tel que nous l'avons dit plus haut, il y a une lacune importante en recherche par rapport à l'analyse de pratiques enseignantes aux niveaux postsecondaires (Speer et al. 2010), ainsi que sur les sources de connaissances qui sous-tendent ces pratiques. Le manque d'une formation didactique et à l'enseignement fait qu'il est légitime de se questionner sur la manière dont les enseignants du postsecondaire construisent leurs connaissances sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, ainsi que la manière dont les pratiques mobilisées par leur formation disciplinaire initiale éventuellement influencent leurs pratiques ultérieures et leur vision de l'enseignement universitaire.

5. Nous avons aussi souligné plus haut l'émergence de tout un champ de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans des facultés autres que celle de mathématiques. Quelles mathématiques sont nécessaires pour former de futurs professionnels, quelles notions peuvent être utilisées sans être formalisées, quel serait le rôle de la modélisation…? Ce sont des questions qu'il paraît nécessaire de traiter en recherche pour guider les prises de décisions institutionnelles, étant donnés le nombre croissant d'étudiants qui s'inscrivent dans des facultés professionnelles, ainsi que les taux élevés d'abandon et ce, depuis les années 80 (Rasmussen & Ellis 2013).

6. Enfin, parmi les sujets discutés, nous citons celui de l'évaluation aux niveaux postsecondaires. Il est vrai qu'il existe peu de travaux de recherche sur les pratiques d'évaluation, ses enjeux et ce qui est vraiment évalué, entre autres, aux niveaux primaire et secondaire, et cela demeure encore plus vrai aux niveaux postsecondaires. Étant donnés les différents profils d'étudiants qui reçoivent des enseignements de mathématiques, il est primordial de mieux comprendre comment ces étudiants sont évalués, comment l'évaluation influence les pratiques d'enseignement, ainsi que la manière dont l'évaluation prépare (ou non) de façon adéquate les futurs professionnels.

Nous espérons que ce compte-rendu reflète de façon fidèle l'essentiel de nos discussions et échanges pendant le colloque. Plusieurs pistes de recherche s'ouvrent et nous espérons voir dans l'avenir des travaux abordant ces thématiques.

De plus, le domaine de la recherche aux niveaux postsecondaires se consolide sur le plan international et plusieurs des participants au GT7 sont impliqués dans d'autres activités à venir :

- Le premier colloque du réseau *International Network for Didactic Research in University Mathematics* (INDRUM), qui aura lieu à Montpellier en mars 2016.
- Les *topic study groups* 2 (*Mathematics education at tertiary level*) et 16 (*Teaching and learning of calculus*) dans le prochain congrès ICME13, en Allemagne en juillet 2016.
- Le *Thematic Working Group 14 (University Mathematics Education)* dans le prochain congrès européen CERME10, qui aura lieu en février 2017 en Irlande.
- La nouvelle revue internationale *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, dont le premier numéro est paru en avril 2015.

Étant données les nombreuses opportunités pour poursuivre les échanges et partager des résultats de recherche sur les niveaux postsecondaires, nous espérons vivement que les activités du GT7 vont se multiplier et que nos échanges continueront sur ces plusieurs forums, en attendant la tenue du prochain EMF 2018.

REFERENCES

Artigue M. (1990) Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10* (2.3), 241-286.

Artigue M. (1992) The importance and limits of epistemological work in didactics. In Geeslin W., Graham K. (Eds.), *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 195-216). Durham: PME.

Artigue M. (2001) What can we learn from educational research at the university level? In Holton D. (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study* (pp. 207-220). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Artigue M., Batanero C., Kent P. (2007) Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In Lester F.K. (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1011-1049). Greenwich, CT: NCTM / Information Age.

Aspinwall L., Haciomeroglu E.S., Presmeg N. (2008) Students' verbal descriptions that support visual and analytic thinking in Calculus. In Figueras O., Cortina J.L., Alatorre S., Rojano T., Sepúlveda A. (Eds.), *Proceedings of the joint meeting of PME32 and PME-NA 30* (vol. 2, pp. 97-104). Mexico: Cinvestav-UMSNH.

Azrou N., Bridoux S., Tanguay D. (2012) Enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur – *Compte rendu du Groupe de Travail nº7.* In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le*

21^{e} siècle – Actes du colloque EMF 2012 (GT7, pp. 945-952). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Bloch I. (2003) Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics* 52, 3-28.

Bloch I., Ghedamsi I. (2005) Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? *Petit x 69*, 7-30.

Bloch I., Gibel P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(2), 191-227.

Blum W., Galbraith P., Henn H., Niss M. (2007) (Eds.) *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. New York : Springer.

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19* (1), 77-124.

Boschet F. (1983) Les suites numériques comme objet d'enseignement (premier cycle de l'enseignement supérieur français). *Recherches en Didactique des Mathématiques 4* (2), 141-163.

Bridoux S. (2011) Enseignement des premières notions de topologie à l'université. Une étude de cas. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot – Paris VII.

Chellougui F. (2009) L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université : entre l'explicite et l'implicite. Recherches en Didactique des Mathématiques 29 (2), 123-154.

Cornu B. (1991) Limits. In Tall D. (Ed.) Advanced Mathematical Thinking (pp. 153-166). Dordrecth: Kluwer Academic Publishers.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques 7* (2), 5-31.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(3), 295-342.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Neuchâtel : Peter Lang.

Ghedamsi I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université*. Thèse de Doctorat. Université Bordeaux 2.

González-Martín A.S., Bloch I., Durand-Guerrier V., Maschietto M. (2014) Didactic situations and didactical engineering in university mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *Research in Mathematics Education 16* (2), 117-134.

Harel G., Selden A., Selden J. (2006) Advanced mathematical thinking. Some PME perspectives. In Gutiérrez A., Boero P. (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 147-172). Sense Publishers.

Hitt F., González-Martín A.S. (à paraître) Generalization, covariation, functions and calculus. PME contributions in the last ten years. In Gutiérrez A., Boero P., Leder G. (Eds.) *Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Sense Publishers.

Inglis M., Alcock L. (2012) Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education 43* (4), 358-390.

Maschietto M. (2001) Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'Université. *Recherches en Didactique des Mathématiques 21* (1-2), 123-156.

Nardi E. (2008) *Amongst mathematicians. Teaching and learning mathematics at university level*. New York: Springer.

Praslon F. (2000) *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement.* Thèse de doctorat. Université Paris 7.

Rasmussen C., Ellis J. (2013) Who is switching out of calculus and why. In Lindmeier A.M., Heinze A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 73-80). Kiel (Germany): PME.

Rasmussen C., Marrongelle K., Borba M.C. (2014) Research on calculus : what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education 46* (4), 507-515.

Robert A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP 340*, 431-449.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au Lycée et à l'Université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2), 139-190.

Robert A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants* (pp. 45-56). Toulouse : Octarès.

Speer N.M., Smith J.P., Horvath A. (2010) Collegiate mathematics teaching: An unexamined practice. *The Journal of Mathematical Behavior* 29(2), 99-114.

Weber K., Alcock L. (2004) Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics* 56(2-3), 209-234.

Winsløw C., Barquero B., De Vleeschouwer M., Hardy N. (2014) An institutional approach to university mathematics education : from dual vector spaces to questioning the world. *Research in Mathematics Education 16* (2), 95-111.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

emf 2015

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

« PROGRESSER EN GROUPE » (PEG) ET « APPRENTISSAGE PAR PROBLÈMES ET PAR PROJETS » (APP): DEUX PÉDAGOGIES COLLABORATIVES EFFICACES

Kouider BEN-NAOUM*, Christophe RABUT**, Vincent WERTZ*

Résumé – Nous présentons rapidement dans cet article les pédagogies PEG et APP, nous en comparons le mode opératoire et les exigences vis-à-vis des étudiants. Diminution drastique du nombre de cours magistraux, efficacité de la collaboration entre les étudiants, alternance du travail individuel et du travail en groupe, tels sont les mots clefs et points communs des pédagogies collaboratives en question.

Mots-clefs : Pédagogies collaboratives, Apprentissage par Problèmes et par Projets, Progresser en Groupe

Abstract – We present in this paper two collaborative learnings, « Working In Groups" (WIG) and Problem Based Learning (PBL). We compare the ways of doing and the main items required to the students. Important decrease of the number of lectures, efficiency of student collaboration, alternating personal and group working, here are the main features and the common points of these two collaborative learnings.

Keywords: collaborative learning, Problem based learning, Working in Groups

I. INTRODUCTION

Tous ces dispositifs utilisent le point fondamental que le travail en groupe permet de faire bien davantage et bien mieux que le travail uniquement individuel. La combinaison et l'alternance du travail individuel et du travail en groupe permettent d'une part une bien meilleure compréhension, acquisition et assimilation des concepts, d'autre part de résoudre des difficultés qu'aucun des individus composant le groupe n'aurait pu résoudre seul.

L'APP part d'un *problème* et l'étudiant doit acquérir certaines notions, concepts et savoir-faire pour pouvoir le résoudre. Le problème est donc le moteur de motivation pour l'étudiant. C'est un défi pour l'étudiant, puisqu'il ne dispose pas encore des outils nécessaires à sa résolution. L'étudiant va donc rechercher et acquérir de nouvelles notions et outils pour pouvoir apporter une réponse au problème posé.

Au contraire, PEG part du postulat que les notions et concepts méritent d'être étudiés en tant que tels et qu'il est préférable de les acquérir indépendamment de leur utilisation dans le cadre d'un problème. En ce sens PEG est davantage orienté « matière » que l'APP.

Ben-Naoum K., Rabut C., Wertz V. (2015) « Progresser En Groupe » (PEG) et « Apprentissage par Problèmes et par Projets » (APP) : Deux pédagogies collaboratives efficaces. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT7, pp. 650-652.

Le détail du travail à faire est indiqué plus précisément pour PEG que pour l'APP. Par ailleurs le rôle et le séquencement des séances sont plus proches du dispositif traditionnel pour PEG que pour l'APP. Beaucoup croient que les pédagogies collaboratives s'appliquent mal au cas des mathématiques. Ce qui est une erreur. Nous estimons donc utile de les présenter rapidement ici.

II. L'APPRENTISSAGE PAR PROBLEMES

Le principe de la méthode est de poser un exercice ou un problème aux étudiants, dont la résolution nécessite d'assimiler une partie du cours pas encore étudiée. Ils doivent donc identifier clairement de quelle partie ils ont besoin, acquérir les notions et théorèmes en question, puis résoudre l'exercice ou le problèmePour « résoudre » un problème, les élèves répartis en équipes de 4 à 6 travaillent ensemble encadrés par un enseignant. Le rôle de celui-ci est essentiellement d'accompagner l'équipe dans sa démarche d'apprentissage, de s'assurer qu'elle travaille de manière collaborative, de guider le travail d'investigation en orientant celui-ci par de nouvelles questions, d'aider à ce que celui-ci soit le plus efficace possible.

Les cinq étapes suivantes jalonnent cette activité :

- Introduction du problème et identification des concepts mathématiques nécessaires.
- Acquisition des concepts, travail personnel, puis confrontation en équipe.
- Mise en pratique des apprentissages (exercices).
- Approfondissement des concepts, étude théorique, en travail individuel et/ou en équipe ;
- Maitrise des concepts (cours de restructuration).

III. PROGRESSER EN GROUPE

Faire travailler les étudiants sur le cours, en équipe, est l'idée centrale de la méthode PEG. Deux moyens sont proposés pour cela ; ils sont basés sur le fait que les étudiants travaillent individuellement puis en équipes (une équipe est idéalement constituée de 4 étudiants), et qu'ils échangent sur le contenu du cours en tant que tel ([Rabut]).

Il faut éviter la répartition des tâches. Pour cela on ne demande aucun rendu d'équipe. Le but du travail en groupe est de s'aider mutuellement à acquérir et assimiler les savoirs et les compétences visés par l'enseignant. Il faut exiger un **travail personnel préparatoire précis ;** ce travail nivelle par le haut le niveau des étudiants et il fait gagner du temps en séance ; il rend donc le travail des étudiants comme de l'enseignant plus efficace.

Dans les deux approches présentées ci-dessous il n'y a pas de cours magistral présentant les notions nouvelles, et l'assimilation des notions est faite essentiellement en équipe, avec la présence et l'aide de l'enseignant.

1. *L'étude du cours : première approche*

Les étudiants doivent lire avant la séance et en travail personnel une partie précise d'un document (« de la page tant à la page tant » d'un polycopié, d'un livre), en identifiant ce qui n'est pas clair pour eux, ce qui est difficile et/ou mal compris, ce qui est important enfin.

En séance, les étudiants sont regroupés en équipes et discutent sur leur travail, sur le contenu du cours : ils confrontent leurs difficultés, tentent de résoudre ensemble les difficultés de tel ou tel membre de l'équipe, approfondissent les notions et les points importants, discutent éventuellement sur leurs conséquences. Lorsque, malgré la discussion, une difficulté persiste, l'équipe doit formuler une question qu'elle pose à l'enseignant, et celui-ci y répond.

2. *L'étude du cours : deuxième approche : le cours problématisé*

Le cours est transformé en un problème, lequel doit suivre la même progression que le cours : au lieu d'affirmer et puis dérouler les explications et démonstrations, il faut d'abord présenter le contexte et la situation puis poser les questions de réflexion (« que pensez-vous de … ? », « faites un schéma illustrant ce qui se passe »…) ou des questions de réalisation (« démontrez que… », « donnez la valeur de … »). Il faut ensuite établir et mettre clairement en valeur les résultats importants.

IV. CONCLUSION

Ces pédagogies collaboratives sont très motivantes pour les étudiants, mais aussi pour les enseignants. Notre expérience nous permet aussi d'affirmer que les apprentissages ainsi réalisés sont plus durables que ceux résultant de méthodes de « transmission » plus classiques. Nous encourageons vivement nos collègues à faire le pas et mettre leurs étudiants en équipes, que ce soit pour faire de l'APP ou du PEG.

REFERENCES

Rabut C. (2014) « Progresser En Groupe » (PEG) : une méthode pédagogique globale basée sur le travail en petits groupes. *ESAIM : Proceedings and survey* 45, 255-264.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

UTILISATION DE LA VISUALISATION DANS LE DÉVELOPPEMENT HISTORIQUE DES SÉRIES AVANT LE 17$^{\text{E}}$ SIÈCLE. UNE ANALYSE À TRAVERS LES OSTENSIFS

Alejandro S. GONZÁLEZ-MARTÍN* – Carlos CORREIA DE SÁ**

Résumé – Dans cet article, une revue de la littérature existante nous amène à souligner l'importance du raisonnement visuel pour l'apprentissage des mathématiques, en particulier des séries numériques ; or, l'enseignement actuel semble négliger cet aspect (le raisonnement visuel) et présente les séries souvent réduites aux aspects algébriques. En nous questionnant pour savoir si le développement historique des séries a fait appel à des ostensifs dans le cadre géométrique, nous faisons une révision du travail de mathématiciens avant le 17$^{\text{e}}$ siècle qui démontre le rôle important que ces ostensifs ont joué dans le développement des idées premières sur les séries.

Mots-clefs : séries, visualisation, ostensif, enseignement postsecondaire, analyse historique

Abstract – In this paper, a revision of literature leads us to stress the importance of visual reasoning for mathematics learning, in particular regarding numerical series ; however, current teaching practices seem to neglect this aspect (visual reasoning) and to introduce series usually reduced to algebraic aspects. Wondering whether the historical development of series has recurred to the use of ostensives in the geometric frame, we have made a revision of some mathematicians' work before the 17$^{\text{th}}$ century which shows the important role that these ostensives have played in the development of the first ideas about series.

Keywords: series, visualisation, ostensive, postsecondary education, historical analysis

I. INTRODUCTION

Cet article dresse un portrait sommaire de l'enseignement des séries infinies de nombres réels (*séries* dans ce qui suit), en faisant ressortir la prédominance d'un travail algorithmique et basé sur la manipulation symbolique pour ensuite présenter quelques moments de l'histoire des séries, en démontrant le rôle que les représentations visuelles (ou un raisonnement visuel) ont joué dans le travail de certains mathématiciens. Ceci nous amènera à nous questionner sur la disparition de ces représentations visuelles dans l'enseignement et leur rôle potentiel pour favoriser l'apprentissage des étudiants.

* Département de Didactique (Université de Montréal) – Canada – a.gonzalez-martin@umontreal.ca
** CMUP – Centro de Matemática da Universidade do Porto – Portugal – csa@fc.up.pt

González-Martín, A.S., Correia de Sá, C. (2015) Utilisation de la visualisation dans le développement historique des séries avant le 17$^{\text{e}}$ siècle. Une analyse à travers les ostensifs. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT7, pp. 653-665.

La notion de série joue un rôle central dans l'Analyse, ayant joué un rôle important dans son développement. Les séries peuvent être utilisées comme base pour d'autres notions mathématiques (telles que le calcul de l'aire sous une courbe en additionnant les aires de rectangles sous elle ou le développement décimal de nombres périodiques) et aussi pour modéliser plusieurs phénomènes (tels que l'intérêt cumulatif dans un compte bancaire ou la distribution d'un médicament dans l'organisme). Il est possible que ces éléments puissent en partie expliquer la présence des séries dans les programmes d'études de mathématiques postsecondaires dans plusieurs pays, souvent sous l'étiquette de « Fondements de l'Analyse Classique » (voir, par exemple, Hairer & Wanner 1996).

Dans le cas du Canada, l'éducation n'est pas une responsabilité du gouvernement fédéral, mais de chacune des provinces qui ont le mandat d'organiser leur propre système éducatif. Dans la province du Québec, l'éducation obligatoire se divise en deux niveaux : éducation primaire (6 à 11 ans) et éducation secondaire (12 à 16 ans). Les étudiants qui veulent poursuivre des études universitaires doivent compléter une formation de préparation à l'université de deux ans, appelée *collégial* ou *cégep*. C'est dans le cadre des études collégiales que les séries sont introduites en première année, pour les étudiants voulant poursuivre une carrière scientifique-technique. Cependant, malgré l'importance de cette notion dans les mathématiques et de sa présence dans les programmes d'études, son apprentissage n'est pas sans difficultés, comme nous le discutons dans la section qui suit.

II. PROBLÉMATIQUE

La quantité d'articles de recherche dans la littérature internationale sur la notion de série est plutôt restreinte. Cette notion apparait des fois implicitement dans certains travaux sur les suites ou la convergence (Boschet 1983; Robert 1982) et rares sont les travaux centrés sur la notion de série elle-même. Il faut aussi préciser que, parmi les travaux dans la littérature internationale sur les séries, la majorité analyse leur apprentissage, mais il n'existe pas beaucoup de travaux contemporains analysant leur enseignement. La révision de la littérature qui suit s'organise autour de trois axes principaux : le recensement de quelques difficultés qu'éprouvent les étudiants quand ils apprennent les séries, certaines recommandations pour leur enseignement et la présentation des séries dans les manuels.

Les séries étant étroitement liées à d'autres notions mathématiques telles que les limites, les suites et la convergence, il est naturel que les difficultés propres à ces notions soient aussi présentes avec les séries (par exemple, en ce qui concerne la convergence, voir Robert 1982). Par rapport aux difficultés d'apprentissage propres aux séries, nous considérons le travail de Kidron (2002), qui identifie plusieurs des difficultés principales avec les séries. Certaines parmi elles sont communes à la majorité des notions de l'Analyse : la vision de la somme infinie comme un processus ou comme un objet, l'intuition du processus infini comme un processus *potentiellement infini* ou comme une *somme infinie achevée*[1], et les contradictions trouvées chez les étudiants en ce qui a trait à leur *concept image* et leur *concept definition.* Kidron (2002) a aussi souligné les différences cognitives entre le fait de lire de gauche à droite ou de droite à gauche l'égalité $S = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ Elle identifie par ailleurs des difficultés évidentes dans l'utilisation de la notation symbolique par les étudiants. Cette dernière remarque est aussi faite par Mamona (1990), qui a souligné la confusion chez les étudiants entre suites et séries, en plus de leur résistance à voir les suites comme un type de fonction. Enfin, il a été aussi souligné que les difficultés avec les séries peuvent avoir un

[1] Nous préférons cette traduction pour « *actual infinity* » et l'avons déjà utilisée dans González-Martín (2011).

impact sur l'apprentissage de la notion d'intégrale (Bezuidenhout & Olivier 2000; González-Martín 2006).

En ce qui a trait aux recommandations concernant l'enseignement des séries, Bagni (2000, 2005) a suggéré que le recours à des exemples historiques pourrait aider les étudiants à surmonter certaines fausses conceptions, telles que « l'addition d'un nombre infini de termes implique une somme infinie » et met en garde qu'une transposition didactique pour enseigner les séries devrait prendre en compte les possibles réactions des étudiants, qui pourraient être semblables à celles des mathématiciens dans le passé. Par ailleurs, il distingue deux niveaux de conceptualisation pour les séries, l'opérationnel et le structurel et il mentionne que cette distinction n'est pas usuellement prise en compte dans l'enseignement ; notons que ces deux stages semblent proches des notions *outil – objet* présentés par Douady (1986). L'utilisation du raisonnement visuel pourrait aussi être avantageuse pour les étudiants (Alcock & Simpson 2004), surtout dans le but de les aider à attribuer un sens à la notion. En particulier, Alcock et Simpson (2004) ont argumenté que l'utilisation du raisonnement visuel pourrait être utile pour aider les étudiants à établir des liens entre les représentations formelle et visuelle des séries et suggèrent aussi que les étudiants qui utilisent régulièrement des images visuelles dans leur raisonnement en Analyse, en particulier sur les suites et les séries, partagent certaines caractéristiques positives : « tous voient les construits mathématiques en tant qu'objets, ils tirent rapidement des conclusions sur des ensembles d'objets et ils sont à ce point convaincus de leurs propres affirmations qu'ils les considèrent évidentes » (p.29).

Finalement, en ce qui concerne la présentation des séries dans les manuels, le travail pionnier de Robert (1982) relève diverses, et souvent inadéquates, représentations mentales et écrites sur la convergence des suites détenues et développées par des étudiants universitaires en France. Cette inadéquation était attribuée, du moins en partie, à la nature limitée des exercices utilisés lors de l'enseignement. Ces résultats coïncidaient avec ceux de Boschet (1983), obtenus à partir de l'analyse de la présentation des suites numériques dans les cours universitaires (en particulier, dans les manuels et les notes de cours des étudiants et des professeurs). Entre autres, elle a remarqué que les exemples existants promouvaient plutôt une variété de représentations pas toujours adéquates et que les suites n'étaient pas vues comme des cas particuliers des fonctions, ce qui a, à nouveau, été observé par Mamona (1990) quelques années plus tard. Boschet (1983) a aussi signalé que l'enseignement habituel inclut très peu d'exemples de représentations graphiques de la convergence, ce qui semble aller à l'encontre des recommandations d'Alcock et Simpson (2004).

Intéressés par l'enseignement des séries, nous avons mené une recherche pour étudier leur enseignement et l'impact potentiel de celui-ci sur l'apprentissage des étudiants. La première étape de cette recherche a considéré un échantillon de 17 manuels utilisés au niveau *collégial* sur une période de 15 ans (de 1993 à 2008 ; voir González-Martín, Nardi & Biza 2011). Dans ce niveau préuniversitaire, la converge des séries est introduite de façon formelle et l'accent est rapidement mis sur l'apprentissage des critères de convergence. Dans les manuels, le recours au visuel reste anecdotique et les auteurs prennent souvent pour acquis que les étudiants interpréteront d'une façon adéquate les images présentées, ce qui est loin d'être vrai (González-Martín 2014). Étant donné les recommandations de la recherche en général sur l'utilisation de la visualisation dans l'apprentissage des mathématiques et celles d'Alcock et Simpson (2004), particulièrement, en ce qui concerne les séries, nous nous demandons pourquoi l'enseignement des séries fait aussi peu recours aux aspects visuels possibles de cette notion. Se peut-il que cette notion ait été développée par les mathématiciens sans besoin de représentations visuelles ? Cela nous a amenés à nous intéresser au développement historique de la notion, plus particulièrement pour savoir si l'utilisation de représentations visuelles a joué un rôle important dans l'évolution des séries. Avant de formuler notre question de recherche de façon définitive, nous exposons les outils théoriques qui guident notre recherche et qui seront présents dans cette formulation.

III. CADRE THÉORIQUE

Afin de savoir s'il existe des *distances* importantes, surtout en ce qui concerne les aspects visuels, entre le savoir savant et le savoir à enseigner (Chevallard 1985) par rapport aux séries, nous présentons ici les outils principaux dont nous nous servons, issus de la théorie anthropologique. L'un des apports importants de cette théorie est donné par l'introduction de la notion clé d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie* (Chevallard 1999), attribuant un rôle important à la notion de *tâche* et établissant le postulat que « *l'accomplissement de toute tâche résulte de la mise en œuvre d'une technique* » (Bosch & Chevallard 1999, p.83). La théorique anthropologique établit que la plupart des tâches institutionnelles sont des tâches routinières ; cependant, des types de tâches *problématiques* peuvent apparaître, puisqu'il n'existe pas de technique appropriée pour leur accomplissement. Ce type de tâches peut être à l'origine d'un *progrès* visant à étudier le problème dans le but de construire la technique manquante (p.84). En particulier, un *changement de cadres* peut s'avérer un moyen d'obtenir des formulations différentes à un problème, permettant sa résolution (Douady 1986, p. 11).

L'accomplissement des tâches, routinières ou *problématiques*, peut être associé à l'utilisation de matériels, soit physiques soit abstraits. Spécifiquement, les objets tels que les écritures, les formalismes, les graphismes, les mots et les discours, interviennent souvent en tant que *signes*, occupant la place d'autres objets qu'ils *représenteraient* (Bosch & Chevallard 1999, p.89). Ces objets, à leur tour, ont une fonction signifiante, qui permet de produire des objets mathématiques, mais qui en même temps conditionne l'activité mathématique qui les met en jeu. En particulier, « l'analyse didactique du développement du savoir mathématique – saisi dans la durée historique, dans l'histoire de vie d'une personne, ou dans la vie d'une classe – ne peut considérer comme secondaire cette dimension de l'activité, en lui assignant une pure fonction instrumentale dans la construction des concepts » (p.89).

Étant donné l'importance de ces notions, deux types d'objets sont distingués :

> Nous parlerons d'*objet ostensif* – du latin *ostendere*, « montrer, présenter avec insistance » – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est-il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes. Les objets *non ostensifs* sont alors tous ces « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être *évoqués* ou *invoqués* par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). Ainsi, les objets « fonction » et « primitive d'une fonction » sont-ils des objets non ostensifs que nous avons appris à identifier et à activer par le moyen de certaines expressions, écritures et graphismes particuliers mis en jeu dans des pratiques et situations tout autant particulières (pp.88–89).

De la définition de ces deux types d'objets suit que toute activité humaine se laisse décrire comme une manipulation d'objets ostensifs et Bosch et Chevallard posent le principe que « *en toute activité humaine, il y a co-activation d'objets ostensifs et d'objets non ostensifs* » (p.91). De cette façon, « la mise en œuvre d'une technique se traduit par une *manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs* » (p.91) et la capacité à identifier et à manipuler ces ostensifs est le produit d'une construction institutionnelle. En ce qui concerne le développement historique d'une notion :

> […] Du point de vue de la genèse des objets, on peut dire que les ostensifs et les non-ostensifs *émergent ensemble* dans la praxis humaine, qu'ils sont des *émergents* de cette praxis, sans qu'on puisse établir *a priori* d'antériorité des uns par rapport aux autres. Toutefois, si l'on se restreint à une institution ou à un ensemble d'institutions données, et dans une période historique donnée, les situations peuvent montrer tantôt une avance du système des instruments ostensifs par rapport à un certain système de non-ostensifs – un concept peut manquer par exemple –, tantôt l'inverse, quand manquent un ou plusieurs objets ostensifs – par exemple une notation – qui donneraient aux objets non ostensifs un meilleur rendement dans le pilotage de l'activité (p.94).

Finalement, plusieurs registres ostensifs sont identifiés : « registre de l'*oralité*, registre de la *trace* (qui inclut graphismes et écritures), registre de la *gestualité*, enfin registre de ce que nous nommerons, faute de mieux, la *matérialité quelconque*, où prendront place ces objets ostensifs qui ne relèvent d'aucun des registres précédemment énumérés » (p.95).

Tous ces outils deviennent précieux pour nous. Dans l'évolution historique des séries, nous cherchons à analyser certains épisodes du développement du non ostensif « série » où la résolution de tâches *problématiques* a mis en place la manipulation d'ostensifs dans le registre de la trace, faisant appel à des représentations visuelles. Nos recherches se concentrent ici sur les travaux développés par des mathématiciens avant le 17e siècle et le début de la formalisation des séries et nous présentons les résultats principaux dans la section qui suit.

IV. ÉPISODES DANS LE DEVELOPPEMENT HISTORIQUE DES SÉRIES AVANT LE 17E SIECLE

La première chose que l'on constate en analysant les documents historiques sur les séries, c'est que cette notion n'a pas une très longue histoire. Les anciens grecs abhorraient tout usage de l'infini actuel, au moins à partir d'Aristote, ce qui empêchait la considération de sommes infinies. D'ailleurs, tant pendant l'Antiquité que pendant le Moyen-âge et la Renaissance, les cas où la mention des séries serait pertinente ne sont pas très nombreux. Ce n'est qu'à partir de la fin du 17e siècle que les séries acquièrent une importance de plus en plus grande en mathématiques.

Par ailleurs, à partir du 17e siècle, les séries apparaissent tout de suite comme des objets à caractère analytique : elles sont définies à partir de l'expression d'un terme général (donné d'habitude par une formule) et elles sont manipulées symboliquement avec le recours à l'écriture algébrique. À l'exception du critère de l'intégrale, il n'y a pas de représentation géométrique associée aux séries, que ce soit dans le Calcul Fluxionnel de Newton ou dans le Calcul Infinitésimal de Leibniz. Ce trait analytique des séries se maintient pendant tout le 18e siècle et reste dominant jusqu'à nos jours.

Pourtant, dans la longue période qui va de l'Antiquité jusqu'à la création du Calcul, on trouve des occurrences isolées où le lecteur moderne peut discerner la présence du non ostensif « série », avec comme référence, le développement graduel d'ostensifs pour s'y référer. Puisque les ostensifs correspondant à l'écriture analytique ne sont pas encore mis au point, le raisonnement du mathématicien doit ou bien s'exprimer de façon purement discursive, avec des ostensifs du registre de l'oralité, ou bien recourir à des ostensifs du registre de la trace liés à la géométrie. On a ainsi quelques occasions (qui restent malheureusement peu nombreuses) d'observer des représentations visuelles que les mathématiciens se faisaient des sommes infinies, avant d'en avoir une théorie analytique plus ou moins formalisée. Dans ce qui suit, nous allons nous arrêter sur quelques cas particuliers.

1. *Zénon d'Élée*

Le plus ancien exemple d'une somme infinie avec une valeur finie apparaît avec Zénon d'Élée (5ième siècle a. J.-C.) dans son paradoxe *Dichotomie* (Zafiropulo 1950, pp. 180–181). L'original du travail de Zénon ne nous est pas parvenu, mais la tradition nous a transmis la version suivante du paradoxe : Pour aller de A à B, un mobile doit passer d'abord par C, entre les deux ; mais avant d'arriver à C, le mobile doit passer par D ; et ainsi de suite (Fig.1). Selon ce raisonnement, le mobile n'arrivera donc jamais à B.

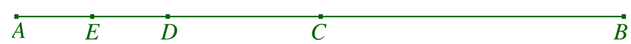


Figure 1 *– Paradoxe Dichotomie*

Le segment de droite AB est divisé en sous-segments, en quantité infinie, ayant chacun une longueur positive. Ce paradoxe permet d'une certaine façon de confronter le point de vue de l'infini potentiel (il faut passer étape par étape, alors le processus ne finit jamais) avec celui de l'infini achevé (on part d'une longueur finie, qui est décomposée en une infinité de morceaux, mais la longueur initiale reste inchangeable). On voit dans cette réflexion de Zénon les débuts de l'origine de l'objet « série » et ces origines semblent être liées à un raisonnement qui appelle à l'utilisation d'ostensifs visuels. Bien sûr, ce non ostensif n'inclut pas en ce moment historique toute la richesse et la complexité qu'il inclut actuellement ; il n'est réduit qu'à l'idée intuitive d'additionner, liée à un raisonnement qui appelle à des ostensifs visuels.

Cette interprétation visuelle est aussi présente dans son deuxième paradoxe, *Achille et la tortue*, qui a une apparence plus complexe parce qu'il fait intervenir deux mobiles (Zafiropulo 1950, pp. 181–182). Selon ce paradoxe, si dans une course Achille donne de l'avance à une tortue, il ne pourra jamais l'attraper. Supposons qu'Achille et la tortue partent des points A_0 and T_0 respectivement (Fig.2) :

Figure 2 *– Configuration initiale du paradoxe Achille et la tortue*

Quand Achille arrivera au point de départ de la tortue (T_0, que l'on désignera maintenant aussi A_1), la tortue, elle, aura aussi avancé jusqu'au point T_1 (Fig. 3) :

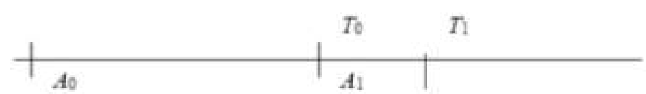


Figure 3 *– Deuxième étape du paradoxe Achille et la tortue*

À nouveau, quand Achille arrivera au point T_1 (que l'on désignera aussi A_2), la tortue aura encore avancé pour se rendre jusqu'au point T_2, et ainsi de suite. Ce processus se répétant à l'infini, Achille ne parviendra jamais à attraper la tortue, car il devra toujours atteindre d'abord une position déjà occupée par celle-ci et, pendant qu'il le fait, elle avancera encore un peu.

Évidemment, les grecs anciens savaient, aussi parfaitement que nous le savons aujourd'hui, que le rapide Achille arrive bien à attraper la lente tortue. Encore une fois, ce paradoxe appelle (ou semble provenir de) un raisonnement visuel, où il est légitime de se représenter le segment de droite qui va du point A_0 jusqu'au point où Achille rejoint la tortue. Ainsi, le paradoxe *Achille et la tortue* pourra alors apparaître comme étant essentiellement le même que celui de la *Dichotomie* : un segment de droite est divisé en un nombre infini de sous-segments de longueur positive, dont il est la somme. Si les vitesses d'Achille et de la tortue sont constantes, il s'agira même d'une série géométrique, comme dans le cas de la *Dichotomie*. Pourtant, il y a une différence qui peut être significative. Dans la *Dichotomie*, on part d'une totalité pour trouver ensuite la série dont elle est la somme, tandis que la formulation traditionnelle d'*Achille et la tortue*, par contre, conduit d'abord aux segments de droite élémentaires marqués par les positions des deux coureurs ; ces segments constituent la série et le cœur du paradoxe réside justement dans l'intuition fautive selon laquelle de telles parcelles ne sauraient avoir une somme finie (puisqu'elles sont en quantité infinie et chacune est positive). On y fait donc le parcours inverse, qui est aussi le plus habituel dans l'enseignement des séries.

Nous voyons alors que les origines du non ostensif « série » sont liées à l'idée intuitive d'addition d'une part et, d'autre part, à l'absence de volonté de créer une théorie, ce qui peut être associé au niveau opérationnel identifié par Bagni (2000, 2005) ou au niveau outil de Douady (1986). Et la naissance de cet objet est liée à l'utilisation d'ostensifs dans le registre de l'oralité, probablement basés sur une vision ou intuition d'ostensifs géométriques. Nous verrons que ces ostensifs restent présents dans les travaux ultérieurs des grecs, avec une complexification des ostensifs géométriques.

2. *Euclide et Archimède*

La méthode d'exhaustion, caractéristique des mathématiques anciennes, est attribuée à Eudoxe de Cnide (4ième siècle a. J.-C.) dont les travaux ne nous sont pas parvenus. Le mathématicien qui en a fait le plus grand usage a été Archimède de Syracuse (3ième siècle a. J.-C.), mais le premier registre historique de la méthode se trouve dans les *Éléments* d'Euclide (environ 300 a. J.-C.). Le fondement de la méthode d'exhaustion se trouve dans la première proposition du Livre X des *Éléments* d'Euclide (Peyrard 1993, pp. 258–259). Selon cette proposition-ci, étant données deux grandeurs A et B, du même type (c'est-à-dire, deux longueurs, deux aires, deux volumes, deux intervalles de temps, deux poids…), A étant plus grande que B, si on retire à A une partie plus grande que sa moitié, et si ensuite on retire à ce qui reste une partie plus grande que sa moitié, et ainsi de suite, il en restera à un moment donné une grandeur plus petite que B.

Tout d'abord, on remarquera le caractère tout à fait finitiste de cet énoncé ; il en est de même pour les applications pratiques de la méthode d'exhaustion dans l'Antiquité, que ce soit chez Euclide ou chez Archimède. Cela n'empêche pas que l'on puisse rapprocher cette méthode de la somme de séries, où elle donne des exemples visuellement intéressants d'aires curvilignes comme *limite* ou comme *somme* d'aires polygonales inscrites. À titre d'illustration, voyons l'usage qu'en fait Euclide dans la deuxième proposition du Livre XII des *Éléments* (Peyrard 1993, pp. 445–446) et auquel Archimède fait référence dans la deuxième proposition de *La Mesure du Cercle* (Ver Eecke 1959, pp. 127–128). Étant donné un cercle, on lui enlève plus de sa moitié lorsqu'on enlève le carré inscrit (Fig. 4) :

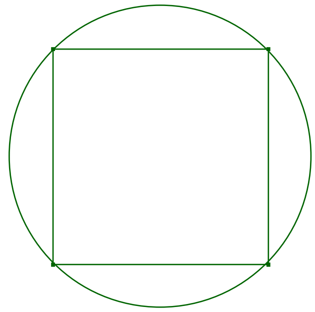


***Figure 4** – Première étape de La Mesure du Cercle*

Il reste alors quatre segments circulaires. Quand on y retire les quatre triangles isocèles montrés dans la Figure 5, il reste aux segments circulaires moins de la moitié :

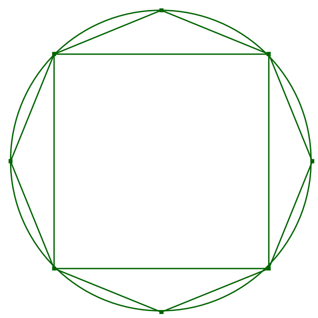


***Figure 5** – Deuxième étape de La Mesure du Cercle*

Si l'on continue ce processus, par la proposition *Éléments* X, 1 d'Euclide, on obtiendra une grandeur aussi petite qu'on le désire. Cette démarche peut être interprétée d'un point de vue analytique : la différence entre l'aire du cercle et l'aire des polygones réguliers inscrits peut se rendre aussi petite que l'on le veut, tout simplement en doublant successivement le nombre de côtés du polygone inscrit. Mais on peut aussi l'interpréter du point de vue des sommes de séries : si l'on additionne à l'aire du carré celle des quatre triangles isocèles, puis l'aire des huit triangles isocèles encore plus petits, et ainsi de suite, la somme de toutes ces aires sera égale à l'aire du cercle.

Dans ce travail, il est possible de voir l'utilisation explicite d'ostensifs géométriques pour développer une idée liée au non ostensif « limite », mais aussi au non ostensif « série ». Après Aristote, les grecs évitaient l'utilisation de l'infini achevé et nous voyons ici une façon de contourner cette limitation pour résoudre une tâche *problématique*, soit le calcul de l'aire du cercle, moyennant un changement de cadre. Ainsi, la notion de série qui était apparue pour réfléchir sur l'utilisation dangereuse de l'infini, devient un outil clé pour la résolution de certaines tâches avec la méthode d'exhaustion et les ostensifs associés se développent en conséquence.

3. *Nicole Oresme*

Nicole Oresme était un membre du clergé du 14ème siècle qui enseignait à l'Université de Paris. C'est dans son *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (Clagett 1968, pp.

157–435) que se fait la première mention claire d'une somme infinie[2], apparaissant aussi apparaître une expression, un nouvel ostensif, pour cette notion.

Oresme prend deux carrés d'aire connue et décompose l'un d'entre eux en une quantité infinie de rectangles dont l'aire sera, respectivement, la moitié, le quart, le huitième, le seizième… de l'aire du carré original (Fig.6).

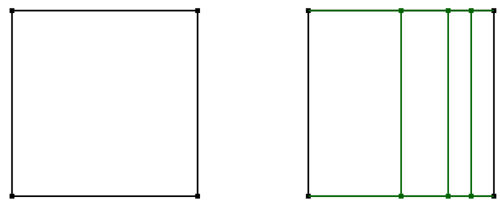


Figure 6 *– Deux carrés égaux*

Ensuite, il donne une nouvelle configuration à cet ensemble de rectangles, les posant « en escalier » les uns sur les autres et sur le premier carré (Fig.7). De cette façon, Oresme construit une figure qui n'est pas bornée, mais dont la valeur de l'aire est finie et connue à l'avance : c'est une aire égale à celle des deux carrés.

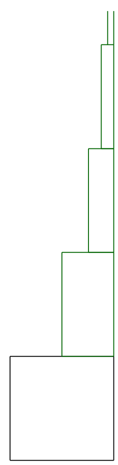


Figure 7 *– Nouvelle configuration de l'aire des deux carrés*

Oresme conclut alors (en langage contemporain) que la qualité[3] totale égale quatre fois celle de la première moitié ou, en termes de cinématique, que l'espace parcouru dans le temps total égale quatre fois l'espace parcouru pendant la première moitié du temps. D'un point de vue moderne, on peut interpréter la construction d'Oresme comme une intégrale impropre, puisqu'il s'agit d'une figure illimitée avec une aire finie. Mais il est aussi possible de l'interpréter comme une somme infinie d'aires. Si chacun des carrés de départ a une aire égale à 1, alors on aura la série $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}+...=2$.

[2] Oresme est aussi connu pour sa preuve que la série harmonique n'a pas de somme finie, qui se trouve dans *Questiones Super Geometriam Euclidis* (Mazet, 2003, pp. 70–71). Son raisonnement est identique à celui que l'on peut retrouver dans les livres d'Analyse d'aujourd'hui. Il ne fait donc aucun appel à la visualisation géométrique et ne sera donc pas considéré dans cet article.
[3] Il s'agit du langage utilisé à l'époque, faisant référence souvent à des magnitudes ou des *qualités*.

Une nouvelle tâche *problématique*, soit le calcul de l'aire d'une figure infinie, se présente à Oresme et encore une fois la notion de série, encore en développement et loin de la notion actuelle, devient un outil pour l'accomplissement de cette tâche. Cette configuration fait penser plutôt au raisonnement développé pendant le paradoxe *Dichotomie*, dans le sens où une grandeur connue est décomposée en une infinitude de parties, sans que la valeur initiale de la grandeur ne change. On observe aussi que la stratégie de reconfiguration permet, d'une certaine façon, d'éviter la notion de convergence (plus présente dans la méthode d'exhaustion) à travers une utilisation de l'infini achevé : la valeur est connue a priori et l'on ne fait que réorganiser les pièces.

4. *Leibniz*

Entre Oresme et Leibniz deux mathématiciens font appel à des changements de cadres utilisant des ostensifs visuels : il s'agit de Grégoire de Saint-Vincent et de Álvaro de Tomás. L'espace restreint dans cet article nous empêche de développer ici une analyse de leur travail fort intéressant en ce qui concerne les séries ; ceci sera fait dans d'autres publications futures.

Dans un travail intitulé *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*, qui n'a été publié qu'en 1993 par Eberhard Knobloch, Gottfried Wilhelm Leibniz donne une construction géométrique pour la somme d'une série géométrique (Ferraro 2008, p. 26). Pour ce faire, il prend deux segments de droite colinéaires et consécutifs de longueur *a* et *b*, les deux premiers termes d'une série géométrique (Fig. 8), ayant pour but de résoudre une nouvelle tâche *problématique* : construire un segment de droite représentant la somme totale de la série géométrique.

Figure 8 *– Composition initiale de Leibniz*

La construction géométrique de la somme de la série continue comme il suit. On trace des perpendiculaires aux segments précédents de longueurs égales à *a* et *b* (si le segment de longueur *a* est à gauche, les perpendiculaires seront tracées par les extrémités gauches des segments donnés, comme dans la Figure 9).

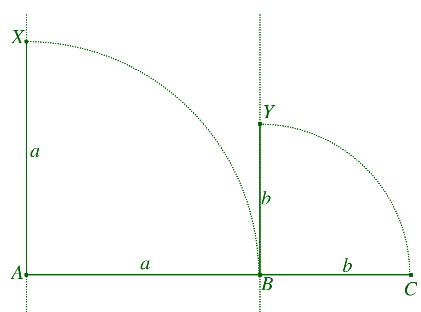


Figure 9 *– Traçage des perpendiculaires dans la composition de Leibniz*

La droite qui joint les extrémités supérieures de ces segments perpendiculaires coupera la droite sur laquelle se placent les segments initiaux de longueurs *a* et *b* en un point *S* (Fig. 10).

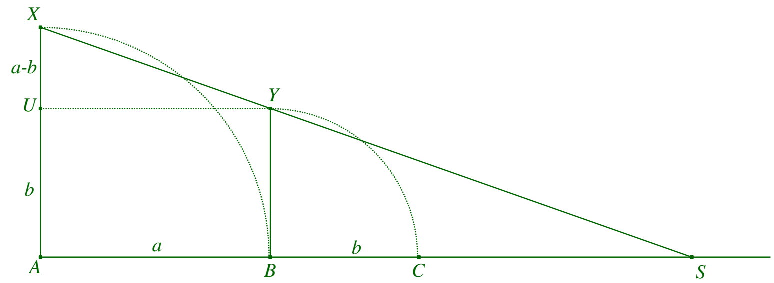


***Figure 10** – Repère du point S*

Alors, si l'on désigne $\overline{AB}$ le premier segment de longueur a, $\overline{AX}$ le segment de même longueur sur la perpendiculaire qui passe par A, $\overline{BC}$ le premier segment de longueur b et $\overline{BY}$ le segment de même longueur sur la perpendiculaire qui passe par B (et $\overline{AU}$ sa projection sur le segment $\overline{AX}$), Leibniz démontre que le segment $\overline{AS}$ a la même longueur que la somme de la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, où r désigne la raison (donc $b = ar$). Pour ce faire, il considère la similitude des triangles AXS et UXY et les rapports $\frac{m(\overline{AX})}{m(\overline{AS})} = \frac{m(\overline{UX})}{m(\overline{UY})}$, cette expression étant équivalente à : $m(\overline{AS}) = \frac{m(\overline{AX}) \times m(\overline{UY})}{m(\overline{UX})}$; cette dernière égalité peut être écrite comme : $m(\overline{AS}) = \frac{a \times a}{a-b} = \frac{a^2}{a-ar} = \frac{a}{1-r}$, qui est la formule bien connue pour la somme d'une progression géométrique de premier terme a et raison $r < 1$.

Dans ce cas, nous voyons que le résultat de la somme d'une série géométrique est associé à une nouvelle interprétation géométrique, qui permet, d'une certaine façon, sa réinterprétation, c'est-à-dire, en ce moment historique donné, le non ostensif est enrichi avec ce nouvel ostensif. Ce travail de Leibniz, cependant, n'a pas de signification historique dans le sens où il n'a pas eu de conséquences ultérieures pour les travaux d'autres mathématiciens.

Leibniz réussit à donner une réinterprétation à la notion de série géométrique en mettant en lien des ostensifs géométriques avec des ostensifs de l'écriture symbolique, récemment développée. Il met même en évidence un parallèle entre deux ostensifs opérationnels, à savoir, l'ostensif algébrique de la formule pour la somme d'une série géométrique et l'ostensif visuel de la construction géométrique de cette somme. Cet enrichissement du non ostensif, cependant, semble avoir été oublié et il est souvent absent des ouvrages sur les séries.

V. CONCLUSIONS

Nous nous étions demandés, à la fin de la problématique, s'il était possible que la notion de série ait été développée par les mathématiciens sans besoin de représentations visuelles et notre objectif était d'analyser quelques moments du développement historique des séries pour voir si la résolution de tâches *problématiques* avait mis en place la manipulation d'ostensifs dans le registre de la trace, faisant appel à des représentations visuelles, ceci pour nous questionner sur le potentiel possible de ces représentations pour favoriser l'apprentissage des étudiants. Notre recherche dans des documents historiques montre que les premières apparitions des séries (ou d'une notion qui serait reliée à ce que l'on appelle présentement série) étaient liées à des raisonnements ou des représentations ostensives géométriques.

Il semble être légitime de dire que les premières intuitions sur les séries, avant leur formalisation et leur développement analytique, s'appuyaient sur la création de ces ostensifs plutôt visuels et que cela a aussi été lié au développement de la méthode d'exhaustion (qui mène naturellement à la notion de limite) et à des configurations qui permettent de contourner les difficultés propres à l'utilisation de l'infini achevé. Néanmoins, à partir du 17[e] siècle, ces ostensifs se font rares avec l'utilisation de plus en plus usuelle des symbolismes. Cette réalité a déjà été exprimée par Bosch et Chevallard (1999) :

> […] on ne peut ignorer que, au moins depuis Viète, les mathématiques progressent par le biais du symbolisme écrit, de telle sorte que l'on peut presque suivre toute l'histoire de ce progrès en restant dans le registre de l'écriture. Les tendances formalistes nées de la crise des fondements de la fin du XIX[e] siècle ont porté cette évolution à son extrême, comme si l'écriture symbolique pouvait remplacer tous les autres registres, ne serait-ce que pour la formulation et la démonstration des vérités mathématiques (p.103).

Il semble que ce phénomène général en mathématiques ne fait pas exception dans le cas des séries et que les ostensifs développés en premier lieu sont relégués à une seconde place :

> Il convient maintenant de distinguer, dans l'analyse des objets ostensifs mobilisés dans une activité mathématique concrète, ceux qui, comme les notations, les symbolismes et certaines expressions verbales acquièrent un statut mathématique clair et jouent le rôle d'*instruments* de l'activité, de ceux qui, bien que fonctionnant comme des *moyens* indispensables au travail mathématique, sont considérés comme un accompagnement presque contingent de l'activité. Les développements antérieurs peuvent se traduire en disant que la mathématisation conduit à reléguer les objets matériels, les gestes et certains graphismes au simple statut de *moyens* du travail mathématique, en accordant le statut d'*instrument* aux seuls ostensifs appartenant au registre de l'écrit et, de façon moins nette, aux registre du graphique et de l'oral (Bosch & Chevallard 1999, p.105).

Si l'on prend en compte les recommandations de Bagni (2000, 2005), pour développer dans l'enseignement d'abord un niveau opérationnel et après un niveau structurel, ainsi que les résultats d'Alcock et Simpson (2004), la reconsidération de ces ostensifs dans l'enseignement pourrait avoir des effets intéressants pour l'apprentissage des étudiants. Pour les mathématiciens, les premières expériences avec le non ostensif « série » ont eu lieu à travers des ostensifs liés plutôt au visuel et il semble légitime se poser la question de si un cheminement semblable pourrait être utile pour les étudiants. Peut-être des activités de changement de cadre permettraient de donner une signification appropriée au symbolisme pour qu'il devienne un véritable *instrument* dans l'activité de l'étudiant. La construction donc d'activités menant à des organisations praxéologiques où ces ostensifs visuels aient un rôle d'instrument peut être une piste prometteuse pour des futures recherches, ainsi que pour la construction d'ingénieries, visant à améliorer l'apprentissage des étudiants.

REFERENCES

Alcock L., Simpson A. (2004) Convergence of sequences and series: interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics 57*, 1-32.

Bagni G. (2000) Difficulties with series in history and in the classroom. In Fauvel J, Maanen J (eds.) *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 82-86). Dordrecht: Kluwer.

Bagni G. (2005) Infinite series from history to mathematics education. *International Journal of Mathematics Teaching and Learning*. En ligne dans l'adresse: http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/bagni.pdf (avril 2010)

Bezuidenhout J., Olivier A. (2000) Students' conceptions of the integral. In Nakahara T., Koyama M. (eds.) *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 73-88). Hiroshima: PME.

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(1), 77-124.

Boschet F. (1983) Les suites numériques comme objet d'enseignement (premier cycle de l'enseignement supérieur français). *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(2), 141-163.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Clagett M. (Ed.) (1968) *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions.* Madison: The University of Wisconsin Press.

Douady, R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-object. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5-31.

Ferraro G. (2008) *The Rise and Development of the Theory of Series up to the Early 1820s.* New York: Springer.

González-Martín A.S. (2006) *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*. Thèse de Doctorat, Université de La Laguna (Espagne).

González-Martín A.S. (2011) L'introduction du concept de somme infinie: une première approche à travers l'analyse de manuels. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Actes Colloque International Espace Mathématique Francophone 2009* (EMF2009) (pp. 1048-1061). Dakar (Sénégal). En ligne sous l'adresse: http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT7/Gonzales.pdf

González-Martín A.S. (2014) Pre-university students' personal relationship with the visualisation of series of real numbers. In Liljedahl P., Nicol C., Oesterle S., Allan D. (Eds.) *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 201-208). Vancouver (Canada): PME.

González-Martín A.S., Nardi E., Biza I. (2011) Conceptually-driven and visually-rich tasks in texts and teaching practice: the case of infinite series. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 42(5), 565-589.

Hairer E., Wanner G. (1996) *Analysis by its History*. New York: Springer.

Kidron I. (2002) Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. In Cockburn A.D, Nardi E. (Eds.) *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 209-216). Norwich: PME.

Knobloch E. (Hg.), Leibniz G.W. (1993) *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen.

Mamona J. (1990) Sequences and series – Sequences and functions: Students' confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 21*, 333-337.

Mazet E. (2003) La théorie des séries de Nicole Oresme dans sa perspective aristotélicienne. « Questions 1 et 2 sur la Géométrie d'Euclide ». *Revue d'Histoire des Mathématiques* 9, 33-80.

Peyrard F. (1993) *Les Œuvres d'Euclide*. Paris : Albert Blanchard.

Robert A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3(3), 307-341.

Ver Eecke P. (1959) *Les œuvres complètes d'Archimède suivies des Commentaires d'Eutocius d'Ascalon* (Tome I). Paris : Albert Blanchard.

Zafiropoulo J. (1950) *L'École Éléate*. Paris : Les Belles Lettres.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

INTRODUCTION AUX CONCEPTS DE LIMITE DE FONCTION ET DE SUITE EN PREMIÈRE ANNÉE D'UNIVERSITÉ : ADAPTATION DE DEUX INGÉNIERIES

Nicolas GRENIER-BOLEY[1] - Stéphanie BRIDOUX[2] - Martine De VLEESCHOUWER[3] - Viviane DURAND-GUERRIER[4] - Denise GRENIER[5] - Chantal MENINI[6] - Marc ROGALSKI[7] - Pascale SÉNÉCHAUD[8] - Fabrice VANDEBROUCK[9] (Commission InterIREM Université)

Résumé Dans cette communication, nous décrivons et argumentons l'adaptation de deux ingénieries didactiques développées au début des années quatre-vingt en France pour un public d'étudiants actuels de première année de licence ou de niveau équivalent en Sciences. La première (Robert 1983) vise à favoriser l'entrée des étudiants dans un point de vue conceptuel sur l'analyse à partir d'un travail sur les suites ; la seconde (Robinet 1983) vise à motiver et à introduire la définition formelle quantifiée de limite de fonction. Nous concluons en présentant des prolongements possibles de ce travail.

Mots-clefs : limite d'une suite, limite d'une fonction, ingénierie didactique, formalisme.

Abstract In this paper, we describe and motivate the adaptation of two didactical engineerings developped in the eighties for scientific students attending firts year university. The first one (Robert 1983) aims to favor the engagement of students toward a conceptual point of view on analysis from activities involving sequences. The second one (Robinet 1983) aims to motivate and introduce the formal quantified defintion of teh concept of limit of a function. Our conclusion open on possible developments of this work.

Keywords: limit of a sequence, limit of a function, didactical engineering, formalism.

[1] Université de Rouen (LDAR EA 4434) – France – nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr ;
[2] Université de Mons (LDAR EA 4434) – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be ;
[3] Université de Namur (CREAD EA 3875) – Belgique – mdv@math.unamur.be ;
[4] Université de Montpellier (IMAG UMR 5149), IREM de Montpellier – France – vdurandg@univ-montp2.fr ;
[5] Université de Grenoble (Institut Fourier UMR 5182), IREM de Grenoble – France – denise.grenier@ujf-grenoble.fr ;
[6] Université Bordeaux 1 (IMB UMR 5251), IREM de Bordeaux – France - Chantal.Menini@math.u-bordeaux1.fr ;
[7] Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, Université Pierre et Marie Curie et Université Paris Diderot (LDAR EA 4434), IREM de Paris 7 – France – marc.rogalski@imj-prg.fr ;
[8] Université de Limoges, IREM de Limoges – France – pascale.senechaud@unilim.fr ;
[9] Université Paris Diderot (LDAR EA 4434), IREM de Paris 7 – France – vandebro@univ.paris-diderot.fr

Commission Inter IREM Université (2015) Introduction aux limites de fonction et de suite : adaptation de deux ingénieries. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT7, pp. 666-676.

I. INTRODUCTION

Dans cette communication, nous décrivons et argumentons l'adaptation pour un public d'étudiants actuels de première année de licence ou de niveau équivalent en Sciences de deux ingénieries didactiques développées au début des années quatre-vingt en France. La première (Robert 1983) vise à favoriser l'entrée des étudiants dans un point de vue conceptuel sur l'analyse à partir d'un travail sur les suites ; la seconde (Robinet 1983) vise à motiver et à introduire la définition formelle quantifiée de limite de fonction.

Le projet de la reprise, en l'adaptant, d'une ingénierie didactique destinée à un public d'un autre temps (ici au début des années quatre-vingt) pose nécessairement question. Ces reprises sont sous-tendues dans les deux cas par un constat et une hypothèse.

Le constat est que les difficultés rencontrées en début d'université sur la compréhension et la formalisation du concept de limite sont toujours d'actualité, ceci étant bien documenté dans la littérature de recherche (voir par exemple Bloch (2000), Ghedamsi (2009), Roh (2010)) et corroborée par les observations naturalistes des enseignants des premières années d'université.

Au sein de la commission Inter IREM Université qui réunit des enseignants chercheurs, des enseignants et des chercheurs en didactique de différentes universités françaises et belges, nous faisons l'hypothèse que malgré ces difficultés récurrentes, on ne peut pas faire l'impasse sur la question de la formalisation, car celle-ci est nécessaire pour une conceptualisation adéquate des concepts de l'analyse et en premier lieu du concept de limite.

On oppose souvent formalisme et signification dans la mesure où la mise en place d'un formalisme opératoire permet un traitement syntaxique des preuves. Néanmoins, dans l'activité mathématique, le contrôle sémantique sur les écritures manipulées joue un rôle essentiel, ceci étant une différence décisive entre novices et experts (Durand-Guerrier et Arsac 2003). En particulier, alors que la langue naturelle est par essence porteuse d'ambiguïté, dans la perspective sémantique initiée par Frege, le langage formel vise à lever ces ambiguïtés, et de ce point de vue, formaliser, c'est choisir une interprétation (Durand-Guerrier 2013). Dans le cas de la notion de limite de suite par exemple, nous pouvons l'illustrer en considérant la traduction formelle d'une définition informelle classique donnée au lycée en France : « la suite u converge vers un réel a en $+\infty$ *si et seulement si* on peut s'approcher de a aussi près que l'on veut à condition d'aller assez loin ». Pour formaliser un tel énoncé, il faut pouvoir d'une part traduire ce que signifie « s'approcher de a aussi près que l'on veut », ce qui correspond dans le cas qui nous intéresse à définir une distance entre deux réels, ici la valeur absolue, et traduire qu'on peut la rendre inférieure à n'importe quel nombre réel strictement positif fixé à l'avance, d'autre part traduire ce que signifie l'expression « à condition d'aller assez loin ». La formalisation de ce deuxième point s'appuie sur le fait que l'ensemble des entiers naturels est non borné (on peut considérer des entiers aussi grands que l'on veut) ; ceci fait, il reste deux interprétations possibles :

1./ étant donné un réel strictement positif ε, pour tout entier N on peut trouver un entier n supérieur à N tel que la distance entre le terme de la suite de rang n et le réel a soit inférieure à ε ; formellement : $\forall \varepsilon > 0, \forall N, \exists n \geq N \ |u_n - a| < \varepsilon$□□

2./ étant donné un réel strictement positif ε, on peut trouver un entier N tel que quel que soit l'entier naturel n supérieur à N, la distance entre le terme de la suite de rang n et le réel a soit inférieure à ε□□ formellement : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N \ |u_n - a| < \varepsilon$□□

La première correspond à l'idée de valeur d'adhérence, la deuxième, que nous retenons ici, à la définition de la limite.

Dans ce qui suit, nous expliquons ce que nous avons gardé de ces deux ingénieries et nous insistons sur les choix d'adaptations qui nous semblent nécessaires afin de pouvoir les expérimenter auprès d'étudiants de première année de licence ou de niveau équivalent en Sciences « actuels ».

II. REPRISE ET ADAPTATION DE L'INGENIERIE DE ROBERT

1. Motivations

À partir du dépouillement de copies d'environ 1200 étudiants en début de parcours universitaire, Robert (1983) a mis en évidence des régularités sur l'acquisition de la notion de convergence. Elle avait notamment repéré chez les étudiants deux types de représentation de la notion. Les représentations dynamiques sont des représentations en termes d'action où converger est exprimé en termes de « se rapprocher de ». Les représentations statiques sont des représentations en langue naturelle de la définition formalisée. Or, Robert a montré que les étudiants chez qui le modèle statique était présent réussissaient mieux les exercices portant sur la notion de convergence. Des représentations erronées où converger est assimilé à être « monotone borné » étaient également présentes et menaient au même constat.

Un pré-test visant à étudier les acquis des étudiants (manipulation d'inégalités, ordre sur les réels, la valeur absolue,…) révélait aussi leurs difficultés à donner du sens à des phrases formalisées et à tenir compte de l'ordre des quantificateurs. Cet obstacle du formalisme continue d'être évoqué dans les travaux qui se situent à la transition secondaire-supérieur (Dorier 1997 et Gueudet 2008).

Enfin, l'enseignement au lycée, en Belgique et en France au moins, met l'accent sur l'algèbre des limites ; les exercices proposés aux élèves restent souvent de nature calculatoire. À l'université en revanche, la définition en (ε, N) devient un outil de démonstration et la notion de limite amène également un nouveau point de vue sur l'égalité entre deux nombres réels[10]. Il y a donc un saut conceptuel important à franchir par les étudiants pour accepter la nécessité de la définition formalisée de la convergence.

2. Description de l'ingénierie

L'ingénierie comporte deux séquences. Nous n'abordons ici que la première[11]. Elle démarre avec les trois questions suivantes:

a) Représenter graphiquement les suites de terme général suivant :

1. $u_n = \frac{n^2-25}{2n^2+1}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 2cm).*
2. $u_n = (-1)^n$
3. $u_n = \frac{1}{n} cos\, n$ *(attention, sur les calculettes, n en radians !)*
4. $u_n = cos\, n$
5. $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, u_4 = -1, u_n = 2$ *pour tout* $n \geq 5$.
6. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).*
7. $u_n = cos\, n\frac{\pi}{6}$

[10] $\forall a, b$ réels (ou rationnels), $(\forall \varepsilon > 0, |a-b| < \varepsilon) \Longrightarrow a = b$. Cette propriété peut par exemple être utilisée pour démontrer l'unicité de la limite d'une suite.

[11] Les deux séquences sont présentées dans (Robert, 1983).

8. $u_n = sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ *(échelle sur l'axe des ordonnées : une unité = 10cm).*
9. $u_n = n^2 + 1$
10. $u_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ $(n \geq 2)$

b) Pouvez-vous classer ces dessins ? Rédigez rapidement les critères permettant vos classements.

c) Dans chaque cas, pouvez-vous ou non trouver un nombre l et un entier n à partir duquel $|u_n - l|$ reste inférieur à $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{100}\right)$; mettez en relation ce que vous venez d'obtenir avec vos classements.

Nous avons choisi de conserver le travail papier-crayon pour la première question en ajoutant un choix d'échelle pour chaque suite et en demandant préalablement de réaliser un tableau de valeurs permettant de calculer les dix premiers termes de chaque suite. Nous faisons l'hypothèse que ce travail peut amorcer une réflexion sur des comportements plus globaux tels que la croissance, le caractère borné ou non des suites et sur leur convergence. Nous avons remplacé la deuxième suite par la suite $\left(\frac{(-1)^n}{20}\right)$. Ce choix sera motivé à la troisième question.

Si les notions de croissance et de suite majorée/minorée/bornée ont déjà été travaillées dans le cours, la question 2 peut être conservée telle quelle. D'autres alternatives seront développées plus loin dans le texte.

Ce travail graphique et les classements établis en petits groupes par les étudiants servent alors d'appui pour introduire, à la troisième question, une formulation « numérique » de la définition en (ε, N). Nous avons choisi ici de remplacer l'inégalité avec valeur absolue par la double inégalité $l - \frac{1}{10} \leq x_n \leq l + \frac{1}{10}$. Celle-ci peut selon nous être un levier pour faire émerger plus facilement une interprétation géométrique en termes de bande autour de la limite *l*. Les dessins permettent de répondre pour 1/10 mais pas pour 1/100. La suite 2 que nous avons modifiée vérifie les inégalités avec 1/10 mais pas avec 1/100, alors qu'elle ne converge pas.

La question suivante est alors ensuite proposée aux étudiants.

d) Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? Justifier vos réponses par écrit.

i) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
ii) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

La suite 10 est un contre-exemple pour la première affirmation. Pour la deuxième affirmation, nous faisons l'hypothèse que la première représentation développée à la question 3 permet aux étudiants de conjecturer le résultat mais pas de le démontrer car il manque une définition de la convergence. C'est à ce moment que la définition formalisée est introduite par l'enseignant.

Sur le plan mathématique, nous n'avons donc apporté que très peu de modifications à l'ingénierie initiale. Une expérimentation de l'ingénierie auprès d'étudiants universitaires donnant notamment des précisions sur le rôle de l'enseignant à chacune de ses étapes est présentée dans Bridoux (2016).

3. Principaux objectifs de l'ingénierie

L'objectif principal de cette ingénierie est de sensibiliser les étudiants aux enjeux de l'analyse réelle à l'Université afin de favoriser une entrée dans le point de vue conceptuel nécessaire pour une appropriation de la notion de limite si l'on ne veut pas se limiter à l'approche intuitive dynamique mentionnée plus haut. Pour cela, il est nécessaire que les étudiants soient capables de mobiliser les différentes manières de traduire l'égalité de deux réels à l'aide des valeurs absolues, des doubles inégalités, des intervalles centrés et des bandes de largeur *arbitrairement petite*, entre *langage naturel*, *représentation graph*ique et *langage formel.* Il s'agit de permettre aux étudiants de s'approprier les outils qui permettent d'approcher le concept de nombre réel, sa continuité (ou sa complétude) au sens de Dedekind, qui suivant Sinaceur, réduit la continuité de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels à l'ordre (Vergnac et Durand-Guerrier 2014). Ceci motivant l'introduction d'une définition formelle puisqu'en effet, les représentations graphiques ne permettent pas de distinguer entre la droite rationnelle ou décimale et la droite réelle. Un autre objectif important est de questionner un certain nombre de théorèmes en acte (Vergnaud 1990) que l'on observe fréquemment chez les étudiants tels que par exemple : « Toute suite strictement croissante diverge vers $+\infty$ », ou « Toute suite convergente est monotone à partir d'un certain rang », en proposant aux étudiants un « herbier » de suites leur permettant d'identifier que certaines suites strictement croissantes divergent tandis que d'autres convergent, et que certaines suites convergentes sont monotones, et d'autres non.

4. Des prolongements possibles et leurs effets sur les pratiques en classe

La mise en place de l'ingénierie de Robert telle que décrite plus haut présuppose l'existence préalable d'un milieu organisé pour les étudiants (notion de suite majorée/minorée/bornée, croissante, répertoire de suites). Nous sommes conscients que l'énoncé de la question *II* laisse aux étudiants une variété de réponses possibles et peut dès lors représenter une difficulté de gestion en classe pour l'enseignant. Nous y reviendrons dans le point suivant. Notons cependant que l'ouverture de cette question *II* permet de faire émerger des critères liés non seulement à la convergence, mais aussi à la croissance des suites considérées. Cela permet donc de travailler également des conceptions erronées (comme par exemple que "*seules les suites croissantes majorées sont convergentes*"), comme le montre Bridoux (2016).

Enfin, un prolongement de cette ingénierie pourrait être d'amener les étudiants à réfléchir à une manière opérationnelle d'énoncer le "théorème des gendarmes", en appliquant le principe de la bande définie à ε près: "si une suite est comprise entre deux suites convergentes vers la même limite, alors, à partir d'un certain rang, les termes de cette suite sont compris dans une bande de largeur 2ε autour de cette limite". Bien entendu, l'idée de bande à ε près peut encore se traduire au moyen d'une double inégalité comme mentionné plus haut.

5. Conclusions et perspectives

L'objectif premier de cette ingénierie est de faire émerger une première représentation de la notion de convergence, en termes de bande. C'est en ce sens qu'il faut comprendre la question *III*, et non comme un travail algébrique pour justifier les inégalités en jeu (comme un mathématicien pourrait être tenté de le faire). Et la nécessité d'une définition en (ε, N) est ressentie, à la deuxième partie de la question *IV*, comme un outil (Douady 1986) permettant de démontrer une propriété. Cependant, certains pourraient penser que des étudiants de L1 ne sont pas sensibles à cette manière d'amener la définition. Une alternative qui pourrait leur être proposée, dans la perspective de l'approximation de la limite (Bloch (2000) et Ghedamsi

(2008)) serait alors d'être explicite dès la formulation de la question *II* sur le but recherché: étudier le comportement "se rapprocher de". La nécessité d'une définition de la convergence sera alors ici liée à la discrimination des critères fournis par les étudiants dans l'étude du comportement des suites. Reste encore la question de la mise en œuvre de cette alternative dans la classe: continuation de travail en petits groupes ou instauration d'un débat scientifique en amphi (Legrand 1993)?

Nous avons aussi déjà mentionné, en début de cette partie, que cette ingénierie pourrait également poser les jalons d'une réflexion sur la construction des réels (avec une égalité "à epsilon près"). Cette perspective amène aussi la question de l'approximation qui peut être investie pour introduire la notion de convergence. En effet, une généralisation de la question *III* formulée en termes d'approche de la limite à « 10^{-n} près » pourrait permettre à l'enseignant d'utiliser l'image d'une bande (autour de la limite) dont la largeur est en relation avec le degré d'approximation que l'on s'est fixé. L'idée sous-jacente qu'il faudrait alors faire émerger est qu'il y a convergence lorsqu'on peut envisager n'importe quel degré d'approximation.

III. REPRISE ET ADAPTATION DE L'INGENIERIE DE ROBINET

1. *Introduction*

L'ingénierie construite par Robinet (1983) dans les années quatre-vingt semblait avoir permis, d'après son auteur, de partir d'une étude qualitative pour conduire les élèves de la classe de Première B (filière *économique et social*) vers une définition formalisée du concept de limite, et d'introduire ensuite des théorèmes généraux.

Actuellement au lycée, l'enseignement construit une *conception ponctuelle et technique* de la limite d'une fonction en un point ou en l'infini, la justification des techniques étant renvoyée à l'intuition. Expliquons cela. Conception *ponctuelle,* car les seuls moments où le point de vue « local » est présent sont l'introduction et la définition, et ce point de vue est délaissé ensuite au profit de techniques algébriques opératoires, à partir de fonctions de référence et de nombres dérivés donnés (tels $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$). Le point de vue analytique est absent : les infiniment petits ou infiniment grands, à peine évoqués par des expressions telles que « aussi près que » ou « aussi grand que » ne sont pas travaillés, même si on trouve quelques exercices « alibis ». Conception *technique* : les manuels proposent un grand nombre de « théorèmes » ou propriétés qui consistent uniquement en une liste de limites prêtes à l'emploi, ou en des règles algébriques sur les limites. Comme ces « théorèmes » ne sont pas démontrés et qu'on renvoie l'élève à l'intuition pour les comprendre (et même les justifier !), la boucle est bouclée. Il manque dans les programmes actuels :

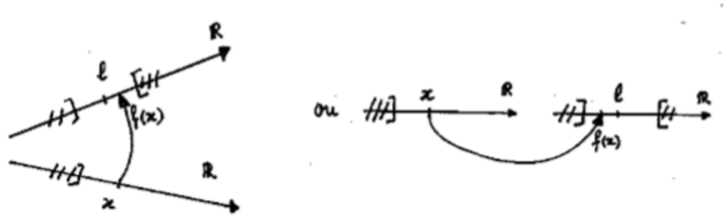
- une approche qualitative du concept de limite de fonction ;
- un travail introductif sur les approximations numériques. Par exemple : que dois-je choisir pour x pour que $f(x)$ soit inférieur en valeur absolue à une puissance de 10 donnée (pour une fonction à limite nulle).
- de vrais problèmes qui mettraient en relation les calculs d'approximation et les représentations des voisinages (par des bandes) dans l'objectif de donner du sens à des expressions comme « être près de » ou « être plus grand que », etc.., préliminaires à celles dont on se sert pour les limites.

2. Description brève de l'ingénierie de Robinet

Robinet a situé son ingénierie didactique entre deux extrêmes :

- une approche uniquement quantitative, reliant la notion de limite aux phénomènes réels qui peuvent lui donner du sens, mais ne permettant pas d'établir des théorèmes généraux ;
- une approche formalisée qui permet de résoudre des problèmes de limite pour un large ensemble de fonctions (y compris non explicitées), mais risquant de créer des décalages formels (et épistémologiques).

Cette ingénierie était destinée à des élèves de Première B (filière *économique et social*) dans les années quatre-vingt. Dans les programmes de l'époque, le cours devait « être assis sur des fondements théoriques précis et clairement définis » – i.e. la théorie générale des fonctions réelles d'une variable réelle appuyée sur la topologie générale, les notions et propriétés devaient être présentées chacune en déduction logique des précédentes, et les théorèmes démontrés. Les manuels étudiés par Robinet révélaient un même schéma d'enseignement : étude topologique de $\mathbb{R}$, formalisation de la continuité puis définition et formalisation de la limite d'une fonction en un point en termes de voisinages. Robinet avait en revanche constaté une grande diversité d'utilisation des graphiques dans les manuels, plusieurs ne donnant aucune représentation cartésienne des limites et de la continuité, et les seuls graphiques présents étant du type ci-dessous.



Ces graphiques – un peu surprenants – ne représentent en rien la notion de limite ; on peut se demander ce qu'il reste dans la tête des étudiants après de tels dessins « généraux ».
L'ingénierie de Robinet était organisée pour introduire la formalisation comme outil nécessaire pour distinguer différents types de limites à l'infini ou en 0, à partir de l'étude globale et locale de courbes de fonctions. Elle était organisée en trois temps : étude locale puis globale de la parabole, étude des hyperboles et enfin une « généralisation ». Nous n'allons pas décrire cette ingénierie ici, mais elle sera présente en filigrane lorsque nous expliciterons les raisons pour lesquelles nous avons repris (ou non) certaines situations dans notre ingénierie, et les adaptations que nous en avons faites.

3. Choix généraux pour la « nouvelle ingénierie »

Ces choix ont été guidés à la fois par la volonté de garder l'esprit et les objectifs de l'ingénierie de Robinet et la nécessité de l'adapter aux élèves à qui elle est destinée (L1 Sciences) et aux évolutions des programmes depuis 1980. Notre objectif final est de construire des situations qui permettent de justifier l'intérêt et la nécessité de la formalisation pour l'étude générale des limites et des comportements asymptotiques des fonctions. Robinet avait elle aussi cet objectif dans son ingénierie, mais une question est restée ouverte : est-il possible de réduire le saut conceptuel entre une approche intuitive et qualitative du concept de limite (par une étude locale ou globale graphique) et sa formalisation. La mise en relation des notions de voisinage et d'encadrement et leurs représentations graphiques par des « bandes » peut être un pont entre les ostensifs associés à l'approche intuitive et qualitative et la formalisation.

Nous avons choisi de regrouper paraboles et hyperboles, et d'ajouter d'autre fonctions n'ayant pas d'asymptotes mais pour lesquelles on fait l'hypothèse que les tracés sont connus des étudiants (nous les donnons ci-après). Notre objectif premier est la définition de la limite d'une fonction en $+\infty$□□La situation de départ de l'ingénierie de Robinet (consigne 1 de la phase d'étude de la parabole) est abandonnée. Elle consistait en l'étude au voisinage de points très loin de l'origine ($x = 100, 1000$, etc.) de la position de la courbe représentative de la fonction $x \to x^2$ relativement à une sécante dans des voisinages de ces points. Nous n'avons pas conservé cette tâche car elle nous a semblé concerner davantage les notions de sécante et tangente à une courbe que la notion de limite. Mais aussi pour d'autres raisons : c'est une tâche chronophage si on l'exécute à la main, et elle pose des questions d'échelles non orthonormées si on utilise un logiciel ; enfin, un doute existe quant à la possibilité de motiver des étudiants sur une telle question.

4. Une expérimentation en 2014 de la « nouvelle ingénierie »

Un membre de notre groupe de travail (Menini) a expérimenté le tout début de notre projet d'ingénierie. Cette expérimentation a été réalisée en classe avec une trentaine d'étudiants, dans un parcours maths-informatique-physique-chimie de L1[12] Sciences au semestre 1, au début d'un cours sur les limites, et après le cours sur les suites. Nous ne donnons ici que les résultats les plus significatifs.

La tâche consistait à tracer l'allure générale des courbes sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et le classement de quelques fonctions, pour moitié classiques et pour l'autre moitié moins connues. Les étudiants ont travaillé en groupes, chaque groupe a étudié deux fonctions, une « facile » et une « délicate ». Un représentant de chaque groupe est passé au tableau. Les constats sont les suivants : l'allure de la courbe représentative de la fonction $x \to x^2$ n'a soulevé aucune difficulté, de même que celles des courbes représentatives des fonctions $x \to x^3$ et $x \to \frac{4}{(2-x)^2}$ qui sont en fait dans l'herbier usuel des étudiants, la courbe représentative de la fonction $x \to \frac{(2+x)}{(7-x)}$. d'allure correcte a été tracée avec un décalage vertical (le tracé correspondait à celui d'une fonction ayant une limite nulle à l'infini). En revanche, le tracé de la courbe repréentative de la fonction $x \to \sqrt{x}$ n'a pas été immédiat, les étudiants déclarant ne pas s'en souvenir ont hésité sur la forme – mais pas sur les limites. Pour la fonction $x \to x + \sin x$, c'était la panique : si les placements de quelques points ont été corrects, ceux-ci ont été reliés par une courbe régulière, les oscillations de la fonction $x \to \sin x$ semblant ne pas intervenir. Bien que l'enseignant ait proposé de placer plus de points et de réfléchir à l'incidence des oscillations bien connues de la fonction $x \to \sin x$ sur le tracé de la courbe représentative de cette fonction, le tracé n'a pas été produit. Enfin, pour les fonctions $\to \frac{\sin x}{x}$ et $x \to \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, l'échec a été total.

5. Description de notre ingénierie dans sa version actuelle

Les résultats de cette expérimentation nous ont amenés à préciser les choix de notre ingénierie. Sa version actuelle est présentée ci-après. Elle a été expérimentée début 2015 par un membre de notre groupe[13].

---

[12] Première année de licence

[13] Voir Sénéchaud (2015) pour un compte-rendu de l'expérimentation.

Nous avons choisi de ne pas utiliser de logiciel graphique pour deux raisons. D'une part, pour repérer ce que les étudiants ont retenu des représentations de fonctions par des courbes, après avoir utilisé largement ce type de support informatique au lycée. D'autre part, parce que l'utilisation de tels outils ne se justifie pas ici, l'objectif de cette ingénierie étant l'énoncé d'une définition formelle et la motivation de son intérêt.

Situation 1. Une étude qualitative globale de quelques fonctions (monotones, non monotones, ayant ou non une limite en l'infini, et des points de non-définition en 0, ou autre x_0) : $x \to x^3$; $x \to \sqrt{x}$; $x \to \frac{1}{x}$; $x \to x + \sin x$; $x \to \frac{4}{(2-x)^2}$; $x \to \frac{(2+x)}{(7-x)}$; $x \to \frac{\sin x}{x}$; $x \to \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. La tâche demandée est double : tracé de l'allure générale de la courbe de chacune de ces fonctions sur l'intervalle $]0; +\infty[$, puis classement – le critère du classement n'est pas explicité, mais on peut faire l'hypothèse que ce sera en relation avec les comportements supposés à l'infini. Les critères de classement pourraient être les suivants : limite finie ou infinie en $+\infty$, limite finie ou infinie en x_0, asymptote ou non. Les fonctions $x \to x^3$; $x \to \sqrt{x}$; $x \to \frac{1}{x}$ ne devraient pas poser (trop de) difficultés, de même que les fonctions homographiques usuelles.

Situation 2. Reprise et adaptation de la consigne 2 de la partie concernant la parabole de Robinet. Étude locale des courbes des fonctions $x \to x^2$ et $x \to \sqrt{x}$ avec la question : « Comment x pour que x^2 (respectivement $\sqrt{x}$) soit supérieur à 25, à 10^2, à 10^6 ? ». Il s'agit, pour chacune de ces fonctions, de trouver un nombre A à partir duquel les valeurs de la fonction sont plus grandes qu'une valeur donnée. Les encadrements matérialisés par des bandes devraient permettre de rendre visibles les différences de comportements en l'infini de ces deux fonctions, et susciter l'intérêt d'une formalisation de « limite en $+\infty$ » comme outil nécessaire pour préciser ces différences (voir par exemple Roh 2010).

Situation 3. Formalisation de la « limite infinie en $+\infty$ » illustrée avec les fonctions étudiées en situation 1 et 2 ($x \to x^2$, $x \to \sqrt{x}$, $x \to x^3$ et $x \to x + \sin x$). Puis formalisation de la « limite finie en $+\infty$ », exemplifiée sur d'autres fonctions vues en situation 1 : $x \to \frac{1}{x}$; $x \to \frac{\sin x}{x}$; $x \to \frac{4}{(2-x)^2}$; $x \to \frac{(2+x)}{(7-x)}$ avec des représentations par des encadrements (bandes). Réinvestissement : étude de la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\lfloor 100 - x \rfloor$, en demandant de la tracer sur l'intervalle $[100; 110]$. On pourrait demander deux graphiques différents, dans une tâche papier-crayon, dans l'objectif de créer un herbier consistant de fonctions, dont on étudierait le comportement dans certaines « fenêtres ».

Situation 4. Définition de la limite en un point. Cette dernière phase distingue les notions de « limite de suite » et « limite de fonction ». Nous suggérons que le point choisi ne soit pas exclusivement situé en $x = 0$ et que la fonction n'ait pas forcément une limite nulle – bien que des difficultés calculatoires soient fréquentes lorsque la limite est non nulle. On peut reprendre les fonctions déjà étudiées dans les situations précédentes : $x \to \frac{1}{x}$ en $x = 0$; $x \to \frac{4}{(2-x)^2}$ en $x = 2$; $x \to \frac{(2+x)}{(7-x)}$ en $x = 7$; $x \to \frac{\sin x}{x}$ en $x = 0$; $x \to \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x = 0$. On pourrait rajouter $x \to \frac{(x^2-1)}{(x+1)}$ en $x = -1$.

6. *Conclusion*

Même si l'ingénierie de Robinet a trente ans, elle est, selon nous, toujours d'actualité dans son principe et ses objectifs pour des étudiants de première année de licence ou de niveau équivalent en Sciences. Définir le concept de « limite de fonction » de manière formelle et motiver le passage à l'abstraction par des situations bien choisies, ne peut qu'être positif pour une construction adéquate de ce concept chez les étudiants. Nous proposons dans ce texte des aménagements de cette ingénierie qui nous ont semblé pertinents pour amener à cette formalisation, en essayant de réduire le « saut conceptuel » – même s'il ne peut être totalement supprimé – entre une notion intuitive de la limite d'une fonction et le concept mathématique.

IV. CONCLUSION

A l'issue de ce retour sur des ingénieries anciennes sur le concept de convergence, un certain nombre de questions se posent.

D'abord, les deux ingénieries ici présentées ne sont évidemment pas les seules possibles. Par exemple, dans le même esprit, on peut citer l'exemple présenté par T. Lecorre dans le cadre du *débat scientifique* (Ghedamsi & al., à paraître). Pour une introduction possible dans le cadre de la problématique du « *degré choisi d'approximation de la limite* », on peut lire avec profit (Bloch 2000 et Ghedamis 2008), en pensant à la manière de l'adapter pour le niveau licence. Cette problématique reste fondamentale pour rendre opérationnel le concept de limite, et la suite dans l'enseignement des ingénieries proposées devrait de toute façon prendre en charge cette question.

Cela soulève une question dont la réponse dépend des projets curriculaires pour la licence : *jusqu'à quel degré d'expertise* sur la notion de convergence doit-on, peut-on, mener les étudiants ? Rendre cette notion opérationnalisable signifie la mettre en œuvre dans des problèmes non immédiats, et alors la question des enseignements de méthodes de résolution de problèmes dans ce domaine se pose. Voir à ce sujet (Rogalski 1990) et le projet de contribution (Rogalski et Rogalski 2015) dans ce même GT7 de EMF2015.

Une autre question, laissée totalement ouverte par le choix de présenter ces deux ingénieries, est celle *de l'ordre des enseignements entre convergence des suites et limites de fonctions*. Bien sûr, la réponse dépend des choix de curriculums concernant l'enseignement de l'analyse (nombres, fonction, convergence, continuité, dérivabilité…).

Enfin, une question très générale mériterait de plus amples réflexions : la formalisation d'une nouvelle notion dépend de son mode d'introduction, et ceux présentés ici relèvent plutôt d'un choix de considérer la notion de convergence comme un concept de type FUG (Formalisateur, Unificateur, Généralisateur) au sens de Robert (2008). Rien ne dit qu'un autre choix, par exemple dans le cadre de la problématique de l'ordre d'approximation de la limite, ne pourrait modifier le concept de convergence et sa formalisation de façon à les présenter comme des « Réponses à un Problème » (RAP), voir Robert (2008).

REFERENCES

Bloch I. (2000) *Une situation d'introduction à la notion de limite en première scientifique : le flocon de Von Koch.* Dans I. Bloch : L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation, thèse de l'Université Bordeaux 1.

Bridoux S. (2016) Introduire la notion de convergence avec une ingénierie des années 1980 : rêve ou réalité didactique ? *Projet pour INDRUM 2016.*

Dorier J.L. (Ed.) (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7.2, 5-31. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Durand-Guerrier V. et Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(3), 295-342.

Durand-Guerrier V. (2013) Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques, in *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage.* Grenoble : la Pensée Sauvage Editions.

Ghedamsi I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université*. Thèse Université de Tunis et Université Victor Segualen, Bordeaux 2.

Ghedamsi I., Haddad S., Lecorre T. (2015) Les notions de limite et d'intégrale, du secondaire au supérieur, TD à l'Ecole d'été de didactique des mathématiques, à paraître dans *les actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques*. Brest, 19-26 août 2015.

Gueudet G. (2008) Perspectives en didactique des mathématiques. La transition secondaire-supérieur : résultats et perspectives des recherches didactiques. *Actes de la XIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, 159-175.

Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse. Repères IREM 10, 123-159.

Robert A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. Bulletin de l'APMEP 340, 431-449.

Robert A. (2008) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe, in Vandebrouck F. (Ed .) *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants* (pp. 45-56). Octarès, Toulouse.

Robinet J. (1983) Une expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(3), 232-292

Rogalski M. (1990) Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode. Commission Inter-IREM Université *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* (pp. 197-204). Lyon, Paris : IREM Université Paris-Diderot.

Rogalski J., Rogalski M. (2015) Enseigner des méthodes pour donner aux étudiants une expertise en résolution de problèmes. Un exemple en licence. *Projet pour le GT7 de EMF2015*.

Roh K.H. (2010) An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε-strip activity- *Educational Studies in Mathematics,* Volume 73, Issue 3, pp.263-279.

Sénéchaud P. (2015) Compe-rendu de passation en L1 d'une ingénierie sur la notion de limite de fonction. Site de la Commission InterIREM Université, sur le site de l'ADIREM : http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique394&var_mode=calcul

Vergnac M., Durand-Guerrier V. (2014) Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique. *Petit x* 96, 7-28.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactiqe des Mathématiques 10(2), 133-170.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DIFFICULTES CONCEPTUELLES D'ETUDIANTS DE PREMIERE ANNEE D'UNIVERSITE FACE A LA NOTION DE CONVERGENCE DES SUITES NUMERIQUES

Bouchra LITIM* – Moncef ZAKI** – Amina BENBACHIR***

Résumé – Dans le présent travail, nous nous sommes intéressés aux difficultés rencontrées par les étudiants de première année universitaire face à la notion de convergence de suites numérique. L'analyse de productions à un examen de fin de semestre, de toute une promotion d'étudiants inscrits dans les filières SMA et SMI à tendance « mathématique », a révélé beaucoup de difficultés trouvant leurs origines dans des conceptions antérieures erronées, dans le changement de contrat didactique lors de la transition secondaire-supérieur, dans la transposition didactique des enseignements, et de manière plus spécifique dans le caractère « FUG » que revêt la notion de convergence de suites numériques. L'analyse et l'interprétation des productions des étudiants, nous ont conduit à conclure que l'enseignement traditionnel de type cours magistral et travaux dirigés était mal adapté à l'enseignement des suites numériques. Ainsi, nous avons envisagé dans l'avenir de concevoir une ingénierie didactique de type « débat scientifique », inspirées des erreurs et difficultés rencontrées par les étudiants ayant fait l'objet de la présente expérimentation.

Mots clés : Convergence, université, difficultés, conception, transition secondaire-supérieur

Abstract – In the present work, we were interested in the difficulties met by students in first scientific years of university in the face of the notion of convergence of numerical sequences. The analysis of productions in exams at the end of the first half for students of sectors Sciences Mathematics and Applications (MSA) and Mathematics and Computer Science (MSC), revealed many difficulties finding their origins in previous erroneous conceptions, in the change of didactic contract during the transition Secondary-university, in the didactic transposition of teachings and in a more specific manner in the nature" FUG" of the notion of convergence of numerical sequences .The analysis and the interpretation of the productions of the students, led to us to conclude that the traditional teaching was not adapted to teaching the numerical sequences. So, we envisaged in the future to conceive didactic engineering of type" scientific debate" , based on the installation of the didactic situations, inspired of the errors and difficulties encountered by the students having been the subject of the present experimentation

Keywords: Convergence, university, conception, difficulties, transition secondary- university

* Université Sidi Mohammed Ben Abdellah – Maroc – b.litim@hotmail.com
** Université Sidi Mohammed Ben Abdellah – Maroc –ambenbachir@yahoo.fr
*** Université Sidi Mohammed Ben Abdellah – Maroc –zaki.moncef@yahoo.fr

Litim B., Zaki M., Benbachir A. (2015) Difficultés conceptuelles d'étudiants de première année d'université face à la notion de convergence des suites numériques. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT7, pp. 677-686.

I. INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

La notion de convergence de suites numériques tient une place fondamentale dans l'analyse mathématique, l'enseignement des suites commence dès la 2ème année du lycée (structure similaire au système français) et se poursuit tout au long des études universitaires. Cette notion est d'autant importante pour des étudiants qui sont inscrits en première année d'une filière mathématique, puisqu'ils doivent réinvestir cette notion dans plusieurs situations d'analyse mathématique, notamment lors de l'étude de la topologie de la droite réelle (valeurs d'adhérence) ou encore pour l'étude de la continuité d'une fonction à variable réelle.

De nombreuses recherches en didactique des mathématiques se sont intéressées à cette notion ; celles de Robert (1982, 1983) et de Boschet (1983) en constituent les premiers travaux, qui ont très rapidement pointé le fait que les étudiants ont beaucoup de difficultés à maîtriser cette notion.

Le présent travail s'inscrit à son tour dans cette problématique : nous cherchons à identifier les difficultés et les erreurs de nos étudiants dans leurs traitements de la convergence des suites numériques. Cette problématique s'inscrit en fait dans une autre qui est plus large, à savoir la mise en place de situations didactiques portant sur la notion de convergence de suites numérique dans le cadre d'un débat scientifique auprès des étudiants (Litim, Benbachir & Zaki 2014, à paraître). Dans le cas présent, l'étude portera essentiellement sur les difficultés rencontrées par les étudiants à travers l'analyse de leurs productions à propos d'un exercice sur les suites numériques, lors d'une évaluation de fin de semestre d'un module d'analyse. Ainsi, nous tenterons de répondre aux questions suivantes :

Quelles sont les difficultés éventuelles rencontrées par les étudiants ? Leurs causes ? Et leurs natures ?

Que peut-on tirer de cette étude comme conclusions à propos de l'enseignement de la convergence des suites numériques ?

II. CADRE THEORIQUE : ORIGINES DES DIFFICULTES D'APPRENTISSAGE

1. *Difficultés et contrat didactique*

Les recherches de Brousseau (1978) sur l'échec électif en mathématiques, l'ont conduit à introduire le concept du contrat didactique comme une éventuelle cause de cet échec. Il a alors défini ce contrat en termes d'habitudes (spécifiques) du maître attendues par l'élève et les comportements de l'élève attendus par le maître. D'après Brousseau, certains contrats didactiques favoriseraient le fonctionnement spécifique des connaissances à acquérir et d'autres non, et que certains élèves pourraient donc éventuellement en tirer bénéfice à travers une formation convenable. (Brousseau 1980).

Ainsi, d'après cette approche didactique, une modification du contrat didactique peut constituer une solution possible à l'échec en mathématiques.

2. *Difficultés et transposition didactique*

> Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les objets d'enseignement. Le (travail) qui, d'un objet de savoir à enseigner, fait un objet d'enseignement est appelé la transposition didactique. (Chevallard 1985, p. 39)

Ainsi, à travers la transposition didactique, Chevallard pose le problème d'adaptation du savoir à enseigner (savant) au savoir enseigné. Il souligne que la distance, souvent considérable, entre le savoir savant et le savoir enseigné peut poser de sérieux problèmes dans l'enseignement.

3. Difficultés et conceptions

Les travaux de Brousseau (1983) montrent que l'erreur n'est pas seulement due à l'ignorance, à l'incertitude ou au hasard, comme cela est souvent présenté dans les théories empiristes ou béhavioristes de l'apprentissage, mais l'effet d'une connaissance antérieure qui a été engagée avec quelques succès dans une famille d'actions, et qui se révèle fausse ou inadaptée dans d'autres situations. Une telle conception sera difficile à éliminer, et fera alors obstacle devant tout nouvel apprentissage.

Ainsi, les conceptions antérieures tiennent une place fondamentale dans l'acquisition d'un nouveau savoir. Par conséquent, l'analyse des conceptions des apprenants peut aussi contribuer à déceler les obstacles rencontrés.

4. Difficultés conceptuelles liées à l'enseignement et l'apprentissage de la convergence des suites numériques

Certaines notions en mathématique possèdent à la fois des caractères formalisateurs, généralisateurs et unificateurs, que Vanderbrouck (2008) note par le sigle « FUG ».

La notion de convergence des suites numériques en est un exemple parfait. En effet, de par sa nature « FUG », cette notion provoque des difficultés d'enseignement et d'apprentissage auprès des étudiants (Robert 1998). à l'université marocaine , la notion de convergence des suites numériques est présentée de façon formelle, avec des définitions qui mettent en jeu des connaissances de logique en présence de quantificateurs et d'implications, qui souvent, n'ont jamais fait l'objet d'un enseignement spécifique au lycée comme c'est le cas en Tunisie (Chelougui 2004) Les travaux dirigés exigent un ensemble de techniques :

- Des raisonnements déductifs, par absurde ….
- Manipulation de la définition en (ε, N), que les enseignants du supérieur supposent qu'il est assez manipulé au secondaire, ce qui n'est pas le cas.

Nous pensons que ces activités pédagogiques qui ne prennent pas en compte la nature FUG de la convergence des suites numérique contribuent à renforcer les difficultés.

Les travaux de Robert (1982, 1983, 1990, 1998) sur l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques auprès des étudiants de l'université et des élèves de classes préparatoires aux grandes écoles, a aussi révélé trois grands types de représentations : dynamiques, statiques et monotones. Il s'est avéré que les étudiants qui ont une représentation statique, sont ceux qui arrivent à réaliser de bonnes performances, contrairement à ceux qui utilisent un modèle monotone, et qui présentent d'énormes difficultés. Robert a par ailleurs souligné une difficulté majeure dans le traitement des suites numériques, à savoir le fait que certains étudiants ont des difficultés à prendre en compte le caractère variable de l'indice n d'une suite numérique.

III. METHODOLOGIE

Notre expérimentation a été réalisée en février 2011 auprès d'étudiants de première année d'université inscrits dans deux filières de licences fondamentales : Sciences Mathématiques et Applications (SMA) et Sciences Mathématiques et Informatique (SMI). Ces étudiants ont tous suivi durant le premier semestre un enseignement classique d'analyse (module d'analyse), où les suites numériques ont été introduites de manière formelle, à l'aide de définitions en ε et N, accompagnées de tous les théorèmes de base concernant la convergence de suites numériques. Durant ce semestre, les enseignements étaient répartis en cours magistraux (deux fois 2h en amphi hebdomadaires) et travaux dirigés (trois fois 1h30 hebdomadaires en groupes de 80 étudiants).

Suite à l'examen du module d'analyse de fin de semestre, nous avons procédé à l'analyse des productions de l'ensemble des étudiants (330 copies) relatives à l'exercice portant sur les suites numériques. Notre analyse a été à la fois qualitative et quantitative.

IV. ANALYSE APRIORI DU PROBLEME

L'épreuve d'examen comportait trois exercices pour une durée de 4 heures, dont voici l'énoncé de l'exercice portant sur les suites numériques :

Pour tout entier $n \geq 1$ on considère la fonction g_n définie sur $[0, 1]$ par :

$$g_n: [0,1] \to R$$
$$x \to \sum_{k=1}^{n} x^k - 1$$

a. Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique $a_n \in [0,1]$.

b. Monter que la suite $(a_n)_{n\in N^*}$ainsi obtenue est décroissante.

c. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in N^*}$est convergente.

d. Montrer que $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

e. En déduire que l'ensemble $A = \{a_n; n \in N^*\} U \left\{\frac{1}{2}\right\}$est un compact de R

Pour la question a :
On montre que g_n est strictement croissante, continue et vérifie :
$g_n(0) = -1 \quad et g_n(1) > 1$.
Puis on utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure.

Pour la question b :
Il suffit de comparer$g_n(a_{n+1}) et g_n(a_n)$ puis d'utiliser la croissance de la fonction g_n.
Cette question demande des sommations.

Pour la question c :
Une déduction facile du fait que (a_n) est décroissante et minorée par 0, puisque c'est un résultat de cours.

Pour la question d :
Il suffit de déduire de $g_n(a_n) = 0$, l'égalité: $2a_n = 1 + a_n^{n+1}$, puis de montrer que $lim_{n\to+\infty} a_n^{n+1} = 0 \; etdedéduirelim_{n\to+\infty} a_n = 1/2$. Il faut bien entendu faire attention au caractère variable de n, tout en maîtrisant les résultats du cours.

Pour la question e :
On montre que A est bornée et que toute suite de A admet une valeur d'adhérence. Cette question peut a priori soulever certaines difficultés, puisqu'elle renvoie à des résultats topologiques et à la convergence de suites numériques.

V. ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ETUDIANTS

Dans notre analyse, nous nous sommes limités aux questions b, c, d et e, qui sont directement liées à la notion de convergence de suites numériques. Les erreurs rapportées dans l'analyse, sont rédigées telles qu'elles ont été écrites dans les productions des étudiants.

1. Question b :(Figure 1)

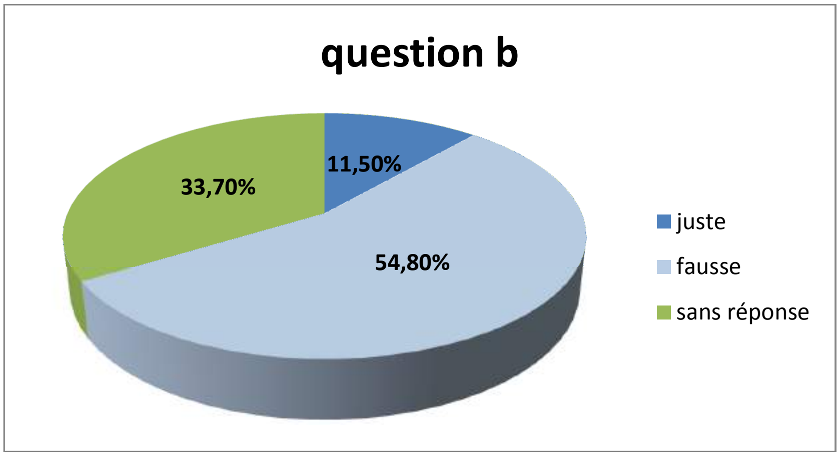


Figure 1 *– Répartition des réponses à la question b*

Sur l'ensemble des copies, 181 étudiants ont donné des réponses fausses, dont 58 qui n'arrivent pas à faire des sommations correctes. En voici quelques exemples :

$$g_{n(a_{n+1})-g_n(a_n)} = \sum_{k=1}^{n+1} a_n^k - \sum_{k=1}^{n} a_n^k = a_n^{n+1}$$

$$g_{n+1(a_{n+1})-g_n(a_n)} = a_{n+1}^k$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_n^k = 1 \Rightarrow a_1^1 + a_2^2 + \cdots a_n^n = 0.$$

12 étudiants ont confondu g_n avec g_{n+1}, en faisant : $a_{n+1} \leq a_n$ et puisque g_n est croissante $g_{n+1}(a_{n+1}) \leq g_n(a_n)$.

25 étudiants ont remplacé a_n par :$\sum_k x^k - 1$. L'origine de cette erreur nous a été expliquée grâce à la copie d'un de ces étudiants qui a posé :

$$g_{n+1}(x) = (a_{n+1})_{n\geq 1} = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - 1$$

$$g_n(x) = (a_n)_{n\in N*} = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - 1$$

Cette réponse incohérente révèle des perturbations au niveau de la manipulation des symboles, du sens donné à une suite numérique et une incompréhension de l'énoncé de l'exercice.

Certaines réponses révèlent des difficultés de mise en fonctionnement des inégalités sur R :

$$0 \leq a_n \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq \sum_{k=1}^{n} a_n \leq 1$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1}^k < \sum_{k=1}^{n} a_n^k \Rightarrow \; a_{n+1} < a_n$$

$$0 \leq a_n \leq 1 \;\; et \; a_n \leq 1 \;\Rightarrow a_{n+1} - a_n \leq 1 - 1 = 0$$

2. *Question c : (Figure 2)*

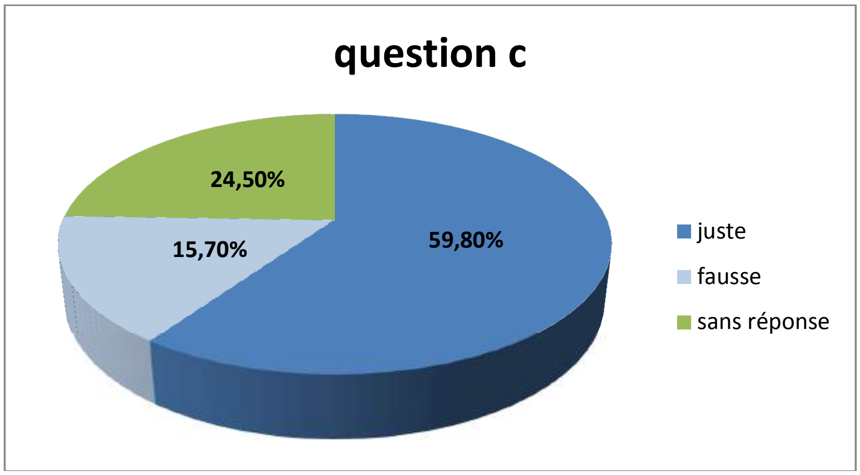


Figure 2 *– Répartition des réponses à la question c*

Nous y avons relevé 81 non réponses et 52 réponses fausses, dont voici quelques erreurs fréquentes :

$a_n \in [0;1]$, $on\ pose f_n(x) = a_n \in [0;1]$qui est fermé, borné et atteint ses bornes d'où $a_n \geq inf f_n$ donc (a_n) est minorée !

Confusion entre a_n et (a_n).

$a_n \in [0;1]$ donc (a_n) est minorée par1.

$$a_n \in [0;1] \;\; donc\ pour\ \varepsilon = 1 \;\; on\ a\ |a_n| < 1\ et\ |a_n - a_{n-1}| < 1$$

$$alors, \forall \varepsilon > 0, \exists l \in R\ tq : |a_n - l| < \varepsilon.$$

$$a_{n+1} \in [0;1] \Rightarrow a_{n+1}^{n+1} \to 0$$

a_n est décroissante et continue.

$$\forall \alpha \in [0;1] - \varepsilon < a_n - \alpha < \varepsilon \;;$$

$-\varepsilon + \alpha < a_n < \varepsilon + \alpha \;\; donc\ (a_n) est\ convergente.$

$$Pour\ \varepsilon = \frac{1}{2} \;\; \exists n_o \in N\ \forall n > n_o a_n < \frac{1}{2}\ donc\ a_n\ \ est\ convergente.$$

a_n $est\ décroissante\ donc, elle\ est\ minorée, donc\ elle\ est\ convergente.$

a_n est dérivable, décroissante, donc elle est convergente.

3. *Question d : (Figure 3)*

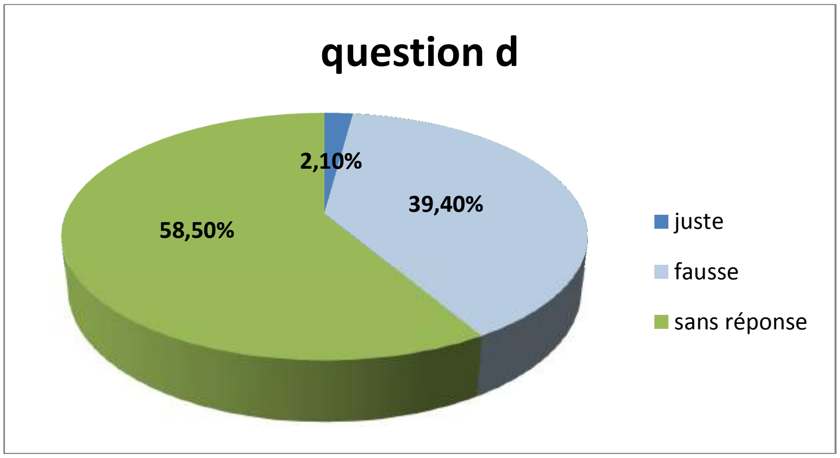


***Figure 3** – Répartition des réponses à la question d*

On y retrouve 131réponses fausses, dont voici quelques erreurs les plus fréquents :

$a_n \geq \frac{1}{2} donc \lim a_n = 1/2.$

On a $a_n est\ convergente \rightarrow\ \ \forall \varepsilon > 0, \exists n_o \epsilon N tq$:

$$\forall n \geq n_o \Rightarrow |a_n - l| \leq \varepsilon \ \ \Rightarrow l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon; si\ on\ prend\ \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow l - \frac{1}{2} \leq a_n \leq l + \frac{1}{2}\ \ si\ a_n \epsilon [0;1] \Rightarrow 0 \leq a_n \leq 1\ \ alors\ l\ vérifie$$

$$l + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow l = \frac{1}{2}$$

$$|g_n(a_n) - g_n(1/2)| = \left|a_n - \frac{1}{2}\right| |g_n| < \left|a_n - \frac{1}{2}\right| < 0$$

$0 \leq a_n \leq 1\ \ \Rightarrow\ \ 0 < lim a_n < 1\ donc\ lim a_n = 1/2.$

$$a_n\ converge\ vers\ l \in [0;1]\ \ \Rightarrow 0 \leq l \leq 1$$

$$\forall \varepsilon > 0, In_o \geq 0, n \geq n_o |a_n - l| < \varepsilon\ pour\ \varepsilon = \frac{1}{2}$$

$]l - \varepsilon; l + \varepsilon[\subset [0;1] \Rightarrow l = \frac{1}{2}.$

4. *Question e : (Figure 4)*

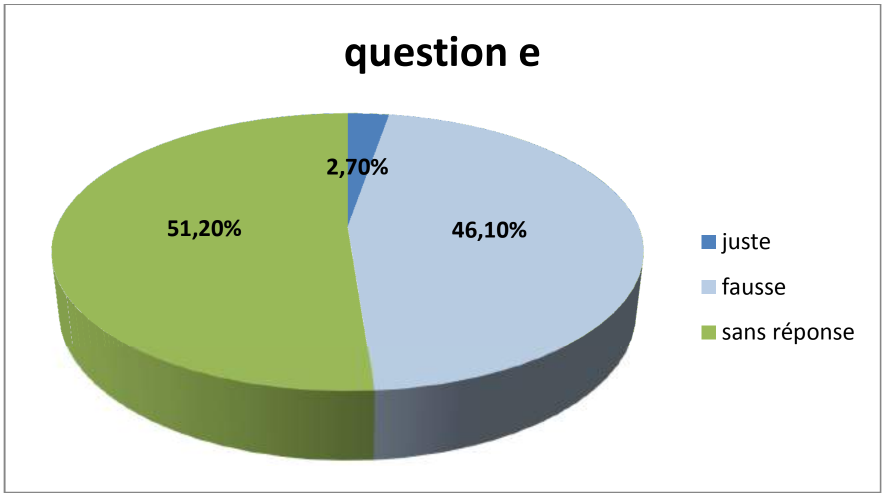


Figure 4 *– Répartition des réponses à la question e*

On y retrouve seulement 9 réponses justes. Voici quelques exemples de réponses fausses les plus fréquentes :

$\{a_n\}$est fermé de R $\Rightarrow a_n \to l$ aussi borné et fermé

A_n est l'adhérence de l'ensemble$\{a_n, n \in N\}$, alors on a d'après le cours les compacts sont les adhérences de R

$$A_n \text{ est borné } 0 \leq A_n \leq 1$$

$\frac{1}{2} - \varepsilon \leq a_n < \frac{1}{2} + \varepsilon$, donc A_n est fermé et borné donc A_n est compact.

$$A_n = [0; 1]$$

$A_n \neq 0$

a_n est fermé et borné.

VI. INTERPRETATION DES REPONSES DES ETUDIANTS

La première remarque frappante est que les étudiants utilisent les résultats du cours de façon imprécise, voire même fausse ; et il arrive même parfois que certains d'entre eux fabriquent des résultats faux dans leurs propres justifications (satisfaction de leur propre convenance) . Nous remarquons aussi une perte de sens de la notion de la suite : a_n est remplacé par $f_n(x)$, a_n est confondu avec (a_n), a_n est fermé, ou encore a_n est dérivable. Ces difficultés relèvent essentiellement de la transposition didactique, mais aussi de difficultés conceptuelles qui sont les résidus de conceptions antérieures erronées.

La définition en (ε, N) est utilisée automatiquement et d'une manière fausse même dans le cas où la question peut être traitée sans le recours à cette définition: Peut s'expliquer par l'utilisation de l'enseignant de la définition dans la résolution de la majorité des exercices, donc du fait du contrat didactique

On note aussi un manque de détails, même pour des réponses justes ; d'ailleurs la remarque « mal rédigé » du correcteur figure sur presque toutes les copies : ici, nous constatons que cette difficulté relève d'une rupture du contrat didactique lors de la transition secondaire-supérieur.

Par ailleurs, les réponses des étudiants nous révèlent de manière précise les éléments suivants :

-Des stratégies incorrectes pour la résolution de l'exercice : cette difficulté peut s'expliquer d'après Charnay (1992), soit par une incapacité chez l'étudiant à récupérer à long terme des procédures dans sa mémoire, soit par une insuffisance, voire une inefficacité du réinvestissement de ses expériences scolaires antérieures. Nous pensons qu'une nouvelle méthode d'enseignement est nécessaire pour permettre aux étudiants de s'approprier une démarche scientifique lors de la résolution de problèmes

-Fabrication des résultats faux dans leurs propres justifications qui révèle la présence de conceptions erronés favorisée par la méthode de l'enseignement classique.
-L'incohérence de quelques réponses révèle des perturbations au niveau de la manipulation des symboles, et une incompréhension de l'énoncé de l'exercice.

-Une perte de sens de la notion qui se manifeste par l'absence de la prise en compte du caractère variable de n dans une suite numérique. Cet oubli traduit implicitement la non prise en compte des étudiants du caractère fonctionnel d'une suite, probablement favorisée par une « négligence » de cet aspect durant l'enseignement, mais aussi par le non recours à des activités faisant appel à des traitements numériques et graphiques utilisant des calculatrices par exemple. Ainsi, nous partageons l'idée de Robert (1990) qui pense que l'origine de ces erreurs est due à l'omission fréquente de la modification de la variable n dans le cours ; elle suppose aussi que l'étudiant considère que « U_n se rapproche de l » veut dire que U_n, avec n fixé, qui est envisagé se déplacer vers l.

-Des difficultés dans la manipulation de la définition en (ε, N), qui sont notamment liées à la non disponibilité de connaissances en logique, et cela particulièrement lors de l'utilisation des quantificateurs donc des difficultés liées à la transposition didactique qui ne prend pas en compte la nature FUG de la convergence des suites numériques et la rupture de plus en plus grande entre le lycée et l'université. Ces difficultés peuvent s'expliquer aussi par les représentations des étudiants sur ce concept (Robert 1983)

Pour bien identifier ces difficultés nous avons élaboré un pré-test l'année suivante avec des questions qui exigent l'utilisation de la définition en (ε, N) (Litim, Benbachir & Zaki 2014).

VII. CONCLUSION

Les résultats de cette expérimentation nous ont conduits à procéder à l'élaboration d'une ingénierie didactique de type « débat scientifique » (Legrand 1993), fondée sur la théorie des situations (Brousseau 1986) et la théorie anthropologique (Chevallard 1991). En effet, l'analyse des erreurs et difficultés relevées dans les productions des étudiants, nous permet d'émettre l'hypothèse forte selon laquelle, le débat scientifique va permettre à l'étudiant de s'impliquer dans la construction de son savoir et de favoriser l'apparition de conflits cognitifs nécessaires à une compréhension plus approfondie.

Le choix du débat scientifique auprès des étudiants a été guidé par une recherche antérieure menée au sein du laboratoire LIRDIST (Benbachir & Zaki 2001), qui a montré que la confrontation de raisonnements d'étudiants lors de résolution de problèmes, a permis de bien identifier les principales difficultés relatives à l'analyse des fonctions en première année d'université, puis de faire progresser les étudiants vers une meilleure maîtrise de cette notion.

REFERENCES

Benbachir A., Zaki M. (2001) Production d'exemples et de contre-exemples en analyse : étude de cas en première année d'université. *Educational Studies in Mathematics* 47, 273–295.

Boshet F. (1983) Les suites numériques comme objet d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques* (4/2), 141–163.

Brousseau, G. (1978) L'observation des activités didactiques. *Revue Française de pédagogie* 45, 130–139.

Brousseau G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques* (4/2), 165–198.

Brousseau G. (1986) La théorie des situations, *RDM* (7/2), ^{33}–^{115}: la pensée sauvage.

Brousseau G. (1980) Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de laryngologie, otologie, rhinlogie* (3/4), 107–131.

Brousseau G. (1984) Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage. Actes du colloque de la troisième Université d'été de didactiques des mathématiques d'Olivet.

Charnay R., Mante M. (1992) De l'analyse de l'erreur en mathématiques aux dispositifs de remédiation : quelques pistes, IREM de Grenoble, Université Joseph Fourrier, *Grand N* 48, 37–64

Chellougui F. (2003) Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien. *Petit x* 61, 11–34.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard Y. (1991) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques* (12/1), 73–112.

Legrand M. (1993) Le débat scientifique en cours de mathématiques. *Repères IREM* 10, 123–149

Litim B., Benbachir A. et Zaki M. (2014) Impact of previous conceptions in secondary-university transition: the case of conversion of numerical sequences. *International Journal of Research in Education Methodology* 6(3), 896–903.

Litim B., Benbachir A. et Zaki M. (à paraître) L'apport du débat scientifique au développement du raisonnement mathématique : cas de la convergence des suites numériques en première année d'université. *Revue Africaine de Didactique des Sciences et de Mathématiques.*

Robert A. (1982) Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Thèse de doctorat d'état de l'Université Paris VII.*

Robert A. (1983) Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en didactique des mathématiques*3, 305–341.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherche en Didactique des mathématiques* (18/2), 138–190.

Robert A. (1990) L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG, Enseigner autrement les mathématiques en DEUG première année .Commission INTER IREM université.

Vandebrouck F. (2008) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octarès.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ENSEIGNER DES MÉTHODES POUR DONNER AUX ÉTUDIANTS UNE EXPERTISE EN RESOLUTION DE PROBLEMES: UN EXEMPLE EN LICENCE

Janine ROGALSKI[*], Marc ROGALSKI[**]

Résumé. Le texte entend redonner vie à la problématique d'enseignement de méthodes de résolution de problèmes aux étudiants, visant leur conceptualisation opérationnelle et leur expertise. Après avoir rappelé des acquis des travaux antérieurs, on présente le contenu textuel d'une méthode pour l'étude des suites réelles, enseignée en licence, comme exemple de l'affinement d'heuristiques "à la Polya" allant vers un guidage opérationnel de l'étude. La mise en oeuvre sur une suite non triviale en montre l'efficacité. On souligne le caractère général des modalités d'enseignement de cette méthode. On conclut par la proposition de relance d'un ensemble de questions de recherche.

Mots-clefs : méthodes, expertise, résolution de problèmes, opérationnalisation des savoirs

Abstract. The paper aims at revitalizing the issue of training students to use problem-solving methods, to support their operational conceptualization and expertise. After recalling results from previous researches, we present the textual content of a method for the study of real series, taught at the first year of University, as an example of how to refine "à la Polya" heuristics in order to organize an operational guidance of student's activity. Its implementation for a non trivial series shows its efficacy. The organization of teaching is then presented as a generic case. In conclusion, theoretical and practical questions are proposed about teaching methods at the University level.

Keywords: methods, expertise, problem solving, knowledge operationalization

I. INTRODUCTION : RETOUR SUR L'ENSEIGNEMENT DE METHODES ?

La problématique des méthodes de résolution de problèmes et de leur enseignement a connu un développement autour des années 80-90, puis une extinction. Lui ont succédé des questions plus générales sur la métacognition, dont la place des activités réflexives des élèves lors de la résolution de problème. Schoenfeld a également relevé cette évolution dans la recherche anglophone : " *le travail sur la résolution de problème en tant que telle est retombé significativement au début des années 90* " ; parmi les raisons, il souligne que le travail d'ingénierie (élaboration de méthodes et mise en oeuvre avec les élèves) n'était ni assez excitant ("*glamourous*") ni valorisé, bien que sa faisabilité ait été démontrée : "*les stratégies heuristiques générales pouvaient être décomposées en familles de stratégies plus spécifiques,*

[*] Directeur de recherche CNRS honoraire, Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) Université Denis Diderot Paris – France - rogalskij@univ-paris8.fr

[**] Professeur émérite Université Lille I, Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche, Université Pierre et Marie Curie, Paris et Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) Université Denis Diderot Paris – France - marc.rogalski@imj-prg.fr

Rogalski J., Rogalski, M. (2015) Enseigner des méthodes pour donner aux étudiants une expertise en résolution de problèmes : Un exemple en licence. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT7, pp. 687-700.

et les étudiants, avec un enseignement approprié pouvaient apprendre à les utiliser" (Schoenfeld 2007, pp. 539-540, notre traduction). Nous proposons de rouvrir la discussion sur cette problématique spécifiée pour l'enseignement supérieur, à partir de la présentation complète d'une méthode effectivement utilisée en licence.

Reprenons d'abord une définition générale (explicitée à propos des méthodes de programmation en informatique : Rogalski, Samurçay & Hoc 1988, pp. 310-311). « *Une méthode peut être considérée comme un guide explicite et systématique pour la recherche et la gestion de stratégies de résolution de problèmes d'une certaine classe* […] » : c'est ce que montrera l'exemple développé pour l'étude des suites numériques. « *(Elle) est élaborée par des spécialistes d'un domaine d'activité pour expliciter ce qui se dégage de commun dans des pratiques efficaces de résolution et pour rationaliser ces pratiques* […] *(Sa) mise en œuvre suppose une adaptation au problème concerné* [le traitement d'une suite particulière illustre une telle adaptation] *et aux connaissances des sujets* » [c'est l'objet du premier point de la méthode présentée].

Concernant l'enseignement et l'apprentissage de méthodes de résolution de problèmes dans différents domaines des mathématiques à l'université, on se propose d'illustrer les idées développées dans (Rogalski 1990a) par l'exemple paradigmatique de l'étude des suites numériques en licence, détaillée en (II.1). Nous montrerons sur une suite particulière la pertinence mathématique de cette méthode (II.2). Nous donnerons en III des éléments sur son enseignement. Nous conclurons par une discussion sur des problèmes ouverts.

Commençons par les apports des travaux antérieurs sur l'enseignement de méthodes en mathématiques, avec une liste de méthodes ayant déjà été enseignées, dans divers domaines mathématiques.

1. Des travaux antérieurs sur l'enseignement de méthodes en mathématiques

Nous résumons en six points les apports convergents de diverses contributions : (Polya 1965), (Robert, Rogalski & Samurcay 1987), (Robert & Rogalski 1988), (Robert & Tenaud 1989), (.Rogalski 1989), (Rogalski, Samurçay & Hoc 1988), (Rogalski 1990a), (Schoenfeld 1978, 1980, 1985, 2007).

• On apprend les mathématiques en résolvant des problèmes, et c'est par la résolution de problèmes que se fait l'évaluation de l'apprentissage. Mais on constate souvent un écart important entre l'ambition de l'enseignement et le faible degré d'expertise attendu pour les contrôles, et par suite dans les problèmes étudiés en classe. D'où une faible expertise des étudiants dans la résolution de problèmes, et par suite une faible compréhension des concepts utiles dans cette résolution.

• Pour s'approprier le sens de concepts mathématiques, il faut les rendre *opérationnels pour la résolution de problèmes* (Douady 1986).

• Des problèmes trop simples ou trop élémentaires ne suffisent pas à balayer l'essentiel des facettes d'un concept et des points de vue qu'il peut présenter pour être opérationnel.

• La capacité à résoudre des problèmes suffisamment difficiles autour d'un concept demande un *apprentissage explicite*, qui appelle un *enseignement de méthodes.*

• Ni l'heuristique générale au sens de (Polya 1965), ou de (Schoenfeld 1980, 1985), ni le « problem solving » général au sens de (Larson 1983) ou de (Schoenfeld 1985) ne répondent à la question (M. Rogalski 1990a). Pour être efficaces, des méthodes doivent rendre opérationnelles des idées générales de l'épistémologie ou de l'heuristique en les spécifiant pour un domaine mathématique précis ou un concept (c'est le cas de l'exemple de méthode que nous présentons au § II). Du coup elles ne peuvent en général s'appliquer à un domaine différent.

• Une *méthode* sur un champ donné des mathématiques *n'est pas un algorithme* : elle ne prétend pas apporter une réponse automatique, mais *elle génère des questions qui organisent les activités :* classement des problèmes, classement des outils et démarches possibles dans le domaine (stratégies, tactiques, techniques), organisation temporelle de la résolution, et enfin procédures de contrôle. Il s'agit donc de mettre en œuvre *une approche explicitement métamathématique qui porte sur des concepts précis* (Robert et Robinet 1996 ; Dorier 1997).

2. *Des exemples de méthodes enseignées, de la terminale à la licence*

Notre but ici est d'analyser un exemple qui montre comment expliciter une méthode de résolution de problème dans un domaine précis (les suites à l' université), et en quoi le degré d'expertise lié à l'opérationalisation des concepts est ainsi élargi. Il s'agit aussi de montrer, par l'exemple d'un dispositif d'apprentissage en Licence, comment on peut organiser un enseignement de méthode. Nous le situons au préalable dans la diversité des domaines dans lesquels des méthodes ont effectivement été utilisées dans l'enseignement (de la terminale scientifique à la licence) avec les visées suivantes :

(1) faire résoudre des problèmes de géométrie en terminale scientifique (Robert et Tenaud 1989).
(2) enseigner la géométrie des espaces affines et la théorie des groupes (licence formation continue) (Robert 1992).
(3) enseigner l'algèbre linéaire (Rogalski 1992,1994), (Dorier 1997).
(4) rechercher des lieux géométriques en géométrie cartésienne (Rogalski 1995b).
(5) chercher des primitives (Guyou 1946 ; Schoenfeld 1978 ; Rogalski 1987).
(6) pour étudier qualitativement une équation différentielle (M. Rogalski 1989).
(7) étudier la convergence d'une suite réelle (Rogalski 1988 ; 1990b).
(8) établir des inégalités en analyse (Rogalski 1999).
(9) résoudre des problèmes d'arithmétique élémentaire (Rogalski 1995a).

La méthode (4), enseignée par Charles Guyou dans les années 50-60 en classe préparatoire aux grandes écoles, a été exploitée pour l'enseignement des prolégomènes d'algèbre linéaire à Lille dans les années 80. La méthode (5) a été à la base d'un projet d'un Enseignement Intelligemment Assisté par Ordinateur expérimenté à Lille (Delozanne 1994) et d'une réflexion sur les limites de ce type de logiciel en analyse (Rogalski 1994). La méthode (8) a été utilisée plusieurs années (2000-2006) en formation d'enseignants.

La méthode (7) a été choisie pour illustrer notre démarche.

II. UN EXEMPLE DE METHODE SUR LA CONVERGENCE DES SUITES, ENSEIGNEE PLUSIEURS ANNEES EN L1

Il s'agit d'un exemple emblématique de méthode utilisant de façon opérationnelle les concepts du domaine des suites numériques. Elle a été enseignée plusieurs années (1988-1996), à l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Nous commençons par donner des extraits substantiels du document qui décrit la méthode, distribué aux étudiants *en fin d'enseignement* - le texte *in extenso* figure dans (Rogalski 1988, 1990b). Nous détaillons ensuite un exemple de son utilisation sur une suite particulière, assez difficile, pour montrer sa pertinence mathématique.

Enfin, nous parlerons (III) des modalités de son enseignement (L1, DEUG A première année à l'époque), de son utilisation par les étudiants et de son impact.

1. *La description de la méthode*

Le *plan* de la méthode, en cinq sections, introduit le document.

PLAN

0. Connaissances disponibles nécessaires.
   - (1) Les théorèmes généraux sur les suites.
   - (2) Les suites et les fonctions à connaître en toutes occasions.
   - (3) Trois techniques indispensables.

I. Stratégie de classement.
   - (1) Classer le problème en problème général ou problème particulier..
   - (2) Classer une suite particulière.
   - (3) Autres moyens de classement.

II. Stratégie de recherche.
   - (1) Faire des tests préliminaires.
   - (2) Etudier des cas particuliers.
   - (3) Changer de point de vue.
   - (4) Faire « $n = \infty$ ».
   - (5) Localiser la difficulté principale.

III. Ingrédients d'une stratégie de preuve.
   - (1) Si on a deviné la limite.
   - (2) Pour montrer une divergence.
   - (3) Prouver la convergence sans s'occuper de la limite.
   - (4) Identifier la limite.
   - (5) Tactique «□ - N avec encadrement».
   - (6) Partager une somme $\sum_{0\leq p\leq n} v_{n,p}$ en deux termes.
   - (7) Traiter une suite de type classique par les techniques standard.
   - (8) Un exemple d'écriture d'un plan de démonstration.

IV. Contrôler, redémarrer.
   - (1) Où en est-on ? Est-on sûr de ce qu'on raconte ?
   - (2) Contrôler par l'extérieur.
   - (3) Redémarrage.

V. Pour s'entraîner à la méthode.

Certains des titres font ici penser à l'heuristique générale, telle qu'elle est présentée dans (Polya 1965) ou (Schoenfeld 1980) : c'est souvent le cas dans les *plans* de méthodes. Mais nous allons montrer, sur les sections 0 à III, comment interviennent les concepts de convergence des suites – nous en donnons les extraits les plus significatifs, les points non développés sont remplacés par le symbole […].

0. Exemples des connaissances disponibles nécessaires

(1) *Les théorèmes généraux sur les suites*

Formulation en «ε-N», suites monotones, adjacentes. Théorème d'« encadrement à ε près » : si on a $v_n \leq u_n \leq w_n$, et si on sait que $v_n \to v$, $w_n \to w$, alors si l'entier n est assez grand on a l'encadrement $v-\varepsilon \leq u_n \leq w+\varepsilon$. Théorème de Cauchy.

(2) *Exemples de suites à bien connaître*
Suites et séries géométriques et arithmétiques ; séries de Riemann ; comportements comparés de n^{α}, a^{n}, $n!$; suites récurrentes linéaires à un terme (calcul du terme général) ; suites $(1+x/n)^{n}$ et $\sum_{0\leq p\leq n} x^{p}/p!$.

(3) *Exemples de techniques indispensables*
Savoir majorer et minorer (signe et/ou monotonie de la dérivée). Raisonner par récurrence (en particulier «récurrence paramétrée» : chercher C pour que $H_n(C) \Rightarrow H_{n+1}(C)$). Utiliser les développements limités.

I. Stratégie de classement

(1) *Classer le problème en problème général ou problème particulier.*
(2) *Classer une suite particulière parmi :*

les suites définies par une formule $f(n)$;
les suites définies implicitement par une équation, par exemple : u_n est la plus grande racine de $x^3-3x-n=0$;
les sommes de séries ;
les récurrences fixes à un terme : $u_{n+1}=f(u_n)$;
les récurrences variables à un terme : $u_{n+1}=f_n(u_n)$;
les récurrences linéaires (à un ou deux termes) ;
les suites s'écrivant $\sum_{0\leq p\leq n} v_{n,p}$.

(3) *Autres moyens de classement*

- Simplifier l'écriture *en donnant un nom* à un groupement, par exemple si on étudie $u_{n+1} = \big([(n+\sin n)/(n+\ln n)]+u_n\big)^{1/2}$, poser $a_n = (n+\sin n)/(n+\ln n)$ et étudier le problème général $u_{n+1} = \big(a_n+u_n\big)^{1/2}$, quand $a_n\to m$. On a ainsi *changé de point de vue* en passant d'un problème particulier à un problème général.

- Modifier u_n pour la comparer à des suites plus simples. Par exemple, si on étudie la suite écrite avec n racines carrées $u_n = \big(1/n+\big(1/n+\ldots(1/n)^{1/2}\big)^{1/2}\ldots\big)^{1/2}$, alors $v_n\leq u_n\leq w_n$ où $v_n = (1/n)^{(1/2^n)}$ et $w_n = (1/n+w_{n-1})^{1/2}$.

II. Stratégie de recherche : faire des hypothèses, se donner des idées, conjecturer

Les questions à se poser concernent : convergence, divergence, identification de limite, monotonie, majoration ou minoration, comportement séparé de u_{2n} et u_{2n+1}, comparaison à des suites connues, etc.

[…]

(1) *Faire des tests préliminaires*

[…]

(b) Peut-on encadrer la suite par des suites connues ? ou l'encadrer à □ près par des suites connues, pour n assez grand ?
(c) Que suggère un dessin ? Attention : un dessin peut suggérer plusieurs pistes différentes ; si on décide d'en suivre une, ne pas oublier les autres si celle-ci ne marche pas.

[...]

(e) La suite est-elle *évidemment* monotone (ce qui donne une piste de recherche) ? Exemple : $u_{n+1}=(u_n^2+2)^{1/2}$.

(f) Calculer littéralement u_1, u_2, u_3, u_4,… pour deviner une formule éventuelle. Exemples : $u_{n+1} = 2(u_n)^{1/2}$ ou $u_n = 1/2!+2/3!+…+(n-1)/n!$.

[…]

(2) *Dans un problème général, étudier des cas particuliers*

Exemple : si u_n□m, que fait $v_n=(u_1+u_2+…+u_n)/n$? Etudier le cas u_n□m.

Ou : si $u_{n+1}=\left(a_n+u_n\right)^{1/2}$, avec a_n□m, que fait u_n ? Etudier le cas a_n□m.

(3) *Changer de point de vue sur la suite*

(a) Changer la formule ou l'expression. Exemples :

- $u_0=1$, $u_{n+1}=(1+u_0^2+u_1^2+…+u_n^2)/(n+1)$ peut se définir par $u_0=1$, $u_1=2$, et pour $n\geq 3$ par l'expression $u_{n+1}=u_n\,(u_n+n)/(n+1)$.
- $u_{n+1}=(1/n+u_n^2)^{1/2}$ peut se définir par $u_n^2=1/(n-1)+1/(n-2)+…+1+u_1^2$.

[…]

(b) Passer du cadre numérique au cadre graphique et inversement

- Pour une suite $u_{n+1}=f(u_n)$, tracer le graphe de f et la bissectrice y=x, « l'escalier » ou le « colimaçon ».
- Pour une suite $u_{n+1}=f_n(u_n)$, tracer les courbes $y=f_n(x)$, l'escalier ou le colimaçon. Interpréter le comportement de u_n sur le dessin en termes de propriétés des f_n vues sur le graphique, et qu'il faudra prouver. Par exemple, comparer u_n et le point fixe x_n de f_n.
- Si $u_n = f(1)+f(2)+…+f(n)$, tracer le graphe de f, en déduire des encadrements, par exemple au moyen d'une intégrale de f.

(c) Passer d'un problème général à un problème particulier, et inversement.

(d) Passer de l'étude de u_n à celle de $u_{n+1}-u_n$, et inversement. Par exemple, dans le cas de la suite $u_{n+1} = u_n\,(u_n+n)/(n+1)$, avec $u_1=2$, alors $u_{n+1}-u_n = u_n(u_n-1)/(n+1)\geq 2/(n+1)$ dès que $n\geq 1$, donc $u_n\geq 2/n+2/(n-1)+…+2/2+2$.

(e) Passer de l'étude de u_n à celle de u_{n+1}/u_n et inversement (utile si $|u_{n+1}/u_n|\leq k<1$).

(4) *Faire «n=∞»*

Dans l'expression de u_n, on remplace certains termes □(n) par leur limite quand n□∞ (si on la connaît sans ambiguïté : attention aux $(a_n)^n$, par exemple) pour deviner le comportement de u_n. Il faut alors rendre précis le raisonnement, et dire «si n est grand, $\phi(n)$ vaut presque m», qu'on précise en : si $n\geq N_\varepsilon$, $m-\varepsilon\leq\phi(n)\leq m+\varepsilon$; on peut alors faire des encadrements (dépendant de ε) de u_n pour $n\geq N_\varepsilon$.

III. Ingrédients d'une stratégie de preuve

Ecrire d'abord un plan de démonstration, avec l'emboîtement tactiques-techniques suggéré par la stratégie de recherche. Un tel plan va comporter en général des tactiques typiques, successives ou imbriquées, et comportant plusieurs techniques, dans la mesure où il va apparaître dans la résolution des *sous-buts* (suites auxiliaires, majorations préalables, etc).

(1) *Si on a deviné la limite m, montrer par des majorations que u_n- m tend vers 0.*

Il s'agit en général de majorer $|u_n\text{-}m|$ par une suite classique tendant vers 0, le plus souvent du type $C/n^{\square}$ avec $\square>0$. Cela peut assez souvent se montrer par une *récurrence paramétrée* : on note la propriété $|u_n\text{-}m|\leq C/n^{\square}$ par $H_n(C, \square)$, et on cherche C et $\square$ pour que l'implication de récurrence $H_n(C, \square)$ $\square$ $H_{n+1}(C, \square)$ soit vraie à partir d'un certain rang N_0 ; il faut ensuite trouver un rang $n_0\geq N_0$ tel que $H_{n_0}(C, \square)$ soit vraie. Il est souvent utile de poser $v_n=u_n\text{-}m$.

Exemple : si $u_0=1$ et $u_{n+1}=1+[(n+2)/2(n+1)]u_n$, on devine facilement que la limite éventuelle est 2 ; en posant $v_n=u_n\text{-}2$, on cherche à majorer $|v_n|$ par C/n [voir la section II.2].

(2) *Pour montrer une divergence.*

(a) Montrer que la suite est non majorée ou non minorée. Plusieurs possibilités :

- minorer u_n par une suite non majorée ; exemple : $u_{n+1}=nu_n^3$ avec $u_1\geq 1$, on montre par récurrence que $u_n\geq 1$, puis $u_n\geq n\text{-}1$;
- par l'absurde : si $u_n=n^{1/u_{n-1}}$, on suppose $u_n\leq M$ avec $M\geq 1$, et on voit qu'on aurait $n\leq M^M$!

(b) Exclure la seule limite possible, ou montrer qu'une limite ne peut pas exister. Exemples :

- $u_0=1$, $u_{n+1}=u_n+1/u_n$; la suite croît et si $u_n\square m$, m=m+1/m, absurde ;
- $u_0= -1/4$, $u_{n+1}=u_n\,(2–u_n)$; u_n décroît, si $u_n\square m$, m $\leq$-1/4, mais on a m=0 ou m=1 !
- $u_0=2$, $u_{n+1}=3u_n–2$; si f (x)=3x–2, la seule limite possible m=1 vérifie f '(m)=3, donc est répulsive ; or $u_n=1$ à partir de n_0 implique $u_0=1$!

(c) Trouver une sous-suite qui diverge, ou deux sous-suites qui ne peuvent avoir la même limite. Exemples :

- $u_0=0$, $u_{n+1}=3/(1+2u_n^2)$: $u_{2n}\leq 1/2$ et $u_{2n+1}\geq 2$;
- $u_n=n/[n+2+(-1)^n(n+\sin n)]$: $u_{2n}\square 1/2$ et $u_{2n+1}\square +\infty$.

(d) Nier le critère de Cauchy. En général il faut minorer $|u_{n+p}\text{-}u_n|$ par un nombre strictement positif fixe, pour p convenable éventuellement dépendant de n. Par exemple, pour $u_n=1+1/2+1/3+\ldots+1/n$, $u_{n+p}\text{-}u_n\geq p/(n+p)\geq 3/4$ pour $p\geq 3n$.

(3) *Prouver la convergence sans s'occuper de la limite*

(a) Prouver la monotonie de u_n (calcul et/ou récurrence). Pour les suites $u_{n+1}=f(u_n)$, utiliser la monotonie de f ou le signe de f(x)-x sur un intervalle invariant.

(b) Majorer ou minorer u_n (calcul et/ou récurrence). Dans le cas des suites récurrentes, pour trouver un majorant C on se laisse guider par le dessin, ou on choisit C pour que la preuve de $(u_n \leq C) \square (u_{n+1} \leq C)$ marche, au moins pour n assez grand (récurrence paramétrée).

(c) Etudier séparément u_{2n} et u_{2n+1} ; c'est une méthode bien adaptée aux suites récurrentes $u_{n+1}=f(u_n)$ avec f décroissante. Exemple : $u_0=0$, $u_{n+1}=e^{-u_n}$: u_{2n} et u_{2n+1} sont adjacentes.

(d) Utiliser le critère de Cauchy. C'est souvent en désespoir de cause. Deux exemples importants quand même :

- somme de série $u_n=v_1+v_2+\ldots+v_n$, avec v_n très petit pour n grand ;
- $u_{n+1}=f(u_n)$, avec $|f'|\leq K<1$: $|u_{n+p}-u_n|\leq[K^n/(1-K)]|u_1-u_0|$.

(e) Montrer que u_{n+1}/u_n a une limite $\square$: si $|\square|<1$, $u_n \square 0$.

(f) Utiliser la *série* de terme général $u_{n+1}-u_n$, en montrant par des encadrements qu'elle converge ; exemple : $u_n=1+1/2+1/3+\ldots+1/n-\ln n$.

(g) Encadrer u_n entre deux suites convergentes. En particulier, dans le cas $u_{n+1}= f_n(u_n)$, comparer u_n aux points fixes x_n des f_n.

(4) *Identifier la limite*

(a) Si $u_n=f(n)$, f connue ayant une limite en $+\infty$, alors $\lim u_n=\lim_{x \square +\infty} f(x)$.

[…]

(c) Si $u_{n+1}=f(u_n)$, f continue sur [a,b], et si u_n converge vers $m \square [a,b]$, on a $f(m)=m$; si on peut éliminer tous les points fixes (par exemple les points répulsifs) sauf un, on peut conclure.

(d) Plus généralement, si on peut éliminer tous les candidats à être la limite, sauf un. Exemple : si u_n est la racine positive de $x^n+x^{n-1}+x^2-x-1=0$, alors $0<u_n<1$, u_n est croissante ; si t<1 on peut montrer que t ne peut être limite, donc la limite est 1.

(5) *Tactique « □ – N avec encadrement »*

Cette tactique est souvent utile pour les suites $u_{n+1}= f_n(u_n)$ et pour les suites à la marge de la classification. Il s'agit d'encadrer u_n, pour $n\geq N(\square)$, par deux suites dépendant de □ et plus faciles à étudier, en s'appuyant sur ce qu'on a deviné dans la tactique de recherche d'hypothèses «faire n = +∞». Exemples :

- si $u_n \square m$, que fait $v_n=(u_1+u_2+u_3+\ldots+ u_n)/n$? Si $n\geq N(\square)$ $m-\square\leq u_n\leq m+\square$, donc $s_n\leq v_n\leq t_n$, où $s_n=[u_1+u_2+\ldots+u_{N(\square)}+(n-N(\square))(m-\square)]/n$, et t_n est analogue ; les limites de s_n et t_n sont faciles, donc, si n est grand, on a $m-2\square\leq s_n\leq v_n\leq t_n\leq m+2\square$ …
- si $u_1=1$, $u_{n+1}=(1/n+u_n)^{1/2}$, pour $n\geq N$ on a $0<1/n<\square$; on pose $v_N=w_N=u_N$, et pour n>N $v_{n+1}=(\square+v_n)^{1/2}$ et $w_{n+1}=w_n^{1/2}$; alors $w_n\leq u_n\leq v_n$. Mais $\lim w_n=1$ et $\lim v_n=[1+(1+4\square)^{1/2}]/2$, donc on a $1-\square\leq u_n\leq[1+(1+4\square)^{1/2}]/2+\square\leq 1+2\square$.

(6) *Partager une somme* $\sum_{0\leq p\leq n} v_{n,p}$ *en deux termes*

On sommera de 0 à q d'une part et de q+1 à n de l'autre. Dans certains cas q sera fixé assez grand pour que l'un des morceaux soit inférieur à □/2, puis n tendra vers l'infini dans le deuxième morceau (voir le premier exemple de (5), et la suite $(1+x/n)^n - \sum_{0\leq p\leq n} x^p/p!$). Dans d'autre cas il faudra prendre q variable avec n par exemple q=[n/2] ou $q=[n-n^{1/2}]$ ou…

2. *Utilisation de la méthode pour étudier la suite :* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = 1 + [(n+2)/2(n+1)]u_n$

Après cette présentation de la méthode, nous allons illustrer sa mise en œuvre pas à pas sur une suite non triviale, en notant les tâches de la méthode utiles à accomplir.

I. La stratégie de classement

(2) On peut classer la suite dans deux catégories :

∗ suite *linéaire à un terme*, à coefficients variables; on peut donc espérer trouver une forme explicite pour le terme général de la suite, mais qui risque d'être compliquée ; une variante plus simple sera vue plus loin avec la tactique notée $\boxed{F}$.

∗ *suite du type* $u_{n+1}= f_n(u_n)$, avec $f_n(x)=1+[(n+2)/2(n+1)]x$; on peut donc penser que la tactique "□-N avec encadrement" pourra être essayée : tactique nommée ici $\boxed{A}$.

II. La stratégie de recherche

(1) Faire des tests préliminaires

(b) En tant que suite de la forme $u_{n+1}=f_n(u_n)$, on regarde s'il y a un *encadrement* de la partie de l'expression qui dépend de n ; on constate que (n+2)/2(n+1)□1/2 quand n□+∞, donc qu'on a l'encadrement 1/2-□≤[(n+2)/2(n+1)]≤1/2+□ pour n assez grand, ce qui peut fournir, compte tenu de la croissance des fonctions f_n, la tactique $\boxed{A}$ de preuve en «□-N avec encadrement».

(c) *Que suggère un dessin* ?

Dans la figure 1, on voit que la monotonie n'est pas claire au delà de n=3. Il n'est même pas clair que la suite converge vers 2, point fixe de la fonction $f(x)=1+(1/2)x$, limite des $f_n(x)$, et le dessin ne dit rien de sa monotonie ultérieure. Par contre, il semble raisonnable d'essayer la tactique $\boxed{B}$: encadrer u_n par deux suites convergentes, en particulier en la comparant aux points fixes x_n des fonctions f_n.

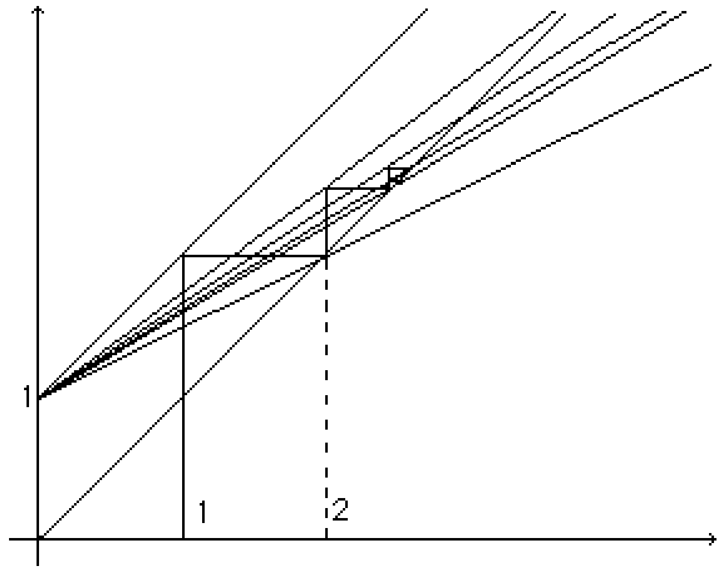


Figure 1. Les graphes des f_n et l'itération

1. ***(d)* Calcul de quelques valeurs**

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n =	1	2	2,5	2,6666.	2,6666.	2,6	2,516..	2,4380	2,3714	2,3174	2,2746

On peut faire l'hypothèse que la suite est décroissante à partir de n=4, est minorée par 1 et converge vers 2. D'où deux tactiques de preuve possibles : la tactique $\boxed{C}$: suite décroissante minorée, on identifie la limite ensuite ; et la tactique $\boxed{D}$: majorer $|u_n-2|$ par une suite du type C/n□.

(f) *Calculer littéralement*

On trouve successivement pour les valeurs de u_n : 1, 2=1+1, 1+3/2=1+1/2+1, 2+2/3=1+ 1/3+1/3+1 …

On peut soupçonner que les inverses des coefficients binomiaux ont à voir avec le problème … On trouve effectivement l'égalité u_4=1+1/4+1/6+1/4+1, puis u_5=1+1/5+1/10+1/10+1/5+1… D'où une tactique $\boxed{E}$: comparer u_n à la suite $v_n=1+1/C_n^1+1/C_n^2+\cdots+1/C_n^{n-1}+1$, en espérant que ce soient les mêmes. On aura ainsi fait un grand *changement de point de vue* sur la suite de départ !

(3) Changer de point de vue

(a) *Changer la formule*

(∗) On remarque qu'il y a 1/(n+1) en coefficient devant u_n, et que si on divise par n+2 on trouve 1/(n+2) en coefficient devant u_{n+1}. D'où l'idée de poser $v_n=[1/(n+1)]u_n$, et on obtient la nouvelle suite récurrente linéaire $v_{n+1}=1/(n+2)+(1/2)v_n$, $v_0=1$. Le coefficient constant 1/2 et la linéarité nous incitent à essayer une tactique $\boxed{F}$: calculer le terme général de la suite v_n, en déduire une formule pour u_n et chercher directement sa limite sur l'expression obtenue ; on peut prévoir que v_n s'écrira $\sum_{0\leq p\leq n} t_{p,n}$, qu'il faudra couper en deux.

(∗) Autre manière de changer la formule : faire disparaître le 1 en posant $v_n=u_n-1$. On obtient : $v_0=1$, $v_{n+1}=[(n+2)/2(n+1)](v_n+1)$. En posant $c_{n+1} = (n+2)/2(n+1)$, et $c_0=v_0$ par convention, on trouve *en calculant formellement* les termes successifs à partir de la relation $v_{n+1}=c_{n+1}(v_n + 1)$: $v_0=c_0$, $v_1= c_1c_0+c_1$, $v_2=c_2c_1c_0+c_2c_1+c_2$, $v_3=c_3c_2c_1c_0+c_3c_2c_1+c_3c_2+ c_3$, etc. Comme c_n converge vers 1/2 quand n tend vers l'infini, on peut penser à une tactique $\boxed{G}$: étant donnée une suite $(c_n)_{n\geq 0}$ de nombres de [-1,1] tendant vers un nombre a de]-1,1[, déterminer la limite de la suite définie par $v_n=c_n+c_nc_{n-1}+c_nc_{n-1}c_{n-2} +\ldots+c_nc_{n1}\ldots c_2c_1+ c_nc_{n-1}\ldots c_1c_0$. Grand changement de point de vue !

(b) *Passage au graphique*

Nous avons déjà fait ce changement de point de vue, suggéré par la tactique $\boxed{B}$.

(c) *Passer du problème particulier à un problème général*

Ici, chaque f_n a un point fixe x_n unique, et chaque f_n est, pour $n\geq 1$, 3/4-lipschitzienne. Peut-être y a-t-il un énoncé général de convergence sous ce type de conditions ? D'où une tactique $\boxed{H}$: chercher un énoncé général de convergence pour des suites du type $u_{n+1}= f_n(u_n)$, chaque f_n étant k-lipschitzienne, k<1, et ayant un point fixe unique x_n.

(4) Faire « $n = \infty$ »

Ici, le facteur (n+2)/2(n+1)□1/2 quand n□+∞, donc on peut penser à la tactique déjà repérée « □-N avec encadrement » : tactique $\boxed{A}$.

III. Les stratégies de preuve

Elles correspondent à chacune des tactiques repérées. Nous laissons au lecteur le soin de mettre en œuvre lui-même les 8 solutions possibles appelées par chacune des 8 tactiques : il constatera que chacune marche, avec des techniques plus ou moins faciles, certaines pouvant être trop difficiles pour les étudiants (certaines décompositions d'une somme en deux morceaux).

Commentaire : cet exemple non trivial montre surtout l'efficacité de la méthode pour étudier des suites pas trop standard du niveau licence : elle donne assez facilement accès à plusieurs pistes de solutions, même s'il subsiste des difficultés dans certaines d'entre elles. Par ailleurs, cet exemple est particulièrement adapté pour faire travailler des étudiants en petit groupes (Robert 2008 ; Robert et Tenaud 1989). Les tactiques $\boxed{A}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$, $\boxed{F}$ devraient apparaître spontanément dans plusieurs groupes d'étudiants, du moins si certains exemples plus ou moins analogues ont été traités en exercices.

III. ENSEIGNER CONCRÈTEMENT UNE METHODE

Nous nous appuyons sur l'exemple des suites, en présentant la trame de son enseignement tel qu'il a eu lieu plusieurs années.

Après l'introduction de la convergence des suites, par exemple par l'ingénierie de (Robert 1983), l'enseignant apporte un vocabulaire heuristique en commentant ce qu'il fait lors des preuves des énoncés généraux sur les suites (« on va faire de la méthode, on va classer, chercher à faire des hypothèses, chercher des pistes de démonstration… »...), bref un discours « *méta* », qui commence à « *donner des mots* » pour *dire* l'activité mathématique.

L'enseignant traite ensuite, en cours, une dizaine de suites avec des comportements divers, en utilisant explicitement la méthode, avec son vocabulaire déjà précis (techniques, tactiques, stratégies, changements de point de vue,…). Il nomme, explique et illustre certaines tactiques délicates et certaines manières d'explorer un problème de comportement de suite.

Un renforcement en travaux dirigés a alors lieu, traitant un à deux exemples de chaque type de comportement et de tactique ou stratégie. L'enseignant insiste pour *faire produire des commentaires* méta *par les étudiants*, sur les classements, les choix de stratégies et de tactiques.

C'est après ce processus qu'on expose *explicitement* - en cours magistral - *le contenu de la méthode*, en s'appuyant sur les exemples traités, et de nouveaux, pour montrer comment l'utiliser. Des commentaires *méta* plus généraux – épistémologiques et didactiques – sont apportés : pourquoi des méthodes, qu'est-ce que « résoudre un problème de mathématiques », quels grands principes de recherche (classer, simplifier, ramener à des situations connues, contrôler). C'est alors seulement qu'on distribue aux étudiants le texte écrit de la méthode. Une difficulté principale sera d'empêcher ensuite les étudiants de croire à une utilisation algorithmique de la méthode.

En TD, les étudiants travaillent alors par petits groupes (3 ou 4), sur une ou au maximum deux suites déjà assez élaborées, avec le contrat de mettre en évidence la ou les tactiques utilisées et comment ils les ont trouvées méthodiquement. L'organisation en petits groupes vise à ce que se développent échanges et discussions. On a ainsi utilisé la suite $u_1=1/2$, $u_{n+1}=[2n/(n+1)](u_n)^{1/2}$, en demandant aux groupes, dans un compte-rendu écrit, de noter les tactiques essayées, abandonnées, les raisons de ces choix, ce qui a mené au but… (On peut aussi plus tard utiliser l'exemple du II).

Quelle évaluation ? C'est une question difficile, comme pour tous les « projets longs » (Robert 1992). En particulier il est impossible de les évaluer comme on peut le faire de situations didactiques bien délimitées. Dans le cas présenté ici, d'un enseignement annuel où on a utilisé de nombreuses autres méthodes que celle sur les suites, en tenant régulièrement un important discours « *méta* » (en cours comme en travaux dirigés ou en atelier), il est très difficile d'avoir une évaluation spécialement ciblée sur cette méthode. Nous avons cependant deux indicateurs spécifiques au domaine des suites.

D'abord, nous avons donné dans un examen partiel l'énoncé suivant : « u_0 étant donné, on définit la suite u_n par : $u_{n+1}=u_n^2+\ln u_n$ si $u_n>0$, $u_{n+1}= -1989$ si $u_n\leq 0$. Quelles conjectures faites-vous sur cette suite ? ». Cet énoncé a eu un bon taux de succès.

Puis nous avons fait travailler en petits groupes les étudiants sur la suite présentée plus haut : $u_1=1/2$, $u_{n+1}=[2n/(n+1)](u_n)^{1/2}$. Chaque groupe a réussi à identifier au moins une tactique de solution, et plusieurs différentes sont apparues dans les ateliers.

Nous avons également un indice global : le taux de succès au diplôme du DEUG (en 2 ou 3 ans) a été de 59 % pour nos étudiants - mis en DEUG seconde année dans un enseignement « *standard* » -contre 48 % pour les autres étudiants, issus d'une section « *ordinaire* » de première année.

Certes, cet indice est d'interprétation délicate, car il dépend d'autres facteurs que le pur enseignement de méthodes en mathématiques : utilisation du discours « méta » toute la première année, rôle des autres disciplines, diversité des enseignants…

IV. CONCLUSION : QUESTIONS DE RECHERCHES

À l'issue de la présentation d'un exemple emblématique d'une méthode de résolution de problème effectivement utilisée, on peut revenir sur quelques questions, théoriques et pragmatiques. Tout d'abord, est-il utile et même nécessaire d'élaborer et d'enseigner l'utilisation de tels outils aux étudiants ? Le traitement de "suffisamment" d'exemples pourrait-il leur permettre d'élaborer une organisation de leur activité de résolution de problème (pas seulement aux très bons étudiants) ? Les exemples que les étudiants peuvent aborder par eux-mêmes seront-ils "assez riches" pour mettre en fonctionnement les concepts du domaine, les rendre opérationnels ? L'apport d'une méthode est son caractère organisé, systématique et la référence qu'offre sa forme rédigée. Ensuite, comment élaborer pratiquement une méthode ? ou comment s'approprier - en l'adaptant " à sa main " - une méthode existante ? L'enseignant peut-il se fonder sur sa propre activité de résolution, en visant à expliciter ce qu'il met en oeuvre dans des problèmes non triviaux (mais accessibles aux étudiants) ? Quel peut en être le coût et quelle valorisation ? Les conditions institutionnelles souhaitables ou nécessaires sont-elles rédhibitoires ? Reprendre la recherche sur l'enseignement de méthodes et sur les moyens d'évaluation de leur impact sur les étudiants – sur la résolution de problèmes et sur la conceptualisation - nous paraît donc nécessaire, malgré les difficultés d'évaluation d'ingénieries longues.

Enfin, il reste le problème difficile de l'apprentissage de méthodes par les enseignants et des manières dont ils peuvent les intégrer dans l'enseignement.

REFERENCES

Artigue M. (1989) Une recherche d'ingénierie sur l'enseignement des équations différentielles en DEUG première année. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. Grenoble : IMAG.

Delozanne E. (1994) Un projet pluridisciplinaire : ELISE un logiciel pour donner des leçons de méthode, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14 (1/2), 211–250.

Dorier J.-L. (ed.) (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question (panorama de la recherche didactique sur ce thème).* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5–31.

Guyou C. (1946) *Algèbre et analyse*. Vuibert : Paris.

Larson L. C. (1983) *Problem-Solving Through Problems.* Springer Verlag.

Polya G. (1965) *Comment poser et résoudre un problème.* Paris : Dunod.

Robert A. (1983) L'enseignement de la convergence des suites numériques en Deug. *Bulletin de l'APMEP* 340, 431–449.

Robert A. (1992) Projets longs et ingénieries pour l'enseignement universitaire : questions de problématique et de méthodologie. Un exemple : un enseignement annuel de licence en formation continue. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(2/3), 181–220.

Robert A. (2008) Laisser chercher les élèves : les faire travailler en petits groupes ? *L'ouvert* 117, 31–46.

Robert A., Robinet J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(1), 31–70.

Robert A., Rogalski J. (1988) Teaching and learning methods for problem-solving : some theoretical and psychological issues. *Proceedings of the 12 International Meeting for PME* (pp. 528–535). Veszprem, Hungary.

Robert A., Rogalski J., Samurcay R. (1987) *Enseigner des méthodes.* Cahiers de Didactique des Mathématiques 38, Paris : IREM.

Robert A., Tenaud I. (1989) Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(1), 31–70.

Rogalski J., Samurçay R., Hoc J.-M. (1988) L'apprentissage de méthodes de programmation comme méthodes de résolution de problèmes. *Le Travail Humain* 51(4), 309–320.

Rogalski M. (1987) *Comment chercher une primitive ?* Publication de l'UFR de mathématiques de l'USTL, 22 pages.

Rogalski M. (1988) *Comment étudier la convergence d'une suite réelle? Un exemple de méthode.* Publication de l'UFR de mathématique de l'USTL, 8 pages.

Rogalski M. (1989) *L'étude qualitative des équations différentielles.* Publication de l'UFR de mathématiques de l'USTL, 43 pages.

Rogalski M. (1990a) Enseigner des méthodes en mathématiques. Commission Inter-IREM Université *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* (pp. 65-79). Lyon, Paris : IREM Université Paris-Diderot.

Rogalski M. (1990b) Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? Un exemple de méthode. Commission Inter-IREM Université *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année* (pp. 197-204). Lyon, Paris : IREM Université Paris-Diderot.

Rogalski M. (1992) *Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année.* Cahiers DIDIREM 11. Paris : IREM Université Paris-Diderot.

Rogalski M. (1994) Les concepts de l'EIAO dépendent-ils du domaine ? L'exemple de l'enseignement de méthodes en analyse. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 14(1/2), 43–66.

Rogalski M. (1995a) *De quelques méthodes en arithmétique élémentaire.* Publication de l'UFR de mathématiques de l'USTL.

Rogalski M. (1995b) *Des méthodes pour la recherche de lieux géométriques en géométrie cartésienne*, 9 pages.Draft.

Rogalski M. (1999) *Quelques méthodes pour établir des inégalités.* Notes manuscrites pour les étudiants de CAPES. Université de Lille 1.

Schoenfeld A. (1978) Presenting a strategy for indefinite integration. *American Math. Monthly*, 673–678.

Schoenfeld A. (1980) Teaching problem-solving skills. *American Math. Monthly*, 794–805.

Schoenfeld A. (1985) *Mathematical Problem Solving.* Academic Press.

Schoenfeld A. (2007) Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. *ZDM: the international journal on mathematics education* 39(5), 537-551.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

UNE COMMUNAUTÉ DE PRATIQUE CÉGEP-UNIVERSITÉ : NOTION DE SITUATION SIGNIFIANTE

Hassane SQUALLI[*] – Alain BOMBARDIER[**] – Adolphe ADIHOU[***]– Audrey. B.-RAYMOND[****]

Résumé - Ce travail s'inscrit dans un projet de collaboration cégep-université visant à assurer un meilleur arrimage des dispositifs de formation mathématique au cégep et à l'université. Ce projet vise la construction d'une communauté de pratique formée de didacticiens des mathématiques et d'enseignants de mathématiques au cégep et à l'université autour de la notion de situations d'apprentissage signifiantes. Des recherches-actions portant sur la mise à l'épreuve de telles situations ont été réalisées. Dans ce texte, nous présentons quelques résultats des travaux ayant mené à l'émergence de cette communauté de pratique.

Mots-clefs : situation signifiante, mathématiques, postsecondaire, communauté de pratique, transition secondaire-université

Abstract - This work is part of a collaborative project between college and university to ensure better harmonization in mathematics' teaching. The aim of this project is the construction of a community of practice composed of mathematics educators, and college and university mathematics teachers studying meaningful learning situations. To test such situations, different actions-researches were conducted. In this paper, we present a few results of the work that led to the emergence of this community of practice.

Keywords: meaningful learning situation, mathematics, post-secondary, community of practice, secondary-university transition

I. INTRODUCTION

Dans le système éducatif québécois, le cégep (collège d'enseignement général et professionnel) est une institution de formation postsecondaire et préuniversitaire (12^{e} et 13^{e} année d'étude pour la filière de l'enseignement général et 12^{e}, 13^{e} et 14^{e} année d'étude pour la filière de l'enseignement professionnel). Ce texte présente quelques résultats d'un projet de recherche-développement visant à assurer un meilleur arrimage des dispositifs de formation mathématique au cégep et à l'université.

[*] Université de Sherbrooke, Québec – Canada – Hassane.Squalli@USherbrooke.ca
[**] Cégep de Sherbrooke, Québec –Canada – Alain.Bombardier@cegepsherbrooke.qc.ca
[***] Université de Sherbrooke, Québec – Canada – Adolphe.Adihou@USherbrooke.ca
[****] Université de Sherbrooke, Québec – Canada – Audrey.B.Raymond@USherbrooke.ca

Squalli H., P., Bombardier A., Adihou A., B-Raymond A. (2015) Une communauté de pratique Cégep-Université autour de la notion de situation signifiante. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT7, pp. 701-710.

II. ÉLÉMENTS DE PROBLÉMATIQUE

Le cégep marque une étape importante dans le parcours scolaire des élèves qui désirent poursuivre leurs études à l'université. Durant leur court passage au cégep, ces étudiants vivent une double transition : celle du secondaire au cégep et celle du cégep à l'université. Ces transitions s'accompagnent d'un changement d'institutions d'enseignement des mathématiques, chacune ayant sa propre culture qui véhicule des normes, des valeurs, des pratiques sociales de références spécifiques, des manières de voir, de dire et de faire l'enseignement des mathématiques. Chacune de ces institutions tente de formater l'étudiant à ses propres formes culturelles (Squalli, 2014). Cela pose le problème de l'arrimage des cultures de formation mathématique dans ces trois institutions.

Le problème de la transition entre les mathématiques du secondaire et celles du postsecondaire était à l'ordre du jour d'un groupe de travail du colloque *Espace Mathématique Francophone 2006*. Ce groupe note dans son rapport les éléments suivants (Bloch, Kientega et Tanguay, 2006) :

- un constat général de difficultés des étudiants avec le formalisme;
- l'impuissance de l'institution et des enseignants à donner aux étudiants les outils pour surmonter ces difficultés;
- la nécessité de prévoir, au secondaire, des situations qui développent la rationalité mathématique et vont donc être préparatoires au raisonnement dans des registres plus formels, bien que ce formalisme ne fasse pas l'objet du travail spécifique au secondaire.

De l'ensemble des discussions s'est dégagé un consensus à l'effet que :

- l'écriture formelle n'est pas en elle-même porteuse de la signification des lois qu'elle énonce et des objets qu'elle met en jeu;
- les connaissances logico-déductives doivent être mises en œuvre en articulation avec la construction des concepts mathématiques sur lesquels elles permettent d'opérer;
- l'enseignement collégial et supérieur doit remettre en question la disqualification systématique d'une construction des concepts qui ne soit pas totalement contrôlée par le formel, et doit notamment accepter le recours à l'heuristique et à l'empirisme.
- Parmi les pistes de solution envisagées par ces chercheurs, on peut citer :
- ne pas se limiter dans l'enseignement de niveau secondaire à des exercices d'ostension des objets, mais voir à implanter des situations travaillant la rationalité mathématique;
- considérer au niveau de l'université des pratiques intégrant le débat scientifique, les situations de recherche, les situations sur la rationalité mathématique, le travail sur les énoncés ouverts;

III. OBJECTIFS

Dans ce projet, nous avons retenu les objectifs suivants :

1. Construire une communauté de pratique, formée d'enseignants de mathématiques du Cégep de Sherbrooke et de l'Université de Sherbrooke et d'enseignants de didactique des mathématiques intervenant dans la formation des enseignants de mathématiques

au secondaire, visant un meilleur arrimage entre la formation mathématique au cégep et à l'université.
2. Concevoir et mettre à l'épreuve des approches signifiantes d'enseignement des mathématiques.
3. Produire des ressources pédagogiques en vue de leur mutualisation.

IV. LA NOTION DE COMMUNAUTÉ DE PRATIQUE

Rappelons les caractéristiques essentielles d'une communauté de pratique. Selon Wenger (1998), une communauté de pratique est un groupe de professionnels dont les membres s'engagent régulièrement dans des activités de partage de connaissances et d'apprentissage à partir d'intérêts communs. Dans notre projet, ce groupe est formé d'enseignants de mathématiques du cégep et de l'université, ainsi que des didacticiens de mathématiques enseignant des cours de didactique des mathématiques.

Ces enseignants vont interagir, s'influencer mutuellement pour construire une compréhension commune d'une problématique en lien avec la formation mathématique et le problème des transitions. Ils devront participer de manière active à des prises de décisions collectives avec définition d'objectifs communs.

L'appartenance à une communauté de pratique est le résultat d'un engagement des individus dans des actions négociées les uns avec les autres. Cet engagement mutuel est basé sur la complémentarité des compétences et sur la capacité des individus à communiquer efficacement leurs connaissances avec celles des autres. Il suppose aussi un rapport d'entraide entre les participants, nécessaire au partage de connaissances sur la pratique.

Une autre caractéristique d'une communauté de pratique est l'entreprise commune. Elle est le résultat d'un processus collectif permanent de négociation qui reflète la complexité de la dynamique de l'engagement mutuel. La négociation des actions communes crée des relations de responsabilité mutuelle entre les personnes impliquées.

Enfin, la création d'un répertoire partagé est une autre caractéristique essentielle d'une communauté de pratique. Au fil du temps, la communauté crée des ressources qui forment le répertoire partagé. Elle a un capital initial qu'il convient de gérer pour élaborer progressivement une connaissance communautaire. Cette connaissance ne se réduit pas à la juxtaposition des connaissances individuelles; il y a mutualisation, innovation et production de nouvelles connaissances en utilisant les savoirs et compétences de chacun.

V. DÉMARCHE DE TRAVAIL SUIVIE

1. *Moments de travail*

La démarche préconisée pour la construction de la communauté de pratique mixte cégep-université s'appuie sur une interaction féconde entre des moments de co-formation, des moments de mise en pratique et des moments de retour réflexif sur ces mises en pratique. Plus précisément, en chacune des deux premières années du projet (2011-2013, 2013-2014), le travail de la communauté s'est déroulé selon les six moments suivants : 1) Identification d'une compréhension commune de la notion de situation signifiante; 2) Co-formation pour la construction d'une compréhension commune de la problématique et l'identification de principes didactiques qui permettront de guider la planification des situations d'apprentissage (SA) qui seront conçues et expérimentées; 3) Conception de SA opérationnalisant ces principes didactiques; 4) Expérimentation des SA; 5) Retour réflexif sur ces expérimentations; 6) Production d'un document rendant compte des situations planifiées et expérimentées, du rôle des enseignants et des réflexions issues du travail de collaboration.

Pour la construction d’une compréhension commune de la notion de situation signifiante, une démarche en deux temps a été suivie. Dans un premier temps, chacun des participants a identifié dans son expérience une situation d’enseignement qu’il considère comme signifiante et a explicité, selon son point de vue, ce qui rend cette situation signifiante. Dans un deuxième temps, les didacticiens ont présenté au groupe une analyse de la documentation scientifique et professionnelle à ce sujet.

La liste suivante présente une synthèse des caractéristiques retenues par la communauté de la signifiance d’une situation. Cette liste a servi d’un cadre pour la planification de situations signifiante et l’analyse de leur expérimentation en classe.

- C1. Une situation qui provoque l’intérêt chez les étudiants
- C2. Une situation qui s’inspire de «pratiques mathématiciennes».
- C3. Une situation qui offre une validation interne.
- C4. Une situation qui provoque l’engagement cognitif des étudiants dans les tâches proposées.
- C5. Une situation qui donne une marge de manœuvre aux étudiants (questions ouvertes, variabilité des solutions).
- C6. Une situation présentant un défi aux élèves, mais qui soit réalisable dans un temps raisonnable.

2. *Rôles des différents acteurs*

Le groupe de travail est composé d’une équipe d’enseignants de mathématiques du cégep de Sherbrooke principalement (7 l’an 1 et 5 l’an 2), de 2 didacticiens des mathématiques de l’université de Sherbrooke et de 2 professionnelles de recherche.

Tous les enseignants ont contribué aux travaux des 5 premières phases de travail. Des moments forts de leur travail consistaient en l’élaboration de situations d’apprentissages potentiellement signifiantes, leur mise à l’épreuve dans leur propre classe et le retour réflexif au groupe de travail. Une enseignante a été dégagée par le projet pour soutenir les enseignants «expérimentateurs» dans la conception et l’expérimentation en classe d’une situation d’apprentissage «potentiellement signifiante». Ces situations ont été aussi discutées dans le groupe de travail pour que les participants fassent des suggestions aux concepteurs tout particulièrement pour augmenter le potentiel de signifiance de la situation d’apprentissage.

Un professionnel de recherche a réalisé des entrevues pré et post-expérimentation en classe. Il a filmé les séances de classe. Les enregistrements vidéo ont été remis aux enseignants expérimentateurs pour préparer leur retour réflexif en grand groupe. Lors de ces rencontres, les enseignants pouvaient présenter aux membres de la communauté certaines séquences vidéo pour appuyer leur analyse réflexive où susciter une discussion collective sur un phénomène de classe. Les entrevues avec les enseignants ainsi que les échanges lors du retour réflexif ont été enregistrés sur support audio et transcrits par écrit.

Les données transcrites ainsi que les ressources produites par les enseignants ont été analysées par une équipe restreinte formée des deux didacticiens, du responsable de l’équipe des enseignants du Cégep et coresponsable du projet, d’une professionnelle de recherche. L’analyse visait essentiellement à soutenir le développement des ressources (situations d’apprentissages, des connaissances sur ces ressources développées par les enseignants expérimentateurs) en vue de leur mutualisation et le développement de connaissances, à destination des enseignants, en lien avec la signifiance de situations d'apprentissage. Une synthèse de ces analyses est diffusée sur l'espace numérique de la communauté. Elle est présentée en deux rubriques : Témoignage de l'enseignant et Synthèse des discussions. La première propose la transcription écrite fidèle de réflexions de l'enseignant expérimentateur en lien avec les caractéristiques de la signifiance de situations retenues par la communauté. La seconde propose une synthèse des analyses produites par l'équipe restreinte ainsi que des suggestions en vue d'améliorer certains aspects de la ressource.

VI. QUELQUES RÉSULTATS DES EXPÉRIMENTATIONS ET DU RETOUR RÉFLEXIF

1. *Aperçu général*

Le tableau suivant présente quelques situations expérimentées en classe.

Description de la tâche principale	**cours**	**Programme**
Voir l'avenir ! Utilisation des chaînes de Markov pour trouver l'état stable d'un marché fermé à trois produits.	Algèbre linéaire	Sciences administratives
Caractérologie Utilisation des 3 traits de personnalité (activité, émotivité et retentissement des représentations) issus de la caractérologie pour définir un espace tridimensionnel.	Algèbre linéaire	Sciences administratives
Apprentissage collaboratif Modélisation du volume de solides de révolution (méthode des disques) et de la longueur de courbes planes, approche coopérative.	Calcul intégral	Sciences de la nature
Les définitions Amener l'étudiant à créer une définition et provoquer une réflexion sur la définition émise.	Algèbre linéaire et géométrie vectorielle	Sciences de la nature
Correction par des pairs Mettre les étudiants dans une démarche évaluative et de confrontation des évaluations comme approche pour renforcer leur apprentissage.	Calcul différentiel et intégral II	Imagerie, BES science, BES math Cours universitaire
Synthèse des couleurs Utilisation de la synthèse additive des couleurs pour une activité de consolidation sur l'indépendance linéaire.	Algèbre linéaire	Sciences de la santé
Le poids de L'Hospital Activité utilisant le calcul différentiel pour trouver la position d'équilibre d'un poids suspendu à l'aide d'une corde et une poulie. (adapté de F. Caron (UdM) et A. Hénault et K. Pineau (ÉTS) (*projetsmathematiquests.com/upload/**Caron**-Pineau.pdf*)	Mathématiques techniques (Dérivée et intégrale)	Technique de génie mécanique
Activité de découverte des rôles des paramètres des fonctions sinusoïdales	Mathématiques techniques	Technique de laboratoire - Biotechnologie
Où est Carmen Sandiego ? À l'aide d'un jeu interactif construit en plusieurs questions, les étudiants révisent les notions vues en classe. Ainsi, ils consolident leur apprentissage avant l'évaluation.	Mathématiques discrètes	Sciences informatiques et mathématiques

Tableau 1 *- listes des situations expérimentées*

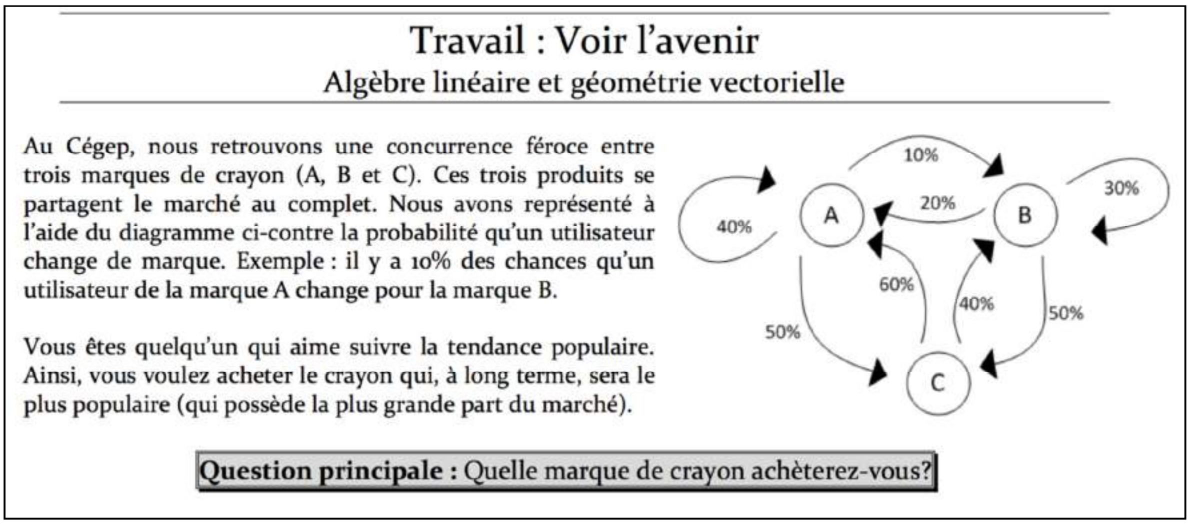
Ces situations ainsi qu'une synthèse de leur retour réflexif en groupe peuvent être consultées sur l'espace numérique de la communauté : http://projet.abombardier.profweb.ca/

Pour bien illustrer quelques résultats du travail de la communauté, nous exploiterons le cas de la situation *Voir l'avenir*.

2. *Présentation de la situation Voir l'avenir*

Cette situation a été expérimentée dans le cours Algèbre linéaire pour des étudiants du programme Sciences administratives.

Comme le montre la figure 1, l'activité présente un marché fermé des crayons disponibles au Cégep. Les probabilités que les étudiants changent de marque de crayon sont illustrées dans un graphe. L'étudiant doit répondre à la question : « *Quelle marque de crayon achèterez-vous?* » et ce, sachant qu'il veut la marque de crayon la plus populaire à long terme.


Travail : Voir l'avenir

Algèbre linéaire et géométrie vectorielle

Au Cégep, nous retrouvons une concurrence féroce entre trois marques de crayon (A, B et C). Ces trois produits se partagent le marché au complet. Nous avons représenté à l'aide du diagramme ci-contre la probabilité qu'un utilisateur change de marque. Exemple : il y a 10% des chances qu'un utilisateur de la marque A change pour la marque B.

Vous êtes quelqu'un qui aime suivre la tendance populaire. Ainsi, vous voulez acheter le crayon qui, à long terme, sera le plus populaire (qui possède la plus grande part du marché).

Question principale : Quelle marque de crayon achèterez-vous?

Figure 1- *Situation Voir l'avenir*

Pour répondre à cette question, l'étudiant doit arriver à comprendre que dans cette situation, le marché évolue vers un état stable et que cet état ne dépend pas des valeurs initiales des parts de marché. Pour amener l'étudiant à cette compréhension, le travail comporte trois parties. Dans une première partie, l'étudiant doit répondre à la question principale intuitivement. Dans la deuxième partie, à l'aide de la matrice de transition, il doit procéder de façon itérative (en utilisant le mode matrice de sa calculatrice ou Geogebra). Il doit alors conjecturer la tendance du marché à long terme étant données les conditions initiales des parts de marché. Et ensuite de refaire les mêmes calculs avec des données initiales différentes et de conjecturer la tendance du marché à long terme. Finalement, de façon formelle, il doit résoudre le système d'équations linéaires qui représente la situation recherchée.

Dans la première partie, l'enjeu clé dans le passage au registre algébrique réside dans la compréhension de la matrice de transition. Elle est définie dans le travail comme une matrice carrée 3x3 dont les colonnes représentent la part de marché d'une marque gagnée par une autre marque (éventuellement la même) selon les pourcentages figurant dans le schéma représentant la dynamique du marché. Ainsi, si les colonnes représentent dans l'ordre les parts de marché des marques A, B et C respectivement, qui sont gagnées par d'autres marques (éventuellement la même), la matrice de transition peut s'écrire :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

À un instant t, les parts de marché des trois marques peuvent être représentées par une matrice colonne. Ainsi si initialement, soit au temps t_0, les parts de marché des marques A, B et C sont 10%, 70% et 20% respectivement, au jour suivant, soit au temps t_1, le calcul suivant donne les nouvelles parts de marché :

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,6 \\ 0,1 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,7 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,4 \end{pmatrix}$$

L'application itérée de la matrice de transition aux matrices colonnes obtenues permet de générer les parts de marché à l'instant t_2, t_3, t_4, et ainsi de suite, à n'importe quel instant t_n. Si Xn désigne la matrice colonne des parts de marché à l'instant t_n, on a :

$$MX_n = X_{n+1} \text{ et } M^{n+1}X_0 = X_{n+1}$$

Dans la troisième partie, on amène l'étudiant à répondre à la question principale de façon formelle par la résolution de l'équation : $MX = X$ où X est définie comme la matrice colonne représentant les parts de marché à long terme.

3. *Quelques résultats d'expérimentation de la situation Voir l'avenir*

2. Témoignage de l'enseignant

Nous reprenons ici un extrait de la synthèse des réflexions de l'enseignant à propos de la signifiance de la situation *Voir l'avenir* qu'il a expérimentée.

L'enseignant affirme que les étudiants se sont engagés rapidement dans la tâche, à cause de la curiosité. Il explique : « Une équipe se posait des questions sur l'essence du problème, à savoir ce qui allait se passer. L'effet de surprise lié au résultat contre-intuitif du changement d'état initial aurait suscité l'intérêt des étudiants. »

Selon un sondage réalisé par l'enseignant après le cours, 77% des étudiants ont déclaré être assez ou parfaitement d'accord que les problèmes posés étaient stimulants. Certains facteurs semblent avoir participé à susciter l'intérêt des étudiants estime l'enseignant :

- La situation amène l'étudiant dès le départ à réfléchir pour résoudre le problème proposé, ce qui est différent d'une approche plus traditionnelle.
- Le contexte utilisé s'inscrit dans le profil de formation des étudiants (sciences administratives)
- L'effet de surprise lié au résultat contre-intuitif du changement d'état initial aurait suscité l'intérêt des étudiants.
- C'était important de faire une situation appliquée rapidement dans la session afin de démontrer aux étudiants que le contenu du cours puisse leur être utile, que ça puisse servir à quelque chose.

Toutefois, l'intérêt a diminué pour la partie théorique. Selon lui, les facteurs suivants ont contribué à la diminution de l'intérêt.

- Pour les étudiants, la preuve empirique était suffisamment convaincante qu'ils n'éprouvaient pas le besoin d'aller à l'infini. Une preuve en mathématique, c'est plus fort que juste intuitivement, mais les étudiants « s'en foutaient ».
- Il semble difficile de revenir à la partie théorique sans accompagner les étudiants dans le travail de modélisation.

La situation a présenté un défi aux élèves tout en étant réalisable dans un temps raisonnable. L'enseignant estime que le niveau de difficulté était assez élevé, car les étudiants sont plus habitués à appliquer quelque chose plutôt qu'à le construire. Il ajoute, «alors, même si l'activité était utilisée comme révision, ils devaient quand même construire un système d'équations, ce qui était difficile. »

4. Quelques éléments de la discussion de cette situation

Au-delà de la problématique liée à la difficulté des étudiants de voir la pertinence de recourir à la preuve formelle, cet exemple souligne que si le contexte facilite la construction de significations par les étudiants, cette signification a tendance à rester liée au contexte. La médiation de l'enseignant est alors primordiale lors des changements de registre. La représentation de la dynamique des transferts de parts de marché par un graphe (figure 1) a facilité la compréhension du phénomène étudié. Le graphe joue le rôle de modèle intermédiaire qui permet de comprendre le phénomène, mais son caractère opératoire est limité, ce qui rend nécessaire le recours à un autre modèle. L'enjeu de cette situation est alors de passer au modèle matriciel. Dans la deuxième partie du travail, d'abord, par la représentation de la dynamique du marché par la matrice de transition et des matrices colonnes représentant les parts de marché à un instant donné ainsi que la traduction du passage d'un état du marché à un autre par un calcul matriciel (l'application de la matrice de transition à une matrice colonne représentant les parts de marché). Ensuite dans la troisième partie dont l'objectif est la preuve formelle par la résolution de l'équation $MX = X$. Ces passages cruciaux sont au cœur de la compréhension et de la résolution du problème, sont présentés dans la tâche comme allant de soi, rendant transparent le processus de modélisation qui les sous-tend.

5. Quelques résultats généraux

1. Signifiance potentielle VS signifiance effective

Une analyse a priori des situations expérimentées ainsi que les discussions lors du retour réflexif montrent que toutes les situations rencontrent plusieurs caractéristiques de la signifiance retenues par la communauté.

Cependant, les expérimentations ont mis en évidence le caractère émergent de la signifiance. Bien que les situations expérimentées soient potentiellement signifiantes pour les élèves, tout n'était pas joué a priori. Un travail de l'enseignant en classe est nécessaire pour faire émerger les significations chez les élèves. L'enseignant expérimentateur de la situation *Caractérologie* l'illustre très bien. Cet enseignant exploite la théorie psychologique de la caractérologie qui modélise le caractère d'une personne comme la combinaison linéaire de trois traits essentiels: l'activité (l'actif et le non-actif), l'émotivité (l'émotif et le non-émotif) et le retentissement des représentations (le primaire et le secondaire). On associe ainsi une personne à un point dans un espace cartésien où chacun des axes représente les valeurs à un des trois traits. La distance entre deux points modélise ainsi le degré de proximité des traits de personnalité de deux personnes. Dans son retour réflexif après expérimentation, cet enseignant était surpris que le niveau d'engagement des étudiants fût moindre que ce qu'il avait anticipé. «L'activité était centrée sur eux-mêmes, la caractérologie… j'aurais peut-être parlé plus de caractérologie […] moi, ça avait beaucoup de sens parce que je travaillais depuis deux mois là-dessus, mais eux ont rempli le test, ils avaient lu un petit paragraphe qui expliquait, est-ce qu'ils l'ont lu? ».

2. Le caractère fragile de la signifiance

Par ailleurs, bien que la signifiance de la situation puisse émerger chez les étudiants au début du déroulement de l'activité en classe, elle peut devenir obsolète. C'est le cas par exemple de la situation *Voir L'avenir* que nous venons de discuter où l'on a noté la baisse de l'intérêt des étudiants de la pertinence de la preuve formelle pour répondre à la question principale. Pour maintenir l'intérêt des étudiants tout au long de la réalisation de l'activité, l'enseignant a avantage à introduire de temps à autre des questions pertinentes qui renouvellent la signifiance de la situation. Par exemple, dans le cas de cette dernière situation, l'enseignant peut prévoir dans la tâche des questions qui permettent de faire émerger chez les élèves le sens de la matrice de transition et des matrices colonnes ainsi que de faire le lien entre l'idée des parts de marché à long terme, le passage à la limite dans l'égalité $MX_n = X_{n+1}$ et l'équation définissant la matrice colonne représentant les parts de marché à long terme : $MX = X$. Un autre exemple, dans la situation *Le poids de l'Hospital,* il est proposé de demander aux étudiants une analyse du dispositif expérimental pour identifier les variables indépendantes et dépendantes en jeu ainsi que leurs interrelations ; de demander de trouver un moyen pour prédire la hauteur maximale, quel que soit l'angle. Pour y arriver, à partir de la représentation géométrique d'un état du système, on peut demander aux étudiants pour quelques valeurs de la variable indépendante de calculer les valeurs de la variable dépendante.

Ces discussions amènent les membres de la communauté à voir que les significations ne sont pas seulement un moyen favorisant l'apprentissage elles en sont aussi un objet. La négociation de sens se trouve au centre des interactions sociales qui ont court en classe, notamment celles entre l'enseignant et les élèves.

3. Le rôle du contexte

Lors du retour réflexif, tous les enseignants ont affirmé que la contextualisation des situations a favorisé l'intérêt et l'engagement cognitif de leurs étudiants. En effet, dans la majorité des cas, le contexte est en lien avec le domaine de formation des étudiants, ce qui pourrait augmenter leur perception de l'utilité des mathématiques dans leur domaine de formation. On peut noter qu'un grand nombre de ces situations est basé sur des tâches de modélisation mathématique. Cela semble indiquer que les tâches de modélisation sont potentiellement signifiantes pour les étudiants, surtout quand le phénomène à modéliser s'inscrit dans une pratique sociale en lien avec le domaine du profil de formation des étudiants (administration, génie mécanique, etc.).

En outre, il ressort de l'analyse de plusieurs situations l'importance de la mise en situation initiale en classe pour faire émerger chez les étudiants une problématique liée à leur domaine de formation. L'engagement cognitif dans la réalisation des tâches demandées est alors motivé par le désir de compréhension de cette problématique.

VII. EN GUISE DE CONCLUSION

Dans ce texte, nous avons présenté le travail ayant conduit à l'émergence d'une communauté de pratique formée d'enseignants et de didacticiens de mathématiques autour de la problématique de la signifiance de l'enseignement. Les situations qui ont été développées, ou adaptées, ainsi que les idées qui ont émergé des retours réflexifs ont permis l'élaboration d'un répertoire partagé et rendu public via un site internet : http://projet.abombardier.ep.profweb.qc.ca . Les membres de la communauté espèrent que ce répertoire devient un espace de collaboration professionnelle, un vivier de ressources dynamiques pour des praticiens préoccupés par la même problématique.

REFERENCES

Adihou A. (2011) Enseignement-apprentissage des mathématiques et souffrance à l'école. *Les Collectifs du Cirp,* 2.

Bloch I., Kientega G., Tanguay D. (2006) Synthèse thème 6. *Actes du congrès Espace Mathématique Francophone-2006, Groupe de travail 6:* ***Transition secondaire/postsecondaire et enseignement des mathématiques dans le postsecondaire***. Sherbrooke : Université de Sherbrooke.

Bressoux P. (2001) Réflexions sur l'effet-maître et l'étude des pratiques enseignantes. *Les dossiers des sciences de l'éducation* 5, 35-52.

Caron F., de Cotret S. R. (2007) Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques: genèse d'une perspective. In *Actes du Colloque 2007 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (123-134).

Cobb P., Perlwitz M., Underwood D. (1994) Construction individuelle, acculturation mathématique et communauté scolaire. *Revue des sciences de l'éducation* 20(1).

Conseil de la science et de la technologie (2004) *La culture scientifique et technique au Québec: une interface entre les sciences, la technologie et la société. Rapport de conjoncture 2004.* Québec : Conseil de la science et de la technologie.

Conseil supérieur de l'éducation (2004) *Un nouveau souffle pour la profession enseignante. Avis au ministre de l'Éducation.* Québec : Conseil supérieur de l'éducation.

Conseil de la science et de la technologie (2004) *La culture scientifique et technique au Québec: une interface entre les sciences, la technologie et la société. Rapport de conjoncture 2004.* Québec : Conseil de la science et de la technologie.

Gouvernement du Québec. (2009) *Programme de formation de l'école québécoise. Secondaire deuxième cycle domaine de mathématique.* Québec : Ministère de l'éducation du loisir et du sport.

Larochelle M., Bednarz N. (1994) À propos du constructivisme et de l'éducation. *Revue des sciences de l'éducation* 20(1).

Martinand J. L. (1989) Pratiques de référence, transposition didactique et savoirs professionnels en sciences et techniques. *Les Sciences de l'éducation 2*(1989), 22-29.

Mercier A., Buty C. (2004) Evaluer et comprendre les effets de l'enseignement sur les apprentissages des élèves: problématiques et méthodes en didactique des mathématiques et des sciences. *Revue française de pédagogie*, 47-59.

Squalli H. (2015) Impliquer les professionnels dans leur formation : un journal de bord en résolution de problèmes mathématiques. In Maulini O., Desjardins J., Etienne R., Guibert P., Paquay L. (Eds.) *À qui profite la formation continue des enseignants ?* DeBoeck, 94-106.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2/3), 133-170.

Wenger E. (1998) *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity.* Cambridge: University Press.

ASPECTS CULTURELS ET LANGAGIERS DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Compte-rendu du Groupe de Travail n° 8

Viviane DURAND-GUERRIER[*]– Faiza CHELLOUGUI[**]

I. INTRODUCTION

Dans ce groupe de travail, nous nous sommes intéressé aux aspects culturels et langagiers de l'enseignement des mathématiques. Contrairement à une idée commune largement répandue selon laquelle les mathématiques seraient universelles et intemporelles, de nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques ont mis en évidence la nécessité de prendre en compte les aspects culturels et langagiers dans l'enseignement des mathématiques, et la nécessité de se déprendre de l'illusion d'une transparence du discours mathématique. Très développés dans les travaux anglophones, les recherches sur les aspects langagiers restent encore peu nombreuses dans l'espace mathématique francophone. Ce constat déjà fait dans le groupe de travail « Dimensions linguistique, historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques » à EMF 2009 (Battie & al. 2009) reste d'actualité comme le montre la faible présence des travaux francophones lors de la conférence de l'étude ICMI 21 au Brésil en septembre 2011. Ce thème reste encore aujourd'hui largement exploratoire, ce qui nous avait conduit à un appel à proposition assez large visant à permettre d'établir un panorama des travaux existants afin de dégager des lignes de force pour l'avenir.

Les principaux points que nous avions indiqués dans l'appel à projet étaient les suivants : 1/ le rôle du langage et de la culture dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques ; 2/ la prise en compte de la diversité culturelle et linguistique dans les travaux en didactique des mathématiques ; 3/ la nature du discours mathématique et de la culture mathématique comme enjeux dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques dans différents contextes ; 4/ les moyens pour rendre l'intégration de la dimension culturelle à la fois signifiante et efficace du point de vue didactique ; 5/ les apports des études dans différents champs scientifiques connexes (par exemple psychologie, sociologie, anthropologie, linguistique, philosophie, ethno-mathématique) pour les études en didactique des mathématiques ; 6/ les apports potentiels d'une analyse logique du langage pour les études en didactique des mathématiques ; 7/ les enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingues : prise en compte des spécificités lexicales et grammaticales et de leurs effets sur

[*] Université de Montpellier – France – email : viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr
[**] Université de Carthage – Tunisie – email : chellouguifaiza@yahoo.fr

Durand-Guerrier V., Chellougui F. (2015) Aspects culturels et langagiers dans l'enseignement des mathématiques - *Compte rendu du Groupe de Travail n° 8.* In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 711-717.

les apprentissages mathématiques (aspects didactiques et institutionnels), articulation entre langue maternelle et langue d'enseignement, étude des pratiques linguistiques des élèves et des enseignants lors des cours de mathématiques ; 8/ les effets cognitifs potentiels d'un apprentissage des mathématiques en contexte multilingue et/ou multiculturel ; 9/ les apports potentiels des mathématiques dans leurs liens aux autres sciences pour contribuer au rapprochement des hommes et des cultures,

Nous avons reçu seulement un petit nombre de contributions touchant essentiellement aux thèmes 6 et 7; plusieurs d'entre elles bien qu'acceptées n'ayant pas pu être présentées, leurs auteurs n'ayant pas pu participer à la conférence. En outre deux des coordonnateurs qui avaient participé activement à la préparation du travail du groupe avant la conférence n'ont pas pu être présents à Alger[1]. Le groupe de travail a donc été animé conjointement par les deux auteures de ce texte, respectivement coordinatrice du groupe et correspondante du Comité Scientifique. Le groupe se composait de dix participants venus de cinq pays: Algérie (2) - Cameroun (2) - Québec (1) - France (3) - Tunisie (2) [2]. Quatre communications orales ont été présentées, réparties en deux thèmes : *Enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingue* et *Signes, formalisme et signification.* Le travail a été organisé de manière à pouvoir favoriser les interactions au sein du groupe de travail. Chaque communication orale a fait l'objet d'une présentation de 15 min suivie d'une réaction de 5 min par un membre du groupe sollicité avant le début de la conférence et de 10 min de questions. Deux séances de travail en demi-groupes de 30 minutes chacune ont été organisées pour un travail plus approfondi sur chacun des quatre textes faisant l'objet d'une communication orale. Ce travail a été suivi dans les deux cas d'une synthèse et d'un débat collectif. Cette organisation a permis des débats riches au sein du groupe dont nous rendons compte brièvement ci-dessous. En complément de ce travail, une heure a été consacrée à la présentation de l'ouvrage issu de l'étude ICMI 21, et l'affiche de HAOUAM Kamel et REBIAI Belgacem, « Les mathématiques et l'Afrique – Mythe ou réalité » a été présentée et discutée dans le groupe. Une heure a été consacrée à la préparation de la synthèse, du bilan et des perspectives de collaboration au sein de l'espace mathématiques francophone. Le groupe a bénéficié de la présence de Bernadette Denys qui a enrichi nos débats grâce à sa longue expertise des collaborations au sein de l'espace mathématique francophone, en particulier dans le cadre du GREMA (Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques en Afrique Subsaharienne[3]) qui a publié en 2015 une brochure présentant une sélection de travaux associés à sa réflexion (IREM de Paris 7, 2015[4]).

II. TRAVAUX ET ECHANGES AU SEIN DU GROUPE DE TRAVAIL

1. Aperçus sur l'ouvrage issu de l'étude ICMI 21

Le thème de l'étude ICMI 21 Mathematics Education and Language Diversity est très étroitement lié au thème de ce groupe de travail, ce qui a motivé la présentation de l'ouvrage issu de l'étude (Barwell et al. 2015), au sein du groupe. La conférence de l'étude a eu lieu du 16 au 20 Septembre 2011 à Águas de Lindóia (Brésil) ; quatre-vingt-onze participants venant de 27 pays ont été invités à la conférence suite à un appel à communication. Un constat qui ressort immédiatement des travaux de la conférence et de l'ouvrage : la faible représentation

[1] Richard Barwell (Université d'Ottawa, Canada) et Ahmed Dhaife (ENS de Casablanca, Maroc)

[2] La liste des participants est donnée en annexe 2.

[3] Baheux Carole ; Denys Bernadette ; Chenevotot Françoise ; Mesquita Anna ; Galisson Marie-Pierre ; Gnansounou André ; Bantaba Fiancée-Gernavay ; Henry Michel ; Indenge Joseph ; Lagrange Jean-Baptiste ; Malonga Moungabio Fernand ; Mopondi-Bendeko Alexandre ; Tchoubou Godefroy.

[4] Le texte est téléchargeable en ligne sur le site " Ressources numérisées des IREM et de leurs partenaires"

des travaux issus de l'espace mathématique francophone, alors que les problématiques abordées dans la conférence ont une grande pertinence pour notre aire linguistique. Il y avait de nombreuses contributions issues de pays et de contextes où la langue d'instruction est l'anglais, alors qu'elle n'est pas la langue maternelle d'une majorité d'élèves, voire de la quasi totalité des élèves. Faisant suite à un certain nombre de travaux développés dans ces contextes depuis de nombreuses années, les responsables scientifiques de l'étude ICMI 21 soutiennent la position selon laquelle le plurilinguisme peut devenir un facteur positif pour les apprentissages mathématiques, invitant les auteurs de l'ouvrage à ne pas négliger cet aspect dans leurs analyses. Les communications couvraient les 5 thèmes de l'étude 1/ Enseigner les mathématiques dans différents contextes linguistiques ; 2/ Formation des enseignants pour différents contextes linguistiques ; 3/ Recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans différents contextes multilingues ; 4/ Mathématiques, langages et diversité. 5/ Apprentissage des mathématiques dans des classes multilingues. Nous avons identifié dans cette étude quelques thématiques émergentes, peu travaillées jusqu'à présent, qui nous semblent pertinentes pour l'espace mathématique francophone : les spécificités de l'enseignement post secondaire ; la prise en compte la diversité linguistique au niveau de la recherche et la prise en compte des différences de structure grammaticale.

2. *Enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingue*

Comme nous l'avons indiqué dans la pargraphe précédent, les travaux de recherche en didactique des mathématiques prenant en compte de manière explicite les spécifictés des contextes multilingues d'enseignement des mathématiques sont encore peu nombreux dans l'espace mathématique francophone; nous pouvons néanmoins citer le travail de I. Ben Kilani (2005) sur la négation et celui de K. Million-Fauré (2011) dans le contexte des élèves migrants en France. La communication de David Benoît intitulée « L'enseignement des mathématiques à des élèves apprenant la langue de scolarisation » et celle de Judith Njomgang Ngansop et de Patrick Tchonang Youkap intitulée « Le changement de langage dans l'activité mathématique » s'inscrivent dans la thématique *Enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingue.*

David Benoît dans sa contribution propose de documenter les difficultés rencontrées par les enseignants amenés à enseigner les mathématiques à des élèves qui sont en train d'apprendre la langue de scolarisation par une recension de travaux de essentiellement anglophones d'une part et des modalités d'expérimentations pour mener à bien des études didactiques d'autre part. Il souligne que l'activité ordinaire des enseignants en contextes multilingue constitue une zone d'ombre pour les recherches en didactique des mathématiques, ce qui le conduit à croiser les cadres didactiques avec les apports des travaux développés en théorie de l'activité, en référence aux travaux de Y. Clot (2008). Ceci plaide en faveur de recherches spécifiques afin de pouvoir proposer des formations adaptées aux enseignants travaillant dans ces contextes. D'une manière générale, au cours des échanges collectifs, nous avons souligné le besoin de conduire des recherches sur les pratiques enseignantes en contextes multilingues croisant les concepts et les méthodes développés en didactique des mathématiques et ceux développés en didactique professionnelle, en particulier ceux relevant de la clinique de l'activité ou de l'ergonomie. Les apports et les limites pour ce travail de la double approche didactique et ergonomique développés par A. Robert et J. Rogalski ont été discutés au sein du groupe.

Judith Njomgang Ngansop et Patrick Tchonang Youkap se sont intéressé aux effets de changement de langue dans l'activité mathématique des étudiants à l'université (Première et deuxième année de licence), s'appuyant sur le constat que la plupart des théorèmes et des définitions sont donnés dans la langue naturelle, ce qui facilite leur compréhension, mais les rend peu opératoires, contrairement aux énoncés formels. Pour leurs analyses les auteurs ont retenu comme théorie logique de référence le calcul des prédicats qui permet de prendre en compte de manière explicite les questions de quantification et peut servir à mettre en évidence le fait que certains énoncés mathématiques écrits en langue naturelle pourraient donner lieu à des interprétation différentes selon la manière dont on considère la portée des connecteurs ou des quantificateurs. Les résultats des deux enquêtes présentés dans la communication montrent que le passage de la langue naturelle au langage formel reste, même pour des étudiants d'un niveau avancé, une source de difficultés. La discussion a mis en évidence la nécessité de prendre en compte la question des interférences en classe entre les langues locales et la langue d'instruction. Celles-ci peuvent rester inaperçues des enseignants et on peut faire l'hypothèse que même lorsqu'elles sont reconnues, elles sont peu prises en compte dans la classe de mathématiques dans l'espace francophone en raison d'une idée commune selon laquelle en mathématiques, ceci joue un rôle moins important que dans d'autres disciplines.

3. Signes, formalisme et signification

La question de la signification des énoncés en mathématiques revêt une importance toute particulière. En effet, d'une part les mathématiques croisent la langue vernaculaire avec un usage important de signes spécifiques comme l'a montré le travail pionnier de C. Laborde (1982), d'autre part on observe dans la classe de mathématiques de nombreux implicites liés au recours au formalimse logique, ceci ayant été mis en lumière en particulier dans les travaux de F. Chellougui (2009). La communication de Faten Khalloufi-Mouha intitulée « Evolution du processus de la construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus » à travers les signes langagiers utilisés », et celle de Viviane Durand-Guerrier intitulée « Formalisme et signification en mathématiques- Phénomènes d'anaphores et quantification » abordent deux aspects de cette question.

Dans sa communication Faten Khalloufi-Mouha étudie l'évolution du processus de construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus », à travers l'étude de l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors d'une séquence d'enseignement intégrant l'artefact technologique Cabri. Ses travaux s'inscrivent dans le cadre de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti 2008) et s'appuient sur l'hypothèse selon laquelle le langage est un outil essentiel pour le passage du plan inter-psychologique au plan intra-psychologique. L'auteur a construit pour cela une séquence expérimentale d'enseignement intégrant l'environnement de géométrie dynamique Cabri, dans le but d'étudier l'impact de cette intégration sur le processus de construction des connaissances mathématiques mises en jeu et sur les stratégies de communication utilisées par l'enseignant pour guider les élèves dans cette construction. Le travail présenté met en évidence, outre la complexité du processus d'élaboration de la signification des signes en jeu dans l'activité et le rôle crucial de l'enseignant pour permettre aux élèves de se dégager des significations attachées aux artefacts afin d'envisager la généralisation des résultats observés et de parvenir à une interprétation mathématique permettant le développement des connaissances en jeu. Les échanges collectifs ont permis de souligner l'importance de ne pas perdre de vue, dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques sur le langage, le fait que les mathématiques ne sont pas seulement un langage, mais sont aussi une activité où les objets et les actions sur les objets jouent un rôle essentiel.

Dans sa communication, Viviane Durand-Guerrier montre sur un exemple que le phénomène d'anaphore (reprise de pronom) étudié en sémantique formelle pour les langues naturelles se retrouve également en mathématiques en lien avec la pratique de quantification implicite des énoncés conditionnels. Elle montre en particulier que le repérage des anaphores pourrait permettre de déterminer plus rapidement les choix de formalisation permettant de capturer la signification des énoncés conditionnels implicitement quantifiés. Les résultats expérimentaux présentés confortent l'hypothèse selon laquelle ce phénomène est susceptible de générer des difficultés chez les étudiants en début d'université. Cette étude illustre les apports de l'analyse logique du langage pour questionner l'illusion de transparence du langage mathématique, en particulier parce qu'elle permet de débusquer des ambiguïtés et des implicites. L'auteure fait l'hypothèse que l'analyse logique et la formalisation peuvent offrir une référence commune en situation d'enseignement plurilingue, lorsque la langue d'instruction n'est pas la langue maternelle, ce qui est souvent le cas dans l'enseignement supérieur et ce quel que soit les pays considérés. Les échanges collectifs ont mis en évidence le fait qu'il ne faut pas sous-estimer les difficultés d'appropriation d'un tel outil par des enseignants le plus souvent peu formés en logique, cette discipline ne faisant plus partie du curriculum officiel des futurs enseignants dans de nombreux pays. Néanmoins, l'Illusion de transparence de la signification portée par les signes (vocabulaire spécifique, symboles, graphiques, schémas, gestes etc.) nécessite d'être mise en évidence pour pouvoir être traitée dans la classe de mathématique ; ceci constitue un enjeu important pour les recherches en didactique des mathématiques.

III. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

A l'issue des travaux de ce groupe de travail, nous tenons à souligner l'importance de développer des recherches sur la diversité linguistique et culturelle dans l'espace mathématique francophone, en prenant en compte la spécificité des contextes. Ces travaux sont exigeants car ils nécessitent de croiser les concepts et les méthodes classiques en didactique des mathématiques avec les apports d'autres champs tels que la didactique des langues, l'ergonomie, la philosophie de la logique et du langage ou la sémiotique. Malgré le petit nombre de communications présentées dans le groupe de travail, les débats très riches ont permis d'identifier des pistes de travail dans les deux thèmes travaillés dans le groupe : "Enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingues" et "Signes, formalisme et signification". Nous pensons qu'il est nécessaire pour le prochain congrès EMF de conduire un travail en amont de la conférence permettant d'identifier les travaux de recherche existants et les innovations mises en place pour traiter de cette question dont l'importance nous paraît être sous-estimée à l'heure actuelle.

REFERENCES

Bartolini Bussi M. G., Mariotti M. A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In English L. D., Bartolini Bussi M. G., Jones G. A., Lesh R., Tirosh D. (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education,* 2nd revised edition (720-749). Mahwah, NG : Lawrence Erlbaum Associates.

Barwell R. Clarkson P., Halai A., Kazima M., Moschkovich J. (Eds.) (2015) *Mathematics Education and Language Diversity*. The 21st ICMI Study, Springer.

Battie V., Kilani I., Savard A., Traoré K. (2009) Synthèse du Groupe de travail IV, Dimensions linguistique, historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques', Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) Enseignement des mathématiques et développement: enjeux de société et de formation. *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone. Revue Internationale Francophone Numéro Spécial 2010*, 487-489.

Ben Kilani, I. (2005) *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*. Thèse en co-tutelle de l'université de Tunis et de l'université Lyon 1.

Clot, Y. (2008) *Travail et pouvoir d'agir*. Paris : PUF.

Chellougui, F. (2009) L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite, *Recherches en didactique des mathématiques* 29(2), 123-153

IREM de Paris GREMA (2015) *GREMA – douze années d'activités*, Université Paris Diderot.

Laborde C. (1982) *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*, Thèse de l'Université de Grenoble

Million-Faure K. (2011) *Les répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématique en classe : le cas des élèves migrants*. Thèse de l'Université de Provence.

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 2(4), 505–528

ANNEXE 1

LISTE DES COMMUNICATIONS ET ORGANISATION DES SESSIONS

2. COMMUNICATIONS ORALES

BENOIT David : L'enseignement des mathématiques à des élèves apprenant la langue de scolarisation

DURAND-GUERRIER Viviane : Formalisme et signification en mathématiques- Phénomènes d'anaphores et quantification

KHALLOUFI-MOUHA, Faten : Evolution du processus de la construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus » à travers les signes langagiers utilisés.

NJOMGANGNGANGSOP Judith, TCHONANG YOUKAP Patrick : Le changement de langage dans l'activité mathématique

3. COMMUNICATION AFFICHEE

HAOUAM Kamel, REBIAI Belgacem, Les mathématiques et l'Afrique – Mythe ou réalité

4. ORGANISATION DES SESSIONS

Plage horaire	Sous thèmes	Auteurs
Samedi 10 octobre 14h-16h	Introduction Présentation de l'ouvrage issu de l'étude ICMI 21	F. CHELLOUGUI V. DURAND-GUERRIER
Dimanche 11 octobre 8h30 – 10h30	Enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingues (1)	J. NJOMGANG-NGANSOP & P. TCHONANG YOUKAP D. BENOIT
Dimanche 11 octobre 11h-12h30	Enjeux spécifiques des contextes d'enseignement multilingues (2) Présentation communication affichée	Débat collectif HAOUAM K. & REBIAI B.
Mardi 13 octobre 8h – 10h	*Signes, formalisme et signification*	F. KHALLOUFI-MOUHA V. DURAND-GUERRIER

Mercredi 14 octobre 8h30 – 10h30	Bilan et perspectives. Etat des lieux et pistes pour des collaborations au sein de l'Espace Mathématique Francophone	F. CHELLOUGUI V.DURAND-GUERRIER

ANNEXE 2
LISTE DES PARTICIPANTS

BENOIT David (Université de Sherbrooke, Canada),
BOUFERMA Salah Eddine (Etudiant de Master, Université Houari Boumedienne des Sciences et Techniques, Alger, Algérie)
CHELLOUGUI Faiza (Université de Carthage, Tunisie),
DENYS Bernadette (IREM de Paris, France),
DURAND-GUERRIER Viviane (Université de Montpellier, France),
HAOUAM Kamel (Université de Tebessa, Algérie),
JAMET Robin (Palais de la Découverte, Paris, France),
KHALLOUFI-MOUHA Faten (Université de Carthage, Tunisie),
NJOMGANG NGANSOP Judith (Université Yaoundé 1, Cameroun),
TCHONANG YOUKAP Patrick (Université de Yaoundé I, Cameroun).

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À DES ÉLÈVES APPRENANT LA LANGUE DE SCOLARISATION ET UNE PROPOSITION MÉTHODOLOGIQUE POUR L'ÉTUDIER

David BENOIT*

Résumé – Nous analysons un corpus scientifique traitant des enseignants de mathématiques (et de leur enseignement) lorsqu'ils œuvrent auprès d'élèves apprenant la langue de scolarisation. Nous en dégageons une zone d'ombre, soit le manque de connaissances sur les processus menant à ce qui est observable en classe. Ce manque ne nous permet pas de comprendre l'écart entre les pratiques observées et des pratiques qui seraient didactiquement souhaitables : ce qui peut conduire à des résultats d'analyses avec une certaine perspective déficitaire du travail des enseignants. Finalement, nous proposerons une posture scientifique et des modalités méthodologiques pour combler ce manque.

Mots-clefs : Enseignement, modalités méthodologiques, didactiques des mathématiques, élèves apprenant la langue de scolarisation, clinique de l'activité

Abstract – For this contribution, we analyze a scientific corpus regarding mathematics teachers (and their teaching) while working with students learning the instruction language. From this, we expose the lack of knowledge of the processes leading to what can be seen in class. This prevents us from understanding the gap between the observed teaching practices and the desirable practices from a didactic point of view: which can lead to analysis results portraying a certain deficit view of the teachers' work. Finally, we suggest a scientific posture and the associated methodological modalities to address this problem.

Keywords: Teaching, experimental design, didactics of Mathematics, students learning the instruction language, clinic of activity)

L'appel à proposition pour le groupe de travail 8 sur les *Aspects culturels et langagiers dans l'enseignement des mathématiques* se situe en continuité avec le groupe de travail *Dimension linguistique, historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques* d'EMF 2009 en spécifiant que les constats de ce groupe de travail restent d'actualité. Nous proposons donc de nous pencher sur certains de ces constats, soit la nécessité de recenser et mutualiser les travaux existants et le besoin de proposer des modalités d'expérimentations pour mener à bien des études didactiques qui nous apporte des données faisant défaut aujourd'hui. Pour cette contribution, nous concentrons nos efforts à dégager des données faisant défaut en ce qui a trait à l'enseignant (et à son enseignement) œuvrant auprès d'élèves apprenant la langue de scolarisation (ÉALS). Ce choix d'élargir notre recension aux recherches portant sur l'enseignement aux ÉALS implique que nous postulons qu'une partie des recherches sur l'enseignement en classe de mathématiques à des élèves qui utilisent une ou plusieurs autres langues que la langue de scolarisation (LS) sont pertinentes indépendamment la LS en question. Ce sont principalement ces recherches (rédigées en anglais ou en français) qui

* Université de Sherbrooke – QC, Canada – david.benoit@usherbrooke.ca

Benoit D. (2015) L'enseignement des mathématiques à des élèves apprenant la langue de scolarisation et une proposition méthodologique pour l'étudier. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 718-730.

apparaitront dans cette contribution. De cet état des lieux, nous dégagerons une zone d'ombre, puis nous proposerons une posture scientifique et des modalités méthodologiques pour l'éclairer.

I. RECHERCHES SUR L'ENSEIGNANT ET SON ENSEIGNEMENT À DES ÉLÈVES APPRENANT LA LANGUE DE SCOLARISATION

Plusieurs résultats de recherches portant sur l'enseignement à des ÉALS tendent vers des conclusions semblables indépendamment de la LS ou du pays dans lequel l'expérimentation a été réalisée. En particulier, des chercheurs rapportent que les enseignants s'en tiennent le plus souvent aux bases avec des problèmes décontextualisés dans une approche transmissive tout en favorisant le travail individuel (Chnane-Davin 2005; Cole & Griffin 1987; Poirier 1997; Secada 1992; Secada & Carey 1990). D'autres ont observé la domination par l'enseignant des discussions en classe et le bas niveau des questions (Ramirez, Pasta, Yuen, Billings & Ramey, 1991; Ramirez, Yuen, Ramey & Pasta 1991), le peu de valorisation de la prise de parole par les élèves (Secada & De La Cruz 1996) ou la distribution inéquitable des occasions de participation en classe en fonction des identités des élèves (Gorgorió & Abreu 2009; Gorgorió & Prat 2009). Millon-Fauré (2011*a*) a constaté qu'afin de faciliter l'entrée des élèves dans l'activité, les enseignants choisissaient d'abaisser le niveau mathématique du travail à la charge des élèves plutôt que de faire des adaptations sur le plan langagier. Chnane-Davin (2005) note une modification des pratiques d'enseignement en classe d'accueil (regroupant des ÉALS) et la conception de dispositifs bricolés qui, étant donné les compromis, ne seraient pas toujours optimaux. Félix et Chnane-Davin (2008) précisent que les pratiques observées en classe d'accueil se distinguent souvent des pratiques admises dans les classes ordinaires. À contrecourant, plusieurs enseignants déclarent ne pas vouloir adapter leur enseignement en fonction des ÉALS ou le faire avec réticence (Millon-Fauré 2011*b*; Pettit 2011; Reeves 2006; Walker, Shafer & Iiams 2004). Enfin, alors que Gutiérrez (2002) croit que la baisse des exigences pourrait être la réaction à un rendement plus faible d'ÉALS aux examens, Elbers et de Haan (2005) imputent en partie les mauvais résultats aux méthodes éducationnelles.

De ces observations, il ressort une tendance à réduire le niveau mathématique à travers un enseignement transmissif ne favorisant pas l'interaction. Or, pour ces auteurs et d'autres (Costanzi, Gorgorió & Prat 2012; Rowlands & Carson 2002), des activités mathématiques de haut niveau sont nécessaires pour garantir l'accès à une éducation de qualité. Qui plus est, l'accent des nouveaux curriculums s'actualise par une demande accrue aux élèves pour qu'ils participent verbalement et à l'écrit en expliquant des processus menant à des solutions, en explicitant des conjectures, en prouvant des conclusions et en présentant des arguments (Moschkovich 1999). Ces types d'activités mathématiques sont des activités de haut niveau que les élèves ne peuvent maitriser par l'intermédiaire d'un enseignement transmissif axé sur l'exercisation individuelle des bases (*Ibid.*). Cet écart entre le type d'activité offert aux ÉALS et ce qui est promu dans les nouveaux curriculums nous force à conclure à la possibilité d'un déficit de qualité de l'enseignement. Plusieurs chercheurs en sont arrivés au même constat. Certains ont entrepris d'interroger des enseignants pour comprendre les sources de ce déficit. Ils rapportent que les enseignants disent vivre un sentiment d'essoufflement (Pettit 2011; Poirier 1997; Secada & Carey 1990) par rapport à la complexité de la tâche (Clair 1995; Gándara, Maxwell-Jolly & Driscoll 2005; Gutiérrez 2002). Ils disent se sentir dépassés par les exigences des administrateurs (Secada & Carey 1990) ou celles qu'ils s'imposent (Félix & Chnane-Davin 2008). Gorgorió, Planas et Vilella (2002) ont recueilli des propos semblables alors que les enseignants parlaient d'anxiété face à une nouvelle situation d'enseignement complexe. Dans toutes ces études, les enseignants disent ne pas se sentir suffisamment préparés. De son côté, Ross (2014) rapporte que les enseignants se sentent moins efficaces avec des ÉALS qu'avec les autres élèves. D'autres enseignants disent éprouver un sentiment d'impuissance et de frustration relativement à leur difficulté à accéder au processus cognitif des élèves à cause de la distance linguistique (Gándara et al. 2005; Gorgorió & Planas 2001). Ces études, conduites dans plusieurs contextes, tendent à démontrer que les enseignants œuvrant auprès d'ÉALS vivent des situations d'enseignement difficiles qui diffèrent des situations d'enseignement à des élèves maitrisant la langue de scolarisation. Il apparait alors nécessaire d'étudier les éléments de ces situations d'enseignements à des ÉALS qui amènent les enseignants à déclarer de tels sentiments.

II. RECHERCHES SUR DES SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT À DES ÉLÈVES APPRENANT LA LANGUE DE SCOLARISATION

Un premier élément de la situation d'enseignement à des ÉALS identifié par la recherche est la difficulté pour l'enseignant à évaluer les acquis mathématiques des ÉALS afin de déterminer les contenus mathématiques à enseigner (Chnane-Davin 2005; Poirier 1997). Si l'on peut argumenter que cette difficulté est un enjeu de toute relation d'enseignement, on peut tout de même concevoir que la distance linguistique entre l'enseignant et les ÉALS vient l'amplifier (Gándara et al. 2005; Gorgorió & Planas, 2001). De la même façon, la distance linguistique peut rendre plus difficile l'adaptation de l'offre mathématique en fonction des objectifs scolaires et professionnels des élèves. Or, plusieurs chercheurs insistent sur l'importance de considérer ces objectifs particulièrement pour les ÉALS (Domite & Pais 2009; Gorgorió & Planas 2001; Secada & Carey 1990; Skovsmose 1994; Vithal & Skovsmose 1997). Par ailleurs, dans les situations d'enseignement pour lesquelles plusieurs ÉALS proviennent de systèmes scolaires variés (par exemple des classes rassemblant plusieurs élèves issus de l'immigration récente), les enseignants expriment leur frustration devant la diversité des acquis ainsi engendrée (Gándara et al. 2005). En somme, si l'on peut émettre une conjecture quant à l'existence d'un lien entre la difficulté à évaluer les acquis mathématiques des ÉALS et la tendance à l'abaissement du niveau des mathématiques qui leur est offert, le lien n'est certainement pas direct et il n'est pas clairement documenté non plus. Ainsi, la façon de gérer cette difficulté par les enseignants pourrait être mieux documentée.

Un deuxième élément de la situation d'enseignement à des ÉALS identifié par la recherche est que, face à la distance linguistique, l'enseignant de mathématiques doit déterminer la place de l'enseignement de la LS dans sa classe (Abreu & Gorgorió 2007; Pettit 2011; Secada & Carey 1990), et ce, allant d'une place comparable à ce que l'enseignant ferait en classe ordinaire à une place plus importante. Or, à partir du moment où les enseignants font une place à l'enseignement de la LS afin de poursuivre leur projet didactique (mathématique), ils introduisent des « savoirs clandestins » (Chnane-Davin 2011) qui mettent une pression, au moins à court terme, sur le temps didactique (mathématique). En contrepartie, les enseignants qui choisissent de faire une place à l'enseignement de la LS misent vraisemblablement sur un effet bénéfique à moyen ou long terme. Or, des enseignants qui font ce choix disent manquer de temps pour enseigner à la fois les contenus (mathématiques) et la LS (Gándara et al. 2005). Il semble donc exister une tension entre les gains à court et à long terme sur le temps didactique (mathématique) découlant de l'enseignement ou non de la LS à même les cours de mathématiques. Or, à la suite des résultats de recherche déjà évoqués sur la tendance à réduire la qualité des mathématiques proposées aux élèves, il semble que plusieurs enseignants sont plutôt influencés par des contraintes à court terme: c'est-à-dire que le temps didactique (mathématique) doit progresser. Toutefois, les recherches recensées ne nous permettent pas de conclure avec certitude en ce sens ou même d'identifier ces contraintes à court terme. Ainsi, des recherches portant sur les contraintes vécues par les enseignants pour déterminer la place de l'enseignement de la LS dans les classes de mathématiques seraient pertinentes.

Un troisième élément de la situation d'enseignement à des ÉALS identifié par la recherche est la place donnée à l'utilisation des langues premières (L1) des élèves pour apprendre des mathématiques dans la LS. Plusieurs chercheurs avancent que l'utilisation de la L1 pour apprendre les mathématiques dans une LS autre permet aux élèves de mieux performer que ceux qui n'y ont pas recours (Gutiérrez 2002; Jao 2012; Latu 2005). D'ailleurs, Gorgorió et Planas (2001) ont observé la richesse des interactions mathématiques en L1 lorsque les élèves sont placés en sous-groupes linguistiquement homogènes. À l'opposé de ces résultats, beaucoup d'enseignants croient que l'immersion totale est la meilleure façon d'apprendre la LS (Armand 2012; Pettit 2011), et ce même si certains élèves passent par une phase silencieuse peu propice à l'apprentissage (Secada & De La Cruz 1996). De même, étant donné les difficultés des élèves qui apprennent la LS à résoudre des problèmes écrits par rapport aux mêmes problèmes en format exclusivement numérique (Bernardo 2002), les enseignants privilégieraient des tâches mathématiques décontextualisées en mettant de côté les autres aspects des nouveaux curriculums tels que décrits par Moschkovich (1999). Or, ces difficultés pourraient être réduites par un passage par la L1 pour comprendre le problème et convoquer des acquis mathématiques réalisés en L1 (Cummins & Persad 2014; Gutstein, Lipman, Hernandez & de los Reyes 1997; Moschkovich 2000), pour ensuite effectuer la tâche et communiquer son processus et son résultat dans la LS (Gorgorió & Planas 2001; Pettit 2011). Cela étant dit, faire une place aux L1 a aussi des conséquences comme la difficulté pour l'enseignant à avoir accès au travail des élèves (Armand 2012). En somme, on remarque que cet élément de la situation d'enseignement à des ÉALS est perçu différemment par les chercheurs et par les enseignants. Or, le point de vue des enseignants est peu documenté au-delà de lieux communs comme l'idée que l'immersion totale soit meilleure. Il y a donc lieu d'examiner les enjeux didactiques vécus par les enseignants lorsqu'ils donnent une place aux L1 des élèves.

Un quatrième élément de la situation d'enseignement à des ÉALS identifié par la recherche est la gestion de l'aspect culturel. Nous abordons ici l'aspect culturel au sens de Costanzi et al. (2012) qui s'appuient sur Zittoun (2006, 2007) pour considérer l'apprentissage des mathématiques par des élèves immigrants comme un processus de transition qui inclut de nouveaux contextes de pratiques mathématiques, différentes relations entre les personnes et le savoir, différentes façons de comprendre les actions et les interactions en classe, une reconstruction d'identités et des négociations des significations entre les personnes. Or, si tous les ÉALS ne sont pas immigrants, ils sont minimalement confrontés à des interactions dans une LS qui n'est pas leur L1, et en ce sens, nous considérons qu'ils vivent aussi un processus de transition. Plusieurs recherches ont abordé un tel processus de transition. Par exemple, Civil (2014) lie la différence de participation en classe entre élèves blancs et d'origine latino-américaine à la culture dans laquelle ils ont grandi, l'une encourageant les questions alors que l'autre valorise la retenue. De son côté, Faupin (2014) a observé que les élèves immigrants prenaient la parole dans des classes qui leur sont réservées, mais pas dans les classes ordinaires à cause de la différence de statut social. Aux États-Unis, Gutiérrez (2002) identifie de son côté la méconnaissance des pratiques de classe et un faible niveau de maitrise de la LS comme un risque important pour les individus des groupes minoritaires de se retrouver avec un faible statut social. Enfin, Millon-Fauré (2010) a observé que les élèves issus de l'immigration tendent à oublier les algorithmes appris dans leur pays d'origine au profit de ceux de la classe qui sont jugés plus légitimes. Elle impute cet oubli à une mauvaise interprétation du contrat didactique du pays d'accueil, alors que Civil, Planas et Quintos (2005), devant des observations semblables, ont conclu à une volonté de s'adapter aux normes du pays d'accueil afin de favoriser leur réussite. Ces exemples montrent quelques difficultés culturelles auxquelles sont confrontés les ÉALS (immigrants ou non) et les enseignants et qui auraient une incidence sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Plus généralement, Costanzi et al. (2012) affirment que les difficultés de ces élèves sont souvent reliées au processus d'attribution de sens aux situations d'apprentissage et au processus de reconstruction de l'identité. Dans le contexte français, Bouchard (2008) exprime la même idée en disant que la réussite de ces élèves passe d'abord par leur capacité et leur volonté à reconstituer les habitus pédagogiques et éducatifs pour s'y fondre au moins momentanément. Au-delà de ces observations et des recommandations des chercheurs concernant des pratiques inclusives et respectueuses de la diversité, peu de recherches visent à comprendre comment les enseignants gèrent cette diversité culturelle en lien avec les objectifs mathématiques du cours.

Voilà donc quatre éléments qui pourraient contribuer à mieux comprendre les spécificités des situations d'enseignement aux ÉALS. Pour les enseignants, ces éléments pourraient être vécus comme des difficultés qui les amènent à déployer un enseignement qui diffère de celui qu'ils déploient en classes ordinaires: ce que les observations en classe présentées plus haut tendent à démontrer. Si c'est effectivement le cas, il devient alors crucial de comprendre l'influence réelle de ces éléments sur les choix des enseignants ayant une incidence didactique. Or, étant donné les témoignages des enseignants qui parlent de dépassement, d'anxiété et autres sentiments semblables face à des situations d'enseignement à des ÉALS ainsi que les observations sur la qualité des mathématiques qui leur sont proposées, il y a lieu de croire que ces éléments ou d'autres qui n'ont pas été répertoriés sont suffisamment importants pour modifier l'enseignement. En d'autres termes, les chercheurs ont observé que les enseignants ne proposaient pas à leurs ÉALS des activités mathématiques optimales d'un point de vue didactique et qu'il en résultait, de façon plus marquée que dans les classes ordinaires, une tendance à la baisse du niveau mathématique. Plusieurs chercheurs ont alors conclu qu'il fallait former les enseignants de mathématiques spécifiquement à l'enseignement aux ÉALS.

III. LA FORMATION DES ENSEIGNANTS EN LIEN AVEC L'ENSEIGNEMENT AUX ÉLÈVES APPRENANT LA LANGUE DE SCOLARISATION

Les enseignants ne seraient pas préparés adéquatement pour travailler auprès des ÉALS (Gándara, Rumberger, Maxwell-Jolly & Callahan 2003; Jones 2002; Mujawamariya & Moldoveanu 2003). Or, le développement professionnel d'enseignants en lien avec l'enseignement à des ÉALS serait corrélé positivement avec le sentiment d'efficacité déclaré (Ross, 2014; Gándara et al. 2005). Par ailleurs, Young (1996) affirme que les enseignants doivent avoir des occasions d'acquérir des habiletés spécifiques pour travailler avec des ÉALS. De ce constat sur le besoin de formation, des questions émergent. D'abord, les enseignants en veulent-ils et que veulent-ils? Puis, qui est qualifié pour donner une telle formation, quel devrait en être le contenu et quelle forme devrait-elle prendre? Les enseignants interrogés par Pettit (2011) disent être ouverts à la formation en lien avec l'enseignement aux ÉALS alors que d'autres études montrent un désintérêt pour cette question (Clair, 1995; Reeves, 2006; Walker *et al.*, 2004). Ceux qui s'y intéressent déclarent vouloir de la formation sur les modèles et les stratégies d'enseignements spécifiques à leur contexte (Pettit, 2011), ce que l'état de la recherche ne permet pas nécessairement. Cela se reflète dans les observations de Parrish, Linquanti, Merickel, Quick, Laird et Esra (2002) sur le manque de clarté pendant les formations orientées vers les meilleures pratiques pour enseigner aux ÉALS. Au mieux, des chercheurs prescrivent des objectifs sans proposer les moyens pour y arriver: un type de formation qui ne semble pas répondre aux besoins exprimés des enseignants. Voilà peut-être pourquoi Ross (2014) argumente que les formateurs en formation initiale et continue devraient eux-mêmes recevoir de la formation pour l'enseignement aux ÉALS. Selon Ross (2014), il alors serait possible pour les futurs maitres de commencer à développer le savoir requis pour soutenir l'apprentissage de ces élèves. Il resterait toutefois à établir à quel savoir le chercheur fait référence. Quant à lui, Ryan (1995) insiste pour que l'interrelation entre culture et langage soit enseignée alors que Harklau (1994) recommande d'orienter la formation vers l'enseignement de la LS dans les classes de mathématiques. Enfin, Costanzi et al. (2012) proposent d'essayer de changer les représentations des enseignants, malgré le défi que cela représente. Dans les trois derniers cas, on prescrit les objectifs sans donner les moyens pour les atteindre. En somme, malgré un consensus sur la nécessité de former les enseignants spécifiquement à l'enseignement aux ÉALS, nous n'avons pas réussi à identifier une base de savoirs spécifiques sur laquelle on pourrait fonder des formations pertinentes. De plus, même si l'on disposait de ces savoirs, il n'est pas certain que le besoin des enseignants d'avoir des formations spécifiques à leur situation d'enseignement soit comblé. Devant ce constat de déficit de savoirs scientifiques spécifiques liés à une diversité de situations d'enseignement, sur quelles bases peut-on offrir des formations? Plusieurs auteurs (Ball, Lubienski & Mewborn 2001; Barwell 2013; Godley, Sweetland, Wheeler, Minnici & Carpenter 2006; Pettit 2011) avancent que seules des formations ancrées dans la pratique pourraient avoir une influence significative sur l'enseignement à des ÉALS. Dans ce sens, Dillon (2001) et Moore (1999) croient que la mise en place d'occasions pour les enseignants de collaborer dans une perspective de développement professionnel est nécessaire. Il semble donc que la formation à l'enseignement des mathématiques à des ÉALS pose plusieurs défis dont le plus important, à notre avis, est celui de la méconnaissance scientifique des situations d'enseignement à des ÉALS et de comment les enseignants enseignent en tenant compte de ces situations.

IV. UNE ZONE D'OMBRE

En somme, l'état de la connaissance sur les situations d'enseignement aux ÉALS et particulièrement sur les processus décisionnels des enseignants ayant des incidences didactiques en fonction des caractéristiques spécifiques de ces situations ne nous permet pas de remédier à la tendance à la baisse du niveau des activités mathématiques proposées aux ÉALS. En effet, malgré l'avancement de la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à des ÉALS, plusieurs enseignants continuent à naviguer à contrecourant. Ce constat est également vrai dans les classes ordinaires, mais, étant donné les spécificités des situations d'enseignement aux ÉALS, des recherches doivent être conduites pour comprendre ce qui amène les enseignants à déclarer vivre des difficultés plus grandes dans ces situations. La zone d'ombre que nous pointons ici est donc notre compréhension de l'activité ordinaire des enseignants visant à faire apprendre les mathématiques à des ÉALS. On dispose déjà de connaissances sur les objectifs souhaitables de l'enseignement aux ÉALS qui sont le plus souvent exprimés en fonction des fondements épistémologiques des chercheurs. On dispose aussi de certaines connaissances sur ce qui est visible en classe, les pratiques observées. Toutefois, le manque de connaissances sur le processus menant à ce qui est observé ne nous permet pas de comprendre l'écart entre les pratiques observées et des pratiques qui seraient didactiquement souhaitables. Ce processus pourrait constituer une source de données nous permettant de mieux comprendre les difficultés et enjeux vécus par les enseignants. En retour, une meilleure compréhension de ces enjeux pourrait nous permettre de construire des formations qui répondent mieux aux besoins des enseignants. Toutefois, l'accès à ces données n'est pas facile et ne fait pas partie de la tradition de recherche en didactique des mathématiques. Ainsi, nous proposons, dans la section qui suit, de prendre une certaine posture scientifique et de mettre en place des modalités méthodologiques conséquentes qui permettent d'accéder, au moins en partie, à ces données.

V. UNE POSTURE SCIENTIFIQUE

Pour s'attaquer à la compréhension de l'activité ordinaire des enseignants visant à faire apprendre les mathématiques à des ÉALS, il est essentiel de prendre en compte les difficultés vécues et exprimées par les enseignants, car plusieurs recherches tendent à montrer qu'elles auraient un impact délétère sur le projet didactique de l'enseignant. Remarquons d'abord que ces difficultés ne sont pas toujours d'ordre didactique. Certaines sont en lien avec l'apprentissage de la LS, l'usage des L1 ou la gestion de l'aspect culturel. Or, nous l'avons vu, les enseignants ne sont pas nécessairement équipés pour gérer ces situations d'enseignement qui se distinguent des situations d'enseignement à des élèves dont la L1 est la LS. Ainsi, quand les enseignants expriment des sentiments de dépassement, il ne s'agit pas simplement d'enseignants portant un projet didactique qui parlent, mais aussi de travailleurs exerçant un métier dans des situations d'enseignement qu'ils considèrent difficiles, assez difficiles pour venir modifier négativement leur projet didactique. Ainsi, dans ces situations, le regard du didacticien des mathématiques peut difficilement se restreindre à l'analyse des observables d'ordre didactique. Son regard doit s'élargir pour prendre en compte les éléments qui ont un impact sur les observables d'ordre didactique.

Un premier problème qui se pose alors pour le didacticien en est possiblement un de compétence. En effet, si la nature de ces éléments n'est pas du ressort de la didactique des mathématiques, elle peut alors prendre plusieurs formes (didactique du français, psychologique, sociale, culturelle, institutionnelle, personnelle, etc.) qui dépassent les compétences du didacticien. Un deuxième problème est celui de la lourdeur des modalités méthodologiques qui viendrait avec la prise en compte systématique de toutes ces dimensions. À vouloir tout voir, on ne verrait plus rien!

Pour parer à ces problèmes, une solution possible consiste à renverser le regard. C'est-à-dire qu'un observable d'ordre didactique peut être étudié en fonction des éléments qui ont menés à cet observable: peu importe leur nature. Il ne s'agit donc pas de réaliser une recension exhaustive de tous les éléments ayant un impact sur un observable. Il s'agit plutôt de reconstituer le mieux possible les éléments ayant eu un impact sur cet observable. Pour ce faire, la collaboration de l'enseignant est essentielle, car l'analyse à priori et l'analyse des déroulements ne nous informent que trop partiellement pour espérer comprendre l'activité d'un enseignant finalisée à la fois par un projet didactique et par des considérations relatives à l'exercice de son métier. En effet, l'enseignant peut nous donner un accès privilégié à des éléments non directement observables et qui ont contribué à la prise de décision ayant mené à l'observable. La conséquence la plus significative de ce renversement, c'est que nous sommes maintenant à la recherche d'une causalité historique: ici, c'est l'analyse de l'histoire de l'observable qui permet de le comprendre. Nous proposons donc que le didacticien ne se positionne pas dans des postures objective ou subjective, mais plutôt dans une posture s'alignant sur l'approche culturelle historique de Vygotsky (1985). Pour opérationnaliser cela, nous proposons de recourir à des modalités méthodologiques inspirées de la Clinique de l'activité (Clot, 2008).

VI. UNE PROPOSITION DE MODALITÉS MÉTHODOLOGIQUES

À la base, nous faisons appel à Clinique de l'activité (CA) comme un « instrument de connaissance de la situation réelle et de l'activité ordinaire » (Ibid., p. 32). Toutefois, s'approprier cette méthodologie pour la recherche en didactique des mathématiques implique d'en examiner toutes les facettes, ce que nous faisons ici en partie. D'abord, une des idées principales qui sous-tend la CA est que « le comportement n'est jamais que " le système de réactions qui ont vaincu " (Vygotski 2003, p. 74) » (Clot 2008, p. 89). Dans le contexte de leur travail, les enseignants prennent des décisions, certaines ayant une incidence didactique. Ces décisions victorieuses se reflètent dans leur activité observable, le réalisé. Or, les autres possibles non réalisés, ces activités « empêchées, suspendues, différées, anticipées ou encore inhibées » (Ibid., p. 129), ces décisions qui ont été considérées, mais qui n'ont pas vaincu, forment une partie substantielle du travail de l'enseignant. Pour Clot (2008), en CA « le réalisé n'a plus le monopole du réel » (p. 129), activités réalisées et non réalisées font partie du réel. Ainsi, pour le développement du dispositif méthodologique de la CA, il s'aligne avec une critique de Vygotsky par rapport à certaines méthodes de recherches:

> ces méthodes « objectives » s'en tiennent beaucoup trop aux données immédiates de l'expérience en faisant l'impasse sur la conscience ou la pensée, que l'expérimentateur sollicite tout en les écartant paradoxalement de l'expérience […] L'investigation des mouvements internes non réalisés est une part nécessaire de l'expérimentation (Op. cité, p. 180).

Pour Clot (2008), cette investigation pourrait permettre de retrouver le sens de l'activité réalisée qu'il définit comme le « rapport de valeur que le sujet instaure entre cette action et ses autres actions possibles » (p. 9). Le sens ainsi défini implique que la même activité réalisée deux fois par un même sujet dans des contextes semblables (mais tout de même différents) n'a pas nécessairement le même sens pour le sujet et constitue donc deux activités réelles différentes. Par exemple, un enseignant qui propose de l'exercisation à ses élèves n'établit pas nécessairement le même rapport de valeur entre cette action et les autres actions possibles selon qu'il s'adresse à des élèves qui maitrisent la LS ou à des ÉALS. Il pourrait, par ailleurs, considérer que l'exercisation doit prendre une plus grande place dans l'enseignement aux ÉALS, comme le démontrent plusieurs des observations ci-dessus. Ainsi, pour une même tâche prescrite, l'enseignant déploie une activité d'enseignement différente en fonction de la situation d'enseignement. Cela rejoint certaines notions importantes en ergonomie, discipline dans laquelle la CA s'inscrit. En ergonomie, il y a une distinction entre tâche et activité. La tâche est ce qui est à faire et l'activité est ce qui est fait (Leplat, 1992). Incidemment, il existe un écart entre le travail prescrit et le travail réel. Entre ce qui est prescrit à l'enseignant, ce qu'il en comprend, ce qu'il dit qu'il fait et ce qu'il fait, des écarts apparaissent et l'analyse de ces écarts permet de repérer le sens de l'activité pour le sujet. On voit que le travail prescrit est confronté à la situation réelle et que l'enseignant, face à cette situation et peut-être malgré cette situation, déploie une activité pas toujours optimale, mais ayant comme finalité l'apprentissage des mathématiques par les élèves. Cette activité pas toujours optimale est, pour Clot (2008), le résultat que l'économie des moyens (ou l'efficience) joue, en tension avec le sens. L'auteur ajoute que c'est la mise à jour de la tension entre sens et efficience qui permet de comprendre l'activité réelle. C'est ainsi, que la connaissance de la situation réelle, telle que vécue et exprimée par l'enseignant, entre sens et efficience, devient un outil de compréhension de son activité ordinaire. Dans des contextes d'enseignement à des ÉALS pour lesquels les enseignants se disent dépassés, les manifestations de tension entre efficience et sens devraient être observables.

Par ailleurs, au-delà de la visée de production de connaissance décrite brièvement ci-dessus, il est impossible d'introduire le dispositif méthodologique de la CA sans discuter de sa visée de transformation du travail (Leplat 1997) héritée de l'ergonomie qui donne au chercheur le rôle d'intervenant. C'est qu'en introduisant le non réalisé dans le réel, on introduit en quelque sorte l'histoire du réalisé, son développement. Or, en retournant aux fondements vygotskiens de l'ergonomie et de la CA, on constate que Vygotsky (2003) argumentait que le développement ne peut être étudié que s'il est provoqué: il faut donc transformer pour comprendre. C’est alors dans cette perspective que Clot (2008) construit son dispositif méthodologique qui inclut la constitution d’un collectif, des enregistrements vidéos de séances de classe ordinaire, des auto-confrontations simples et croisées et un retour au collectif. Pour Clot (2008), la transformation est possible si l’on permet de « redonner une histoire aux activités arrêtées » (p. 176). Pour ce faire, il tente de provoquer l’ouverture d’un dialogue intérieur qui ne peut se maintenir sans un relai social qui l’alimente en énergie conflictuelle. Ainsi, le sujet doit être confronté aux activités des autres qui sont différentes des siennes, une activité étant entendue comme une action couplée avec son sens, afin que soit alimenté un dialogue intérieur possiblement générateur de développement de l’activité du sujet. En ce sens, l’auteur pose le collectif de travail comme une source d’énergie conflictuelle détenant un pouvoir transformateur sur le sujet. Il insiste donc pour construire un cadre pour l’analyse du travail qui vise à maintenir ou à restaurer la vitalité dialogique du social. Ainsi, un effet collatéral (en quelque sorte) de recourir à la CA comme méthodologie en didactique des mathématiques est de participer à la formation continue des enseignants participant à l’expérimentation. De ce point de vue, les enseignants trouveraient possiblement un intérêt personnel et professionnel à participer à de telles recherches.

VII. CONCLUSION

Il reste toutefois plusieurs questions à travailler. En premier lieu, le dispositif méthodologique de la CA est conçu dans une optique d’analyse du travail et ne prévoit donc pas comment gérer les aspects didactiques. Pour ce faire, l’idée d’une articulation avec la Théorie de l’objectivation (Radford 2011, 2013), ancrée sensiblement dans les mêmes fondements épistémologiques, nous semble pertinente. On pourrait alors diriger la confrontation en CA en fonction des différents processus d’objectivation mis en place par les enseignants pour favoriser l’apprentissage des mathématiques par les élèves. En deuxième lieu, la posture du didacticien est forcément différente de celle de l’intervenant en ergonomie, expert en analyse du travail, en ce sens que le didacticien est un expert des processus d’enseignement et d’apprentissage des mathématiques. Or, l’ergonomie préconise une approche inductive et une suspension du jugement (Yvon & Garon 2006) possiblement plus naturelle pour néophyte du travail étudié. Le didacticien doit-il alors éviter d’introduire des résultats issus de la recherche dans la CA qui serait possiblement bénéfique pour les enseignants afin de se conformer à la tradition ergonomique? Peut-il ou doit-il, au contraire, profiter de sa position d’expert pour introduire dans le dispositif de l’énergie conflictuelle issue, de façon indirecte, d’enseignants ayant participé à d’autres recherches? Si ces questions et d’autres encore peuvent être résolues, nous croyons qu’un dispositif méthodologique inspiré de la Clinique de l’activité et possiblement articulé avec la Théorie de l’objectivation pourrait permettre de mieux comprendre l’activité ordinaire des enseignants de mathématiques enseignants à des ÉALS tout en leur permettant d’avoir accès à une formation continue basée sur l’expérience de leurs pairs et ancrée dans leurs situations d’enseignement respectives. Cela étant dit, si ce sont les difficultés vécues par les enseignants face à des situations d’enseignement des mathématiques à ÉALS qui a suscité cette proposition méthodologique, son utilisation pour l’étude didactique d’autres situations d’enseignement et d’apprentissage des mathématiques nous semble également pertinente.

REFERENCES

Abreu G. de, Gorgorió N. (2007) Social representations and multicultural mathematics teaching and learning. In Pitta-Pantazi D., Philippou G. (dir.) *Proceedings of the Fifth*

Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 1559-1566). Larnaca, Chypre: Department of Education, University of Cyprus.

Armand F. (2012) Enseigner en milieu pluriethnique et plurilingue: place aux pratiques innovantes! *Québec français* 167, 48-50.

Ball D. L., Lubienski S. T., Mewborn D. S. (2001) Research on teaching mathematics: the unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In Richardson V. (dir.) *Handbook of research on teaching (4e éd.).* New York: Macmillan.

Barwell R. (2013). Discursive psychology as an alternative perspective on mathematics teacher knowledge. *ZDM* 45, 595-606.

Bernardo A. B. I. (2002) Language and mathematical problem solving among bilinguals. *Journal of Psychology* 136, 283-297.

Bouchard R.. (2008) Accueil des Éna, efficacité et équité: la question de l'interpellation dans l'interaction scolaire. In Cuq J.-P. (dir.) *Culture d'enseignement, cultures d'apprentissage, observations comparées de l'action du professeur et des élèves dans des classes de français et mathématiques, en CM2 et en Sixième, dans des dispositifs d'intégration. Symposium du colloque international Équité et efficacité en éducation.* Rennes, France.

Chnane-Davin F. (2005) *Didactique du français langue seconde en France: Le cas de la discipline "français" enseignée au collège.* Thèse de doctorat. Aix Marseille 1.

Chnane-Davin F. (2011) Les contenus de savoir et la manière de faire des enseignants des classes d'allophones. *Actes du 2e colloque international de l'ARCD, les contenus disciplinaires.* Villeneuve d'Ascq: Université Lille 3.

Civil M. (2014) Guest Editorial: Musings around Participation in the Mathematics Classroom. *The Mathematics Educator* 23(2), 3–22.

Civil M., Planas N., Quintos B. (2005) Immigrant parents' perspectives on their children's mathematics education. *ZDM* 37(2), 81-89.

Clair N. (1995) Mainstream classroom teachers and ESL students. TESOL Quarterly, 29(1), 189-196.

Clot Y. (2008) *Travail et pouvoir d'agir.* PUF.

Cole M., Griffin, P. (1987). Contextual factors in education: Improving Science and Mathematics education for minorities and women. Madison: Wisconsin Center for Education Research.

Costanzi M., Gorgorió N., Prat M. (2012) Pre-service teachers' representations of school mathematics and immigrant children. In Hjörne E., van der Aalsvoort G., de Abreu G. (Eds.) *Learning, social interaction and diversity – exploring school practices* (pp. 203-222). Rotterdam: Sense Publishers.

Cummins J., Persad R. (2014) Teaching through a multilingual lens: the evolution of EAL policy and practice in Canada. *Education Matters: The Journal of Teaching and Learning* 2(1), 3-40.

Dillon P. W. (2001) Labeling and English language learners: Hearing recent immigrants' needs. In Hudak G. M., Kihn P. (Eds.) *Labeling: Pedagogy and politics* (pp. 93-105). London, England: Routledge Falmer.

Domite, M. C. S. et Pais, A. S. (2009). Understanding ethnomathematics from its criticisms and contradictions. In *Actes du CERME 6.* Lyon, France.

Elbers E. et de Haan M. (2005) The construction of word meaning in a multicultural classroom. Mediational tools in peer collaboration during mathematics lessons. *European journal of psycbology of education* 20(1), 45-59.

Faupin E. (2014) Les élèves nouvellement arrivés au collège en France: prendre la parole en classe lorsque l'on débute en français. Analyse des interactions didactiques pour les élèves en immersion. *Initio* 4, 33-49.

Félix C., Chnane-Davin F. (2008) Équité et efficacité dans les classes-dispositif pour élèves en difficulté linguistique. In Cuq J.-P. (Ed.) *Culture d'enseignement, cultures d'apprentissage, observations comparées de l'action du professeur et des élèves dans des classes de français et mathématiques, en CM2 et en Sixième, dans des dispositifs d'intégration. Actes du symposium du colloque international Équité et efficacité en éducation.* Rennes, France.

Gándara P., Maxwell-Jolly J., Driscoll, A. (2005) Listening to teachers of English language learners: A survey of California teachers' challenges, experiences, and professional development needs. *The Center for the Future of Teaching and Learning.* Santa Cruz: CA.

Gándara P., Rumberger R., Maxwell-Jolly J., Callahan R. (2003) English learners in California schools: Unequal resources, unequal outcomes. Education Policy Analysis Archives, 11(36).

Godley A. J., Sweetland J., Wheeler R. S., Minnici A., Carpenter B. D. (2006) Preparing teachers for dialectally diverse classrooms. *Educational Researcher* 35(8), 30-37.

Gorgorió N., Planas N., Vilella X. (2002) Immigrant children learning mathematics in mainstream schools. In de Abreu G., Bishop A. J., Presmeg N. C. (Eds.) *Transitions between contexts of mathematical practices* (pp. 23-52). Dordrecht: Kluwer.

Gorgorió N. et de Abreu G. (2009). Social representations as mediators of practice in mathematics classrooms with immigrant students. *Educational studies in mathematics* 72, 61-76.

Gorgorió N., Planas, N. (2001). Teaching mathematics in multilingual classrooms. *Educational Studies in Mathematics* 47, 7-33.

Gorgorió N., Prat M. (2009) Jeopardizing learning opportunities in multicultural mathematics classrooms. In César M. et Kumpulainen K. (Eds.) *Social interactions in multicultural setting* (p. 145-170). Rotterdam: Sense Publishers.

Gutiérrez R. (2002) Beyond essentialism: The complexity of language in teaching mathematics to Latina/o students. *American Educational Research Journal* 39(4), 1047-1088.

Gutstein E., Lipman P., Hernandez P., de los Reyes R. (1997) Culturally relevant mathematics teachers in Mexican-American context. *Journal for Research in Mathematics Education* 28(6), 709-737.

Harklau L. (1994) ESL versus mainstream classes: Contrasting L2 learning environments. *TESOL Quarterly* 28(2), 241-272.

Jao L. (2012) The Multicultural Mathematics Classroom: Culturally Aware Teaching through Cooperative Learning & Multiple Representations. *Multicultural Education* 19(3), 2-10.

Jones T. G. (2002) Preparing all teachers for linguistic diversity in K-12 schools. *Actes de Annual meeting of the American Association of Colleges for Teacher Education.* New York, NY.

Latu V. F. (2005) Language factors that affect mathematics teaching and learning of Pasifika students. In *Building connections: Research, theory and practice (Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Volume 2, p. 483-490). Sydney: MERGA.

Leplat J. (1992) *L'analyse du travail en psychologie ergonomique.* Octares: Toulouse.

Millon-Fauré K. (2010) Un phénomène d'oubli au début du collège chez les élèves migrants: source de difficulté pour les apprentissages. *Petit x* 83, 5-26.

Millon-Fauré K. (2011a) *Les répercussions des difficultés langagières dans l'activité mathématique en classe: le cas des élèves immigrants*. Thèse de doctorat. Université d'Aix-Marseille.

Millon-Fauré K. (2011b) Les répercussions des difficultés langagières dans l'activité mathématique en classe: le cas des élèves immigrants. *Actes du Deuxième colloque* *international de l’Association pour des Recherches Comparatistes en Didactique (ARCD). Les contenus disciplinaires.* Villeneuve d’Ascq, Université Lille 3.

Moore C. (1999) *Teacher thinking and student diversity*. n. p.

Moschkovich J. (1999) Supporting the participation of English language earning’s in mathematical discussions. *For the Learning of Mathematics* 19(1), 11-19.

Moschkovich J. (2000) Learning mathematics in two languages: Moving from obstacles to resources. In Secada W. G. (Ed.), *Changing the faces of mathematics: Perspectives on multiculturalism and gender equity* (pp. 85-93). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Mujawamariya D., Moldoveanu M. (2003) Les enseignants associés contribuent-ils à l’éducation multiculturelle des étudiants maîtres? In Duchesne H. (Ed.) *Recherche en éducation francophone en milieu minoritaire: regards croisés sur une réalité mouvante* (pp. 175-203). Winnipeg: Presses universitaires de Saint-Boniface.

Parrish T. B., Linquanti R., Merickel A., Quick H. E., Laird J., Esra, P. (2002) Effects of the Implementation of Proposition 227 on the Education of English Learners. *K - 12: Year Two Report.* Palo Alto, CA: American Institutes for Research.

Pettit S. K. (2011) Teachers’ beliefs about English Language Learners in mainstream classrooms: A Review of the literature. *International Multilingual Research Journal* 5(2), 123-147.

Poirier L. (1997) Rôle accordé aux interactions entre pairs dans l'enseignement des mathématiques - une illustration en classe d'accueil. *Éducation et francophonie* 25(1). Document téléaccessible à l’adresse <http://www.acelf.ca/c/revue/revuehtml/ 25-1/rxxv1-06.html>.

Radford L. (2011) Vers une théorie socioculturelle de l’enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments* 1, 1-27.

Radford L. (2012) *On the Development of Early Algebraic Thinking*. PNA, 6(4), 117-133.

Radford L. (2013) Three Key Concepts of the Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. Journal of Research in Mathematics Education, 2(1), 7-44.

Ramirez J. D., Yuen S. D., Ramey D. R., Pasta D. J. (1991*) Final report: Longitudinal study of structured English immersion strategy, early-exit and later-exit transitional bilingual education for language-minority children, Volume I.* San Mateo, CA: Aguirre international.

Ramirez J. D., Pasta D. J., Yuen S. D., Billings D. K., Ramey D. R. (1991) *Final report: Longitudinal study of structured English immersion strategy, early-exit and later-exit transitional bilingual education for language-minority children, Volume II*. San Mateo, CA: Aguirre international.

Reeves J. (2006) Secondary teacher attitudes toward including English-language learners in mainstream classrooms. *The Journal of Educational Research* 99(3), 131-142.

Ross K. E. (2014) Professional development for practicing mathematics teachers: a critical connection to English language learner students in mainstream USA classrooms. *Journal of Mathematics Teacher Education* 17(1), 85-100.

Rowlands S., Carson R. (2002) Where would formal, academic mathematics stand in a curriculum informed by ethnomathematics? A critical review of ethnomathematics. *Educational studies in mathematics* 50, 79-102.

Ryan P. M. (1995) *Foreign language teachers’ perceptions of culture and the classroom: A case study*. n. p.

Secada W. (1992) Evaluating the mathematics education of limited English proficient students in a time of educational change. In *U. S. Department of Education, Proceedings of the Second National Research Symposium on Limited English Proficient Student Issues:*

Focus on evaluation and measurement Vol. 2 (pp. 209-256). Washington DC: U.S. Department of Education, Office of Bilingual Education and Minority Language Affairs.

Secada W. G., Carey D. A. (1990) Teaching mathematics with understanding to limited English proficient students. Urban diversity series, 101. New York, N. Y.: Columbia University, Institute for urban and minority education.

Secada W. G., De La Cruz Y. (1996) Teaching mathematics for understanding to bilingual students. In Flores J. L. (Ed.), *Children of la frontera: binational efforts to serve Mexican migrant and immigrant students* (pp. 285-308). Charleston, WV: Appalachia educational laboratory.

Skovsmose O. (1994) Toward a Philosophy of Critical Mathematics Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vithal R., Skovsmose O. (1997) The end of innocence: a critique of "ethnomathematics". *Educational Studies in Mathematics* 34, 131- 158.

Vygotski L. S. (1985) *Pensée et Langage* (Trad. par F. Sève). Paris: Éditions sociales (1re éd. 1934).

Vygotski L. S. (2003) *Conscience, inconscient, émotions* (Trad. par F. Sève et G. Fernandez). Paris: La Dispute.

Walker A., Shafer J., Iiams M. (2004) "Not in my classroom": Teacher attitudes towards English language learners in the mainstream classroom. *NABE Journal of Research and Practice* 2(1), 130-160.

Young M. W. (1996) English (as a second) language arts teachers: The key to mainstreamed ESL student success. *English Journal* 85(8), 17-24.

Yvon F., Garon R. (2006) Une forme d'analyse du travail pour développer et connaître le travail enseignant : l'autoconfrontation croisée. *Recherches qualitatives* 26(1), 51-80.

Zittoun T. (2006) *Transitions: Development through symbolic resources.* Greenwich (CT): IAP.

Zittoun T. (2007) Symbolic resources and responsibility in transitions. *Young* 15(2), 193-211.

FORMALISME ET SIGNIFICATION EN MATHÉMATIQUES : PHÉNOMÈNES D'ANAPHORE ET QUANTIFICATIONS IMPLICITES

Viviane DURAND-GUERRIER[*]

Résumé – L'étude des relations entre formalisme et signification est une question vive en didactique des mathématiques, en particulier en ce qui concerne l'enseignement supérieur et la transition secondaire supérieur. Nous traitons ici du cas des phénomènes d'anaphore (reprise de pronom) étudiés en sémantique formelle pour les langues naturelles. Nous montrerons sur un exemple que ce phénomène se retrouve également en mathématiques en lien avec la pratique de quantification implicite des énoncés conditionnels et qu'il est susceptible de générer des difficultés chez les étudiants en début d'université.

Mots-clefs : anaphore, didactique des mathématiques, formalisme, sémantique formelle, signification

Abstract – The study of relationships between formalism and meaning is a clue question in didactics of mathematics, in particular for undergraduates. In this paper, we focus on the case of the phenomena of anaphora (resumption of pronoun) studied in formal semantics for natural languages. We illustrate on an example that this phenomenon also occurs in mathematics in connection with the practice of implicit quantification of conditional statements, and that it may generate difficulties for fresh university students.

Keywords: anaphora, didactics of mathematics, formalism, formal semantics, meaning

I. INTRODUCTION

Dans cette communication, nous nous intéressons aux relations entre formalisme et signification en mathématiques dans la perspective de la sémantique logique initiée par Frege et développée en particulier par Russel, Wittgenstein et Tarski (Rebuschi 2008 ; Durand-Guerrier 2005).

Contrairement à une idée commune qui tendrait à réduire les apprentissages mathématiques à l'acquisition d'un texte du savoir, en accord avec Vergnaud (1990), nous soutenons la thèse selon laquelle :

> Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. » (Op. cité, p.145)

Ceci ne veut pas pour autant dire que l'on peut réduire l'apprentissage des mathématiques à l'acquisition de savoir-faire et d'automatismes. En effet, Vergnaud poursuit :

[*] Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck – UMR 5149 CNRS Université de Montpellier - France – viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Durand-Guerrier V. (2015) Formalisme et signification en mathématiques. Phénomènes d'anaphore et quantifications implicites. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 731-740.

> Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets – arguments. (op. cité, p.145)

Dans la conférence qu'il donne en 2001 à Montréal à l'occasion de la remise du titre de Doctor Honoris Causas, Gérard Vergnaud revient sur les relations entre *forme opératoire* et *forme prédicative* de la connaissance.

> La suite naturelle du questionnement théorique concerne les relations entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance, notamment entre une règle, un théorème en acte et un théorème tout court. La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans les processus de conceptualisation. (Vergnaud 2002, p. 9)

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'illustrer certains aspects de cette complexité du *dire*, en nous référant pour nos analyses aux *catégories logiques fondamentales* : objets, propriétés, relations, et aux phénomènes de *quantification.*

Nous pouvons illustrer ce point avec l'exemple de la négation des énoncés universels. On peut observer en début d'université les deux phénomènes suivants :

1. Invités à prouver qu'un énoncé conditionnel universel est faux, la plupart des étudiants sont capables de mettre en œuvre la règle du contre-exemple (à savoir chercher un élément qui vérifie l'antécédent et qui ne vérifie pas le conséquent) au moins lorsqu'un tel contre-exemple est aisément disponible.
2. Invités à donner la négation d'un énoncé conditionnel universellement quantifié, un grand nombre d'étudiants parmi ceux qui sont capables de mettre en œuvre la règle du contre-exemple proposent comme négation un énoncé conditionnel, en plaçant la négation soit sur l'antécédent, soit sur le conséquent, soit sur les deux.

Pour traiter le premier point, les étudiants mobilisent une connaissance opératoire développée au cours des études secondaires. Les réponses à la deuxième question montrent que pour de très nombreux étudiants, cette connaissance opératoire n'est pas articulée avec la connaissance prédicative associée selon laquelle « nier un énoncé universel c'est affirmer l'existence d'un contre-exemple ». Ceci n'est guère surprenant dans la mesure où cette articulation ne fait le plus souvent l'objet d'aucun travail ni au lycée, ni à l'université. Or, articuler ces deux connaissances nécessite d'une part de pouvoir mobiliser *a minima* les deux connaissances opératoires : a) *nier une proposition revient à expliciter la paraphrase « il est faux que »* b) *pour prouver qu'un énoncé général est faux il suffit de produire un contre-exemple*, et d'autre part de connaître les définitions des connecteurs et des quantificateurs logiques ainsi que les règles syntaxiques associées. Ceci permet de produire une nouvelle connaissance prédicative : la négation d'un énoncé de la forme "*Pour tout* x dans E, *si* $A(x)$, *alors* $B(x)$" est l'énoncé "*Il existe* x dans E tel que $A(x)$ *et* non $B(x)$".

Gérard Vergnaud (2002) soutient en outre que

> parmi les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage des mathématiques, on peut mettre presque à égalité d'une part la complexité des classes de problèmes à résoudre et des opérations de pensée nécessaires pour les traiter, et d'autre part la complexité de certains énoncés et de certains symbolismes mathématiques. (Op cité)

Dans ce qui suit, nous allons illustrer cette complexité dans le cas des phénomènes d'anaphore en lien avec la quantification implicite des énoncés conditionnels. Le premier exemple est un exemple classique en sémantique formelle. Le second exemple est issu de mon travail de thèse (Durand-Guerrier 1996).

II. UN EXEMPLE CLASSIQUE D'ANAPHORE : LES *DONKEY SENTENCES*

Dans ce qui suit, nous reprenons la définition donnée par Corblin (2002) :

> Une anaphore est une expression linguistique qui reprend ou renvoie à une entité déjà introduite dans une phrase antérieure. Cette entité (mot, idée, etc.) s'appelle l'antécédent » ; ceci se manifeste en général par ce que l'on peut appeler une reprise de pronom. Ce phénomène est connu en sémantique formelle et analysé dans le cadre du paradigme des « *Donkey sentences* » (Op cité, p. 91)

L'exemple classique qui a donné son nom à ce paradigme est le suivant :

« Si *un fermier* possède *un âne*, alors *il le* bat » (1)

Dans cette phrase, le pronom « *il* » dans le conséquent renvoie à « *fermier* » dans l'antécédent, tandis que l'article « *le* » renvoie à « *âne* » ; on a donc une double reprise, avec un pronom sujet « *il* » et un pronom complément « *le* ».

La question qui se pose alors est celle de la manière dont on peut formaliser cet énoncé à l'aide des catégories logiques mentionnées plus haut et des quantificateurs. Un premier travail consiste à identifier les propriétés et/ou les relations en jeu : Corblin identifie deux propriétés « *être un fermier* » : nous noterons $F(x)$ la phrase ouverte « x est un fermier », et « *être un âne* » : nous noterons $A(y)$ la phrase ouverte « y est un âne ». Pour formaliser l'expression « *un fermier possède un âne* », on va recourir à une relation binaire $P(x,y)$ De même, on va recourir à une relation binaire $B(x,y)$ pour traduire « *un homme bât un âne* ». Le parcours des variables x et y est une population contenant à la fois des fermiers et des ânes. Le deuxième travail consiste à identifier la nature des quantifications en jeu, ce qui est rendu complexe par le fait que, en français, l'article indéfini « *un* » peut avoir plusieurs interprétations selon les conditions d'énonciation. Ainsi l'indéfini « *un* » peut selon les cas :
1/ désigner un élément singulier : *un chat* blanc dort sur le canapé ; 2/ exprimer l'existence d'au moins un élément : j'ai entendu *un chat* miauler ; 3/ avoir une valeur générique, au sens de n'importe lequel : *un chat* est un compagnon fidèle ; 4/ exprimer une quantification universelle implicite : si *un chat* tombe, il se remet sur ses pattes, que l'on peut reformuler en : *Tout chat* qui tombe se remet sur ses pattes.

Il n'est pas toujours facile de déterminer quelle est l'interprétation adéquate de l'article indéfini « *un* » dans une phrase en langue naturelle : par exemple, si vous dites « *un chat* ronronne » vous pouvez selon les contextes *faire référence à un chat particulier*, *affirmer l'existence d'un chat qui ronronne dans votre environnement* ou encore *exprimer une propriété satisfaite par tous les chats.* On peut voir là un effet de la sensibilité au contexte qui porte sur *l'interprétation des énoncés* comme le souligne Rebuschi qui note que « le contexte n'intervient pas seulement sur l'extension des expressions dans un domaine donné, il modifie le domaine de quantification. » (Rebuschi, 2008, p.120).

Revenons maintenant à notre exemple de *Donkey sentence*. Nous avons deux fois l'article indéfini « *un* ». Selon Corblin (2002), l'interprétation adéquate de « *un* » devrait être ici « *il existe* », ce qui conduirait à l'énoncé

« *si* Il existe x tel que [x est un fermier et il existe y [y est un âne et x possède y], *alors* x bat y » (2)

ou encore

$\exists x\big[[F(x) \wedge (\exists y A(y) \wedge P(x,y))]\big] \Rightarrow\ B(x,y)$ (2')

Corblin note que cette formalisation n'est pas satisfaisante : en effet, x et y sont liées dans l'antécédent, et libres dans le conséquent, si bien que l'anaphore n'est pas traduite dans la formalisation. Il propose alors, pour permettre le liage, de mettre les quantificateurs en tête de formule. Il propose alors la formule

$\exists x \exists y\ [(F(x) \wedge A(y) \wedge P(x, y)) \Rightarrow\ B(x, y)]$ (3)

A nouveau, cette formalisation ne convient pas ; en effet, la phrase initiale a une portée universelle (op. cit. p. 92)

Corblin ne mentionne pas une autre possibilité qui semblerait sans doute plus naturelle à un mathématicien, à savoir considérer que, compte tenu de ce que l'on a un énoncé conditionnel, le premier « *un* » correspond à une quantification universelle implicite, tandis que le second renvoie à une quantification existentielle, ce qui en reformulant donne la phrase « Pour tout fermier, s'il existe un âne que ce fermier possède, alors ***ce*** fermier bât *cet* âne. »
« Pour tout x, s'il existe y tel que $F(x)$ et $A(y)$ et $P(x, y)$, alors $B(x, y)$ » (4)

Cependant, cette formulation permet bien de rendre compte de la première anaphore sur « *un fermier* », mais ne permet pas de rendre compte de l'anaphore sur « *un âne* » puisque la variable y est liée dans l'antécédent, et libre dans le conséquent : la variable y qui est muette dans l'antécédent ne permet pas de faire une attribution d'objet, que l'on pourrait reprendre dans le conséquent. Comme l'indique Corblin, il faut modifier la portée du quantificateur existentiel en le plaçant en tête de formule.
Une première solution consiste à simplement déplacer le quantificateur existentiel pour produire l'énoncé ci-dessous

« Pour tout x, il existe y tel que *si* ($F(x)$ et $A(y)$ et $P(x, y)$, *alors* $B(x, y)$ » (5)

Mais cette formulation n'est pas satisfaisante. En effet, d'une manière générale, pour chaque fermier, on peut trouver un âne que cet homme ne possède pas, et pour un tel couple l'énoncé est vrai quel que soit l'interprétation de $B(x, y)$, si bien que l'énoncé (2) ne capture pas la signification de l'énoncé initial.

On va finalement choisir une troisième forme en remplaçant le quantificateur existentiel par un quantificateur universel

« Pour tout x, pour tout y, (*si* $F(x)$ et $A(y)$ et $P(x, y)$, *alors* $B(x, y)$ » (6)

ou encore

$\forall x \forall y[(F(x) \wedge A(y) \wedge P(x, y)) \Rightarrow\ B(x, y)]$ (6')

qui est la manière standard de formaliser les Donkey sentences en logique du premier ordre (Corblin, op. cit. p. 91)

Selon Davidson (1993), comprendre un énoncé, c'est savoir ce qui est le cas lorsqu'il est vrai ; corrélativement, c'est pouvoir reconnaître les cas dans lequel il est faux. L'énoncé (6) capture la signification de la phrase initiale au sens suivant : chaque fois que l'on considère un couple (Fermier, Ane), on peut regarder s'il vérifie l'antécédent et le conséquent. Dans le cas où on trouverait un couple vérifiant l'antécédent et pas le conséquent, on pourrait en déduire que l'énoncé proposé est faux.

On pourrait penser que ce type de phénomène est spécifique de la langue naturelle et a peu de chance d'apparaître en mathématiques. Je donne dans ce qui suit un exemple mettant en évidence que ces phénomènes d'anaphore sont également présents en mathématiques et qu'ils interrogent la pratique habituelle de quantification implicite des énoncés conditionnels. En effet, comme on a pu le voir ici, la restitution de la quantification dans l'énoncé ne va pas de soit, et selon les choix faits, ceci change les conditions de vérité de l'énoncé et partant sa signification.

III. UN EXEMPLE EN ANALYSE

L'exemple analysé ici est tiré de notre thèse (Durand-Guerrier 1996). Les résultats obtenus datent de plus de 20 ans. Le même énoncé a été donné par J. Njomgang-Ngansop à des étudiants camerounais dans le cadre de sa thèse ; les résultats obtenus sont très proches de ceux que nous présentons ci-dessous (Njomgang Ngansop 2013, p. 381).

Il s'agit du quatrième item d'un questionnaire visant à identifier si les étudiants savent dans quelles conditions il est possible ou non de faire une déduction, à partir d'un énoncé conditionnel affirmé.

> Dans ce qui suit, (u_n) désigne une suite définie par récurrence sous la forme :
> « $u_{n+1} = f(u_n)$ » où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On a alors le résultat suivant :
> Enoncé 4 : Si la suite (u_n) converge vers le réel *L*, alors *L* est solution de l'équation (E) : « $f(x) = x$ ».
> Questions :
> Que peut-on dire au sujet de la convergence de la suite (u_n) si :
> a) L'équation (E) n'a pas de solution?
> b) L'équation (E) a au moins une solution?
> Que peut-on dire au sujet des solutions éventuelles de (E) si :
> c) la suite (u_n) converge?
> d) la suite (u_n) ne converge pas?

Figure 1 *- Item A4 issu de Durand-Guerrier (1996)*

1. Structure logique de l'énoncé et phénomène d'anaphore

Considérons l'énoncé proposé aux étudiants

Si la suite (u_n) converge vers le réel *L*, alors *L* est solution de l'équation (E) : « $f(x) = x$ » (1)

Cet énoncé fait intervenir trois types d'objets mathématiques distincts: une suite numérique ; un réel et une équation; avec présence d'une fonction numérique comme objet intermédiaire articulant la suite et l'équation. Dans l'énoncé tel qu'il est donné, la fonction *f* a « disparu » de l'antécédent pour réapparaître dans le conséquent. On aurait d'ailleurs pu aussi la faire disparaître du conséquent en définissant E auparavant. On pourrait également ne pas introduire la lettre L, on aurait alors l'énoncé « minimal » suivant :

« Si la suite (u_n) converge, alors sa limite est solution de l'équation E » (2)

ou encore

« Si la suite (u_n) converge, alors sa limite est un point fixe de la fonction *f*. » (3)

Dans chacune de ces trois formes, on peut identifier un phénomène d'anaphore. Il est clairement visible dans l'énoncé (1) où la reprise porte sur la lettre *L*.

Dans les énoncés (2) ou (3), le phénomène est moins clair dans la mesure où la limite n'apparait pas explicitement dans l'antécédent, absorbé dans l'expression « (u_n) converge » ; elle réapparaît si l'on remplace « la suite (u_n) converge » par « la suite (u_n) admet une limite », ou encore par la définition explicitant la quantification existentielle : « il existe un réel *L* tel que la suite (u_n) converge vers *L* »

Les propriétés en jeu sont : $U(x)$: « *x* est une suite » - $F(y)$: « *y* est une fonction numérique » – $R(z)$: « *z* est un réel ».

Les relations en jeu sont : $I(x, y)$: « x est définie par récurrence à partir de y » : où x parcourt l'ensemble des suites définies par récurrence et y parcourt l'ensemble des fonctions numériques ; $C(x, z)$: « x converge vers z » où x parcourt l'ensemble des suites définies par récurrence à l'aide d'une fonction numérique, et z parcourt l'ensemble des réels et la relation binaire P(z, y) « être un point fixe de » où z parcourt l'ensemble des réels et y parcourt l'ensemble fonctions numériques.

Une formalisation possible rendant compte de ces propriétés et relations est la suivante

$$\text{Pour tout } x, [\text{si } [U(x) \text{ et } \exists y\ (F(y) \text{ et } I(x, y)) \text{ et } \exists z\ (R(z) \text{ et } C(x, z))], \text{ alors } P(x, z)]\ (4)$$

Cependant, comme on l'a vu dans les exemples précédents, ceci ne permet pas de rendre compte des phénomènes d'anaphores. Les analyses faites précédement pour les *Donkey sentences* montrent que pour formaliser ces énoncés en restituant la quantification, il faut mettre trois quantificateurs universels en tête de formule. On obtient l'énoncé suivant

$$\forall x, \forall y, \forall z\ [(U(x) \text{ et } F(y) \text{ et } R(z) \text{ et } I(x, y) \text{ et } C(x, z)) \Longrightarrow P(z, y)]\ (5)$$

Néanmoins, pour répondre aux questions posées dans l'exercice, on pourrait utiliser une version de l'énoncé faisant disparaître complètement la limite, sous la forme

« si la suite *u* converge, alors la fonction *f* a un point fixe » (6)

qui peut se formaliser en introduisant les propriétés « converger » pour les suites, notéee Γ, et « avoir un point fixe pour les fonctions numériques », notée Φ :

$$\forall x, \forall y, [[U(x) \text{ et } F(y) \text{ et } I(x, y) \text{ et } (\Gamma(x)] \Longrightarrow \Phi(y)]\ (7)$$

Dans les questions, l'énoncé de référence est celui où apparaît la limite que nous avons formalisé par (5). On se place dans le cas où les prémisses U(x), F(y), R(z) et I(x, y) sont vérifiée. On en déduit que l'énoncé ∀x, ∀y, ∀z « C(x, z) ==> F(z, y) » est vrai. C'est l'énoncé à partir duquel vont se faire les déductions.

2. *Motivations pour le choix de cet énoncé*

A l'époque de l'expérimentation (1992), cet énoncé est en général rencontré dès le lycée. On peut lire par exemple dans la brochure des programmes de mathématiques des classes de seconde, première et terminales de 1989 éditée par le Ministère de l'éducation nationale, dans le paragraphe consacré aux suites, à la rubrique travaux pratiques (p.129) :

« Exemples d'études du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, et d'approximation d'un point fixe de f à l'aide d'une telle suite.	Toute étude de ce type de suite devra comporter des indications sur la méthode à suivre. »

Figure 2- *extrait des programmes de mathématiques Classes de seconde, première et terminales de 1989*

3. *Quelques réponses d'étudiants arrivant à l'université*

Nous avions recueilli et analysés 293 questionnaires. La réponse exacte pour les quatre items a, b, c, d pris dans cet ordre était codée 2 3 1 3 : (a : la suite *u* ne converge pas ; b on ne peut pas savoir si *u* converge ou non; c : l'équation (E) a au moins une solution; d : on ne peut pas savoir si (E) a ou non des solutions). Nous avons montré lors de l'analyse a priori que cet item a une structure logique complexe et l'on peut s'attendre à des difficultés de traitement, ce qui est confirmé par les résultats obtenus. Cet énoncé se révèle en effet pour beaucoup d'étudiants d'un maniement délicat. D'une part, les objets mathématiques en jeu sont complexes, les suites en particulier sont rarement maîtrisées à l'arrivée à l'université. D'autre part, un trait saillant de la limite d'une suite est l'unicité, on peut penser que pour un certain nombre d'étudiants, cette unicité « se transmettra » à l'équation.

L'intérêt de cet énoncé est très grand du point de vue de l'heuristique dans le traitement des suites définies par récurrence : en effet, pour déterminer les valeurs possibles pour une limite éventuelle d'une telle suite, il est pertinent, lorsque c'est possible, d'étudier l'équation associée. Lorsque celle-ci n'a pas de solution, on peut affirmer sans recherche supplémentaire que la suite correspondante ne converge pas (question a). Lorsque la suite a au moins une solution (question b), il y a des « candidats » pour la limite; on peut alors faire des investigations pour savoir si l'un de ces candidats convient, et si oui lequel. Les raisonnements en jeu dans ce type de résolution sont complexes et ne peuvent pas être totalement algorithmisés, ce qui serait le cas si l'existence de la limite correspondait au seul cas d'une solution unique pour l'équation; ils nécessitent en particulier la capacité de reconnaître que la vérité du conséquent ne permet pas d'inférer celle de l'antécédent; nous avons ici un exemple illustrant l'importance de ce type d'étude pour l'activité mathématique. Nous indiquons ci-dessous les résultats obtenus dans l'expérimentation de 1992-1993.

	A4a	A4b	A4c	A4d
Réponse type 1	0%	52%	$\boxed{\underline{\textbf{79,1\%}}}$	0,4%
Réponse type 2	**81,3%**	2,9%	0,4%	53,4%
Réponse type 3	5,9%	**19,8%**	2,2%	**18,7%**
Réponse type 9	10,6%	21,6%	15,8%	22%
Non réponse	2,1%	3,7%	2,6%	5,5%

Figure 3 – les résultats à l'item 4 (Durand-Guerrier, 1996)[253]

Il apparaît immédiatement que pour la réponse attendue positive (obtenue par application du Modus Ponens) et négative (application du Modus Tollens), le taux de réussite est élevé. Il n'en est pas de même pour les deux items où la réponse attendue est de type 3 (on ne peut pas savoir) pour lesquels les taux de réussite sont faibles (moins de 20%). Dans les deux cas, la réponse obtenue en considérant la règle comme une équivalence a un score supérieur à 50% et la réponse codée 9 (autres réponses) un score supérieur à 20%, la quasi totalité des réponses se répartit entre les catégories 1, 3 et 9 pour les deux items à prémisse positive et entre les catégories 2, 3 et 9 pour les deux items à prémisse négative.

Nous avions demandé aux étudiants de justifier soigneusement leurs réponses. Certains l'on fait, nous donnant accès à leurs interprétations. Nous présentons ci-dessous quelques réponses que nous pouvons mettre en relation avec les phénomènes d'anaphore mis en évidence dans l'analyse *a priori*. Nous avons retenus ceux pour lesquelles la lettre *L* est en jeu.

Pour certains étudiants, *L* est considéré comme désignant un élément donné comme dans la copie 141 :

> A4b : Si l'équation a au moins une solution, cette solution peut être *L*, ou ne pas être *L*. Nous ne pouvons pas conclure sur la convergence de cette suite.

[253] Les pourcentages pour les réponses exactes sont en gras et soulignés

A4d : Si la suite ne converge pas, il est possible que E ait une ou plusieurs solutions, mais aucune de ces solutions n'est *L*.

L'étudiant pourrait avoir considéré que l'on a introduit un élément *L* dont on parle dans l'énoncé.

Ceci est encore plus clair dans la copie 83 :

A4a : Si E : « $f(x) = x$ » n'a pas de solutions alors la suite (u_n) ne converge pas vers *L* mais elle peut converger vers une autre valeur L'.
A4b : Si (E) admet au moins une solution, alors cette solution est *L* et la suite converge vers *L*. Dans ce cas lim $u_n = L$.
A4c : Si la suite (u_n) converge, il existe au moins une solution à l'équation et cette solution est *L*.

Dans ce cas, l'existence d'une solution semble assurer l'unicité de la solution, malgré l'utilisation de l'expression « au moins ».

On peut mettre en regard cette copie avec la copie 17 dans laquelle l'unicité de la solution de l'équation apparaît comme une condition nécessaire pour la convergence de la suite *u*, la lettre *L* semblant ici aussi être considérée comme étant donnée :

A4b : si l'équation (E) a une seule solution, c'est *L* et la suite (u_n) est convergente en *L*. Si l'équation (E) a plusieurs solutions la suite (u_n) n'est pas convergente car on ne peut converger qu'en un seul point.

Dans certaines copies, les étudiants semblent considérer que l'énoncé affirme que la suite *u* converge vers *L* et par suite cherchent à résoudre la contradiction entre cette affirmation et le fait que l'équation n'a pas de solution, comme dans la copie 258 :

A4a : La suite (u_n) converge vers *L* mais sans jamais atteindre la valeur *L*.

4. *Quelques commentaires*

Ces quelques exemples montrent que certains étudiants éprouvent des difficultés à manipuler la lettre *L* dans cet item. On peut observer que dans les réponses citées ci-dessus, le statut de *L* est celui de nom propre, plutôt que celui de variable dans le champ d'un quantificateur universel. Ceci rentre en conflit avec la dissymétrie entre l'unicité de la limite d'une suite convergente et la possibilité pour l'équation associée d'avoir plusieurs solutions, cette dissymétrie étant cachée par l'usage de la lettre *L*. Même s'il est clair que d'autres éléments interviennent dans les difficultés des étudiants : insuffisante maîtrise des objets en jeu – difficultés pour reconnaître les cas dans lesquels on peut faire une déduction à partir d'un énoncé affirmé, l'hypothèse de l'impact des phénomènes d'anaphore mis en évidence ne peut selon nous pas être écartée *a priori*. Les expérimentations conduite dans sa thèse par Judith Njomgang-Ngansop (2013) confortent cette hypothèse. Nous devons préciser que lorsque nous avions proposé cet item, nous n'avions pas mesuré la complexité de la structure logique. Ce sont les réponses des étudiants qui nous ont amené à étudier de manière plus précise la structure logique de l'énoncé. Les discussions en sémantique formelle sur les phénomènes d'anaphores apportent un premier éclairage qui nécessite d'être approfondi.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'analyse logique du langage permet de questionner l'illusion de transparence du langage mathématique, en particulier parce qu'elle permet de débusquer des ambiguïtés et des implicites. Par ailleurs, comme on l'a vu, lorsque les étudiants sont confrontés à des cas où les règles d'inférences ne s'appliquent pas, il doivent faire appel à leurs connaissances mathématiques. Les étudiants qui reconnaissent ces cas, cherchent parfois à donner une réponse « malgré tout » (c'est-à-dire ne se contentent pas de répondre *on ne peut pas savoir*) ; ils sont alors amenés à expliciter leurs connaissances relativement aux objets en jeu. De ce fait, certaines réponses pourraient servir pour étudier ou illustrer les conceptions des élèves et des étudiants sur ce type de suites. Ceci confirme la pertinence du calcul des prédicats pour étudier le raisonnement mathématique; en effet, comme nous l'avons déjà dit, dans ce modèle, pour décider de la vérité d'un énoncé lorsque les règles d'inférence classiques ne s'appliquent pas, le sujet est renvoyé aux objets en jeu, à leurs propriétés et aux relations éventuelles entre objets.

Dans nos travaux, nous faisons l'hypothèse que les outils offerts par les travaux en sémantique formelle sont susceptibles de nous aider à mieux comprendre les effets des difficultés qui relèvent de la structure logique des énoncés sur les apprentissages mathématiques.

Les exemples traités plus haut montrent que le repérage des anaphores pourrait permettre de déterminer plus rapidement les choix de formalisation permettant de capturer la signification des énoncés conditionnels implicitement quantifiés. En effet, la présence d'une anaphore induit des conditions sur le statut logique des lettres (une lettre muette ne peut pas faire l'objet d'une reprise car elle ne peut rien désigner). Une piste de recherche que nous souhaitons développer concerne l'analyse du discours des mathématiciens en position d'enseignants, du point de vue du traitement des questions du statut logique des lettres et des énoncés et des questions de quantification, en particulier en contexte plurilingue. Nous faisons l'hypothèse que l'analyse logique et la formalisation peuvent offrir une référence commune en situation d'enseignement plurilingue, lorsque la langue d'instruction n'est pas la langue maternelle, ce qui est souvent le cas dans l'enseignement supérieur et ce quel que soit les pays considérés. (Durand-Guerrier & al., à paraître). Nous ne sous-estimons pas néanmoins les difficultés d'appropriation d'un tel outil par des enseignants le plus souvent peu formés en logique.

REFERENCES

Corblin F. (2002) *Représentation du discours et sémantique formelle*, Paris : PUF

Davidson, D. (1993) *Enquête sur la vérité et l'interprétation*, éditions Jacqueline Chambon

Durand-Guerrier V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de l'Université Lyon 1.

Durand-Guerrier V. (2005) *Recherche sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches, Université Lyon 1.

Durand-Guerrier V., Kazima M., Libbrecht P.-J., Njomgang-Ngansop J. L., Salekhova L. N., Tuktamyshov N., Winslow C. (2015) Challenges and Opportunities for Second Language Learners in Undergraduate Mathematics. In Barwell et al. (Eds.) *Mathematics and Language Diversity, the 21st ICMI Study* (pp.85-101). Springer.

Njomgang-Ngansop J. (2013) *Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone : aspect épistémologique, didactique et langagier. Une étude de cas au Cameroun,* Thèse en cotutelle des Universités Lyon 1 et Yaoundé 1.

Rebuschi M. (2008) *Qu'est-ce que la signification* ? Paris : Vrin.

Vergnaud G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10(2.3), 133-170

Vergnaud G. (2002) Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In Portugais J. (Ed.) *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique* *des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation.* Actes du colloque GDM 2001, 6-27.

EVOLUTION DU PROCESSUS DE CONSTRUCTION DE LA SIGNIFICATION MATHÉMATIQUE DE LA FONCTION « COSINUS » À TRAVERS L'ÉTUDE DES SIGNES LANGAGIERS UTILISÉS

Faten KHALLOUFI-MOUHA[*]

Résumé – En se plaçant dans le cadre de l'approche théorique de la médiation sémiotique et en admettant l'hypothèse que le langage est l'outil le plus important pour le passage du plan inter-psychologique au plan intra- psychologique, nous étudions dans ce travail l'évolution du processus de construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus », à travers l'étude de l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors d'une séquence d'enseignement intégrant l'artefact technologique Cabri.

Mots-clefs : Théorie de la médiation sémiotique, signes langagiers, outil de médiation sémiotique, signification mathématique, discussion collective, artefact technologique.

Abstract – Using the theoretical approach of the semiotic mediation, this work is aimed to study the evolution from students' personal meanings to mathematically shared meanings in a teaching experiment integrating a technological artefact. We focus on the evolution of linguistic signs elaborated and used by the students and the teacher in order to identify the evolution the constructional process of significance of trigonometric function among the pupils.

Keywords: theory of the semiotic mediation, verbal signs, the construction of mathematical significance, collective discussions, the technological artefact.

I. INTRODUCTION

Les fonctions trigonométriques sont les premières fonctions périodiques et transcendantes enseignées au niveau du secondaire. L'une des sources de difficultés relative à l'enseignement et l'apprentissage de cette notion est la complexité épistémologique due à son introduction comme objet mathématique faisant partie du cadre de l'analyse en omettant ses liens avec le cadre géométrique de la trigonométrie (Khalloufi-Mouha & Smida 2012, p. 207). C'est ce qui nous a motivé à construire une ingénierie didactique permettant aux élèves d'appréhender le lien entre les aspects géométrique et fonctionnel de cette notion, en nous appuyant sur des travaux portant sur la notion de fonction (Sierpinska 1992 ; Falcade 2006 ; Falcade, Laborde et Mariotti 2007 ; Tall 1996). Nous avons choisi d'approcher les fonctions trigonométriques en tant que *covariation* c'est-à-dire en tant que *relation dynamique et asymétrique entre deux variations l'une dépendante de l'autre*. Cette approche nécessite la mise en place d'une expérience qualitative de la dépendance fonctionnelle en trigonométrie, qui fait appel aux

[*] Faculté des Sciences de Bizerte – TUNISIE – fkhalloufi@yahoo.fr

Khalloufi-Mouha F. (2015) Évolution du processus de construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus » à travers l'étude des signes langagiers utilisés. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 741-751.

lignes trigonométriques, et à l'idée de mouvement, première représentation de la variation dans l'espace et dans le temps. Dans cette perspective, certains travaux (Falcade, Laborde et Mariotti 2007, Tall 1996) considèrent qu'il est important de faire appel à un environnement de géométrie dynamique, qui permet d'analyser les relations géométriques en termes de relations de dépendance fonctionnelle.

En nous plaçant dans la lignée de ces travaux, nous avons construit une séquence expérimentale d'enseignement intégrant l'environnement de géométrie dynamique Cabri, dans le but d'étudier l'impact de cette intégration sur le processus de construction des connaissances mathématiques mises en jeu et sur les stratégies de communication utilisées par l'enseignant pour guider les élèves dans cette construction. La conception de cette expérimentation s'inscrit dans le cadre d'une perspective vygotskienne de médiation sémiotique, laquelle stipule que le langage est l'outil le plus important pour le passage du plan inter-psychologique au plan intra-psychologique. En effet, d'après Vygotsky (1938) le langage, en tant que système sémiotique de représentation, ne permet pas seulement de représenter la pensée comme fonction psychique supérieure, mais aussi de la maîtriser.

Dans ce travail, nous nous intéresserons à l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors des phases de travail par binômes et de discussions collectives (Bartolini-Bussi 1996) dans le processus de construction de la signification mathématique de la fonction cosinus par des élèves de 2^e^ année de l'enseignement secondaire tunisien (16-17 ans)

II. NOS APPUIS THEORIQUES

Cet article se place dans le cadre théorique de la médiation sémiotique (Bartolini Bussi & Mariotti 2008). C'est une approche d'inspiration vygotskienne, reposant sur l'hypothèse que l'activité d'enseignement est une activité médiatisée. Cette approche vise la transposition du concept de médiation sémiotique dans le domaine de la didactique (Bartolini Bussi & al. 2003) et considère le processus de construction des connaissances comme une conséquence d'une activité instrumentée où différents types de signes (langagiers, gestuels, symboliques, etc.) émergent et évoluent à travers les interactions sociales. Elle offre un cadre théorique qui permet l'étude de l'utilisation des artefacts dans le domaine de l'enseignement en tant qu'instruments de médiation sémiotique. En effet, un artefact peut être exploité par l'enseignant comme un outil de médiation sémiotique permettant de développer les signes mathématiques à partir de signes qui se détachent de l'utilisation de l'artefact, mais qui maintiennent néanmoins avec l'artefact un lien sémiotique (Mariotti 2009). Le potentiel sémiotique d'un artefact représente le double lien qui peut s'établir, d'une part, entre l'artefact et les significations personnelles émergeant de son utilisation et, d'autre part, entre cet artefact et les significations mathématiques évoquées par son usage, reconnaissables comme telles par un expert (Mariotti & Maracci 2010). Selon cette théorie, l'artefact entretient donc un double lien sémiotique : un premier lien *artefact/tâche* et un deuxième lien *artefact/connaissance mathématique*. Le lien entre *artefact/tâche* concerne le fait qu'un artefact permet d'accomplir une tâche spécifique. Cela favorise l'émergence des significations personnelles qui s'expriment essentiellement par des signes artefact (Bartolini Bussi & Mariotti 2008), constitués majoritairement de mots et d'expressions langagières. Le lien *artefact/connaissance mathématique* s'exprime par les signes mathématiques et revient à ce que tout artefact utilisé dans un objectif d'apprentissage est relié à une connaissance mathématique spécifique. La construction d'un lien entre les signes artefact et les signes mathématiques n'est ni spontanée ni triviale pour les élèves et peut constituer un objectif d'enseignement.

Selon la théorie de la médiation sémiotique, ce processus sémiotique de l'émergence et de l'évolution des signifiés personnels vers la signification mathématique visée par l'enseignement est réalisable à travers la construction et la mise en place d'une organisation didactique spécifique appelée le cycle didactique (Bartolini-Bussi & Mariotti 2008). C'est un cycle articulant trois types d'activités. Des activités faisant appel à l'artefact pour la résolution par les élèves (regroupés par binômes ou en petits groupes) de tâches spécifiques. La rédaction de rapports individuels à propos des activités élaborées dans la classe, favorisant la production individuelle des signes. Des discussions collectives orchestrées par l'enseignant qui constituent un contexte social favorisant la confrontation entre les différents signifiés personnels des élèves, en vue d'aboutir à la construction de la signification mathématique visée. Ces discussions peuvent atteindre le statut de discussions mathématiques au sens de Bartolini Bussi (1996).

III. PRESENTATION DE LA SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT

1. *Présentation et objectifs de la séquence*

Dans l'objectif d'introduire les fonctions trigonométriques à travers une articulation entre le cadre géométrique de la trigonométrie et le cadre fonctionnel, nous avons choisi de faire appel aux lignes trigonométriques et à l'idée de mouvement, première représentation de la variation dans l'espace et dans le temps, en faisant appel à l'environnement Cabri qui permet d'interpréter les relations géométriques en termes de relations de dépendance fonctionnelle.

Dans la construction de la séquence d'enseignement, nous avons cherché à organiser un milieu d'apprentissage permettant de construire des fonctions géométriques, à l'aide des outils déplacement et trace de l'environnement Cabri qui relient les objets géométriques de Cabri (cercle trigonométrique, arc de cercle, angle…). Le passage aux fonctions trigonométriques se fera alors grâce à la notion de mesure (mesure d'angle, mesure d'arc, mesure d'un segment, abscisse d'un point…) qui permet de passer d'une variable *géométrique* à une variable *numérique*, en interprétant la variation (le déplacement) d'un point en tant que variation numérique de ses coordonnées ou d'une certaine mesure, via l'idée de covariation et de variable (Khalloufi-Mouha 2014).

La séquence est composée de quatre parties. Les deux premières parties font appel à la situation « poulie » (Genevès, Laborde & Soury-Lavegne 2005). Il s'agit d'une situation de modélisation dans Cabri d'une poulie et d'une ficelle qui peut être enroulée autour de la poulie, en utilisant l'outil déplacement. L'objectif est de construire, avec les élèves, l'idée de relation de dépendance fonctionnelle entre l'ensemble des réels et l'ensemble des points du cercle trigonométrique. Nous supposons qu'il est important de matérialiser l'idée de cette relation entre la droite des réels et le cercle trigonométrique en faisant appel à l'idée d'enroulement qui consiste à enrouler la droite des réels sur le cercle trigonométrique. La situation poulie permet d'expérimenter l'enroulement dans un cadre géométrique fourni par l'environnement Cabri. En fait, la situation poulie permet de relier la mesure d'un arc du cercle qui représente la poulie, à une mesure rectiligne qui est celle de la ficelle. Ce résultat est très important mathématiquement pour l'introduction de la représentation graphique des fonctions trigonométriques et pour permettre aux élèves de construire un sens à la relation fonctionnelle entre la droite des réels et le cercle trigonométrique.

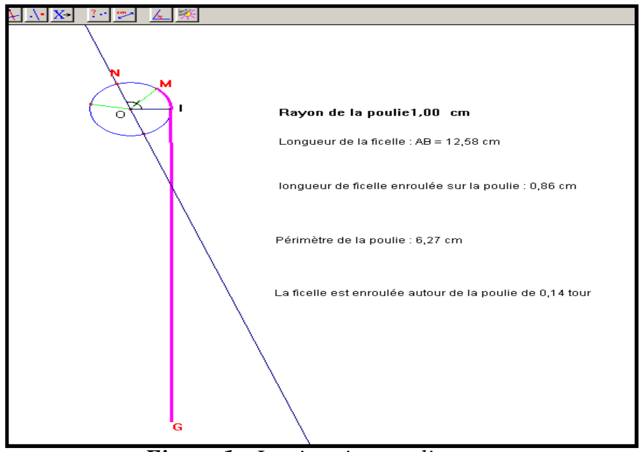


Figure 1 *- La situation poulie*

Dans la deuxième partie, l'utilisation de l'outil déplacement par l'enseignant vise à amener les élèves à associer à un réel quelconque *x* un point *M* sur le cercle trigonométrique, en reportant le nombre *x* sur le cercle trigonométrique. Nous faisons d'hypothèse que cette activité peut favoriser, chez les élèves, l'appréhension d'une relation fonctionnelle entre l'ensemble des réels et l'ensemble des points du cercle trigonométrique.

Les troisième et quatrième parties sont basées sur le fonctionnement des outils déplacement et trace de Cabri comme outils de médiation sémiotique pour les notions de variation et de covariation, dans le but d'introduire la fonction cosinus et sa représentation graphique. Dans ces deux parties la situation poulie n'est plus utilisée.

Dans la troisième partie, l'idée de relation fonctionnelle entre la droite des réels et le cercle trigonométrique est réinvestie en faisant appel à l'outil déplacement et report de mesure de Cabri. L'objectif est d'amener les élèves à associer à un réel quelconque *x,* abscisse d'un point de l'axe des abscisses, un point *M* sur le cercle trigonométrique cela en utilisant l'outil report de mesure qui permet de reporter le nombre *x* sur le cercle trigonométrique. Par la suite la fonction « cosinus » est introduite comme la composée de cette fonction avec la fonction qui associe au point M son abscisse.

L'objectif de la quatrième partie est de visualiser en utilisant l'outil trace de Cabri, la variation de l'abscisse de M en fonction de la variation de x ce qui revient à représenter graphiquement la fonction « cosinus ».

2. *Mise en place de la séquence*

La séquence a été mise en place dans une classe de 16 élèves de 2e année (16-17 ans) d'un lycée secondaire de la région de Bizerte Tunisie. La séquence a eu lieu dans un laboratoire d'informatique où les élèves étaient placés par binômes. Chaque binôme utilise un ordinateur et est amené à produire une réponse commune. Un micro est placé afin d'enregistrer les interactions entre les deux élèves.

Signalons que les élèves participant à l'expérimentation ont une certaine familiarité avec l'utilisation de logiciels dans la classe notamment le logiciel Cabri et ont déjà étudié les rapports trigonométriques dans un triangle rectangle, ainsi que les lignes trigonométriques où le cosinus et le sinus sont introduits comme les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique.

Différents types de données ont été recueillies (les productions des élèves, les fichiers Cabri, les rapports individuels, les enregistrements audio des différentes phases de travail et les rapports des observateurs). Les analyses qui suivent sont basées essentiellement sur les transcriptions des enregistrements audio, relatives à la phase de travail par binômes, ainsi qu'à la phase de discussion collective.

IV. METHODOLOGIE DE L'ETUDE DU PROCESSUS DE L'EVOLUTION DES SIGNIFIES DES ELEVES

L'étude du processus de construction de la signification mathématique de la notion de fonction « cosinus » est réalisée à travers l'analyse de l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves lors des différentes phases du travail, ainsi que de la façon dont l'enseignant exploite ces signes. Pour ce faire, nous avons distingué deux plans d'analyse.

1. Premier plan d'analyse : les signes simples

Les signes simples sont les signes artefact, les signes pivots et les signes mathématiques. Dans nos analyses, nous avons repéré pour chaque notion mathématique visée les différents signes simples langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant, puis nous les avons classifiés selon la signification mathématique à laquelle ils renvoient. L'utilisation de cette classification permet, d'une part, d'analyser l'état évolutif des interventions de l'enseignant dans le processus de médiation sémiotique et, d'autre part, d'analyser l'évolution des signifiés personnels des élèves, relatifs à la notion visée et cela à travers l'identification des types de signes langagiers utilisés. En effet, le passage de l'utilisation de signes artefact vers l'utilisation de signes pivot, pour une notion donnée, sera interprétée comme une évolution dans la construction de la signification mathématique de cette notion. Par exemple, le passage de l'utilisation de signes artefact tels que « on augmente », « on enroule », « on déplace » pour désigner l'idée de « variation » ou de « variable indépendante » vers l'utilisation du signe pivot « varier » et par la suite vers le signe mathématique « variable » constitue une évolution dans la construction de la signification de variable chez les élèves.

2. Deuxième plan d'analyse : Les signes complexes

En admettant que la signification d'un signe est déterminée par la position qu'il occupe dans un système de signes plus complexe (Peirce, 1978) nous avons fait appel à un deuxième plan d'analyse, celui des signes complexes repérés dans les interventions des élèves ou de l'enseignant et relatifs à des relations entre familles de signes simples (Falcade, 2006). Falcade distingue quatre catégories de signes complexes : les caractérisations, les définitions, les interprétations et les instanciations.

Les caractérisations portent de façon plus ou moins implicite sur des signes mathématiques, des signes pivots ou des signes artefact et ont tendance à mettre en valeur quelques caractéristiques qui pourraient être interprétées en termes mathématiques. Néanmoins, les caractérisations ne sont pas de vraies définitions, parce que l'intervenant n'a pas l'intention de définir l'objet en question.

Les définitions portent sur un signe mathématique cible. Elles visent explicitement et intentionnellement à expliciter, préciser, délimiter son signifié. Elles ne sont pas des définitions au sens mathématique du terme mais constituent une « mise en mots » sur un objet qui était jusqu'alors inconnu ou peu connu.

Les interprétations portent sur l'établissement d'une correspondance entre deux familles de signes qui appartiennent à deux champs sémantiques différents.

Les instanciations sont des signes qui concernent l'établissement d'un lien interprétatif entre deux signes simples, où l'un est directement issu de l'activité dans l'artefact et est associé à un nom propre et l'autre est un signe mathématique cible.

L'analyse de ces signes permet également d'étudier l'évolution des signifiés personnels des élèves relativement à une notion mathématique. En effet, nous supposons que la première étape dans la construction d'un signifié peut se traduire par l'utilisation des signes complexes du type caractérisation, ou bien par l'utilisation de signes complexes du type définition. La deuxième étape dans la construction d'un signifié peut s'interpréter par l'utilisation des signes complexes du type instanciation et interprétation, qui reviennent à donner une interprétation mathématique de l'activité avec l'artefact.

V. ÉTUDE DE L'EVOLUTION DU PROCESSUS DE CONSTRUCTION DE LA SIGNIFICATION MATHEMATIQUE

L'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors des différentes phases de la séquence d'enseignement est un processus complexe et très articulé. Dans cet article, nous nous limitons à l'étude de l'évolution des signes langagiers relatifs à l'idée de relation fonctionnelle favorisant l'introduction de la fonction cosinus comme une relation de covariation. L'analyse des différents types de signes langagiers met en évidence quatre étapes marquant l'évolution des signifiés personnels des élèves relatifs à la notion de fonction trigonométrique. Ces étapes sont identifiées selon les signifiés personnels que nous avons dégagés à partir de l'analyse des interventions des élèves.

1. *Étape 1 : Reconnaissance de la variation géométrique et numérique*

Cette étape est marquée par l'utilisation de signes très attachés à l'activité avec l'artefact qui apparaissent essentiellement sous la forme de signes artefact relatifs à l'identification de l'idée de variation géométrique et numérique. La situation poulie a fourni un contexte pour une exploration dynamique de la notion de fonction trigonométrique en tant que covariation à travers l'utilisation de l'outil déplacement de Cabri. Cela s'est traduit dans les interventions des élèves par une importante utilisation de signes artefact tels que des verbes d'action décrivant l'utilisation de l'outil déplacement, et en grande partie relatifs au mouvement c'est-à-dire à la variation géométrique. Parmi ces signes citons « se déplacer », « déplacer », « bouger » et « varier » (lorsqu'il est utilisé comme un signe artefact pour décrire le déplacement d'un point ou d'un autre objet géométrique), « changer » (lorsqu'il désigne le changement de la position) « retourner » « enrouler » « partir », « arriver », « atteindre » et « prendre ». L'utilisation de l'outil déplacement a permis également aux élèves d'identifier des variations de type numérique comme la variation du rayon et la variation de la mesure de la ficelle enroulée autour de la poulie. Ces variations numériques sont des conséquences des variations géométriques puisqu'elles engendrent des variations au niveau des mesures (mesure d'angles, arc, longueurs, etc.) ou des abscisses de points du plan. Cette identification s'est traduite dans les interventions des élèves par l'utilisation de signes relevant du domaine numérique comme « augmenter », « diminuer », « varier » et « changer ». Cette première étape se caractérise également par l'utilisation de signes complexes décrivant la variation dans l'espace et dans le temps. Par exemple, nous avons relevé deux types de signes complexes : le signe caractérisation de la mesure d'un arc par la mesure de la partie de la ficelle enroulée autour de la poulie ; le signe interprétation de la partie de la ficelle enroulée autour de la poulie en tant qu'un arc de cercle (objet géométrique), ainsi qu'en tant que mesure d'un arc (objet numérique).

L'extrait suivant illustre un exemple de l'interprétation de la longueur de la ficelle enroulée autour de la poulie comme la longueur de l'arc.

Moufida : C'est la longueur de la ficelle enroulée.
Alaa : Oui on a voilà la longueur de l'arc $\widehat{IM}$ c'est la longueur de la ficelle.
[…]
Alaa : Je dessine N sur le cercle et je la déplace.
[…]
Alaa : On a choisi des valeurs différentes de x…
Moufida : Et on a déplacé la ficelle de façon que M coïncide avec N sur le cercle.

2. *Étape 2 : Reconnaissance de la relation de covariation au niveau perceptif.*

Cette étape est identifiée à travers des interventions des élèves qui restent encore relatives au contexte de l'artefact mais qui attestent d'une généralisation et d'un premier détachement de l'artefact. Dans cette étape, nous avons repéré l'émergence du signe interprétation du déplacement en tant que variation géométrique ou numérique. Les interventions relevées montrent une élimination de la référence à l'espace et/ou au temps présente dans les signes artefact utilisés dans la première étape et un passage vers l'utilisation d'expressions telles que « *lorsque je déplace le point M, la mesure de l'arc varie* ». Les élèves arrivent également à reconnaitre le lien entre deux variations. Cela apparait à travers l'utilisation d'expressions tels que « quand X varie alors Y varie » ou comme « si X varie alors Y varie », attestant ainsi d'une reconnaissance de la variation indirecte.

3. *Étape 3 : interprétation mathématique de l'activité avec l'artefact*

Cette étape se caractérise par l'utilisation de signes pivot comme « dépend de » ou « en fonction de » qui remplacent les expressions telles que « si X varie alors Y varie. », présentes dans l'étape précédente. Cette utilisation reflète la prise en considération par les élèves du lien fonctionnel entre les deux variables et constitue un indice d'une évolution au niveau des signifiés personnels relatifs à la notion variation et de covariation. Cette étape comporte également des signes complexes tels que des interprétations mathématiques de l'activité dans l'artefact, ce qui permet aux élèves d'évoluer dans la construction d'une signification mathématique de la notion de fonction trigonométrique (Khalloufi-Mouha 2012).

L'extrait suivant montre l'utilisation du signe pivot en « fonction de » de la part des élèves et met en évidence l'utilisation d'un signe complexe « *N : Oui si je change N alors la mesure de l'angle $\widehat{ION}$change.* » qui atteste l'établissement d'une relation de dépendance entre la mesure de l'angle et la mesure de l'arc. Nous interprétons ceci comme une tentative d'interprétation mathématique de l'activité avec l'artefact.

N : Oui si je change N alors la mesure de l'angle$\widehat{ION}$change.
I : Fais varier N puis mets le M sur le N. Tu vas trouver l'arc... mesure l'arc.
N : L'arc en fonction de l'angle ?
I : Avec la ficelle...encore...encore...voila c'est le double.
N : Oui ça devient plus grand. Si je fais l'angle$\widehat{ION}$ le double on a la mesure de l'arc c'est le double.
I : Donc l'arc varie en fonction de l'angle.

L'extrait renvoie également à une interprétation de la simultanéité de la variation de l'angle et de l'arc suite au déplacement comme une relation de dépendance fonctionnelle cela reste cependant au niveau très attaché à l'artefact.

Signalons que dans cette troisième étape, certains binômes sont arrivés à l'interprétation de façon spontanée alors que, pour certains binômes, l'interprétation de la simultanéité de la variation dans Cabri en termes de relation fonctionnelle n'était pas immédiate et a nécessité l'intervention de l'enseignant, à travers la mise en place de discussions locales avec le binôme. Ces discussions correspondent aux phases de mini-discussion collective (Khalloufi-Mouha, 2009) et sont déclenchées suite à l'apparition d'un blocage ou d'une déviation importante de l'objectif de travail lors de la phase de travail par binôme. Elles constituent l'occasion d'une confrontation entre les signifiés personnels ayant engendré le blocage des élèves et la signification mathématique de la notion mathématique visée. Dans ces phases, l'enseignant fait appel à l'activité avec l'artefact afin de faire évoluer la situation. Il utilise des signes artefact ainsi que des signes pivot. Il s'appuie sur l'activité avec l'artefact pour amener les élèves à dépasser certaines difficultés et engendre alors un changement au niveau des significations construites.

4. *Etape 4 : Définition mathématique de la fonction « cosinus »*

Trois types de relations fonctionnelles marquent cette étape qui mène à l'introduction de la signification mathématique de la fonction cosinus en tant que relation entre deux variations. Les élèves sont amenés à identifier et construire trois types de fonctions en se basant sur l'interprétation de la simultanéité du déplacement dans Cabri comme une relation de dépendance fonctionnelle qui a fait l'objet de l'étape précédente :

- identification et construction de relation de dépendance fonctionnelle entre des variables géométriques (fonctions géométriques Laborde & Mariotti 2002) :
- identification et construction de relation de dépendance fonctionnelle entre une variable géométrique et une variable numérique (fonction numérico-géométrique et fonction géométrico-numérique :
- identification et construction de la relation de dépendance fonctionnelle entre deux variables numériques en s'appuyant sur les deux types de fonctions précédentes.

Ces constructions font l'objet des activités proposées et sont guidées par l'enseignant lors des phases de mini-discussion et de la phase de discussion collective. Au cours de ces constructions, l'enseignant fait appel à l'activité avec l'artefact et lui donne une interprétation mathématique. Pour l'enseignant, l'environnement Cabri joue le rôle d'un milieu sur lequel il se base pour introduire la signification mathématique de la fonction cosinus. L'enseignant part donc d'une expérience pratiquée par tous les élèves, pour d'abord étendre la métaphore au-delà de la longueur de la ficelle et de l'idée de l'enroulement, et pour passer ensuite de cette métaphore à l'idée de variation et de covariation, puis à l'introduction de la fonction « cosinus ».

Cette étape se caractérise par l'apparition d'une utilisation, de la part des élèves, de signes mathématiques relatifs à la classe de fonction, essentiellement lors de la discussion collective. Parmi ces signes, il y a des signes introduits par l'enseignant puis utilisés par les élèves, comme par exemple « fonction », « relation » « la fonction cosinus », « associe », etc. Nous avons également repéré des formulations de type mathématiques comme par exemple *« La fonction f qui associe le point M du cercle au point N. »*

L'extrait suivant décrit un exemple de la guidance de l'enseignant dans une phase de mini-discussion et la figure correspondante.

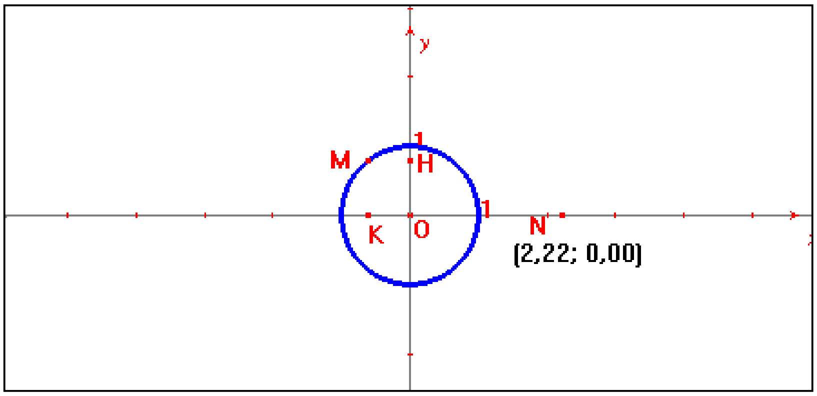


Figure 2 *- la figure relative à la troisième partie de la séquence*

I : nous n'avons pas compris qu'est ce que nous devons faire ?
Prof : regardez. Si je change *x*, qu'est ce qui va varier en fonction de *x* ?
I : est ce que c'est une fonction que nous devons définir ?
Prof : oui. Nous cherchons à définir une fonction. Regardez. Que faut-il faire pour varier *x* ?
N : il faut déplacer le point *N*
Prof : Si la position de *N* change, qu'est ce qui va changer ?
N : la position de *M*.
Prof : Alors, est-il possible de définir une fonction ?
I : Oui, la fonction qui associe *M* à *N*.
Prof : Ok, comment peut ont décrire cette fonction ?
I : la fonction *f* de *IR* à *C* (le cercle trigonométrique)……qui associe *M* à *x*….non qui associe *M* à *N*.
N : La fonction *f* qui associe le point *M* du cercle au point *N*.
Prof : Bien, qu'est ce qui change si je déplace *N* ?
Les deux élèves : Les points *H* et *K*.
Prof : les points *H* et *K*. Alors, nous pouvons considérer une fonction qui associe le point *K* au point *N*.

Concernant la transition entre trigonométrie et fonctions trigonométriques, l'utilisation de signes mathématiques tels que « cosinus », « cosinus de l'angle », « arc » et « fonction » montre que les élèves parviennent, lors de la phase de travail par binôme, à faire le lien entre la fonction demandée (la fonction qui associe à un réel x l'abscisse du point M) et la ligne trigonométrique cosinus. Cela atteste l'établissement, de la part des élèves, d'un lien entre la ligne trigonométrique et l'aspect fonctionnel. Nous avons par exemple relevé l'interprétation en termes géométriques du signifié de variable numérique en reliant la variation de x à la variation du point N créé au début de la troisième partie. Cet extrait est une partie des interactions du binôme Moufida et Alaa lors de la phase de travail par binôme au niveau de la quatrième partie de d'expérimentation.

[Moufida lit la question] Pouvez-vous définir une *relation* qui permet de passer du réel x (choisi au début de cette activité) à l'abscisse du point M. Donner un nom à cette *relation*.

A : K a la même abscisse que M.
M : à tout point M on associe l'abscisse de ce point.
A : On commence par x. à tout x on associe l'abscisse du point M.
M : L'abscisse c'est le cosinus de l'angle $\widehat{IOM}$.

Ce lien entre la ligne trigonométrique et l'aspect fonctionnel a été utilisé par la suite par l'enseignant lors de la phase de discussion collective afin de permettre la transition entre trigonométrie et fonctions trigonométriques, comme le montre l'extrait suivant de la dernière discussion collective :

> P : Alors si je m'intéresse par exemple au point K est ce que vous pouvez définir une fonction entre N et K ?
> N : Oui la fonction qui au point N associe K.
> P : D'accord, si je reprends dès le début, on a commencé par choisir un réel x, si on fait varier ce réel le point N varie et par conséquent le point K varie. C'est ça ? Alors est ce qu'on peut définir une relation entre le réel x et le point K ?
> Alaa : Qui à x associe le point K.
> I : La fonction de IR dans…. Pour tout réel x on associe K dans l'intervalle [-1,1].
> […]
> P : Voilà, K est le point de l'axe (OI) qui a la même abscisse que M. Pour résumer vous avez défini une fonction de IR dans le segment [II'] qui à tout réel x associe le point K et ce point K, comme vient de nous lire Ikbel, a la même abscisse que M. Alors… est ce que vous pouvez définir maintenant une relation entre x et l'abscisse de M.

Dans ses interventions, l'enseignant fait appel à des signes complexes relevant d'une interprétation des variations géométriques en termes de variations numériques et par l'interprétation de la simultanéité du déplacement de deux points dans Cabri comme une relation de dépendance fonctionnelle. L'extrait montre également une interprétation de la variation géométrique comme une variation numérique et cela en reliant la variation du point N à la variation de son abscisse ainsi que la variation du point K à la variation de son abscisse.

VI. CONCLUSION

L'importance épistémologique d'introduire la notion de fonction trigonométrique en tant que covariation afin de faire le lien entre la trigonométrie et les fonctions trigonométriques nous a amenée à concevoir et expérimenter une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique et visant l'introduction de la fonction « cosinus ». Dans cet article nous avons cherché à étudier l'évolution du processus de construction de la signification mathématique de la fonction « cosinus » à travers l'analyse de l'évolution des signes langagiers élaborés et utilisés par les élèves et l'enseignant lors des différentes phases de travail. Le processus d'interaction en classe s'est avéré très lent, complexe et articulé. L'analyse des signes langagiers nous a permis d'identifier quatre étapes pouvant marquer l'évolution du processus de construction de la signification mathématique visée. Cela constitue un exemple des apports potentiels d'une analyse logique du langage pour les études en didactique des mathématiques. Notre étude ne vise pas l'élaboration d'un modèle du processus de construction d'une signification mathématique dans le cas de l'utilisation d'un artefact technologique, compte tenu de la spécificité de l'expérimentation et le fait que notre travail s'est limité à l'analyse des signes langagiers. Néanmoins, cette étude permet de donner un éclairage sur un aspect de ce processus qui reste complexe et très articulé.

L'analyse des différentes phases de la séquence expérimentale nous a également permis de confirmer l'importance du rôle de l'enseignant pour amener les élèves à se détacher de l'activité avec l'artefact et à parvenir à une interprétation mathématique, en se basant sur cette activité comme un milieu commun expérimenté par toute la classe. Il nous semble alors important de souligner dans ce type de séquence d'enseignement la nécessité d'une certaine familiarisation de l'enseignant avec l'utilisation de l'artefact et la gestion des phases de discussion collective pour mener à bien ce type de séance. Cette considération peut donner aux résultats de la séquence étudiée un aspect local et particulier qui n'est pas directement généralisable au niveau de l'enseignement. Une étude plus fine des stratégies de l'enseignant dont l'objectif est de décrire la manière dont les interventions de l'enseignant peuvent être façonnées pour favoriser l'évolution des significations personnelles des élèves vers les connaissances mathématiques s'avère nécessaire.

REFERENCES

Bartolini Bussi M. G. (1996) « Mathematical discussion and perspective drawing in primary school » – *Educational Studies in Mathematics* 31, 1-2 (11-41).

Bartolini Bussi M. G., Mariotti M. A., Ferri F. (2003) Semiotic mediation in the Primary School : Durer's glass. In Hoffmann H., Lenhard J., Seeger F. (Eds.) *Activity and Sign Grounding Mathematics Education (Festschrift for Michael Otte).* Dordrecht : Kluwer Academic.

Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom : Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In English L. D., BartoliniBussi M. G., Jones G. A., Lesh R., Tirosh D. (Eds.) *Handbook of international research in mathematics education, 2nd revised edition* (720-749). Mahwah, NG : Lawrence Erlbaum Associates.

Falcade R. (2006) *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives, dans des séquences d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction.* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Falcade R., Laborde C. & Mariotti M. A. (2007) « Approaching functions : Cabri tools as instruments of semiotic mediation » – *Educational Studies in Mathematics* 66, 3 (317-333).

Genevès B., Laborde C., Soury-Lavergne S. (2005) The room of transformations and functions with Cabri-geometry. *L'insegnamento della matematica e dellescienze integrate*, numero speciale 11-14.

Khalloufi-Mouha F. (2009) *Étude du processus de construction du signifié de fonction trigonométrique chez des élèves de 2^e^ année section scientifique*. Thèse de doctorat, Université de Tunis.

Khalloufi-Mouha F. (2012) Étude de l'évolution des pratiques d'un enseignant lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique. In Dorier J. L., Coutat S. (Eds.) *Actes du colloque EMF 2012*. Université de Genève.

Khalloufi-Mouha F., Smida H. (2012) Constructing mathematical meaning of a trigonometric function through the use of an artifact. In *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education* XVI, (207-224).

Khalloufi-Mouha F. (2014) Etude de l'évolution des signes langagiers lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique. *Spirale* 54, (49-64).

Laborde C., Mariotti M. A. (2002) Grounding the notion of function and graph in DGS. *Actes de Cabri World 2001*, Montreal.

Mariotti M. A. (2009) Artifacts and signs after a Vygotskian perspective : the role of the teacher. *ZDM Mathematics Education* 41, (427-440).

Mariotti M. A., Maracci M (2010) Un artefact comme outils de médiation sémiotique : une ressource pour l'enseignant. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-107). Rennes : PUR et INRP.

Peirce C. S. (1978) *Écrits sur le signe* (rassemblés, traduits et commentés par G. Deledalle). Paris : Le Seuil.

Sierpinska A. (1992) On understanding the notion of function. In Harelet G., Dubinsky E. (Eds.) *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*, *MAA notes 25* (pp. 25-58).

Tall D. (1996) Understanding the processes of advanced mathematical thinking. *L'enseignementmathématique* 42, (395-415).

Vygotski L. (1938/1997) *Pensée et Langage*. Paris : La Dispute (3e éd).

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LE CHANGEMENT DE LANGAGE DANS L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

Judith NJOMGANG NGANSOP[*] – Patrick TCHONANG YOUKAP[**]

Résumé – Le travail que nous présentons porte sur le changement de langage en mathématiques. Dans l'enseignement supérieur, la plupart des théorèmes et des définitions sont donnés dans la langue naturelle. Ils sont facilement compréhensibles, mais pas opératoires. Pour les utiliser dans les démonstrations, les étudiants doivent pouvoir les écrire dans le langage formel. Nous présentons brièvement des résultats de deux enquêtes auprès des étudiants de première et de deuxième année de licence de mathématiques, qui montrent que cette activité est source de difficulté pour cette population. Un travail exploratoire nous conduit à faire l'hypothèse que la pratique des langues locales peut avoir des interférences dans le langage mathématique

Mots-clefs : didactique des mathématiques, logique, langage, quantification, implication.

Abstract – The work we present is about the change of language in mathematics. In the higher education, the most of theorems and definitions are given in the natural language. They are easy understandable, but not operating. To use it in the demonstrations, students must be able to write it in the formal language. We briefly present the results of two surveys of undergraduate and graduate students, which show that this activity is a source of difficulty for them. An exploratory work leads us to hypothesize that the practice of local languages may interfere in the mathematics' language.

Keywords: didactic of mathematics, logic, language, quantification, implication.

I. INTRODUCTION

En mathématiques, à l'université, la plupart des théorèmes et définitions sont donnés dans la langue naturelle, ce qui cache la structure logique des énoncés. A ce niveau d'étude, les démonstrations sont généralement construites dans le langage mixte ou formel. Il est donc essentiel de pouvoir identifier la structure logique des énoncés à prouver en les réécrivant dans le langage formel. En effet, l'écriture formelle d'un énoncé apporte des informations dans des activités de preuve :

- comment prouver cet énoncé ;
- comment utiliser l'énoncé dans une preuve.

Ce point de vue est renforcé par les résultats des travaux de Selden & Selden (1995) qui montrent que la capacité des étudiants à expliciter la structure logique des énoncés informels[1]

[*] Université de Yaoundé I, École Normale Supérieure de Yaoundé – Cameroun – judithnjomg@yahoo.fr

[**] Université de Yaoundé I, École Doctorale – Cameroun – patricktchonang@yahoo.fr ;

[1] Enoncés donnés dans le langage courant

Njomgang Ngansop J., Tchonang Youkap P. (2015) Le changement de langage dans l'activité mathématique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT8, pp. 752-764.

participe fortement de la construction de la structure de la preuve de ces énoncés et a une part importante dans la construction et la validation des preuves.

Or, les activités de changement de langage sont pour beaucoup d'étudiants une source de difficultés (Duval 1988).

Nous faisons l'hypothèse que dans le contexte universitaire camerounais, les résultats de ces auteurs restent actuels, l'apprentissage du langage du calcul des prédicats n'étant effectué ni dans le secondaire, ni dans l'enseignement supérieur. À ceci s'ajoutent les difficultés éventuelles liées à l'apprentissage des mathématiques dans une langue autre que la langue maternelle (Durand-Guerrier & al. 2014).

Dans notre travail, nous nous intéressons au changement de langage (du langage courant au langage formel) pour les énoncés quantifiés. Nous présentons brièvement dans une première partie, quelques résultats d'une étude épistémologique des concepts de quantification et d'implication. Dans une deuxième partie, nous exposons les raisons pour s'intéresser à la question du changement de langage et dans une troisième partie, nous présentons et analysons les résultats d'une enquête conduite auprès des étudiants de deuxième année de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé[2].

Nous avons choisi comme cadre théorique de notre travail, le calcul des prédicats, cadre idoine pour l'analyse du discours mathématique (Durand-Guerrier 1996 ; Durand-Guerrier & Arsac 2003).

II. LA QUANTIFICATION ET L'IMPLICATION

La notion de quantification est une formalisation de la notion de quantité dans la langue naturelle.

1. *La quantification et le calcul des prédicats*

Dans le langage du calcul des prédicats standard, il existe deux quantificateurs : le quantificateur universel noté $\forall$ dont la signification dans la langue parlée est *tous*, et le quantificateur existentiel noté $\exists$ dont la signification dans la langue parlée est *il existe au moins un*.

Dans la langue naturelle, plusieurs mots et expressions expriment la notion de quantité : *pour tout*, *quel que soit*, *chaque*, qui sont synonymes de *tous* ; *certains*, *plusieurs* qui sont synonymes de *il existe au moins un*, puis, *il existe un unique*, *aucun*, qui ne sont pas modélisés, mais se traduisent par des formules complexes. Dans le langage courant, le mot *un(e)* est très utilisé. Il rentre dans le groupe de déterminants que F. Corblin (1996) appelle les indéfinis au sens étroit. Il en donne plusieurs interprétations :

- dans le cadre de la logique des prédicats, il cite Russell qui donne la traduction canonique du mot anglais *a* par le quantificateur existentiel ;
- dans le cadre de la Théorie de la Quantification Généralisée (TQG), il est considéré comme un quantificateur universel ;
- dans la Théorie des représentations du discours (DRT), *un* introduit une variable d'individu, c'est-à-dire, un générique.

Étant donné un domaine d'interprétation, le quantificateur universel transforme une phrase ouverte en une proposition vraie lorsque tous les objets de l'univers du discours satisfont la

[2] Ecole de formation des professeurs de lycées d'enseignement général et de professeurs de collèges

phrase ouverte, sinon, la proposition est fausse. Une formalisation d'un énoncé universellement quantifié est « $\forall x, P(x)$ » où x est une variable et P une fonction propositionnelle.

Un énoncé universellement quantifié est faux dès qu'il existe une instance de la phrase ouverte qui est fausse. Il se peut dans certains cas, que toutes les instances soient fausses.

La prise en compte du domaine de quantification est essentielle pour déterminer la valeur de vérité d'un énoncé quantifié.

Le quantificateur existentiel, quant à lui, transforme une phrase ouverte en une proposition vraie si au moins un élément de l'univers du discours satisfait la phrase ouverte. Dans le cas où aucun objet de l'univers du discours ne satisfait la phrase ouverte, la proposition est fausse. Une formalisation d'un énoncé existentiel est « $\exists x, P(x)$ » où P et x sont définis comme précédemment.

Il faut signaler que dans le langage courant, le quantificateur existentiel n'est pas souvent explicité. Pour traduire une phrase donnée dans le langage courant dans le langage du calcul des prédicats, on est amené à éclaircir son sens. C'est le cas par exemple de la phrase « *Tout nombre entier supérieur ou égal à 2 a un diviseur premier* », où n'apparait pas le quantificateur existentiel. Cette phrase se formalise ainsi :

$\forall n, (((n \in \mathbb{N}) \wedge (n \geq 2)\ ) \Rightarrow \exists p, R(p) \wedge (p/n)\ )$, R étant le prédicat « être premier ».

Tant pour la quantification universelle qu'existentielle, on voit l'importance de l'univers du discours sur lequel porte cette quantification.

On peut à partir des formules atomiques, des connecteurs logiques et des quantificateurs, construire des énoncés complexes. Mais la détermination de la valeur de vérité de ces énoncés n'obéit plus pour la plupart, au principe de vérifonctionnalité comme c'était le cas dans le calcul des propositions, du fait que dans le calcul des prédicats, « les propositions complexes ne sont pas des agrégats de propositions plus simples » (Tarski, 1950, 1972). En effet, beaucoup d'énoncés complexes sont constitués d'énoncés imbriqués les uns dans les autres, comme le montre cet exemple :

$\forall f\ \forall a[(\forall u\ (F(u,a)\ \Rightarrow\ G(f,u,a))\ \Rightarrow H(f,a)]$, où F, G et H sont des relations.

C'est la notion de *satisfaction* qui va permettre d'étendre les connecteurs logiques propositionnels au calcul des prédicats, qui de ce fait est vu comme une extension du calcul des propositions.

5. L'IMPLICATION

Dans le calcul des propositions, l'implication est un connecteur binaire qui relie deux variables p et q pour donner la formule notée $p \Rightarrow q$ qui modélise un énoncé conditionnel. On l'appelle implication matérielle ou conditionnel matériel. p et q sont respectivement appelés antécédent et conséquent.

Un tel énoncé n'est faux que dans le cas où son antécédent est vrai et son conséquent est faux. Il est donc vrai dans les trois autres cas.

Dans le langage naturel (ou langage courant), l'implication qu'on retrouve sous la forme « *si …, alors…* » n'engage généralement le locuteur que si l'antécédent est vrai. C'est ce que Quine (1950) a appelé le conditionnel courant. L'utilisation de « *si …, alors…* » dans le langage courant peut induire chez les élèves la *propriété-en-acte de causalité*[3] (Deloustal-Jorrand 2000-2001) selon laquelle il y a un lien de causalité évident entre l'antécédent et le conséquent.

Dans le calcul des prédicats, une formule du type $P(x) \Rightarrow Q(x)$, où P et Q sont des prédicats est interprétée par une phrase ouverte. Pour tout élément a de l'univers du discours, $P(a) \Rightarrow Q(a)$ est une implication matérielle. Elle n'est fausse que si $P(a)$ est vraie et $Q(a)$ est fausse. Dans les autres cas elle est vraie. On dira alors que a satisfait la formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$. On définit ainsi le connecteur $\Rightarrow$ dans le calcul des prédicats à partir de l'implication matérielle, et on l'appelle l'*implication ouverte*.

La formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$ étant interprétée dans une structure par une phrase ouverte, on peut la clore à l'aide du quantificateur universel ou existentiel.

On obtient pour la clôture universelle, la proposition $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$ appelée *implication formelle* (Russel, 1903, 1910) ou *faisceau de conditionnel* (Quine, 1950, 1972). Cette proposition est vraie lorsque pour chaque instance de x l'implication matérielle obtenue est vraie. On voit donc que pour définir l'implication formelle $\forall x, P(x) \Rightarrow Q(x)$, on doit introduire chaque implication matérielle $P(a) \Rightarrow Q(a)$, définie pour une certaine classe d'objets.

Il est à noter que les théorèmes en mathématiques sont généralement donnés sous la forme d'une implication formelle, mais le plus souvent, le quantificateur est omis.
On définit également la clôture existentielle de $P(x) \Rightarrow Q(x)$ qui est $\exists x, P(x) \Rightarrow Q(x)$. Elle est vraie s'il existe un élément de l'univers du discours qui satisfait la formule $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

III. LE LANGAGE ET L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE

1. *Le langage de la quantification*

Susanna Epp (1999) présente une variété d'énoncés quantifiés que nous manipulons d'ordinaire dans l'activité mathématique. L'utilisation de ces énoncés nécessite qu'ils aient du sens pour les étudiants. Par exemple, quelles sont les différentes expressions qui marquent la quantification universelle ? Pour un énoncé universel, à quel moment est-il vrai ? Quand doit-on dire qu'il est faux ? À partir d'un énoncé vrai, que peut-on déduire ? Ces questions sont fondamentales du point de vue didactique. En effet, la multiplicité des mots de la langue et des formes d'expressions ne facilite pas toujours la compréhension des phrases. L'auteure souligne le cas des énoncés universellement quantifiés de la forme « All A are B »[4] qui peuvent se mettre sous la forme conditionnelle « if-then »[5] :

All squares are rectangles[6] » peut être transformé en la forme équivalente «*for all x, if x is a square, then x is a rectangle*[7].

Transformer un énoncé de la forme « tout A est B » en son équivalent dans le langage formel mobilise le concept d'implication dans le calcul des prédicats.

Concernant les énoncés existentiels donnés sous la forme « Some A are B »[8], ils peuvent être reformulés avec l'expression « *il existe au moins un* » :

---

[3]« $A \Rightarrow B$ n'a de raison d'être que lorsque A et B ont un lien de causalité (évident) entre elles », A et B étant des propositions.
[4] Tous les A sont B
[5] Si-alors
[6] Tous les carrés sont des rectangles
[7] Pour tout x, si x est un carré, alors il est un rectangle

Some Rational numbers are integers »[9] peut être écrit « *there exists a rational number x such that x is an integer*[10].

Selon l'auteure, la maîtrise de ces différentes formes langagières facilite la manipulation des énoncés dans les registres de la langue naturelle et formelle. En effet, d'une part, le passage d'un langage à un autre passe par une paraphrase correcte des énoncés, et de ce fait, le choix des expressions justes, et d'autre part, l'identification des objets à partir de leurs formulations variées devient plus aisée.

Les travaux montrent que ces compétences ne s'acquièrent pas spontanément :

> The ability to rephrase statements in alternate, equivalent ways, to recognize that other attractive-looking reformulations are not equivalent, and to have a feeling for truth and falsity of universal and existential statements are crucial in mathematical problem-solving tools. Yet numerous studies show that students do not acquire these abilities spontaneously[11]. (Epp 1999, p.2)

L'usage du langage courant va stabiliser les pratiques langagières et générer de nombreuses erreurs au cours de l'activité mathématique.

2. *Le changement de langage et la preuve en mathématiques*

Dans leur article publié en 1995, intitulé *Unpacking the logic of mathematical statements,* Annie Selden et John Selden soutiennent que les étudiants qui n'arrivent pas à déterminer correctement la structure logique des théorèmes, ne peuvent pas non plus déterminer la validité de leurs preuves (p. 125).

Ces auteurs définissent un énoncé *informel* comme un énoncé qui s'écarte d'une version dans le langage du calcul des prédicats, c'est-à-dire, qui n'utilise pas les expressions telles que « pour tout », « il existe », « et », « ou », « si… alors, … », « si et seulement si », avec leurs variantes.

Ils prennent les exemples suivants :

- « differentiable functions are continuous[12] » : par convention, le quantificateur universel est sous-entendu.
- « a function is continuous whenever it is differentiable[13] » : elle s'exprime sans le « si … alors … » qui traduit le conditionnel.

D'après les auteurs, ces formulations sont très courantes en mathématiques, et ne sont pas considérées comme ambigües ou mal construites, dans la mesure où elles sont comprises par un grand nombre de personnes. Elles sont rarement clarifiées, les conventions permettant leur interprétation précise par les mathématiciens, mais pas nécessairement par les étudiants.

Les auteurs désignent par « expliciter la structure logique d'un énoncé informel », le fait d'associer à cet énoncé informel un énoncé formel d'où ressortent les éléments logiques y compris ceux qui, par convention, sont sous-entendus.

Les auteurs illustrent cette définition par un exemple :

---

[8] Certains A sont B

[9] Certains nombres rationnels sont des entiers

[10] Il existe au moins un nombre rationnel x, tel que x soit un entier

[11] La capacité de reformuler, de reconnaître que des reformulations d'apparence attractive de ne sont pas équivalente, et d'avoir le sentiment de vérité ou de fausseté pour les énoncés universellement et existentiellement quantifiés sont des outils cruciaux pour résoudre les problèmes mathématiques. De nombreuses études montrent que les étudiants n'acquièrent pas spontanément ces capacités.

[12] Les fonctions différentiables sont continues

[13] Une fonction est continue si elle est dérivable

(1) "In a compact semigroup every group is contained in its own maximal group which is closed"(p.128)[14]

Un exemple d'explicitation logique est :

(2) "For every semigroup S and every group G, if S is compact and G is a subgroup of S, then, there is a group H such that H is a subgroup of S, G is a subgroup of H, and H is maximal and closed"[15]

D'après leur expérience, pour les besoins de l'enseignement, les énoncés informels de type (1) sont beaucoup plus compréhensibles que les énoncés formels de type (2), car ils sont plus faciles à appréhender, tandis que les énoncés de type (2) sont utiles pour les preuves.

En effet, un énoncé formel fait ressortir la structure logique cachée de l'énoncé informel qui lui est associé, et donne des indications sur la manière dont on peut engager la démonstration de l'énoncé.

3. *Des résultats d'une expérimentation*

Au mois de décembre de l'année 2010, nous avons soumis 68 étudiants camerounais de première année de licence de mathématiques à un questionnaire portant sur la logique.

Le questionnaire que nous avons proposé aux étudiants comportait 11 questions, la dixième portant sur le changement de langage ; il s'agissait d'écrire la conjecture de Goldbach énoncée en langue naturelle, dans le langage formel :

« *Tout entier naturel pair* n*, supérieur ou égal à* 4 *est la somme de deux nombres premiers* »

Dans notre communication, nous ne nous intéressons qu'aux résultats de cet item.

Présentation du contexte camerounais

Le Cameroun possède deux langues officielles : le français et l'anglais. Le système d'enseignement francophone est différent du système d'enseignement anglophone. Le choix du système d'enseignement pour un enfant s'opère dès la maternelle, et il est difficile de changer de système en cours de cycle primaire ou secondaire. Dans l'enseignement supérieur, les cours sont donnés indifféremment en français et en anglais dans la zone francophone, alors que dans la zone anglophone, ils sont donnés exclusivement en anglais.

En dehors des deux langues officielles, on rencontre environ deux cent trente langues locales[16] qui sont classées en six grands groupes au sein desquels on observe des variations linguistiques plus ou moins grandes. Comme l'a montré Françoise Tsoungui (1980) pour la langue Ewondo, ces langues locales déteignent sur la pratique du français, ce qui n'est en général pas pris en compte dans le cours de mathématiques.

Dans le secondaire comme dans le supérieur, le cours de mathématique est porté par la langue naturelle qui est le français ou l'anglais. Nous avons choisi de nous intéresser exclusivement aux enseignements faits en français.

Brève analyse logique de la conjecture de Goldbach

La conjecture de Goldbach est un problème ouvert, en ce sens que sa démonstration n'est pas encore établie. C'est un énoncé de la forme « tout A est B ».

---

[14] Dans un semi groupe compact, tout groupe est contenu dans son propre groupe maximal qui est fermé.

[15] Pour tout semi groupe S et tout groupe G, si S est compact et G est un sous-groupe de S, alors il existe un groupe H tel que H est un sous-groupe de S, G est un sous-groupe de H, et H est maximal et fermé.

[16] Source : Institut National de la Cartographie (Yaoundé, Cameroun)

Sa formalisation nécessité que soient levés les implicites inhérents à la langue naturelle.
La première paraphrase permet la suppression de la quantification bornée (Durand-Guerrier (1996), Durand-Guerrier et Arsac (2003), Chellougui (2004)) et l'introduction d'une variable :

($P1$) « *Pour tout entier n, si n est pair et supérieur ou égal à 4 alors, n est la somme de deux nombres premiers* ».
On obtient une implication formelle où la quantification universelle porte sur la variable n.
La deuxième paraphrase permet d'expliciter le conséquent. On introduit deux lettres de variables qui désignent les deux nombres premiers dont n est la somme :
($P2$) : « *Pour tout entier n, si n est pair et supérieur à 4, alors il existe deux nombres premiers p et q tels que leur somme soit égale à n* ».

Pour la formalisation de cet énoncé, on note :

R la propriété qui s'interprète par « être premier » ;
$\mathcal{P}$ la propriété qui s'interprète par « être pair » ;
Q la propriété qui s'interprète par « être supérieur ou égal à 4 » ;
S la relation ternaire qui s'interprète par « être la somme de … et de … »

On obtient l'écriture formelle :

(P3) $\forall n\ ((\mathcal{P}(n) \wedge Q(n)) \Rightarrow (\exists p, \exists q, (R(p) \wedge R(q) \wedge S(n, p, q)))$

On obtient un énoncé conditionnel universellement quantifié. Son antécédent est une conjonction de deux formules atomiques et sont conséquent est un énoncé existentiel.

<u>Présentation des résultats</u>

L'explicitation de l'antécédent et du conséquent mettent en évidence plusieurs niveaux de formalisations possibles de cet énoncé, et nous amène à considérer les réponses possibles suivant deux axes :

Suivant le premier axe :

1) Structure globale de la phrase et domaine explicite de quantification en tête de phrase ou non. On distingue :
   a) des énoncés conditionnels universellement quantifiés ou non, où l'antécédent et le conséquent sont respectivement l'expression correcte ou non dans le langage formalisé de « n est un entier naturel pair, plus grand que 4 », et de « n peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers » ;
   b) une équivalence ;
   c) des formulations qui ne sont pas des énoncés conditionnels, et que nous avons appelés « linéaires ». C'est une suite de conjonctions ou d'énoncés séparés par une virgule ;
2) Traduction des propriétés et introduction des variables (avec ou sans quantificateur).

Nous adoptons le codage <u>*suivant le premier axe*</u> :

ECQ : énoncé conditionnel universellement quantifié
ECnonQ : énoncé conditionnel non quantifié
EquQ : équivalence universellement quantifiée
Equ*non*Q : équivalence non quantifiée
ELQ : énoncé linéaire universellement quantifié
ELnonQ : énoncé linéaire non quantifié

Suivant le second axe :

Vlib : variable libre

Nous ne signalons pas les variables liées car toutes doivent l'être étant donné qu'on a un énoncé clos.

Exemple :

$\forall n \in \mathbb{N}, (((\exists k \in \mathbb{N}, n = 2k)\ et\ n \geq 4) \Rightarrow (\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, n = p + q)),$
avec p et q premiers

Cette formalisation a une structure ECQ, l'antécédent est correctement énoncé et dans le conséquent, les nombres premiers sont introduits par le QE mais la propriété *être premier* est énoncée à la fin.

Sur les 68 étudiants interrogés, seuls 25 ont proposé une écriture formelle de la conjecture. Les productions sont différentes les unes des autres, mais on retrouve des structures semblables

ECQ conditionnel universellement quantifié	ECnonQ conditionnel non quantifié	EquQ équivalence universellement quantifiée	ELQ linéaire universellement quantifié
10	1	1	13
E02*, E05, E15, E16, E24, E45, E30, E43, E44, E67	E29	E32	E20, E25, E26, E27, E28, E31, E33, E39, E40, E41, E42, E50, E68

Tableau 1 *- Répartition des réponses suivant la structure*

	k Vlib	**p, q Vlib**	**k, p, q Vlib**	**n Vlib**	**Enoncés clos**	**Totaux**
Les énoncés conditionnels	E16	E24, E43, E45	E44, E67	E29	E05, E15, E30, E02	11
Les énoncés linéaires	E27, E42, E68	E26, E39	E20, E40, E41		E25, E28, E31, E33, E50	13
L'équivalence	E32					1

Tableau 2 *–Répartition des réponses suivant le second axe : traduction des propriétés et introduction des variables*

Quelques exemples de réponses :

E15 : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq 4)\ \exists k \in \mathbb{N}^*, n = 2k \Rightarrow \exists p_1, p_2 \in P / n = p_{1+}p_2$
Cette réponse est un énoncé clos de type ECQ. Dans l'antécédent, on devrait avoir les énoncés « n pair » et « $n \geq 4$ » liés par le connecteur « et ».
E27 : $\forall n, n = 2k\ (k \in \mathbb{Z}_+^2) n > 4, \exists n_1\ et\ n_2$ premiers tels que $n = n_1 +\ n_2$

La réponse de **E27** est un énoncé linéaire de type ELQ, dans lequel k est une variable libre. Par ailleurs, on y retrouve la traduction littérale de « tout entier n pair, suppérieur ou égal à 4 ».

Notons qu'en toute rigueur, l'énoncé sur lequel porte le quantificateur universel devrait être entre les parenthèses. Nous pouvons attribuer l'absence des parenthèses aux pratiques enseignantes.

Ces résultats montrent que :

- la transformation d'un énoncé de la forme « tout A est B » en un énoncé de la forme « $\forall x, (A(x) \Rightarrow B(x))$ » ne va pas de soi ; les réponses des étudiants sont proches des énoncés congruents à l'énoncé de départ, surtout pour ce qui concerne l'antécédent : lorsque le domaine est $\mathbb{N}$, la formalisation de l'expression de « n pair et supérieur à 4 » n'est pas faite sous la forme une conjonction (hormis **E43**). Chellougui (2004, 2009) a montré que ceci était également présent chez certains auteurs de manuels universitaires ;
- aucun énoncé conditionnel qui a été proposé n'est correct ;
- la syntaxe dans l'usage des symboles est approximative et le phénomène d'imitation repéré chez les étudiants (Gueudet, 2008) est bien présent ;
- le statut des variables n'est pas toujours pris en compte. Certains étudiants ont donné en formulation symbolique un énoncé ouvert, où apparaissaient souvent plusieurs variables libres. La nature de ces variables est précisée, mais dans une syntaxe incorrecte du point de vue logique. On peut penser que pour les étudiants il s'agit d'éléments génériques ;
- l'absence du quantificateur existentiel produit des énoncés congruents à l'énoncé de départ, qui ne traduisent pas cet énoncé.
- Nous retrouvons dans les productions des étudiants, les mêmes phénomènes repérés par Selden & Selden (1995), à savoir, la faible capacité des étudiants à expliciter la structure logique des énoncés informels.

Nous pouvons alors conclure que le changement de langage en mathématiques représente une réelle difficulté chez ces étudiants et que cette activité devrait être intégrée dans l'enseignement des mathématiques.

IV. LANGAGE ET CULTURE

Les travaux de Moschkovich (2005), Barwell & al (2007), Njomgang et Durand-Guerrier (2011) montrent l'importance de la prise en compte du multilinguisme dans la recherche en didactiques des mathématiques.

> There are more and more students with an increasing variety of linguistic backgrounds present in classrooms all over the world. Their very presence forces teachers and mathematics educators to ask previously unasked questions: is mathematics 'language-free'; which languages do students use; which should they be encouraged to use; when; why; for how long; what are the consequences for resources and assessment of mathematics? (Barwell & al. 2007, p. 113)

Concernant les étudiants camerounais, nous parlerons de multilinguisme dans les salles de classe dans la mesure où chaque étudiant possède et pratique sa langue maternelle qui n'est ni le français, ni l'anglais comme nous l'avons précisé en amont.

A l'université, dans les filières mathématiques, on constate une prédominance des étudiants de la région de l'ouest du Cameroun (50 à 60%). Nous nous sommes intéressés au langage de la quantification dans deux départements de cette région dont nous sommes originaires, les Hauts-Plateaux et le Nkou-Khi. En nous appuyant sur cette citation de Maurice Houis & al. (1977) :

> Même là où il y a une véritable multiplicité de langues, où aucune ne domine par le nombre de locuteurs, par le prestige ou par l'efficacité pratique, il est fréquent que ces langues, dans une zone déterminée, soient étroitement parentes, que leurs systèmes et leurs structures soient les mêmes d'un point de vue typologique. […] La conséquence est qu'une économie certaine peut être réalisée puisque ces langues entre lesquelles il n'y a pas intercompréhension opèrent néanmoins selon le même type de fonctionnement. » (in Tsoungui 1980, p. 92)

Nous pouvons regrouper les langues de ces départements dont les locuteurs se comprennent généralement, pour présenter des résultats d'une enquête que nous avons conduite auprès des étudiants de niveau 2 de la filière « Mathématiques » de l'Ecole Normale Supérieure de Yaoundé, et auprès d'un enseignant de cette même école, qui s'exprime correctement dans la langue française et dans la langue Batoufam, une langue pratiquée dans le Nkou-Khi.

1. *Résultats d'un test avec des étudiants de niveau 2 de la filière « mathématiques »*

En janvier 2015, nous avons demandé à 26 étudiants volontaires que nous avons présentés ci-dessus, d'écrire dans le langage formel la conjecture de Goldbach énoncée dans le langage courant.

Nous avons porté notre choix sur cette population du fait que son séjour d'une année à l'université l'aurait familiarisée avec le langage formel.

En nous référant à la grille d'analyse de la section III-3, nous obtenons les tableaux suivants :

ECQ Conditionnel quantifié	EquQ équivalence universellement quantifiée	ELQ énoncé linéaire universellement quantifié	ELnQ
13	1	11	1
E3 ; E1 ; E4 ; E5; E6 ; E7 ; E8 ; E9 ; E10 ; E11 ; E12 ; E13 ; E14	E2	E15 ; E16 ; E17 ; E18 ; E19 ; E21 ; E22 ; E23 ; E24 ; E25 ; E26	E20

Tableau 3 *- répartition des réponses suivant la structure*

	k Vlib	**p, q Vlib**	***n*, p, q Vlib**	***n* Vlib**	**Enoncé clos**	**Totaux**
Les énoncés conditionnels		E3	E6 ; E7 ; E9 ;		E13 ; E1; E4; E5; E6 ; E8; E10; E11 ; E12; E14	13
Les énoncés linéaires	E17 ; E22	E26		E20	E15 ; E16 ; E18 ; E19 ; E21 ; E23 ; E24 ; E25	12
L'équivalence	E2					1

Tableau 4- *classification des réponses des étudiants selon leur structure et les différentes variables libres qui y sont contenues.*

Nous obtenons 13 énoncés quantifiés, une équivalence et 12 énoncés linéaires.

Il faut noter qu'aucun étudiant n'a donné une écriture correcte dans le langage formel.

Par ailleurs, parmi les 12 étudiants qui ont donné des énoncés linéaires, 7 sont de l'ouest et parmi les 13 qui ont donné des énoncés conditionnels, 7 sont de l'ouest.

Quelques exemples de productions :

E1 : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4 / \exists p \in \mathbb{N} / n = 2p \Rightarrow \exists q_1, q_2\ nombres\ premiers\ / \ n = q_1 + q_2$ (EQC)
E2 : $\forall x \in \mathbb{N}\ \ / x = 2k,\ k \in \mathbb{N}^*, x \geq 4 \Leftrightarrow \exists (y,z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / y, z \in P\ x = y + z$ (EquQ et kVlib)
E17 : $\forall n \in \mathbb{N} / n = 2k\ ,\ k \in \mathbb{N}\ \ et\ n \geq 4\ \exists (p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2\ \ p_1, p_2\ premiers\ / \ n = p_1 + p_2$ (ELQ, k Vlib)

D'une manière générale, le résultat du test que nous avons proposé aux étudiants montre que le niveau d'étude n'a pas une grande influence sur leur capacité à pouvoir effectuer de façon satisfaisante le changement de langage. On retrouve pratiquement les mêmes formulations que celles des étudiants de première année, alors que l'usage du formalisme pendant une année académique aurait pu laisser croire qu'ils seraient plus aptes à le manipuler.

2. Langue maternelle et explicitation du quantificateur

Dans sa thèse de doctorat, Françoise Tsoungui (1980) a identifié des interférences de la langue *ewondo* dans le français chez des élèves de la classe de sixième au Cameroun. Les observations naturalistes nous conduisent à faire l'hypothèse que la pratique de la langue batoufam et en général des langues de la région de l'ouest peut avoir un impact sur la pratique des mathématiques en français. Nous avons choisi cette langue parce que nous sommes originaires de cette partie du pays et que nous la pratiquons.

Pour notre enquête, nous avons rencontré un enseignant de Biologie de l'École Normale Supérieure de Yaoundé, en raison de sa bonne maîtrise du français et du Batoufam. L'objectif de l'entretien était de savoir si en Batoufam on établit un lien entre les énoncés de la forme « tout A est B » et ceux de la forme « pour tout x, si x est A, alors x est B ».

L'entretien a duré 30 mn, mais l'enseignant n'en a pas autorisé l'enregistrement. Notre corpus est constitué de quelques notes écrites.

Nous lui avons proposé de travailler sur l'énoncé « Tous les enfants du village qui sont dans la concession de Mbo[17] sont des jumeaux » (P).
Nous désignons par **E** l'enquêteur et par **Ens** l'enseignant. Nous présentons les points importants de cet entretien :

E : Pouvez-vous traduire la phrase en Batoufam ?
Ens : *Pô la'a wo la'a Mbo meu Ngne*
E : Peut-on mettre cette phrase sous la forme conditionnelle, c'est-à-dire sous la forme « si … alors » *?*
Ens : *Pô la'a peu la'a Mbo, meu woup Ngne*[18] (1). J'avoue que c'est un exercice que je n'ai pas encore fait, pourtant je pense que j'ai dit la même chose que précédemment !

Notre commentaire : La phrase (1) est linéaire. Le verbe est le mot « *peu* » (être). Il est utilisé au conditionnel et signifie « *s'ils sont* ». Lorsqu'on le prononce, l'intonation est montante.
Le mot « *meu* » signifie *alors*.

E : on ne voit pas bien le « si … alors … ».

[17] Nom du propriétaire de la concession
[18] Si les enfants du village sont dans la concession de Mbo, alors ils sont des jumeaux

Ens : Cette forme est très peu utilisée. C'est surtout la forme et l'intonation des verbes qui renvoient au conditionnel. Le conditionnel explicite existe mais c'est très lourd, c'est pourquoi on ne l'utilise pratiquement pas.

E : Comment va donc se dire cette phrase ?
Ens : On peut aussi dire *Yé pi gue pô la'a pi la'a Mbo, meu woup Ngne* (2). Le groupe de mots *Yé pi gue* signifie *si*. On a ainsi un conditionnel explicite. Je dirais que l'expression *Yé pi gue* a plus la signification « *s'il est vrai que* ».

Notre commentaire : On peut croire que le conditionnel explicite renvoie au conditionnel courant. En effet, la conclusion n'engage le locuteur que si l'antécédent est vrai.

En conclusion, on peut faire l'hypothèse que le fait d'utiliser très souvent les formes linéaires et rarement le conditionnel explicite est une pratique qui peut se répercuter sur la pratique du français, car ils ont généralement tendance à traduire littéralement la langue maternelle[19].

V. CONCLUSION

Les résultats des deux enquêtes que nous avons présentés indiquent que le passage de la langue naturelle au langage formel de langage en mathématiques reste, même pour des étudiants d'un niveau avancé, une source de difficultés. Compte tenu de la place du langage dans l'activité mathématique –aide à la conceptualisation, ces difficultés doivent être prises en compte dans la classe de mathématiques, bien avant l'arrivée des étudiants dans l'enseignement supérieur.

Par ailleurs, la pratique du français rencontre de nos jours, beaucoup de difficultés dans le secondaire comme à l'université. D'après Onguene Essono (2003), le français apparaît comme une langue apprise et utilisée à l'école et par l'école ; l'exclusion de langue culturelle de l'apprenant à l'école induit des difficultés énormes propres aux activités inhérentes à la scolarisation qui peuvent retarder la compréhension.

Une perspective de recherche serait d'approfondir notre travail sur les pratiques langagières locales afin d'identifier celles qui entrent en conflit avec le français, langue d'apprentissage dans l'espace francophone. Une autre perspective de recherche consisterait, en restant dans la perspective du changement de langage, à conduire un travail sur la transformation des énoncés donnés dans le langage formel en langue naturelle, qui représente un enjeu important en mathématiques. Cela permettra de développer des modalités de travail sur la logique et le langage en relation avec l'activité mathématique.

REFERENCES

Barwell R., Barton B., Setati M (2007) Multilingual issues in mathematics education: introduction. *Educational Studies in Mathematics* 64, 113-119.

Chellougui F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*, Thèse en cotutelle, diplôme de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, Université de Tunis.

Corblin F. (1997) Les indéfinis : variables et quantificateurs. *Langue française* 116(1), 8-32.

Deloustal-Jorrand V. (2000-2001) L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs. *Petit X 55*, 35-70.

[19] Il est important de souligner que ce ne sont pas seulement chez les étudiants de l'ouest qu'on retrouve les traductions littérales de leur langue en français.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherche en Didactique des Mathématiques* 23(3), 295-342.

Durand-Guerrier V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique : Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, octobre 1996.

Durand-Guerrier V., Kazima M., Libbrecht P., Njomgang Ngansop J., Salekhova L., Tuktamyshov N., Winsløw C. (2014) Challenges and opportunities for second language learners in undergraduate mathematics. In *ICMI Study 21 Book*. Springer

Duval R. (1988) Ecarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruence. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives* 1, 7-23.

Epp S. (1999) The language of Quantification in mathematics Instruction. *Developping Mathematical Reasoning in Grades K-12*, chapitre 16.

Gueudet G. (2008) Investigating the secondary-tertiairy transition. *Educational Studies in Mathematics* 67, 237-254.

Houis M., Bole-Richard R. (1977) *Intégration des langues africaines dans une politique d'enseignement*. AGECOP, UNESCO.

Moschkovich J. (2005) Using two languages when learning mathematics, in *Educational Studies in Mathematics* 64*,* 121-144.

Njomgang Ngansop J., Durand-Guerrier V. (2014) Negation of Mathematical Statements In French In Multilingual Contexts – *An example in Cameroon. Actes du colloque ICMI 21.*

Onguéné Essono C. (2003) Les productions écrites d'adolescents des cycles d'éveil et d'orientation en français langue seconde au Cameroun : une interlangue marquée. *Langues et Communication* 2(3), 175-194.

Quine W. V. O. (1950) *Methods of Logic*. New York : Holy, Rinehart & Winston.

Russell B. (1903) *Les principes de la mathématique*, traduction française in *RUSSELL, Ecrits de logique philosophique*. PUF : Paris 1989

Russell B. (1910) *Principia Mathematica* traduction française in *RUSSELL, Ecrits de logique philosophique.* PUF : Paris 1989

Selden J., Selden A. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements, in *Educational Studies in Mathematics* 29, 123-151

Tsoungui F. (1980) *Le français écrit en classe de 6ème à Yaoundé. Recherches des interférences de l'Ewondo dans le français et proposition pédagogiques*. Thèse de 3ème cycle, Université de la Sorbonne Nouvelle.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LES PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT ET D'ÉVALUATION FACE AUX DÉFIS DES INÉGALITÉS DES OPPORTUNITÉS D'APPRENTISSAGE

Compte-rendu du groupe de travail n°9

Nathalie SAYAC* – Aurélie CHESNAIS** – Raquel Isabel BARRERA*** - Éric RODITI****

Le travail du GTn°9 au colloque EMF 2015 s'inscrit dans la lignée des travaux menés lors des colloques EMF précédents, d'une part dans le groupe travaillant sur les pratiques enseignantes et les questions de formation, d'autre part dans le groupe travaillant sur l'enseignement des mathématiques auprès de publics spécifiques ou dans des contextes particuliers. Il s'est agi plus particulièrement, pour EMF 2015, de prendre en considération la question de l'universalité *versus* les différences culturelles, ainsi que celle de la prise en compte des différents contextes dans lesquels s'insère l'enseignement des mathématiques, au regard de la didactique des mathématiques. Le travail du groupe vise ainsi à affiner le thème des pratiques enseignantes en mettant l'accent sur certaines activités des enseignants ou certains contextes d'enseignement, dont ceux qui pourraient dépendre des habitudes culturelles ou bien au contraire, qui relèveraient de l'universel.

Le groupe s'est ainsi intéressé plus précisément à l'analyse :

1. des pratiques enseignantes dans leur articulation avec les activités des élèves à travers : les dimensions, les milieux, les sensibilités, les dilemmes et les tensions, les contraintes et les marges de manœuvre, les ressources, mais aussi le genre, le social, le culturel, le spécifique, etc.
2. des activités des élèves prenant place dans ces pratiques, en repérant notamment : les stratégies, les erreurs, les conceptions, les habitudes, les règles, les modèles implicites, les justifications, etc. en lien avec des éléments de cultures et de spécificités locales.

Les questions suivantes ont guidé le travail :

1. Quelles mathématiques les élèves et les enseignants font-ils et avec quelle diversité inter ou intra (socio)culturelle ?
2. Quels sont les éléments culturels et sociaux qui contribuent à différencier l'enseignement des mathématiques dans nos différents pays ? Notamment l'évaluation,

* Université Paris Est Créteil – France – nathalie.sayac@u-pec.fr
** Université de Montpellier – France – aurelie.chesnais@umontpellier.fr
*** Université du Québec à Montréal – Québec, Canada - barrera_curin.raquel_isabel@uqam.ca
**** Université Paris Descartes – France – eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

Sayac N., Chesnais A., Barberra R.I., Roditi E. (2105) Les pratiques d'enseignement et d'évaluation face aux défis des inégalités des opportunités d'apprentissage – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°9*. In Theis L. (Éd.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*– Actes du colloque EMF2015 – GT9, pp. 765-768.

l'adaptation aux élèves à besoins spécifiques, la prise en compte des inégalités d'apprentissage et des différences de sexe des élèves.

3. Quels sont les moyens nécessaires pour mener des recherches sur les pratiques enseignantes et les apprentissages mathématiques des élèves à partir de critères à la fois didactiques, épistémologiques, sociaux et culturels ?

Les contributions, quoique peu nombreuses (cinq propositions initialement dont quatre seulement ont été présentées), ont été source de débats très riches, de par leur diversité de trois points de vue essentiels : la manière dont elles abordent la question des pratiques enseignantes et des contextes spécifiques, les cadres théoriques et méthodologiques mobilisés, enfin les contextes des recherches.

Ainsi, certaines communications ont mis plutôt l'accent sur l'articulation des pratiques de l'enseignant avec l'activité des élèves (Barrera et Chesnais, Horoks et Pilet, d'autres davantage sur les dispositifs (Assude et al.) ou les manuels scolaires (Roditi), la question des effets sur les élèves étant soit prise en considération explicitement, soit du point de vue des effets potentiels. Cela reflète la diversité des questions abordées, qu'il s'agisse de caractériser des pratiques, d'identifier l'influence de certains déterminants sur les pratiques et sur les activités et les apprentissages des élèves, ou encore de poser la question de l'existence de marges de manœuvre au sein des systèmes d'enseignement, des dispositifs ou des pratiques enseignantes.

Les cadres théoriques et méthodologiques des différentes recherches étaient très variés : double approche didactique et ergonomique des pratiques (Robert 2008, Rogalski 2008) pour deux communications, principe de système didactique principal (Chevallard 1995) et système didactique auxiliaire (Theis et al. 2014) et triplet des genèses de la théorie de l'action conjointe (Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni 2000). Cette diversité reflète également le fait que certaines études abordent la question des contraintes qui pèsent sur le processus d'enseignement-apprentissage en termes d'étude du système et de son fonctionnement ou en termes d'étude de l'activité des acteurs. Les débats ont ainsi permis de poser la question de l'articulation de ces deux points de vue ainsi que celle du type de sujet pertinent selon la problématique de recherche didactique posée.

Enfin, la diversité des contextes des recherches a permis d'aborder, lors des débats, la question des différences entre pays et entre systèmes d'enseignement même si celle-ci n'a été étudiée en tant que telle par aucune des contributions. Elle apparaît néanmoins comme une piste féconde pour la poursuite de travaux sur les thématiques abordées par le groupe de travail (cf. infra).

La mise en regard des différentes contributions et des discussions qu'elles ont initiées permet de mettre en évidence un certain nombre d'apports de cette rencontre EMF.

L'étude de la question des effets des pratiques sur les apprentissages d'élèves en difficultés était abordée par deux communications. Assude et al. étudient du point de vue du triplet des genèses (Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni 2000), l'articulation d'un système didactique principal et d'un système didactique auxiliaire visant à prendre en charge des élèves en difficultés dans le cadre d'un enseignement de résolution de problèmes. Barrera et Chesnais étudient l'articulation de l'activité de l'élève avec celle de l'enseignant dans un dispositif d'entretiens, visant le diagnostique et l'aide à des élèves en difficultés.

La question de l'évaluation, abordée par la communication de Horoks et Pilet constitue une problématique émergente en didactique des mathématiques que les auteures ont posée, dans le cadre du groupe de travail, dans une perspective d'articulation entre pratiques enseignantes et des contextes particuliers. Elles présentent ainsi une définition et une méthodologie d'analyse des pratiques d'évaluation d'enseignants de collège, dans le travail en classe, à propos d'enseignement de l'algèbre.

La comparaison internationale pourrait être très féconde pour l'étude des questions qui intéressent le groupe. En effet, dans le cadre de l'EMF, trois objets de travail peuvent être traversés par une variabilité culturelle et institutionnelle : l'élève, le professeur et le système didactique. Les conditions d'être élève ne sont pas les mêmes dans les pays, de même que les situations proposées, les dispositifs ou les contraintes institutionnelles.

Dans l'étude du lien entre les pratiques enseignantes et les apprentissages des élèves, si la question de l'effet des premières sur les seconds a connu des évolutions en didactique des mathématiques, il n'en reste pas moins que la question des apprentissages effectifs reste encore trop peu traitée. Intégrer la problématique de l'évaluation a permis de focaliser davantage les travaux sur les apprentissages, mais la question de l'influence des activités des élèves sur les pratiques enseignantes reste encore à travailler. Cela pose également la question de la place du sujet dans nos orientations théoriques et méthodologiques : avant même de poser la question de la variabilité des apprentissages, il s'agirait d'accorder une place à la variabilité des élèves (la variabilité des pratiques enseignantes étant déjà très documentée) dans les travaux de didactique, en acceptant qu'il y ait des approches plus ou moins centrées sur le fonctionnement du système ou des acteurs.

La contribution de Roditi aborde cette question en partant de résultats sociologiques connus sur les élèves de milieux populaires et en tentant de les introduire dans des analyses didactiques d'énoncé de problèmes mathématiques tirés de manuels scolaires. Le travail effectué a montré par exemple que les exercices à contexte professionnel proposent aujourd'hui des activités moins riches mathématiquement que ceux dont le contexte est social ou scientifique. Or les recherches sur les élèves de milieux populaires montrent que les savoirs « utiles » sont ceux qui mobilisent davantage ces élèves. Un risque apparaît donc que cette tendance néfaste aux apprentissages mathématiques soit renforcée dans l'enseignement en contexte d'éducation prioritaire.

Les contributions des membres du groupe ont ainsi montré que la thématique des inégalités des opportunités d'apprentissage peut permettre de poser des questions dont les chercheurs en didactique des mathématiques doivent aujourd'hui s'emparer.

REFERENCES

Chevallard Y. (1995) La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. In R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 83-122). Clermont-Ferrand : IREM.

Robert A. (2008) Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 33-44). Toulouse : Octarès.

Rogalski J. (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 23-30). Toulouse : Octarès.

Sensevy G., Mercier A., Schubauer-Leoni M.-L. (2000) Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques* 20(3), 263-304.

Theis L., Assude T., Tambone J., Morin M.-P., Koudogbo J., Marchand P. (2014) Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire? *Éducation et francophonie* 42(2), 160-174.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ÉTUDE D'UN DISPOSITIF POUR AIDER DES ÉLÈVES À ENTRER DANS LE MILIEU D'UNE SITUATION MATHÉMATIQUE

Teresa ASSUDE[*] – Laurent THEIS[**] – Jeanne KOUDOGBO[**] - Karine MILLON-FAURE[*] - Marie-Pier MORIN[**] - Jeannette TAMBONE[*]

Résumé – Dans cette communication, nous analysons un dispositif d'aide dans la résolution de problèmes en mathématiques qui a été mis en place par des enseignantes auprès d'élèves en difficulté, avant le travail effectué avec l'ensemble de la classe. Nous montrons d'abord les fonctions d'aide de ce dispositif, notamment les fonctions chrono-topo-meso-génétiques. Ensuite nous analysons l'une de ses mises en œuvre en essayant de trouver des indices de ces fonctions à partir d'épisodes concernant des élèves qui y ont participé.

Mots-clefs : Dispositif d'aide, élèves à besoins éducatifs particuliers, situation mathématique, triplet des genèses

Abstract – In this paper, we analyse an « assistant device » in mathematical problems solving. This device has been set up by teachers for some special needs pupils before the work in the whole class. We first show how this device can help the pupils, especially through its chrono-topo-meso-genetic functions. Then we analyse a situation in which the device is implemented, looking for clues of these functions in some episodes involving students who participated in the device.

Keywords: Assistant device – special needs pupils – mathematical situation – genesis triplet

Notre communication se place dans le cadre du groupe 9 en ce qui concerne l'adaptation des pratiques d'enseignement à des besoins spécifiques des élèves, notamment l'adaptation des pratiques aux difficultés des élèves identifiées par les enseignants. Nous allons étudier un dispositif d'aide particulier qui a été mis en place par des enseignantes en nous focalisant sur ses fonctions topogénétiques, chronogénétiques et mesogénétiques. Pour cela, nous présenterons notre cadre théorique et problématique avant d'analyser l'une des mises en œuvre de ce dispositif auprès de quatre élèves à partir d'épisodes choisis par les chercheurs.

[*] ADEF – Université d'Aix-Marseille – France – teresa.dos-reis-assude@univ-amu.fr; karine.millon-faure@univ-amu.fr; jane.tambone@wanadoo.fr.
[**] CREAS - Université de Sherbrooke – Québec – Canada – laurent.theis@USherbrooke.ca ; jeanne.koudogbo@USherbrooke.ca; marie-pier.morin@USherbrooke.ca

Assude T., Theis L, Koudgobo J., Millon-Fauré K., Morin M-P., Tambone J. (2015) Etude d'un dispositif pour aider des élèves à entrer dans le milieu d'une situation mathématique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT9, pp. 769-778.

I. CADRE THEORIQUE ET PROBLEMATIQUE

La compétence à résoudre des situations-problèmes mathématiques est au centre du programme de formation de l'école québécoise en mathématiques (MELS 2001), tant au primaire qu'au secondaire. La résolution de problèmes y est alors à la fois objet d'apprentissage et moyen pédagogique pour apprendre les mathématiques. La résolution d'une situation-problème peut s'avérer un défi particulièrement important pour des élèves qui présentent un retard ou qui ont des difficultés d'apprentissage pouvant les mener à l'échec.

Afin de déterminer les conditions favorables à l'engagement et à l'apprentissage des élèves en difficulté, nous avons mis en place un projet de recherche collaborative avec huit enseignantes d'une école primaire québécoise. Ce projet intitulé « Développement de conditions favorables aux élèves ayant des difficultés d'apprentissage dans la résolution de situations-problèmes mathématiques » a été financé par le MELS (Ministère de l'éducation, des loisirs et des sports). Notre recherche est de nature collaborative, puisque ce n'est pas une recherche "sur" les enseignants, mais une recherche "avec" les enseignants. Dans le cadre du projet, nous avons accompagné les enseignantes participantes à planifier des situations-problèmes mathématiques susceptibles de favoriser l'engagement et l'apprentissage des élèves en difficulté. Nous avons filmé les mises en oeuvre par les enseignantes dans la classe. Par la suite, les enseignantes ont visionné l'enregistrement et sélectionné quelques passages qui leur paraissaient particulièrement significatifs au regard de la problématique des élèves en difficulté. Ces extraits ont été présentés et discutés à l'intérieur de séminaires avec l'ensemble des participants. Les enseignantes ont été libérées un certain nombre d'heures de classe pour s'investir dans ce projet de recherche-action qui a été aussi un moment de formation.

Au cours de ce projet, une enseignante de troisième et quatrième année, Sylvie, a décidé de mettre en place une mesure particulière visant à favoriser l'engagement et l'apprentissage de neuf élèves en difficulté. En effet, elle a proposé de prendre à part ces élèves deux jours avant la réalisation de sa situation-problème en classe afin de leur expliquer la consigne.

En suivant les travaux de Chevallard (1995) qui modélise l'espace de l'étude comme un ensemble de systèmes didactiques principaux (les classes, par exemple) et des systèmes didactiques auxiliaires (SDA) qui aident à l'étude, nous avons analysé ce dispositif d'aide sous l'angle d'un système didactique auxiliaire (Theis & al. 2014). Contrairement aux SDA décrits ailleurs (Tambone 2014), le dispositif d'aide proposé par Sylvie ne porte pas sur des savoirs anciens, après la réalisation en classe d'une situation, mais précède le système didactique principal (SDP).

Pour dégager un modèle théorique à partir de la première réalisation de ce dispositif, nous avons utilisé le triplet de genèses (Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni 2000) :

> au sein du système didactique, le professeur doit agir (définir, réguler, dévoluer, instituer) pour :
>
> - produire les lieux du professeur et de l'élève (effet de topogenèse) ;
> - produire les temps de l'enseignement et de l'apprentissage (effet de chronogenèse) ;
> - produire les objets des milieux des situations et l'organisation des rapports à ces objets (effet de mésogenèse) » (p.267).

Ainsi cette première étude (Theis & al. 2014) nous a permis de dégager trois fonctions potentielles de ce dispositif d'aide, en lien avec le triplet des genèses. Une fonction chronogénétique qui se manifesterait par le fait que les élèves disposent de plus de temps et surtout qu'ils rencontrent la situation avant la réalisation en classe : ils « savent plus avant » de quoi il va s'agir. Une fonction topogénétique permettrait aux élèves en difficulté d'assumer plus facilement leur place d'élève dans le système didactique principal. Finalement, une fonction mésogénétique permettrait aux élèves en difficulté de rencontrer le milieu initial de la situation avant sa réalisation en classe. L'aménagement du milieu apparaît comme un élément central dans certains travaux même si certains réaménagements successifs du milieu éloignent les élèves des enjeux de savoir (Marlot & Toullec-Théry 2011).

Dans la suite du projet, trois enseignantes, dont Sylvie qui était à l'origine de la première réalisation du dispositif d'aide dans sa classe, ont expérimenté à leur tour un SDA dans leur classe. Nous avons alors analysé ces nouvelles expérimentations afin de mettre à l'épreuve notre modèle théorique et de déterminer les invariants qui se dégagent d'une réalisation à l'autre et ce, même si la nature de ce qui est réalisé dans les SDP et SDA diffère par rapport à la première mise en oeuvre. En effet, lors de la première expérimentation, (Theis & al. 2014), l'enseignante demandait essentiellement aux élèves d'anticiper ce qu'ils auraient à faire le lendemain en classe. L'action des élèves était suspendue dans le SDA. Lors de la deuxième expérimentation (Assude & al. soumis), le mandat donné aux élèves du SDA portait plutôt sur la réalisation de la première étape d'une situation de communication qui s'est déroulée en quatre temps différents. Il s'agissait de décrire une figure géométrique pour qu'un élève qui n'avait pas vu la figure puisse la reproduire. Dans ce SDA, il s'agissait seulement de la phase « décrire » sans qu'il y ait de reproduction, et donc de rétroaction de la part du milieu. Dans cette deuxième réalisation, au-delà des fonctions chronogénétiques, topogénétiques et mésogénétiques, nous avons également dégagé une fonction de distanciation. Ainsi dans le SDA, on entre en avance dans le milieu de la situation, ce qui peut permettre une mise à distance par rapport à ce qui y est visé et peut créer une attente pour un futur engagement des élèves dans le SDP.

Dans le cadre de cette communication, nous allons analyser la mise en oeuvre du dispositif d'aide par Manon, une enseignante de sixième année du primaire (élèves de 11 à 12 ans). Comme nous allons le voir, la nature de ce SDA diffère de celle des deux SDA précédents, puisqu'il consiste principalement en un retour sur le savoir ancien que l'enseignante pense nécessaire pour entrer dans le milieu de la situation mathématique qui sera traitée le lendemain. Comment ce dispositif d'aide peut alors favoriser l'entrée dans le milieu de la situation pour des élèves qui y participent ? C'est la question à laquelle nous allons tenter de répondre dans cette communication.

Pour répondre à cette question, nous présentons d'abord le déroulement du SDA qui a eu lieu avant le SDP ce qui nous permet de repérer certaines des fonctions du SDA. Ensuite, nous présentons quelques épisodes du SDP dans lesquels nous avons repéré des indices des différentes fonctions du SDA.

II. DEROULEMENT DU SDA ET ANALYSE DES FONCTIONS

Lors de cette expérimentation, quatre élèves (Daniel, Julien, Marielle, Roselyne) sélectionnés par Manon, l'enseignante, participent au SDA, dont la durée totale est de 12 minutes. Comme le dispositif est nouveau pour ces élèves, Manon le légitime en s'appuyant d'abord sur le processus de recherche :

> Cet après-midi, j'ai voulu faire une expérience spéciale que je n'ai jamais faite avec mes élèves avant de commencer une situation-problème.

Ensuite, Manon justifie le dispositif en faisant référence à des éléments qui concernent plus spécifiquement le groupe d'élèves sélectionnés et les raisons qui ont amené ce choix.

> On fera l'affaire ensemble avec tout le monde demain, mais vous allez en avoir entendu parler. Mais je trouve ça intéressant de faire ça avec vous [...], parce qu'on se rend compte que lorsqu'on n'est qu'un petit groupe, on est capable d'aller chercher des affaires que quand on est en grand groupe, on a de la misère à vous concentrer, puis à être capable de saisir ce qui se passe. Vous vous laissez un peu porter par

> eux-autres. Ça arrive souvent. [...] Là, juste le fait que vous êtes tous les quatre, vous allez déjà avoir une idée de ce qu’est la situation.

Plusieurs raisons sont alors invoquées par Manon. Tout d'abord, elle indique aux élèves qu'ils auront déjà « entendu parler » de la situation-problème, avant les autres. Elle pointe là de manière explicite la fonction chronogénétique que nous avons identifiée dans les analyses antérieures : savoir plus avant de quoi il s’agit. Ensuite, elle invoque également les avantages de travailler en petit groupe avec la possibilité de mieux se concentrer et de mieux comprendre ce qui se passe. Finalement, elle avance également l'argument qu'habituellement en classe, les quatre élèves ont tendance à se laisser porter par les autres élèves. Elle fournit alors indirectement la raison pour laquelle ces élèves ont été sélectionnés pour le SDA. Nous retrouvons ici la fonction topogénétique de ce dispositif : il permet aux élèves de prendre leur place d’élève dans le SDA. Cependant, cela ne nous indique pas si ces élèves prendront cette place dans le SDP. Or il est important que les élèves en difficulté prennent la position d’élève dans le SDP puisque certains travaux (Tambone 2014) montrent que leur valeur scolaire est acquise dans ce cadre. Nous aborderons cet aspect dans l’analyse des épisodes du SDP.

Par la suite, Manon annonce aux élèves la situation qu'ils auront à travailler le lendemain.

> Je vais vous demander demain de trouver… l’aire d’un triangle… que je vais vous remettre. Trouvez l’aire d’un triangle. Ça vous dit quoi? Quand on parle de ça. Trouver l’aire d’un triangle. Qu’est-ce que vous savez déjà qui pourrait vous aider à faire cette situation-là.

Quelques remarques s'imposent quant à cette description de la tâche. Tout d'abord, dans le SDP, la visée ultime sera de dégager une formule qui permet de calculer l'aire de tout triangle. Pour les élèves, c’est la première fois qu'ils travaillent sur l'aire de cette figure, mais ils ont déjà rencontré les formules d'aire du carré et du rectangle. Or, pour l'instant, cette visée de trouver une formule générale reste implicite et il ne s'agit que de la détermination de l’aire d'*un* triangle. Ensuite, même si au cours du SDP, les élèves auront à déterminer l'aire de différents triangles, ce n'est pas la première situation qui sera proposée le lendemain. En effet, Manon a décidé après la réalisation du SDA de modifier la première situation proposée dans le SDP et de demander plutôt de tracer un triangle dont l'aire est d'exactement 18 cm^2. Cette première situation est alors de nature différente de celle annoncée au départ dans le SDA. Ce n'est que par la suite que les élèves auront à déterminer l'aire de différents triangles et, ultimement, à dégager une formule générale. Finalement, dans le SDA, Manon fait appel aux savoirs anciens des élèves (ceux « que vous savez déjà ») qui pourraient être mobilisés par les élèves pour résoudre la situation.

Une discussion s'engage ensuite dans le SDA avec les élèves autour du concept d'aire, à la suite d'une question de Julien. (« C'est quoi l'aire? »). Manon questionne alors les autres élèves autour du concept d'aire. Ceux-ci offrent différentes explications. Raphaëlle fait appel à l'aire du carré et à une unité de mesure - le centimètre carré.

> Il me semble que c’est… avec un carré c’est plus facile… mais un triangle, c’est 1 centimètre carré genre…

Daniel pour sa part oriente son intervention davantage sur une procédure de dénombrement pour déterminer l'aire :

> Dans le fond tu prends une feuille quadrillée… puis tu comptes tous les carrés à l’intérieur…

Manon offre finalement une définition de l'aire :

> C’est… la surface…l’intérieur d’une forme. Il va falloir mesurer l’intérieur d’une forme.

La discussion s'oriente ensuite vers les stratégies pour déterminer l'aire du carré et révèle les difficultés des élèves à se rappeler cette formule. Marielle se situe d'abord dans une logique de dénombrement, mais lorsque Manon lui demande de calculer plutôt que de dénombrer, elle avance qu'il faut « multiplier, diviser ou [faire] plus ». Manon questionne alors les autres élèves sur l'opération à utiliser, mais au final aucune réponse définitive ne ressort de la discussion :

> Ok, il faut faire une opération mathématique. Pis là, Marielle elle n'en est pas sure, c'est quoi le calcul. On prend la longueur, la largeur, on additionne, on soustrait, on multiplie, on divise, on ne sait pas trop. Ça il va falloir retrouver ça. Demain ça va être important si on veut prendre cette stratégie-là.

La deuxième partie de la discussion se centre ensuite sur les différents triangles particuliers. Tout d'abord, Manon demande à Daniel de décrire ce qu'est un triangle. Il est alors intéressant de constater que Daniel n'est pas initialement en mesure de mettre en mots les éléments constituants du triangle, mais d'en dessiner plutôt un avec son doigt.

> Manon: C'est quoi un triangle, Daniel?
>
> Daniel: C'est un...
> Manon: Sais-tu me dire des mots pour exprimer c'est quoi un triangle?
> Daniel: Je ne sais pas.
> Manon: Dessine-moi un triangle, juste avec ton doigt.

Par la suite, Manon amène les élèves à discuter des différents types de triangles et de leurs caractéristiques : triangle rectangle, triangle équilatéral, isocèle et scalène. Pour chacun de ces triangles, elle dessine un exemplaire sur une feuille de papier et la discussion avec les élèves mène au dégagement de leurs propriétés.

La séance du SDA se termine sur un questionnement de Manon quant aux stratégies des élèves pour le SDP du lendemain.

> Manon: Vous avez déjà une bonne idée de ce qu'il faut faire?
> Élèves: oui
> Manon: Dans votre tête, vous commencez déjà à placer vos stratégies?
> Élèves: oui, oui
> Manon: C'est beau? Est-ce que vous avez des questions? Est-ce qu'il y a quelque chose qui ne semble pas clair? … est-ce que l'aire maintenant c'est plus clair que tout à l'heure?

Pour l'ensemble du SDA, Manon intervient essentiellement, sous forme de discussion avec les élèves sur le concept d'aire et sur celui de triangle (ainsi que les différentes formes de triangles) même si la participation des élèves est inégale : Daniel et Roselyne sont toujours prêts à répondre (avec leur doigt dans les airs pour demander la parole), tandis que Julien et Marielle n'interviennent que lorsque Manon les interpelle directement. Par ailleurs, même si la situation présentée dans le SDP est annoncée au début, elle n'est pas travaillée en profondeur en tant que telle ici, puisque la discussion porte plutôt sur les savoirs anciens que Manon pense essentiels pour pouvoir entrer dans le milieu de la situation. Cette intention est d'ailleurs nommée explicitement par Manon lors de l'entrevue qui a été réalisée avec elle avant le SDA :

> Aujourd'hui je vais rencontrer quatre élèves, ayant été identifiés comme ayant un peu plus de difficultés, pour leur présenter la situation problème et pour vérifier avec eux en fait s'ils possèdent les prérequis pour cette situation-là.

La fonction mesogénétique du SDA, qui consiste à faire entrer les élèves dans le milieu de la situation, prend ici une forme qui est assez classique dans les SDP : celle de la reprise des objets anciens et du rapport à ces objets. L'enseignante s'assure par ce biais que ces objets font partie du milieu initial de la situation. Roselyne, l'une des élèves intervenant dans le SDA, dira plus tard à propos de l'utilité du SDA :

Comme ça tu sais tout de suite c'est quoi l'aire, tu peux tout de suite commencer le travail. Une des différences du SDA par rapport au SDP est que cette reprise des objets anciens se fait en petit groupe. Le petit groupe implique d'être en nombre restreint aussi les élèves peuvent difficilement « échapper » au questionnement de Manon, alors que ceci peut ne pas être le cas en classe où beaucoup plus d’élèves peuvent prendre la parole. Par ailleurs, l’enseignante peut aussi observer plus finement ce que les élèves savent ou non à propos des triangles et des aires du carré et du rectangle. Elle peut ainsi, adapter son questionnement en fonction des réponses des élèves.

III. EPISODES DU SDP

Dans cette partie, nous avons choisi quatre épisodes qui nous semblent montrer des indices des différentes fonctions du SDA dans le SDP. Deux séances ont été consacrées à l’enjeu de savoir : trouver la formule pour calculer l’aire d’un triangle quelconque. Nous allons nous intéresser à la première séance en présentant un rapide synopsis qui nous permet d’y situer les épisodes choisis. La première séance est organisée en alternant un travail en petits groupes de quatre ou cinq élèves et un travail collectif (consigne et mise en commun du travail des petits groupes). Cette enseignante, ayant l’habitude de faire des groupes de travail assez homogènes, a constitué les groupes de telle manière que les quatre élèves qui ont participé au SDA sont dans le même groupe (on l’appellera le groupe ciblé). Le synopsis suivant est relatif à la première séance où nous plaçons trois indicateurs : les types de tâche, les techniques et le mode de travail (collectif ou en petit groupe).

Etapes	Types de tâche et techniques	Modes de travail
1ère étape	Présentation du matériel : règle, crayon, cahier de maths, feuille quadrillée Tâche 1 : « Sur la feuille quadrillée, tu dois dessiner un triangle qui mesure 18cm^2 » Repérage du rapport à des objets anciens à partir de la consigne et de la question : « Qu’est-ce que vous ne connaissez pas ? »	Collectif Oral et écrit au tableau
2èmeétape	Tâche 1 Le groupe ciblé arrive à dessiner un triangle rectangle d’aire 18cm^2, ainsi que la plupart des autres groupes. La technique utilisée est celle « dessiner un triangle rectangle et dénombrer des carrés ou demi-carrés »	Groupes
3èmeétape	Mise en commun Présentation de la technique précédente	Collectif
4èmeétape	Tâche 2 : Trouver la mesure de l’aire de cinq triangles dessinés sur une feuille blanche Le groupe ciblé essaie de décalquer la feuille quadrillée à l’intérieur des triangles (ou de faire un quadrillage) pour pouvoir dénombrer les carrés d’un cm^2. La plupart des groupes utilisent la technique « décalque du quadrillage et dénombrement des carrés »	Groupes
5èmeétape	Mise en commun au tableau Point sur les techniques utilisées par les groupes, notamment les deux suivantes : La technique précédente « décalque du quadrillage et dénombrement des carrés »	Collectif

	La technique « compléter le triangle par un rectangle ou un carré, calculer l'aire de ces figures et diviser par deux » est écrite au tableau	
6ème étape	Tâche 2 Reprise de cette tâche dans les différents groupes Evolution des techniques vers la technique « compléter le triangle par un carré ou un rectangle)	Groupes
7ème étape	Mise en commun au tableau La formule de l'aire d'un triangle est appliquée aux figures particulières proposées dans l'énoncé	Collectif

Tableau 1 – *Synopsis de la première séance du SDP*

Nous avons choisi quatre épisodes qui se situent dans le déroulement du SDP de la manière suivante : l'épisode 1 se situe dans l'étape 1 et concerne Daniel ; l'épisode 2 se place dans l'étape 2 et montre le groupe ciblé ; l'épisode 3 se situe dans l'étape 3 et concerne Roselyne et Julien ; l'épisode 4 se place dans l'étape 5 et est relatif à Daniel.

1. *Episode 1 – Migration des objets du SDA vers le milieu de la situation du SDP*

L'enseignante présente le matériel à utiliser avant de donner la consigne. Elle montre la feuille quadrillée dont les côtés des carrés mesurent 1cm ce qui n'est pas une feuille quadrillée habituelle pour les élèves. Elle indique que cette feuille est spéciale et demande aux élèves ce qu'elle a de particulier. Des élèves répondent : « Elle est normale avec des carrés » ou « les lignes sont noires à la place d'être bleues » ou encore « il y a un cadre autour ». C'est Daniel qui donnera la réponse attendue par l'enseignante : « Il y a des carrés sont de… 1cm ». En choisissant une feuille quadrillée dont l'aire des carrés mesure 1cm^2, les élèves peuvent utiliser d'une manière indifférenciée cette unité d'aire «1cm^2 » ou l'unité d'aire « aire d'un carré du quadrillage », ce qui peut simplifier les techniques de dénombrement.

Cet épisode nous donne un indice des fonctions mesogénétique et chronogénétique du SDA dans le cadre du SDP. Pourquoi Daniel donne-t-il la réponse attendue contrairement aux autres élèves qui donnent des réponses perceptives ? Les objets « cm^2 » et « carré » sont présents dans le SDA. Dans ce dispositif, à la question « c'est quoi l'aire ? », Roselyne avait répondu « avec un carré c'est plus facile… mais un triangle, c'est un centimètre carré genre… ça donne l'aire », et Daniel avait rajouté : « Dans le fond tu prends une feuille quadrillée… puis tu comptes tous les carrés à l'intérieur ». Daniel sait « plus avant » que les autres élèves de la classe de quoi il va s'agir : des aires, des unités de mesure et des triangles.

Notre hypothèse interprétative de cet épisode est que la présence de ces objets dans le SDA a peut-être permis à Daniel de solliciter ces objets pour le milieu de la situation mathématique dans le SDP comme éléments du contrat didactique qu'il suppose être celui de la classe : le travail sur l'aire d'un triangle et les unités de mesure d'aire que l'enseignante veut mettre en place dans la classe. On peut d'ailleurs noter que Daniel a mobilisé ces objets de savoirs alors que quasiment aucun élément permettant de faire le lien avec l'activité du SDA n'avait encore été donné : l'enseignante n'avait jusque-là parlé dans le SDP ni d'aire, ni de triangle ni même de géométrie. Ainsi des objets de savoir présents dans le SDA vont migrer dans le SDP même si de toutes manières ils auraient fait partie du milieu initial de la situation dans le SDP. Ils auraient pu être explicités par l'enseignante mais finalement, c'est plutôt un élève participant au SDA qui le fit.

2. *Episode 2 – Engagement dans la tâche et dévolution*

Les élèves du groupe ciblé se sont mis au travail. En fait, Daniel s'est tout de suite mis à tracer des droites. Les trois autres n'étaient pas encore au travail lorsque Manon est allée les voir pour savoir comment ils allaient s'organiser. C'est suite à cela que le travail s'est amorcé, à l'aide des questions de Manon. Julien pense d'abord qu'il faut faire 18 cm de longueur mais Roselyne propose de dessiner un triangle rectangle : « D'après moi, pour ne pas compliquer la tâche, on pourrait faire un triangle à angle droit ». Nicole s'exclame : « Ah ! Vous commencez avec un triangle rectangle », et elle revient à la consigne, notamment en disant « Je demande un triangle dont l'aire soit 18 [cm²]. Ça veut dire quoi ça ? L'aire, c'est quoi ? », et Julien répond : « c'est la mesure du dedans ». En demandant de préciser « il faut qu'il ait quoi ? », Roselyne répond « 18 petits carrés ». Après quelques échanges encore, les élèves essaient plusieurs mesures des côtés pour trouver, par exemple en divisant 18 par 2, et encore 9 par 2. Les quatre élèves font des essais en utilisant plusieurs mesures des côtés, et c'est Roselyne la première, qui dans le groupe dessine un triangle rectangle isocèle dont l'aire mesure $18cm^2$.

Cet épisode nous montre deux faits qui nous paraissent significatifs. Le premier est relatif à l'engagement des élèves du groupe ciblé dans la tâche proposée dans le SDP. Tous les quatre sont engagés dans la tâche en essayant de dessiner le triangle demandé. Nous pouvons l'observer dans les échanges entre eux, où tous les quatre prennent la parole. Marielle est aussi engagée dans la tâche même si elle le fait en observant le travail des autres. Julien, qui dans le SDA ne savait pas répondre « c'est quoi l'aire » arrive à donner dans le SDP une réponse : « c'est la mesure du dedans ». En plus, lors des essais il dira qu'on ne pourra pas avoir un côté qui mesure 18cm, sinon « ça va donner plus que 18 » (soit plus de $18cm^2$). Comme nous l'avons dit, Roselyne donne l'idée du triangle rectangle qui est un choix pertinent pour trouver une solution au problème, et elle le fait très rapidement. Là aussi, on pourrait penser que le SDA a pu avoir une influence puisque les élèves ont sollicité un triangle particulier.

Le deuxième fait concerne la facilité relative avec laquelle le groupe ciblé est entré dans le milieu. Nous avons observé d'autres groupes dans la classe qui ont eu plus de mal à entrer dans la situation notamment en confondant l'aire et le périmètre. Même si tout au début, Julien et Marielle ont pu parler de la longueur, très vite ils sont revenus à l'aire du triangle. Par ailleurs, le groupe ciblé a trouvé une réponse au problème en prenant la responsabilité de cette réponse : la proposition de Roselyne a été acceptée par le groupe, et chacun a pris une responsabilité dans les essais. Daniel essaie 4,5 en prenant la moitié de 9cm pour un côté du triangle, et voilà leurs échanges :

Marielle – Daniel, la moitié d'une case ça fait virgule 5. Donc il faudrait aller soit en 4 soit en 5 parce que si on y va par la moitié.
Julien – Non, ça doit aller par 5 ou par 4 parce que par la moitié tu ne l'auras pas.
Marielle – Tu auras un autre. Tu auras 40 par 2.
Roselyne – ça, c'est si on fait avec 4,5 (elle montre sa feuille)
Marielle – regarde, ici il t'en manque 1
Roselyne – ça ne marche pas…
Daniel – ça c'est 5.
Roselyne – Non, c'est avec 4,5… juste ici ça ne va pas.
Marielle – Parfait, faisons un autre.

Cet épisode montre que les élèves se sont non seulement engagés dans la tâche mais ils ont pris aussi la responsabilité de trouver une réponse au problème. Ils se sont placés en tant que producteurs d'une technique « dessiner un triangle rectangle et dénombrer les carrés ». La situation mathématique a ainsi été dévolue au groupe ciblé.

3. *Episode 3 – Prise de parole et de position dans le topo d'élève*

Le troisième épisode se situe lors de la mise en commun de l'étape 3. Nicole demande à la classe : « Vous avez dessiné quels types de triangle ? » Roselyne lève la main pour répondre, et Nicole lui donne la parole : « moi j'ai fait un triangle rectangle isocèle », et Julien ajoute : « Il y a un côté qui mesure plus ». Nous avons deux élèves du groupe ciblé, qui ayant trouvé une solution et une technique pour accomplir la tâche 1, prennent la parole dans la classe. Ils prennent position dans le topo de l'élève en montrant qu'ils ont eu un rôle de producteur d'une réponse. En outre, par cette prise de position en montrant une solution, ces deux élèves peuvent faire avancer le temps didactique puisque cette technique « dessiner un triangle rectangle et dénombrer les carrés et demi-carrés » deviendra publique et partagée, et va être par la suite utilisée dans la classe et par le groupe ciblé lui-même. Le groupe ciblé n'est pas le seul groupe à utiliser cette technique mais ils sont bien dans ce qu'il est attendu d'eux. Manon décrivait ces élèves comme ayant tendance à se laisser porter par les autres en grands groupes. Les voilà à présent des élèves moteurs. Certes, on ne peut pas pour autant affirmer qu'il s'agit d'une des conséquences du SDA mais cela semble fort probable. Nous pouvons considérer ces observations comme des indices que le SDA a pu avoir cette fonction topo et chronogénétique.

4. *Episode 4 – Prise de position dans le topo d'élève*

Cet épisode se place dans la deuxième mise en commun de l'étape 5. Il s'agit de trouver des techniques pour mesurer l'aire de cinq triangles dessinés sur une feuille (d'abord non quadrillée et ensuite quadrillée). Manon fait le point sur les différentes techniques utilisées : « Qu'est-ce que vous avez trouvé comme stratégies pour trouver, pour mesurer l'aire des différents triangles ? » Daniel lève le bras et Manon lui donne la parole : « Nous, on décalque sur la feuillle quadrillée », et ensuite « Après on compte les carrés et on complète ceux qui sont à la moitié ». Cette technique a été utilisée par la plupart des groupes. Nous observons que Daniel prend aussi une position dans le topos d'élève lors de la mise en commun en montrant qu'il a un rôle de producteur d'une réponse. De même que pour l'épisode 3, il nous semble avoir là un indice de la fonction topogénétique du SDA qui va dans le même sens que d'autres indices déjà rélèvés.

IV. CONCLUSION

Le système didactique auxilaire mis en place avant le système didactique principal est une adaptation des pratiques d'enseignement mises en œuvre par des enseignantes qui voulaient aider des élèves en difficulté dans la résolution de problèmes mathématiques. Par rapport à d'autres dispositifs d'aide qui sont mis en place après le travail dans la classe (comme par exemple dans les RASED[1] en France), ce type de SDA est nouveau. Comment ce type de dispostif peut-il aider ces élèves ? Nous avons modélisé les fonctions d'aide en termes de fonctions mesogénétiques, topogénétiques, chronogénétiques et de distanciation. A partir de ce modèle théorique, nous avons pu analyser trois autres mises en œuvre de ce type de dispositif qui ne mettent pas l'accent sur les mêmes éléments structurels (Theis et al., 2014 ;

[1] RASED : Réseau d'aides spécialisées aux élèves en difficulté

Assude et al., soumis). Par exemple, le dispositif de Manon met l'accent sur la reprise des objets anciens et le rapport à ces objets, notamment les notions d'aire et des triangles particuliers. Ce SDA semble avoir des fonctions chrono-topo et mesogénétiques comme nous l'avons montré. Les élèves qui ont participé à ce SDA se sont engagés tout de suite dans la tâche proposée par l'enseignante et ont pris position dans le topos d'élève en ayant un rôle de producteur de la technique. Ils ont pu prendre la parole dans la classe pour indiquer leur solution, en prenant ainsi un rôle d'élève chronogène, soit celui qui fait avancer le temps didactique. Un certain nombre d'indices vont dans ce sens même si nous pouvons pas l'affirmer dans un sens déterministe. Ce SDA, tel qu'il a été mis en œuvre dans la classe de Manon, semble être un facilitateur dans l'entrée du milieu de la situation mathématique en permettant aux élèves de se focaliser tout de suite sur la tâche et non sur des objets anciens qui pourraient être encore problématiques (comme le cas de l'aire). Comme le dit Roselyne en parlant du dispositif : « *Comme ça tu sais tout de suite c'est quoi l'aire, tu peux tout de suite commencer le travail.* »

REFERENCES

Assude T., Koudogbo J., Millon-Fauré K, Morin M.-P., Tambone J., Theis L. (soumis) Mise à l'épreuve des fonctions d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté en mathématiques.

Chevallard Y. (1995) La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique. In R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (dir.), *Actes de la VIII^{e} école d'été de didactique des mathématiques* (p. 83-122). Clermont-Ferrand : IREM.

Marlot C., Toullec-Théry M. (2011) Caractérisation didactique des gestes de l'aide ordinaire à l'école élémentaire. *Education & Didactique*, 5.3, 7-32.

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport. (2001) *Programme de formation de l'école québécoise.. Éducation préscolaire et enseignement primaire.* Québec, QC : Gouvernement du Québec.

Sensevy G., Mercier A., Schubauer-Leoni M-L (2000) Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20.3, 263-304.

Sensevy G., Mercier A. (2007) *Agir ensemble. Éléments de théorisation de l'action conjointe du professeur et des élèves.* Rennes: P.U.R.

Tambone J. (2014) Enseigner dans un dispositif auxiliaire : le cas du regroupement d'adaptation et de sa relation avec la classe d'origine de l'élève. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle* 47(2), pp. 51-71

Theis L., Assude T., Tambone J., Morin M.-P., Koudogbo J. et Marchand P. (2014) Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire? *Éducation et francophonie* 42(2), 160-174.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'ARTICULATION DE L'ACTIVITÉ DE L'ENSEIGNANT AVEC L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DE L'ÉLÈVE : LA QUESTION DE LA PARTICIPATION DE L'ENSEIGNANT À L'APPRENTISSAGE DE L'ÉLÈVE EN CONTEXTE D'ORTHOPÉDAGOGIE

Raquel I. Barrera Curin[*] – Aurélie Chesnais[**]

Résumé – Dans cet article nous abordons la question de l'articulation de l'activité de l'enseignant avec l'activité mathématique des élèves en contexte d'orthopédagogie. Les concepts d'activité et d'apprentissage sont définis à partir des hypothèses développées dans le cadre théorique de la double approche sous les fondements de la Théorie de l'Activité. Dans ce contexte nous analysons comparativement l'activité de deux orthopédagogues menant un entretien didactique d'investigation de connaissances auprès de deux élèves de cinquième année du primaire.

Mots-clefs : orthopédagogie, élève en difficulté, action, activité de l'élève, pratiques enseignantes.

Abstract – In this article we address the question of connections between teachers' and students' activity in special education mathematics classes. The concepts of activity and learning are developed according to the « double approach » based on Activity Theory. We proceed with a comparative analysis of the activity of two special education teachers' *exploratory didactic interviews* with two fifth grade students.

Keywords: special education mathematics classes, student with learning difficulties, action, student's activity, teaching practices.

I. INTRODUCTION

Au Québec, et dans le contexte de l'adaptation scolaire, des enseignants appelés orthopédagogues se forment et se spécialisent pour intervenir auprès des élèves en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA) ou des élèves à risque (Mels 2007). Ce travail d'intervention se réalise principalement de façon individuelle, néanmoins des interventions peuvent aussi se dérouler dans un contexte de classe, soit dans une école régulière intégrant des élèves en difficulté, soit dans une école spécialisée. Les orthopédagogues travaillent toujours en collaboration avec les enseignants réguliers, les parents, les conseillers pédagogiques et encore d'autres professionnels intervenant dans différents contextes scolaires. Selon l'ADOQ (2003), l'orthopédagogue identifie et évalue les difficultés et les troubles d'apprentissage scolaire principalement en lecture, écriture et mathématiques.

---

[*] Université du Québec à Montréal – Canada – barrera.raquel@uqam.ca
[**] LIRDEF (EA 3749), Université de Montpellier – France – aurelie.chesnais@fde.univ-montp2.fr

Barrera Curin R. I., Chesnais A. (2015) L'articulation de l'activité de l'enseignant avec l'activité mathématique de l'élève : la question de la participation de l'enseignant à l'*apprentissage* de l'élève en contexte d'orthopédagogie. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT9, pp. 779-790.

Dans cet article nous faisons principalement référence à l'intervention orthopédagogique individuelle se réalisant en dehors de la classe dans laquelle l'orthopédagogue évalue un élève en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage. Dans ce contexte nous allons analyser et comparer un travail d'évaluation en mathématiques réalisé par deux orthopédagogues auprès d'élèves de cinquième année du primaire. Ces évaluations ont été réalisées dans le cadre d'un projet de partenariat qui ressemble l'équipe de recherche en orthodidactique des mathématiques GEMAS (Groupe Enseignement des Mathématiques en Adaptation Scolaire), l'Université du Québec à Montréal et la Direction Régionale Laval-Lanaudière-Laurentides (Giroux 2013). Ce projet cherche à développer un nouveau regard en ce qui concerne le processus d'évaluation des élèves en contexte d'orthopédagogie (Giroux, à paraître ; 2013a ; 2013b ; Ste-Marie & Giroux, à venir. Voir des références aux travaux de Giroux dans Fortier-Moreau, 2014 ; Barrera Curin, Fortier-Moreau & Ghailane, à venir). Le caractère statique attribué – de façon implicite ou explicite – à l'évaluation (Charnay 1999) n'aurait pas de place au cœur d'un *entretien didactique d'investigation de connaissances* (Giroux, à paraitre). Cet entretien se fonde sur trois principes liés, d'une part, aux connaissances et, d'autre part, aux interactions entre l'activité mathématique des élèves et celle de l'enseignant (orthopédagogue). Le premier principe porte sur le caractère dynamique des connaissances, lesquelles sont *circonstanciées* et liées aux caractéristiques de la tâche permettant leur mise en œuvre, émergence ou rencontre. Ces connaissances permettent ainsi d'agir et cet agir implique une appropriation de la tâche qui à son tour conduira à la transformation des connaissances. Le deuxième principe souligne que les connaissances s'imbriquent au cœur des interprétations mathématiques et didactiques produites par les acteurs d'une situation. Le troisième et dernier principe met en valeur le fait que l'entretien didactique favorise l'évolution et la transformation de connaissances sous l'effet des interactions en situation (Giroux, à paraitre ; 2013a ; 2013b).

Compte tenu de ce qui précède, ces entretiens articulant évaluation et intervention en contexte d'orthopédagogie nous positionnent dans un cadre propice pour étudier les échanges verbaux rendant compte de l'articulation de l'activité de l'enseignant avec l'activité mathématique de l'élève. Lors des entretiens, l'enseignant investiguerait les connaissances que l'élève peut mettre en œuvre et participerait à l'évolution de ses procédures, de ses stratégies et ainsi, de ses possibilités d'adaptation ou d'*apprentissage*. Ainsi, l'activité de l'enseignant ne se limiterait pas à la présentation d'une tâche qu'il a préalablement organisée et analysée. L'activité de l'enseignant serait un permanent *agir*, soit dans le silence en laissant la place à l'agir de l'élève, soit à travers de *relances* centrées sur les caractéristiques de la tâche et non pas sur les réponses de l'élève (Ste-Marie & Giroux, à venir).

Dans ce contexte, cette analyse cherche à mettre en lumière des éléments du parler et de l'agir de l'enseignant orthopédagogue rendant compte d'une articulation de son activité avec celle de l'élève. Nous questionnons notamment certaines spécificités de la participation de l'enseignant à l'*apprentissage* de l'élève dans un contexte non traditionnel d'évaluation orthopédagogique, en considérant qu'il s'agit également plus largement d'éclairer des phénomènes plus généraux. Notre objectif serait ainsi d'étudier les deux volets de questions suivantes : d'une part à propos des pratiques des orthopédagogues : Quelles sont les caractéristiques des interventions des orthopédagogues ? En particulier, **comment s'approprient-ils la possibilité de relancer à partir des caractéristiques mathématiques de la tâche à évaluer ? D'autre part, à propos des effets de ces pratiques : quels sont les effets de leurs choix sur l'activité mathématique des élèves - et donc potentiellement sur leurs apprentissages?** Finalement, nous cherchons, tel que Chesnais (2009) l'a déjà exprimé, à étudier les modalités de l'influence des pratiques enseignantes – dans notre cas des enseignantes orthopédagogues – sur les apprentissages des élèves.

Nous développons dans la suite du texte l'appui théorique et méthodologique sous le regard duquel nous analysons le travail mené par deux enseignantes orthopédagogues. Nous présentons les enjeux mathématiques des tâches proposées ainsi qu'une analyse *a posteriori* des extraits des interventions des orthopédagogues que nous étudions comparativement. Nos résultats nous permettent d'identifier des possibilités et des contraintes au cœur du processus d'articulation de l'activité de l'enseignant avec l'activité mathématique de l'élève dans ce contexte d'entretien.

II. L'ARTICULATION DE L'ACTIVITÉ DE L'ENSEIGNANT AVEC L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DE L'ÉLÈVE

Nous considérons que l'*apprentissage* se produit grâce à l'articulation d'un processus adaptationniste (dans l'interaction entre l'élève et la tâche) ainsi que d'un processus social résultant des interactions entre pairs ou entre l'enseignant et l'élève. Ces interactions peuvent être regardées du point de vue du contrat (Brousseau, 1998), mais tel que nous l'avons déjà mentionné, nous proposons de les regarder en posant la question de l'articulation de l'activité de l'élève avec celle de l'enseignant, pris comme "sujets-personnes" (Rogalski, 2008). L'activité est

> ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche : non seulement ses actes extériorisés, mais aussi les inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend, dans ce qu'il fait et ce qu'il se retient de faire ; l'activité comprend aussi la manière dont le sujet gère son temps, et également son état personnel – en termes de charge de travail, de fatigue, de stress, et aussi de plaisir pris au travail. (Op cité, p. 24)

Nous nous focalisons sur les tâches en jeu et la manière dont d'une part l'activité de l'élève se développe sur ces tâches, d'autre part dont celle de l'enseignant se développe en interaction avec l'activité de l'élève sur chacune des tâches.

Le langage constituant le média essentiel de ces activités (Rogalski 2008), « milieu de l'apprentissage, à la fois instrument de communication et outil (Vygotski 1934/1997), ces fonctions étant étroitement liées aux contenus, valeurs et pratiques de l'activité considérée » (Jaubert & Rebière 2013), nous nous intéressons principalement aux échanges verbaux que l'élève et l'orthopédagogue entretiennent autour de la tâche proposée, en ne nous attachant toutefois qu'au contenu des échanges, sans mener une analyse linguistique. Nous interrogeons ainsi l'appropriation des tâches et les interprétations *du savoir* que ces échanges favorisent dans ce contexte non traditionnel d'évaluation. Quelles contraintes s'exercent sur les enseignants face aux défis et à la complexité des tâches mathématiques en jeu ? Comment l'enseignant prend-il en charge les situations confrontant les élèves à des difficultés d'apprentissage ? Quelles aides met-il en œuvre et lui permettent-elles d'exploiter et/ou de faire évoluer les stratégies mises en œuvre par les élèves ?

De façon plus spécifique, nos analyses se fondent sur des hypothèses qui peuvent permettre la reconnaissance d'une certaine *qualité de l'activité* par rapport à *ce que serait apprendre en contexte scolaire*. En suivant l'inscription en théorie de l'activité proposée par Robert (2008) et Rogalski (2008), nous étudions l'activité mathématique de l'élève par les mises en fonctionnement des connaissances mathématiques réalisées dans les tâches proposées par l'enseignant (Robert, 2008). La différenciation entre tâche et activité enrichit le questionnement autour des « phénomènes de diversité et [regarde] l'influence de déterminants personnels dans l'activité et le développement des acteurs » (Robert 2008, p. 14). Nous cherchons ainsi à approcher l'*apprentissage* des élèves par l'observation de leur activité mathématique effective. En ce qui concerne l'activité de l'enseignant et sa manière d'interagir avec celle de l'élève, nous analysons essentiellement le type d'aide (productive, constructive) qu'il donne pour favoriser la résolution de la tâche par l'élève, l'appui sur les procédures de l'élève, l'évaluation et la considération ou le traitement de l'erreur, la structuration des savoirs (l'établissement de liens, la décontextualisation), les (re)formulations, ainsi que l'emploi d'un vocabulaire spécifique (mathématique).

III. ANALYSE COMPARATIVE DU DÉROULEMENT DE CERTAINS MOMENTS DE DEUX ENTRETIENS DIDACTIQUES AUTOUR DE TÂCHES ARTICULANT DIFFÉRENTS SENS DE LA FRACTION

Après une présentation des enjeux d'apprentissages mathématiques présents dans les tâches proposées aux élèves lors des entretiens, nous présentons successivement les résultats de l'analyse de deux entretiens : nous tentons de restituer le déroulement de l'activité de l'élève, de celle de l'enseignant et leur articulation, en lien avec les objectifs d'apprentissage visés d'une part et les fonctions spécifiques de ce mode d'entretien d'autre part. Nous illustrons nos propos par des extraits des échanges ou des procédures des élèves.

1. Enjeux mathématiques des tâches proposées

Les tâches mathématiques portent sur les fractions et visent notamment l'articulation ou la mise en relation de différents sens de la fraction lors de leur résolution. L'idée est de tester si les élèves peuvent mobiliser autre chose que la fraction comme *partie d'un tout*, en le reliant au sens mesure, rapport, opérateur ou encore le sens nombre. Ces tâches se fondent sur le modèle de progression de connaissances proposé par Giroux et son équipe (Giroux, sous-presse ; Giroux, à paraître ; 2013a ; 2013b ; Houle, à venir ; Ghailane 2014). Dans ce cadre, et tel que plusieurs recherches l'ont déjà montré (Adjiage 1999 ; Desjardins & Hétu 1974 ; Kieren 1990), l'apprentissage de la notion de fraction consisterait en une articulation-coordination de ses différents sens et donc de sa compréhension en tant que structure multiplicative (Giroux 2013).

Les élèves sont ainsi confrontés lors des entretiens à la résolution de problèmes portant sur la reconstruction d'un tout à partir d'une fraction donnée ; la partition d'un tout collection ; la reconnaissance de fractions équivalentes en contexte numérique ; la résolution de problèmes de comparaison de rapports. Ces tâches concernent des opérations complexes qui impliquent un processus d'adaptation majeure autour du concept de fraction. Par exemple, « a/b » ne représenterait pas seulement ce qu'on obtient en partageant l'unité en « b » parties multipliées – ou reportées – « a » fois mais aussi le nombre résultant de la division de l'unité par « b » multiplié par « a » (reconstruire un tout continu à partir de la représentation rectangulaire de 2/3 du tout de référence). Le travail sur les fractions équivalentes (comparaison de fractions en contexte purement numérique ou en contexte d'énoncé de problèmes) comporte des variables numériques demandant la reconnaissance de rapports ou encore des proportions. Finalement les tâches associées à la partition d'un tout collection (identifier les ¾ de 10 jetons dessinés) peuvent entrainer la mise en oeuvre spontanée de stratégies élémentaires telles que le comptage et l'appariement mais elles cherchent surtout à déterminer l'existence d'une appropriation de la fraction en tant que structure multiplicative (réalisation d'une division partage ou regroupement) ou encore à une mise en relation avec des fractions équivalentes et des pourcentages. Les tâches visent à mettre en défaut une conception des fractions n'articulant pas suffisamment leurs différents sens.

Par la suite, tel que nous l'avons annoncé, nous présentons une analyse comparative d'extraits d'entretiens menés par deux des orthopédagogues participant au projet de partenariat (Cf. Introduction). Les tâches choisies s'articulent entre elles de par les contenus mathématiques qu'elles permettent de mobiliser. Une analyse inter-tâches est ainsi favorisée. Les analyses *a posteriori* présentées reposent sur des extraits des *verbatims*, mis en regard avec l'analyse *a priori* des tâches. Nous présentons en annexe les énoncés des tâches en question ainsi que quelques productions d'élèves.

2. *Analyse a posteriori des extraits du premier entretien (Geraldine)*

La première tâche porte sur la reconstruction d'un tout continu à partir d'une fraction ordinaire de ce tout, dessinée sous forme d'un rectangle (énoncé : *voici les 2/3 de mon gâteau, dessine le gâteau au complet*). La tâche pour l'élève ici est d'inverser l'opération qui consiste à prendre 2/3 d'un tout. Or l'opération est complexe (nettement plus que dans les cas traités auparavant dans l'entretien, où la fraction était une fraction unitaire). Il y a là deux opérations à inverser ainsi qu'éventuellement leur ordre (Cf. Enjeux mathématiques des tâches proposées).

L'élève s'engage dans la tâche en essayant de dessiner un cercle mais elle est tout de suite interrompue par l'enseignante. L'élève répond qu'*« on peut quand même dessiner ⅔, ça veut dire la même chose »*. L'orthopédagogue répète la consigne en explicitant à l'élève que le gâteau n'est pas rond. L'enseignante ne laisse pas l'élève dérouler sa stratégie, elle l'interrompt probablement pour « prévenir l'erreur » ou parce qu'elle pense que l'élève n'a pas identifié correctement la tâche. L'aide donnée est très contextualisée au problème. L'enseignante reparle de gâteau, *« si je vais à la boulangerie »*, en appelant au contexte concret. Tout se passe comme si elle était en-deçà de ce que fait l'élève qui dit que même si c'est un disque, on peut toujours représenter ⅔ : on pourrait faire l'hypothèse que pour l'élève la fraction est un rapport, sans considérer comme nécessaire la prise en compte du « dessin » de référence. Suite à ces échanges, l'élève prend la règle pour mesurer la fraction dessinée pour ensuite reproduire deux fois le rectangle représentant les ⅔. Elle les place l'un à côté de l'autre. Finalement, elle complète son dessin en faisant un grand carré (Annexe 1). Les relances de l'orthopédagogue centrent l'élève sur ce que le « 2 » et le « 3 » *« veulent dire »* dans cette fraction. Les questions, *« combien de tiers il y a dans un gâteau »* ou *« combien de tiers on voit maintenant »* limitent le sens de la fraction à identifier 2 parts parmi 3 égales. Suite à d'autres échanges, l'élève finit par dessiner un rectangle partagé en trois parties inégales (Annexe 2). À ce moment de l'entretien l'élève a déjà réalisé que ce qu'elle « doit faire » est dessiner un tout rectangulaire partagé en trois parties, chacune desquelles représentant ⅓. L'enseignante répète l'énoncé de la tâche, compare la production de l'élève à la fraction de référence (le dessin des ⅔ donné dans la consigne), comme si elle s'attendait à ce que la répétition constitue une rétroaction suffisante pour remettre en cause la procédure. Nous faisons l'hypothèse qu'elle ne s'aperçoit pas du fait que la difficulté de l'élève est moins liée à la reconstruction d'un tout que la reconstruction d'un tout partagé en trois parties égales.

À la différence de celle-ci, plusieurs tâches au cours de l'entretien ont été réussies par cette élève. En particulier, considérons le problème : « *si chaque jour, pour me rendre à l'école je marche ⅙ de kilomètre. En combien de jours vais-je marcher 1 km ?* ». L'élève établit immédiatement une relation entre 1 km et 1 entier : *É : « un kilomètre est égal à un entier » O : « Oui » É : « un entier bah on le divise en six »*. En finissant sa phrase elle dessine un cercle et le partage aisément en six parties grossièrement égales (Annexe 3). Elle se fait une représentation de la situation, ce qui la conduit à résoudre rapidement le problème posé. Il n'y a pas de relance supplémentaire de l'enseignante, ni questionnement sur la stratégie mise en œuvre et l'élève verbalise facilement sa procédure. Lors de cette tâche, l'enseignante n'invalide pas le recours au cercle, même s'il est censé représenter des kilomètres. On peut s'interroger sur les conséquences qu'aurait pu avoir le fait que l'enseignante laisse l'élève résoudre le problème du gâteau avec la représentation en cercle. Le caractère figé, à la fois des relances (qui ne font que reprendre l'énoncé) et de la procédure attendue par l'enseignante limitent probablement les possibilités de l'élève de développer de nouvelles connaissances/représentations des fractions.

Finalement, une tâche portant sur la partition d'un tout collection (*colorier les ¾ de 10 jetons représentés par des cercles*) n'a pas été réussie par l'élève. Lors d'une tâche préalable, *« trouver les ¾ de 12 jetons »*, l'élève avait mis en œuvre une technique reposant sur l'équivalence de fractions : chercher les ¾ de 12 revient à chercher une fraction équivalente à ¾, de dénominateur 12. 12 étant multiple de 4, la tâche s'avère facile (il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par 3), contrairement au cas présent où 10 n'est pas un multiple de 4. L'enseignante repète la consigne, en mettant à chaque fois l'accent sur le fait que ce qu'on recherche ce sont les *« trois quarts de ces jetons »*. Elle semble ensuite identifier que ce qui pose problème à l'élève est de ne pas s'autoriser à partager les jetons chacun en deux (ce qui semble, au demeurant, bien légitime !) ; elle fait alors appel à un contexte concret pour lever cet interdit : *« on va le voir autrement, au lieu de voir de jetons on va voir ça comme des biscuits [...] Il y a dix biscuits, tu va en donner les trois quarts »*. Puis, l'enseignante fait un retour vers une tâche précédente où l'élève avait établi une équivalence entre ⅖ et 4/10 pour rechercher les 4/10 d'une collection de 5 objets : elle avait partagé en deux chacun des objets puis identifié les 4/10 en prenant quatre des dix moitiés de jetons. De retour à la tâche des ¾ de 10 jetons, l'orthopédagogue l'invite à transférer sa procédure : *« souviens-toi ce que tu as fait »*. L'élève partage chaque jeton en deux puis colorie 3 demi-jetons. L'élève a en effet colorié autant de jetons que le numérateur de la fraction, stratégie qui s'était avérée gagnante dans le cas des 4/10 de 5 jetons. Mais les valeurs numériques supposent ici une nouvelle étape : calculer que ¾ des 20 demi-jetons représente 15 demi-jetons. Or on peut penser que le mode d'interaction de l'enseignante avec l'élève (une forme de « sur-étayage ») ne permet pas à l'élève de conserver un contrôle de la procédure tel qu'elle puisse adapter au cas présent celle qu'elle a mise en œuvre auparavant. En effet, elle dit par exemple qu'elle découpe les jetons en deux *« parce que j'ai appris avant que je pouvais les couper en deux »,* ce qui traduit selon nous qu'il s'agit d'une action sous effet du contrat didactique et non pas motivée par le sens. L'enseignante ne semble pas identifier cette difficulté et étaye encore davantage l'activité de l'élève en mentionnant elle-même les 20 demi-jetons et la nécessité de la recherche des ¾ de 20, qui permet à l'élève de retrouver une tâche familière et d'appliquer la procédure bien maîtrisée de recherche de la fraction équivalente de dénominateur 20. La tâche se termine toutefois sans repérer le fait que ¾ de 20 vaut 15 et sans non plus revenir à la question de départ.

Globalement, on note que pour toutes les tâches, le travail débute par une formulation orale de la consigne (comme indiqué dans le protocole de l'entretien). Mais l'enseignante ne se contente en général pas de la reformulation. Elle met souvent en évidence les ressemblances et les différences avec les tâches précédentes. Par exemple *« On est toujours dans le gâteau, mais cette fois-ci ce morceau-là représente deux tiers de mon gâteau. C'est la même question, peux-tu me montrer mon gâteau en entier, peux-tu me dessiner le tout, sachant que cette partie-là du gâteau, c'est 2 tiers du gâteau. Tantôt on avait un cinquième, là on s'en va vers le 2 tiers. »* Ces interventions visent manifestement à établir des liens entre les tâches. L'établissement de liens entre les tâches pourrait être relié à l'idée d'aider l'élève à identifier des classes de problèmes (aide à visée constructive), mais dans la mesure où cela vient en amont du traitement de la tâche par l'élève, on peut supposer que cela vise surtout à favoriser l'entrée de l'élève dans la tâche (en suggérant une procédure) – ce qui constitue plutôt une aide à fonction procédurale. En outre, on verra que les liens pointés étant liés à des indices de surface peuvent être en fait trompeurs pour l'élève.

On note également que les interventions de l'enseignante sont en général très limitées pour les tâches que l'élève réussit, se bornant la plupart du temps à une demande de verbalisation de la procédure et une évaluation explicite (*« bravo »,* par exemple).

3. *Analyse a posteriori des extraits du deuxième entretien (Mélanie)*

Les extraits d'entretiens portent sur deux exercices. Dans le premier, l'élève doit dire si la fraction 2/4 est équivalente successivement à 4/6, 5/10, 1/3 et 4/8 : nous référerons à ces tâches comme les tâches a, b, c et d.

Pour la tâche « a », l'élève échoue en raisonnant à partir d'un dessin. L'enseignante n'invalide pas explicitement la réponse, mais demande par la suite de recourir à une preuve par le calcul. Pour la fraction « b », 5/10, la réponse de l'élève est ambiguë, car elle répond *« non »,* puis *« c'est un calcul équivalente (sic), mais pas pair »*. L'enseignante interprète la réponse de l'élève comme la conclusion qu'il n'y a pas équivalence car 5 est impaire. Elle propose alors une nouvelle tâche : donner une fraction équivalente à 5/10. En aboutissant à ½ par réduction par 5, il apparaît par transitivité (explicitée par l'enseignante de manière contextualisée) que 5/10 est finalement équivalente à 2/4.

La tâche « c » ne pose pas de problème à l'élève et ne donne lieu à aucune relance supplémentaire de l'enseignante.

La question de la parité réapparaît dans le traitement de la tâche « d » : l'élève conclut à l'équivalence de 2/4 et 4/8 en expliquant *« ça, je le sais vraiment, tout ceux qui sont équivalentes au 2, 4 etc, ça va toujours aller avec tout ça. »*. L'enseignante propose alors une nouvelle tâche : valider ou invalider que 6/10 est équivalente à 4/8 *« parce que c'est pair »*. L'élève invalide immédiatement en expliquant que ce sont les fractions que l'on peut obtenir à partir de 2/4 en multipliant autant de fois que nécessaire numérateur et dénominateur par 2 dont elle sait qu'elles sont équivalentes. Mais elle affirme que pour passer à 6/10, il faudrait faire une addition et non pas une multiplication : elle n'envisage que des multiplications par des entiers. L'enseignante propose alors de réduire la fraction 4/8 (en demandant à l'élève de trouver la fraction *« la plus petite »*, reformulée immédiatement en *« irréductible »*) et l'élève trouve sans difficulté ½. L'enseignante lui demande alors de trouver la fraction équivalente à 4/8 de dénominateur 10, après avoir affirmé que 4/8 et ½, *« tout ça c'est la même chose »* et en affirmant que la réponse existe. Devant l'incapacité de l'élève à répondre, elle propose de reformuler la tâche sous forme d'un problème : *« il y avait 10 questions à l'examen 1 sur 2, j'en ai réussi la moitié »* ; l'élève répond sans difficulté 5. Nous interprétons cela comme un effet topaze cumulé avec un effet Jourdain. L'élève a su trouver que la moitié de 10 était 5, mais l'enseignante interprète cela comme si elle avait su dire que 4/8 était équivalente à 5/10. Il n'y a pas de retour explicite à la question initiale.

Le second est un problème *« dans la classe A, il y a 4 chocolats à partager entre 8 élèves. Dans la classe B, il y a 10 chocolats à partager entre 20 élèves. Dans quelle classe chaque élève aura-t-il plus de chocolats ? »*. Après un petit moment de réflexion, un échange se produit entre l'élève et l'enseignante autour de la partition ou non des chocolats. L'enseignante doit autoriser l'élève pour que l'élève mette en œuvre sa procédure et partage les chocolats : *É : « ah oui je peux le séparer !… ok, ouais, mais ça va être égale » [elle réfléchit] « je pense que c'est pareil [elle rit !] parce que plus y a de chocolat, il y a moins, plus c'est plus grand » O : Ok… plus c'est plus grand… É : plus c'est plus petit plus c'est plus grand là ils ont 20 chocolats… »*. Elle termine ses réflexions en disant que rien ne change puisque *« de toute façon on va les séparer en deux »*. L'orthopédagogue revient à la question initiale en demandant sa réponse à l'élève : celle-ci répond que dans la première classe A, il y aurait plus de chocolats. On peut supposer que cette réponse résulte de l'effet de la formulation de la question (effet de contrat) qui demande de citer une des classes. L'orthopédagogue finit la tâche par un *« OK »* dont on peut douter qu'il permette à l'élève d'identifier que sa réponse est fausse, et passe à la question suivante.

De manière générale, lors de l'introduction des tâches, l'enseignante formule la consigne à l'oral, en l'accompagnant souvent d'une reformulation avec des mots plus simples (moins spécifiques), mais de fait moins précise, éventuellement porteuse d'ambiguïtés. Par exemple, pour le premier exercice, la question *« est-ce que c'est une fraction équivalente ? »* est reformulée en *« est-ce que ça veut dire la même chose ? »*. Or on voit plus loin dans le déroulement que les deux expressions peuvent avoir des sens différents pour l'élève (à propos des 5/10 notamment).

Les interventions de l'enseignante sont ensuite déclenchées par une réponse de l'élève, mais elle n'intervient pas durant le déroulement des procédures par l'élève. Une fois la réponse produite, l'enseignante intervient pour verbaliser la procédure, demander une preuve et, en cas d'erreur, elle propose des nouvelles tâches. Autrement dit, il n'y a pas d'aide procédurale directe proposée par l'enseignante dans la résolution des tâches. En revanche, celle-ci fait de nombreux apports : elle va jusqu'à formuler des règles de manière décontextualisée, par exemple, *« pour trouver des fractions équivalentes tu peux multiplier par des nombres impairs ».*

4. Comparaison des deux entretiens

Un point commun qui apparaît entre les deux enseignantes est une maîtrise imparfaite des contenus mathématiques. Par exemple, les deux enseignantes parlent de fraction *« plus petite »* pour une fraction équivalente mais réduite. Elles parlent également de *« multiplier la fraction par un nombre »* lorsqu'il s'agit en fait de multiplier le numérateur et le dénominateur par ce nombre.

On peut également interpréter certaines interventions comme révélant une difficulté à anticiper des procédures variées et à laisser l'activité de l'élève s'éloigner trop de la procédure standard attendue, en particulier chez Géraldine.

La gestion des aides est en revanche très différenciée entre les deux enseignantes.

Géraldine propose des aides essentiellement en établissant des liens entre les tâches. Ce type d'aide pourrait être interprété comme une tentative à visée constructive pour aider l'élève à identifier des classes de problèmes, mais on peut douter de l'atteinte de ce but pour deux raisons : tout d'abord, lorsque cette aide est donnée avant que l'élève développe une activité sur la tâche, la conséquence est que le choix de la procédure est de ce fait d'une certaine façon indiqué et l'identification de la situation n'est justement plus à la charge de l'élève. D'autre part, les liens entre tâches ne sont pas toujours faits à bon escient si l'on considère leur contenu et les procédures et conceptions des fractions qu'il faut mobiliser pour les résoudre. Par exemple, les tâches de partage demandant d'identifier d'une part ¾ de 10 jetons et d'autre part 4/10 de 5 jetons ne contiennent pas les mêmes adaptations, ce qui semble empêcher l'élève d'identifier ce qui est pertinent à transférer et ce qui reste à adapter d'une situation à l'autre, rendant non porteur de sens le lien fait par l'enseignante.

Mélanie quant à elle intervient en amont pour reformuler les tâches de façon plus « élémentaire », mais au risque d'une ambiguïté. En aval de l'activité de l'élève, elle intervient pour faire des apports, qu'il s'agisse de verbalisation de procédures, demandes de preuves ou ajout d'autres tâches visant à faire se questionner l'élève sur ses réponses.

Du point de vue du traitement de l'erreur, on note aussi une différence entre les deux enseignantes : si Géraldine semble la traiter comme étant à éviter, Mélanie la laisse plutôt se produire et organise la confrontation de l'élève avec elle, de façon à remettre en cause ses connaissances, notamment grâce à un détour via des nouvelles tâches.

En conclusion, il nous semble que les choix de Mélanie tentent en moyen à enrichir l'activité de l'élève tant que ceux de Géraldine tentent à la réduire.

IV. INTERPRETATIONS ET CONCLUSION

Dans cet article nous avons abordé la question de l'articulation de l'activité de l'enseignant avec l'activité mathématique des élèves en contexte d'orthopédagogie. Nous nous sommes notamment intéressées à la participation de l'enseignant à l'*apprentissage* des élèves. Les concepts d'activité et d'apprentissage ont été définis à partir des hypothèses développées dans le cadre de la double approche sous les fondements de la Théorie de l'Activité. Dans ce contexte nous avons analysé comparativement l'activité de deux orthopédagogues menant un entretien didactique d'investigation de connaissances auprès de deux élèves de cinquième année du primaire.

Nous constatons que la complexité mathématique des tâches proposées rend difficiles les rétroactions que l'enseignant peut donner à l'élève de sorte que son activité mathématique évolue au cours des interactions. Des phénomènes déjà étudiés se retrouvent aussi dans nos observations et interprétations des échanges en question, comme le rôle assumé par l'enseignant en tant que guide et *contrôleur* de la *compréhension* de ses élèves ou encore les interactions didactiques et langagières centrées sur le repérage, le traitement et l'évitement de l'erreur. Nous nous questionnons sur les conditions qui permettraient effectivement l'avancement de l'entretien de façon dynamique, c'est-à-dire les conditions qui favoriseraient les interactions de sorte que l'orthopédagogue puisse, de façon satisfaisante, interpréter les connaissances de l'élève. Dans les cas étudiés, l'agir de l'orthopédagogue n'a pas rendu compte de l'outillage fort de l'activité par une analyse didactique préalable considérant les possibilités d'action – de l'élève et d'elle-même – susceptibles d'émerger une fois que la tâche serait posée. L'enjeu de réussite de la tâche semble prendre le pas sur celui de l'apprentissage, ce qui évoque les tensions entre logique d'apprentissage et logique de réussite immédiate (Peltier & al. 2004).

On retrouve également dans nos observations d'autres résultats partagés par d'autres recherches sur des enseignants confrontés à des élèves en difficultés (notamment Chesnais 2009). Ainsi, on retrouve chez Mélanie des reformulations des consignes dans des termes moins élaborés (même si elles sont juxtaposées avec les formulations plus spécifiques), ainsi qu'une interaction très orientée autour du traitement des erreurs, au point de ne pas abandonner une interaction tant que l'erreur n'a pas été « traitée », comme identifié par Giroux (2004).

In fine, il nous semble que l'on perçoit dans les pratiques des deux enseignantes observées une tension liée à l'ambiguïté du rôle des entretiens entre d'une part, une fonction d'évaluation diagnostique des connaissances et difficultés des élèves et, d'autre part, une fonction d'intervention. Cela se traduit par une variabilité des modes d'articulation de l'activité de l'enseignante avec celle de l'élève, d'une absence d'évaluation explicite à une intervention poussée visant à faire prendre conscience à l'élève de son erreur et tenter de l'éradiquer ou de le faire apprendre.

REFERENCES

Adjiage R. (1999) *L'expression de nombres rationnels et leur enseignement initial*. Thèse de l'université Louis Pasteur, Strasbourg, IREM.

Association des orthopédagogues du Québec (2003) *L'acte orthopédagogique dans le contexte actuel*, Mémoire sur le rôle de 'orthopédagogue, Montréal, ADOQ.

Barrera Curin R. I., Fortier-Moreau G., Ghailane O. (à venir) Vers une évaluation dynamique des connaissances mathématiques en contexte orthopédagogique. *Actes du congrès de l'association Mathématique du Québec.*

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Charnay R. (1999) De l'école au collège. Les élèves et les mathématiques. *Petit x* 49*,* 5-18.

Chesnais A. (2009) *L'enseignement de la symétrie axiale en sixième dans des contextes différents : les pratiques de deux enseignants et les activités des élèves.* Paris : Université Paris Diderot – Paris 7.

Desjardins M., Hétu J. C. (1974) *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions.* Québec : Presse de l'université de Montréal.

Fortier-Moreau G. (2014) Analyse didactique d'un outil d'évaluation orthopédagogique sur les structures multiplicatives. 6e édition du *Colloque Éducatif Présent !* Association des étudiantes et des étudiants aux cycles supérieurs en éducation (Université de Montréal), pp. 30-36. Récupéré de : https://www.ficsum.com/colloque/acse/

Giroux J. (2004) Échanges langagiers et interactions de connaissances dans l'enseignement des mathématiques en classe d'adaptation scolaire. In Lemoyne G. (Ed.) *Langage et Mathématique, Revue des sciences de l'éducation* 30(2), 303-328.

Giroux J. (2013) *Projet de partenariat GEMAS/LLL en orthopédagogie des mathématiques.* Université du Québec à Montréal. Document inédit.

Giroux J. (2013a) Entretiens didactiques sur la fraction auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage. Colloque du Groupe de didactique des mathématiques, UQAT, 5-7 juin 2013.

Giroux, J. (2013b) Étude des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire: Problématique et repères didactiques. *Revue Éducation et didactique* 7(1), p. 59-86.

Giroux J. (2013) Entretiens didactiques sur la fraction auprès d'élèves en difficulté d'apprentissage. *Actes du colloque 2013 du Groupe de Didactique des Mathématiques du Québec*. Abitibi-Témiscamingue, Qc: GDM.

Giroux J. (à paraitre) Variations sur les processus interprétatifs dans l'étude des difficultés d'apprentissage en mathématiques. In Butlen D. et Hersant M. (Eds.) *Rôles et place de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et dans le système éducatif*. Éditions La pensée sauvage. (30 pages).

Houle V. (à venir) *Fondements didactiques pour une intervention orthopédagogique sur la notion de fraction.* Thèse de doctorat en cours. Université du Québec à Montréal.

Jaubert M., Rebière M., Bernié J.-P. (2003) L'hypothèse « communauté discursive : D'où vient-elle ? Où va-t-elle ? *Cahiers Théodile* 4, 51-80.

Kieren T. (1990) Understanding for teaching for understanding. *The Alberta Journal of Educational Research* 36(3), 191-201

Ministère de l'Éducation, Loisir et Sport du Québec (2007) L'organisation des services éducatifs aux élèves à risque et aux élèves handicapés ou en difficulté d'adaptation ou d'apprentissage (EHDAA).

Peltier-Barbier M. L., Ngono B. (2003) Modifier ses pratiques c'est difficile ! Effets d'une formation sous forme d'un accompagnement sur les pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques dans des classes de REP, *Recherche et Formation* 44, 63-76.

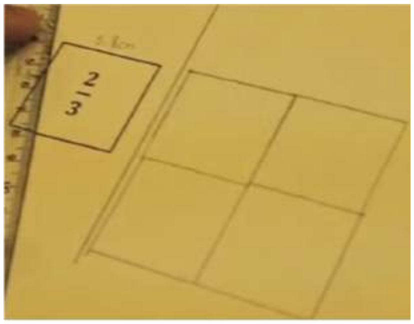
Robert A. (2008) Sur les apprentissages des élèves : une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement. In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 33-44). Toulouse : Octarès.

Rogalski J. (2008) Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique – in In Vandebrouck F. (Ed.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 23-30). Toulouse : Octarès.

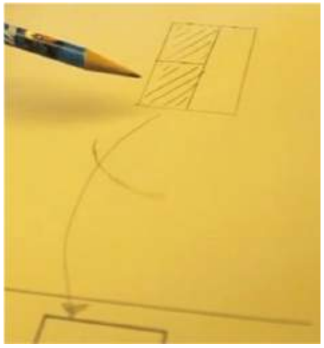
Ste-Marie A., Giroux J. (2014) Modèle d'évaluation des connaissances mathématiques d'élèves faibles en contexte orthopédagogique, Actes du Colloque du Groupe de Didactique des Mathématiques du Québec, Mai 2014.

Vygotsky L. (1934/1997) *Pensée et langage* (3ème éd.). Paris : La Dispute.

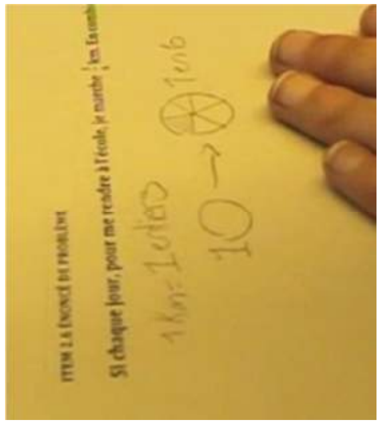
ANNEXES



Annexe 1



Annexe 2



Annexe 3

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ETUDIER ET FAIRE ÉVOLUER LES PRATIQUES D'ÉVALUATION DES ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES EN ALGÈBRE AU COLLÈGE DANS LE CADRE D'UN LÉA

Julie HOROKS[*] – Julia PILET[**]

Résumé – Dans le cadre du projet ANR NéoPraéval (Nouveaux outils pour de nouvelles pratiques d'évaluation), nous nous attachons à l'étude des pratiques enseignantes en terme d'évaluation au sein de la classe en algèbre élémentaire. Nous avons mis en place un Lieu d'Éducation Associé (Léa) pour travailler en collaboration avec des enseignants de collège afin d'avoir accès à ces pratiques mais également de produire des ressources pour favoriser une évaluation au service des apprentissages des élèves en algèbre. Nous présentons une première ébauche des outils méthodologiques que nous avons construits pour caractériser les pratiques d'évaluation des enseignants en les mettant en perspective du contexte d'un travail collaboratif.

Mots-clefs : Pratiques d'évaluation, évaluation formative, travail collaboratif, algèbre, méthodologie d'analyse

Abstract – Texte du résumé traduit en anglais

Keywords: (les 5 mots clefs en anglais séparés par des virgules)

La question de l'évaluation semble actuellement centrale dans le paysage éducatif français ainsi que dans celui de la recherche, notamment en didactique des mathématiques. L'évaluation est approchée sous l'angle de la conception d'évaluations externes (nationales ou internationales), de leur validité pour connaître le niveau des élèves, de l'interprétation des résultats des élèves en lien avec l'enseignement qu'ils ont reçu, du statut des notes données aux élèves, ou encore des effets des évaluations sur les apprentissages des élèves et de leur posture à l'école. Nous choisissons de nous pencher sur la question des pratiques enseignantes d'évaluation, non pas pour décrire de « bonnes pratiques », mais pour tenter d'en comprendre les cohérences.

Dans cette étude, nous essayons de caractériser les pratiques d'évaluation de quelques enseignants de collège en mathématiques, et leur évolution éventuelle suite à un travail collaboratif avec des chercheurs, travail dont nous décriront plus loin les objectifs et modalités. Après avoir défini de manière plus précise ce que nous entendons par évaluer, nous exposons ici principalement les moyens que nous nous donnons pour étudier les pratiques d'évaluation interne, à travers les outils issus de cette recherche, que nous utilisons pour donner un premier exemple d'analyse, sans aller jusqu'à parler de l'impact éventuel du travail avec les chercheurs sur les pratiques enseignantes, faute de recul suffisant pour le moment.

[*] Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Est Créteil – France – julie.horoks@u-pec.fr
[**] Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Est Créteil – France – julia.pilet@u-pec.fr

Horoks J., Pilet J. (2015) Étudier et faire évoluer les pratiques d'évaluation des enseignants de mathématiques en algèbre au collège dans le cadre d'un LEA. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT9, pp. 791-804.

I. PRATIQUES D'EVALUATION

Nous allons nous intéresser dans premier temps à l'objet « évaluation », pour en donner une définition et des catégorisations possibles, avant de nous pencher sur l'évaluation en tant qu'outil pour les enseignants.

1. *Définir ce qu'est évaluer*

Pour pouvoir définir ce qui constitue des pratiques d'évaluation parmi tous les gestes de l'enseignant, nous avons essayé de définir d'abord ce que signifiait "évaluer" pour nous dans ce contexte, d'abord de façon naïve, puis en nous appuyant sur des recherches sur le sujet.

D'après le dictionnaire Larousse, il s'agit de

> *Déterminer, fixer, apprécier la valeur, le prix de quelque chose, d'un bien, etc. : Évaluer un tableau à trois millions. Déterminer approximativement la durée, la quantité, le nombre, l'importance de quelque chose : Évaluer la population d'une région à plusieurs millions.*

D'après cette définition, évaluer les élèves signifierait-il apprécier la valeur de leurs apprentissages ? Si oui, étudier les pratiques d'évaluation reviendrait donc à étudier les pratiques des enseignants au moment où ils apprécient la valeur des apprentissages des élèves : comment et pour en faire quoi ? Bien évidemment, la question des apprentissages se pose : est-ce un apprentissage que l'on évalue dans une production d'élève, ou simplement l'état des connaissances à un instant donné ?

Si nous nous appuyons sur la définition de Bodin (1997), il s'agirait de juger, certifier, classer, « *entre le désir de mesurer à tout prix et la volonté d'expliquer, de donner du sens aux observations* ». Nous retenons l'idée de mesure mais aussi et surtout celle d'interprétation des réussites et des échecs et la recherche de cohérence, que nous questionnons du point de vue de l'enseignant (qu'ont appris mes élèves et comment puis-je le relier à mon enseignement ?) ou de celui de l'élève (qu'ai-je appris et comment progresser ?).

Nous posons alors l'évaluation comme étant une prise à la fois d'informations et de décisions (Black & Wiliam 1998), mais pas forcément au même moment : il y a pour nous évaluation à condition que l'élève et/ou l'enseignant en tire une information en terme d'apprentissage. Mais cela est à mettre en relation de la fonction de l'évaluation : évaluer pour former ou non ? Ces informations sont une mémoire pour l'enseignant mais aussi pour l'élève, ce qui nous amène à symétriser la question de l'évaluation : la prise d'information comme l'exploitation de la prise d'information peut se faire sur les apprentissages du côté de l'élève et/ou du côté de l'enseignant

Du côté de l'enseignant, cela nous amène à regarder quelles actions, liées ou non aux contenus visés, découlent de l'évaluation qui a eu lieu. Cela nous amène alors à questionner les aides apportées aux élèves par les enseignants : y a-t-il "aide" lorsqu'il y a eu prise d'information et donc "évaluation" ? Les deux sont-ils elles indissociables ? Ou bien l'enseignant peut-il anticiper les besoins des élèves sans les évaluer ?

Cela nous amène à catégoriser deux types d'interventions de l'enseignant, suivant la prise d'information dont elles découlent :

- "Mettre en œuvre un projet d'enseignement", avec une connaissance des élèves génériques et qui amène à une réalisation de ce qui est programmé, sans s'appuyer sur ce que produisent les élèves,
- "Aider les élèves", ici du côté des aides constructives mais pas forcément avec le seul point de vue de la Double Approche (Robert 2008), en s'intéressant à la construction de savoirs éventuelle qui pourrait en découler en aval, mais plutôt en prenant appui en

amont sur les évaluations des élèves, c'est à dire en rétroaction avec les informations sur les connaissances des élèves spécifiques d'une classe qui amènent à des ajustements et des adaptations aux besoins des élèves.

Du point de vue des observables, comment distinguer, pour nous, une aide fondée sur l'expérience, d'une aide fondée sur une évaluation effective appuyée sur des savoirs didactiques. Cette question est d'autant plus délicate méthodologiquement que l'aide peut être immédiate ou différée par rapport au moment de l'évaluation ? Comment repérer ces aides pour chaque élève, sachant qu'elles peuvent être apportées de manière individuelle ou collective ?

En posant l'évaluation comme une dialectique entre prise d'information et prise de décision, nous symétrisons en particulier le lien entre enseigné et évalué : qu'est-ce qui est évalué par rapport à ce qui a été enseigné, qu'est-ce qui est enseigné à la suite de ce qui a été évalué ?

2. *Lien avec les différents types d'évaluations*

Nous prenons également en compte les trois types d'évaluation diagnostique, formative et sommative de Bloom et al. (1988) ainsi que leur articulation.

L'évaluation diagnostique vise à collecter des informations sur les connaissances antérieures des élèves avant de les faire entrer dans une nouvelle séquence d'apprentissage, et de planifier une éventuelle différenciation de l'enseignement comme des évaluations qui suivront. Selon Scallon (1998) elle permet de "déterminer la cause de difficultés persistantes chez certaines élèves », mais aussi pour Grugeon (1997) de caractériser les connaissances des élèves en termes de cohérences de fonctionnement, de rapport dominant à un domaine, de type de raisonnement prégnant.

L'évaluation formative a une fonction d'amélioration de l'apprentissage (Black & William 1998). Elle consiste à suivre les progrès des élèves et à l'amener à comprendre l'écart entre ce qu'il sait et ce qu'il est attendu qu'il sache.

Enfin, l'évaluation sommative intervient généralement à la fin de chaque unité d'apprentissage pour confirmer ce que connaît et sait faire chaque élève. Mais bien sûr le sommatif peut être le diagnostic de ce qui suit, et tout peut s'avérer formatif, suivant les élèves, donc nous choisissons de penser l'ensemble des évaluations en fonction de leur fonction dans leur globalité et dans l'ensemble du processus d'enseignement / apprentissage.

Ce sont les pratiques d'évaluation formative qui nous paraissent être les plus difficiles à caractériser, voire à repérer chez les enseignants. En effet, l'évaluation formative se déroule dans un continuum, de manière plus ou moins formelle, planifiée ou non (Shavelson & al. 2008), et en s'intégrant « *de manière dynamique dans le déroulement d'une séquence pédagogique »*" (Rey & Feyfant 2014). Ainsi, la fonction formative de l'évaluation n'est pas si facile à définir : nous considérons, comme Black et Wiliam (1998) qu'il y a du formatif en classe à partir du moment où cette prise d'information aboutit à des actions qui permettent aux élèves de se situer dans les apprentissages en s'auto-évaluant, et de progresser, mais nous nous interrogeons sur les actions spécifiques qui permettent d'obtenir ces progrès, et en particulier en relation avec des contenus mathématiques donnés. (Bain 1988)

Prenons l'exemple de l'un des enseignants dont nous analysons les pratiques dans cette recherche. Il organise au début de chaque séance des séries d'exercices ritualisés. Leur correction est collective, et les procédures de quelques élèves sont généralement discutées, puis tous les élèves s'auto-évaluent en mettant une note à leur performance et en reliant chaque question à un type de tâche particulier. Nous pouvons alors nous demander quelles sont les fonctions de ces exercices, en termes d'évaluation : quel type de prise d'information permettent-ils et pour qui ? Nous pouvons penser que, pour l'enseignant, les informations prélevées ne concernent probablement pas l'ensemble de la classe. En revanche, pour l'ensemble des élèves, ces moments peuvent-ils constituer une opportunité de mesurer, voire de comparer ou de catégoriser leurs apprentissages ? Peut-on alors parler d'évaluation formative ?

3. Des pistes pour caractériser les pratiques d'évaluation

Pour analyser les pratiques enseignantes, nous nous plaçons dans le cadre de la double approche (Robert & Rogalski 2002) qui nous permet de prendre en compte des contraintes et facteurs extérieurs à la classe (établissement, expérience) tout en analysant finement les contenus proposés par les enseignants et la façon dont ils organisent les déroulements en classe. La Double Approche ne fait pas de distinction entre les pratiques d'évaluation et l'ensemble des pratiques des enseignants, et il est probablement illusoire de vouloir les séparer totalement, mais nous faisons le choix, pour porter un nouveau regard sur la cohérence des pratiques, de regarder quelles sont les activités des enseignants qui correspondent à des prises d'information sur les élèves, et à l'exploitation de ces informations.

Nous définissons deux dimensions. La première concernent leur « rapport » à l'évaluation que nous caractérisons par les fonctions (former, contrôler, juger, noter) qu'ils donnent à l'évaluation et leur prise en compte de ce qui a été enseigné préalablement ainsi que du contexte (milieu d'éducation prioritaire par exemple). La seconde concerne leurs pratiques d'évaluation à plusieurs niveaux. Il s'agit de la place accordée à l'évaluation au niveau macro, donc dans le projet global de l'enseignant, et aux niveaux local et micro, c'est-à-dire dans la mise en œuvre effective des séances et les éventuelles habitudes des enseignants, à travers les traces de l'évaluation immédiate, dont la gestion effective des feedbacks (Allal & Mottier-Lopez 2007), ou différée, avec l'exploitation des évaluations précédentes. Nous y ajoutons, en lien à la fois avec des automatismes et avec le contenu mathématique considéré : la correction des copies du point de vue de l'interprétation et du mode de traitement des erreurs des élèves et de la notation, la dimension individuelle ou collective de la prise d'information ou de son exploitation, les responsabilités données à chacun, enseignants et élèves dans l'évaluation, la distance par rapport aux mathématiques, les liens tissés par l'enseignant avec les mathématiques, avec la tâche, avec la mémoire de la classe et entre les procédures d'élèves. Nous attachons également une importance aux types de validation : donner la bonne réponse ou comparer et juger les réponses, prendre en compte seulement le résultat ou aussi la procédure, voire l'écriture et l'argumentation du raisonnement, écarter les erreurs ou les commenter en les situant par rapport à la bonne réponse, justifier de manière plus ou moins mathématique, ou en lien avec les règles apprises à respecter. Le rapport que les enseignants entretiennent à l'évaluation a très probablement une incidence sur leurs pratiques, et nous faisons l'hypothèse d'une cohérence plus ou moins grande entre ces deux dimensions pour un enseignant donné, suivant la prise en compte des contenus mathématiques évalués.

Ces critères dépendent donc des contenus traités, et l'analyse épistémologique et didactique des notions mathématiques nous permet d'affiner notre étude des évaluations proposées par les enseignants, en prenant en compte la complexité et la variété des tâches proposées et leur rapport à l'enseigné, et en particulier la part des tâches simples et isolées dans l'enseignement et dans l'évaluation, qui dépendent de cette analyse des contenus pour un niveau de classe donné.

4. *Lien avec le contenu : le choix du domaine de l'algèbre.*

L'algèbre élémentaire constitue un élément pivot du curriculum mathématique de l'enseignement secondaire pour pouvoir poursuivre des études scientifiques. Pourtant, il constitue un obstacle difficilement surmontable pour beaucoup d'élèves (Kieran; 2007). L'évaluation visant à favoriser la réussite du plus grand nombre d'élèves est donc d'autant plus cruciale pour ce domaine.

Dans ses travaux sur la conception et le développement d'une évaluation diagnostique qui permette de repérer les cohérences de fonctionnement des élèves en algèbre, Grugeon (1997) structure les connaissances algébriques en deux dimensions "non indépendantes et partiellement hiérarchisées", les dimensions *outil* et *objet* (Douady 1986). Elle les définit à partir d'une synthèse des travaux de didactique de l'algèbre :

Dans sa dimension outil, l'algèbre est mobilisé :

> - comme outil de résolution via leur modélisation pour résoudre des problèmes « arithmétiques » formulés en langue naturelle sous forme d'équations et, au-delà, pour résoudre des problèmes intra ou extra mathématiques sous forme de relations fonctionnelles entre données et variables,
>
> - mais aussi, comme outil de généralisation et de preuve dans le cadre numérique et comme outil de calcul dans les cadres algébrique et fonctionnel.
>
> Dans sa dimension objet, plusieurs objets sont en jeu : l'égalité, les expressions, les formules, les équations, les inéquations et leurs propriétés ainsi que les systèmes de représentation de ces objets, en particulier, le système de représentation symbolique algébrique en articulation avec d'autres systèmes de représentation sémiotique (graphique, géométrique, algébrique, langue naturelle). Leur manipulation formelle tient compte du double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques pour redonner sa juste place à la dimension technique et théorique du traitement algébrique (dénotation et équivalence des expressions). (Grugeon & al. 2012)

Elle revient également sur les ruptures en jeu dans l'entrée algébrique (Vergnaud 1987; Kieran 2007) notamment la rupture avec l'arithmétique qui se joue tant du côté de la rationalité mathématique mise en jeu dans la résolution de problèmes que du côté de l'interprétation des objets (expressions, statuts des lettres et du signe d'égalité).

Nous présentons maintenant le travail collaboratif que nous menons au sein de Léa au sujet des pratiques d'évaluation en classe.

II. NOS MOYENS : TRAVAIL COLLABORATIF AU SEIN DU LEA

1. *Les Léa : un dispositif collaboratif entre chercheurs et acteurs de terrain*

L'institut Français de l'Education (IFE) a crée en 2011, des Lieux d'Education Associés (LéA) favorisant un travail collaboratif sur un temps long entre une équipe de recherche de l'IFE et les acteurs d'un lieu à enjeu d'éducation.

> Les LéA veulent promouvoir des recherches dans lesquelles une part décisive est prise par des collectifs au sein des lieux d'éducation, associant chercheurs et enseignants. Plus que de recherches 'sur' l'éducation, il s'agit de recherche 'avec' les acteurs, 'pour' le développement des acteurs, de la profession, de l'institution… » (Monold-Ansaldi & Favelier 2013).

Les Léa portent donc des questionnements sur des enjeux d'apprentissage, d'enseignement et d'éducation, associent pour trois ans chercheurs et acteurs de terrain pour co-construire et expérimenter des réponses à ces questionnements et produire des ressources mobilisables par des acteurs de l'éducation. Les Léa offrent donc la possibilité aux enseignants de produire des ressources avec des chercheurs mais également de s'impliquer dans un processus de formation. En effet, Sensevy (2013) écrit : « *L'institution des LéA peut et doit être motivée* *par la nécessité d'une recherche spécifique sur la profession de professeur, recherche qui pourrait constituer un arrière-plan fondamental pour la formation et pour le développement professionnel.* » De plus, avec le caractère collaboratif des Léa, l'enseignant n'est pas seulement un objet d'étude pour le chercheur mais il enrichit la recherche grâce à son expérience et ses connaissances.

Nous pourrons étudiez dans quelle mesure ce dispositif permet de remplir son double enjeu : étudier des phénomènes didactiques et apporter des outils pour faire évoluer l'enseignement, mais nous ne traiterons pas de cette question ici, n'ayant pas de données sur un terme assez long pour pouvoir y répondre.

2. *Le Léa Roger-Martin-du-Gard*

Depuis la rentrée 2014-2015, ce Léa, qui regroupe 4 enseignants et 7 chercheurs [1], s'ancre dans un collège en zone d'éducation prioritaire de Seine-Saint-Denis et s'organise autour d'un collectif d'enseignants de mathématiques du collège et de didacticiens du laboratoire de Didactique André Revuz. Il s'inscrit dans une recherche plus large sur l'évaluation (projet ANR"NeoPraeval" accepté à l'appel d'offres "ANR-Apprentissages") dans lequel nous interrogeons l'évaluation des élèves et les pratiques d'évaluation des enseignants. Il vise à développer de nouvelles pratiques d'enseignement, en particulier d'évaluation et de régulation (adaptation par l'enseignant de son projet pour prendre en compte les besoins d'apprentissages des élèves), en s'appuyant sur des travaux de mathématiques. Quelles sont les pratiques d'évaluation et de régulation des apprentissages organisées par les enseignants en classe ? Quels moyens d'évaluation à la fois diagnostique, formative et sommative sont utilisés ? Quels dispositifs concevoir et mettre en place pour faire évoluer ces pratiques et favoriser l'organisation d'un enseignement adapté aux besoins d'apprentissages repérés des élèves dans un domaine mathématique donné?

Le travail collaboratif porte donc sur la conception de séquences et d'outils d'enseignement favorisant la réussite de tous les élèves dans le domaine du calcul numérique et du calcul littéral dont nous avons déjà évoqué le rôle clef pour la poursuite d'études en mathématiques au collège et dans les études ultérieures. Il est donc crucial pour les enseignants de savoir diagnostiquer les connaissances des élèves, repérer précisément leurs difficultés, apprécier des évolutions et les soutenir de façon appropriée en vue de la réussite du plus grand nombre d'élèves. L'élaboration de progressions et de séquences sur le calcul numérique et algébrique s'appuie sur un principe de réalité. Elle prend en compte des contraintes des enseignants, des connaissances et compétences des élèves. Il s'agit d'être au plus près du terrain pour produire collectivement des ressources adaptées et utilisables.

3. *Le travail dans le Léa Roger Martin du Gard : principes, contraintes et marges de manœuvre*

Le travail dans notre Léa peut s'apparenter au travail collaboratif, qui est un courant de recherche qui se développe plus particulièrement au Québec. En effet, il n'implique pas uniquement le fait de travailler au sein d'un groupe comprenant à la fois des chercheurs et des enseignants mais une « *véritable démarche de recherche* » de la part des chercheurs du groupe, c'est-à-dire, « *visant à la construction de savoirs* » sur les pratiques mais prenant ici particulièrement en compte « *la réalité de la pratique* » (Bednarz, 2013). Il permet de rentrer dans une « *dynamique qui [...] met en avant l'idée de rapprocher les préoccupations du «*

[1] Brigitte Grugeon-Allys, Mariam Haspekian, Julie Horoks, Michella Kiwan, Julia Pilet, Eric Roditi et Stéphane Sirejacob

monde de la recherche » et celles du « monde de la pratique », de travailler avec plutôt que sur les praticiens » (ibid, p 7). Le rôle des enseignants et celui des chercheurs n'est pas le même au sein du Léa, celui des chercheurs étant de plus multiple, car nous avons plusieurs rôles à tenir, qui peuvent être simultanés ou rentrer parfois en concurrence. Nous avons en effet un triple objectif. Le premier est d'accompagner une production de ressources, avec des apports de la recherche en lien avec la classe et ses contraintes. Le second est d'analyser les pratiques des enseignants avec eux et de contribuer à des apports de recherche pour permettre aux enseignants une réflexion sur leurs pratiques. Enfin, le troisième est de produire des données pour la recherche à la fois sur les pratiques d'évaluation et d'enseignement en algèbre ; et sur l'impact d'un travail collaboratif sur ces pratiques.

Ainsi, notre posture varie au cours d'une réunion, d'une réunion à l'autre et au fur et à mesure de l'avancée projet. Nous adoptons une posture de chercheur tout en étant organisateur et participant de l'activité réflexive. Nous avons un rôle important « *dans la mise en place et le développement de cet espace réflexif, à travers notamment le choix des activités qui serviront de base possible de discussions, mais aussi dans les ajustements, les opportunités ou possibilités saisies en cours de route pour tenir compte de ce qui émerge, dans la régulation des interactions.* » (ibid, p 28). Notre posture est davantage celle de formateur lorsque nous répondons aux attentes des enseignants dans la co-construction de ressources, dans la réflexion sur leurs pratiques et leurs rapports au savoir.

Ces deux postures ne sont pas pour autant mutuellement exclusives, car le chercheur peut assumer à la fois un rôle de formateur tout en récoltant des données sur les pratiques. Notre rôle dans la co-construction de ressources n'est pas facile à délimiter, car dans ces moments nous pouvons être amenés à tenir un rôle de chercheur, aux yeux des enseignants, qui éclaire alors le problème en apportant des résultats ou des méthodologies de recherche, sans pour autant adopter la posture de chercheur qui collecte des données pour répondre à une problématique de recherche.

D'autre part, comment faire en sorte que les pratiques qui sont analysées au sein du groupe ne soient pas d'emblée influencées par le contexte du travail collaboratif, et en particulier compte tenu des compromis nécessaires pour prendre en compte à la fois les besoins de formation des enseignants et ceux des chercheurs liés au recueil de données, à travers des dispositifs censés parfois remplir ces deux fonctions ? Comment mesurer à chaque étape l'impact de ce travail sur ce que l'on observe : peut-on encore parler de pratiques ordinaires ? Ainsi, pour analyser l'évolution des pratiques et en particulier des pratiques d'évaluation des enseignants du Léa, comment faire état des pratiques initiales des enseignants pour en mesurer l'évolution ?

Enfin, dans le souci de respecter le contrat passé avec les enseignants au départ, dans lequel nous nous engageons en particulier à répondre à leurs besoins et conserver leur confiance, quel équilibre pouvons-nous trouver entre observation et apports par les chercheurs, de manière à ne pas demander aux enseignants globalement plus qu'on ne leur donne ? Cela fait écho à l'idée de « double vraisemblance » de Dubet (1994), qui détermine trois préoccupations clefs pour le chercheur à la fois en lien avec les intérêts de chacun ("double pertinence sociale" pour réunir les enseignants et les chercheurs autour d'un même projet en amont, et "double fécondité des résultats" en aval, lors de la diffusion des travaux), mais aussi pendant la recherche avec une "double rigueur méthodologique", pour réussir à analyser les pratiques des enseignants tout en les influençant déjà à travers le travail collaboratif.

Il semble nécessaire de développer une méthodologie spécifique à ces différentes postures et intérêts, d'une part, en établissant a priori les postures de chacun pour les séances, et, d'autre part, en effectuant des analyses a priori et a posteriori des séances effectives de travail collaboratif.

4. *Les observables pour le chercheur*

Les enseignants du Léa nous donnent accès à tous les documents dont ils se servent pour enseigner et évaluer (progressions, énoncés) ainsi que les productions de leurs élèves. Ils nous donnent accès à leurs classes et filment les séances qui nous semblent intéressantes, et surtout ils échangent avec nous sur leurs pratiques, individuellement ou collectivement, et nous donnent ainsi à voir leur rapport à l'algèbre, à l'enseignement et à l'évaluation. Nous organisons des temps spécifiques dans les réunions mensuelles du Léa pour recueillir des données sur leur rapport à l'évaluation et leurs pratiques. Nous développons un exemple dans le paragraphe suivant.

Cette masse de données n'est pas facile à gérer et d'un point de vue méthodologique, il nous faut encore trouver quels formats nous permettent de nous approprier plus facilement tous ces éléments, sans surcroît de travail pour les enseignants.

III. QUELQUES CONSTATS ET QUESTIONS SUR LES PRATIQUES D'EVALUATION DES ENSEIGNANTS DU LEA

Les premières réunions du Léa ont eu pour objectif non seulement d'établir un climat de travail collaboratif entre les participants mais également pour nous, chercheur, de se donner les moyens d'accéder aux pratiques d'évaluation des enseignants tout en faisant des apports pour permettre d'engendrer l'analyse réflexive commune. Cette tension, qualifiée de « *nécessaire* » par Bednarz (2013, p. 24) entre les attentes des enseignants et celles des chercheurs est donc apparue dès les premières étapes du projet.

Notre choix pour entrer plus précisément dans la question des pratiques d'évaluation a porté sur la conception conjointe, entre les 4 enseignants et les chercheurs, d'une évaluation diagnostique pour repérer les connaissances et compétences sur le numérique et le pré-algébrique des élèves de 5ème (12-13 ans). Ce choix se justifie par rapport aux objectifs du projet global. Du côté des contenus, c'est à ce niveau scolaire que se joue l'entrée dans l'algèbre et la rupture avec l'arithmétique dont les travaux de didactique de l'algèbre ont montré qu'elle était source de difficulté pour les élèves. Travailler sur l'entrée dans l'algèbre est donc l'occasion pour nous de repérer leur rapport à l'algèbre et à son enseignement et, pour eux, d'avoir des premiers apports sur l'enseignement de l'algèbre et les processus d'apprentissage des élèves. Du côté de l'évaluation, ce dispositif, décrit plus précisément ci-dessous, nous permet d'accéder en partie aux choix réalisés par les enseignants pour concevoir une évaluation et aux fonctions qu'ils donnent à l'évaluation. Ce dispositif a donc été un moyen d'analyser leurs pratiques, au moins en partie, tout en leur faisant des apports sur les contenus et tâches algébriques, sans pour autant aborder des questions didactiques liées aux pratiques et à l'évaluation.

Nous avons commencé par demander aux enseignants de produire, individuellement, sans se concerter, une évaluation diagnostique pour l'entrée dans l'algèbre. La réunion du Léa qui a suivi s'est organisée autour d'une discussion où chacun a argumenté ses choix et a pu commenter ceux des autres, ce qui nous a permis de comprendre ce qui motivait les choix des enseignants pour ce diagnostic. En tant que chercheur, nous avons apporté un éclairage épistémologique et didactique avec une liste de types de tâches et de variables didactiques qui interviennent à l'entrée dans l'algèbre. Ce travail s'est terminé sur la conception d'une évaluation commune que les enseignants ont fait passé dans leurs classes par la suite : cette évaluation résulte de choix qui n'émanent pas uniquement des enseignants, c'est donc surtout son exploitation qui pourra nous apporter des informations sur leurs pratiques individuelles. Nous avons essayé de synthétiser les apports de chaque enseignant dans les tableaux donnés en annexes 1 et 2. Nous avons analysé en particulier la couverture du domaine pour chacun des tests, qui s'avère relativement peu étendue, et les choix et justifications des enseignants en matière de tâches, de même que des éléments liés à leurs habitudes diagnostiques et à l'influence du public de l'établissement. Pour revenir à nos deux dimensions, nous avons ainsi pu relever à travers le rapport à l'évaluation des enseignants, ce qui motivait leurs choix d'évaluation (une connaissance générique du public des élèves sortant de 6ème, qui suffit aux enseignants et n'entraîne pas le besoin de faire un diagnostic mathématique formel, réalisé ici avec assez peu d'appui sur les contenus algébriques) et commencer à caractériser des pratiques effectives, même si influencées par nos demandes de chercheurs (en amont de l'évaluation un choix de tâches simples et répétitives, et en aval ici vraisemblablement, pas de retour aux élèves ni de réelle exploitation, ce qui peut s'expliquer probablement en partie par le fait que les enseignants ne ressentaient pas le besoin de faire un diagnostic écrit).

Cette séance nous a donc permis de repérer en particulier des choix qui n'étaient pas forcément liés au savoir en jeu : avec une influence certaine du contexte (contenus habituellement traités ou non l'année précédente) et du public (ZEP, niveau faible), ce qui montre l'importance des composantes sociales et institutionnelles des pratiques (Robert & Rogalski 2002). Nous avons repéré d'autres régularités, en lien avec l'absence de certains types de tâches (équivalence d'écritures, généralisation), et un appui commun sur le sens des lettres déjà vues dans des formules (en particulier pour calculer des aires), tout en ayant des pratiques d'évaluation diagnostiques différentes habituellement.

Concernant le rapport à l'évaluation, pour prolonger ce premier recueil de données, nous avons mené des entretiens avec les 4 enseignants, dont les questions sont données ici en annexe 3. Ces entretiens ont eu lieu au bout de plusieurs mois de travail collaboratif, au cours desquels nous avons essayé de mettre en lumière la dimension "algèbre" du projet et de limiter nos apports relatifs au sujet de l'évaluation, même si cela ne suffit pas à affirmer que cela n'a pas modifié les pratiques d'évaluation des enseignants. Cela pose en particulier la question de l'influence des connaissances liées aux contenus mathématiques sur les pratiques d'évaluation : est-ce qu'une connaissance accrue des compétences algébriques et de leurs apprentissages permet de réduire un écart possible entre tâches enseignées et tâches évaluées ?

IV. CONCLUSION

L'analyse et la caractérisation des pratiques d'évaluation des enseignants en classe reste peu étudiée en recherche et est complexe à attraper parce que l'évaluation est diffuse dans les processus d'enseignement et d'apprentissage. Selon nous, elle intervient à différents moments du projet global de l'enseignant, en amont, en aval et pendant l'enseignement. Cependant, la caractérisation des évaluations en termes de « diagnostic / formatif / sommatif » est probablement trop réductrice par rapport aux catégories que les enseignants se donnent à eux-même plus ou moins explicitement, ce qui nous amène à interroger à la fois les pratiques et le rapport des enseignants à l'évaluation, pour interpréter plus finement leurs choix. Les ébauches d'outils méthodologiques que nous sommes en train d'élaborer dans le cadre du projet ANR NéoPraéval pour analyser et catégoriser les pratiques enseignantes d'évaluation mettent déjà en lumière la complexité de l'évaluation notamment lorsqu'elle a lieu dans les échanges en classe de manière informelle. Nous considérons de plus que les pratiques d'évaluation doivent être analysées à travers les contenus traités, c'est pourquoi nous avons choisi de traiter un domaine mathématique, celui de l'algèbre élémentaire, mais il serait probablement intéressant de comparer ces pratiques avec les évaluations proposées par les enseignants dans d'autres domaines mathématiques, pour mesurer en particulier le rôle de l'analyse du contenu traité. Enfin, pour attraper ces pratiques d'évaluation nous nous inscrivons dans un travail collaboratif au sein d'un Léa avec des enseignants de collège, dispositif qu'il faudra questionner lui aussi pour en mesurer l'impact sur les pratiques étudiées. Ce dispositif présente de nombreuses potentialités pour travailler en confiance avec des enseignants et donc accéder à leurs pratiques sur le long terme tout en répondant à leurs attentes et en contribuant à la production de ressources. Il nous donne accès à un grand nombre de données qu'il nous reste encore à exploiter, à l'aide de cette méthodologie spécifique que nous continuons à développer.

REFERENCES

Allal L., Mottier-Lopez L. (2007) *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation*. De Boeck : Belgique.

Bain D. (1988) L'évaluation formative fait fausse route : De là, la nécessité de changer de cap. *Mesure et évaluation en éducation*, vol. 10 No 4.

Black P., William D. (1998) Assessment and Classroom learning. *Assessment in Education* 5(1).

Bednarz N. (2013) Regarder ensemble autrement : ancrage et développement des recherches collaboratives en éducation au Québec. In Bednarz N. (Ed.) *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement* (pp 13-30). Paris : L'Harmattan.

Braxmeyer N., Guillaume J-C., Lévy J-F (2005) *Les pratiques d'évaluation des enseignants en collège*. Paris : Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Direction de l'évaluation et de la prospective.

Bodin A. (1997) L'évaluation du savoir mathématique. Questions et méthodes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17.1, 49-96.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7.2, 5-32, Editions La Pensée Sauvage.

Dubet F. (1994) *Sociologie de l'expérience*. Paris : Editions du Seuil.

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 17.2, 167-210. Editions La Pensée Sauvage.

Grugeon-Allys B., Pilet J., Chenevotot-Quentin F., Delozanne E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.-P., Dorier J.-L., Robert A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire : bilan et perspectives* (137-162). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels.In Frank K. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Chapter 16, (pp. 707-762).

Monols-Ansaldi R. et Favelier N. (2013) Les lieux d'éducation associés à l'IFE ; des laboratoires pour l'action conjointe des chercheurs et des enseignants. *Journal de l'IFE de Mars 2013*. *http://ife.ens-lyon.fr/lea/outils/ressources/productions-internes/presentation-des-lea-mars-2013*

Rey O. et Feyfant A. (2014) Evaluer pour (mieux) faire apprendre. *Dossier de veille de l'IFE,* n°94, p.44. http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA-Veille/94-septembre-2014.pdf

Robert, Rogalski (2002)…

Sensevy G. (2013) Neuf propositions pour les LéA. *Journal de l'IFE de Mars 2013.* http://ife.ens-lyon.fr/lea/outils/ressources/productions-internes/presentation-des-lea-mars-2013

Shavelson R.J., Young D.B., Ayala C.C., Brandon B.R., Futrak E.M., Ruiz Primo M.A. (2008) On the Impact of Curriculum-Embedded Formative Assessment on Learning: A Collaboration between Curriculum and Assessment Developers. *Applied Measurement in Education* 21(4), 295-314.

ANNEXE 1 : SYNTHÈSE DES ÉVALUATIONS DIAGNOSTIQUES : COUVERTURE DU DOMAINE

Types de tâches		remarques	G	M	F	O
Calculer une suite d'opérations	Calcul sans réorganisation des termes	Nature et nombre des opérations (que des +, que des x ou mélange avec – et /) Nature des nombres		Ex1B		
	Calcul réfléchi avec réorganisation des termes			Ex1A		
	Calcul avec réécriture d'une addition réitérée					
Compléter une opération à trous	Présentée en ligne	Dans un contexte de calcul d'aire ou de périmètre				
	Présentée en pyramides					
	Présentée en colonnes					
Calculer le résultat d'un programme de calcul		Ecriture des opérations en étapes ou en ligne	Ex3.1 Ex3.2 Ex3.3		Ex4.1	
Remonter un programme de calcul		Remonter un programme de calcul peut mener ou non à une équation suivant le programme	Ex4.1		Ex4.2	
Résoudre des problèmes additifs et ou multiplicatifs	Réunion	Avec réécriture ou non En ligne ou pas à pas Congruence sémiotique ou non Y compris associer la bonne opération ou suite d'opérations à un problème Nature des nombres, conversions		Ex4.1		
	Transformation(s)			Ex2b		
	Comparaison		Ex1.1 Ex1.2 Ex1.2			Ex3
	Proportionnalité			Ex2a	Ex3 Ex5	Ex1 Ex4
	Mélange (étapes)				Ex2	
	Deux inconnues			Ex4.2		
	Sens de l'énoncé, données			Ex2		Ex2 Ex4
Résoudre des problèmes sur aire et périmètre	Calculer	Utilisation d'une formule ou calcul à partir des figures Calculs en ligne ou pas à pas	Ex2.1 Ex2.2	Ex3.2	Ex6	Ex9 Ex10
	Trouver une longueur manquante		Ex2.3			
	Produire une formule générale			Ex3.1	Ex7 Ex8	
Associer plusieurs registres		Langue naturelle ou structure, écriture numérique, écriture algébrique, géométrie et grandeurs, programmes de calcul, tableau				
Traduire dans un autre registre	Traduire pour exprimer					
	Traduire pour calculer			Ex1C	Ex1	Ex5 Ex6 Ex7 Ex8
Repérer des suites logiques						
Associer des écritures équivalentes	numériques	Nombres équivalents, opérations donnant le même résultat Travail du signe égal				
	algébriques					
Substituer une valeur numérique à une lettre						Ex9 Ex10

ANNEXE 2 : SYNTHÈSE DES ÉVALUATIONS DIAGNOSTIQUES : CHOIX ET JUSTIFICATIONS

	G	M	F	O
Habitudes diagnostiques	Travail en amont pour préparer plutôt que test Les tests ça prend du temps à exploiter Sait déjà quelles sont les erreurs qui vont apparaître	Habituellement pas de test diagnostique à la rentrée, mais par petits bouts au moment où on va en avoir besoin	Plutôt des petits exercices à l'oral en début de séance	
durée	10 min (déjà passé)	20 min	2 x 10 min, car 2 tests séparés dans le temps	15 min, en 2 tests (règles de calcul puis pré-algébrique)
objectifs	répétition de calculs, pas de lettres du tout, mettre en lumière une mécanique précise	savoir faire une opération, comprendre le sens d'une opération, faire des tests sur les nombres	travail des opérations (ex 1, 2, 3 et 5) et pré-algébrique (autres ex)	Travail du vocabulaire (différence, somme, produit) Remplacer une lettre par sa valeur pour calculer un périmètre
Tâches : quel choix et quel classement ? des exercices redondants ?	problèmes, périmètre et aire, programme de calcul à l'endroit et à l'envers	Registres différents, décimaux, calcul astucieux (ex 1), donnée inutile (ex 2)	Opérations automatisées, sens des opérations, programme de calcul à l'endroit et à l'envers, proportionnalité, produire des formules d'aire et périmètre	QCM
Réponses des élèves (réponses attendues et traitement éventuel)	comment détaillent-ils les calculs	voir les différentes façons de rédiger (côtéx4, cx4, c+c+c+c)	- présentation de différentes étapes de calcul - formule périmètre sous forme de somme ou de produit - formule exprimée avec une phrase, un exemple numérique, ou une lettre - déclaration de l'égalité ou non	QCM pour obtenir un pourcentage et que les élèves s'auto-évaluent
Justifications des choix	Programme de calcul habituellement présenté en 6ème non contextualisé, et en 5ème avec des boîtes Programmes de calcul pas en 6ème parce que ça nécessite d'appliquer des règles compliquées Pas testé le vocabulaire car déjà fait en début d'année	- Périmètre et aire (ex 4) car c'est la seule occasion où sont introduits les lettres en 6ème, et c'est par aire et périmètre qu'on réintroduira les lettres en 5ème - Pas de programme de calcul car pas fait en 6ème l'année dernière, ou alors avec 1 seul type d'opération		L'année dernière en 6ème, n'a pas traité la substitution mais l'utilisation de formules pour aire et périmètre Nombres écrits parfois en chiffres et en lettres pour complexifier
Source des exercices	Exercices inventés	Exercices inventés	Un exercice pris dans un manuel, les autres sont inventés	Utilisation de manuels
Et dans un autre établissement ? (influence du public)	Guidé par ce qu'il va faire ensuite	Choix de l'addition parce que certains élèves de RGG ne la maîtrisent pas avec des décimaux	Si on était avec un autre public, certaines erreurs seraient plus marginales	
A propos de l'équivalence des écritures	le « A = » pose problème aux élèves	Les élèves soulignent les calculs qu'ils font en premier plutôt que de tout réécrire dans un autre ordre		

ANNEXE 3 : QUESTIONNAIRE POUR ENTRETIEN SUR LES PRATIQUES D'ÉVALUATION

1/Qu'est-ce que tu entends par évaluer ?
Expliquer le fait qu'on ne détient pas la vérité pour répondre à cette question entre chercheurs, et qu'on va tenter de poser une définition de ce qu'est l'évaluation en vrai dans les classes
Réponses possible de nature diverse (fonctions de l'évaluation, jugement personnel sur le fait d'évaluer, façons d'évaluer…)
2/Tu évalues quoi, quand, de manière formelle et informelle ? (formel /informel : idée d'ouvrir à autre chose que l'évaluation sommative, que l'évaluation support papier)
Si question algèbre / pas algèbre : peu importe mais tu peux prendre tes exemples en algèbre
Relance : quand considères-tu que tu évalues ? Si uniquement évaluation sommative : ajouter est-ce que c'est la seule façon dont tu prends l'information
Est-ce que toute évaluation est prévue en amont ?
3/ Comment et quand élaborez-vous ces évaluations ?
Relance sur quand
Relance sur les choix, sur ce qu'il juge important
4/Quelles informations tu récupères pour toi de ces évaluations et quelle exploitation tu en fais éventuellement ?
Pas forcément que retour sur le sommatif (par exemple les flashs peuvent donner lieu à une prise d'information sur les apprentissages des élèves)
Pour nous avoir en tête : immédiat ou pas (exploitation pour une correction / exploitation pour la suite de la progression)
5/ Quel retour est fait aux élèves éventuellement ? (quelle information est transmise aux élèves et comment)
Pas forcément que retour sur le sommatif (par exemple les flashs)
Relance sur correction et annotation des copies et codage

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

EFFETS POTENTIELS DES ÉNONCÉS DES EXERCICES SUR LES INÉGALITÉS SOCIALES D'APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUES

Eric RODITI*

Résumé – Cette recherche contribue aux travaux menés pour comprendre comment certains choix d'enseignement, en lien avec certaines dispositions des élèves, peuvent favoriser ou bien pénaliser ces derniers, de façon différenciée selon leur milieu social d'origine. Elle repose sur une analyse comparative d'exercices de mathématiques à différentes époques, selon les contextes des énoncés (enfantins, professionnels, sociétaux ou scientifiques) et selon le niveau des connaissances en jeu. En recherchant si les énoncés à contextes professionnels, qui sont les plus évocateurs pour les élèves de milieux populaires, permettent d'en apprendre autant que les énoncés à contextes scientifiques, il s'agit finalement de savoir si l'enfant est institué comme élève de façon différente, avant même d'entrer en classe de mathématiques.

Mots-clefs : Exercices de mathématiques, Inégalités scolaires, Rapport aux savoirs, Proportionnalité

Abstract – This study contributes to research carried out in order to understand how teaching choices, linked to certain pupil's behavior, may favor or penalize these pupils in different ways depending on their initial social milieu. It is based on a comparative analysis of mathematical exercises from different periods, according to the context of their formulation (for children, for professionals, in social or scientific contexts) and the level of knowledge involved. We examine, for example, the degree to which formulations in professional contexts, which are the most evocative for pupils from working-class groups, allow as much to be learnt as formulations in scientific contexts. The aim is thus to know if the child is conceived as a pupil in different ways, before even venturing into the mathematics classroom

Keywords: Scholar inequities, Proportional reasoning, Mathematics exercises

L'activité d'un élève qui résous un problème de mathématiques dépend de nombreux facteurs concernant à la fois l'élève, le problème et le contexte scolaire dans lequel se déroule son activité. La recherche présentée ici (Ayala & Roditi 2014) vise à mieux comprendre comment certains choix d'enseignement, en lien avec certaines dispositions des élèves, peuvent favoriser ou bien pénaliser ces derniers de façon différenciée selon leur milieu social d'origine. Notre perspective est donc didactique, mais elle convoque certains outils construits par des chercheurs ayant une approche sociologique de la différenciation scolaire.

Nous commençons par expliciter, dans le cas des exercices de mathématiques, une hypothèse relationnelle entre rapport à l'école et aux savoirs d'une part, et enseignement-apprentissage d'autre part. Puis nous indiquons la méthodologie mise en œuvre pour spécifier et interroger cette hypothèse. Nous présentons enfin les analyses effectuées et les résultats obtenus quant à notre interrogation sur les potentiels effets différenciateurs des énoncés eux-mêmes. Un tel questionnement, même s'il est relatif aux énoncés des exercices, concerne bel

* Sorbonne Paris-Cité, Université Paris Descartes, Laboratoire EDA – France – eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

Roditi E. (2015) Effets potentiels des énoncés des exercices sur les inégalités sociales d'apprentissage en mathématiques. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT9, pp. 805-817.

et bien la pratique enseignante dont on peut supposer qu'elle subit, au moins autant que les auteurs des manuels, l'influence des instructions officielles.

I. RAPPORT AU SAVOIR, ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE : UNE DOUBLE HYPOTHESE RELATIONNELLE

Les inégalités scolaires ont longtemps été observées par le biais du devenir scolaire des élèves et, plus récemment, par celui des inégalités d'apprentissage (Broccolichi & Sinthon 2011). Malgré les tendances mises au jour concernant ces inégalités, la variabilité des résultats empêche de considérer l'origine sociale comme un *déterminant* de la réussite scolaire. Des chercheurs ont alors enquêté sur les histoires des enfants et des adolescents pour comprendre ce qui s'y construit et qui pourrait expliquer les inégalités d'apprentissage (Charlot, Bautier & Rochex 1992). Par des études cliniques, certains auteurs ont également tenté d'analyser comment elles se génèrent durant les séances d'enseignement (Rochex & Crinon 2011). Notre étude porte sur les énoncés des exercices de mathématiques, elle pose la question de leur possible effet différenciateur à partir d'une double hypothèse selon laquelle, d'une part, les contextes des énoncés d'exercices seraient conjointement plus ou moins attractifs pour les enseignants et différemment mobilisateurs pour les élèves suivant l'origine socio-familiale de ces derniers, et, d'autre part, ce que donnent à apprendre les exercices se serait pas indépendant de ces contextes d'énoncés d'exercices.

1. Rapports à l'école et aux savoirs et contextes des exercices de mathématiques

Nous nous inspirons d'anciens travaux de l'équipe ESCOL qui a mis au jour des formes idéaltypiques de rapports à l'école et aux savoirs non indépendantes des origines socio-familiales des élèves (Charlot, Bautier & Rochex 1992). Nous les rappelons brièvement en les désignant par une expression pour pouvoir nous expliquer sur notre hypothèse.

Le premier idéaltype, « aller à l'école obligatoire », rend compte du fait que certains élèves considèrent l'école comme un lieu d'activités imposées pour les enfants. L'école elle-même et ses exigences prennent sens de façon indépendante des savoirs, l'école est vue comme une course d'obstacle où le but est de tenir le plus longtemps possible. Selon le deuxième idéaltype, « obtenir un bon métier », l'école a une fonction de formation préprofessionnelle, comme si le fait d'y aller permettait d'avoir un métier, et même un bon métier si l'on y travaille bien. Les savoirs enseignés prennent alors un sens lorsqu'ils sont interprétables selon leur utilité pour la vie professionnelle. Le troisième idéaltype, « apprendre la vie », conduit à assimiler les savoirs scolaires à des moyens de comprendre des expériences vécues, la sienne comme celle d'un parent ou d'un ami. Les difficultés que rencontre un frère pour trouver un emploi, par exemple, sont éclairées par les enseignements d'économie. Le quatrième idéaltype, « apprendre des savoirs importants », recouvre le fait que des élèves considèrent les savoirs comme des objets construits par une activité intellectuelle, sur lesquels on peut porter des jugements de valeur, d'intérêt, de pertinence, de transférabilité, etc. Comme l'ont montré les auteurs, non seulement ces rapports à l'école et aux savoirs ne sont pas indépendants des appartenances sociales des élèves, mais ils sont en outre corrélés à leur niveau de réussite scolaire.

On ne peut manquer de remarquer la proximité entre les rapports aux savoirs où le positionnement idéal-typique des élèves est celui d'un enfant, d'un professionnel, d'un citoyen ou d'un scientifique et les contextes des problèmes scolaires de mathématiques dont quatre type peuvent également être distinguées (c'est la classification que propose le PISA par exemple) : personnel, sociétal, professionnel, scientifique. Notre hypothèse, admise dans ce travail, est que, suivant leur rapport à l'école et aux savoirs, les élèves se mobiliseraient de façon variable suivant les contextes des exercices de mathématiques et que, parallèlement, les enseignants privilégieraient eux-aussi certains contextes en fonction de l'origine sociale des élèves de leur classe.

Bien sûr, la réussite aux exercices peut être facilitée par un contexte ajusté aux dispositions des élèves, les travaux en psychologie à ce sujet sont nombreux, concernant les mathématiques on peut citer notamment ceux de Beswick (2011). Mais de quelle réussite s'agit-il ? Même en supposant que ces réussites correspondent à des apprentissages effectifs, la question de la nature de ces apprentissages reste posée, ce qui pose conjointement la question de la nature précise des tâches afin de savoir si ce que donnent à apprendre les exercices est ou non dépendant du contexte. C'est exactement cette dernière question que nous nous posons. Nous nous demandons, en particulier, si les exercices portant sur des contextes professionnels ne conduiraient pas l'élève à seulement appliquer des techniques alors que ceux portant sur des contextes scientifiques exigeraient une disponibilité plus grande des savoirs mathématiques. Si cela était le cas, alors les élèves des milieux populaires dont le rapport à l'école correspond plus fréquemment à l'idéal-type « obtenir un bon métier » pourraient à la fois plus facilement s'engager dans les exercices à contexte professionnels, plus facilement réussir à les résoudre, mais aussi avoir moins à apprendre et donc construire des connaissances moindres que celles que construiraient les élèves de milieux plus aisés, plus enclins à s'engager dans les exercices à contexte sociétaux ou scientifiques plus riches en apprentissages potentiels.

2. *Rapports à l'école et aux savoirs et instructions officielles*

Nous supposons que les enseignants puissent choisir les exercices en fonction des contextes et du niveau social de leurs élèves parce que nous les considérons comme des sujets sociaux, influencés par les missions que se donne l'institution scolaire et qu'elle traduit dans les programmes d'enseignement. Or ces programmes ont sensiblement varié depuis la seconde moitié du 20e siècle.

En nous appuyant sur les instructions officielles pour l'école primaire et la classe de sixième, ainsi que sur les travaux de D'Enfert (2011) et de D'Enfert et Gispert (2010), nous constatons que durant cette période, les programmes d'enseignement des mathématiques de la fin de l'enseignement primaire et du début de l'enseignement secondaire ont subi plusieurs évolutions visant à instaurer une progressivité entre les deux cycles d'enseignement dont les objectifs sont longtemps restés différents suivant qu'il s'agissait de l'école du peuple ou de celle de la bourgeoisie.

Jusqu'aux années soixante, la scolarité obligatoire préparait ainsi plutôt les élèves à la vie active et les mathématiques leur permettaient d'acquérir des techniques de résolution de problèmes issus de la vie courante ou professionnelle. À la fin de cette décennie, l'égalité des chances constituait le défi à relever par le système scolaire, et la réforme des *mathématiques modernes* en composait l'un des leviers : elle conduisit à une modification profonde des contenus d'enseignement, avec pour objectif de développer à la fois, chez tous les élèves, les grandes fonctions de la pensée logique et les savoirs qui fondent les techniques. Les effets n'ont pas été à la hauteur des attentes, et les programmes scolaires ont été révisés à peine quelques années plus tard lors de la réforme Haby de 1975. Néanmoins, ces changements ne sont pas très profonds. Il faudra attendre le milieu des années 80 pour que la *contre-réforme* élimine des programmes tout ce qui caractérisait les mathématiques modernes. Dans un contexte d'enseignement différencié, les mathématiques enseignées doivent alors contribuer à la formation du citoyen, être plus accessibles, utilisables dans d'autres disciplines scolaires, et permettre de résoudre des problèmes en relation avec le monde actuel. Depuis, malgré quelques évolutions, les programmes conservent globalement cette inspiration politique.

Ces évolutions de programmes rendent plausible notre hypothèse selon laquelle ce qui est à apprendre d'un exercice ne soit pas indépendant du contexte de son énoncé. Cela nous a conduit à mener une étude comparative et diachronique de manuels de mathématiques dans laquelle ont été croisés les contextes des exercices et les principaux apprentissages potentiels auxquels conduit la résolution de ces exercices.

II. METHOLOGIE : CATERORISATION DES ENONCES ET ANALYSES CROISEES

1. *La proportionnalité comme privilégiée pour cette étude*

La proportionnalité a été choisie comme notion pour cette recherche parce qu'elle est enseignée à la fin de l'école élémentaire comme au début de l'enseignement secondaire durant toute la période qui nous intéresse, et que les exercices qui nécessitent de la mettre en œuvre peuvent aisément porter sur les quatre contextes envisagés. Nous avons choisi d'analyser des manuels scolaires du début de l'enseignement secondaire, c'est-à-dire de la classe de 6ᵉ (élèves de 11 ans), nous avons ainsi évité de comparer des manuels adressés à des élèves pour lesquels les auteurs savaient qu'ils poursuivraient ou qu'ils ne poursuivraient pas d'études secondaires. Neuf manuels scolaires ont ainsi été étudiés : trois datent d'avant la réforme (période pré-moderne), trois de la fin de la réforme (période moderne) et trois d'après la réforme (période post-moderne)[1].

Au total, 495 énoncés d'exercices ont été analysés. Voici, illustrés par des exemples, les critères retenus pour l'analyse de leur énoncé.

Le premier critère est celui des contextes :

– *Enfant*. Exemples :

[E01] 4 cahiers coûtent 10 euros ? Combien coûtent 14 cahiers ?

[E02] Pendant ses vacances, Jean a fait 96 photos. Pour les ranger, il les met dans son album. En mettant 8 photos par page, combien de pages remplira-t-il avec ses photos ?

[E03] Dans la classe, il y a 25 élèves dont 22 savent nager. Quel est le pourcentage des élèves de la classe sachant nager ?

– *Professionnel*. Exemples :

[E04] Une couturière a confectionné 273 robes en 13 jours de travail. Combien de robes confectionne-t-elle par jour si elle travaille tous les jours au même rythme ?

[E05] Un employé dont le salaire horaire est de 11,50 euros est augmenté de 4%. Quel est le montant de son augmentation ?

[E06] Un fabricant vend des chaussures à un marchand, il réalise un bénéficie de 25% sur le prix de fabrication, le marchand vend ces chaussures avec un bénéfice de 20%. Quel est le prix de fabrication d'une paire de chaussures vendue 135 euros ?

---

[1] Mathématiques 6ᵉ : Belin (1960), Hachette (1960), Nathan (1965) ; Mathématiques 6ᵉ : Colin (1977), Istra (1977), Nathan (1977) ; Cinq sur Cinq 6ᵉ Hachette (1994), Pythagore 6ᵉ Hatier (1994), Transmath 6ᵉ Nathan (1994).

– *Citoyen*. Exemples :

[E07] M. Lemarchand roule sur autoroute à 120km/h pendant 2h. Les durées comprises entre 0 et 120 min sont-elles proportionnelles aux distances parcourues correspondantes ?

[E08] Le montant annuel de ma facture d'électricité est de 960 euros, celui de ma facture de gaz est de 134 euros. L'année suivante, le montant de ma facture d'électricité est de 1 104 euros et celui de ma facture de gaz est de 160,80 euros. Quelle est l'énergie qui a le plus augmenté ?

– *Scientifique*. Exemples :

[E09] Compléter ce tableau de proportionnalité :

12	16	4/7		
18			3,6	0,6

[E10] La masse de farine f produite à partir d'une masse de blé b s'obtient grâce à la formule suivante : $f = 0,8 \times b$. Quelle est la quantité de farine produite avec 5 tonnes de blé ?

[E11] À un crochet on a fixé un ressort et au bout de ce ressort un dispositif permettant d'accrocher des masses marquées. Lorsqu'il n'y a pas de masse, la longueur du ressort est 33mm. Avec une masse de 500g, le ressort a une longueur de 53mm. Quelle est la masse accrochée au ressort si sa longueur est de 45mm ?

Les autres critères portent sur les apprentissages potentiels auxquels conduit la résolution des exercices. Les recherches sur la proportionnalité (Hersant, 2005) invitent à distinguer différents types de tâches que nous classons selon quatre niveaux en fonction des procédures requises pour la résolution. Ces types de tâches sont définis ci-dessous où nous renvoyons, pour illustration, le lecteur aux exercices précédents en indiquant leur référence entre crochets.

Les tâches du premier niveau nécessitent seulement de reconnaitre une situation de proportionnalité à partir de la connaissance des grandeurs en jeu dans une situation. Dans l'exercice [E07], par exemple, l'élève doit reconnaître qu'à vitesse constante, la durée du parcours et la distance parcourues sont proportionnelles.

Au deuxième niveau, les tâches demandent de déterminer une valeur dans un problème à quatre termes numériques, c'est-à-dire de calculer une quatrième proportionnelle [E01] ou [E11], une répartition [E02] ou un coefficient de proportionnalité [E04]. Ainsi, dans l'exercice [E01], l'élève doit calculer le prix de 14 cahiers sachant que 4 cahiers coûtent 10 euros. Dans l'exercice [E02] le calcul de la répartition des 96 photos sachant qu'on peut mettre 8 photos par page conduit à des raisonnements analogues : l'élève peut calculer qu'il range 80 photos en 10 pages, 16 photos en 2 pages donc 96 photos en 12 pages ou déterminer par une division qu'il y a 12 fois 8 photos dans 96 photos et que 12 pages seront donc nécessaires pour les ranger. De même encore, dans le problème [E04] si la couturière confectionne 273 robes en 13 jours, en travaillant au même rythme, elle en confectionne 273 / 13 en un seul jour de travail c'est-à-dire 21 robes.

Les tâches de niveau trois requièrent l'application directe d'un pourcentage [E05] ou d'une formule [E10] dans un problème à trois termes numériques où l'un d'entre eux représente implicitement une fonction. Ainsi, dans l'exercice [E05], l'employé est payé 11,50 euros de l'heure et voit son salaire augmenter de 4%. L'élève calculera l'augmentation de 4% en multipliant les 11,50 euros de salaire par 0,04 et trouvera le montant de 0,46 euro d'augmentation. De même, dans l'exercice [E10], La masse de farine produite à partir de 5 tonnes de blé se calcule en multipliant la masse de blé par 0,8 ce qui donne 4 tonnes de farine. Dans les deux cas, une fonction linéaire de coefficient respectif 0,04 et 0,8 est sous-jacente au calcul.

Les tâches du quatrième niveau demandent de répondre à des questions peu fréquentes ou de calculer des valeurs qui, dans les situations réelles, sont celles qui sont connues : comparer deux coefficients de proportionnalité [E08], déterminer un pourcentage [E03], inverser un pourcentage [E06] ou calculer un antécédent [E11]. Ainsi, par exemple, dans l'exercice [E06] il s'agit du délicat problème d'inversion d'un pourcentage. On sait que le prix de fabrication d'une paire de chaussures subit une première augmentation de 25% puis une seconde augmentation de 20% pour devenir le prix de vente. Le calcul du prix de fabrication d'une paire de chaussures vendue 135 euros est difficile, il demande de déterminer le coefficient multiplicatif permettant de passer directement du prix de fabrication au prix de vente ($1{,}25 \times 1{,}20 = 1{,}5$) puis de diviser le prix de vente par ce coefficient ($135 / 1{,}5 = 90$).

Trois autres critères ont été définis pour rendre compte des connaissances importantes à mobiliser dans les problèmes de proportionnalité. Deux portent sur la nature des nombres en jeu : nous avons distingué, d'une part, les nombres entiers [E04] ou non-entiers [E05] et, d'autre part, les nombres concrets (ils expriment la mesure d'une grandeur [E08]) ou abstraits (ils n'ont pas d'unité [E09]). Le troisième concerne les registres de représentation des données du problème ou des réponses demandées : le langage naturel [E01], les tableaux de valeurs [E09], les graphiques ou les dessins figuratifs. Ce critère distingue les exercices selon qu'ils peuvent (ou non) être lus et résolus dans le même registre de représentation. Les changements de registres, auxquels s'associent souvent des changements de cadres, sont en effet reconnus comme étant des vecteurs d'apprentissages (Douady 1986; Duval 1995). Les méthodes d'utilisation de ces critères peuvent maintenant être décrites.

2. *Les analyses croisées nécessaires pour mener cette étude*

Les deux principales questions posées dans cette recherche conduisent à des analyses croisées des exercices selon les périodes, les manuels, les contextes et les critères relatifs aux apprentissages potentiels. Les techniques mises en œuvre sont exposées dans le détail à partir du cas du premier tableau croisé, nous exposons ici seulement les comparaisons qui seront effectuées.

La comparaison des manuels des trois périodes – pré-moderne, moderne et post-moderne – évalue l'impact des programmes scolaires sur la manière dont l'enfant est institué en tant qu'élève en classe de mathématiques, c'est-à-dire s'il est plutôt considéré en tant qu'enfant, futur professionnel, futur citoyen ou scientifique. L'étude des manuels d'une même période permet de mesurer l'éventuel impact institutionnel : une grande homogénéité des manuels pourra s'interpréter comme un impact important, alors qu'une grande hétérogénéité invitera plutôt à le relativiser.

L'analyse croisée des exercices permettra enfin de savoir s'ils conduisent à des apprentissages mathématiques équivalents indépendamment des contextes. Dans le cas contraire, il faudra envisager que les énoncés puissent bien, eux-mêmes, être vecteurs de différenciation scolaire.

III. INFLUENCE DES PROGRAMMES SCOLAIRES ET CONSEQUENCES SUR LES APPRENTISSAGES

L'étude débute donc par l'examen de l'effet éventuel des programmes scolaires sur les énoncés des exercices de proportionnalité proposés dans les manuels de la classe de 6e qui ont été étudiés, et plus précisément sur les contextes dans lesquels les problèmes sont posés. Elle se poursuit par une analyse du lien entre les contextes et les apprentissages potentiels.

1. Variation des contextes selon les périodes et les manuels scolaires

Le tableau n°1 indique la répartition des 495 exercices selon les trois périodes et les quatre contextes. Comme annoncé précédemment, nous allons exposer la méthode mise en œuvre pour analyser ce tableau et qui sera également utilisée pour les suivants.

À chaque ligne du tableau n°1 correspond une période, et à chaque colonne correspond un contexte. Dans chaque case du tableau figurent deux valeurs : à gauche et en caractères droits sont présentés les effectifs empiriques c'est-à-dire ceux qui ont été déterminés par le codage des énoncés ; à droite et en italiques figurent les effectifs théoriques arrondis auxquels on aboutirait en cas d'indépendance entre les périodes et les contextes des exercices, c'est-à-dire si les programmes n'avaient pas d'influence sur les auteurs des manuels scolaires et donc sur la manière dont l'enfant est institué en tant qu'élève, en mathématiques, pour l'enseignement de la proportionnalité en 6e.

	Enfant		Pro.		Citoyen		Scientif.		Total
Pré-mod.	0	*6*	49	*29*	92	*70*	29	*65*	170
Moderne	0	*4*	17	*23*	45	*54*	68	*49*	130
Post-mod.	17	*7*	20	*34*	67	*80*	91	*74*	195
Total	17		86		204		188		495

Tableau 1 *- Périodes et contextes des énoncés*

Ainsi, par exemple, peut-on lire dans ce tableau les deux effectifs de la case concernant les exercices à contexte professionnel des manuels de la période pré-moderne, c'est-à-dire la case correspondant à la première ligne et à la deuxième colonne : 49 en caractères droits et 29 en italiques. Le nombre 49 est l'effectif empirique, c'est celui qu'a donné le codage des 170 exercices de la période pré-moderne. Le nombre 29 est l'effectif théorique, il correspond à un calcul effectué à partir des résultats obtenus pour l'ensemble des exercices : ayant codé 86 exercices à contexte professionnel (total de la deuxième colonne) sur l'ensemble des 495 exercices analysés, il y en aurait théoriquement 29 sur les 170 de la période pré-moderne si ces 86 exercices étaient répartis proportionnellement selon les périodes ($29/170 \approx 86/495$). La comparaison de ces deux effectifs est très instructive : durant la période pré-moderne, les exercices à contextes professionnels sont plus fréquents qu'ils ne le seraient sans influence de la période sur les contextes (ils sont 49 sur 170 au lieu de 29 sur 170). Cette méthode d'analyse des tableaux croisés nous permet de déceler une corrélation éventuelle entre les périodes et les contextes, c'est-à-dire entre les programmes scolaires et les choix d'exercices effectués par les auteurs de manuels de mathématiques. Poursuivons donc l'analyse.

L'examen de la première colonne révèle que les exercices qui placent l'élève en tant qu'enfant sont caractéristiques de la période post-moderne, il n'y en avait pas avant. Dans la première ligne, les écarts entre effectifs empiriques et théoriques indiquent que, lors de la période pré-moderne, les contextes professionnel et citoyen sont sur-représentés au détriment du contexte scientifique. Ce constat cohérent avec les orientations de la politique scolaire autorise l'hypothèse d'une influence institutionnelle sur les choix des auteurs des manuels.

Pour la période moderne, c'est au contraire le contexte scientifique qui est sur-représenté au détriment des autres ; l'influence institutionnelle se manifeste donc encore. Pour la période post-moderne, on remarque surtout une sur-repésentation du contexte de l'enfance et une sous-représentation du contexte professionnel, ce qui est une fois de plus convergent avec une influence institutionnelle.

L'ensemble de ces interprétations reposent sur le constat d'écarts entre les effectifs empiriques et les effectifs théoriques, mais ces écarts sont-ils suffisamment importants pour leur accorder une signification, comme nous venons de le faire ? La statistique inférentielle apporte une réponse précise à cette question. Sans exposer ici la théorie des tests, rappelons qu'un test d'indépendance produit une valeur de probabilité p qui, lorsqu'elle est inférieure à 1% ($p < 0{,}01$), permet de déduire que les écarts entre les effectifs empiriques et théoriques sont suffisamment importants pour que variables étudiées ne soient pas considérées comme indépendantes[2]. Dans le cas contraire où la probabilité est supérieure à 1% ($p > 0{,}01$), on doit donc renoncer à conclure à l'effet d'une variable sur l'autre. En ce qui concerne le tableau précédent, un test d'indépendance a été effectué qui confirme l'existence d'un effet de la période sur les contextes des exercices (test du chi² de Pearson avec correction de Yates, $p < 0{,}01$).

En complément de l'analyse du tableau n°1, nous nous sommes demandé si la répartition des contextes des exercices était analogue pour les auteurs des trois manuels d'une même période. Nous avons donc, pour chaque période, construit un tableau sur le même modèle que le tableau n°1, mais qui croise, cette fois-ci, les manuels et les contextes des exercices. Le tableau n°2 concerne la période post-moderne.

	Enfant		Pro.		Citoyen		Scientif.		Total
Manuel 1	2	*3*	2	*4*	9	*11*	20	*15*	33
Manuel 2	10	*7*	14	*8*	21	*27*	33	*36*	78
Manuel 3	5	*7*	4	*8*	37	*29*	38	*40*	84
Total	17		20		67		91		195

Tableau 2 *- Manuels et contextes des énoncés, période post-moderne*

Dans ce tableau comme dans ceux qui concernent les périodes pré-moderne et moderne, peu d'écarts apparaissent entre effectifs empiriques et théoriques. Cela signifie qu'aucun des manuels ne propose une répartition des exercices entre les quatre contextes qui soit sensiblement différente de la répartition moyenne observée sur l'ensemble des trois manuels. Un test statistique a été effectué qui atteste la faiblesse de ces écarts (test de Fisher, $p > 0{,}01$). L'ensemble de ces résultats permettent d'attester d'un effet des politiques scolaires sur les programmes et sur les auteurs des manuels de mathématiques. Pendant ces trois périodes différemment marquées politiquement, la manière d'instituer l'enfant en tant qu'élève varie sensiblement. Les énoncés des exercices portant sur la proportionnalité projettent particulièrement les élèves comme futurs professionnels et futurs citoyens durant la période pré-moderne, comme scientifique durant la période moderne, et plutôt comme enfant ou scientifique durant la période post-moderne.

Il s'agit maintenant de savoir, d'une part si les apprentissages auxquels peut conduire la résolution des exercices sont dépendants des contextes dans lesquels les problèmes sont posés, et d'autre part si cette éventuelle dépendance varie selon les périodes étudiées.

[2] Le seuil de 1% a été choisi car les effectifs sur lesquels portent les analyses sont assez importants relativement à l'utilisation des tests de statistique inférentielle. C'est un seuil assez strict. Lorsque les effectifs sont plus faibles, le seuil plus souple de 5% est fréquemment admis en sciences humaines et sociales.

2. *Variation des apprentissages potentiels selon les contextes*

Pour chacune des périodes, des croisements entre le contexte des énoncés d'une part, et le niveau des tâches, la nature des nombres en jeu (entiers ou non, abstraits ou non) et les changements éventuels de registre de représentation d'autre part.

3. *La relation contextes-apprentissages durant la période pré-moderne*

Le tableau n°3 indique la répartition des 170 énoncés des exercices de la période pré-moderne suivant le contexte et le niveau des tâches requises. Il a été construit sur le même modèle que les précédents ; la méthode d'analyse est analogue à celle qui a déjà été exposée.

	Niveau 1		Niveau 2		Niveau 3		Niveau 4		Total
Profession.	0	*1*	18	*13*	25	*20*	7	*17*	50
Citoyen	2	*2*	16	*23*	33	*37*	40	*29*	91
Scientifique	2	*1*	9	*7*	10	*11*	8	*9*	29
Total	4		43		68		55		170

Tableau 3 *- Contextes et niveaux des tâches, période pré-moderne*

Les effectifs empiriques de la première colonne indiquent que durant la période pré-moderne, on ne demandait pratiquement jamais aux élèves de reconnaître une situation de proportionnalité. L'examen des différences entre les effectifs empiriques et théoriques révèle que les tâches de niveau 4 sont sur-représentées lorsque les contextes invitent les élèves à se projeter comme futur citoyen alors que ces tâches sont sous-représentées lorsque le contexte est professionnel. Ces écarts méritent d'être pris en compte : un test d'indépendance a été effectué qui permet de conclure à un effet significatif de la variable contexte sur la variable niveau de procédure (test de Fisher, $p < 0,01$).

Le tableau suivant (tableau n°4) indique la répartition des 170 énoncés suivant le contexte et les trois autres indicateurs d'apprentissage : nombres entiers ou non, concrets ou non, changement de registres de représentation ou non.

	Entiers / non		Concrets / non		Chgt reg /non		Total
Profession.	30/20	*25/25*	50/0	*50/0*	0/50	*0/50*	50
Citoyen	42/49	*45/46*	91/0	*90/1*	0/91	*0/91*	91
Scientifique	12/17	*14/15*	28/1	*29/0*	0/29	*0/29*	29
Total	84/86		169/1		0/170		170

Tableau 4 *- Contextes et autres apprentissages, période pré-moderne*[3]

On remarque que, durant la période pré-moderne, les nombres en jeu dans les exercices de proportionnalité sont toujours concrets et qu'aucun changement de registre n'est demandé. Une légère dysharmonie apparaît dans la première colonne, mais l'analyse statistique ne permet pas de la considérer comme significative (test de Fisher, $p > 0,01$). C'est donc au niveau des procédures requises qu'un effet des contextes sur les apprentissages potentiels est constaté durant la période pré-moderne.

[3] **Indication de lecture** : à l'intersection de la première ligne et de la première double colonne, 30/20 signifie que parmi les énoncés à contexte professionnel, 30 portent sur des nombres entiers et 20 sur des nombres non entiers (effectifs empiriques), et 25/25 signifie qu'en l'absence d'effet du contexte sur la nature des nombres, on devrait en observer 25 portant sur des nombres entiers et 25 sur des nombres non entiers (effectifs théoriques).

4. La relation contextes-apprentissages durant la période moderne

Un travail analogue a été mené pour la période moderne, il ne fait pas ressortir de variation significative des apprentissages potentiels en fonction des contextes. Ni quant aux procédures de résolution des problèmes (tableau n°5), si l'on excepte la sur-représentation des tâches de niveau 1 pour les énoncés à contextes scientifiques et qui n'affecte pas sensiblement les autres valeurs :

	Niveau 1		Niveau 2		Niveau 3		Niveau 4		Total
Profession.	0	*5*	34	*27*	13	*14*	11	*12*	58
Citoyen	1	*4*	18	*21*	14	*11*	12	*9*	45
Scientifique	10	*2*	9	*13*	5	*7*	3	*5*	27
Total	11		61		32		26		130

Tableau 5 *- Contextes et niveaux des tâches, période moderne*

Ni quant aux nombres et aux changements de registre (tableau n°6), excepté que les problèmes dont les contextes sont scientifiques portent davantage que les autres sur des nombres abstraits :

	Entiers / non		Concrets / non		Chgt reg /non		Total
Profession.	11/6	*9/8*	17/0	*12/5*	1/16	*1/16*	17
Citoyen	27/18	*24/21*	45/0	*32/13*	2/43	*1/44*	45
Scientifique	31/37	*36/32*	31/37	*49/19*	1/67	*2/66*	68
Total	69/61		93/37		4/126		130

Tableau 6 *- Contextes et autres apprentissages, période moderne*

Autrement dit, durant la période moderne, le contexte de l'énoncé n'a pas d'influence sensible sur ce qui est donné à apprendre aux élèves.

5. La relation contextes-apprentissages durant la période post-moderne

La relation entre contextes et apprentissages potentiels est loin d'être aussi neutre durant la période post-moderne. C'est ce que révèle le tableau n°7.

	Niveau 1		Niveau 2		Niveau 3		Niveau 4		Total
Enfant	1	*4*	12	*5*	3	*7*	1	*1*	17
Profession.	1	*4*	11	*6*	8	*9*	0	*1*	20
Citoyen	15	*14*	14	*21*	36	*30*	2	*2*	67
Scientifique	25	*20*	24	*29*	38	*39*	4	*3*	91
Total	42		61		85		7		195

Tableau 7 *- Contextes et niveaux des tâches, période post-moderne*

On remarque en effet une sur-représentation des tâches de niveau 3 lorsque le contexte de l'exercice projette l'élève comme futur citoyen, alors que le niveau 2 est sur-représenté lorsque le contexte est celui de l'enfance ou du monde professionnel. Un test statistique a été effectué qui permet de conclure à un effet significatif du contexte sur le niveau de tâche (test du chi² de Pearson avec correction de Yates, $p < 0{,}01$).

Les croisements présentés dans le tableau n°8 montrent en outre un effet du contexte sur les indicateurs d'apprentissage concernant les nombres. Le contexte scientifique conduit en effet à une sur-représentation des énoncés portant sur des nombres non-entiers et abstraits, alors que les nombres sont toujours concrets lorsque les élèves sont amenés à se projeter comme futur professionnels ou futur citoyens. Ces différences concernant la nature des nombres – entiers ou non, concrets ou abstraits – sont toutes les deux significatives (test de Fisher, $p < 0{,}01$).

	Entiers / non		Concrets / non		Chgt reg /non		Total
Enfant	13/4	11/6	15/2	13/4	5/12	3/14	17
Profession.	15/5	12/8	20/0	15/5	0/20	3/17	20
Citoyen	46/21	42/25	67/0	50/17	11/56	10/57	67
Scientifique	47/44	56/35	43/48	68/23	14/77	14/77	91
Total	121/74		145/50		30/165		195

Tableau 8 *- Contextes et autres apprentissages, période post-moderne*

Finalement, l'étude menée sur les exercices de la période post-moderne permet de conclure, pour ce qui concerne la proportionnalité en classe de 6^{e}, à un effet différenciateur des énoncés des problèmes de mathématiques. Lorsque les contextes sont relatifs à la vie citoyenne ou au monde scientifique, les exercices offrent des opportunités d'apprendre globalement supérieures à celles qu'ils offrent lorsque les contextes portent sur l'enfance ou le monde professionnel.

IV. CONCLUSION

Les programmes d'enseignement des mathématiques instituent les enfants en tant qu'élèves en définissant les moyens qui devraient leur permettre d'acquérir les connaissances et les techniques nécessaires pour résoudre un ensemble de problèmes fixé. Une analyse comparative des énoncés d'exercices sur la proportionnalité proposés dans des manuels correspondant à trois périodes différentes de l'enseignement en France, fait apparaître une homogénéité des choix des auteurs des manuels scolaires au cours de chaque période et donc une influence effective des instructions officielles sur les choix d'enseignement de ces auteurs. Les énoncés de problèmes de proportionnalité évoquant des contextes professionnels et citoyens dominent durant la période pré-moderne, les contextes scientifiques sont prépondérants durant la période moderne alors que plus récemment, durant la période post-moderne, les auteurs privilégient plutôt les contextes de l'enfance ou du monde scientifique.

Il est légitime alors de penser qu'à leur insu, en proposant des problèmes issus de contextes professionnels à leurs élèves, les enseignants risquent fort de renforcer une conception selon laquelle on va à l'école pour obtenir un bon métier, conception qui, justement, est partagée par les élèves dont les parcours scolaires sont les moins prestigieux… On retrouve ici la problématique de ces chercheurs qui tentent de mettre au jour des formes de malentendus à l'origine de la différenciation scolaire.

Dans cette recherche, nous avons poussé plus loin l'analyse en franchissant une étape supplémentaire : nous nous sommes demandés, et c'était là le cœur de notre problématique, si les occasions d'apprendre qu'offre la résolution d'exercices de mathématiques étaient indépendantes des contextes de ces exercices. L'étude a été réalisée sur l'enseignement de la proportionnalité en classe de 6^{e}, elle porte sur près de cinq cents énoncés de problèmes extraits de manuels scolaires des trois périodes pré-moderne, moderne et post-moderne. Les analyses effectuées révèlent deux résultats. Le premier est que les contextes des énoncés ne contraignent pas directement les mathématiques qu'ils permettent d'apprendre : à la période des mathématiques modernes, période marquée par la démocratisation de l'enseignement par la recherche de l'égalité des chances, les apprentissages potentiels sont indépendant des contextes des énoncés d'exercices. Le second est que les énoncés proposés dans les manuels de la période post-moderne ne sont pas neutres : les contextes des problèmes se retrouvent une deuxième fois hiérarchisés, non seulement en fonction des rapports à l'école et aux savoirs auxquels ils correspondent, mais aussi en fonction des apprentissages potentiels auxquels conduit leur résolution. Et cette hiérarchie ne fait que soutenir la précédente : les énoncés dont le contexte est lié à l'enfance ou au monde professionnel donnent significativement moins d'occasions d'apprendre que ceux dont le contexte est lié à la vie citoyenne ou au monde scientifique.

L'ensemble de ces résultats conduit à une situation où, dans la période post-moderne, tout se passe comme si les élèves dont le rapport à l'école et aux savoirs se décrit selon l'idéaltype « obtenir un bon métier » et qui de ce fait s'investissent davantage dans la résolution des exercices à contexte professionnel, étaient, sauf travail spécifique de l'enseignant, d'une part amenés à renforcer ce rapport à l'école pénalisant, et d'autre part à bénéficier ainsi de moins d'occasions d'apprendre des mathématiques que ceux dont le rapport à l'école et aux savoirs correspond à l'idéaltype « apprendre la vie », qui s'investissent davantage dans les problèmes où les contextes leur demandent de se projeter comme futur citoyen et qui renforcent ainsi un rapport aux savoirs moins pénalisant. Bien qu'il faille encore le vérifier empiriquement, le processus différenciateur qui vient d'être décrit constitue un nouvel apport qui renforce les résultats sur la différenciation sociale des apprentissages scolaires.

REFERENCES

Ayala J., Roditi E. (2014) Inégalités sociales et apprentissages en mathématiques : les énoncés des exercices seraient-ils eux-mêmes différenciateurs ? *Recherches en didactiques 17,* 45-64.

Bautier É., Goigoux R. (2004) Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue française de pédagogie* n°148, 89-100.

Beswick K. (2011) Putting context in context : an examination of the evidence for benefits of « contextualised » tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education* 9, 367-390.

Blanchard-Laville C. (1989) Questions à la didactique des mathématiques. *Revue française de pédagogie* n°89, 63-70.

Broccolichi S., Sinthon R. (2011) Comment s'articulent les inégalités d'acquisitions scolaires et d'orientation ? Relations ignorées et rectifications tardives. *Revue française de pédagogie* n°175, 15-38.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, n°7.2.,33-115.

Charlot B., Bautier E., Rochex J.-Y. (1992) *École et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Paris, Armand Colin.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques* n°12.1, 73-112.

D'Enfert R. (2011) Une réforme ambiguë : l'introduction des « mathématiques modernes » à l'école élémentaire (1960-1970). In d'Enfert R, Kahn P (dir.) *Le temps des réformes. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Cinquième République : les années 1960* (pp. 53-73). Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.

D'Enfert R., Gispert H. (2010) L'enseignement mathématique dans le primaire et le secondaire. In Jacquet-Francillon F, d'Enfert R, Loeffel L (dir.) *Une histoire de l'école. Anthologie de l'éducation et de l'enseignement en France, XVIIIe-XXe siècle* (pp. 333-342). Paris : Retz.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques* n°7.2, 5-31.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Hersant M. (2005) La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en france, d'hier à aujourd'hui, *Repères-IREM* n°59, 5-41.

Rochex J.-Y., Crinon J. (dir.) (2011) *La construction des inégalités scolaires*. Rennes, PUR.

Roditi É. (2013) Une orientation théorique pour l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques* 15, 39-60.

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques* n°10.2-3, 133-170.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DES ÉVALUATIONS EXTERNES AUX ÉVALUATIONS INTERNES EN MATHÉMATIQUES : DES PRATIQUES INSTITUTIONNELLES AUX PRATIQUES DE CLASSES

Nathalie SAYAC*

Résumé – La question des pratiques d'évaluation en mathématiques des professeurs de l'école primaire peut être considérée comme une question vive de l'analyse des pratiques enseignantes. C'est en tout cas, le point de vue que nous défendons aujourd'hui. Après avoir mené des recherches sur des évaluations externes en mathématiques, en fin d'école primaire, en France, nous nous somme intéressée aux évaluations internes, notamment celles des professeurs de l'école primaire en mathématiques. Dans cette contribution, nous présenterons la recherche collaborative initiée avec des formateurs de terrain, pour étudier les pratiques d'évaluation des professeurs des écoles en mathématiques afin de les décrire, de mieux les comprendre, et de les conceptualiser.

Mots-clefs : évaluations externes, externes internes, pratiques, mathématiques

Abstract – The issue of assessment practices of primary school teachers, in mathematics, can be seen as a strong issue of teacher practices' analysis, from my point of view. After presenting the results of two studies about external assessments in mathematics, at the end of French primary school, I will introduce the collaborative research that I have initiated with field teacher educators, to study assessment practices of primary school teachers, in order to describe, better understand and conceptualize them.

Keywords: assessment, evaluation, practices, mathematics

Après nous être intéressée pendant de nombreux années aux pratiques des enseignants de mathématiques, puis aux pratiques des formateurs d'enseignants en mathématiques, nos recherches se sont orientées depuis quelques années vers l'étude de l'évaluation des élèves en mathématiques, puis actuellement vers l'étude des pratiques d'évaluation en mathématiques des enseignants de l'école primaire. Cette réorientation n'est en réalité qu'une évolution naturelle due à notre implication depuis 2008 dans les évaluations nationales en mathématiques programmées par la DEPP[1]. Au début, notre travail de conception d'items pour un de leurs bilans de fin de cycle en mathématiques et celui de nos recherches sur les pratiques enseignantes étaient bien distincts, mais peu à peu, nous avons réalisé combien l'acte d'évaluer était au cœur des pratiques enseignantes et qu'étudier les pratiques d'évaluation des enseignants était non seulement un moyen pertinent d'accéder à leurs pratiques, mais aussi un moyen de promouvoir les apprentissages mathématiques des élèves.

* Université Paris Est Créteil – France – nathalie.sayac@u-pec.fr

I. [1] DEPP : DIRECTION DE L'EVALUATION, DE LA PROSPECTIVE ET DE LA PERFORMANCE DU MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE FRANÇAIS.

Sayac N. (2015) Des évaluations externes aux évaluations internes en mathématiques : des pratiques institutionnelles aux pratiques de classes. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT9, pp. 818-828.

Dans le cadre de ce GT9, nous proposons de présenter une recherche en cours portant sur les pratiques d'évaluation en mathématiques des professeurs des écoles, qui fait suite à deux autres recherches précédemment menées sur les apprentissages mathématiques des élèves de l'école primaire en France à travers l'étude spécifique des bilans CEDRE[2] de 2008 et 2014, en mathématiques. Nous préciserons dans quel contexte s'inscrit cette recherche, le choix adopté pour la réaliser (recherche collaborative), sa problématique et les outils que nous utiliserons pour obtenir les résultats souhaités.

I. LES PRATIQUES D'EVALUATION EN MATHÉMATIQUES DES PROFESSEURS DES ECOLES

1. Éléments de contexte

Comme le soulignait déjà Bodin en 1997, peu de recherches en didactique des mathématiques prennent en compte l'existence des faits d'évaluation et peu de recherches sur l'évaluation prennent en compte la spécificité des savoirs en jeu. De même, Mons précise dans l'introduction du rapport CNESCO (2014) que, encore aujourd'hui, l'évaluation des élèves par les enseignants dans la classe et les établissements est peu étudiée :

> Les évaluations internes par les enseignants dans la classe, bien qu'au coeur historiquement de l'institution scolaire, et analysées, à travers différents champs scientifiques (les sciences de l'éducation, la psychologie…), par des chercheurs s'intéressant à la pédagogie (en particulier aux effets des évaluations sur les apprentissages des élèves), ont suscité peu d'états des lieux des pratiques des enseignants dans leurs classes (p.7).

Après avoir étudié des évaluations externes au niveau national et les pratiques des enseignants de manière globale, nous avons donc naturellement porté notre attention sur les pratiques d'évaluations internes en mathématiques des PE. Nous rejoignons Perrenoud qui estime que :

> L'évaluation passe par les pratiques d'acteurs, individuels ou institutionnels, qui sont rarement dépourvus de raison et de raisons, mais dont les rationalités sont limitées et diverses, parfois contradictoires (1997, p.16).

Pour mener à bien cette nouvelle recherche, il nous a semblé pertinent de monter une recherche collaborative (Desgagné, 1997) avec des professionnels du terrain, intéressés par les questions posées et qui ont également eu envie d'expérimenter cette nouvelle modalité de formation à et par la recherche.

Il nous semble également important de préciser qu'actuellement, en France, l'évaluation des élèves est une préoccupation majeure du Ministère de l'Éducation Nationale et que la réforme de la formation des enseignants promeut fortement la recherche dans la recherche. C'est aussi dans ces perspectives que notre recherche s'inscrit.

2. La recherche collaborative

La recherche initiée au printemps 2014 a pour but central d'étudier les pratiques d'évaluation des professeurs des écoles en mathématiques pour avoir accès aux significations et intentions et ainsi produire des connaissances scientifiques concernant cette thématique.

Pour constituer l'équipe de recherche, nous avons sollicité des formateurs de terrain investis dans la formation des professeurs des écoles avec des fonctions différentes au sein de l'éducation nationale en France : conseillers pédagogiques (trois d'entre eux), maitres-formateurs (deux d'entre eux) ou encore directeurs d'école élémentaire (deux d'entre eux),

[2] CEDRE : Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon.

dans l'académie de Créteil. Il n'y a que des femmes. Quatre d'entre elles ont obtenu un Master 2 spécialité « Éducation et métiers de l'enseignement » dans l'académie de Créteil, dans un dispositif de validation des acquis de l'expérience (VAE), et se sont donc quelque peu acculturées à la recherche dans ce cadre.

Après avoir établi un contrat de collaboration avec elles (co-élaboration du questionnement, de la méthodologie de recherche, cadrage des conditions matérielles et scientifiques de la recherche, etc.), il a été convenu que cette recherche se déroulerait pendant au moins deux ans : la première année sera consacrée à récolter des données sur les pratiques d'évaluation en mathématiques des professeurs des écoles, à les traiter en utilisant/adaptant un outil conçu pour analyser les items de l'évaluation CEDRE (voir Sayac, Grapin, 2014, 2015). La deuxième année sera davantage orientée vers l'élaboration de dispositifs de formation à l'évaluation en mathématiques.

3. *Problématique*

Cette recherche vise à étudier les pratiques évaluatives des professeurs des écoles en mathématiques au travers des évaluations qu'ils proposent à leurs élèves, que ce soit durant une séquence qu'à la fin de celle-ci. Elle s'inscrit pleinement dans le champ de la didactique des mathématiques et plus particulièrement dans le cadre de la « double approche didactique et ergonomique des pratiques d'enseignement des mathématiques» (Robert & Rogalski 2002), mais réorienté suivant les 3 dimensions proposées par Roditi (HDR 2011) : institutionnelle, sociale et personnelle. Dans cette optique, nous étudions donc « les pratiques enseignantes en mathématiques » des professeurs des écoles, notamment dans leur activité d'évaluation qui répond à des finalités à la fois professionnelles et personnelles.

En France, l'activité d'évaluation des enseignants est cadrée par des textes officiels qui émettent des préconisations. Dernièrement, de nouvelles orientations ont été diffusées avec la parution de trois textes importants : le nouveau référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation3, la circulaire de préparation de la rentrée 20144 et les recommandations du Conseil supérieur des programmes (CSP) de juin 2014. La loi de refondation de l'école de 2013 avait déjà introduit des nouvelles prescriptions institutionnelles sur l'évaluation et mis l'accent sur « l'évaluation positive », « valorisant les progrès », évitant ainsi la « notation sanction » tout en insistant sur son caractère simple, lisible par les familles pour mesurer le degré des connaissances, des compétences et la progression des élèves.

La pression institutionnelle est donc forte sur cette activité que les enseignants de l'école ont à réaliser dans l'exercice de leur métier. Ils sont ainsi exhortés à « *construire et utiliser des outils permettant l'évaluation des besoins, des progrès et du degré d'acquisition des savoirs et des compétences* » (référentiel de compétences p 6), « *valoriser les réussites, les progrès de tous les élèves en pratiquant une évaluation bienveillante, en se référant aux compétences du socle commun* » (circulaire rentrée 2014), varier les modalités d'évaluation (recommandations CSP) en :

- identifiant plusieurs niveaux de réussite pour chaque type de connaissances et compétences évalué,
- permettant aux élèves n'ayant pas totalement validé le socle à l'issue du collège de pouvoir le valider plus tard,

[3] Arrêté du 1-7-2013 - J.O. du 18-7-2013
[4] Circulaire n° 2014-068 du 20-5-2014

- faisant une place aux tâches faisant appel à plusieurs domaines de formation dans les procédures d'évaluation.

Par ailleurs, les contraintes sociales pèsent également lourdement sur l'activité d'évaluation que les enseignants ont à réaliser régulièrement. Des travaux (Butlen, Peltier-Barbier & Pézard 2004, Coulange 2013) ont montré comment ces contraintes peuvent amener les professeurs enseignant dans des établissements en ZEP (zone d'éducation prioritaire) à baisser leurs exigences en termes de contenus d'apprentissage et par conséquent en termes d'évaluation. Cauley et McMillian (2000) ont également montré que, pour les enseignants de l'école primaire, la composante « social behavior » de l'évaluation avait un poids plus fort que chez les autres enseignants et qu'ils avaient davantage tendance a prendre en compte des facteurs non disciplinaires dans leurs évaluations. Nous avons également constaté, à partir d'une étude exploratoire[5], qu'il se pourrait que les professeurs des écoles aient une forte tendance à survaloriser leurs élèves les plus en difficultés. En effet, à partir de copies corrigées d'élèves et des commentaires écrits par les professeurs, il semblerait que le choix des tâches proposées dans les évaluations étudiées, ainsi que leur validation, étaient extrêmement variables selon les professeurs et les écoles où ils enseignent. L'objet de la recherche en cours est donc, en partie, de vérifier cette hypothèse.

Nous faisons également l'hypothèse que la dimension personnelle est très forte dans l'activité d'évaluation de l'enseignant de l'école primaire dans la mesure où d'une part il y a, en réalité, peu de formations à l'évaluation (initiale ou continue) ce qui entraine une autonomie pédagogique des enseignants plus grande et d'autre part, que c'est une activité qui est fortement sous-tendue par des conceptions et des représentations personnelles. En effet, les questions de ce que doit être une évaluation, de comment la concevoir et de sa finalité sont essentielles pour comprendre ce que le professeur propose à ses élèves en matière d'évaluation.

Il s'agira donc, dans cette recherche, d'étudier les pratiques évaluatives des professeurs des écoles en mathématiques, à partir des tâches auxquelles ils confrontent leurs élèves dans les différents moments d'évaluation qu'ils leur proposent. L'analyse des tâches mathématiques proposées en évaluation par les professeurs de notre échantillon sera réalisée à partir d'outils développés dans le cadre d'une approche épistémo-didactique (Grapin & Grugeon 2015) et psycho-didactique (Vantourout & Goasdoué 2014). Il s'agira principalement de les analyser du point de vue du recouvrement du domaine étudié et de leur complexité pour étudier dans quelle mesure elles varient et se distinguent suivant les professeurs (dimension personnelle), les niveaux de classe (dimension institutionnelle) ainsi que les lieux de classe (dimension sociale).

La dimension institutionnelle sera également appréhendée à partir de la variété des contextes de pratiques évaluatives (prescriptions curriculaires locales, caractéristiques d'enseignement spécifiques, formes pédagogiques, cultures de la société, …) et différents niveaux de codétermination seront étudiés (Chevallard 2002, Artigue & Winslow 2009).

Nous tacherons également de dégager des « portraits évaluatifs » de professeurs qui seront déterminés à partir de la variété et de la nature des tâches mathématiques qu'ils proposent en évaluation à leurs élèves, mais aussi à partir d'éléments personnels qui contribuent à l'élaboration de ces évaluations, notamment des dilemmes (Wanlin & Crahay 2012) auxquels ils sont confrontés qu'il conviendra de mettre à jour et qu'il faudra déterminer. Nous convoquerons également le concept de documentation scolaire (Margolinas & Wozniak 2009)

[5] à l'été 2014, j'ai récolté une vingtaine d'évaluations de professeurs des écoles autour des notions de fractions & décimaux ainsi qu'un questionnaire en ligne permettant de récolter quelques informations sur ces professeurs.

utilisée par les enseignants pour élaborer leurs évaluations pour étayer ces portraits évaluatifs. Ces portraits évaluatifs en mathématiques auront pour but, au-delà de ce qu'ils donneront à voir, de permettre une projection sur des questions de formation à l'évaluation qui animent aussi bien les chercheurs que les praticiens engagés dans cette recherche collaborative.

II. METHODOLOGIE ET OUTILS D'ANALYSE

1. *Méthodologie*

L'enquête en cours aura donc pour but d'étudier les pratiques évaluatives en mathématiques des professeurs des écoles et de dégager des portraits évaluatifs en mathématiques de ces professeurs à partir de données suffisamment riches pour nous permettre d'attendre nos objectifs. Les réunions menées dans le cadre de la recherche collaborative ont abouti à un certain nombre de choix méthodologiques.

Au niveau des professeurs étudiés

Le nombre de professeurs des écoles de notre échantillon devra être suffisamment élevé pour permettre d'explorer la diversité des pratiques d'évaluation en mathématiques à l'école primaire, mais il ne saurait l'être trop car il importe de récolter un ensemble de données suffisamment riches pour permettre d'affiner les portraits évaluatifs que nous souhaitons dégager. La vingtaine de professeurs des écoles ayant accepté de participé à notre étude et qui se trouve dans une certaine diversité de contextes nous semble correspondre aux besoins que nous avons identifiés :

- Des enseignants débutants (professeurs stagiaires, professeurs débutant jusqu'à la 2ème année d'exercice) : au moment de l'entrée dans le métier, il nous semble intéressant d'étudier comment ces professeurs s'y prennent pour élaborer leurs évaluations, sur quelles ressources ils s'appuient pour le faire et ainsi déterminer plus spécifiquement des besoins en formation initiale.
- Des enseignants en REP (réseaux d'éducation prioritaire) : en effet, nous avons fait l'hypothèse que les enseignants de ces classes différencient leurs évaluations qu'ils donnent à leurs élèves, de même que Cauley et McMillian (2000) avaient noté qu'ils différenciaient leurs pratiques de notation dans ce type de classes. Nous explorerons cette différenciation à partir de la qualité et de la variété des tâches proposées.
- Des enseignants « lambda » : il nous semble indispensable d'avoir un panel de professeurs des écoles qui ne présentent aucune des deux caractéristiques précédentes, même si l'ambition d'avoir un échantillon représentatif à l'échelle de la France n'est hélas pas envisageable.

Au niveau du domaine mathématique étudié

Après avoir discuté de l'opportunité de nous restreindre ou pas à un domaine mathématique donné, avec les incidences contingentes que cela pourrait avoir sur les niveaux de classes et le nombre de professeurs étudiés, nous avons convenu qu'il serait opportun de travailler dans le domaine de la numération des nombres entiers (connaissances et écriture des nombres). En effet, ce choix permet à la fois d'explorer les pratiques d'évaluation d'enseignants du CP au CM2, et à la fois d'intégrer les travaux que Nadine Grapin réalise actuellement dans le cadre de sa thèse sur l'évaluation des acquis des élèves, spécifiquement en fin d'école primaire dans le domaine des nombres entiers (leurs écritures, leurs propriétés et les opérations). Elle a ainsi défini, en lien avec la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 2001), une praxéologie de référence pour analyser le contenu d'une évaluation dans ce domaine. Nous nous appuierons donc sur son travail pour situer les tâches proposées par les professeurs de notre échantillon dans leurs évaluations et pour déterminer leur couverture didactique. L'étude de ce recouvrement ne pourra se faire à l'échelle d'un professeur car la restriction à un niveau de classe (celui dans lequel enseigne le professeur) est trop restrictive, mais cela permettra de repérer les types de tâches récurrentes ou au contraire non usuelles. Tempier (2013) avait mis en évidence dans sa thèse que les tâches de décomposition des nombres en unités de numération n'étaient pas prépondérantes dans la réalité du travail de classe, nous verrons dans quelle mesure nous pourrons retrouver ce résultat au niveau des évaluations.

Au niveau des données à récolter

Il nous semble indispensable pour explorer les questions de continuité et ruptures entre les tâches proposées lors de la séquence d'apprentissage et les évaluations proposées par les professeurs des écoles de récolter aussi bien les exercices donnés en classe ou en devoirs, que les différentes traces d'activités proposées (ardoise, questions orales, etc.) qui auront été réalisés au cours d'une séquence d'enseignement sur la numération. Nous récolterons bien évidemment toutes les évaluations proposées par l'enseignant, sans préciser lors de la demande la nature des évaluations attendues. En effet, la distinction entre les différents types d'évaluation (diagnostique, formative, formatrice, sommative) ne nous semble pas forcément intégrée, voire comprise, par les enseignants français et nous ne souhaitons pas introduire de biais de récolte en précisant la nature des évaluations attendues.

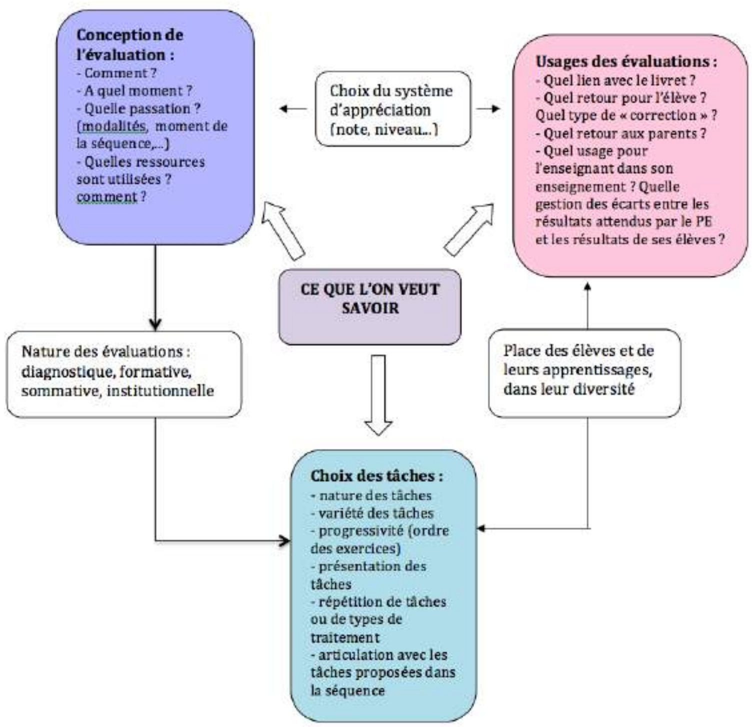
Nous souhaitons également explorer la documentation scolaire (manuel de l'élève, livres du maître, fichier de l'élève, documents et matériel d'accompagnement, etc.) des professeurs et connaître les ressources (notamment virtuelles) qu'ils utilisent pour élaborer leurs évaluations. Les ressources institutionnelles utilisées seront également intéressantes à considérer pour appréhender la dimension institutionnelle des pratiques évaluatives des professeurs. Nous avons indiqué précédemment qu'actuellement en France, les préconisations institutionnelles via des textes officiels étaient nombreuses, nous verrons dans quelle mesure les enseignants s'en emparent et s'en inspirent pour concevoir leurs évaluations.

Un court questionnaire sera également proposé aux professeurs de notre échantillon, en amont de toutes les autres données nécessaires à la recherche. Il permettra de récolter des données biographiques et professionnelles indispensables pour dresser les portraits évaluatifs que nous souhaitons réaliser et analyser les données qu'ils auront fournies.

Nous souhaitons également récolter des travaux corrigés d'élèves (une copie d'un élève ayant réussi l'évaluation, une copie d'un élève ayant moyennement réussi l'évaluation et une copie d'un élève ayant majoritairement échoué à l'évaluation). Ces données nous permettront d'une part de nous renseigner sur le niveau et le rapport aux mathématiques des enseignants de notre échantillon (DeBlois 2006, Vantourout & Maury 2006) et d'autre part, elles participeront à l'élaboration du portrait évaluatif du professeur en révélant des dimensions sociales et personnelles du professeur.

Dans la recherche exploratoire évoquée précédemment, nous avions récolté, à partir d'un questionnaire en ligne, des données sur la manière dont les professeurs des écoles élaboraient leurs évaluations et ce qui les sous-tendaient du point de vue de leurs conceptions, mais nous avons réalisé que les réponses apportées par ce biais n'étaient pas assez précises et/ou pas assez instructives, donc peu exploitables. Nous avons donc convenu que, pour avoir accès aux explications et justifications des professeurs relativement à leurs évaluations, nous leur proposerions un entretien semi-directif à partir des données qu'ils auront fournies qui permettra de mieux comprendre leurs intentions et la manière dont ils ont choisi les exercices de leurs évaluations. Nous chercherons ainsi à avoir accès aux domaines de réalité institutionnels des professeurs (Coulange 2013) et aux formes pédagogiques prescrites ou observées à l'échelle de leur école (dynamique d'équipe, caractéristiques) et de leur classe.

Pour ce faire, nous étudierons préalablement l'ensemble des tâches proposées durant la séquence retenue et dégagerons, en amont de l'entretien, les questions susceptibles de nous éclairer dans nos analyses. Nous profiterons de cet entretien pour récolter des informations qui seront utiles à nos analyses, complémentaires à celles obtenues par le questionnaire. Le schéma ci-dessous illustre les grands axes d'informations qui orienteront notre entretien (conception, tâches, usages) et nous permettra de cadrer les questions qu'il nous faudra poser. Cet entretien sera enregistré et retranscris pour permettre son exploitation.



2. *Outils d'analyse*

Pour analyser les tâches proposées par les enseignants dans leurs évaluations, nous utiliserons l'outil d'analyse d'items développé antérieurement (Sayac & Grapin 2014, 2015) pour analyser les évaluations externes de la DEPP et l'adapterons, si besoin, aux évaluations de classe. Cet outil a été conçu à partir de différents travaux, notamment ceux de GRAS, REPRIS PAR BODIN (2004) SUR LES TAXONOMIES DES ENONCES DE PROBLEMES MATHEMATIQUES PERMETTANT DE CLASSER PAR NIVEAUX HIERARCHISES DE COMPLEXITE COGNITIVE, L'ACTIVITE DES ELEVES ET CEUX REALISES PAR DES CHERCHEURS CANADIENS DANS LE CADRE DE L'EIACA[6] SUR LA « NUMERATIE DES ADULTES ET SON EVALUATION » (2003) QUI ONT PERMIS DE DEGAGER UN ORGANIGRAMME DE COMPLEXITE, DECLINE EN CINQ FACTEURS DE COMPLEXITE (répartis en

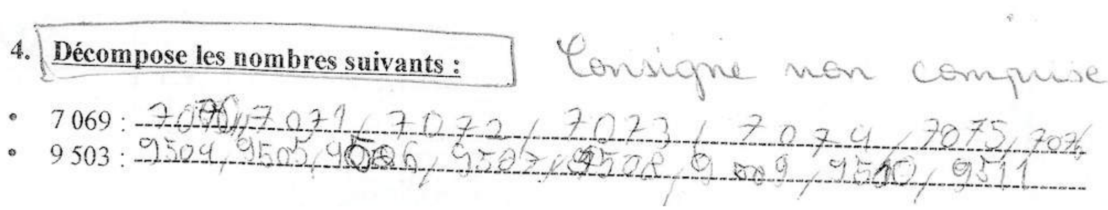
[6] Enquête Internationale sur l'Alphabétisation et les Compétences des Adultes. Les compétences évaluées sur des adultes en 2003 dans ce cadre portaient sur : la compréhension de textes suivis et schématiques, la numératie et la résolution de problèmes.

deux ensembles : deux facteurs qui concernent surtout les aspects textuels des tâches et trois facteurs qui concernent les aspects mathématiques). À ces travaux s'ajoutent ceux réalisés en didactique des mathématiques sur des domaines particuliers. Pour ce qui concerne notre recherche centrée sur le domaine de la numération des nombres entiers, nous nous appuierons principalement sur les travaux de Chambris (2012), Mounier (2013) et Tempier (2014).

Cet outil se décline en trois facteurs d'analyse : deux facteurs de complexité FC1 et FC1 et un facteur de compétences.

Facteur de complexité 1 : le contexte de l'énoncé

Dans ce facteur, le niveau de langue de l'énoncé ainsi que la nature des informations à traiter (texte, graphique, schéma, etc.) nous semblent important à considérer car il permet d'évaluer la complexité de la tâche du point de vue de la consigne et de la manière dont l'élève est amené à comprendre ce qu'il doit faire. La présence d'un exemple donné dans la consigne[7] entraine, du point de vue de la tâche que l'élève a à réaliser, une simplification de celle-ci qui n'est certainement pas sans incidence sur l'activité de l'élève. A contrario, une consigne « brute » peut être mal comprise et amener l'élève à ne pas répondre à ce qui est attendu :


4. Décompose les nombres suivants : Consigne non comprise

- 7 069 : 7070, 7071, 7072, 7073, 7074, 7075, 7076
- 9 503 : 9504, 9505, 9506, 9507, 9508, 9509, 9510, 9511

Facteur de complexité 2 : les savoirs mathématiques en jeu

Ce facteur est directement lié au savoir mathématique en jeu et nous convoquons des travaux développés en didactique des mathématiques dans le domaine de la numération des nombres entiers pour évaluer la complexité de la tâche proposée. Nous nous référons également aux travaux de Duval (1993) autour des changements de registres de représentation pour évaluer ce facteur de complexité. C'est dans ce facteur que sont prises en compte les variables didactiques propres au domaine étudié (taille des nombres, écriture des nombres, présence de zéros, etc.) et qui peuvent avoir une influence non négligeable sur la complexité de la tâche à réaliser. Par exemple, il n'est pas équivalent de demander aux élèves d'écrire en chiffres le nombre « quarante-trois-mille-cent-vingt-quatre » et le nombre « quarante-mille-vingt-quatre ».

Facteur de niveau de compétences

Pour ce facteur, la définition de compétence qui nous est apparue la plus adaptée est celle que Perrenoud (1997) a proposée, mais complétée par la prise en compte de l'aspect inédit de la tâche à réaliser retenu par certains auteurs (Beckers 2002, Rey, Carette, Defrance & Kahn 2002). Pour nous, une compétence se définit donc comme : « une capacité d'agir de manière opérationnelle face à une tâche mathématique qui peut s'avérer inédite, en s'appuyant sur des connaissances que l'élève mobilise de façon autonome (Sayac & Grapin 2015). »

Nous nous sommes inspirées des travaux relatifs aux différents niveaux de mises en fonctionnement des connaissances (Robert & Rogalski, 2002) et des adaptations listées par

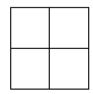
[7] Par exemple : « décompose les nombres suivant le modèle : 6428 = 6x1000 + 4x100 + 2x10 + 8x1 »

Robert (2008) pour prendre en compte le caractère inédit[8] des tâches et le degré d'autonomie développé par l'élève confronté aux différentes tâches.

Ainsi, pour ce facteur, trois niveaux de compétences permettent d'évaluer dans quelle mesure la tâche proposées en évaluation est plus ou moins proche de la notion de compétence que nous avons retenue qui intègre aussi bien la restitution de connaissances qu'une capacité autonome de mobilisation de ces connaissances :

- **Niveau 1** : pour les tâches qui amènent à des applications immédiates des connaissances, c'est-à-dire simples (sans adaptation) et isolées (sans mélange), où seule une connaissance précise est mise en œuvre sans aucune adaptation, mis à part la contextualisation nécessaire. Les tâches sont usuelles.

  Hachurez la surface correspondant à la fraction ¼ dans la figure ci-contre :

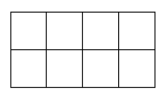
- **Niveau 2** : pour les tâches qui nécessitent des adaptations de connaissances qui sont en partie au moins indiquées. Les tâches sont relativement usuelles.

  Hachurez la surface correspondant à la fraction ¼ dans la figure ci-contre :

- **Niveau 3** : pour les tâches qui nécessitent des adaptations de connaissances qui sont totalement à la charge de l'élève. Les tâches sont inédites.

  Hachurez la surface correspondant à la fraction $\frac{5}{10}$ dans la figure ci-contre :

Pour chaque évaluation produite par un professeur de notre échantillon, nous étudierons donc :

- La diversité des tâches proposées en évaluation, au niveau de leurs niveaux de complexité et de compétences.
- La diversité des tâches proposées en évaluation, au niveau du domaine de la numération des nombres entiers.
- La diversité des tâches proposées en évaluation, au regard des programmes.
- La comparaison entre les tâches données durant la séquence et les tâches données en évaluation.

À partir de l'analyse de l'ensemble des tâches données aux élèves nous rechercherons, lors de l'entretien, ce qui a amené le professeur à proposer telle ou telle tâche pour ses évaluations. Au-delà de l'analyse outillée des évaluations, nous chercherons donc à avoir accès aux significations et intentions des enseignants lors de leur activité d'évaluation ce qui participera à l'élaboration du portrait évaluatif du professeur d'un point de vue des tâches mathématiques qu'il propose à ses élèves.

[8] NOUS ENTENDONS PAR INEDIT LE FAIT QUE L'ELEVE SOIT CONFRONTE A UNE TACHE A LAQUELLE IL N'A PAS L'HABITUDE D'ETRE CONFRONTE, PAR OPPOSITION AUX TACHES QU'IL RENCONTRE PLUS FREQUEMMENT (DANS LES MANUELS NOTAMMENT).

III. CONCLUSION

Étudier les pratiques en mathématiques des professeurs des écoles s'inscrit dans la continuité des études sur les pratiques des enseignants en mathématiques. Se restreindre à une activité spécifique des pratiques enseignantes en mathématiques est une piste pertinente et constructive à suivre, même si elle n'est pas simple à explorer du fait de la complexité des enjeux professionnel, personnel et institutionnel qu'elle sous-tend. Il est aujourd'hui crucial, du point de vue de la formation des enseignants en France, de prendre en compte de manière plus efficiente, cette activité au cœur des pratiques enseignantes.

Le cadre de la recherche collaborative adopté pour cette recherche participe de notre volonté de promouvoir la recherche dans la formation des enseignants et même si les objectifs des uns et des autres ne sont pas exactement les mêmes puisque pour les chercheurs il s'agit de dégager des connaissances scientifiques autour du thème de l'évaluation des apprentissages mathématiques et s'inscrire dans l'idée évoquée par Chevallard (1989) d'élaborer « une théorie de l'évaluateur » alors que pour les praticiens formateurs, il s'agit plutôt de décrire, comprendre, conceptualiser les pratiques d'évaluation en mathématiques pour construire des connaissances professionnelles au service de la formation et/ou de sa pratique personnelle.

Cette recherche n'est hélas pas encore aboutie et nous ne pouvons aujourd'hui produire les résultats attendus, mais nous espérons qu'ils permettront de mieux comprendre ce qui se joue en classe au niveau des apprentissages mathématiques des élèves, de tous les élèves, car il est aujourd'hui indispensable, pour lutter contre les inégalités scolaires, de mieux penser et concevoir les évaluations qui permettent aux élèves d'être confrontés à la réalité de leurs connaissances en mathématiques pour progresser et mieux apprendre.

REFERENCES

Artigue M., Winslow C. (2010) International comparative studies on mathematics education: a view from the anthropological theory of didactics. *Recherches En Didactique Des Mathématiques* 1(30), 47–82.

Beckers J. (2002) *Développer et évaluer des compétences à l'école : vers plus d'efficacité et d'équité*. Bruxelles : Labor.

Bodin A. (1997) l'évaluation du savoir mathématique. Savoirs et Méthodes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(1/3), 49-93.

Bodin A. (2004) Taxonomie des énoncés mathématiques, classement par niveaux hiérarchisés de complexité cognitive. http://www.apmep.asso.fr/07-Documents-et-articles.

Brousseau G. (1980) Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1(1/3) 11–59.

Butlen D., Peltier-Barbier M.L., Pézard M. (2004) Des résultats relatifs aux pratiques deprofesseurs débutants ou confirmés enseignant les mathématiques à l'école. In Peltier-Barbier M-L (Ed.) *Dur pour les élèves, dur pour les enseignants, dur d'enseigner en ZEP* (pp.70–81). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cauley K, McMillian J.H. (2000) Do teachers grade differently in low SES middle schools? Paper presented at the *Annual meeting of the American Educational Research Association*, New Orleans, LA.

Coulange L. (2013) Débuter en collège ZEP : quelles pratiques enseignantes ? Un zoom sur deux professeurs de mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 32.3, 361-408.

DeBlois L. (2006) Influence des interprétations des productions des élèves sur les stratégies d'intervention en classe de mathématiques. *Educational Studies in Mathematics* 62(3), 307-329.

Desgagné S. (1997) Le concept de recherche collaborative : L'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation* 23(2), 371-393.

Duval R. (1993) Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37–35.

Duval R., Pluvinage F. (1977) Démarches individuelles de réponse en mathématique. *Educational Studies in Mathematics* 8-1, 51-116.

Gueudet G., Trouche L. (2010) *Ressources vives : Le travail documentaire des professeurs en mathématiques.* Rennes : Presses universitaires de Rennes.

Lescure S., Pastor J-M. (2012) Mathématiques en fin d'école primaire. Le bilan des compétences. *Scéren,* Paris.

Margolinas C., Wozniak F. (2009) Usage des manuels dans le travail de l'enseignant : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation* 35 (2), 59-82.

Maury S., Vantourout M. (2006) Quelques résultats relatifs aux connaissances disciplinaires de professeurs stagiaires dans des situations simulées d'évaluation de productions d'élèves en mathématiques. *Revue des sciences de l'éducation* 32-3, 759-782

Perrenoud P. (1997) *Construire des compétences dès l'école*. Paris : ESF.

Remillard, J. T., Herbel-Eisenmann, B. A., Lloyd G. M. (Eds.) (2009) *Mathematics teachers at work : Connecting curriculum materials and classroom instruction, Studies in Mathematical Thinking and Learning Series.* A. Schoenfeld, Ed. New York: Routledge.

Robert A., Rogalski M. (2002) Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de la classe. *Petit x* 60, 6–25.

Roditi E. (2011) *Recherches sur les pratiques enseignantes en mathématiques : apports d'une intégration de diverses approches et perspectives.* Note de Synthèse. Université René Descartes -Paris V.

Roditi E. (2007) La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté *Annales de didactique et de sciences cognitives* 12, 55–81.

Sayac N. (2015). Stratégie des élèves de fin d'école primaire face à des QCM en mathématiques. In Marin B. (Ed.) *L'évaluation et ses pratiques dans le champ scolaire* (pp.78-95). CANOPÉ éditions.

Sayac N., Grapin N. (2014) Évaluer par QCM en fin d'école: stratégies et degré de certitude. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 19, 169–198

Sayac N., Grapin N. (2014) Évaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe, en France : les spécificités de la forme QCM. Volume XLII : 2. *Éducation et Francophonie.* 64-83. http://www.acelf.ca/c/revue/pdf/EF-42-2-064_SAYAC.pdf

Rapport CNESCO : *L'évaluation des élèves par les enseignants dans la classe et les établissements : réglementation et pratiques. Une comparaison internationale dans les pays de l'OCDE*, Décembre 2014

Enquête internationale sur l'alphabétisation et les compétences des adultes (2003), Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport, Canada.

Note d'information de la DEPP, 10-17 octobre 2010 : les compétences en mathématiques des élèves de fin d'école primaire, Ministère de l'Éducation Nationale.

Note d'information de la DEPP, 10-18 (2010) les compétences en mathématiques des élèves de fin d'école primaire, Ministère de l'Éducation Nationale.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

RÔLES ET RESPONSABILITÉS DES PROFESSEURS ET DES ÉLÈVES DANS LES DÉMARCHES D'INVESTIGATION ET DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Compte-rendu du groupe de travail n°10

Michèle GANDIT*– Francesca MORSELLI**– Sidi SOKONA BEKAYE***

Ce texte rend compte du travail effectué dans le groupe. Il donne les grandes lignes développées dans les présentations et les discussions, sans reprendre les communications telles quelles, celles-ci figurant dans les actes.

Le groupe de travail comptait onze participants, venant de six pays : Algérie (Samia Méhadenne), Italie (Francesca Morselli), France (Grégoire Charlot, Michèle Gandit, Jean-Baptiste Lagrange, Bernard Le Feuvre, Christian Mercat), Suisse (Maud Chanudet, Sylvie Coppé), Tunisie (Benoît Ray). Il est appréciable que ce collectif ait été constitué de personnes exerçant des métiers divers en lien avec les mathématiques et leur enseignement : des enseignants de mathématiques en lycée, ayant des pratiques innovantes, des formateurs d'enseignants, des chercheurs en mathématiques, des chercheurs en didactique des mathématiques, des formateurs d'enseignants de mathématiques.

Compte tenu du temps alloué au groupe de travail (quatre plages de deux heures et une plage d'une heure et demie), les participants ont apprécié de pouvoir échanger de façon satisfaisante sur chacune des contributions proposées. Les questions sur celles-ci étaient anticipées, puisque chaque participant au groupe de travail avait eu la possibilité de prendre connaissance des textes, avant leur présentation au groupe.

Les responsables du groupe de travail avaient choisi d'organiser le travail selon trois axes, afin de traiter certaines questions soulevées dans les conclusions du GT10 de EMF 2012, sur la démarche d'investigation dans la classe de mathématiques (Matheron & al 2012) : le premier, de façon générale, revient sur ce qu'est une démarche d'investigation en mathématiques et ses liens avec la résolution de problèmes, le second traite du rôle de l'enseignant(e) et le troisième du rôle des élèves, au sein des enseignements relevant de démarches d'investigation. Dans le texte qui suit, nous reprenons ces axes au travers des

* Université Grenoble Alpes – France – michele.gandit@univ-grenoble-alpes.fr
** Institution – Italie – francesca.morselli@unito.it
***Institution – Mali – sbsokona@gmail.com

Gandit M., Morselli F., Sokona Bekaye S. (2015) Rôles et responsabilités des professeurs et des élèves dans les démarches d'investigation et dans la résolution de problèmes - *Compte-rendu du groupe de travail n°10.* In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT10, pp. 829-836.

présentations de chacun des participants. Nous revenons sur chacune des présentations et du temps d'échange qui l'a suivie. Auparavant, nous proposons une présentation un peu générale.

I. UNE VUE D'ENSEMBLE SUR LE TRAVAIL DU GROUPE

Les différentes présentations et les échanges au sein du groupe montrent la multiplicité des pratiques d'enseignement que recouvre actuellement l'expression « démarches d'investigation ». Il est aussi bien question de posture scientifique des élèves qu'on cherche à développer dans un cours dédié à la résolution de problèmes (Chanudet) ou dans des ateliers de recherche réservés à quelques élèves volontaires (Ray) que de phases de travail particulières au sein du cours que suivent ordinairement les élèves, en lien avec l'apprentissage de concepts mathématiques ou théorèmes. Il est généralement question d'investigation guidée au travers de tâches bien précises, proposées par l'enseignant. Pour Morselli, l'enseignant part de situations « ouvertes » où les élèves sont amenés à formuler des conjectures et à argumenter. Lagrange et Le Feuvre proposent une résolution de problèmes par groupes sur le thème de la modélisation fonctionnelle, chaque groupe apportant sa contribution particulière à la résolution générale du problème. Dans le *débat scientifique préparatoire* (Charlot), le guidage se fait par l'enchaînement des questions posées, permettant aux élèves de faire des conjectures et d'argumenter collectivement pour étudier un champ mathématique qu'ils ne connaissent pas encore. Enfin Coppé étudie une phase d'interactions didactiques (au sens de Sensevy, 2007) qui se situe dans une séance relevant d'une pratique plus ordinaire que celles qui sont citées ci-dessus.

La collaboration avec d'autres disciplines que les mathématiques est évoquée dans deux présentations (Ray, d'une part, Lagrange et Le Feuvre, d'autre part), de même que le lien avec la modélisation.

Les apprentissages visés explicitement au travers des enseignements mettant en œuvre une investigation des élèves se situent sur un continuum entre, d'une part, l'acquisition de compétences relevant de la recherche scientifique, sans visée d'apprentissages de notions mathématiques, à l'une des extrémités, d'autre part, la compréhension de concepts et de propriétés mathématiques, grâce à l'acquisition de méthodes scientifiques, à l'autre extrémité. On peut résumer en utilisant les différents ordres de connaissances développés par Sackur et al. (2005) : les apprentissages visés se situent sur un continuum entre, d'un côté, des connaissances d'ordre II uniquement et, de l'autre côté, des connaissances d'ordre I, acquises en utilisant des connaissances d'ordre II. L'explicitation de ces dernières aux élèves n'est cependant pas toujours présente dans plusieurs des dispositifs présentés, alors qu'elle apparaît comme centrale dans d'autres. Le point de vue de l'évaluation, adopté dans ces dernières, semble favorable à cette explicitation.

Différents projets européens sont cités comme points d'appuis aux recherches présentées dans le groupe de travail. Dans la continuité du projet S-TEAM (Science Teacher Education Advanced Methods), qui s'inscrit dans la dynamique soutenant le développement des enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation, le projet ASSIST-ME (Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education) étudie plus particulièrement la question de l'évaluation dans ces types d'enseignements. La communication de Sylvie Coppé y fait explicitement référence. La question de l'évaluation d'activités de résolution de problèmes est reprise dans l'intervention de Maud Chanudet qui situe sa recherche dans le cadre d'un cours dédié spécifiquement à la démarche d'investigation, dans l'enseignement secondaire genevois. Des pratiques d'évaluation formative en mathématiques sont également abordées, en lien avec l'apport d'une technologie numérique, dans la présentation de Francesca Morselli qui se situe dans le cadre du projet FaSMEd (Formative Assessment in Science and Mathematics Education) et qui se préoccupe plus particulièrement des élèves en difficulté dans les enseignements scientifiques. Les discussions permettent d'évoquer le projet MC2 (Mathematical Creativity Squared) qui vise à développer un environnement informatique stimulant et créatif pour améliorer la créativité des élèves en mathématiques. Deux autres présentations font référence aux recherches dans les IREM[1] : le groupe *Casyopée* de l'IREM de Rennes (Jean-Baptiste Lagrange et Bernard Le Feuvre) et le groupe *Débat scientifique* de l'IREM de Grenoble (Grégoire Charlot). Enfin Benoît Ray s'appuie sur une Action Pédagogique Pilote, nommée « Tous chercheurs ».

II. PRESENTATIONS ET DISCUSSIONS

L'aspect investigation est décrit sous la forme « essayer – conjecturer – tester – prouver » dans le cours relatif à la résolution de problèmes, présenté par Maud Chanudet. Elle précise que les enseignants, chargés de ce cours, ressentent la nécessité d'avoir accès aux démarches des élèves. Pour ce faire, ils recourent à un dispositif issu de la recherche en didactique, les *narrations de recherche*. Cet outil, conçu à l'origine, pour favoriser chez les élèves l'écriture de mathématiques, se transforme ainsi en un outil permettant aux enseignants d'évaluer l'acquisition par les élèves de compétences en résolution de problèmes. La nécessité se fait sentir chez les enseignants d'établir des critères permettant cette évaluation. Les questions qui se posent sont alors les suivantes : 1) Peut-on dégager des critères d'évaluation généraux, indépendants des problèmes ? 2) Que doit-on et que peut-on évaluer, en termes de savoirs, savoir-faire, compétences relatifs à la résolution de problèmes ? 3) En quoi et comment le travail avec les narrations de recherche participe-t-il à la construction de savoirs mathématiques et lesquels ? Des éléments de réponse sont apportés par Maud Chanudet (voir son texte), qui s'interroge également sur la nature de l'évaluation des narrations de recherche, permise par ces grilles de critères : sont-elles seulement un outil d'évaluation sommative ou bien peuvent-elles devenir un outil d'évaluation formative, fournissant des feedbacks, aussi bien aux enseignants qu'aux élèves, ou encore un moyen de favoriser d'autres types d'évaluation (auto-évaluation, évaluation entre pairs, co-évaluation). Elle constate enfin que, la plupart du temps, les critères d'évaluation sont communiqués aux élèves, mais que ceux-ci portent davantage sur l'aspect narration que sur l'aspect recherche. On peut néanmoins conclure que la confection d'un outil d'évaluation permet une objectivation des compétences en matière d'investigation, pouvant déboucher sur une institutionnalisation à l'issue de la recherche d'un problème.

Ce point de vue de l'évaluation est abordé, mais de manière beaucoup moins marquée, dans la communication de Benoît Ray qui met, davantage en avant la posture de chercheur que doit adopter l'élève face à un problème qui ne relève pas essentiellement des mathématiques. Il questionne ainsi plus largement les moyens à se donner pour faire vivre d'authentiques pratiques interdisciplinaires engageant les mathématiques. Les deux exemples développés – 1) Mouvement brownien ; 2) Hasard et probabilités – concernent des élèves de lycée (16-17 ans) de la série scientifique. Le travail sur la modélisation est développé au cours de l'investigation menée par les élèves. L'enseignant n'a pas sa posture habituelle de détenteur du savoir, il encadre la recherche des élèves, il est secondé par un chercheur. En référence au modèle des enseignements scientifiques fondés sur l'investigation, développé par Grangeat (2013), Benoît Ray développe en quoi les modalités qu'il propose relèvent d'un tel enseignement : l'enseignant construit un problème avec les élèves sur un thème donné, il propose une consigne ouverte et un matériel libre, il favorise la responsabilisation des élèves

[1] Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Gandit M., Morselli F., Sokona Bekaye S. (2015) Rôles et responsabilités des professeurs et des élèves dans les démarches d'investigation et dans la résolution de problèmes - *Compte-rendu du groupe de travail n°10.* In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT10, pp. 829-836.

dans la conduite de l'investigation en mettant à leur disposition des outils d'auto-évaluation, il incite les élèves à argumenter en leur faisant justifier leurs réponses par des savoirs ou des résultats. En revanche, le dispositif ne prend pas en compte la diversité des élèves et ne favorise pas non plus l'explicitation des savoirs en jeu. L'acquisition de ces derniers est cependant évaluée implicitement par l'intermédiaire de la conférence que les élèves doivent donner pour présenter leurs travaux et leurs résultats. Par rapport à ce dispositif, le groupe de travail s'est questionné sur le risque d'accroissement des inégalités entre les élèves. Pourquoi ne pas proposer un tel dispositif à un plus grand nombre d'élèves, voire à tous les élèves ?

La modélisation est également très présente dans le dispositif d'investigation proposé par Jean-Baptiste Lagrange et Bernard Le Feuvre. Il vise à faire comprendre aux élèves l'aspect de dépendance qui sous-tend les fonctions et à leur permettre de s'approprier le formalisme fonctionnel de façon à ce qu'il devienne opérationnel dans la recherche de problèmes. Le cadre de modélisation fonctionnelle qui est présenté peut se décrire très succinctement comme un cycle mettant en jeu : problème – figure dynamique – quantification, covariation entre grandeurs – fonction algébrique (domaine, formule, graphe, table) – traitement mathématique – problème… Les limites constatées de ce cadre de modélisation fonctionnelle amènent les auteurs à dépasser la résolution de problèmes par modélisation en recourant à la *dialectique des média et des milieux* (Chevallard 2007). A la différence de la pratique usuelle de la résolution de problèmes en mathématiques, l'investigation, dans cette dialectique, passe par une recherche de solutions déjà obtenues sur le problème en jeu, de stratégies de résolutions différentes, en bref, par une sélection et un traitement d'informations de provenances diverses. L'expérimentation décrite, prenant place dans le cadre habituel d'une classe de terminale scientifique (élèves de 17-18 ans), montre ainsi comment le milieu est enrichi d'éléments qui peuvent être reconnus par les élèves comme de même nature que ceux qu'ils seraient allés chercher de leur propre initiative. Il s'agit de trouver une fonction qui modélise, dans un repère donné, la courbe dessinée par un câble principal du pont de Golden Gate. Les auteurs repensent les composantes du cycle de modélisation fonctionnelle comme différents espaces de travail fonctionnels : le dispositif physique, la figure dynamique, les grandeurs, l'algèbre. Un même objet prend ainsi sens dans chacun de ces espaces : une dépendance mécanique dans le dispositif physique correspond à une co-variation géométrique dans la figure dynamique, qui elle-même est vue comme une co-variation entre mesures, variables dans l'espace des grandeurs, qui devient une fonction définie par une formule dans l'espace de l'algèbre. La question qui se pose à notre groupe de travail est la suivante : compte tenu des contraintes des classes de lycée, est-il possible de faire vivre aux élèves des situations problématiques, associant plusieurs espaces de travail fonctionnels avec un contrôle efficace de la dialectique media-milieux ? L'expérimentation (déjà évoquée ci-dessus) est décomposée en trois temps : au cours du premier temps, des investigations autour d'une même question sont conduites par un ou plusieurs groupes, chacune dans un espace de travail spécifique ; dans un deuxième temps, les groupes sont déconstruits et reconstruits de façon à ce que, dans chacun des nouveaux groupes et pour chacun des espaces de travail, les résultats des groupes initiaux puissent être communiqués par un(e) élève ; dans un troisième temps, une synthèse est élaborée collectivement. Les conclusions de cette expérimentation montrent que les élèves ont adhéré au dispositif, que les différents aspects de la question ont été abordés, que la dialectique media-milieux fonctionne. Il faut cependant veiller à l'adéquation des objectifs et de la mise en œuvre dans chacun des groupes d'investigation, ainsi qu'à la mise en lien des résultats des différentes investigations. C'est ce dernier point qui a été questionné :. est-il possible que des élèves puissent résoudre un problème à partir de la résolution de sous-problèmes induits, traités séparément, sans qu'ils aient pu être auteurs de la séparation du problème en sous-problèmes et sans qu'ils en aient une vision complète ?

Grégoire Charlot fait vivre d'abord aux participants un débat scientifique, qu'il nomme *débat scientifique pré-cognitif*, sur des mathématiques de niveau master (algèbre linéaire). Il envisage ensuite une discussion sur deux points : 1) les postures de l'enseignant et des élèves ; 2) l'utilisation de cette séance comme un moyen de faire la dévolution aux enseignants de cette modalité d'enseignement qu'est le débat scientifique. On peut ainsi rapprocher ce mode de présentation utilisé par Grégoire Charlot de ce que Kuzniak (1994) appelle une stratégie d'homologie, au sens où elle repose sur une sorte d'homologie de structure supposée entre la formation des étudiants ou des élèves et la transmission aux participants au groupe de travail. Plusieurs des participants sont difficilement entrés dans la situation proposée. Des raisons peuvent être avancées, mais ce n'est pas le lieu de les développer. La discussion qui a suivi le débat a remis en question le terme de *pré-cognif*, qui pourrait laisser croire que, pendant ce type de débat, les élèves (ou étudiants) ont une activité qui ne relève pas encore du cognitif, alors qu'il n'en est rien. Grégoire Charlot propose alors de prendre le terme de *débat scientifique préparatoire*, même s'il peut laisser penser, à tort, qu'il s'agit seulement d'une « activité préparatoire », du type de celles qu'utilisent actuellement la plupart des enseignants pour démarrer un chapitre. La discussion porte également sur les raisons de la rupture marquée, dans cette forme de cours, entre la phase où les élèves débattent et la phase magistrale où l'enseignant reprend la main sur le savoir, sans donner la parole aux élèves. Cette rupture ne fait pas consensus malgré l'argument selon lequel il y a nécessité, d'une part, de protéger la phase de débat où les élèves sont amenés à s'engager, d'autre part, d'éviter que les élèves, posant des questions lors de la phase d'institutionnalisation, ne s'appuient sur les connaissances de l'enseignant et reviennent à une position plus classique de récepteur de savoir, sans vraiment le prendre en charge. Enfin la discussion sur l'utilisation de cette situation de débat comme un moyen de dévolution du débat scientifique aboutit à un certain consensus sur le fait que le format d'une heure est trop court pour permettre aux participants de s'imprégner de la problématique générale et d'être confrontés à certains obstacles épistémologiques, avant de recevoir le cours prévu par l'enseignant. Celui-ci est reconnu comme n'étant pas une institutionnalisation. Pourquoi ne pas y reconnaître une phase de dévolution ?

Sous une forme totalement différente, l'argumentation est également centrale dans la communication de Francesca Morselli[2], mais présentée comme un outil d'évaluation formative, subordonnée à l'utilisation d'une technologie numérique. Le dispositif de mise en investigation des élèves (10-14 ans) repose sur un travail de la classe en petits groupes, chaque groupe ayant à sa disposition une tablette numérique, qui lui permet de travailler et de communiquer avec l'enseignant, qui lui, dispose d'un logiciel de gestion de ces tablettes. Le travail permet une approche de l'algèbre, des relations et fonctions introduites dans différents registres. A partir d'une situation « ouverte », les élèves sont amenés à proposer des conjectures, à les valider, à réfléchir sur différentes approches possibles et sur les façons de les présenter. Des arguments de sources diverses sont amenés par écrit aux élèves, ceux-ci doivent se prononcer sur leur validité. La technologie utilisée permet à l'enseignant et aux élèves d'avoir rapidement une vision des positions prises par les élèves. Il s'ensuit une discussion organisée par l'enseignant de manière à engager les élèves à expliciter leurs choix, ainsi que leurs raisons de changer d'avis. On constate que des rétroactions sur la tâche ont lieu entre pairs, de même que des rétroactions sur le processus de résolution de la tâche, ces rétroactions permettant à l'enseignant de guider et modifier son enseignement. La conclusion repose sur quatre points concernant l'apport de l'utilisation de cette technologie numérique. 1) Elle permet à l'enseignant de saisir plus rapidement les difficultés des élèves et l'aide à faire

[2] La communication de Francesca Morselli a été présentée par Michèle Gandit, sur la base d'un diaporama enrichi par l'auteur de commentaires et d'éléments nouveaux par rapport au texte proposé.

comprendre aux élèves ce qu'ils peuvent faire pour améliorer ou corriger leurs réponses. 2) Elle simplifie la gestion des discussions en classe et facilite la comparaison entre les réponses des élèves. 3) Elle aide les élèves à mieux comprendre la pertinence (ou non) de leurs réponses et la façon de les améliorer ou de les corriger. 4) Elle permet aux élèves de mieux faire face à leurs pairs et les aide à comprendre un mode de raisonnement qui n'est pas le leur. La discussion du groupe a porté sur le qualificatif « méta » utilisé par Francesca Morselli, relativement aux stratégies d'explication et de validation en mathématiques : l'apprentissage à expliquer et à justifier mathématiquement apparaît en effet comme relevant explicitement des apprentissages de la discipline, et non des apprentissages « méta » (un peu dehors de la discipline). Des questions restent posées, que nous répartissons en quatre blocs : 1) Pourquoi ajouter le mot d'explication à démarche d'investigation ? Est-ce pour renforcer l'aspect de communication de la démarche ? Y a-t-il un cadre théorique qui le précise ? Si oui, lequel ? 2) L'habillage de l'exercice proposé a semblé artificiel. Il faudrait argumenter les choix qui ont été faits de cet habillage. 3) L'utilisation des tablettes permet un sondage. Quels arguments peut-on avancer concernant l'utilisation de cette technologie pour réaliser un tel sondage, alors que celui-ci peut se réaliser à moindre coût, semble-t-il, directement, en demandant un vote à main levée ? S'agit-il de rassurer les élèves qui n'osent pas parler ? Dans ce cas, n'est-ce pas un peu étonnant (et même troublant pour l'avenir) d'interposer un objet entre l'élève et le(a) professeur(e) pour faciliter la communication entre eux ? Cela ne renforce-il pas la communication entre professeur et élève, au détriment de la communication entre pairs ? S'agit-il, pour l'enseignant(e) d'avoir un retour très rapide de ce que pense la classe, alors que faire ce bilan à partir des réponses à main levée demanderait plus de temps ? 4) Le débat qui s'engage, à la suite du sondage, est-il bien oral, sans utilisation des tablettes ?

Les présentations précédentes montrent une variété importante des modalités de mise en œuvre de l'investigation des élèves. Mise à part la dialectique des media et des milieux, déjà citée ci-dessus, peu de cadres théoriques se sont développés en didactique des mathématiques relativement aux démarches d'investigation. Sylvie Coppé fait état de la difficulté de se démarquer des cadres connus (en lien avec la résolution de problèmes) et d'un manque en didactique pour analyser les interactions didactiques dans les enseignements relevant d'une démarche d'investigation, aussi bien du point de vue de l'élève que du point de vue de l'enseignant. dans sa communication, elle propose d'adopter une entrée par l'évaluation formative, pour requestionner les cadres théoriques bien connus de la didactique. Elle fait remarquer la prépondérance, dans les classes, de l'évaluation sous son aspect sommatif, malgré une volonté institutionnelle (depuis une dizaine d'années) de développer l'évaluation par compétences. Cette dernière s'appuie nécessairement sur des évaluations régulières prenant en compte la progression des apprentissages dans la durée et suppose la mise en place de situations d'évaluation pertinentes, telles que proposées lors des mises en investigation des élèves. Sylvie Coppé propose une analyse des interactions didactiques au cours d'une séance « ordinaire » avec des élèves (14-15 ans) sur le signe d'un produit de nombres relatifs, où l'enseignante instaure un dialogue dans la classe, d'une dizaine de minutes, qu'on peut interpréter comme « une phase d'évaluation formative dans l'interaction ». Pour cette analyse, elle utilise un modèle en cycles développé par Furtak et al. (2005) qu'elle résume sous la forme : « Poser une question aux élèves - Obtenir une réponse - Prendre en compte cette réponse, l'intégrer dans le discours - Avoir une action sur cette réponse - Utiliser la réponse de l'élève. » Elle montre comment cette analyse des interactions partant d'une entrée par l'évaluation formative, peut être replacée ou non dans d'autres cadres relevant de la didactique des mathématiques, permet, d'une part, « de mieux repérer et analyser la nature des interactions professeur/élèves », d'autre part, « de mieux analyser le partage des responsabilités entre les élèves et la professeure qui mène le débat avec de nombreuses interactions ».

III. CONCLUSION

Les diverses présentations ont montré des *démarches d'investigation* mises en œuvre aussi bien en dehors de la classe, avec des élèves motivés par l'aspect recherche, que dans un contexte scolaire, avec recours à des outils numériques pour aider des élèves en difficulté. Elles ont également indiqué que ces démarches recouvraient des modalités de travail avec les élèves, complètement différentes : étude par groupe de certains aspects d'un problème (un aspect différent par groupe), puis construction de la réponse au problème par assemblage des travaux des groupes ; débat scientifique sur des conjectures ou questions, amenées successivement par l'enseignant(e) ; phases d'interactions didactiques à partir d'un problème posé aux élèves. Néanmoins, un point commun se dégage de trois des présentations, c'est le recours aux cadres théoriques de l'évaluation, notamment formative. C'est une nouveauté par rapport aux travaux du GT10 de EMF 2012, dont la conclusion mentionne bien la question de l'évaluation, mais pas celle de l'évaluation formative. Il semblerait ainsi que les cadres théoriques actuels de la didactique des mathématiques ne sont pas suffisants pour analyser les enseignements de mathématiques fondés sur l'investigation, notamment sur le plan des interactions didactiques. On peut faire par ailleurs l'hypothèse que la mise en place de ce type d'enseignement est encore trop déstabilisante pour être installée dans les pratiques en mathématiques, dans le cadre du cours ordinaire. Elle pourrait même, si l'on ne prend pas garde à certains de ses aspects, augmenter les inégalités entre élèves. Il faut donc évaluer ce type d'enseignement par rapport aux apprentissages des élèves. On propose donc de croiser les cadres théoriques relatifs à l'évaluation, peu étudiée jusqu'à maintenant en didactique, avec ceux que nous connaissons. Cela permettrait d'analyser plus finement les interactions didactiques et de suivre chaque élève, dans la perspective de travailler à la réduction des inégalités entre élèves et à l'installation des démarches d'investigation dans la classe.

REFERENCES

Chevallard Y. (2007) Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In Gueudet G., Matheron Y. (Eds.) Actes *du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2007* (pp. 344-366).

Grangeat M. (2013) Modéliser les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation : développement des compétences professionnelles, apport du travail collectif ». In Grangeat M. (Ed.) *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation* (pp. 155-184). Grenoble, Presses universitaires de Grenoble.

Kuzniak A (1994) *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré. Histoire et perspectives sur les mathématiques.* Université Paris VII. <tel-01251462>

Matheron Y., Morselli F., Rene de Cotret S., Schneider M. (2012) La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques, fondements et méthodes. *Compte-rendu du groupe de travail GT10, EMF 2012*, http://www.emf2012.unige.ch/images/stories/pdf/Actes-EMF2012/Actes-EMF2012-GT10/EMF2012GT10CR.pdf, consulté le 28 janvier 2014.

Sackur C., Assude T., Maurel M., Drouhard J-P., Paquelier Y. (2005) L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25(1), 57-90.

LES CONTRIBUTIONS AU GROUPE DE TRAVAIL N°10

Maud CHANUDET, maud.chanudet@unige.ch : Questions posées par l'évaluation d'activités de résolution de problèmes : le cas de l'heure de « développements en mathématiques » au cycle d'orientation à Genève.

Grégoire CHARLOT, gregoire.charlot@ujf-grenoble.fr : Le débat scientifique en classe ou en amphi.

Sylvie COPPE, Sylvie.Coppe@unige.ch : Questions soulevées par la mise en place d'évaluations formatives dans une classe ordinaire.

Annalisa CUSI, Francesca MORSELLI, Cristina SABENA, francesca.morselli@unito.it : L'évaluation formative à travers les TICE : le projet FASMED en Italie.

Jean-Baptiste LAGRANGE, Roselyne HALBERT, Christine LE BIHAN, Bernard LE FEUVRE, Marie Catherine MANENS, Xavier MEYRIER, jb.lagrange@casyopee.eu : Investigation, communication et synthèse dans un travail mathématique : un dispositif en lycée.

Benoît RAY, benoitray@yahoo.fr : Quelle place pour une démarche d'investigation en mathématiques dans le cadre d'un atelier de recherche interdisciplinaire ?

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

QUESTIONS POSEES PAR L'ÉVALUATION D'ACTIVITÉS DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES : LE CAS PARTICULIER DU COURS DE « DÉVELOPPEMENTS EN MATHÉMATIQUES » AU CYCLE D'ORIENTATION À GENÈVE

Maud CHANUDET*

Résumé – Cette communication rend compte d'un travail ayant débuté en septembre 2014 et traitant de l'évaluation d'activités de résolution de problèmes dans le cadre d'un cours dédié spécifiquement à la démarche d'investigation au niveau du secondaire un genevois. Après avoir présenté le contexte de la recherche, nous discuterons de la narration de recherche choisie institutionnellement comme support pour l'évaluation et nous questionnerons les apprentissages visés par les activités de démarche d'investigation. Nous ferons ensuite un bref état des lieux des pratiques enseignantes dans ce cours et proposerons enfin un outil d'évaluation sommative pouvant favoriser des processus d'évaluation formative.

Mots clés : démarche d'investigation, résolution de problèmes, narration de recherche, évaluation sommative, évaluation formative

Abstract – This communication is based on a research started in September 2014 which deals with assessment of problem-solving activities in the context of a specific course about inquiry based mathematics education (IBME) in Geneva canton. We will present the context of the study, and the problem solving narration activity chosen as a means to assess students on their problem solving competences, we will question what teachers can expect students to learn about these problem-solving activities, we will make a short synthesis of teachers' practices and finally we will introduce a tool to assess with both summative and formative purposes.

Keywords: inquiry based mathematics education, problem solving, problem solving narration activity, summative assessment, formative assessment

I. INTRODUCTION

Dans le canton de Genève, au niveau du secondaire un (appelé Cycle d'Orientation et regroupant les classes de 9^{e}, 10^{e} et 11^{e} correspondant aux grades 7-8-9 avec des élèves ayant entre 12 et 16 ans) les Mathématiques et les Sciences de la Nature sont regroupées pour former un domaine disciplinaire du Plan d'Etude Romand (CIIP, 2010). Les « visées prioritaires » de ce domaine sont le développement de la posture scientifique et la résolution de problème. Par posture scientifique, il est entendu qu'il convient :

* DiMaGe, Université de Genève – Suisse – maud.chanudet@unige.ch

Chanudet M. (2015) Questions posées par l'évaluation d'activités de résolution de problèmes : Le cas particulier du cours de « développements en mathématiques » au cycle d'orientation à Genève. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT10, pp. 837-846.

> face à une situation donnée, de s'interroger, d'en analyser les caractéristiques pour en tirer les éléments essentiels, de problématiser les questions, d'émettre des hypothèses, de prendre des informations pertinentes, de tirer des conclusions et de soumettre celles-ci à l'épreuve des données initiales. (CIIP 2010, p. 11)

On peut noter que la posture scientifique telle que définie ci-dessus présente les caractéristiques de ce que certains nomment la démarche d'investigation (Dorier & Maass 2014). En mathématiques, à l'objectif institutionnel de développer ce que nous nommerons par la suite démarche d'investigation, vient s'ajouter celui de placer la résolution de problèmes au centre des activités mathématiques. Et c'est par la résolution de problèmes qu'il est convenu de développer cette démarche d'investigation.

Mais l'institution qui considère l'activité de recherche comme une partie importante de l'activité mathématique, fait le constat qu'elle n'est pas suffisamment travaillée durant les cours ordinaires de mathématiques, et qu'elle nécessite de l'être spécifiquement. En ce sens, les élèves de 10^{e} de la section littéraire et scientifique (LS) au « profil scientifique »[1] (S) suivent un cours intitulé « développements en mathématiques » dont l'objectif est de contribuer

> au renforcement et au développement des capacités et des compétences des élèves dans les stratégies de résolution de problèmes et les activités de situations mathématiques (DIP 2012, p. 18).

Ce cours d'une période de 45 minutes qui vient s'ajouter aux cinq périodes hebdomadaires de mathématiques est souvent donné avec un effectif réduit, autour de 15 élèves, et peut ou non selon les cas, conduire à un regroupement d'élèves de différentes classes, avec éventuellement un enseignant différent de celui qui dispense les heures de mathématiques ordinaires, et qui ne sait donc pas toujours ce qui a été travaillé dans le cours commun de mathématiques. Durant cette heure hebdomadaire l'enseignant doit donc proposer des activités ne faisant pas partie du manuel officiel, ne mettant pas en jeu des savoirs nouvellement travaillés et ne visant pas l'acquisition de nouvelles connaissances disciplinaires.

Par ailleurs, selon les directives officielles, cette heure doit donner lieu à une évaluation certificative indépendante du cours ordinaire, s'appuyant sur au moins deux travaux notés pour chaque trimestre, soit environ une évaluation toutes les quatre heures d'enseignement. Les enseignants doivent donc d'une part, amener les élèves à développer des compétences relatives à la démarche d'investigation sur des temps courts d'enseignement, et d'autre part fréquemment les évaluer dans le but de certifier leurs apprentissages. On est donc face à une situation très contrainte par l'institution, ce qui va certainement avoir des effets importants pour les élèves et pour les professeurs. Nous pouvons donc nous demander comment penser l'articulation entre des évaluations certificatives et le développement de compétences relatives à la démarche d'investigation, à la résolution de problèmes. Plusieurs problèmes se posent alors : Comment donner à ces évaluations fréquentes un rôle formatif ? Que cherche-t-on à développer chez les élèves et donc à évaluer ? Sur quel support doit-on faire porter cette évaluation ?

II. LA NARRATION DE RECHERCHE COMME SUPPORT POUR L'EVALUATION D'ACTIVITES DE DEMARCHE D'INVESTIGATION

Selon les injonctions de l'institution, cette évaluation certificative doit porter « au moins pour 2/3 sur la recherche et sa restitution - et donc pour au plus 1/3 sur les contenus. » (DIP 2012, p. 18). Un autre problème apparaît donc ici puisqu'il est nécessaire que l'enseignant ait accès

[1] Pour les classes de 10e et 11e les élèves sont répartis en 3 sections LS « Littéraire- Scientifique », LC « Langues et communication » ou CT « Communication et technologie ». La section LS est divisée en 3 profils : L « Latin », LV « Langues Vivantes » et S « Scientifique ».

à la partie recherche du travail de l'élève puisque c'est ce qui doit être évalué. Or comme Coppé (1998) l'a montré, entre ce que l'élève produit sur son brouillon et garde pour lui comme étant de l'ordre d'un travail privé et ce qu'il donne à voir à l'enseignant comme trace publique de son travail, il peut y avoir des différences importantes. Une des difficultés qui se pose alors est d'arriver à changer le statut de la recherche que fait l'élève, que ce dernier ne la restreigne plus au seul caractère privé de son travail mais qu'il la fasse apparaitre dans la trace publique qu'il va produire, à laquelle l'enseignant aura accès. C'est pourquoi le choix[2] a été de faire reposer l'évaluation certificative de ce cours sur le dispositif de la narration de recherche. Cette forme de travail a été pensée par ses initiateurs comme un moyen de porter une attention particulière aux démarches de recherche des élèves et de les promouvoir. La définition retenue dans le document cantonal de liaison est la suivante (DIP 2012, p. 22) :

> Il s'agit de faire raconter par l'élève lui/elle-même la suite des actions qu'il ou elle a réalisées au cours de sa recherche. Un nouveau contrat est passé avec l'enseignant–e : l'élève s'engage à raconter du mieux possible toutes les étapes de sa recherche, à décrire ses erreurs, comment lui sont venues de nouvelles idées ; en échange, l'enseignant-e s'engage à faire porter son évaluation sur ces points précis sans privilégier la solution.

L'établissement de ce nouveau contrat doit permettre à l'enseignant un accès à la partie recherche de l'activité mathématique des élèves. Cette pratique de la narration de recherche n'est pas récente et a donné lieu à des travaux en particulier dans les réseaux des IREM (Instituts de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques) et de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) depuis les années 70 (Bonafé & al. 2002; Chevalier 1992; Sauter 1998), mais aussi plus récemment dans certains manuels, ou encore sur le site Sésamath (http://www.sesamath.net/).

Selon le document cantonal, la résolution d'un problème procède d'une série d'étapes que sont l'appropriation de l'énoncé, le traitement des données et la communication des recherches et du résultat (DIP, 2012). La pratique de la narration de recherche permet donc de porter une attention particulière à l'étape « Communiquer convenablement son résultat, sa procédure ». En effet, en demandant aux élèves de rédiger une narration de leur recherche, il n'est plus seulement attendu d'eux qu'ils cherchent à résoudre le problème qui leur est posé mais aussi qu'ils racontent tout ce qui les aura menés jusqu'à une potentielle résolution. Ils doivent expliciter leur démarche, leur raisonnement, ils doivent produire un récit structuré, détailler exhaustivement toutes les étapes de leur recherche, de façon à ce que celle-ci soit intelligible pour le lecteur. Or cela n'est pas habituel en mathématiques. Comme on l'a dit précédemment, d'ordinaire, le travail de recherche est de l'ordre du travail privé de l'élève et n'est pas communiqué à autrui, n'apparait pas dans la production que l'élève remet à l'enseignant. L'élève n'est habituellement tenu que de fournir ce qu'il estime être une « bonne réponse », une réponse correcte au problème. Il garde ainsi pour lui les pistes, les essais et les fausses routes qui ont alimenté sa recherche. Ce travail d'explication de sa recherche à autrui peut donc d'une part fournir des informations à l'enseignant quant aux processus de résolution mis en œuvre par les élèves, mais d'autre part aussi s'avérer bénéfique pour les élèves eux-mêmes au sens où cela nécessite de développer un regard réflexif sur son propre travail. L'élève doit apprendre à dire ce qu'il fait ; à se regarder faire en quelque sorte et être capable de l'écrire. Il doit « penser sa propre pensée et être observateur de lui-même. » (Bonafé & al. 2002, p. 16). Nous pensons que la dimension réflexive pouvant émerger de ce travail communicationnel peut participer au développement de compétences en résolution de problèmes chez les élèves.

[2] Choix fait par les Présidents de Groupe (PG) c'est-à-dire les deux enseignants élus qui représentent les enseignants de mathématiques des 20 cycles d'orientation de Genève (un peu moins de 400 enseignants de mathématiques).

Mais cela soulève d’autres questions sur la forme de cette narration et sur les critères qui vont permettre d’évaluer « une bonne narration de recherche ». Peut-on dégager des critères d’évaluation généraux, indépendants des problèmes ? En quoi et comment le travail avec les narrations de recherche participe à la construction de savoirs mathématiques et lesquels ? Que doit-on et que peut-on évaluer, en termes de savoirs, savoir-faire, compétences relatifs à la résolution de problèmes ? Si l’on se place dans le cadre de la théorie des situations didactiques, quels effets de contrat peut-on attendre de l’introduction de ce nouvel objet dans le milieu ?

III. APPRENTISSAGES VISES PAR LES ACTIVITES DE DEMARCHE D’INVESTIGATION

Les instructions officielles du cours de « développements en mathématiques » préconisent que concernant les problèmes à proposer aux élèves, le choix des enseignants se porte sur des « problèmes ouverts ». En France, ce type de problème développé par Arsac, Germain et Mante (1988) continue d’influencer fortement le travail sur la résolution de problèmes. Par la confrontation à ces « problèmes ouverts » tels que

> l’énoncé est court ; l’énoncé n’induit ni la méthode ni la solution […]; le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité […] (Arsac, Germain & Mante 1988, cité par DIP 2012, p. 21)

On vise à amener les élèves à mettre en œuvre *la* démarche scientifique. Il s’agit bien là d’une des visées annoncées du cours de « développements en mathématiques » puisque à partir d’un objectif général qui est de traiter de « stratégies de résolution de problèmes et activités de situations mathématiques » (Ibid, p. 18), le travail relatif aux stratégies de résolution vise plus précisément à contribuer « à la mise en place de la démarche scientifique [et des] règles du débat scientifique » (Ibid, p. 18). Par « la démarche scientifique », il est entendu *« essayer-conjecturer-tester-prouver »*. Mais « mettre en œuvre la démarche scientifique » peut-il être considéré comme un objectif d’apprentissage ? Une évaluation visant à tester la transférabilité de cette démarche d’un problème à l’autre serait-elle valide ? Selon Hersant (2010) il y a un paradoxe dans ces dispositifs de démarches d’investigation, de problèmes ouverts, qui associent apprentissage de la résolution de problème en mathématiques et démarche scientifique, puisque la démarche scientifique est désignée comme un objectif d'apprentissage en mathématiques sans qu’il n'y ait d'explicitation des savoirs mathématiques précis en jeu dans cette démarche. D’autres chercheurs se sont intéressés à la question des savoirs visés par les activités mettant en jeu des démarches d’investigation (Schneider 2002) et ce notamment en questionnant la place de l’expérimentation en mathématiques (Giroud 2014 ; groupe ResCo 2014). Hersant (2010) remet par ailleurs en question l’unicité de la démarche scientifique sous-entendue dans les dispositifs étudiés. Selon elle, on ne peut pas parler de démarche scientifique comme triplet (essais, conjecture, preuve) en toute généralité. Pour Gandit (2015) on peut caractériser « une pratique scientifique authentique » en considérant quatre blocs d’actions que sont « expérimenter », « généraliser », « questionner » et « communiquer ». Elle précise par ailleurs que

> les savoirs en jeu sont relatifs à la validité des énoncés, la logique, la recherche mais ils sont aussi notionnels, sans que nécessairement, par rapport à un problème donné, on puisse toujours les identifier dans chacune de ces deux catégories. (Op. cité, p. 69)

Dans le cadre de ce cours, en confrontant les élèves à des activités mettant en jeu une démarche d’investigation on ne vise pas des apprentissages notionnels et conceptuels disciplinaires mais le développement de compétences (pour reprendre le terme utilisé dans les programmes) en résolution de problèmes. Finalement, les enseignants doivent enseigner à résoudre des problèmes à travers un enseignement par le problème.

On devine combien l'évaluation des narrations de recherche peut s'avérer difficile. Les réponses des élèves sont d'une grande variété tant sur la forme que sur le fond et *la* bonne réponse n'existe pas, ce qui constitue une difficulté à la fois pour l'enseignant au moment de l'évaluation, mais aussi pour l'élève qui peut peiner à savoir ce qu'on attend de lui dans un tel travail. Dans le but de limiter la subjectivité de l'évaluation (Gérard 2008) et de donner aux élèves des éléments leur permettant de situer leur travail par rapport à ce qui est attendu, il convient de définir les qualités, les critères de réussite d'une telle production. Pour cela un travail spécifique sur la détermination des objectifs visés s'avère nécessaire puisque l'explicitation de savoirs relatifs à l'activité de recherche, de résolution de problème détachée d'enjeux d'apprentissage de savoirs notionnels reste difficile et ne fait pas consensus (Hersant 2012). La détermination de ces critères doit prendre en compte les différents aspects du travail de narration d'une recherche soit, comme le préconise Sauter (1998), la forme c'est-à-dire la narration, et le fond à savoir la recherche, mais aussi nous semble-t-il la pertinence et le bon usage des outils mathématiques mis en jeu.

Notre travail de thèse (qui débute) va consister d'une part à problématiser la question de l'évaluation des compétences en résolution de problèmes mathématiques et d'autre part à proposer des outils d'évaluation qui seront testés dans les classes.

IV. DEVELOPPEMENT D'UN OUTIL D'EVALUATION SOMMATIF ET FORMATIF

Dans le but de permettre d'établir avec les élèves un contrat qui prenne également en charge la question de l'évaluation des narrations de recherche dans une visée de tendance formative, nous avons travaillé[3] à la constitution d'une grille qui dégage les critères importants déterminant les qualités d'une bonne narration. Notre but est non seulement d'obtenir une grille générale pouvant être modulée pour évaluer les narrations relatives à toute activité de démarche d'investigation, mais aussi que cette grille puisse être utilisée par les élèves, et qui, distribuée en début d'année, permette de porter à la connaissance de l'élève les critères de réussite, des éléments attendus de telles productions. Ce nouvel outil doit permettre à la fois de changer de regard sur l'élève et sur ses « erreurs » et de rendre explicite ce que doivent savoir les élèves, deux éléments essentiels de l'évaluation formative (Bloom 1968 ; Black & William 1998). Cette grille est un outil qui peut donc servir à la fois lors des évaluations sommatives, comme support pour l'enseignant afin de savoir quoi observer et de s'assurer de ne rien omettre dans la production de l'élève (Allal, 2008), mais aussi un outil pouvant permettre de favoriser la mise en œuvre de processus formatifs. En effet, une information, un retour ou encore ce que certains appellent un feedback peut ainsi être apporté à l'élève relativement à l'adéquation entre sa narration de recherche et les critères de réussite définis dans la grille. Ces feedbacks sont alors des sources potentielles de régulations, c'est-à-dire qu'ils sont susceptibles de déclencher des processus d'autorégulation chez l'élève (Allal, 1999). C'est pourquoi nous pensons que cet outil d'évaluation peut se situer dans une zone d'interface entre les évaluations formative et sommative (Allal 2011 ; Harlen 2012).

Cet outil peut aussi s'avérer performant pour mettre en œuvre des formes innovantes d'évaluations pouvant favoriser les processus d'autorégulation chez l'élève. On peut ainsi penser à de l'auto-évaluation, l'élève se basant sur la grille pour évaluer son propre travail, ou

[3] L'équipe ayant travaillé sur ce projet de conception d'une grille d'évaluation de narration de recherche était constituée de plus de Burgermeister Pierre-François, Coray Michel, Coutat Sylvia, Dorier Jean-Luc, Guex Jean-Pierre, Merminod Laurence et Northcott Katie.

encore à de l'évaluation entre pairs appelée aussi évaluation mutuelle, les élèves évaluant mutuellement leur travail avec la grille comme référentiel commun, ou enfin à de la co-évaluation, amenant l'élève et l'enseignant à confronter et discuter de l'évaluation que chacun aura faite du même objet, à savoir ici la narration de recherche de l'élève (Allal 1999).

Afin de constituer cette grille (annexe 1), nous nous sommes basés sur des grilles que les enseignants avaient eux-mêmes conçues en s'inspirant de diverses sources, et notamment de celle proposée sur le site Sésamath. Il est apparu d'après l'étude de ces grilles que l'attention des enseignants était majoritairement portée sur la forme, au détriment de la consistance de la narration et que les outils mathématiques et leurs usages étaient peu (voire pas du tout) pris en compte. Par ailleurs la question de l'appropriation du problème par l'élève, sa capacité à dégager les bonnes questions et les points importants, dans un langage approprié n'apparaissait que rarement. Seul éventuellement la « reformulation de l'énoncé » était évoquée comme un critère. Nous avons donc fait le choix de distinguer cinq dimensions principales pour définir les attendus d'une narration de recherche : la présentation, l'appropriation du problème, la narration (scindée en deux sous-parties), la recherche et la technique, et chacune de ces dimensions est décomposée en critères. Les cinq dimensions ont été pensées pour être applicables à toute activité de démarche d'investigation. Plus particulièrement, les trois premières (présentation, appropriation du problème et narration) peuvent être utilisées sans aménagement. Pour les deux dernières (recherche et technique), il est par contre nécessaire de moduler les critères correspondants. En effet, pour un problème donné, certains critères ne sont pas pertinents, ils ne doivent alors pas être pris en compte, et pour d'autres il convient de les préciser et de les adapter en fonction des objectifs et de pondérer leur poids dans le barème en fonction de leur importance dans le problème. En ce qui concerne les indicateurs permettant de rendre ces critères identifiables de façon concrète dans la copie de l'élève, il est laissé aux enseignants le choix de les déterminer, et ce notamment en fonction des problèmes proposés. Enfin, il n'y a bien sûr pas exhaustivité des critères que nous avons retenus et la grille est ainsi amenée à être complétée au fur et à mesure des problèmes rencontrés.

Cette grille n'est cependant que le point de départ d'un travail qui va s'amorcer avec deux enseignants dès la rentrée 2015, au sein d'une commission intitulée « Evaluation des travaux de narration de recherche » dans le cadre du cours de développement mathématiques en 10e LS et dont les objectifs sont :

- d'aider les enseignants chargés de ce cours d'évaluer des travaux nécessitant des critères spécifiques ;
- d'harmoniser les pratiques d'un cours comptabilisé comme une branche principale[4] dans le cursus des élèves de profil LS dans le règlement du cycle d'orientation ;
- de permettre de porter à la connaissance des élèves des attentes convergentes entre cycles d'orientation sur la manière d'évaluer ce genre de travail.

Pour cela, nous allons travailler de manière collaborative avec les enseignants. En nous appuyant sur leurs expériences tirées de la confrontation de cette première grille à la réalité de la classe, nous visons l'établissement d'un outil d'évaluation valide, pertinent, fiable et efficace d'un point de vue sommatif et qui permette de favoriser les processus formatifs, notamment par le recours à de l'auto-évaluation, de l'évaluation mutuelle ou encore de la co-évaluation.

[4] Cela signifie que ce cours est pris en compte pour l'orientation des élèves dans un des regroupements de niveau de la classe supérieure.

V. ETAT DES LIEUX DES PRATIQUES ENSEIGNANTES

Nous avons en parallèle cherché à mieux connaître les pratiques des enseignants pour la gestion de cette heure : à la fois concernant les types de problèmes proposés, la gestion de classe lors de ces activités, les modalités de travail, les types d'évaluation proposées, les critères d'évaluation utilisés. Pour cela, un questionnaire a été soumis aux enseignants dispensant ou ayant dispensé ce cours récemment. Il comprend trois thèmes principaux que sont :

- le choix des problèmes proposés : les critères pour choisir ou non un problème à soumettre aux élèves ; les savoir, savoir-faire ou compétences visés,
- l'évaluation du cours : les modalités de travail (en groupe, en individuel) ; leur fréquence ; le support (présentation orale, transparent projeté à la classe, cahier de recherche, etc.) ; le recours à d'autres formes d'évaluation (auto-évaluation, co-évaluation) ; le type de problèmes proposés en évaluation et leur lien avec ceux travaillés en classe ; les savoir, savoir-faire, compétences que les enseignants cherchent à évaluer,
- les narrations de recherche : leur recours lors de l'évaluation ; leur évaluation (utilisation de critères d'évaluation ou non) ; la communication aux élèves des critères de correction ; des exemples de critères utilisés.

L'analyse des réponses récoltées nous permet de mieux connaitre les pratiques des enseignants dans le cadre du cours de développements mathématiques notamment en ce qui concerne l'évaluation, et ainsi de disposer d'un matériau sur lequel s'appuyer pour débuter le travail de la commission.

Dans cette communication nous analysons plus particulièrement les réponses recueillies à ce questionnaire afin de présenter un bref état des lieux des pratiques enseignantes déclarées dans le cadre de ce cours dédié à la démarche d'investigation selon les trois axes présentés ci-dessus.

1. *A propos du choix des problèmes proposés*

En ce qui concerne les critères sélectionnés pour choisir un problème, il s'avère que les plus cités par les enseignants sont l'ouverture du problème (50%[5]) ; les notions mises en jeu dans le problème (34%) ; l'adéquation entre la difficulté du problème et le niveau des élèves (34%) et la motivation suscitée chez les élèves (21%). Les choix concernant les problèmes proposés semblent donc principalement liés aux objectifs d'apprentissage et à la réussite des élèves.

2. *A propos de l'évaluation*

Il ressort par ailleurs que la majorité des enseignants évalue plus fréquemment que ce qui est institutionnellement requis et qu'il y a peu d'implication des élèves dans l'évaluation.

En ce qui concerne les modalités d'évaluation, 64% des enseignants ne se basent que sur des productions écrites pour évaluer les élèves. Pour les autres, ils évaluent aussi un exposé, un acétate, une présentation orale, la participation à un débat (20%) ou bien la participation, l'attitude, l'implication, le respect des consignes (21%). 30% des enseignants n'évaluent que de façon individuelle, 7% n'évaluent que des travaux en groupe, 63% évaluent avec les deux modalités. Enfin une majorité attribue une note chiffrée à chaque évaluation (63%) et presque tous les enseignants utilisent les narrations de recherche pour évaluer leurs élèves (95%).

[5] Les pourcentages s'entendent par rapport au nombre total d'enseignants ayant répondu au questionnaire.

Les savoirs, savoir-faire, compétences qu'ils souhaitent développer chez leurs élèves sont très proches des instructions officielles sur les objectifs du cours (*mettre en œuvre la démarche scientifique ; respecter les règles du débat scientifique ; rédiger une narration de recherche ; connaître et utiliser différentes stratégies de résolution ; communiquer sa démarche, son raisonnement ; faire preuve de curiosité et d'esprit critique ; travailler en groupe*). Lorsque l'on pose la question cette fois concernant les savoirs, savoir-faire, compétences qu'ils souhaitent évaluer, on note une corrélation forte entre les deux, avec cependant quelques éléments divergents. Hormis *rédiger une narration de recherche* et c*ommuniquer sa démarche* (qui sont évalués mais pas travaillés), les enseignants ont tendance à dire vouloir développer des compétences, savoirs, savoir-faire chez leurs élèves sans chercher à les évaluer par la suite. A l'inverse, beaucoup veulent développer *respecter les règles du débat* mais ne l'évaluent pas.

3. A propos des narrations de recherche

En ce qui concerne les narrations de recherche, presque tous les enseignants utilisent des critères pour évaluer les narrations de recherche, beaucoup avec des critères très détaillés (86%) qu'ils communiquent à leurs élèves (91%). Les critères d'évaluation utilisés par les enseignants et communiqués aux élèves sont par exemple : l'exhaustivité, la sincérité, la pertinence du récit ; la structure de la narration, la clarté du récit ; l'appropriation du problème ; la mise en œuvre d'une démarche scientifique (faire des essais, des conjectures ou vérifier) ; l'utilisation d'outils mathématiques. On remarque ainsi qu'il y a plus de critères communiqués aux élèves sur l'aspect narration que sur la dimension recherche.

Pour réussir une narration de recherche, les enseignants considèrent que toutes les étapes du raisonnement doivent être détaillées et justifiées ; que le contenu du récit doit être pertinent par rapport au problème cherché ; que l'élève doit s'approprier le problème, que le récit doit être clair et structuré. Finalement, tous ces éléments portent presque exclusivement sur l'aspect narration, ce qui est cohérent avec les critères d'évaluation communiqués aux élèves.

Enfin les enseignants attribuent les difficultés mettant en échec leurs élèves à la dimension narration du travail (40%) (exhaustivité du récit, argumenter, justifier) ; à l'attitude (25%) (peu d'investissement, peu de persévérance) ; à la recherche, la résolution de problème (25%) (appropriation du problème, stratégie de résolution, relance sur de nouvelles pistes).

Pour conclure, les enseignants considèrent très majoritairement qu'évaluer les narrations de recherche est plus difficile qu'une évaluation classique, que les outils qui leur sont proposés pour évaluer s'avèrent insuffisants et souhaiteraient pouvoir favoriser davantage la responsabilité de l'élève dans son évaluation, par exemple en ayant recours à des démarches d'auto-évaluation, de co-évaluation, etc. Cela encourage donc à poursuivre les travaux traitant de ces thématiques, par exemple en investiguant l'existence d'une possible zone d'interface entre évaluations sommative et formative.

REFERENCES

Allal L. (1999) Acquisition et évaluation des compétences en situation scolaire. In Dolz J., Ollagnier E. (Eds.) *L'énigme de la compétence en éducation* (Raisons éducatives, 2, pp. 77-94) Bruxelles : De Boeck.

Allal L. (2008) Evaluation des apprentissages. In Van Zanten A. (Ed.) *Dictionnaire de l'éducation* (pp. 311-314) Paris : Presses universitaires de France.

Allal L. (2011, Juin) *« Assessment for learning » culture in the classroom… and beyong*. Communication à International Seminar on Assessment for Learning, Solstrand, Norvège.

Arsac G., Mante M., Germain G. (1988) *Problème ouvert et situation problème.* Lyon : IREM.

Black P., William D. (1998) Assessment and Classroom Learning, *Assessment in Education* 5(1), 7–74.

Bloom B.-S. (1968) Learning for Mastery. *Evaluation Comment* 1(2), 1-12.

Bonafe F., Chevalier A., Combes M.-C., Deville A., Dray L., Robert J.-P., Sauter M. (2002) *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*. Montpellier : IREM & Brochure APMEP, 151.

Chevalier A. (1992) Narration de recherche : un nouveau type d'exercice scolaire*. Petit x* 33, 71-79.

CIIP (2010) *Plan d'Etudes Romans.* Neuchâtel, Suisse : Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin. http://www.plandetudes.ch

Coppé S. (1998) Composantes Privées et Publiques du Travail de l'Élève en Situation de Devoir Surveillé de Mathématiques. *Educational Studies in Mathematics* 35 (2), 129-151.

Département de l'Instruction Publique, de la culture et du sport (DIP) (2012) *Spécificité cantonale, Mathématiques 10e LS profil S.*

Dorier J.-L., Maass K. (2014) Inquiry Based Mathematics Education. In Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 300-304). Heidelberg, New York, London: Springer Dordrecht,.

Gandit M. (2015) L'évaluation au cours de séances d'investigation en mathématiques. In Calmettes B., Matheron Y. (Eds.) Les démarches d'investigation et leurs déclinaisons en mathématiques, physique, sciences de la vie et de la Terre. *Recherches en Éducation* 21, 67-80.

Gérard F.-M. (2008) Les outils d'évaluation ouverts, ou la nécessité de clés de fermeture. In Baillat G., De Ketele J.-M., Paquay L., Thélot C. (Eds.) *Evaluer pour former. Outils, dispositifs et acteurs* (pp. 99-110). Bruxelles : De Boeck.

Giroud N. (2014) Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe. In Coppé S., Haspekian M. (Eds.) *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2013*. IREM de Paris, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), Paris, 69-84.

Groupe ResCo. (2014) La résolution collaborative de problèmes comme modalité de la démarche d'investigation. *Repères IREM* 96, 73-96.

Harlen W. (2012) On the relationship between assessment or formative and summative purposes. In Gardner J. (Ed.) *Assessment and learning* (2e éd.) (pp. 87-102). Londres : Sage.

Hersant M. (2010) Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques. *Mémoire complémentaire pour l'Habilitation à diriger des recherches.*

Hersant M. (2012) Recherche et résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques : une étude didactique pour identifier les savoirs et les apprentissages possibles. In Elalouf M.-L., Robert A., Belhadjin A., Bishop M.-F. (Eds.) *Les didactiques en question(s), états des lieux et perspectives pour la recherche et la formation* (pp. 192-202). Bruxelles : De Boeck.

Sauter M. (1998) Narration de recherche : une nouvelle pratique pédagogique. *Repères IREM* 30, 9-21.

Schneider M. (2002) Problèmes, situations-problèmes en mathématiques : un regard pluraliste. *Mathématique et Pédagogie* 137, 13-48.

ANNEXE

Dimensions	Critères	Barème
Présentation	Soin apporté au travail (propreté, écriture, …)	/1
Appropriation du problème	Dégager les données, les inconnues et l'objet de la recherche (reformuler l'énoncé en langue naturelle et / ou en utilisant des schémas)	/2
Narration - Fond	Consistance de la narration : chaque étape comprend une entrée en matière, un développement et une conclusion	/2
- Forme	• Clarté de la narration (fluidité et cohérence du propos) • Articulation des étapes (pas de saut ni de trou)	/2
Recherche	• Traduire le problème en langage mathématique, représenter la situation de façon mathématique • Dégager des pistes pertinentes, mettre en œuvre une méthode de résolution • Utiliser des outils, concepts, procédures mathématiques pertinents • Mettre en œuvre de façon efficace des changements de cadres, de registres ou de points de vue • Faire des conjectures plausibles • Tirer les conséquences d'une étape (valider, invalider) avant de passer éventuellement à la suivante • Interpréter le résultat mathématique en fonction du problème et évaluer sa plausibilité, sa validité dans le contexte du problème	/5
Technique	• Se donner les moyens de valider ou non une conjecture • Justifier correctement toutes les étapes du raisonnement • Expliciter les statuts des énoncés mathématiques (données, observations, conjectures, résultats importés du cours, résultats argumentés, …) • Maitriser les outils et concepts mathématiques utilisés (calculs, graphiques, tracés géométriques, notations, unités)	/3
	Total	/15
	Note : 1 + (Total/3)	/6

***Annexe 1 -** Grille d'évaluation des narrations de recherche*

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LE DEBAT SCIENTIFIQUE EN CLASSE : UNE DÉMARCHE D'INVESTIGATION COLLECTIVE POUR UNE CULTURE SCIENTIFIQUE COMMUNE

Grégoire CHARLOT* – Thomas LECORRE** – Marc LEGRAND – Antoine LEROUX – Hélène DI MARTINO

Résumé – Ce texte présente le « débat scientifique », méthode didactique constructiviste qui s'inspire de la façon dont les chercheurs travaillent en collaboration. Nous présentons un historique qui montre l'évolution de ses principes. Nous évaluons sa capacité à réaliser les objectifs qu'un enseignant peut attendre de la pratique par ses élèves de démarches d'investigation.

Mots-clefs : débat, dévolution, contrat, obstacle épistémologique

Abstract – This text presents the "scientific debate" constructivist teaching method which is based on how researchers work together. We present its history that shows the evolution of its principles. We value its ability to realize the goals that a teacher could expect from the practice by its students of investigative approaches.

Keywords: debate, devolution, contract, epistemological obstacle

Le « débat scientifique » est un outil pédagogique permettant à un enseignant d'amener sa classe à avoir une culture commune en terme de connaissances et de pratique de la démarche scientifique. Pour prendre en main cette pratique didactique, le professeur doit seulement être prêt à se saisir des outils que la didactique met à sa disposition pour se donner le recul nécessaire quand on souhaite progresser dans une démarche aussi ambitieuse ; il doit en particulier prendre en compte les notions de contrat didactique et d'obstacle épistémologique qui l'aideront à ne pas se leurrer sur l'authenticité des démarches scientifiques de ses élèves.

Dans la suite, nous commençons par un historique des évolutions du débat scientifique motivées par les obstacles à son fonctionnement qui sont apparus au fil de ses transformations. Nous en profitons pour présenter les principes du débat scientifique. Puis nous proposons un exemple de débat sur la notion de limite dû à T. Lecorre. Nous situerons ensuite le débat scientifique par rapport aux questions posées dans le cadrage du GT10. Enfin nous présenterons le contenu de l'exposé qui est motivé plus particulièrement par la question de la transmission de cette pratique pédagogique.

* Institut Fourier et IREM Grenoble – France – charlot@ujf-grenoble.fr.
** IREM de Grenoble – France - thomas.lecorre@wanadoo.fr, marc.legrand@ujf-grenoble.fr, antoine.leroux@ac-grenoble.fr, helene.di.martico@wanadoo.fr

Charlot G. , Lecorre T, Legrand M., Leroux A., Di Martino H. (2015) Le débat scientifique en classe : une démarche d'investigation collective pour une culture scientifique commune. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT10, pp. 847-860.

I. RETOUR HISTORIQUE SUR LE DEBAT SCIENTIFIQUE

Ce principe est l'aboutissement de trois phases de recherches et expérimentations dans le secondaire et le supérieur.

1. Première phase (1965-1985) : phase maïeutique

La classe est présentée aux élèves comme une communauté scientifique dans laquelle, une fois le cours effectué, les exercices et problèmes sont traités en invitant les élèves à s'adresser à leurs pairs et non au professeur pour leur dire ce qu'ils pensent être pertinent et vrai ; dans cette organisation, la communauté classe joue une rôle important pour qu'on apprenne à donner sens au théorique et à l'abstrait en en parlant d'abord avec ses mots propres et ses idées personnelles puis en épousant progressivement le vocabulaire et les conclusions du professeur. On trouve ainsi dans Legrand et al. (1985) :

« Pour éviter les conséquences pathologiques d'un apprentissage dans lequel bien souvent les réponses précèdent les questions, nous pensons que la communauté classe doit connaître et reprendre à son compte, en les adaptant, les méthodes de travail de la communauté scientifique »

On arrive progressivement à parler en cours « un peu tous de la même chose » et l'écart entre ceux qui suivent assez spontanément le prof et les autres ne devient pas tel que toute proposition de déduction logique collective soit vaine.

Cette sorte de maïeutique socratique collective peut fonctionner puisqu'à chaque instant le professeur joue un rôle décisif pour trancher face aux contradictions et orienter le débat vers la solution institutionnelle.

2. Deuxième phase (1985-2000) : phase de recherche de situations fondamentales

La prise en compte de la « théorie des situations » et notamment du rôle du contrat didactique dans la construction du sens par l'élève montre la faiblesse de l'organisation didactique précédente au niveau d'une effective dévolution d'une responsabilité scientifique aux élèves. Les recherches sur le « débat scientifique en cours » s'organisent alors autour de la recherche de suites de situations fondamentales permettant d'aborder les grands concepts en donnant une beaucoup plus grande responsabilité scientifique à la classe, en particulier aux moments les plus cruciaux où les savoirs se présentent aux élèves comme des obstacles épistémologiques.

> Même lorsqu'on ne trouve aucune situation vérifiant strictement les conditions fondamentales de G. Brousseau, ... la problématique de recherche de situations fondamentales demeure consistante pour la recherche en didactique comme pour l'enseignement. (Legrand 1996).

L'obstacle « épistémologique » qui s'érige alors pour le formateur est : comment faire la dévolution aux professeurs de ces situations très complexes alors qu'ils ne les ont pas construites et que tous les gestes constructivistes, qu'ils vont devoir adopter à chaque instant pour que la philosophie et la dynamique de la situation soient respectées, vont contre les réflexes monstratifs qui sont les leurs ?

Si pour aider le professeur on détaille toute la suite des gestes à prendre en compte, la suite des situations se présente alors assez vite à lui comme une véritable usine à gaz !

L'obstacle est double. D'une part ce professeur « consommateur » de « débats préconstruits » risque de ne pas comprendre la signification profonde d'un certain nombre de gestes en apparence anodins et qui, mal compris, peuvent modifier très profondément la situation jusqu'à la rendre démesurément complexe ou au contraire quasi insignifiante. D'autre part, comme dans d'autres ingénieries didactiques complexes, l'attention que ce professeur porte à respecter le cahier des charges de la situation (potentiellement immensément lourd) risque de lui faire perdre la disponibilité d'esprit qui lui serait nécessaire pour qu'il puisse entendre véritablement ce que les élèves avancent et le prendre en compte de façon non biaisée quand ils énoncent ce qu'ils pensent réellement.

Pris par le souci d'avancer résolument dans la direction voulue, ce professeur a beaucoup de mal à donner toute sa place aux propositions dont la discussion serait susceptible d'apporter un enrichissement décisif à la compréhension collective de la situation, mais qu'il a du mal à entendre et/ou à situer dès lors que ce qui est proposé ne va pas du tout dans le sens qui avait été envisagé.

Le débat des élèves devrait porter sur ce que les élèves pensent véritablement et s'enrichir d'un apprentissage in vivo du « comment exploiter les contradictions qui naissent d'une mauvaise interprétation de la situation pour se rendre compte que ce qu'on suppose être les données du problème, ou le problème lui-même, en est un autre » (ce qui provoque en général une perte totale du sens de la situation tant que cela n'est pas abordé). Privé de la disponibilité d'esprit du professeur, le débat qui se voulait authentique au niveau épistémologique risque peu à peu de se ramener, par effet de contrat, à l'épistémologie scolaire.

Ainsi, contre son intention déclarée, le professeur reprend insidieusement l'essentiel de la responsabilité intellectuelle que toute cette organisation didactique complexe avait pour fonction la dévolution aux élèves.

3. *Troisième phase (2000-2015) : phase de préparation1*

Depuis 2000 l'essentiel de nos recherches ont pour objet de prendre directement en compte l'obstacle épistémologique précédent. Dans cette réorientation de la fonction du débat, l'objectif premier devient alors davantage de nature préparatoire, en ce sens que l'important va maintenant être prioritairement de travailler un milieu qui favorise une prise de responsabilité intellectuelle, i.e. travailler ce que la communauté classe sait et ne sait pas en amont d'un savoir nouveau important et délicat à saisir, travailler cet ancien qui à la fois permet d'accéder à la connaissance nouvelle mais aussi empêche de lui donner le sens qui convient (obstacle épistémologique).

Il s'agit maintenant de faire ce travail de « révision » en adoptant une méthode plus scientifique que scolaire pour l'élève comme pour le professeur :

- L'élève est invité à rectifier/compléter ce qu'il connaît parce que le débat fait apparaitre des manques et des contradictions et non parce que le professeur l'exige (similitude d'esprit avec la notion de situation fondamentale).

- Le professeur, lui, n'est pas ligoté par une organisation trop finement préconçue mais dispose par contre d'une méthode qu'il va pouvoir perfectionner débat après débat, s'il accepte d'être le maître d'un jeu dans lequel il choisit le niveau des initiatives et des risques qu'il peut prendre et faire prendre à la communauté intellectuelle classe dans un premier temps. Il fait cela avec plus ou moins de conscience sur le champ car il ne peut faire autrement, mais avec de plus en plus de

[1] La question du nom de cette nouvelle forme du débat pose question : Pré-cognitif ? Préparatoire ? Chaque mot contient ses sous-entendus. Pré-cognitif, le nom choisi par le groupe, a fait réagir assez négativement la communauté, comme semblant indiquer une absence d'activité cérébrale, ce qui n'est bien sûr pas le sens visé.

> conscience s'il s'oblige à faire après coup un travail didactique réflexif - donc assez objectif et non culpabilisant.

Ainsi, sous cet angle préparatoire, le professeur quand il ouvre un débat n'est pas tenu en conscience de le faire déboucher sur un résultat important prévu à l'avance, mais seulement de faire en sorte que ce débat rapproche un peu plus la culture de la classe de la culture d'une authentique communauté intellectuelle. A certains moments il travaille seulement à libérer les élèves, et lui-même en tant que professeur, du diktat d'une épistémologie scolaire a priori omniprésente.

Si cette pratique de débat devient coutumière, le professeur pourra organiser des débats sur des points qu'il sait être très sensibles et qui interdisent toute vie scientifique en classe tant qu'ils n'ont pas été abordés en tant que tels ; chaque élève découvrira par l'expérience qu'à ces moments régis par le contrat du débat, au lieu de cacher ce qu'il pense (ou ne pense pas) derrière « ce qu'il faut penser », il vaut la peine pour lui de s'interroger sur ce qu'il pense en propre de la situation en tant que réalité du monde et d'oser le mettre en débat avec ses pairs.

Dans cette confrontation d'idées et de points de vue chacun sait que personne n'a autorité pour déclarer le pertinent et le vrai (puisque contrairement au débat scientifique maïeutique de la première génération, le professeur est ici très neutre sur le fond) ; c'est donc finalement la (non)conformité du discours de chacun à la réalité sur laquelle ce discours porte, qui va permettre de trancher : chacun pourra alors se rendre un peu mieux compte en quoi et pourquoi ce qu'il tient spontanément pour pertinent et valide est ou non adapté pour décrire la réalité évoquée (on quitte un moment le diktat de l'épistémologie scolaire pour se mouvoir dans un univers plus propice à la science) .

Dans cette nouvelle orientation préparatoire du « débat scientifique en cours » on est bien entendu très heureux si un débat aboutit à la bonne définition ou sur un beau théorème, mais là n'est pas le but ; l'important est bien davantage que beaucoup d'élèves aient compris qu'en science il y a la nécessité de préciser, de modéliser, de définir et de conjecturer pour avancer, il est essentiel que beaucoup aient compris qu'aucune définition/modèle simpliste, aucun énoncé vague et trop en langage courant ne permet d'entrer dans le jeu de la preuve, ne permet de dépasser par la raison ambiguïtés, paradoxes et contradictions !

Le professeur est débarrassé de son intention paradoxale de ne pas guider directement les élèves tout en les faisant avancer là où ils n'iraient jamais seuls par un système complexe d'actions-rétroactions qui doivent pour produire les effets attendus pouvoir bien s'agencer (ordre souvent imprévisible dans un débat non manipulé insidieusement). Il peut centrer son attention sur les reformulations collectives et les votes qu'il va falloir organiser pour que, dès qu'un élève soulève un vrai problème, on puisse travailler in vivo sur ce qu'il est indispensable de mettre au clair : si on ne parle plus de la même chose ; si on est en désaccord sur un savoir décisif qui ne devrait plus poser problème. Ceci afin que les élèves mettent le plus possible le même sens sur le travail scientifique collectif.

Contrairement à ce qui, dans la phase 2, poussait à l'extrême la complexité de l'organisation de débats successifs conduisant de façon cohérente et logique la classe vers le résultat final, on accepte ici que, une fois cette base commune de connaissances assez solidement établie, le professeur n'a pas à s'obliger à prolonger de façon plus ou moins acrobatique le débat pour faire avancer le cours avec le concours des élèves. S'il pense que le milieu, en terme de science, est assez riche, il va clore le débat par une institutionnalisation très cadrée. Celle-ci s'appuie sur le débat, pour stabiliser le milieu de telle sorte qu'il puisse avancer lui-même un morceau de cours sans provoquer de rupture épistémologique avec la pensée des élèves ; et il avance ainsi jusqu'au moment où il estime qu'il lui faut à nouveau mettre au clair et stabiliser le milieu qui vient d'être enrichi des nouveaux objets ou de nouveaux modes de raisonnement qu'il vient d'introduire sans faire intervenir les élèves.

Pendant ces phases monstratives, l'élève ne peut bien entendu exercer qu'une très faible responsabilité intellectuelle, il fait donc assez aveuglément confiance au prof, mais ce que le professeur propose ou montre n'est pas une incantation sans rapport avec les questions soulevées dans le débat antérieur, le vocabulaire et les objets utilisés pour montrer ne sont pas étrangers, l'élève sait que tout cela parle d'un monde qui a été évoqué et sait qu'il va à terme être possible de questionner seul ou avec ses pairs ces nouveaux savoirs pour découvrir par la raison ce qu'ils disent et ne disent pas sur le monde.

De façon empirique, il apparait que la dévolution au professeur qui le souhaite de cette pratique de débat scientifique préparatoire est beaucoup plus accessible que les deux précédentes car pour « s'y mettre » il peut adopter un schéma évolutif du type suivant :

A partir d'une situation fondamentale que nous nommons « Circuit ou les règles du débat mathématique », situation très robuste qui peut être honnêtement gérée par un professeur qui en a saisi la philosophie sans encore connaître en détail ce mode didactique, il est relativement aisé pour le professeur de commencer à engager de vrais débats scientifiques à brûle-pourpoint à partir des questions d'élèves du type « a-t-on le droit de… ? » ou de propositions erronées que l'on retrouve répétées en grand nombre dans les copies d'élèves. Il peut alors transformer ces questions de droit en conjectures « on a le droit de …. » soumises à la critique de la classe. Ce type de débat sur propositions d'élèves a en général l'avantage de la pertinence : il fait jaillir des malentendus qui existent dans une classe à un niveau et dans une proportion que le professeur ne pouvait soupçonner tant en terme de résultats faux tenus pour vrais, que de résultats exacts tenus pour tels pour des arguments dérisoires.

Fort de ces prises de conscience le professeur va d'année en année mieux subodorer les endroits où ces dérapages de sens vont pouvoir être mis au grand jour s'il se met à poser par le biais des conjectures des questions naïves sans indiquer le moins du monde la réponse attendue. Ce faisant le professeur va de plus en plus tôt dans l'étude pouvoir structurer sa classe en communauté intellectuelle dans laquelle chacun a expérimenté tout ce qu'il a à gagner s'il s'inscrit dans ces débats qui vont lui permettre de débusquer les malentendus potentiels qui se sont éventuellement installés à son insu et de faire cela à un moment où ils n'ont pas encore fait de dégâts irréversibles.

Par effet d'entraînement bon nombre de celles et ceux qui ne s'engageaient pas au début par peur de montrer leurs erreurs vont découvrir que c'est précisément la possibilité de discuter de façon non déshonorante de ces erreurs de sens (de découvrir que les leurs sont aussi celles de beaucoup de pairs) qui est le plus enrichissant, certains vont alors faire un premier pas qui est en général suivi de beaucoup d'autres !

II. SCHEMA D'UN EXEMPLE DE DEBAT SCIENTIFIQUE

Afin de rendre plus concret ce que peut être un débat scientifique dans ce nouveau format (noté DSP), on se propose de présenter rapidement un débat sur la notion de limite qui a été expérimenté à de nombreuses reprises par Thomas Lecorre en classe de Terminale puis par Grégoire Charlot en L1 (Lecorre 2015). Le but de cette situation est d'amener les élèves à réclamer eux-mêmes une formalisation de la notion de limite rencontrée initialement sous la forme "tend vers" ou "se rapproche de". Il s'agira ensuite au professeur de proposer le formalisme en epsilon/alpha puis de le faire éprouver aux élèves sur des conjectures où il servira d'outil de preuve. Voici de façon très schématique le déroulé accompagné de quelques éléments sur l'attitude de l'enseignant et des élèves. La première conjecture a deux objectifs :

amener l'élève à s'interroger sur le rapport entre ordre des limites et ordre des fonctions qui constitue la charpente de la situation mais aussi à s'interroger sur le moyen de formaliser la notion de voisinage en l'infini.

Conjecture 1 : Si la limite en + infini de f est inférieure à la limite en + infini de g alors $f(x) < g(x)$ pour tout réel x.

Temps de réflexion + vote : consensus pour dire faux après une discussion rapide. Propositions de contre-exemples sous forme de dessin. Débat sur la validité de proposer une preuve par un dessin. Certains élèves sentent la nécessité de proposer un contre-exemple sous forme analytique.

Appel à réparer la conjecture en demandant de garder le début de la phrase. Plusieurs propositions débattues qui finissent pas aboutir à une conjecture proche de :

Conjecture 2 : Si la limite en + infini de f est inférieure à la limite en + infini de g alors il existe K tel que pour tout $x > K$ on trouve $f(x) < g(x)$.

Institutionnalisation, en particulier à propos du « il existe K tel que pour tout $x > K$ on trouve $f(x) < g(x)$ » : règles d'emploi du quantificateur existentiel.

A ce stade les élèves pensent crédible la conjecture 2 mais n'ont pas de démonstration.

Le professeur propose alors une fonction f et une fonction g qui ressemblent à un contre-exemple de la conjecture 2 pour quelqu'un qui ne dispose pas du formalisme permettant d'être certain que cette situation ne relève pas de la conjecture (f n'a en fait pas de limite). Il s'agit, en fait, d'organiser la prise de conscience de la confusion qu'implique l'absence de définition de limite.

Institutionnalisation : constatation qu'avec la définition de limite par « ça tend vers » on n'arrive pas à se mettre d'accord. Présentation de la définition de limite en + infini. Exemple simple.

La suite de la situation didactique consiste à éprouver le formalisme dans des cas simples et à démontrer la conjecture initiale (C1) dans un cas particulier.

Conjecture 3 : Si limite en + infini de f est 1 alors il existe A tel que pour tout $x >$ A on ait $f(x) > 0{,}6$.

Débat. Propositions de preuves. Les élèves arrivent à se mettre d'accord que c'est vrai.

Conjecture 4 : Si limite en + infini de f est 1 et si limite en + infini de f est 4 alors il existe A tel que pour tout x>A on ait f(x)<g(x).

Débat. Propositions de preuves. Les élèves sont convaincus que c'est vrai.

Institutionnalisation.

III. DEBAT SCIENTIFIQUE PREPARATOIRE, DEMARCHES D'INVESTIGATION, ROLES DE L'ENSEIGNANT ET DE L'ELEVE

1. Débat scientifique préparatoire et démarche d'investigation

Le DSP, à la différence de la plupart des autres démarches d'investigation, est une activité commune à l'ensemble de la classe. On s'appuie sur le collectif pour faire avancer la connaissance et construire une culture mathématique commune. L'investigation est prise en charge dans la partie débat du DSP.

Le DSP est un outil pour la construction du cours. On lit ainsi dans Legrand et al (2011).

> La place du "débat scientifique en cours" est d'arriver à donner à la majorité des étudiants "réels "... la possibilité de construire un sens profond effectif sur les points essentiels du programme couvert.

Dans le cadre de l'évaluation formative, le DSP peut prendre en charge l'évaluation des rédactions individuelles. Par exemple, à partir d'un schéma de preuve construit par le professeur en corrigeant ses copies, il peut proposer au jugement du groupe classe une démonstration où figurent des inférences valides ou non, complètes et /ou superfétatoires ; après étude individuelle le débat permet à chacun d'évaluer tout ou partie de cette rédaction faite de bribes de propositions individuelles, ce qui permet alors une correction collective des travaux individuels où tous trouvent du grain à moudre : ceux qui ont été droit dans le mur bien sûr, mais aussi ceux qui ont évité les erreurs sans vraiment savoir pourquoi. Comme on ne désigne personne (il s'agit d'une preuve reconstituée), on peut enfin travailler sur le sens profond et les vraies raisons des erreurs les plus importantes et récurrentes.

Par contre, le DSP étant un travail collectif de la classe, il ne peut prendre en charge le travail individuel tel que les exercices ou le travail bibliographique, ce que permet, par exemple, un apprentissage par problème (APP) ou un travail sur projet. Il ne prend pas en charge l'acquisition d'une culture critique sur ses rapports aux médias. Il ne forme pas non plus à la rédaction d'article, de compte rendu ou d'exposés et n'est pas adapté à l'évaluation sommative.

Pour ce qui concerne la prise en charge de la modélisation par les élèves, le professeur peut choisir de travailler sur un problème ad hoc, non modélisé mathématiquement s'il veut un travail autour de cette activité. Il peut aussi proposer des conjectures mathématiques mais formulées de façon floue. Bien sûr, le DSP ne peut pas prendre en charge la modélisation des problèmes qui nécessitent un travail bibliographique.

Dans la phase de débat du DSP, la responsabilité des élèves est importante, l'enseignant n'intervenant pour orienter le débat que par le biais des conjectures travaillées (en en proposant ou en choisissant certaines proposées par la classe) et la gestion du temps. Il s'interdit en particulier d'apporter quelque indication que ce soit sur le déroulé du débat, si ce n'est en soulignant les positions antagonistes afin de faire vivre le débat. L'argumentation, la preuve et plus généralement la pratique de la logique sont au cœur du DSP. Il arrive régulièrement que les élèves eux-mêmes fassent des interventions meta, pour se positionner par exemple contre un type de raisonnement qu'ils jugent non pertinent dans le cadre étudié.

Dans la phase d'institutionnalisation au contraire l'enseignant, tout en s'appuyant fortement sur ce qui a été discuté en débat, reprend la position classique du professeur responsable du vrai et du faux. Il est dans un cadre très favorable pour faire du meta en s'appuyant sur le contenu du débat. La forme de cette phase qui, dans le format proposé, ne laisse la parole qu'à l'enseignant peut poser question : pourquoi ne pas permettre durant cette phase un échange entre enseignant et élèves ? Le choix qui est le nôtre a pour objet de protéger la partie débat : un échange entre classe et enseignant durant lequel l'enseignant se permettrait de corriger les affirmations des élèves ou de répondre à leurs questions pourrait polluer fortement la phase du débat où les élèves pourraient attendre de l'enseignant qu'ils intervienne, qu'il juge, qu'il complète.

Empiriquement, le DSP prend en charge la diversité des élèves. On observe que certains bons élèves sont bousculés dans le confort du contrat didactique classique, alors que d'autres élèves très fragiles se libèrent totalement et produisent des interventions très intéressantes voire lumineuses. Par exemple, lors d'un débat sur la limite, Thomas Lecorre a pu voir une élève habituellement en difficultés faire la preuve complète « avec des epsilon » de la conjecture 4 (et se faire ovationner par la classe).

En fonction des objectifs qu'il s'est fixés, l'enseignant choisit ou pas d'expliciter les savoirs visés. Les conjectures peuvent être proposées de façon imprécise pour faire travailler la modélisation ou au contraire, si ce n'est pas jugé pertinent il peut rigidifier le contexte.

Les apprentissages visés sont de deux ordres :

1) la connaissance et la compréhension des définitions et résultats du cours ;
2) l'attitude scientifique des élèves, puisqu'il s'agit de la rapprocher de celle des chercheurs travaillant en collaboration. Cette attitude scientifique implique une progressive prise en charge de la rigueur du maniement des outils logiques et du raisonnement mais aussi une capacité pour les élèves à collaborer efficacement en adoptant collectivement une posture d'exigence forte sur le plan scientifique.

Il est certain ... que la communauté scientifique que nous introduisons en classe est fortement idéalisée, que le débat qui s'y déroule n'est certainement pas celui d'une communauté scientifique et que néanmoins ce débat et cette communauté jouent un rôle prépondérant dans le système didactique étudié (Legrand 1990)

L'utilisation du temps n'est pas la même que pour les APP : comme pour les SiRC, le travail a lieu uniquement en classe et n'induit a priori pas de travail de type bibliographique, à la différence des APP, ni de travail en petits groupes hors du temps scolaire, à la différence des projets proposés massivement en école d'ingénieur. Par contre, un DSP peut se tenir sur plusieurs séances (4 à 8 heures pour le débat sur la limite).

2. *Milieu et position du professeur dans un débat scientifique préparatoire*

La question de la position du professeur lors d'un DSP a été discutée plus haut dans la partie historique. Durant la partie débat, il doit ne pas téléguider les élèves vers l'objectif afin de préserver le milieu des élèves d'un risque de retour du contrat didactique scolaire ; il ne doit pas pour autant laisser le débat errer sans but et est armé pour cela de la possibilité de proposer des conjectures, des votes et de décider le temps dédié à chaque partie du débat.

La question de l'évolution du milieu de l'enseignant est difficile, elle a motivé les évolutions du débat scientifique et mobilise notre équipe depuis longtemps. Il semble nécessaire que l'enseignant soit conscient des limites et des manques importants d'une pratique uniquement non constructiviste de l'enseignement, ou au moins qu'il ne se fasse pas d'illusion sur la capacité de ses élèves à procéder d'une véritable démarche scientifique. Pour que la pratique du DSP puisse se transmettre, plusieurs conditions semblent nécessaires. Dans un premier temps il faut convaincre que c'est un objet intéressant qui permet de faire évoluer la culture scientifique de la classe (et c'est l'objet du débat qui sera proposé lors de la présentation de l'EMF2015) : faire pratiquer en tant qu'élève un débat, visionner un débat ou lire le script d'un débat, afin de faire vivre ou de faire voir l'intérêt pour les élèves et l'enseignant. Ensuite, l'appropriation de la technique peut se faire en suivant le « programme » proposé plus haut. Il semble aussi important que l'enseignant fasse sienne la liberté que lui donne la version préparatoire du débat scientifique.

3. *La position de l'élève dans un débat scientifique préparatoire*

Comme vu plus haut l'apprentissage des élèves et du groupe classe est principalement de l'ordre des connaissances et de leur compréhension, de la pratique de la logique, de l'attitude et de la démarche scientifique.

La responsabilité dévolue à l'élève et à la classe est de faire vivre et progresser le débat mais aussi de faire monter son niveau d'exigence en terme de logique et de raisonnement, de communication à l'intérieur du groupe classe et de compréhension afin de faire éclore une culture commune suffisante sur le problème étudié :

Pour entendre en compréhension une proposition scientifique, il faut douter de sa vérité et de sa pertinence, il faut se sentir dans l'obligation d'exercer sur elle une réelle vigilance épistémologique. (Legrand 1993)

Le choix des moyens est réduit puisque la pratique du débat est relativement balisée. Par contre le développement du débat lui peut être assez libre, en fonction des choix du professeur. Il est arrivé à Thomas Lecorre de laisser vivre un débat pendant une heure, sans introduire de nouvelle conjecture, parce qu'il le trouvait très riche.

Comme mentionné plus haut, après une pratique régulière, on observe un changement d'attitude, lors des débats au moins. Il n'est pas rare de voir des élèves exiger de définir un objet jusque là mal précisé ou la preuve d'une « évidence » énoncée par un autre élève. Et certains d'utiliser des arguments meta. Mais c'est le statut de l'erreur qui se modifie le plus rapidement. L'incertitude et le doute initialement refoulés par les élèves acquièrent progressivement droit de citer et deviennent partie intégrante d'une démarche scientifique fondée sur le tri entre le nécessaire et le contingent, entre le certain et l'incertain. Ainsi le professeur, beaucoup plus au fait des difficultés rencontrées qui ne sont plus masquées par les inhibitions mais font partie intégrante du processus d'élucidation, pourra ultérieurement proposer de retravailler ces aspects émergents du débat qu'il aura ainsi repérés. De plus les erreurs ne sont plus cachées et apparaissent comme valorisées par la communauté classe pour avancer dans le débat. Elles apparaissent en profusion et de façon beaucoup plus claire pour l'enseignant qui peut en profiter pour faire son marché afin d'en discuter plus tard (surtout pas pendant la phase de débat en cours) ou mettre en débat via une conjecture si une contradiction est exprimée dans le groupe.

Enfin, la pratique régulière du DSP permet de développer une culture commune à la classe en terme, à la fois, de connaissances et de pratique de la démarche scientifique.

IV. PRESENTATION PROPOSEE

Dans le cadre du GT10 de l'EMF2015, Grégoire Charlot a proposé une présentation composée dans un premier temps de l'expérimentation d'un débat et dans un deuxième temps d'une discussion sur quelques points : position de l'enseignant et de l'élève, dévolution du débat scientifique aux collègues.

Le DSP que nous proposons est un débat sur des mathématiques de niveau Master. Il a pour objectif d'être un outil de dévolution aux enseignants du DSP. L'idée qui a guidé à sa création est de mettre les enseignants en position d'élèves, en les faisant travailler sur des mathématiques qu'ils ne connaissent pas (de niveau Master 2), pour leur permettre de vivre de l'intérieur un DSP et de se rendre compte de l'efficacité de ce procédé didactique. On peut trouver les transparents en annexe de ce texte.

Plusieurs critiques sont apparues :

- concernant ce texte, la question du nom choisi (que nous avons finalement changé pour le texte tel que présenté) a posé question : « débat scientifique pré-cognitif ». Ce terme « pré-cognitif » a été mal reçu par les membres du GT10, parce qu'il peut donner l'impression que les élèves n'ont aucune activité intellectuelle pendant la phase de débat alors qu'au contraire ils sont pleinement en activité. La question du nom est une question qui est effectivement problématique, un nom donnant toujours une vision réductrice d'un objet forcément plus complexe. Par exemple celui finalement choisi, *débat scientifique préparatoire,* pourrait laisser à penser qu'il se rapproche d'une activité préparatoire alors qu'il est bien plus ambitieux en terme d'activité mathématique comme nous l'avons discuté plus haut.

- Toujours concernant le texte, il a été discuté assez fortement le caractère strict de la rupture entre la phase de débat, où les élèves font vivre la discussion, argumentent, votent, etc. et la phase monstrative où les élèves n'ont plus du tout la parole et où l'enseignant, tout en s'appuyant sur ce qui a été discuté en débat, prend en charge le vrai et le faux. Pourquoi ne pas permettre aux élèves d'interroger l'enseignant ? Pourquoi ne pas permettre à l'enseignant de répondre rapidement à une question ? Cette rupture nous semble très importante. Elle est indispensable pour protéger la phase de débat. Il ne faut pas que la confusion puisse se faire entre les deux phases. Ni que les élèves puissent s'appuyer sur les connaissances de l'enseignant pour revenir doucement à une position plus classique d'élève qui reçoit de la connaissance sans vraiment en prendre en charge la question du vrai et du faux ou celle de l'appropriation véritable d'une notion. Le format actuel permet à l'enseignant, dans la partie monstrative, soit de fixer ce qui a été établi collectivement, soit de partir du constat d'un obstacle épistémologique pour proposer une solution mathématique à cet obstacle qui est en général retravaillée après en mode débat.
- Ensuite, le DSP proposé n'a pas convaincu tout le monde quant à ses qualités. Tel que présenté il n'a pas convaincu certains collègues quant à sa capacité à être un bon média de dévolution. D'abord le format (1 heure d'exposé alors qu'il aurait fallu au moins deux ou trois heures) n'a pas permis de le faire vivre dans le format prévu. Il a alors semblé trop proche d'une activité d'introduction classique plus que comme un débat scientifique préparatoire au sens vu plus haut : il n'a pas permis suffisamment de faire travailler sur la problématique générale proposée. Il n'a pas permis de mettre en évidence les obstacles épistémologiques, dont le fait qu'on arrive parfois à remplir l'espace avec seulement deux vecteurs. D'autre part, sous la forme présentée, l'encadrant doit parachuter le crochet de champs de vecteurs sans que le groupe ne se soit suffisamment approché de l'objet. Pour conséquence, son objectif qui était d'être un objet de formation initiale ou continue n'a pas convaincu. Ces dernières critiques nous ont, en grande partie, convaincus et nous amèneront certainement à revoir la copie et à retravailler l'activité.

REFERENCES

Legrand M. et al. (1985) *Apprentissage du raisonnement.* Grenoble : IREM.

Legrand M. (1990) Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *RDM* 9, 365-406.

Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères-IREM* 10, 123-158.

Legrand M. (1996) La problématique des situations fondamentales : confrontation du paradigme des situations à d'autres approches didactiques, Cours de la VIIème école d'été de didactique des mathématiques ; *RDM*16, 221-280.

Legrand M., Lecorre T., Leroux A., Parreau A. (2011) *Le principe du « Débat Scientifique » dans un enseignement.* Pré-tirage. Vol. Tome I. Grenoble (France) : Irem de Grenoble.

Lecorre T. (2015) Définir : une nécessité à construire. *Repères-IREM* 100.

Documents du groupe « Recherche sur le débat scientifique » à l'IREM (Institut de Recherche en Enseignement des Mathématiques) de Grenoble accessibles à l'adresse http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique61

ANNEXE

Un débat scientifique en faisant du crochet

Grégoire Charlot, Hélène Di Martino, Thomas Lecorre,
Marc Legrand & Antoine Leroux

EMF 2015, 10-14 octobre 2015, Alger

1 / 58

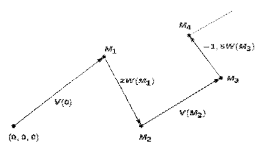
Introduction

Règles pour un bon fonctionnement du débat :

- dire ce que l'on pense vraiment,
- dire quand on n'est pas d'accord ET quand on est d'accord,
- dire quand on change d'avis, et ce qui nous a fait changer d'avis,
- dire quand on estime ne pas avoir assez d'arguments pour trancher,
- jouer honnêtement le jeu de la recherche du vrai.

6 / 58

On se place sur $\mathbf{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z).
On explore $\mathbf{R}^3$ avec deux champs de vecteurs notés V et W de la façon suivante :



Question : **où peut-on aller ?**

12 / 58

On considère les deux vecteurs V_1 et W_1 :

$$V_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Appel à conjecture 1 : en partant de $(0,0,0)$, où peut-on aller en suivant les deux vecteurs V_1 et W_1 ?

14 / 58

On considère maintenant les deux vecteurs suivants qui dépendent du point (x, y, z) :

$$V_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Appel à conjecture 2 : en partant de $(0,0,0)$, où peut-on aller en suivant V_2 et W_2 ?

16 / 58

On considère ensuite les vecteurs :

$$V_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \quad W_3(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}.$$

Appel à conjecture 3 : en partant de $(0,0,0)$, où peut-on aller en suivant V_3 et W_3 ?

18 / 58

Questions cruciales : quelles pourraient être

- une condition nécessaire pour qu'on puisse aller partout ?
- une condition suffisante pour qu'on puisse aller partout ?
- une condition nécessaire pour qu'on ne puisse pas aller partout ?
- une condition suffisante pour qu'on ne puisse pas aller partout ?

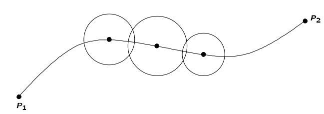
Conjecture 4 : Si, pour tout a et b dans $\mathbf{R}$, en avançant de aV puis bW on arrive au même point qu'en avançant de bW puis aV alors on ne peut pas atteindre tout $\mathbf{R}^3$.

Institutionnalisation

Difficile pour des exemples de vecteurs plus compliqués de calculer explicitement l'ensemble des points qu'on peut atteindre.

Institutionnalisation

Par contre on peut montrer que, si pour tout point p il existe un voisinage $V(p)$ de p tel que on sait aller de tout point p_1 de $V(p)$ à tout point p_2 de $V(p)$, alors on sait aller de tout point p_1 à tout point p_2 de $\mathbf{R}^3$.



$\rightarrow$ on ramène un problème global à un problème local

Institutionnalisation

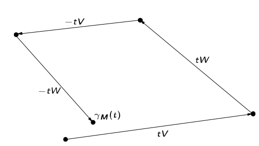
On a vu lors du débat sur les conjectures que l'on n'obtenait pas forcément le même résultat en suivant V_i puis W_i d'une part et W_i puis V_i d'autre part.

Cela semble même nécessaire à la possibilité d'aller partout.

Institutionnalisation

On appelle $\gamma_M(t)$ le point atteint en suivant la trajectoire particulière qui part de $M = (x, y, z)$ et qui suit

$$tV \text{ puis } tW \text{ puis } -tV \text{ puis } -tW.$$



Institutionnalisation

Pour (V_1, W_1) ou (V_3, W_3) on trouve

$$\gamma_M(t) = (x, y, z) = M.$$

Pour (V_2, W_2) on trouve

$$\gamma_M(t) = (x, y, z + t^2).$$

35 / 58

Institutionnalisation

Pour tous les couples (V, W),

$$[V, W](M) := \lim_{t \to 0} \frac{\gamma_M(t) - \gamma_M(0)}{t^2}$$

existe et forme un champ de vecteurs appelé crochet de V et W.

36 / 58

Institutionnalisation

Pour (V_2, W_2) on trouve $[V_2, W_2] = (0, 0, 1)$.

$[V_2, W_2]$ n'est pas dans vect(V_2, W_2). Et il semble naturel de se dire qu'on peut se déplacer dans sa direction quitte à beaucoup "tourner" avec V_2 et W_2.

38 / 58

Institutionnalisation

Si on fait la même opération avec V_1 et W_1 (ou V_3 et W_3) on trouve le vecteur nul.

On dit que les deux champs de vecteurs commutent.

Et on a vu dans ces deux cas-là que l'on ne peut pas atteindre tous les points de l'espace.

$\rightarrow$ on ramène le problème d'accessibilité locale au problème du calcul du crochet $[V, W]$.

42 / 58

Institutionnalisation

On peut calculer le crochet en un point p par un simple calcul de dérivées au point p.

$\rightarrow$ le problème est donc ramené à un calcul de dérivée.

44 / 58

Institutionnalisation

Théorème de contrôlabilité [Chow, Rashevski]
Si en tout point de $\mathbf{R}^3$ les trois vecteurs V, W et $[V, W]$ forment une base alors on peut aller de tout point p_1 à tout point p_2 en suivant V et W.

45 / 58

Institutionnalisation

Théorème d'intégrabilité [Deahna, Frobenius]
Si en tout point de $\mathbb{R}^3$ le vecteur $[V, W]$ est une combinaison de V et W alors à partir d'un point p on ne pourra pas sortir d'une "surface" contenant p.

48 / 58

Institutionnalisation

Vous utilisez tous les crochets au quotidien :

quand vous garez votre voiture !

49 / 58

Le crochet $[V, W]$ peut se calculer en coordonnées : si
$V = \begin{pmatrix} v_x \\ v_x \\ v_z \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$ alors

$$[V, W] = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_x}{\partial x} & \frac{\partial w_x}{\partial y} & \frac{\partial w_x}{\partial z} \\ \frac{\partial w_y}{\partial x} & \frac{\partial w_y}{\partial y} & \frac{\partial w_y}{\partial z} \\ \frac{\partial w_z}{\partial x} & \frac{\partial w_z}{\partial y} & \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{pmatrix} V - \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} W$$

50 / 58

Observation

- en quoi les connaissances que les "élèves" ont sur les espaces vectoriels les aident ou font du bruit ?
- les élèves peuvent ils prendre en charge le débat ? L'enseignant a-t-il les moyens de relancer le débat si celui s'y refroidit ?
- l'institutionnalisation entre-t-elle en résonance avec le débat ou bien est-elle sans vrai rapport avec les débats qui ont eu lieu ?

54 / 58

Autres questionnements

- Est ce que ce débat vous a permis de goûter la saveur que j'ai essayé de transmettre ? cette version étant une version très racourcie du débat complet.
- Est ce que vous pensez qu'un tel débat peut servir à la transmission du débat scientifique précognitif aux enseignants ?

58 / 58

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

QUESTIONS SOULEVÉES PAR LA MISE EN PLACE D'EVALUATIONS FORMATIVES DANS UNE CLASSE ORDINAIRE

Sylvie COPPE*

Résumé – A travers l'analyse d'un extrait de séquence de classe portant sur le produit de plusieurs nombres relatifs, nous nous proposons d'initer un questionnement sur les processus d'évaluation formative qui peuvent être mis en place dans les classes ordinaires. Nous tenterons donc de déterminer quelle peut être la place, la fonction, la nature de l'évaluation formative dans les pratiques de classe, à quelle nécessité elle peut correspondre dans le cours de l'étude. Enfin, nous tenterons de voir comment l'analyse de cette phase en termes d'évaluation formative nous permet de requestionner les cadres théoriques de la didactique des mathématiques, notamment les notions de milieu et contrat et l'analyse en termes de moments didactiques.

Mots-clefs : évaluation formative, régulation, didactique des mathématiques, algèbre, institutionnalisation

Abstract – Across the analysis of an extract of a sequence of class concerning the multiplication of several relating numbers, we offer to introduce a question setting on the processes of formative assessment which can be set up in the ordinary classes. We aim to determine what could be the place, the fonction and the role of formative assesssment in the ordinary practices, to which necessity it could correspond in the lesson of study. Finally, we shall try to see how the analysis of this stage in terms of formative assessment allows us to re-question the theoretical frameworks of the didactics of mathematics, notably the notions of « milieu » and didactic contract and the analysis in terms of « moments didactiques ».

Keywords: formative assessment, regulation, didactique of matematics, algebra, institutionnalisation

Lors du colloque EMF 2012, dans le cadre du groupe de travail sur les démarches d'investigation, nous avions présenté une étude de cas d'une enseignante avec laquelle nous travaillons dans le cadre d'un groupe de recherche collaborative intitulé SESAMES (Situations d'Enseignement Scientifique : Activités de Modélisation, d'Evaluation, de Simulation) qui a pour but la production collaborative (par des enseignants et des chercheurs) de ressources pour les enseignants et les formateurs des disciplines concernées favorisant la mise en activité des élèves et leur prise de responsabilité vis-à-vis des savoirs enseignés, notamment par la mise en place de démarches d'investigation (Coppé 2013). Pour nous, en mathématiques, le thème est l'algèbre au collège, les documents sont disponibles sur le site http://pegame.ens-lyon.fr/.

Dans cette étude de cas (Coppé 2012), nous nous interrogions sur les conditions de mise en œuvre de démarches d'investigation (ou de résolution de problèmes) dans le cadre des pratiques ordinaires et notamment sur les liens entre démarche d'investigation et apprentissage sous l'angle de la gestion du temps didactique. Pour cela, nous avions analysé

* Université de Genève FPSE – SUISSE - sylvie.coppe@unige.ch

Coppé S. (2015) Questions soulevées par la mise en place d'évaluations formatives dans une classe ordinaire. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT10, pp. 861-875.

la mise en œuvre de l'activité bien connue des Carreaux colorés (Combier et al., 1996), précédée de petits problèmes portant sur les programmes de calcul pour montrer comment pouvaient se gérer les alternances entre des phases de dévolution et d'institutionnalisation sur plusieurs séances. Nous avions donc illustré comment cette activité, proposée de façon non plus isolée mais insérée dans une séquence, pouvait être gérée d'une part, en laissant aux élèves la responsabilité de la recherche d'expressions littérales mais d'autre part, de façon plus cadrée lors de la mise en commun pour favoriser l'institutionnalisation notamment de la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition comme élément de justification des transformations d'écritures algébriques. Rappelons qu'une autre étude sur cette même activité (Coulange & Grugeon 2008) avait montré comment la gestion de cette situation par deux enseignantes n'avait permis ni la dévolution ni la mise en avant de la distributivité. Nous avons interprété cette différence (Pilet & al. 2015) en fonction, d'une part, de la connaissance fine ou non des enjeux cognitifs de cette situation (notamment le rôle et la place de la distributivité) et d'autre part de l'inscription dans une progression de types de tâches.

Dans cette communication, nous poursuivons cette étude de cas en nous centrant cette fois-ci sur les processus d'évaluation formative qui peuvent être mis en place dans les classes ordinaires. Nous tenterons donc de déterminer quelle peut être la place, la fonction, la nature de l'évaluation formative dans les pratiques de classe, à quelle nécessité elle peut correspondre dans le cours de l'étude. Une autre question est de montrer en quoi et comment les processus d'évaluation formative peuvent participer, favoriser l'avancement du savoir dans la classe et les apprentissages des élèves. Nous nous situons donc dans l'axe 2 « Rôle et responsabilité du professeur ».

Nous travaillons dans le cadre du projet de recherche européen ASSIST ME (Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education) qui a comme objectif d'analyser l'influence de nouveaux dispositifs d'évaluations formatives, en lien avec les évaluations sommatives dans le cadre de démarches d'investigation, sur les apprentissages et les pratiques enseignantes en sciences, mathématiques et technologie. Une autre partie du travail est de concevoir et de diffuser des méthodes d'évaluations formatives.

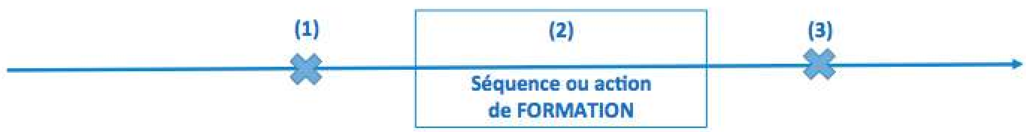
La méthodologie de recherche est basée sur l'utilisation de vidéos des séquences de classe (avec deux caméras, l'une orientée sur le tableau et donc le professeur et l'une sur la classe), d'enregistrements audio de groupes (ou binômes) d'élèves pendant les travaux de recherche. L'analyse est faite en utilisant notamment le logiciel TRANSANA. Les documents suivants sont collectés : des copies d'élèves sur les problèmes proposés, des questionnaires ante/post portant sur l'état des connaissances des élèves et sur les pratiques d'évaluation des professeurs, les fiches de préparation des enseignants expérimentateurs, les fiches de positionnement des élèves et les feedback écrits des professeurs.

Il est encore trop tôt pour nous pour donner des résultats sur les expérimentations qui sont en cours (trois séries d'expérimentations ont été réalisées dans l'année 2015) ; nous proposons ici d'initier le questionnement sur la prise en compte de l'évaluation formative dans les travaux de didactique des mathématiques.

Dans la première partie, nous reprendrons des définitions et caractérisations de l'évaluation formative en montrant notamment des évolutions de cette notion. Dans la deuxième, nous ferons un rapide tour d'horizon des travaux sur l'évaluation en didactique des mathématiques. Puis nous analyserons un extrait de séance de classe ordinaire qui constitue selon nous une évaluation formative intégrée afin de montrer sur quelles nouvelles questions cela débouche.

I. A PROPOS D'EVALUATION FORMATIVE

La notion d'évaluation formative a été introduite en 1967 par Scriven dans un contexte d'évaluation des programmes de formation puis reprise par Bloom, en 1968, en indiquant qu'elle permet à l'élève de remédier à ses erreurs et difficultés avant qu'il ne s'engage dans un processus cumulatif. Fondée sur un fonctionnement rétroactif, elle procure des informations dont le maître et l'élève ont besoin pour savoir si les objectifs visés sont atteints et rendent possible la progression vers des objectifs plus complexes. Dans cette conception, l'erreur de l'élève change de statut. A cette époque, les travaux se situent davantage dans une perspective de remédiation au cours d'une unité d'apprentissage planifiée. Les travaux de Hadji (1989) mettent fortement en avant cette idée de temporalité dans les différents types d'évaluation et leurs différentes fonctions au cours de la planification (avant/pendant/après). A cet égard, le schéma qu'il donnait pour illustrer son point de vue est assez éclairant. Nous le reproduisons ci–dessous (fig. 1) pour le comparer aux travaux suivants et montrer l'évolution de la notion d'évaluation formative.



En (1) : avant l'action de formation	En (2) : pendant l'action	En (3) : après l'action de formation
Évaluation ▪ Diagnostique ▪ Pronostique ▪ Prédictive	Évaluation ▪ Formative ▪ Progressive	Évaluation ▪ Sommative ▪ Terminale
Fonctions ▪ Orienter ▪ Adapter	Fonction ▪ Réguler ▪ Faciliter (l'apprentissage)	Fonction ▪ Vérifier ▪ Certifier
Centrée sur ▪ Le producteur et ses caractéristiques (identification)	Centrée sur ▪ Les processus de production ▪ L'activité de production	Centrée sur ▪ Les produits

Figure 1 *-Tableau de Hadji sur les différents types d'évaluation (1989, p.59)*

A partir de 1988, les travaux de Allal initient une perspective élargie et introduisent la notion de « régulation interactive ». Allal indique que l'évaluation formative est une partie intégrante du processus d'apprentissage, qu'elle se vit à tout moment de ce processus et qu'elle confère un rôle actif à l'élève dans son engagement dans ses apprentissages. Allal et Mottier Lopez (2005) précisent alors qu'il s'agit d'utiliser divers moyens de recueil d'informations notamment informels (et non plus seulement des tests formatifs), qu'il y a une participation effective des élèves (par l'autoévaluation et/ou par les pairs), qu'on aboutit à une différenciation de l'enseignement et qu'enfin la régulation se fait à deux niveaux (celui des élèves évalués mais aussi celui des pratiques professionnelles pour les années suivantes et les nouveaux élèves). Mottier Lopez (2012) introduit l'idée d'une approche située de l'évaluation-régulation formative en lien avec la micro culture de classe. On voit donc que pour les travaux francophones la conception élargie de l'évaluation formative a débouché sur l'idée de la régulation des apprentissages dans une perspective continue.

Une évolution a également eu lieu dans les travaux anglo-saxons. Black et Wiliam (1998a, 1998b) considèrent qu'une évaluation est formative lorsque les informations recueillies par l’enseignant sont effectivement utilisées pour répondre aux besoins de l’élève et pour réguler l’enseignement (on retrouve ainsi les deux enjeux). Ils précisent que l’évaluation formative, qui doit porter sur des savoirs et savoir-faire qui ont été enseignés ou qui sont en cours d’enseignement, peut se dérouler à tout moment d’une séance d’enseignement. Les informations recueillies doivent permettre de mettre en avant et de prendre en compte l’écart entre ce que les élèves savent et font et ce qu’ils devraient savoir et faire.

> We use the general term assessment to refer to all those activities undertaken by teachers—and by their students in assessing themselves—that provide information to be used as feedback to modify teaching and learning activities. Such assessment becomes formative assessment when the evidence is actually used to adapt the teaching to meet student needs. (op. cité, 1998, p. 140)

Pour Shavelson et al. (2008) il y a un continuum entre des évaluations formelles et planifiées (voire des évaluations « prêtes à l’emploi » produites par des chercheurs : « Embedded-in-the-curriculum formative assessment »), celles moins formelles dans l’interaction et celles « on the fly » qui peuvent arriver de façon spontanée à l’initiative du professeur ou d’un élève.

Figure 2 - *Continuum des évaluations formatives selon Shavelson et al. (2008, p. 300)*

Dans tous ces travaux, les notions de feedback et d’écart entre ce que les élèves savent et font et ce qu’ils devraient savoir et savoir faire sont centrales (voir des exemples d’étude de feedback dans Lepareur et Grangeat, à paraître).

En France actuellement, peu d’études portent sur les pratiques des enseignants en matière d’évaluation formative. Notre expérience en matière de formation initiale et continue nous amène à penser que ces pratiques sont assez peu développées mais cela reste à confirmer. Les évaluations sommatives restent prépondérantes même si depuis 2005, il y a une volonté institutionnelle de développer l’évaluation par compétences, ce qui suppose des évaluations régulières prenant en compte la progression des apprentissages dans la durée et la mise en place de situations d’évaluation pertinentes (ce qui nous ramène vers les démarches d’investigation ou la résolution de problèmes). Ainsi, a été introduit dans les programmes français, le socle commun de connaissances et de compétences. Pour la partie mathématique, il est indiqué dans l’introduction du programme du collège (élèves 11-15 ans) :

> L’évaluation (qui ne se réduit pas au contrôle noté) n’est pas un à-côté des apprentissages. Elle doit y être intégrée et en être l’instrument de régulation, pour l’enseignant et pour l’élève. Elle permet d’établir un constat relatif aux acquis de l’élève, à ses difficultés. Dans cette optique, le travail sur les erreurs constitue souvent un moyen efficace de l’action pédagogique. L’évaluation ne doit pas se limiter à indiquer où en est l’élève ; elle doit aussi rendre compte de l’évolution de ses connaissances, en particulier de ses progrès. (BO spécial n°6 du 28 août 2008)

On constate donc qu’en France, il existe des injonctions institutionnelles fortes pour changer les pratiques d’évaluation, pour passer d’une mission sociale qui vise au classement ou à la sélection des élèves à une mission de régulation, de soutien au développement des apprentissages. Ceci posé, on est alors amené à chercher comment outiller les enseignants à la fois d’un point de vue théorique mais aussi pratique, par l’introduction de nouvelles méthodes d’évaluation formatives, comment améliorer les feedback, envisager de nouvelles tâches, différencier au besoin.

II. LES TRAVAUX DE DIDACTIQUE SUR L'EVALUATION

Comme Bodin (1997) l'avait déjà été souligné, peu de travaux de didactique des mathématiques portent sur l'évaluation (sauf quelques-uns sur les évaluations internationales comme Bodin 2008). Chevallard (1986, 1989) en se plaçant dans une perspective anthropologique, avec les personnes vues comme sujet d'institution(s), en utilisant les notions de rapports institutionnels/personnels, par la distinction entre véridiction et objectivation montre le rôle prépondérant du contrat didactique dans les processus d'évaluation. Ses textes portent essentiellement sur les évaluations sommatives (notées). Plus tard, Chevallard (1998, 1999) définit le moment de l'évaluation comme un des six moments didactiques qui composent l'organisation didactique.

> Le sixième moment est celui de l'évaluation, qui s'articule au moment de l'institutionnalisation (dont il est à certains égards un sous-moment) : la supposition de rapports institutionnels transcendants aux personnes, en effet, fonde en raison le projet d'évaluer les rapports *personnels* en les référant à la *norme* que le moment de l'institutionnalisation aura ainsi hypostasiée. En pratique, il arrive un moment où l'on se doit de « faire le point » : car ce moment de réflexivité où, quels que soient le critère et le juge, on examine ce que *vaut* ce qui a été appris, ce moment de véridiction qui, malgré les souvenirs d'enfance, n'est nullement une invention de l'Ecole, participe en fait de la « respiration » même de toute activité humaine. (Op. cité 1999, p. 22)

On trouve ici l'idée de comparaison entre les rapports personnels et institutionnels et le lien fort avec l'institutionnalisation. Nos travaux (Coppé 1993) qui portaient sur ce que font les élèves lors des devoirs surveillés nous ont amenée à définir les notions de travail privé et de trace publique pour expliquer les différences entre ce que les élèves font au brouillon et ce qu'ils donnent à voir au professeur. Nous avions également pointé le lien entre évaluation et institutionnalisation : ainsi certains élèves se rendaient compte de ce qu'il y avait à apprendre au moment de l'évaluation finale.

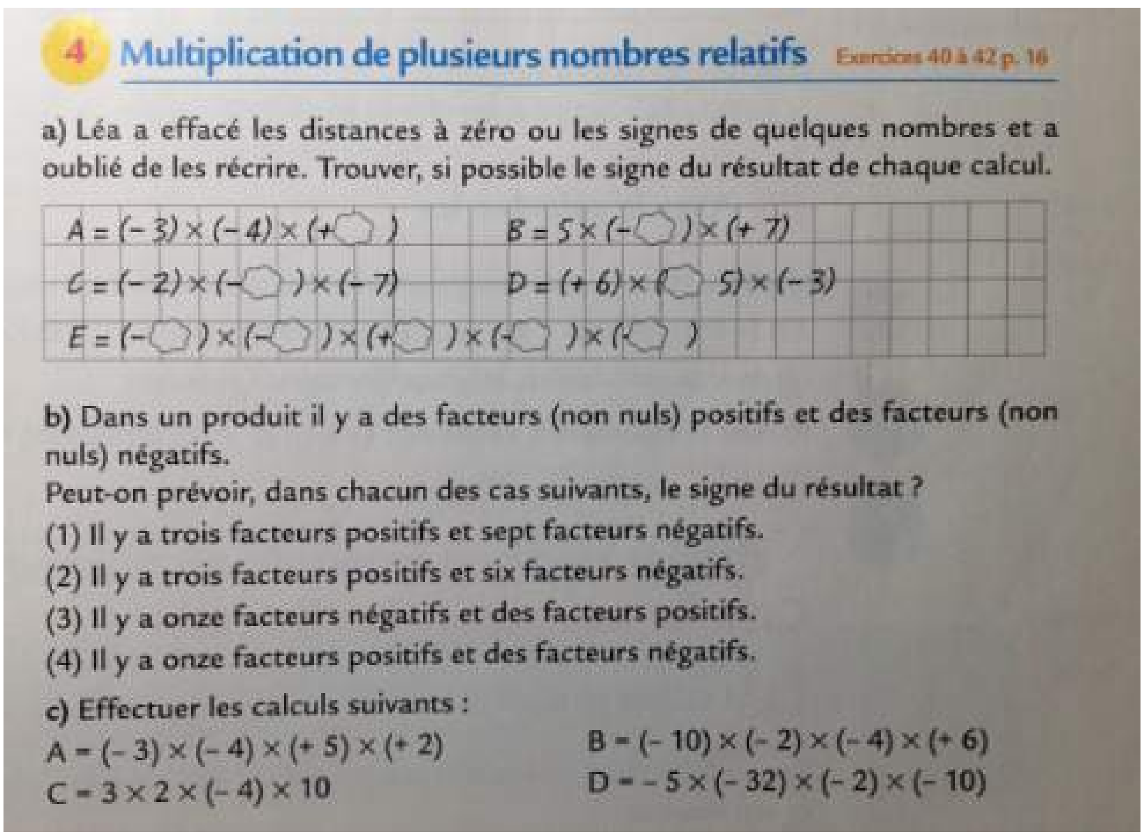
Dans la cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau 1986, 1998), Margolinas (1993) distingue ce qu'elle nomme les phases d'évaluation et les phases de validation dans les phases de conclusion des situations a-didactiques suivant les responsabilités données aux élèves. Brousseau (1995) introduit la notion de régulation et en cela, il souligne le renforcement du rôle du professeur notamment par les régulations qu'il opère et celui des interactions sur le savoir en jeu dans les différentes phases (action, formulation, validation, institutionnalisation). Enfin Perrin-Glorian et Hersant (2003) reprennent le questionnement sur les rôles de contrat et milieu mais dans le cadre des séquences ordinaires ce qui les amène à préciser différents contrats et à introduire la notion de « situation de rappel ».

Ainsi, on peut donc voir que l'aspect formatif de l'évaluation n'a pas été travaillé en tant que tel en didactique des mathématiques et ce n'est que très récemment que les recherches, notamment dans le cadre des projets ASSIST ME (Coppé & al., à paraître) et NéoPréval (Nouveaux Outils pour de nouvelles Pratiques d'éVALuation et d'enseignement en mathématiques (Grugeon & al. 2012, Pilet 2012), proposent des analyses et des outils. Cela nous conduit à questionner comment intégrer ce type d'évaluation, avec ses fonctions didactiques, dans les cadres théoriques de la didactique des mathématiques. C'est ce que nous tentons de faire ici à partir d'un exemple.

III. ETUDE DE CAS

1. Présentation de la séance

L'extrait que nous allons analyser se situe en classe[1] de 4e (élèves de 13-14 ans), c'est la séance 14 de l'année, elle porte sur la multiplication des nombres relatifs et plus précisément sur le signe d'un produit de plusieurs nombres relatifs (en fonction du nombre de termes négatifs). À la séance 13, la professeure (que nous nommons Clara) a fait travailler les élèves sur une activité (fig 3) qui devait déboucher sur l'établissement de la règle même si le manuel ne la demande pas (on reste au niveau des exemples). On peut noter que cette professeure a consacré du temps à l'établissement de cette règle, ce qui n'est pas toujours le cas : en effet, quelquefois la règle est donnée pour deux nombres relatifs et il est de la responsabilité des élèves de la transposer à plusieurs nombres. De plus, il y a une réelle difficulté que Clara semble bien connaître puisque le signe est fonction du nombre (pair ou impair) de nombres négatifs (par exemple les élèves ont du mal à comprendre qu'un seul nombre négatif peut « emporter » le signe du résultat ou bien que les nombres positifs n'ont pas d'influence sur le signe du résultat).



4 Multiplication de plusieurs nombres relatifs Exercices 40 à 42 p. 16

a) Léa a effacé les distances à zéro ou les signes de quelques nombres et a oublié de les récrire. Trouver, si possible le signe du résultat de chaque calcul.

A = (– 3) × (– 4) × (+) B = 5 × (–) × (+ 7)

C = (– 2) × (–) × (– 7) D = (+ 6) × (5) × (– 3)

E = (–) × (–) × (+) × (–) × ( )

b) Dans un produit il y a des facteurs (non nuls) positifs et des facteurs (non nuls) négatifs.
Peut-on prévoir, dans chacun des cas suivants, le signe du résultat ?
(1) Il y a trois facteurs positifs et sept facteurs négatifs.
(2) Il y a trois facteurs positifs et six facteurs négatifs.
(3) Il y a onze facteurs négatifs et des facteurs positifs.
(4) Il y a onze facteurs positifs et des facteurs négatifs.

c) Effectuer les calculs suivants :
A = (– 3) × (– 4) × (+ 5) × (+ 2) B = (– 10) × (– 2) × (– 4) × (+ 6)
C = 3 × 2 × (– 4) × 10 D = – 5 × (– 32) × (– 2) × (– 10)

Figure 3 - *texte de l'activité proposée Manuel Triangle 4e (2007 p. 9)*

A la séance 13, les élèves ont eu des difficultés à rentrer dans la tâche notamment parce que dans la question a) on propose des calculs aux élèves qu'ils ne doivent pas effectuer (d'ailleurs ils ne le peuvent pas puisqu'il manque des nombres), ils doivent seulement trouver le signe du résultat. On peut analyser les difficultés des élèves en termes de rupture de contrat didactique puisqu'en général si les élèves ont un calcul numérique, ils doivent l'effectuer et

[1] Il y a 25 élèves dans la classe

en donner le résultat. On constate que les élèves posent de nombreuses questions sur ce qu'il faut faire et s'attardent ainsi sur la question a) et que la professeure doit intervenir à de nombreuses reprises pour réexpliquer ce qu'il faut faire.

Au début de la séance 14, Clara fait rappeler la règle finalement établie et sa justification. Elle ne se contente pas de la réponse correcte du premier élève interrogé, elle va instaurer un dialogue avec les élèves pendant 10 minutes environ. Nous pensons que cette phase d'interaction avec les élèves sur ce qui a été vu (ou appris) à la séance précédente constitue une phase d'évaluation formative dans l'interaction (comme cité par Shavelson, 2008). En effet, tout d'abord la professeure cherche à avoir des informations sur ce que les élèves ont compris de l'activité sur la multiplication de plusieurs nombres relatifs ; de plus, c'est certainement une façon de prendre en compte le fait que les élèves ont eu des difficultés, donc cela constitue une régulation. Enfin, cette phase va déboucher sur l'institutionnalisation de la règle qui n'avait pas été faite à la suite de l'activité à la séance 13.

1. Les cycles d'interaction

Pour analyser les interactions lors de la mise en commun, nous repérons des cycles d'interaction ESRU (Elicit Student Response Use) développés par Furtak et al. (2005).

> The teacher begins by eliciting a response from students that reveals the state of the students' understanding. Next, the teacher recognizes the response by reflecting it back to the student or asking another follow- up question. The third step involves taking some form of action to help the student move toward the essence of the activity or concept. The process can be thought of as a cycle to reflect the ongoing nature of informative questioning throughout inquiry activities. (Furtak & Ruiz Primo 2005, p. 1).

On peut donc résumer ainsi ces cycles : Poser une question aux élèves - Obtenir une réponse - Prendre en compte cette réponse, l'intégrer dans le discours - Avoir une action sur cette réponse - Utiliser la réponse de l'élève.

2. Analyse de l'extrait choisi

La transcription de cette phase est en Annexe 1 sous forme d'un tableau. La première colonne indique des tours de parole (quand la professeure s'adresse à toute la classe) ou des séries de tour de parole (quand elle est en interaction avec un élève qui est alors appelé E*n*, *n* allant de 1 à 9). Quelques interactions ne sont pas décryptées car ce sont des rappels à l'ordre. Durant les 10 minutes environ que dure cette phase, nous pouvons repérer neuf cycles dont deux ne sont pas complets. Ainsi 9 élèves différents ont donc eu un feedback personnel de la professeure, même si la nature du feedback est différente.

Analysons maintenant trois exemples de cycles : un incomplet, un complet et un initié par un élève.

Nous considérons qu'il y a deux cycles incomplets : le 23, élève E2 et le 33, élève E6. Pour le 23, on constate que la professeure interroge une élève qui donne une réponse fausse « Y en a plus » qui indique qu'elle considère que le signe est lié au nombre le plus grand de facteurs positifs ou négatifs. Les interactions cessent quand (ou parce que ?) la professeure dit non. Elle a donc bien donné un retour à l'élève mais elle n'a pas eu d'action immédiate sur cette réponse. On peut penser que les échanges suivants avec E3 pourraient avoir cet effet mais rien ne garantit que E2 a bien reconnu dans ces échanges une correction de sa réponse. Pour E6 c'est un peu différent car la professeure et l'élève ne sont pas d'accord sur la compréhension de celui-ci. E6 a-t-il eu une réponse adéquate ? Là encore, la question n'est pas tranchée.

Les cycles 21, 22, 24, 35 et 36 sont complets. Clara interroge un élève qui répond, elle prend en compte la réponse en demandant des précisions et elle utilise ces réponses pour commencer l'institutionnalisation. Elle donne son accord et/ou elle reformule. Les retours peuvent être à un niveau contextualisé (réponse sur un exemple comme en 24, E4 ou en 36, E8) ou à un niveau plus général (la règle comme en 22, E2). On se rend compte aussi que comme Clara connaît bien les difficultés des élèves sur ce point (notamment le fait qu'on ne s'intéresse qu'aux nombres négatifs) elle prend l'initiative de mettre cette question en débat (en 22).

Enfin deux cycles ont été initiés par une question d'un élève : en 32, E5 indique qu'il a compris la règle mais qu'il a besoin d'une justification pour être convaincu ; en 37, E9 cherche à vérifier sa compréhension. Le fait que les élèves s'autorisent à poser une question n'est pas habituel dans toutes les classes. Nous pensons que c'est parce que le contrat de communication instauré dans cette classe permet ces échanges et qu'un temps conséquent est consacré à cette phase que ces interventions peuvent avoir lieu. Or, du point de vue des apprentissages, ces phases sont très importantes, on retrouve là l'idée des feedback.

3. *Conclusion sur les cycles*

Nous avons mis en lumière neuf cycles d'interactions pendant une phase qui dure 10 minutes. Tous ces élèves ont donc eu un feedback personnel (accord ou non) de la professeure mais deux, qui avaient produit des réponses fausses, n'ont peut être pas pu corriger leur réponse. Ils peuvent l'avoir fait s'ils ont repéré la réponse correcte dans les échanges suivants mais nous ne le savons pas. Bien sûr tous les élèves n'ont pas été interrogés mais on peut penser qu'ils le seront à un autre moment.

Si l'on interprète cette phase dans le cadre de la théorie des situations didactiques, on peut dire que l'on a une phase de formulation et validation qui se situe entre une phase de recherche (action) et une phase d'institutionnalisation. Nous avons vu dans la rapide analyse de l'activité que le milieu n'est pas suffisant pour permettre aux élèves de passer à la règle (il n'y a aucune exigence de formulation d'une règle, ni de sa validation) et qu'il y a une rupture de contrat puisque les élèves veulent calculer les produits. On voit que l'enjeu de l'activité, qui est de déterminer une règle, a du mal à être compris par les élèves puisqu'ils cherchent à calculer et ils ne comprennent pas « donner seulement le signe ». Ceci explique certainement les difficultés que Clara a constatées et elle va donc prendre quelques minutes pour faire le point avec les élèves, ce qui lui permettra de réguler pour tous et d'avoir des informations sur certains élèves. C'est l'enseignant qui valide, qui change de niveau (local/global), mais les élèves posent des questions pour montrer leur incompréhension ou vérifier qu'ils ont compris. Caractériser cette phase par l'évaluation formative nous permet de mieux repérer et analyser la nature des interactions professeur/élèves.

Si l'on se place dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique, du point de vue de l'organisation mathématique on a ici un type de tâche « multiplier plusieurs nombres relatifs », une technique « compter les négatifs … » et un discours technologique. Tout ceci constitue une organisation mathématique ponctuelle. Du point du vue de l'organisation didactique, on peut interpréter cet extrait comme un moment de l'exploration du type de tâches « multiplier des nombres relatifs » et de l'élaboration d'une technique ou bien comme un moment de constitution du bloc technologico-théorique (explication/justification de la règle qui donne le signe d'un produit de plusieurs nombres relatifs) qui précèdent dans les deux cas, un moment d'institutionnalisation. Caractériser cette phase par l'évaluation formative nous permet ici de pointer une transition entre ces différents moments et de mieux analyser le partage des responsabilités entre les élèves et la professeure qui mène le débat avec des interactions nombreuses.

IV. CONCLUSION

Dans cette conclusion, nous allons tenter de voir comment l'analyse de cette phase en termes d'évaluation formative nous permet de requestionner les cadres théoriques de la didactique des mathématiques. Un premier point est que cela permet de revoir les concepts de milieu (par l'introduction dans le milieu des éléments de validation de réponses ou de procédures au niveau local ou global), et de contrat didactique qui est souvent considéré par ses ruptures mais qui pourrait également être envisagé par ses continuités. On revient donc à l'idée de phase de régulation. Enfin, il s'agit aussi de préciser la distinction faite entre évaluation et validation lors des phases de conclusion mais en l'élargissant au contexte de l'évaluation formative.

En ce qui concerne la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1998, 1999), nous pensons que l'étude des organisations mathématiques (ponctuelles, locales et globales) fournit un cadre pour penser l'organisation des savoirs enseignés en dégageant des raisons d'être, des types de tâches, techniques et technologies en allant jusqu'à la détermination des objets évalués à la fois de façon sommative et formative. Comme nous l'avons vu, l'entrée par l'évaluation formative permet de reprendre les questions du partage des responsabilités entre le professeur et les élèves (topos de l'élève et contrat didactique). En revanche, on peut se demander si le découpage en moments didactiques (moment de première rencontre, du travail de la technique, exploration du type de tâches et élaboration d'une technique relative à ce type de tâches, constitution du bloc technologico-théorique, évaluation, institutionnalisation) permet de rendre compte des dynamiques entre évaluation et régulation ou évaluation et institutionnalisation. En effet, si l'on retient le caractère spécifique de l'évaluation formative comme un processus continu, comment alors repérer des phases d'évaluation formative dans les autres moments ?

Enfin, si l'on réfléchit aux conditions de la diffusion, à destination des professeurs, de ressources portant sur l'évaluation formative (autres que des grilles critériées évaluant souvent des compétences générales qui ne prennent pas toujours en compte les savoirs enseignés et appris), cette courte analyse permet de voir la difficulté de cette tâche notamment parce qu'il est essentiel que l'enseignant ait une bonne connaissance du savoir enseigné, des erreurs et des difficultés des élèves. Rappelons que Asch et Levitt (2003) concluent des études réalisées avec des enseignants que l'intégration des pratiques d'évaluation formative est un levier pour faire évoluer les pratiques enseignantes notamment par une meilleure prise en compte des apprentissages des élèves de manière individuelle et collective, ceci en développant un changement de regard sur l'élève, sur ses erreurs et rendant plus explicite pour le professeur et les élèves ce que doivent savoir et savoir faire ces derniers et en pointant les écarts.

REFERENCES

Allal L. (1988) Vers un élargissement de la pédagogie de maîtrise : processus de régulation interactive, rétroactive et proactive. In Huberman M. (dir.) *Assurer la réussite des apprentissages scolaires ? Les propositions de la pédagogie de maîtrise*. Paris : Delachaux & Niestlé.

Allal L., Mottier Lopez L. (2005) Formative Assessment of Learning : A Review of Publications in French. In *Formative Assessment - Improving Learning in Secondary Classrooms* (pp. 241-264). Paris: OECD Publication.

Ash, D., Levitt K. (2003) Working within the Zone of Proximal Development : formative assessment as Professional Development. *Journal of science education* 14(1).

Black P., Wiliam D. (1998a) Assessment and Classroom Learning. *Assessment in Education: Principles, Policy and Practice* 5(1),7-74.

Black, P., William, D. (1998b) *Inside the Black Box: Raising standards through classroom assessment.* London: King's college.

Bloom B.S. (1968) Learning for Mastery. *Evaluation Comment* 1(2), 1-12.

Bodin A. (1997) L'évaluation du savoir mathématique. Questions et méthodes. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(1), 49-96.

Bodin A. (2008) Lecture et utilisation de PISA pour les enseignants. *Petit x* 78, 53-78.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 7/2, 33-116.

Brousseau G. (1990) Le contrat didactique et le concept de milieu : dévolution. *Recherches en didactique des Mathématiques* 9(3), 309-336.

Brousseau G. (1995) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques : 1. Structure et fonctionnement du système didactique. In Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (Eds.) *Actes de la VIII° Ecole d'été de didactique des mathématiques St-Sauves d'Auvergne* (pp. 3-46). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1986) Vers une analyse didactique des faits d'évaluation.In De Ketele J. M. (Ed.) *L'évaluation, approche descriptive ou prescriptive ?* (pp. 31-59). Bruxelles : De Boeck,.

Chevallard Y. (1989) Evaluation, véridiction, objectivation. La relation didactique comme caprice et miniature. In Colomb J. et Marsenach J. (Eds.) *L'évaluateur en révolution* (pp. 13-36). Paris : INRP.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche Anthropologique. La notion d'organisation praxéologique. *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques.* Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle, 119-140.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherche en didactique des mathématiques 19(2), 221-266.

Combier G., Guillaume J.-C., Pressiat A. (1996) *Les débuts de l'algèbre au collège.* INRP.

Coppé S. (1998) Composantes privées et publiques du travail de l'élève en situation de devoir surveillé en mathématiques. *Educational studies in mathematics* 35(2), 129 – 151.

Coppé S. (2012) Démarche d'investigation et aspects temporel des processus d'apprentissage/enseignement. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1306–1318). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes- emf-2012.

Coppé S. (2013) Effets du travail collaboratif sur la pratique d'enseignement : une étude de cas d'une enseignante de mathématiques en collège. In Grangeat *M.* (dir.) *Les enseignants des sciences face aux démarches d'investigation : des formations et des pratiques de classe*. Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble.

Coppé S., Chanudet M., Chesné J. F., Dorier J. L., Grangeat M., Lepareur C., Pilet J., Grugeon B. (à paraître) Développer des pratiques d'évaluation formative dans l'enseignement des mathématiques. In *Actes du colloque ADMEE*, Liège, janvier 2015.

Coulange L., Grugeon-Allys B. (2008) Pratiques enseignantes et transmission de situations d'enseignement en algèbre. Petit x 78, 5-23.

Furtak E.M, Ruiz-Primo M.A. (2005) Questioning Cycle: Making Students' Thinking Explicit During Scientific Inquiry. *Science Scope* 28(4), 22-25.

Grugeon B., Pilet J., Chenevotot F., Delozanne E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange, Drouhard, Dorier, Robert (Eds.) Recherche en didactique des mathématiques. Hors série. *Enseignement de l'algèbre, élémentaire Bilan et perspectives* (pp. 137-162). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Lepareur, C., Grangeat M. (à paraître) Quels effets de l'évaluation formative sur les apprentissages des élèves en classe de mathématiques ? Une analyse des régulations dans une approche de « l'apprentisage situé ». In *Actes du colloque de l'ADMEE* 2015.

Margolinas C. (1992) Eléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en didactique des mathématiques* 12/1, 113-158.

Mottier Lopez L. (2012) *La régulation des apprentissages en classe*. Bruxelles : De Boeck.

Perrin Glorian M. J., Hersant M. (2003) Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques* 23/2, 217-276.

Pilet J. (2012) *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation.* Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot, Paris. Disponible en ligne http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039.

Pilet J., Coppé S., Grugeon Allys B. (2015) Eléments d'analyse de la diffusion des travaux de recherche en didactique des mathématiques à travers trois exemples. *Atelier de l'Ecole d'été de didactique pour le thème 1.* Nantes Août 2013.

Scriven M. (1967) The Methodology of Evaluation. *AERA Monograph Series on Evaluation* 1, 39-83.

Shavelson R., Young D., Ayala C., Brandon P., Furtak E., Ruiz Primo M. (2008) On the Impact of Curriculum-Embedded Formative Assessment on Learning: A Collaboration between Curriculum and Assessment Developers. *Applied Measurement in Education* 21(4), 295-314.

MANUEL

Chapiron G., Mante M., Mulet-Marquis R., Perotin C. (2011) *Mathématiques 4e Collection.* TRIANGLE, Editions Hatier.

ANNEXE 1

Séance 14 mathématiques collège 4e
Multiplication des nombres relatifs
22. 24 à 32. 40

Tours de parole		Commentaires
21	P chut alors est-ce que quelqu'un peut me redire ce à quoi on avait abouti hier chut chut à propos de euh des produits de plusieurs facteurs oui	Initie rappel de la séance précédente : question aux élèves
E1	E1 ben que si on avait un nombre pair de facteurs négatifs ça ferait un résultat positif et si on avait un nombre impair eh ben ça serait négatif	E1 répond correctement
22 E2	P d'accord alors est-ce que quelqu'un peut me dire si si dans ce que Camille a dit est-ce qu'on compte les facteurs positifs E2 (E2 lève la main) non P (pointe E2) Romain E2 c'est pas les facteurs positifs qu'on compte c'est les facteurs négatifs P voilà donc ça c'est bien ce qu'elle a dit hein mais les facteurs positifs est-ce que vous pouvez me rappeler pourquoi en fait on les compte pas E2 parce ils changent pas P Romain E2 parce que ils font pas changer euh le signe P voilà les facteurs positifs je peux en avoir un deux trois mille autant que je veux de toute façon ils n'ont aucune euh aucun effet sur le signe d'accord ce sont les facteurs négatifs qui ont un effet sur le signe et pourquoi on en veut un nombre pair rappelez-vous ce qu'on avait expliqué alors si il n'y a que Romain et Camille qui expliquent c'est déjà les mêmes qu'hier qui avaient abouti donc c'est un peu dommage	Accord pour E1 Relance la question sur facteurs positifs (difficulté connue) E2 répond correctement Accord pour E1 et E2 Relance à la classe pour justification E2 explique Accord pour E2 P explicite sur les facteurs positifs mais ne donne pas l'explication
23 E3	P Inesa (E3) par exemple pourquoi est-ce que on en veut un nombre pair des facteurs négatifs pourquoi on dit si on a un nombre pair de facteurs négatifs par exemple j'ai deux nombres négatifs ou quatre nombres négatifs ou huit nombres négatifs je sais à ce moment là que le résultat sera forcément positif pourquoi E3 (inaud.) P de quoi E3 Y en a plus P non	P interroge une autre élève qui ne sait pas et lui explicite la question Pas accord pour E3 P relance la question à un autre élève
24 E4	P Elarif (E4) E4 parce que si deux moins se suivent eh ben ça fait plus P alors si deux moins se suivent euh explique E4 si deux signes négatifs se suivent eh ben P juste si ils se suivent non si ils sont quoi entre eux	E4 explique en donnant un exemple mais pas la règle générale Accord de P et

	E4 euh P c'est quoi l'opération Elarif E4 euh moins 4 fois moins 6 par exemple P oui E4 eh ben ça donne un chiffre euh un résultat positif P alors voilà on repart sur l'idée d'Elarif quand j'en ai deux par deux quand ils sont pairs je peux les grouper deux par deux et les deux par deux que je groupe eh bien ils donnent chacun un résultat positif d'accord par contre si j'en ai un nombre impair à la fin quand je les ai tous groupés deux par deux il m'en reste un donc le résultat sera négatif alors ça c'est quelque chose	explicitation à un niveau plus global (généralisation)
25	P alors on va noter cette règle d'accord produit de plusieurs facteurs (P ouvre le tableau pour écrire) et quelques exemples alors vous notez (P écrit au tableau) *II) produit de plusieurs facteurs* alors la règle donc ce qui est important c'est que pour faire pour trouver la distance à zéro du produit c'est toujours pareil on multiplie les distances à zéro ce qui nous intéresse ici c'est comment on trouve le signe d'accord donc le signe c'est ça qu'on regarde d'un produit de plusieurs facteurs alors de plusieurs nombres relatifs et je vais rajouter différents de zéro pourquoi je rajoute différents de zéro pourquoi je rajoute différents de zéro dans mon dans ma règle	P écrit la règle
26 27	…	
28	P alors est donc positif si on a un nombre pair de facteurs négatifs donc cette phrase elle est assez complexe hein mais retenez peut-être dans votre tête les négatifs quand je peux les grouper par deux j'en ai un nombre pair eh bien à ce moment-là le résultat est positif négatif si on a un nombre impair de facteurs négatifs	
29 30 31	…	
32 E5	P alors cette règle elle marche aussi pour 2 hein puisque 2 c'est pair si j'ai deux nombres négatifs le résultat il sera positif E5 eh madame P Blanche E5 est-ce qu'on a une preuve pour dire ça parce que c'est pas logique P c'est pas logique alors qu'est-ce qui est pas logique E5 bah non mais c'est bizarre quand même que par rapport à pair ou impair ça change le signe qu'on va avoir	E5 pose question à P car elle ne comprend pas le lien entre signe et pair/impair
33 E6	P alors on va pas noter de preuve par contre on peut de nouveau réexpliquer pourquoi est-ce que c'est le fait que ce soit un nombre pair de facteurs négatifs qui donne un résultat positif P Théophile E6 bah ça revient à à ce que j'avais dit hier en fait	E6 lève la main

	P non toi tu avais un peu tout mélangé si tu veux je réécouterai le film et puis je redirai ce que tu avais dit c'était pas ça tu avais tout mélangé oui E6 bah c'est parce que euh deux nombres négatifs ça fait un nombre positif donc euh	
34	P c'est voilà l'idée du nombre pair elle vient de là elle vient que du fait que à chaque fois que j'ai deux nombres négatifs je peux les grouper par deux et puis les suivants je peux aussi les grouper par deux les deux suivants je peux les grouper par deux ce qui fait que si j'en ai un nombre pair je peux tous les grouper par deux mes négatifs et à chaque fois que je les grouperai par deux j'obtiendrai un nombre positif donc je n'aurai plus que des nombres positifs à multiplier d'accord donc l'idée c'est vraiment ça c'est ce que Elarif nous a dit tout à l'heure j'en ai un nombre pair je peux donc tous les grouper par deux j'en ai un nombre impair il m'en reste un qui est tout seul à la fin quand je les ai tous groupés d'accord donc l'idée c'est vraiment quand j'ai un produit complexe pour ne pas oublier les signes	Accord pour E6 P explique à nouveau et s'appuie sur explication de E4
35 E7	P on va d'abord trouver le signe et après faire le calcul sans les signes d'accord alors dites-moi là quel est le signe Gwendoline (E7) E7 euh c'est euh positif P positif pourquoi E7 parce qu'il y a un nombre pair de P (P écrit au T) car il y a deux facteurs positifs c'est pair E7 négatif P euh négatif pardon deux facteurs négatifs d'accord pair deux c'est pair hein ok donc ici moins 3 fois moins 5 ça donne plus 15 on retrouve bien ce qu'on faisait avant	Accord pour E7
36 E8	P Oscar (E8) E8 l'autre exemple sera négatif car il y a trois facteurs négatifs P (P écrit au T) négatif car il y a trois facteurs négatifs voilà c'est impair d'accord là on voit bien si on regroupe le moins 2 avec le moins 3 le résultat sera positif mais il nous restera le moins 8 qui fera changer le signe à la fin	Accord pour E8
37 E9	E9 madame P oui E9 si c'est plus plus le truc bah ce sera positif P si alors plus plus moi je sais pas ce que ça veut dire tu par quelle opération E9 euh les deux là P d'une multiplication E9 non mais P ah oui si on fait un positif fois un positif E9 oui P oui c'est positif un positif fois un positif E9 d'accord P fois encore un autre positif c'est toujours positif des	Demande de confirmation de E9

	positifs je peux en mettre autant que je veux hein je peux rajouter fois plus 7 fois plus 8 fois plus 2 fois plus 1 des positifs je peux multiplier autant de fois que je veux mon produit par des nombres positifs ça ne changera jamais le signe E9 même si il y en a un qui est tout seul P même si il y en a un quoi E9 qui est tout seul comme le premier là P là (P pointe le T) E9 oui P oui ce qui nous intéresse pour le signe c'est que les facteurs négatifs d'accord parce que quand je multiplie un nombre par un nombre négatif eh bien le signe du résultat il est différent du signe du nombre de départ	

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

L'ÉVALUATION FORMATIVE À TRAVERS LES TICE: LE PROJET FASMED EN ITALIE

Annalisa CUSI, Francesca MORSELLI, Cristina SABENA

Résumé – Nous présentons les premiers résultats d'un projet sur l'utilisation des TICE pour l'évaluation formative. Les séances expérimentées (à l'école primaire et au collège) constituent des démarches d'investigation et explication. L'analyse montre comment l'enseignant peut recueillir des informations concernant le travail (et les difficultés) des élèves à l'aide des TICE, et comment le professeur peut prendre en compte ces informations pour gérer la séance.

Mots-clefs : évaluation formative, TICE, investigation et explication, rétroaction

Abstract – We present the first results of a project on the use of ICT for formative assessment. The experimented sessions (in primary school and college) may be seen as examples of inquiry and explanation activities. The analysis shows how the teacher can gather information on the work (and difficulties) of students using ICT, and how the teacher can use this information to plan and manage the teaching session.

Keywords: formative assessment, ICT, investigation and explanation, feedback

I. INTRODUCTION

Dans cette contribution nous discutons les choix théoriques et les premiers résultats d'un projet visant à étudier comment les TICE peuvent proumouvoir l'évaluation formative dans la classe de mathématiques. Les séances expérimentées portent sur la première approche de l'algèbre et sur les fonctions, avec un accent sur leurs différentes représentations. Les séquences de tâches sont conçues comme une démarche d'investigation et explication. L'analyse montre comment l'enseignant peut recueillir des informations concernant le travail (et les difficultés) des élèves à l'aide des TICE, et comment l'enseignant peut prendre en compte ces informations pour gérer la séance.

II. LE PROJET FASMED

Le projet européen FaSMEd - Formative Assessment in Science and Mathematics Education (Evaluation formative dans l'enseignement des mathématiques et des sciences) vise à étudier l'apport des TICE dans les pratiques d'évaluation formative en classe de mathématiques et sciences. Plus spécifiquement, le projet vise à promouvoir l'apprentissage des élèves en difficulté. Au bout des trois ans (janvier 2014-décembre 2016) le projet vise à produire des ressources pour l'élaboration et la mise en œuvre d'activités sur le thème.

Cusi A., Morselli F., Sabena C. (2015) L'évaluation formative à travers les TICE: le projet FaSMEd en Italie. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT10, pp. 876-880.

Dans le projet travaillent en collaboration 9 laboratoires universitaires de 7 pays européens (Newcastle University (UK), Nottingham University (UK), Sør-Trøndelag University College (Norvège), University of Education, Freiburg (Allemagne), Freudenthal Institute, Utrecht University (Pays Bas), National University of Ireland, Maynooth, (Irlande), University of Turin (Italie)) et un laboratoire de l'université de Cap Town (African Institute of Mathematical Sciences en Afrique du Sud).

III. L'EVALUATION FORMATIVE

Les partenaires ont d'abord travaillé pour établir les fondations théoriques et méthodologiques de l'étude. Au niveau théorique, une référence commune est la notion d'évalutation formative proposée par Black et Wiliam (2009). Selon les auteurs, l'évaluation formative porte sur les principes-clé suivants :

- Les buts de l'apprentissage doivent être clairs et partagés entre enseignants et élèves, et l'enseignant doit les rappeler pendant le travail des élèves.
- Au cours de la leçon, l'enseignant doit poser des questions visant à permettre aux étudiants de suivre la réalisation des objectifs fixés.
- Il est également important d'encourager l'auto-évaluation et la comparaison entre pairs, afin que les étudiants deviennent des ressources pour eux-mêmes et pour les autres et se sentent responsables de leur propre apprentissage.
- Les discussions sont conçues pour favoriser le développement d'une culture de classe qui encourage la participation active des élèves dans le processus d'apprentissage.
- Les activités en groupe donnent à l'enseignant l'occasion d'observer, d'écouter les élèves et leur poser des questions. Cela permet à l'enseignant de saisir rapidement les moments où les élèves sont en difficulté.
- Lorsque l'enseignant intervient, il doit faire usage de méthodes d'évaluation divergente : cela signifie proposer des questions qui permettent aux élèves de décrire et d'expliquer ce qu'ils pensent et comment ils pensent.
- La rétroaction devrait être fournie dans le but de suivre les progrès accomplis par les élèves, ce qui leur permet de prendre conscience des objectifs d'apprentissage, les problèmes mis en évidence et ce qu'ils peuvent faire pour les surmonter.

IV. LE PROJET FASMED EN ITALIE

Nous présentons plus spécifiquement les choix méthodologiques du travail mis en place au sein de l'équipe italienne. L'équipe travaille sur l'enseignement des mathématiques au niveau de l'école primaire et du collège (âge des élèves : 10-14). Les activités portent sur la première approche de l'algèbre, les relations et les différentes représentations. Les élèves travaillent en petits groupes, chaque groupe a à disposition une tablette pour travailler et communiquer avec l'enseignant.

Les choix spécifiques portent sur les technologies du type "connected classroom", où les tablettes sont en réseau, pour échanger des documents entre enseignant et élèves, partager les écrans, avoir des "questionnaires" pendant le travail en petits groupes. Les technologies du type "connected classroom" semblent valables pour l'évaluation formative parce qu'elles :

- fournissent des informations immédiates aux enseignants, leur permettant de suivre les progrès des élèves, d'identifier leurs besoins et les stratégies qui en découlent ;

- montrent en temps réel ce que font les élèves, mais aussi ce qu'ils pensent et leur niveau de compréhension du sujet traité ;
- permettent à l'enseignant de fournir aux étudiants une rétroaction individuelle immédiate, en les encourageant à réfléchir et suivre leurs progrès.

Côté élèves, les technologies type "connected classroom" permettent aux élèves de comparer différentes solutions, expliquer et décrire leurs stratégies. Elles permettent aux élèves de contribuer personnellement à la réalisation des activités, en prenant une part active aux discussions en classe.

En amont du choix des technologies, il y a d'autres choix méthodologiques spécifiques, qui portent sur la modalité de travail en classe (rôle central de l'argumentation, comme moyen de promouvoir l'évaluation formative) et les dimensions prises en compte (facteurs métacognitifs et affectifs aussi).

V. L'EXPERIMENTATION

Le projet est dans sa deuxième année de travail et l'équipe italienne vient de terminer son premier cycle d'expérimentations en classe. Dans cette première phase (la deuxième phase sera réalisée à l'automne), chaque classe a travaillé sur des séquences de tâches sur la première approche de l'algèbre et sur les fonctions, avec un accent sur leurs différentes représentations (descriptions verbales des relations, des expressions symboliques, graphiques et tableaux).

Les séquences ont été inspirés par les séquences d'enseignement conçues dans le projet Aral, inclus dans le projet Eltmaps européenne (apprentissage efficace et l'enseignement des mathématiques de primaire à l'école secondaire, 71678-CP-1-2001-1-UK -COMENIUS-C31), voir Cusi, Malara et Navarra (2011) et Malara et Navarra (2003) pour un encadrement théorique.

Les ressources d'Aral comprennent : (a) une discussion sur la signification mathématique et les objectifs des activités, (b) des extraits de discussions en classe, (c) les trajectoires typiques et des commentaires sur les réponses des élèves, (d) des réflexions sur les possibles feedbacks des enseignants. Pour chaque leçon, un ensemble de différentes feuilles d'activité ont été préparées. Elles visaient à:

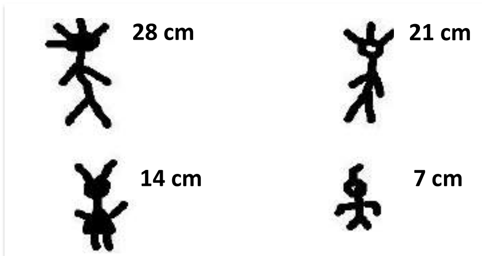
- promouvoir chez les élèves la verbalisation et la représentation des relations introduites au sein de la leçon ;
- aider les élèves à comparer et discuter ses réponses ;
- amener les élèves à réfléchir aux niveaux cognitifs et métacognitifs.

Les activités proposées aux élèves donnent lieu à une véritable démarche d'explication et investigation, selon la notion proposée par Morselli, Panucci et Testera (2015).

> Cela « peut être caractérisé par un point de départ (une situation « ouverte » proposée aux élèves) et par plusieurs tâches où les élèves, à travers un travail de type « laboratoire », formulent des conjectures, les justifient, et réfléchissent aussi sur les diverses solutions possibles et sur les façons de les présenter et justifier. Dans une démarche d'investigation et explication, l'apprentissage visé est à un double niveau : le niveau contenu (des objets mathématiques) et aussi le niveau méta (apprendre à expliquer et justifier). » (p. 139).

Dans la suite, un exemple de tâche :

Sur le mont Aral, dans le désert, l’archéologue Giancarlo a trouvé quelques figures sculptées dans la roche, qu’il a reproduites dans son carnet de notes, marquant aussi la hauteur des incisions. Voici la page où elles sont reproduites:



Il y a beaucoup de discussion avec ses associés sur une relation cachée dans les graffiti. En particulier, Nicola dit: "Il suffit de multiplier par 7 le nombre de pointes sur la tête; c’est la seule façon de trouver la hauteur d’une figure ".

Battista conclut au contraire que: "Mais vraiment, il est clair qu’en divisant par 7 la hauteur des figures vous avez le nombre de pointes."

Et Paolo: "Mais qu’est-ce que vous dites, le nombre de pointes est donné par la hauteur divisée par 7 ! »

Que pensez-vous des déclarations de Nicola, Battista et Paolo? Êtes-vous d'accord avec eux? Expliquez pourquoi.

VI. L’ANALYSE

L’analyse des séances porte sur le rôle des TICE et de l’enseignant dans la réalisation de l’évaluation formative en classe. Plus spécifiquement, l’analyse montre comment l’enseignant peut recueillir des informations concernant le travail (et les difficultés) des élèves à l’aide des TICE, et comment le professeur peut prendre en compte ces informations pour gérer la séance.

Une première classification des apports des TICE est la suivante :

A. utilisation des TICE pour promouvoir la comparaison, l’échange et la discussion ;

B. utilisation des TICE pour donner une réaction (feedback) à un étudiant ou à un groupe d’étudiants ;

C. utilisation des TICE par l’enseignant pour recevoir un feedback (sur ce que les élèves n’ont pas compris etc.).

Dans les apports du type A nous listons la possibilité de montrer à tous les élèves une production de groupe, affichée sur le tableau numérique interactif, et aussi la possibilité de créer et proposer en temps réel un sondage à tous les élèves.

Dans les apports du type B nous listons les fiches de travail adjonctives, « fiches–aide », envoyées au fur et à mesure que l’enseignant relève que les élèves ont des difficultés, ou bien quand les élèves demandent de l’aide. Aussi les interventions orales de l’enseignant sont des apports du type B.

Dans les apports du type C nous listons encore les sondages, mais aussi la possibilité pour l’enseignant de superviser en temps réel le travail des élèves et de recevoir leurs fiches de travail.

De plus, l'analyse montre comment les élèves mêmes peuvent utiliser les informations et rétroactions pour améliorer leur apprentissage.

Les différents apports des TICE, et le rôle de l'enseignant dans la gestion des TICE pour l'évaluation formative, seront discutés à travers des exemples lors de la présentation orale.

VII. PREMIERES CONCLUSIONS

L'utilisation des TICE permet à l'enseignant de saisir plus rapidement les difficultés des élèves et aide l'enseignant à guider les étudiants à mieux comprendre ce qu'ils peuvent faire pour améliorer ou corriger leurs réponses.

L'utilisation des TICE simplifie la gestion des discussions en classe, en amplifiant l'analyse et la comparaison des travaux d'élèves.

D'autre part, l'apport des TICE aide les élèves à mieux comprendre la pertinence (ou non) de leurs réponses, à comprendre comment améliorer ou corriger leurs réponses. De plus, l'utilisation de la tablette permet aux élèves de mieux faire face à leurs pairs et de comprendre le mode de raisonnement des autres.

REFERENCES

Black P., Williams D. (2009) Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability* 21(1), 5-31.

Cusi A., Malara N. A., Navarra, G. (2011) Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Bringing the Teachers to Promote a Linguistic and Metacognitive approach to it. In Cai J., Knuth E. J. (Eds.) *Early Algebraization: Cognitive, Curricular, and Instructional Perspectives* (pp. 483-510). Berlin Heidelberg: Springer.

Douek N., Morselli F. (2012) Preuve et algèbre au collège: de la conception d'une séquence d'apprentissage à l'évolution du cadre théorique de référence. In Coulange L., Drouhard J.P. (Eds.) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Numéro hors série de la Revue Recherches en Didactiques des mathématiques* (pp. 283-304).

Malara N. A., Navarra G. (2003) *ArAl Project: Arithmetic Pathways Towards Pre-Algebraic Thinking*. Bologna: Pitagora.

Morselli F., Panucci E., Testera M. (2015) Démarche d'investigation et explication au collège. *Recherches en éducation 21, 138-151.*

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

INVESTIGATION, COMMUNICATION ET SYNTHÈSE DANS UN TRAVAIL MATHÉMATIQUE : UN DISPOSITIF EN LYCEE

Jean-baptiste LAGRANGE[1], Roselyne HALBERT[2], Christine LE BIHAN[2], Bernard LE FEUVRE[2], Marie Catherine MANENS[2], Xavier MEYRIER[2], Minh TRAN KIEM[3]

Résumé – Cet article présente une évolution du cadre théorique et de la mise en œuvre de démarches d'investigations en lycée par le groupe Casyopée. Les différents domaines de modélisation des fonctions, précédemment organisés dans un « cycle de modélisation fonctionnelle » sont ici décrits comme des espaces de travails fonctionnels. Ceci conduit à un dispositif investigation, communication, synthèse (ICS) pour la résolution d'un problème en classe, permettant une dialectique médias-milieux efficace. Sur l'exemple de la modélisation des câbles du pont du Golden Gate, une mise en œuvre du dispositif en Terminale est comparée à une autre, inspirée du cycle de modélisation.

Mots-clefs : Investigation, Modélisation, Casyopée, Dialectique Médias-milieux, Espaces de Travail Fonctionnels

Abstract – This paper presents an evolution of the Casyopée group's theoretical framework and implementation of investigation approaches at high school level. Domains for functional modelling previously organised in a "functional modelling cycle" are here described as "functional work spaces". This leads to an investigation, communication and synthesis scheme for designing a problem solving classroom situation, allowing an effective medias-milieux dialectic. In the example of modelling the Golden Gate Bridge cables, an implementation of this scheme is compared to another, inspired by the modelling cycle.

Keywords: Investigation, Modelling, Casyopée, Medias-milieux dialectic, Fonctionnal Work Spaces.

I. CONTEXTE ET TRAVAUX ANTERIEURS

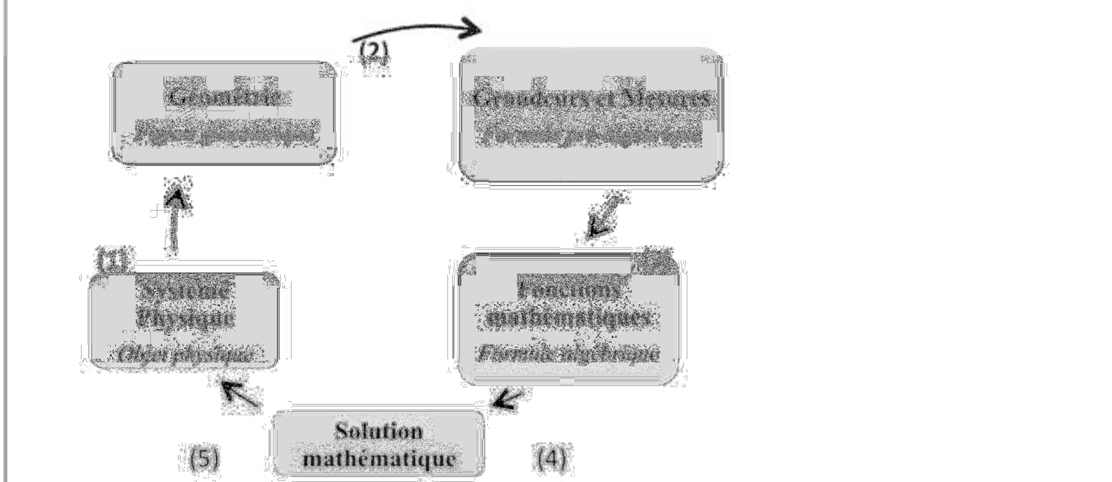
Le groupe Casyopée de l'IREM de Rennes situe sa réflexion autour de l'apprentissage des fonctions de la Troisième à la Terminale, et de l'apport d'un logiciel développé à cet effet. Comme nous l'expliquons (Halbert, Lagrange, Le Bihan, Le Feuvre, Manens, Meyrier 2013), nous voyons un double enjeu à cet apprentissage : comprendre l'aspect « dépendance » qui sous-tend les fonctions et s'approprier le formalisme fonctionnel, de façon à les faire fonctionner dans la résolution de problèmes. Nous proposons de répondre à ces enjeux par la mise en place, l'expérimentation de situations de résolution de problèmes de « modélisation fonctionnelle » en classe ainsi que par l'élaboration d'un cadre théorique, permettant l'analyse de ces situations et leur diffusion.

1 LDAR, Université Paris-Diderot et Université de Reims – France - jb.lagrange@casyopee.eu.
2 Groupe Casyopée, IREM de Rennes.
3 College of Education, Hue University, Vietnam.

Lagrange J-B., Halbert R (2015) Investigation, communication, synthèse dans un travail mathématique : un dispositif en lycée. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT10, pp. 881-890.

Le cadre théorique développé Minh (2012) et Halbert et al. (2013) considère les différents domaines de connaissance où une même dépendance fonctionnelle intervient, comme des cadres au sens de Douady (1986), à l'intérieur desquels interviennent différents systèmes de représentation dont certains sont des registres au sens de Duval (1999). Le cadre théorique s'inspire de travaux sur la modélisation (Blum, Galbraith, Henn & Niss 2007) pour orienter, sur un problème donné, les travaux des élèves selon un « cycle de modélisation fonctionnelle » parcourant ces domaines (Figure 1).

Dans un exemple développé par Halbert et al. (2013) et analysé du point de vue des démarches d'investigation par Gueudet et Lebaud (2014), un premier domaine est constitué d'un système physique (un montage avec roue, cordes et masse) où une question relative au déplacement d'une masse est posée. Le second domaine est celui de la géométrie dynamique dans laquelle la réalisation d'une figure plane dynamique qui représente les éléments essentiels du système physique et de leurs relations est une première étape de modélisation. Dans ce domaine, la dépendance entre éléments physiques se modélise par une dépendance géométrique : on tire un point et la figure « bouge ». La troisième étape, de quantification, modélise la dépendance par une relation entre grandeurs. C'est dans ce domaine des mesures et grandeurs, que les élèves identifient les éléments constitutifs d'une fonction : variable et valeur. Le troisième domaine est celui des fonctions mathématiques où un traitement algébrique donne des éléments sur la question posée. Finalement, le retour dans le Système Physique a pour objectif d'interpréter et de vérifier l'adéquation du modèle mathématique.



1. Modéliser le système par une figure géométrique dynamique
2. Créer des calculs géométriques, choisir une variable et créer une formule pré-algébrique exprimant la relation de dépendance
3. Représenter algébriquement la formule pré-algébrique
4. Preuve algébrique
5. Interprétation

Figure 15 *– Le cycle de modélisation fonctionnelle*

En reprenant les termes de Douady (1986), les différents passages d'un domaine à l'autre sont des « changements de cadres » susceptibles de « faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des élèves » relativement à un problème de dépendance fonctionnelle. Au cours du cycle, les élèves rencontrent différentes représentations et formalismes d'une même dépendance, certains liés au système physique, d'autres à la géométrie et aux grandeurs, et *in fine* au symbolisme mathématique. Assistés par le professeur ils donnent sens à ces différentes représentations ou formalismes et s'initient à leur fonctionnement. La présence du dispositif physique ou d'une maquette permet aux élèves d'expérimenter et de comprendre la question. Le logiciel Casyopée est conçu pour soutenir le travail des élèves dans les trois autres domaines, avec des fenêtres spécifiques pour chaque domaine permettant de bien l'identifier, ainsi que pour faciliter le passage d'un domaine à l'autre4.

Ce cadre s'est avéré très utile. Notamment, il a permis à Minh (2012) de rendre compte de la genèse instrumentale d'élèves au long des deux années de Première et Terminale. Cependant nous en voyons des limites, tant d'un point de vue purement théorique que de celui des situations que nous expérimentons. D'un point de vue théorique, une analyse en termes de cadres et de registres rend compte partiellement des spécificités de chaque domaine. Les cadres mettent l'accent sur les éléments théoriques propres au domaine, laissant de côté la spécificité des objets non théoriques sur lesquels le travail s'exerce et des artefacts qui permettent ce travail. Une approche en termes de registres comporte le risque de ne voir dans les objets manipulés dans les différents domaines que des « représentations » d'un même objet idéal, la représentation comme fonction mathématique étant dominante et les autres jouant le rôle de « faire valoir » ou de « motivation ». Du point de vue des situations, nous sommes « interpellés » par l'accent croissant mis tant par la recherche que par les curricula sur les démarches d'investigation, ce qui nous conduit à tenter de dépasser la problématique de la « résolution de problème par modélisation » qui a été la nôtre jusqu'à présent.

II. EVOLUTION DU CADRE THEORIQUE

1. *La dialectique des medias et des milieux*

« Investiguer » peut être pris dans deux significations. (1) S'informer de solutions déjà obtenues ou d'approches déjà mises en œuvre. (2) Construire soi-même des éléments de solution en mobilisant des capacités de représentation, de modélisation et de raisonnement pour se confronter aux éléments du problème. Il est généralement admis que des « démarches d'investigation » bien conduites associent les deux significations. Depuis Chevallard (2007) cette dualité est décrite comme la dialectique des médias et des milieux. Le terme « milieu » est pris dans le sens de la Théorie des Situations Didactiques (TSD). La TSD donne une place centrale à cette notion : un système antagoniste dénué d'intentions didactiques, mais organisé par l'enseignant dans l'intention de provoquer l'apprentissage. Dans les situations que nous considérons, le milieu est constitué des éléments auxquels l'individu se confronte dans sa recherche d'éléments de solution.

Pour Chevallard (2007),

> l'existence d'une dialectique vigoureuse (et rigoureuse) entre médias et milieux est une condition cruciale pour qu'un processus d'étude et de recherche ne se réduise pas au recopiage acritique d'éléments de réponse épars dans les institutions de la société.

Nous ne nous situons pas quant à nous dans une perspective de processus tels que cet auteur les a formalisés sous l'appellation « parcours d'étude et de recherche ». Tout en retenant la nécessité d'une dialectique efficace, nous nous orientons plutôt vers la mise en place de

[4] « L'environnement de Casyopée prend en charge les activités de traitement à l'intérieur de chaque registre utilisé : écriture de la fonction, calcul de sa dérivée, représentation graphique. Par contre, il laisse les activités de changements de registres à la charge de l'élève comme la modélisation par une fonction. Ainsi le lien entre la situation de départ et la fonction étudiée fait sens pour l'élève. Il s'agit ici spécifiquement d'un logiciel dédié à l'apprentissage des fonctions qui libère les élèves d'une partie calculatoire, assez lourde, pouvant cacher la notion que l'enseignant souhaite faire découvrir » (Gueudet, Lebaud 2014).

moments de travail des élèves s'inscrivant dans l'écologie habituelle d'une classe de lycée, et plus particulièrement dans l'exemple que nous allons traiter, d'une classe de Terminale Scientifique à trois mois du baccalauréat. Pour préparer une dialectique efficace, nous pensons qu'il faut enrichir le milieu par des éléments d'information préparés à l'avance. Ces éléments doivent pouvoir aisément être reconnus par les élèves comme de même nature que ceux qu'ils seraient allés chercher s'ils étaient dans un processus donnant suffisamment de temps pour une démarche à leur propre initiative. Ils doivent aussi participer aux potentialités d'action et de rétroaction du milieu ; c'est pourquoi ils doivent être conçus pour permettre aux élèves une sélection, une analyse et une interprétation faisant intervenir les autres éléments du milieu. Ces éléments peuvent être des informations textuelles, mais aussi des « résultats » obtenus par le biais d'artefacts de calcul, notamment Casyopée que nous privilégions. L'utilisation du calcul formel que permet ce logiciel participe à une dialectique medias-milieux efficace[5].

2. *Les espaces de travail fonctionnels*

Le cadre théorique des Espaces de Travail Mathématiques nous est apparu comme pertinent pour rendre compte de notre approche de situations de « modélisation fonctionnelle » avec un environnement logiciel articulant géométrie dynamique et calcul formel et pour dépasser les limites d'une approche « cycle de modélisation ».

En partant de la géométrie, Kuzniak & Richard (2013) ont proposé l'idée d'espace de travail mathématique comme une façon de concevoir et d'analyser les environnements dans lesquels les travaux mathématiques ont lieu à l'école, en particulier l'identification des objets, artefacts et des règles, et en reliant un niveau épistémologique et un niveau cognitif.

Ceci amène à repenser les composantes du cycle de modélisation comme plusieurs « espaces de travail fonctionnels » (ETF). (Tableau 1). L'idée est que l'étude d'une question mobilise plusieurs espaces de travail autour d'objets, chaque objet dans un domaine pouvant apparaître comme un modèle de l'objet dans un autre[6]. Chaque espace se caractérise par les artefacts qui permettent de travailler sur l'objet et par un cadre de référence ou référentiel théorique. Ceci implique que la question à travailler prend sens dans les différents domaines et donne un sens aux objets, sans qu'un domaine soit privilégié ni qu'il y ait nécessité d'organiser un parcours linéaire des domaines dans un cycle : il est possible d' « investiguer » sans privilégier un domaine ni un parcours.

Par ailleurs Kuzniak & Richard (2013) insistent sur le fait que les ETM ne sont pas donnés, mais se construisent dans les processus d'enseignement apprentissage. Ainsi, des ETM de référence peuvent exister autour de façon standard socialement admises pour formuler des questions et organiser des réponses en privilégiant certains artefacts et certains modes de pensée. Mais ils doivent être aménagé(s) et organisé(s) pour devenir des espaces de travail « idoines » dans une institution d'enseignement donnée avec une fonction définie.

Pôles\ espaces de travail	Dispositif physique	Figure dynamique	Grandeurs	Algèbre
Objet	Dépendance mécanique	Co-variation géométrique	Co-variation entre mesures, variables	Fonctions définies par une formule
Artefacts	Dispositif,	Primitives	Langage,	Symbolisme et

5 Voir note 2

6 Le terme modèle synthétise les deux sens symétriques et opposés de la notion de ressemblance, d'imitation, de représentation (Wikipédia).

	langage	construction, langage géométrique	expressions symboliques spécifiques	langage algébriques
Cadre de reference	Contraintes et lois physiques	Propriétés géométriques	Quantification	Théorèmes d'algèbre et d'analyse

***Tableau 1 –** Quatre espaces de travail (adapté de Lagrange 2015)*

Comme le dit Kuzniak (2011)

> les experts concepteurs de la réorganisation didactique des diverses composantes de l'espace de travail (…) aménagent un ETM qui peut être idoine parce qu'il respecte les intentions et le cahier des charges de l'institution demandeuse.

III. QUESTION ET DISPOSITIF

Nous souhaitons jouer, même modestement, le rôle d'expert tel que l'entend Kuzniak (2011), et donc notre questionnement actuel peut s'énoncer ainsi :

Compte tenu des contraintes des classes de lycée, particulièrement de la Terminale, est-il possible de faire vivre aux élèves des situations problématiques, associant plusieurs ETM (« idoines ») avec un contrôle efficace de la dialectique medias-milieux ?

Ceci nous conduit à mettre en place un dispositif original que nous pensons compatible avec les contraintes de classes de lycée. Il amène les élèves à une *investigation* dans plusieurs ETF, et à *communiquer* en vue d'une *synthèse* (ICS) :

- Dans un premier temps, des *investigations* autour d'une même question sont conduites par un ou plusieurs groupes, chacune dans un ETF spécifique.
- Dans un second temps, les groupes sont « mixés », de façon que dans chacun des nouveaux groupes, pour chacun des ETF, le travail dans un des groupes initiaux puisse être *communiqué* par un-e élève.
- Dans un troisième temps, une *synthèse* est élaborée collectivement.

Nous nous inspirons pour ce dispositif de la technique dite de la « Jigsaw Classroom »[7], ainsi décrite par ses concepteurs :

> a cooperative learning technique that reduces racial conflict among school children, promotes better learning, improves student motivation, and increases enjoyment of the learning experience… Just as in a jigsaw puzzle, each piece — each student's part — is essential for the completion and full understanding of the final product.

Cette technique nous a semblé cohérente avec un travail différencié et collaboratif dans des espaces de travail bien spécifiques.

Pour les élèves, les « pièces » sont présentées comme des « approches » d'une même question, impliquant un travail sur les objets du monde physique, sur une figure géométrique, sur les grandeurs, ou sur une ou des fonctions définies par des formules.

IV. LE PONT DU GOLDEN GATE BRIDGE

La question dans cette situation est celle d'une fonction qui modélise, dans un repère donné, la courbe dessinée par un câble principal. Le but est que les élèves comprennent (1) la tension comme une grandeur vectorielle évoluant au long du câble, (2) comment cette évolution

7 https://www.jigsaw.org/

détermine la forme de la courbe et son équation. Sur un plan plus général, la question est choisie pour amener à comprendre comment, dans une modélisation du réel, une fonction « émerge » à partir de relations physiques. Avec cette situation et d'autres précédemment expérimentées (http://www.casyopee.eu/file/Doc/PageMiniSites.htm) nous visons à remédier à ce que nous voyons comme un défaut majeur de l'analyse au lycée : l'absence de motivation du calcul différentiel et intégral comme outil de modélisation.

Dans le cadre du travail du groupe, nous avons opéré deux mises en œuvre :

- La première est inspirée par le cycle de modélisation. Elle fait l'objet d'une présentation sur le site http://casyopee.eu (entrée GoldenGateBridge, menu à gauche).
- La seconde a conduit à la mise en place du dispositif ICS que nous venons d'exposer.

Dans cette seconde mise en œuvre, la partie *investigation* repose sur cinq documents, chacun comportant une partie commune avec des informations générales sur le pont et une partie spécifique. Voici quelques éléments sur ces parties spécifiques et le travail attendu des élèves.

Le document A donne comme consigne de regarder une vidéo et d'en faire un compte-rendu accompagné d'un schéma. La vidéo, enregistrée dans une autre classe, illustre la notion de tension dans une corde, particulièrement le fait que quelle que soit la tension exercée aux extrémités, une force exercée en un des points de la corde suffit pour que la corde « fléchisse ». Un schéma est proposé avec une force verticale s'exerçant en quatre points d'un câble et il est demandé d'indiquer les forces s'exerçant dans le câble entre ces points par référence à la notion de tension. On s'attend à ce que les élèves fassent référence à la première loi de Newton et l'appliquent sur le schéma.

A partir de l'image d'une maquette sous forme d'un câble portant des masses équi-réparties horizontalement, le document B propose une ligne brisée en n segments comme modèle du câble, les abscisses des milieux des segments étant réparties régulièrement sur la longueur du pont, et des poids égaux s'exerçant en chacune des extrémités communes à deux segments. Il est demandé aux élèves de considérer les composantes verticale et horizontale de la tension en chacun de ces points, de façon à trouver des relations de récurrence, puis les valeurs en fonction de la position du point. On s'attend à ce que les élèves montrent que la composante horizontale est constante et que la composante verticale croît comme une suite arithmétique.

Le document C propose un algorithme de tracé itératif d'une ligne brisée. L'algorithme prend en entrée le nombre N de segments, et une variable H. Dans l'itération, l'abscisse du point courant est incrémentée de façon que les points soient répartis régulièrement selon l'axe des x. Une variable V évolue linéairement et l'ordonnée est incrémentée proportionnellement à cette variable. Les élèves doivent donner « une valeur appropriée » pour N et H. On s'attend à ce qu'ils reconnaissent N comme le nombre de segments entre deux câbles de suspension verticaux, prennent conscience de l'influence de H sur la forme de la courbe et donnent à cette variable une valeur telle que cette courbe puisse être reconnue comme un modèle du câble. Les élèves doivent ensuite interpréter le programme sous forme d'une relation de récurrence pour les abscisses et les ordonnées des points et expliquer leur construction. On s'attend à ce que les élèves reconnaissent un algorithme de tracé approché de la courbe d'une primitive d'une fonction (méthode d'Euler), qui a fait l'objet d'un travail antérieur.

Dans le document D, le câble est aussi une ligne brisée, les segments étant les portions entre deux attaches de câbles de suspension verticaux. Le document ne considère pas les tensions, mais donne une expression du coefficient directeur de chaque segment. Ayant indiqué un repère, il demande une expression du coefficient directeur de chaque segment en fonction de l'abscisse du milieu du segment, puis un algorithme pour afficher ces points. Il s'agit pour les élèves de passer du couple (abscisse du milieu ; coefficient directeur) à une relation fonctionnelle et de trouver comment cette relation permet, par itération, de calculer les ordonnées.

Le document E considère le câble comme modélisé par la courbe d'une fonction mathématique *f*. Il indique que la composante horizontale de la tension est une constante *H* et donne la composante verticale sous forme d'une fonction linéaire *V*. Les élèves doivent alors s'aider de Casyopée pour trouver le domaine et la formule définissant *f*. On s'attend à ce que les élèves reconnaissent que la tension en un point s'exerce selon la tangente à la courbe en ce point, en déduisent la dérivée de *f* puis *f* elle-même comme une primitive dépendant du paramètre *H* et d'un paramètre additif, et règlent ces paramètres pour que la courbe de *f* s'ajuste à une image du câble.

Le document pour la phase de *communication* reprend les informations communes à A, B, C, D et E et demande d'

> associer les documents et les études faites de manière à donner le plus d'information possible sur la courbe décrite par un des câbles principaux.

Il nous semble que, conformément à notre cadre théorique, les documents A, B, C, D et E installent des espaces de travail différents, sur des objets modèles les uns des autres. Dans le document A, le travail se fait dans le domaine des forces sur une simple corde, sans quantification. Le document B porte sur un modèle plus proche du câble réel et quantifie les tensions. Le document C permet un travail sur un modèle discret concrétisé par un algorithme. Dans le document D, l'enjeu est une relation fonctionnelle entre abscisse et coefficient directeur, qui permet d'obtenir une relation fonctionnelle entre abscisse et ordonnée. L'enjeu du document E est la fonction mathématique avec les outils algébriques et avec Casyopée. Dans les documents A et B, la première loi de Newton constitue le référentiel théorique, respectivement dans un cadre géométrique et dans un cadre analytique. Pour les documents C et D, il s'agit des relations de récurrence et de leur écriture dans un algorithme itératif et pour le document E, de la relation fonction-dérivée.

Le dispositif prévoit un premier travail d'*investigation* en groupe, chaque groupe travaillant sur un seul des cinq documents A, B, C, D ou E, puis un second travail dans les groupes « mixés » autour du document pour la phase de *communication.* Ainsi, pour un-e élève donné-e, un des espaces est le lieu privilégié d'une confrontation à un milieu dans un domaine dont il devient ainsi « expert ». Ensuite, il-elle s'« informe » auprès d'élèves « experts » dans d'autres domaines et les « informe » de son expertise. Ceci prépare une phase collective de *synthèse* dirigée par le professeur.

V. OBSERVATION ET EVALUATION

La classe est une Terminale scientifique de 35 élèves au début du mois d'avril, soit à quelques semaines du baccalauréat. La technique de « jigsaw teaching » a déjà mise en place dans la classe pour l'élaboration d'un cours sur un chapitre du programme et les élèves ont utilisé Casyopée pour la résolution de problèmes. La séance dure 2h15 dans une salle ordinaire. Un ensemble d'ordinateurs portables, appelé « classe mobile » est à disposition des élèves. Casyopée est installé sur ces ordinateurs ainsi que le film mentionné dans le document A. Les élèves disposent de leurs calculatrices qui constituent leur environnement de programmation habituel. Dans les deux phases, les groupes sont de 4 à 5 élèves. Chacune des phases dure environ 40 minutes.

Les données sont constituées des enregistrements vidéo des travaux de groupes et de la phase de *synthèse*[8], ainsi que des traces écrites des travaux de groupe. L'analyse des données sur les groupes d'*investigation* montre un comportement des élèves globalement conforme aux attentes pour les groupes travaillant sur les documents A et B. Les groupes travaillant sur le document C ont passé une partie du temps à entrer le programme proposé dans leur calculatrice. Ils ont ensuite été bloqués par un bug de la calculatrice qui empêchait de visualiser correctement la courbe et donc de voir l'influence de H. Ils ont ensuite posé les relations de récurrence comme demandé. Les groupes travaillant sur le document D ont eu beaucoup de difficulté à interpréter la formule donnant le coefficient directeur, à trouver une formule pour l'abscisse du milieu et à éliminer l'indice du segment pour trouver la relation fonctionnelle demandée. Les groupes travaillant sur le document E ont trouvé correctement l'ensemble de définition et la fonction V, puis ont essayé de tirer parti de ce que la tension en un point s'exerce selon la tangente en ce point. Bien que la notion de primitive ait été mise en évidence, il y a eu ensuite confusion entre somme vectorielle et somme de nombres réels, et entre l'expression de la fonction et l'équation de la tangente. Les élèves ne semblent pas avoir utilisé réellement Casyopée.

L'analyse des vidéos des groupes de *communication* montre un travail d'explicitation par chaque membre d'un groupe d'investigation donnant lieu à écoute et questionnement par les autres. Les documents rédigés par les groupes témoignent de ce que la réflexion dans chacun des domaines a progressé. Référence est faite à la méthode d'Euler ou à la méthode des rectangles pour l'algorithme. Seule une partie des groupes aborde le calcul mathématique, mais ceux qui le font donnent un calcul correct de la fonction modélisant le câble. Cependant, aucune valeur de H n'est proposée. Les notions de tension, de suites définies par récurrence ou arithmétique, de primitive ainsi que la loi de Newton, et le lien entre dérivée et coefficient directeur de la tangente sont mentionnés.

Dans la phase collective de *synthèse*, l'enseignante fait parcourir aux élèves les 5 documents en insistant sur les points qui lui ont paru importants « à chaud ». A chaque étape un-e élève est au tableau, mais c'est bien l'enseignante qui dirige. Nous prenons les points sur lesquels l'enseignante insiste comme indices de savoirs qu'elle souhaite institutionnaliser. Ils sont de deux ordres : (1) des savoirs en Mathématiques et en Physiques, (2) des éléments relatifs à la question posée et à la méthode pour y répondre.

Parmi les savoirs concernant l'ordre (1), on repère :

- la loi de Newton, l'enseignante insistant sur la construction de l'équilibre de trois forces et la décomposition d'une relation vectorielle sur deux axes,
- la nature des suites et le lien avec les variables dans l'algorithme,
- le coefficient directeur d'une droite connaissant un vecteur directeur, ce point semblant une difficulté pour les élèves, concentrés sur le fait que la droite est une tangente et donc que le coefficient directeur est le nombre dérivé,
- la constante d'intégration dans le calcul d'une primitive et une méthode pour la calculer.

Parmi les savoirs concernant l'ordre (2) on repère :

- le fait que la tension à des points donnés conduit à modéliser le câble comme une ligne brisée,
- le rapport entre le caractère constant de la composante horizontale et le paramètre H dans les différentes formules,

[8] Les vidéos sont visibles à http://casyopee.eu/articles.php?lng=fr&pg=83

- le fait que la forme de la courbe pouvait être conjecturée *a priori*, mais que l'étude permet de la « trouver »,
- la nécessité de trouver H (mais remise à une prochaine séance).

Notons que les savoirs concernant l'ordre (1) interviennent plutôt dans les étapes du parcours (exploitation d'un document) et les savoirs concernant l'ordre (2) plutôt dans les transitions.

VI. ELEMENTS DE BILAN

Rappelons qu'il s'agit d'une première mise en œuvre d'un dispositif novateur et complexe sur un problème lui aussi complexe et qu'il ne faut pas voir dans cette expérimentation une donnée à diffuser, mais plutôt une ouverture sur des questions.

Nous comparons pour cela avec la mise en œuvre « cycle de modélisation » (CM) dont voici quelques éléments. Une première séance collective de 30 minutes a pour but d'exposer le problème et par une étude similaire à celle des documents A et B à présenter la notion de tension dans le câble. Il est admis, sans passer par un modèle discret, que la composante horizontale H est constante et que la composante verticale V en un point croît de façon linéaire en fonction de l'abscisse du point. Une formule est trouvée pour V, et l'égalité $f'(x) = \frac{V(x)}{H}$ est reconnue comme pouvant conduire à déterminer f. Dans une seconde séance d'une heure et quart sur ordinateur, les élèves s'aident de Casyopée avec lequel ils sont familiers : il leur est demandé d'entrer et de placer une image du pont dans le repère de l'écran de géométrie, puis de déterminer la valeur de H et une courbe modélisant le câble ; ils utilisent pour cela des fonctionnalités de Casyopée qu'ils connaissent : entrée d'une fonction avec paramètre, calcul d'une primitive, pilotage du paramètre pour ajuster la courbe à l'image du câble. Dans une troisième séance collective de 30 min le professeur reprend la situation et présente les stratégies rencontrées. Il termine en indiquant les savoirs et connaissances mis en jeu dans cette étude.

Le temps consacré est similaire dans les deux mises en œuvre, mais les différences sont nombreuses. La mise en œuvre du dispositif ICS est plus ambitieuse, puisque l'étude de la tension à la courbe vise à être complète dans le cas discret et inclut un aspect algorithmique. A travers le document D, il y avait aussi l'ambition de lier discret et continu, mais les difficultés de calcul ont masqué la réflexion. Une conséquence est que le travail sur le document E, qui se situe dans l'ETF « mathématique » apparaît peu lié aux précédents dans la synthèse. De façon plus générale, il semble que, à travers la segmentation des ETFs, la question de la valeur de la tension constante H n'arrive pas à s'imposer comme lien entre les investigations.

De façon un peu inattendue pour nous, la mise en œuvre du dispositif ICS minimise fortement l'usage des instruments technologiques en faveur du papier crayon. Certes les groupes C analysent l'algorithme, mais ils n'exploitent pas cet algorithme pour répondre à la question. Les groupes E sont accaparés par le calcul en papier/crayon et ne saisissent pas l'occasion d'utiliser Casyopée. A l'inverse, le dispositif CM installe l'instrument dans une phase spécifique et sur une tâche bien balisée. En cherchant à dépasser un dispositif CM, une ambition des auteurs de cet article est la mise en place, à travers l'usage de la « classe mobile », de séances où le papier/crayon s'accorde avec l'usage de calculatrices et de Casyopée dans des problèmes de modélisation. Le document E aurait pu en être l'occasion, mais l'expérimentation montre que dans un travail de groupe d'une quarantaine de minutes, il est peu réaliste de penser que les élèves vont quitter le papier/crayon avec aussi peu d'indications sur l'usage de Casyopée.

La richesse des échanges dans les groupes de communication, et le fait que les différents aspects de la question ont effectivement été abordés témoignent de l'adhésion des élèves au dispositif et au type de problème malgré la proximité du bac, et indiquent que la dialectique media-milieu fonctionne. La question de l'« idonéité » des ETFs reste posée. Il semble par exemple que le travail prévu dans le document E aurait pu être segmenté, une investigation se faisant en papier/crayon et l'autre dans un travail mieux balisé avec Casyopée. Une autre question est celle du lien entre les investigations. Il serait utile de savoir d'une part ce que les élèves retiennent de la synthèse, et aussi quelles techniques professorales sont efficaces dans la phase de synthèse.

Acknowledgment: This research was supported by Vietnam National Foundation for Science and Technology Development (NAFOSTED), under grant number VI1.99-2012.16.

REFERENCES

Blum W., Galbraith P. L., Henn H-W. & Niss M. (Eds.) (2007) Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study. New ICMI Study Series Volume 10.

Chevallard C. (2007) Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux mars 2007 Communication au Séminaire national de didactique des mathématiques le 23 mars 2007. Paru in G. Gueudet & Y. Matheron (Eds), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques,* année 2007, ARDM et IREM de Paris 7, Paris, pp. 344-366.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2).

Duval R. (1999) Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds), *Proceedings of the twenty-first annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico, vol 1, pp. 3-26.

Gueudet, G., Lebaud M-P. (2014) Usage des technologies et investigation en mathématiques : quels contrats didactiques possibles ? *Recherches en Éducation* –21.

Halbert R., Lagrange J-B., Le Bihan C., Le Feuvre B., Manens M-C., Meyrier X. (2013) *Les fonctions : Comprendre la notion et résoudre des problèmes de la 3ème à la Terminale. L'apport d'un logiciel dédié*. I.R.E.M de RENNES – Université de RENNES.

Kuzniak A. (2011) L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak A., Richard P.R. (2013) Espaces de travail mathématique. Point de vues et perspectives. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 17, Numero Extra. 1.*

Lagrange (2015) Functions in technological environments: from multi-representations to connected functional workspaces. In Gomez-Chacon, I., Escribano, J., Kuzniak A., Richard, P. (Eds.) (2015). *Mathematical Working Space, Proceedings Fourth ETM Symposium*. Madrid: Publicaciones del Instituto de Matematica Interdisciplinar, Universidad Complutense de Madrid. ISBN: 978-84-606-9475-5, pp.317-336. http://www.mat.ucm.es/imi/ETM4/ETM4libro-final.pdf

Tran Kiem M. (2012) Une approche expérimentale des fonctions avec le logiciel Casyopée. *Petit x* 88, 49-74.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

QUELLE PLACE POUR UNE DÉMARCHE D'INVESTIGATION EN MATHÉMATIQUES DANS LE CADRE D'UN ATELIER DE RECHERCHE INTERDISCIPLINAIRE ?

Benoît RAY*

Résumé – Dans cette contribution, nous présentons deux exemples d'ateliers scientifiques interdisciplinaires dans lesquels les mathématiques interviennent en relation avec la physique ou avec la philosophie. Après avoir présenté le dispositif dans ses grandes lignes, nous décrivons les travaux effectués par les élèves. En questionnant la place des différents acteurs, nous tentons ensuite de dégager en quoi les conditions de ce dispositif ont permis aux élèves de pratiquer une démarche d'investigation dense et d'entrevoir ce qui est constitutif de l'activité scientifique d'un chercheur.

Mots-clefs : démarche d'investigation en mathématiques, recherche interdisciplinaire, modélisation, ateliers scientifiques, projet « Tous Chercheurs ».

Abstract – In this contribution, we present two examples of scientific cross-disciplinary field experiences in which mathematics interfere with physics or philosophy. After presenting the main features of the workshop, we describe the students 'work. Then, by questioning the different actors, we try to outline in what way this type of organization allows the students to follow a thorough inquiry-based approach and to catch a glimpse of what is at stake in a scientific researcher's activity.

Keywords: inquiry-based mathematics, interdisciplinary research, mathematical modelling, science workshops, "Tous Chercheurs" project.

Dans tous les domaines scientifiques, les actuels programmes français de l'école primaire, du collège et du lycée préconisent la pratique d'un enseignement tourné vers la démarche d'investigation. Les travaux de recherche en didactique mettent en évidence la pluralité des démarches d'investigation en mathématiques ; elles montrent également que ces pratiques trouvent difficilement leur place dans l'enseignement des mathématiques (nous nous référons aux travaux du groupe de travail n°10 du colloque EMF 2012 et au rapport de la Commission Inter-IREM Lycée). En France, ces démarches semblent plus facilement adoptées par les enseignants des disciplines dites expérimentales (sciences physiques, sciences de la vie et de la terre, technologie). Nous nous posons donc la question suivante : quels moyens se donner pour faire vivre d'authentiques pratiques interdisciplinaires engageant les mathématiques ?

Pour tenter d'apporter des éléments de réponse à cette question, nous avons expérimenté un dispositif particulier hors de la classe de mathématiques. Notre contribution, qui consiste en un retour sur cette expérience, s'inscrit essentiellement dans l'axe 3 du GT10 : « rôles et responsabilités des élèves ».

* Enseignant Expatrié à Mission de Conseil Pédagogique pour le second degré – Lycée Pierre Mendès - France – TUNIS (établissement en gestion directe de l'Agence pour l'Enseignement Français à l'Étranger)

Ray B. (2015) Quelle place pour une démarche d'investigation en mathématiques dans le cadre d'un atelier de recherche interdisciplinaire ? In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT10, pp. 891-902.

Après avoir resitué le projet « Tous Chercheurs » dans le cadre des « Actions Pédagogiques Pilotes » en nous interrogeant sur l'implication des mathématiques, nous décrirons les recherches effectuées par nos élèves dans deux ateliers faisant intervenir les mathématiques, les sciences physiques et la philosophie. Nous tenterons ensuite de montrer en quoi une telle activité de recherche est de nature à mettre en valeur des compétences transversales, à développer une vision interdisciplinaire de la recherche scientifique, à s'interroger sur les enjeux épistémologiques des sciences et à pratiquer une démarche d'investigation consistante.

I. LE PROJET « TOUS CHERCHEURS » ET LES « ACTIONS PEDAGOGIQUES PILOTES » ; QUESTION DE L'INTERDISCIPLINARITE ENTRE MATHEMATIQUES ET AUTRES DISCIPLINES

1. Le projet « Tous Chercheurs » et les « Actions Pédagogiques Pilotes »

L'opération « Tous Chercheurs » a vu le jour en 2011, sous l'impulsion de l'association du même nom (association loi 1901), qui œuvre pour la promotion de la démarche scientifique auprès du grand public. Par le biais de stages dans lesquels une large part est accordée à l'expérimentation et au débat, elle tente de faire découvrir la pratique actuelle des sciences dans les laboratoires de recherche.

> Notre but est que les citoyens de tous âges puissent faire la différence entre un fait scientifique et une opinion et argumenter leurs prises de position. (http://touschercheurs.fr/)

« Tous Chercheurs » propose dans les établissements scolaires un dispositif permettant de poursuivre les objectifs de l'association :

> L'opération Tous Chercheurs est une initiative de Pédagogie Active par Projets qui aide les professeurs de l'enseignement secondaire à développer dans leurs classes des activités pédagogiques innovantes. Ces activités ont pour but de développer l'esprit critique et l'autonomie des élèves, ainsi que leur habileté expérimentale dans le cadre d'une tâche complexe. (Ibid.)

Il s'agit de mettre en œuvre avec des élèves volontaires de lycée (secondaire, 15 – 18 ans) des projets de recherche sur une durée de trois à cinq mois. Ces projets sont encadrés par des enseignants volontaires, en collaboration avec des chercheurs universitaires. Tout au long du projet, le groupe d'élèves doit maintenir un blog décrivant ses recherches ; le projet s'achève par une conférence en public, durant laquelle les élèves présentent les résultats de leurs recherches.

L'aspect expérimental des travaux est une composante essentielle des projets :

> Le grand enjeu des projets Tous Chercheurs est l'élaboration de protocoles expérimentaux en Physique, en Géographie ou en Philosophie, à travers lesquels les élèves sont amenés à s'interroger de manière critique sur la validation de leurs hypothèses. (Ibid.)

Ces projets sont développés dans des lycées de plusieurs académies en France, ainsi que dans certains établissements français à l'étranger au sein du réseau de l'Agence pour l'Enseignement Français à l'Étranger (http://www.aefe.fr/). Dans ces derniers, après une phase expérimentale en 2012 (au Caire et à Athènes avec deux opérations nommées « Sciences en Jeans »), le projet « Tous Chercheurs » est lancé en 2013 avec le statut d'APP-Monde (Action Pédagogique Pilote : http://www.aefe.fr/pedagogie/actions-pilotes-innovantes/app-monde), qui facilite sa mise en œuvre dans les établissements. Dès la première année, quatorze groupes adhèrent au projet à l'étranger et quatre projets sont menés en France.

2. *Interdisciplinarité et place des mathématiques*

Une des spécificités du dispositif est d'encourager l'intervention de professeurs de disciplines différentes (néanmoins, en 2013-2014, seuls cinq des dix-huit projets sont interdisciplinaires). Si les disciplines traditionnellement qualifiées d'expérimentales sont très majoritaires (physique, chimie, sciences de la vie et de la terre interviennent dans plus de 60 % des projets), quelques projets sont menés par des enseignants de philosophie, français, sciences économiques et sociales.

Les mathématiques interviennent dans trois projets : deux en association avec la physique, un avec la philosophie. La part d'intervention des mathématiques est réduite : faut-il y voir une réticence des enseignants de mathématiques à s'associer à des collègues d'autres disciplines ? L'idée que les mathématiques ne peuvent trouver leur place dans ce dispositif en raison de la dimension expérimentale ?

Les raisons sont certainement plus complexes. Même si l'opération « Tous Chercheurs » n'a pas vocation à servir de modèle de référence aux démarches interdisciplinaires faisant intervenir les mathématiques, quelques faits sont à rappeler.

D'une part, la vision exclusive des mathématiques comme science autonome qui se nourrit elle-même est tenace. Poincaré le signalait en 1904 dans sa « Conférence sur les définitions générales en mathématiques » (*L'enseignement mathématique*, n°6, 1904, p. 253) :

> Ce qu'elles [les mathématiques] ont gagné en rigueur, elles l'ont perdu en objectivité. C'est en s'éloignant de la réalité qu'elles ont acquis cette pureté parfaite. On peut parcourir librement tout leur domaine, autrefois hérissé d'obstacles, mais ces obstacles n'ont pas disparu. Ils ont seulement été transportés à la frontière, et il faudra les vaincre de nouveau si l'on veut franchir cette frontière pour pénétrer dans le royaume de la pratique.

Par ailleurs, le rôle de l'expérimentation en mathématiques occupe une place pour le moins réduite dans les discours institutionnels, comme le rapport Rocard :

> En réalité, l'enseignement des mathématiques peut facilement utiliser une approche basée sur les problèmes alors que, dans de nombreux cas, l'approche expérimentale s'avère plus difficile. (Rocard & al. 2007, p. 9)

De même, si les programmes incitent les enseignants à la pratique d'une démarche d'investigation et pointent les analogies dans les différentes sciences, ils la restreignent en mathématiques à la résolution de problèmes (*programme de mathématiques de collège, 2008*, p. 4). Cela ne constitue pas une rupture franche avec les instructions antérieures, et donc n'est sans doute pas générateur de réels changements dans les pratiques enseignantes :

> II est essentiel que les connaissances prennent du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose. Il est tout aussi essentiel qu'il sache les mobiliser pour résoudre des problèmes. (programme de mathématiques de sixième, 1996, p. 2)

Parallèlement, de nombreux travaux sur les démarches expérimentales en mathématiques sont menés depuis plus de dix ans, qui en montrent la pluralité (Dias & Durand-Guerrier 2005, Perrin 2007, Grenier 2008, Houdement 2012). Les dispositifs de recherche comme les stages Hippocampe (Arnoux & Vaux 2012) ou « Maths En Jeans » (Dubois 2012) mettent également souvent en avant la dimension expérimentale des mathématiques.

Les opérations « Maths En Jeans » (http://www.mathenjeans.fr/), qui rencontrent depuis 1989 un succès croissant en France puis à l'étranger, présentent de nombreux points communs avec les projets « Tous Chercheurs » : volontariat des élèves, adoption d'une position de chercheurs, recherche sur une longue durée, dimension expérimentale des mathématiques, encadrement par un professeur associé à un enseignant-chercheur, communication par une conférence ; elles s'en démarquent par leur aspect presque systématiquement mono-disciplinaire. Une plus grande adhésion des enseignants de mathématiques aux projets « Tous Chercheurs » n'est finalement peut-être qu'une question de diffusion et de temps.

II. DEROULEMENT DE DEUX ACTIONS « TOUS CHERCHEURS »

Dans cette partie, nous détaillons le déroulement de deux projets « Tous Chercheurs », réalisés en 2013-2014 dans notre établissement (lycée Pierre Mendès-France, Tunis, AEFE). Ils associent les mathématiques à la physique (modélisation du mouvement brownien) et à la philosophie (hasard et la prise de décision).

Les deux projets ont été initiés par des discussions entre trois professeurs (Vincent BAUMARD en sciences physiques, Laurent LUQUET en philosophie, Benoît RAY en mathématiques) après que l'AEFE a lancé l'APP-Monde. À leur origine se trouvent des convergences de vue et une motivation pour se lancer dans un projet commun.

Le choix des thématiques de travail a été guidé par le souci d'intégrer une dimension expérimentale dans une réflexion transdisciplinaire, par la volonté d'envisager des projets plus ambitieux que ceux menés en classe, en tentant de mettre en évidence les enjeux épistémologiques de la construction des sciences.

Les projets ont été réalisés par deux groupes d'une dizaine d'élèves volontaires. Ils ont débuté fin novembre 2013 et se sont achevés par une présentation en public le 6 juin 2014. Chaque groupe d'élèves a travaillé en dehors du temps scolaire, à raison de deux à trois séances d'une à deux heures par mois.

1. « Tous Chercheurs » en physique et mathématiques

Le projet concerne onze élèves de première scientifique (secondaire 6$^{\text{ème}}$ année, 16-17 ans). Les extraits cités proviennent du blog des élèves (http://stormonateacup.blogspot.com/).

L'atelier débute par la présentation d'une situation déclenchante, l'expérience du « gaz roux », dont voici le compte-rendu des élèves :

> Nous avons deux récipients séparés par une plaque de verre (rendue hermétique grâce à de la graisse) : l'un rempli d'air et l'autre de gaz roux de formule NO_2. Lors du retrait de la plaque, le gaz roux migre vers le récipient d'air et cela forme, après quelques secondes, un mélange homogène. Par ailleurs, l'inclinaison des béchers n'influe en aucune manière sur le déplacement du gaz.

Cette expérience est suivie par l'observation d'une gouttelette de lait au microscope optique :

> Nous remarquons que de minuscules particules de graisse en émulsion dans l'eau ont un mouvement incessant. Nous avons l'impression que ce mouvement est aléatoire et n'obéit à aucune loi physique.

Les enseignants n'ont pas davantage guidé les élèves (ni parlé de « mouvement brownien »), mais attendu qu'ils tentent eux-mêmes de relier ces deux observations et d'en chercher des explications.

Les premières hypothèses ont été rapidement formulées :

- Peut-on associer le déplacement des molécules à une énergie cinétique de ces dernières ?
- La pression et la température influencent-elles le mouvement des molécules ?
- Peut-on associer ce phénomène au mouvement Brownien ?
- Le mouvement aléatoire des particules est-il dû à l'interaction de Van Der Waals ?

Ces hypothèses sont issues de recherches sur Internet réalisées après la première séance, mais aussi de la culture scientifique personnelle des élèves. Nous n'écartons pas les interventions extérieures qui auraient guidé les élèves vers le mouvement brownien.

La suite du travail des élèves a consisté à tenter de valider ou d'infirmer chaque hypothèse. L'interaction de Van Der Waals a été rapidement écartée :

> Si l'interaction de Van Der Waals existe réellement au niveau atomique, à l'échelle de nos « minuscules boules de graisse » son action est quasi inexistante. De plus, cette interaction a lieu dans le cas de molécules polaires […] cette polarité aura tendance à orienter toutes les molécules vers la même direction et assurer la cohésion de celle-ci, à l'inverse de ce que l'on a pu observer.

L'hypothèse sur l'énergie cinétique a mené les élèves sur la piste de la diffusion :

> On peut imaginer que le dioxygène est passé dans le récipient du gaz roux plus rapidement que ce dernier est passé dans le récipient de dioxygène. Et, par effet d'entraînement dû peut être à la pression, une partie du gaz roux passe dans l'autre récipient. Ce phénomène s'appelle la diffusion, qui répond aux lois de Fick et pourrait être un facteur important dans le calcul du mouvement Brownien.

D'autres recherches sur Internet ont confirmé l'hypothèse du mouvement brownien. Les notions théoriques liées à ce phénomène étant hors de portée des élèves, nous avons proposé aux élèves de le modéliser numériquement. Les élèves se sont posé des questions sous-jacentes à la modélisation d'une particule par un point qui, à chaque instant, effectue un déplacement dans une direction aléatoire : comment choisir aléatoirement la direction ? Faut-il faire varier la longueur des déplacements ?

La mise au point d'un algorithme implémenté sur le logiciel Algobox (http://www.xm1math.net/algobox), a duré deux séances. Des questions difficiles ont émergé : géométriques (liées au logiciel qui ne propose que les coordonnées cartésiennes) et probabilistes (quelle loi les « choix aléatoires » doivent-ils respecter ?).

La simulation du mouvement d'une particule a donné des résultats « visuellement satisfaisants » (figure 1)

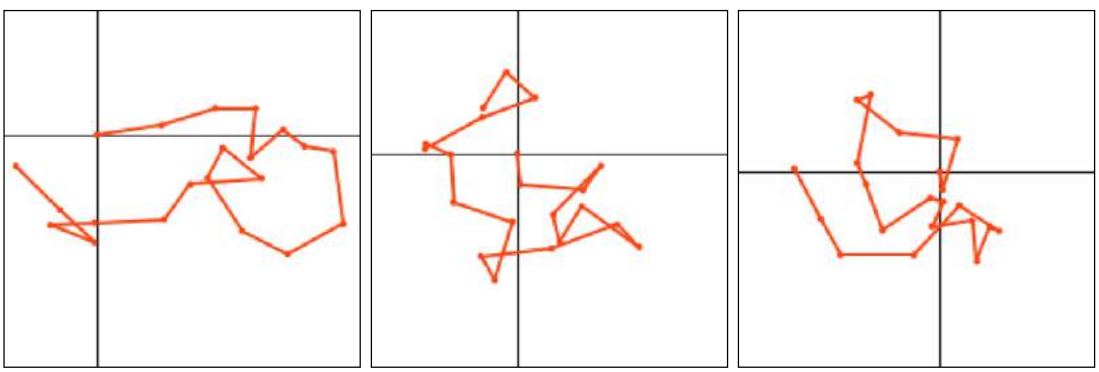


***Figure 1** – Simulations sous Algobox*

qui rappellent les dessins de Jean Perrin en 1912 (http://www.savoirs.essonne.fr/dossiers/la-matiere/physique/de-latome-aux-particules-elementaires/complement/resources/) (figure 2).

***Figure 2** – Dessins de Jean Perrin*

Nous avons alors orienté le travail des élèves vers une tentative de validation de ce modèle. Pour ce faire, il était nécessaire de choisir des critères de validation et de confronter le modèle à des données réelles.

Les vidéos et les observations sous microscope ne permettant pas d'obtenir des données précises et nombreuses, le professeur Hubert Krivine, chercheur associé au projet (voir III.1), a fourni des relevés d'expériences réalisées en laboratoire (distance parcourue depuis l'origine pour 49 particules). L'analyse de ces données a mis en évidence qu'en moyenne, le carré de la distance parcourue depuis l'origine est proportionnel au temps.

Les élèves ont voulu confronter leur modèle à cette relation. Pour cela, ils ont transposé leur modèle algorithmique sur un tableur, permettant de simuler des échantillons de trajets de 49 particules. Les résultats sont très convaincants et montrent une relation similaire à celle observée sur les données de laboratoire.

Le travail s'est arrêté sur ce début de validation de modèle.

2. *« Tous Chercheurs » en mathématiques et philosophie*

Le projet concerne, au final, 8 élèves de Terminale Scientifique (secondaire 7ème année, 17-18 ans). Les extraits cités proviennent du blog des élèves (http://lesjeuxsontfaits.blogspot.com/).

Le travail a débuté par la présentation d'un jeu :

> Pierre et Paul jouent à pile ou face. Pierre verse à Paul un enjeu A aux conditions suivantes : s'il gagne le premier coup, Paul lui verse 2 francs ; s'il ne gagne qu'au deuxième coup, Paul lui verse 4 francs, et ainsi de suite : s'il ne gagne qu'au nième coup après avoir perdu tous les coups précédents, Paul lui verse 2^n francs.

L'énoncé de ce problème, dit « martingale de Pétersbourg », est issu de Bru et al. (1999, p. 190). L'auteur de ce problème est sans doute Nicolas Bernoulli (1713).

L'absence de questions a déstabilisé les élèves, que nous avons encouragés à comprendre la situation et à se poser des questions :

> Deux questions ont été retenues comme pertinentes :
> 1. Pour quelle valeur de A le jeu est-il équitable c'est-à-dire pour quel A est-ce que E(gain)=0 ? A doit être égal au gain pour que la partie soit équitable.
> 2. En moyenne combien y a-t-il de lancers au total au cours d'une même partie ?

Les élèves ont effectué des simulations de parties, en utilisant un tableur et un algorithme implémenté sur Algobox. Cette démarche est vraisemblablement induite d'une part par la pratique fréquente de la simulation dans l'enseignement secondaire des probabilités et, d'autre part, par l'absence de limitation du nombre de coups, qui complique *a priori* la situation (la notion de limite, enseignée en classe de Terminale, n'est pas familière des élèves).

Les premiers résultats obtenus par simulations sont partiellement faux : sur 10 000 parties, le gain moyen brut est voisin de 16 (l'espérance théorique est infinie). L'explication, trouvée par la suite, réside dans le caractère exceptionnel de « longues » parties (dont l'influence est d'autant plus grande qu'elles sont rares).

Les simulations suivantes montrent une grande fluctuation du gain moyen pour des échantillons de taille 500 000 (entre 20 et 1100) et une stabilisation de la durée moyenne. Les élèves écrivent néanmoins : « une partie dure en moyenne 2 lancers et la moyenne des gains fluctue autour de 20 ».

Pour dépasser les limites techniques du logiciel (Algobox est limité à 500 000 itérations), un élève a programmé l'algorithme en Java. Ce fut l'occasion de réfléchir aux différents types de variables (« int », limitée à $2{,}15\ 10^9$, donnait des résultats incohérents ; elle a été remplacée par une variable « double »). Les élèves constatent : « une partie dure en moyenne 2 lancers et la moyenne des gains fluctue autour de 30 ».

La fluctuation étant encore très importante, nous avons encouragé les élèves à passer au calcul de l'espérance de gain brut et de la durée moyenne d'une partie. Des rappels du programme de probabilités de première leur ont été fournis (notion de variable aléatoire discrète prenant un nombre fini de valeurs, espérance, écart-type, loi binomiale).

Les calculs, abordables par des élèves de ce niveau (tous obtiennent d'excellents résultats scolaires), ont posé beaucoup de problèmes en raison de l'absence de guidage ; un autre obstacle important est le « passage à la limite » des formules données pour une variable aléatoire ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Finalement, les résultats obtenus sont :

- l'espérance de gain brut est infinie, donc ce jeu ne peut être équitable (résultat démontré),
- le nombre moyen de lancers dans une partie tend vers 2 (limite d'une somme infinie conjecturée sur tableur).

L'objectif initial des enseignants était d'orienter le travail vers les martingales. Le second problème (« martingale de d'Alembert », Bru & al. p 217), très voisin du premier dans les concepts mathématiques, a été proposé aux élèves :

> Pierre et Paul jouent à pile ou face. Pierre gagne si la pièce tombe sur pile. Pierre mise 1 Franc à la première partie, puis double sa mise en cas de perte jusqu'à ce qu'il gagne. En cas de victoire à une partie Paul lui verse 2 fois sa mise.

Les élèves ont envisagé des questions en lien avec la situation :

> Ce jeu est- il équitable si Pierre a une fortune infinie ?
> Et si la fortune de Pierre est finie, auquel cas on décide de la longueur de la partie avant de débuter ?

Le travail effectué sur le premier problème a rapidement orienté les élèves vers des calculs, dont voici les conclusions :

> Le jeu auquel on s'intéresse à travers ce problème est une martingale : si l'on ne fixe pas le nombre de parties à l'avance, le gain est constant (1 Franc). Pierre ne peut que finir par gagner aux dépens de Paul. […]
> En revanche, si le nombre de parties est fixé à l'avance, alors un calcul de l'espérance de gain indique que celui-ci est de 0 : les gains tendent vers l'équilibre et aucun ni de Pierre ni de Paul n'est gagnant à la fin du jeu. Le jeu est donc équitable.

Le projet s'est ensuite tourné vers des questions liées à l'engagement du joueur (aspects psychologique, social, culturel) ainsi qu'à l'émergence historique des concepts probabilistes.

L'apport philosophique a d'abord consisté à marquer la spécificité du concept mathématique de probabilité au regard de la catégorie du « probable ». Pour cette dernière, c'est en remontant à Aristote que les élèves ont été sensibilisés à la différence de statut entre les énoncés seulement probables et les énoncés susceptibles de démonstration. Une première occasion leur a ainsi été donnée de réfléchir sur une délimitation possible entre opinion et science, notamment au travers de la différence entre syllogisme dialectique et syllogisme démonstratif.

L'émergence des probabilités fait certes référence à des obstacles socio-culturels parfois liés à des interdits religieux, mais tant qu'une situation n'est pas modélisée, il ne peut y avoir de calcul de probabilités. Les élèves ont été davantage intéressés par la différence de modèles qui transparaît au travers des textes de Pacioli, Tartaglia et Pascal (Cléro, 1998) : des trois solutions au « problème des parties », seule celle de Pascal fait émerger un raisonnement novateur consistant à prendre en compte tous les futurs possibles. La comparaison du raisonnement de Pascal avec les notions de probabilités « modernes » connues des élèves (arbres pondérés notamment) a été l'occasion d'approfondir ces questions de modélisation.

Les échanges entre mathématique et philosophie sont ainsi l'occasion de présenter sur un cas concret le calcul des probabilités et, dans une perspective bachelardienne, la notion d'obstacle épistémologique. En comparant les textes de Pascal avec ceux de ses prédécesseurs, les élèves prennent conscience que la construction du concept de probabilité est moins affaire de technique que de changement de point de vue.

Le projet s'est achevé par des recherches sur la notion de paradoxe, notion à peine effleurée lors d'une séance (illustrant la similitude des modes de raisonnements en mathématiques et philosophie) : l'ouverture vers ce domaine a suffisamment passionné certains élèves pour qu'ils l'approfondissent en autonomie et l'exposent dans leur conférence.

3. *Communications*

La consultation des blogs des élèves montre un certain délitement dans leur entretien, réalisé hors-séances. En raison des échéances des examens de fin d'année, le choix a été fait (en concertation avec les élèves) de mettre l'accent sur la conférence finale. On constate ainsi une grande différence de densité entre les blogs et les conférences (http://www.ert.tn/pmf/spip.php?article51).

Le défi des élèves était le suivant : rendre accessible à un public varié (parents, professeurs, membres de la direction, professeur Krivine) deux objets de recherche pointus. La préparation des conférences s'est déroulée hors-séances, chaque groupe ayant pu présenter sa conférence aux professeurs à deux reprises pour affiner le contenu puis améliorer l'orchestration des prises de paroles.

Si certaines approximations subsistent, la spontanéité de la prise de parole des élèves ainsi que leur responsabilité, leurs connaissances et la qualité de leur investissement ont été soulignées et honorées.

III. NATURE DE L'ACTIVITE DES ELEVES ET POSITIONS RESPECTIVES DES DIFFERENTS ACTEURS

Dans cette partie, en analysant les rôles joués par les différents acteurs dans les deux projets, nous tenterons de préciser en quoi les élèves ont pratiqué une démarche d'investigation en mathématiques. Le cadre théorique utilisé est celui des ESFI (Enseignements Scientifiques Fondés sur l'Investigation, Grangeat 2013, pp 155–184).

1. *Interventions du chercheur*

Le professeur Hubert Krivine (Université Pierre et Marie Curie, membre du conseil scientifique de l'association « Tous Chercheurs ») a accepté de soutenir les trois enseignants impliqués dans ces projets.

Il a suivi l'avancée du travail des élèves à distance pendant toute la durée des projets, via les blogs des élèves et par échanges de mails avec les enseignants. Ces échanges fréquents ont été un soutien précieux tout au long des projets. Il a fourni des films ainsi que les données expérimentales sur le mouvement brownien, ainsi que des apports théoriques à destination des professeurs sur les deux sujets.

Le professeur Krivine est intervenu à deux reprises au lycée : pour un bilan à mi-parcours puis pour la présentation en public. Ces moments d'interaction sont importants pour encourager les élèves, recadrer leurs travaux et les aider à faire ressortir l'essentiel lors de leur présentation en public. Les échanges vont bien au-delà des projets eux-mêmes : il a été question de la recherche scientifique et de l'activité professionnelle d'un chercheur. Le professeur Hubert Krivine a par ailleurs présenté deux conférences sur le hasard et sur la construction historique d'un savoir, auxquelles ont assisté de nombreux élèves du lycée.

2. *Engagement des élèves*

Le recrutement des élèves s'est fait sur la base du volontariat. En raison de diverses contraintes d'emplois du temps, les projets ont été proposés aux six classes de première S et à deux des cinq classes de terminale S. Tous les élèves volontaires ont été retenus mais leur nombre a sensiblement diminué dans le groupe de terminale (qui est passé de 12 à 8 élèves) en raison de la préparation au baccalauréat et d'autres engagements péri-éducatifs ; l'effectif du groupe d'élèves de première est resté stable. Cette relative évaporation montre bien l'implication requise par ce type de recherche.

3. *Rôle des enseignants, effets sur l'activité des élèves*

Nous avons voulu respecter un des objectifs majeurs de « Tous Chercheurs » : « montrer la science telle qu'elle se construit »[303], donc mettre les élèves au plus près de la position de chercheurs. Dans les deux projets, le choix a été fait dès le départ de laisser une très grande liberté aux élèves, en adoptant une position très en retrait par rapport aux cours traditionnels et en guidant les élèves au minimum.

L'étalement des recherches dans le temps nous a permis de laisser les élèves travailler parfois longuement autour d'hypothèses ou de conjectures erronées (espérance du gain brut dans le premier problème de probabilités, interaction de Van Der Waals pour le mouvement brownien), ce qui est difficile dans le temps contraint de la classe. En responsabilisant les élèves sans intervenir pour leur indiquer des erreurs, nous les avons laissés eux-mêmes trouver des moyens de valider ou d'invalider leurs hypothèses. En référence à la dimension 3 du modèle ESFI, on se situe sans doute « au-delà » du mode 4.

Le travail de préparation en amont nous avait permis de prévoir la plupart des problématiques abordées par les élèves (les situations choisies étaient « faites pour ça »), mais pas d'anticiper toutes les difficultés rencontrées ou de prédire toutes les pistes que les élèves allaient suivre. Pour les enseignants, la phase préparatoire a été très délicate : elle a consisté à échafauder, pour chaque sujet, un ensemble de trames suffisamment vagues, jalonnées de

[303] http://www.aefe.fr/pedagogie/actions-pilotes-innovantes/app-monde/tous-chercheurs

points de convergence préétablis, trames assez vastes pour contenir les pistes envisageables par les élèves et assez souples pour rendre possibles des bifurcations au cours du projet.

Pour le mouvement brownien, les phases initialement prévues ont été suivies globalement : observations et hypothèses, construction d'un modèle, validation du modèle selon des critères réfléchis.

En mathématiques et philosophie, les difficultés rencontrées pour résoudre le premier problème nous ont surpris (le problème est suffisamment ouvert pour que d'excellents élèves n'utilisent pas spontanément les notions adéquates qu'ils maîtrisent en situation « scolaire »). Le temps passé sur le premier problème nous a conduits à restreindre le travail prévu sur les martingales. En revanche, la réflexion sur les notions philosophiques du probable et sur les textes historiques a été très efficace, d'où l'ouverture vers les domaines du raisonnement et des paradoxes. Le choix fait par les élèves d'approfondir ce dernier sujet montre le degré d'autonomie auquel ils ont accédé.

Les questionnements des élèves, leurs choix de sujets, traduisent une position très avancée dans la dimension 1 du modèle ESFI. Il faut cependant noter que si un travail d'analyse a priori est d'usage dans la recherche de problèmes ouverts en mathématiques (Arsac & Mante 2007), il est beaucoup plus complexe dans le cadre du dispositif « Tous Chercheurs » : d'une part, les domaines d'étude sont très peu balisés, d'autre part en raison d'éventuelles « perturbations » (apports extérieurs, sujets partiellement connus par un élève[304], etc).

Dans les deux projets, le *topo* des élèves est très important : on se situe à l'extrémité de l'axe « dimension 2 » du modèle ESFI :

> le problème est ouvert et les élèves ont à déterminer leur protocole et à choisir le matériel pour tester leurs hypothèses.

Enfin, les échanges oraux et productions écrites ont eu une place importante dans trois moments bien identifiés : échanges oraux lors des séances (entre pairs, avec les enseignants), productions écrites (pour la tenue du blog et la préparation du diaporama), explicitations orales (lors de la conférence et des réactions aux questions). En référence au modèle ESFI (dimension 5), l'engagement des élèves dans les activités de communication est poussé à son maximum :

> le mode ultime consiste à leur permettre de justifier leur point de vue en référence à des résultats ou à des savoirs.

4. Limites du modèle ESFI pour l'analyse d'un tel dispositif

Le modèle ESFI propose six dimensions, dont quatre ont été examinées. Les deux autres ne sont pas adaptées à notre expérience.

D'une part, la dimension 4 (diversité des élèves) ne peut être interrogée : l'hétérogénéité n'est pas celle que l'on peut rencontrer dans une classe ordinaire : les élèves des deux groupes sont tous d'un excellent niveau et sont restés motivés pendant toute la durée des projets (excepté les abandons).

D'autre part, faire référence à la dimension 6 (niveau d'explicitation des savoirs visés par l'enseignant) est complexe, car aucun savoir n'était visé *a priori*. L'objectif concernait davantage l'acquisition de méthodes, la découverte d'une activité de recherche dense et interdisciplinaire et, finalement, la construction de processus métacognitifs difficilement mesurables.

[304] L'ouverture de la boîte de Pandore du mouvement brownien a sans doute accéléré les recherches, sans pour autant compromettre le projet

IV. CONCLUSION

La très grande liberté laissée aux élèves dans l'élaboration des problématiques, dans les méthodes utilisées pour s'en emparer, l'absence de guidage strict de la part des enseignants, l'étalement des recherches dans le temps, le rôle joué par l'expérimentation, questionnent les méthodes d'enseignement habituelles. Par ailleurs, responsabiliser les élèves et orienter leur travail vers la recherche, non pas vers les résultats, et ceci en dehors de tout processus d'évaluation traditionnelle, a provoqué chez les élèves une réflexion importante sur la valeur de vérité des résultats énoncés et a permis de mettre en avant le fait que, dans une activité de recherche, les échecs importent autant que les réussites. Il ressort de cette expérience que les résultats obtenus par les élèves, sans être excessivement ambitieux, sont d'une grande solidité (éprouvée lors de la présentation en public) et nous faisons l'hypothèse que les méthodes utilisées pour chercher, émettre des conjectures, tenter de les (in)valider, seront mobilisables dans la scolarité future des élèves.

La confrontation de ces deux expériences au modèle ESFI montre, d'une part, que les élèves sont entrés dans une démarche d'investigation très consistante et, d'autre part, questionne la construction des savoirs, des attitudes et des compétences.

Dans l'expérimentation décrite ici, nous avons pu observer que l'immersion dans les problèmes historiques, la réflexion sur les questions sociales et épistémologiques dans le projet sur la prise de décision, le travail d'un processus de modélisation dans toute sa globalité dans le projet sur le mouvement brownien ont permis de « montrer la science telle qu'elle se construit ». Plus généralement, nous faisons l'hypothèse qu'un tel dispositif constitue une possibilité de favoriser la formation de l'esprit à la recherche et participe activement au décloisonnement disciplinaire.

Nous nous sommes limités à un rapport *a posteriori* d'une expérience ; une recherche approfondie portant sur ce dispositif permettrait d'étayer nos hypothèses. Outre la question des compétences construites dans le cadre de ce dispositif, reste ouverte celle de la possibilité de transposer certaines caractéristiques au cadre de la classe ordinaire, et en cohérence avec les recommandations des programmes de mathématiques.

REFERENCES

Arnoux P., Vaux L. (2012) Recherche en mathématiques pour les élèves du secondaire : l'exemple des stages Hippocampe. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* – Actes du colloque EMF2012 (GT10, pp. 1282–1294), http://www.emf2012.unige.ch/images/stories/pdf/Actes-EMF2012/Actes-EMF2012-GT10/GT10-pdf/EMF2012GT10ARNOUX.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*, Lyon : Scéren CRDP de Lyon

Bru B., Bru M.F., Chung K.L. (1999) *Borel et la martingale de Saint-Petersbourg*. In *Revue d'histoire des mathématiques*, n° 5, pp. 181–247., http://smf4.emath.fr/Publications/RevueHistoireMath/5/pdf/smf_rhm_5_181-247.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Cléro J.-P. (1998) *Épistémologie des mathématiques*, Nathan

Commission Inter-Irem Lycée (2012) *Démarches d'investigation et résolution de problèmes : quelle place dans les travaux des IREM ?*, http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/Rapport_DI_et_RPB_pour_C2i.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM* n°60, p. 61-78, http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/60_article_416.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Dubois I. (2012) Démarche d'investigation en mathématiques : l'exemple des ateliers MATh.en.JEANS. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* – Actes du colloque EMF2012 (GT10, pp. 1319–1329), http://www.emf2012.unige.ch/images/stories/pdf/Actes-EMF2012/Actes-EMF2012-GT10/GT10-pdf/EMF2012GT10DUBOIS.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Grangeat, M. (2013) Modéliser les enseignements scientifiques fondés sur les démarches d'investigation : développement des compétences professionnelles, apport du travail collectif. In M. Grangeat (dir.), *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation*. Grenoble : Presses universitaires de Grenoble, pp. 155−184.

Grenier D. (2008) Expérimentation et preuve en mathématiques. In *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*, collection « Science, histoire et société », direction Laurence Viennot, Presses universitaires de France.

Houdement C. (2012) Démarche expérimentale en résolution de problèmes. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* – Actes du colloque EMF2012 (GT10, pp. 1389-1399), http://www.emf2012.unige.ch/images/stories/pdf/Actes-EMF2012/Actes-EMF2012-GT10/GT10-pdf/EMF2012GT10HOUDEMENT.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

L'enseignement mathématique, n°6, 1904, http://retro.seals.ch/digbib/view?pid=ensmat-001:1904:6::492, consulté le 20 janvier 2015.

MEN (1996) Programmes de mathématiques de la classe de sixième, BO n° 25 du 20 juin 1996, http://numerisation.irem.univ-mrs.fr/MO/IMO96005/IMO96005.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

MEN (2008) Programmes des enseignements de mathématiques, Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008, http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Perrin D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Petit x* n° 73, pp. 6-34, http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/73/73x1.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Rocard M., Cesrmley P., Jorde D., Lenzen, D., Walberg-Herniksson H., Hemmo V. (2007) *Science education NOW : A Renewed Pedagogy for the Future of Europe*. Retrieved March 2010, from http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_fr.pdf, consulté le 20 janvier 2015.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

VULGARISATION DES MATHÉMATIQUES

Compte-rendu du projet spécial n°2

Shaula FIORELLI VILMART[*] – Hacène BELBACHIR[**] – Denis TANGUAY[***]

Correspondant du comité scientifique : Ahmed SEMRI[****]

I. INTRODUCTION

Le Projet Spécial 2, ou Spé2, Vulgarisation des mathématiques, s'inscrit dans la continuité du Spé 4 d'EMF à Genève en 2012. Cependant, si les contributions à EMF 2012 étaient essentiellement tournées vers la pratique de la vulgarisation, certains textes présentés ici comportent une réflexion plus théorique.

Les discussions lors des trois plages horaires allouées au groupe spécial ont été très riches. Elles s'articulent autour de deux thèmes principaux :

- **Regard théorique sur les pratiques de vulgarisation** : présentations de B. Rittaud, S. Fiorelli Vilmart et al. (groupe AlPaGe) et C. Mercat.
- **Utilisation et étude de dispositifs de vulgarisation** : présentation du texte de N. Pelay et A. Boissière par C. Mercat, présentation succincte du texte de K. Godot par D. Tanguay, présentation de P. Jullien.

Pour la deuxième thématique, nous renvoyons le lecteur aux textes dans les actes ci-après. Le présent compte-rendu a surtout pour vocation de synthétiser les discussions relatives au premier thème. En effet, les trois présentations que nous associons à ce thème ont soulevé des questions d'ordre général, voire 'théorique' sur la vulgarisation, questions qui ont été reprises dans les discussions de groupe, tant celles qui ont suivi les présentations que celle de la dernière séance, où nous avons cherché à faire le bilan des réflexions suscitées.

Notons au passage que la présentation du texte de N. Pelay et A. Boissière faite par Christian Mercat est restée, pour des raisons de temps, circonscrite d'assez près au jeu de Dobble, mais mentionnons que l'article lui-même contient des éléments de théorisation fort

[*] Université de Genève – Suisse – shaula.fiorelli@unige.ch
[**] DGRSDT – Algérie – h.belbachir@dgrsdt.dz / hacenebelbachir@gmail.com
[***] Université du Québec à Montréal (UQAM) – Canada – tanguay.denis@uqam.ca
[****] USTHB – Algérie – asemri@usthb.dz / ahmedsemri@yahoo.fr

Fiorelli Vilmart S., Belbachir H., Tanguay D. (2015) Vulgarisation des mathématiques - *Compte-rendu du projet spécial n°2*. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé2, pp. 903-908.

intéressants sur la vulgarisation en général, qui auraient leur place dans la première thématique.

II. SYNTHESE DES DISCUSSIONS

1. Se donner des outils d'étude de la vulgarisation

D'entrée de jeu, Benoît Rittaud a appelé de ses vœux le développement d'un domaine de recherche ou d'étude « qui serait à la vulgarisation ce que la didactique est à l'enseignement » ; le développement, donc, de ce qu'il a appelé une « vulgaristique » des mathématiques. L'enseignement et la vulgarisation ont en effet une intention commune, celle de permettre la transmission de savoirs, de ceux qui en sont dépositaires vers ceux qui a priori ne les détiennent pas.

Mais ayant énoncé cela, des différences entre les deux points de vue, celui de l'enseignement et celui de la vulgarisation, viennent assez spontanément à l'esprit. Elles ont fait l'objet de discussions, dont nous reprenons ici des éléments sans nécessairement suivre l'ordre ou les formulations de la recension proposée par Rittaud dans son papier.

2. Enseignement versus vulgarisation

On pourra par exemple de prime abord objecter que la vulgarisation n'a pas nécessairement vocation à transmettre des savoirs « savants », tout au plus cherche-t-elle à éveiller son public à leur existence, à leur intérêt, aux questions que ces savoirs traitent et souvent résolvent, et à ces autres questions que les solutions trouvées ne manquent pas d'ouvrir. Alors que l'enseignement a le but beaucoup plus clairement affirmé de provoquer l'acquisition de ces savoirs : que le mode d'acquisition soit la simple et directe « transmission » ou qu'elle fasse plus appel à l'autonomie de l'apprenant ne change pas cet horizon. Cette acquisition nécessitera d'ailleurs probablement un temps long, un découpage — voire un morcellement — et une organisation des savoirs qui est justement l'un des objets d'étude de la didactique des mathématiques, faisant partie de la démarche/processus objectivée et conceptualisée sous la notion de *transposition didactique* (cf. par ex. Chevallard, 1992a). Mais au fait, que serait donc une *transposition vulgaristique* ?

Ce temps long, cette possibilité d'étalement chronologique et de retour sur les contenus, avec les aménagements en séquence qu'elle permet, l'activité de vulgarisation n'en dispose évidemment pas. Aussi, le « bon » vulgarisateur voudra-t-il donner à son public le goût d'aller voir par lui-même (de plus près) ce qu'il en retourne des savoirs en cause, et pour cela le vulgarisateur doit au moins en partie laisser les questions en suspens, et l'activité de vulgarisation *ouverte*. C'est peut-être cette idée, pousser à l'extrême, qui fait avancer à Benoît Rittaud qu'à la limite, « la vulgarisation n'est authentique que lorsqu'elle n'enseigne rigoureusement rien », affirmation choc qu'il s'empresse de tempérer en ajoutant que « bien entendu, une telle vulgarisation 'pure' serait aussi abstraite et irréalisable que le vide parfait en physique. »

3. Pourquoi fait-on de la vulgarisation des mathématiques ?

Les considérations précédentes nous ont donc amenés à nous interroger, avec les participants, sur ce que peuvent être les buts de la vulgarisation mathématique, puisque l'enseignement n'en est en tout cas pas le principal. Il y a certainement, derrière toute activité de vulgarisation, la volonté de *faire connaître* des mathématiques ce qui, on l'a vu, n'est pas nécessairement la même chose que *faire savoir* des mathématiques. Ou peut-être faire connaître *les* mathématiques, ce qui suppose alors qu'on s'attache plus expressément à leurs ressorts, à ce qui les motive : quels problèmes ont suscité ce ou ces développements, dans quels contextes (scientifique, historique, épistémologique, social, philosophique...), avec quelles visées, toutes considérations méta-mathématiques que l'enseignement a rarement le luxe d'aborder.

Faire connaître les mathématiques et leurs ressorts, cela peut aussi simplement consister à faire faire des mathématiques, à faire « jouer avec les mathématiques » celui qui prend part à l'activité de vulgarisation en suscitant chez lui, ouvertement ou 'subliminalement', réflexions et questionnements : qu'est-ce que faire de la recherche en maths, comment et pourquoi fait-on cela, en quoi les maths sont-elles utiles, mais doivent-elles seulement l'être ? Ne peuvent-elles simplement être belles, amusantes, ludiques ? Se demander ce que c'est que faire de la recherche en maths, c'est aussi se demander ce qu'est *être chercheur* en maths, et avec cette question s'ouvre la dimension plus proprement humaine des mathématiques — qui se sont faites, qui continuent de se faire... — à laquelle les interventions de Christian Mercat se sont attachées et qui renvoie entre autres à leurs dimensions historique et culturelle. Encore ici, la vulgarisation a plus facilement la possibilité — le loisir ! — de toucher à ces questions que l'enseignement.

Mais la dimension *politique* peut elle aussi être en jeu, et a donné lieu à une déclaration un brin provocante de la part d'un des participants : bien avant de chercher à « faire aimer les maths » à son auditoire, le vulgarisateur doit avant tout lui montrer quelle importance elles ont dans toutes les sphères de l'activité humaine, techniques, scientifiques ou autres, et ainsi le convaincre de la légitimité des fonds publiques qui sont alloués à leur développement, à leur diffusion ; ou de la nécessité de relever et soutenir ces fonds le cas échéant. Dans la veine politique, France Caron a soulevé la question des *mathématiques citoyennes* : des mathématiques pour mieux comprendre le monde, la vulgarisation pour donner des outils qui permettent de remettre en cause les fondements prétendument scientifiques à l'appui de certaines décisions politiques, en interrogeant notamment les modèles et modélisations que ces fondements mettent en avant[305].

4. *Un dialogue enseignement – vulgarisation*

Pour chacune des différences entre enseignement et vulgarisation comme celles relevées dans la contribution écrite de Rittaud, on peut se demander qu'est-ce que chacun des domaines a à apprendre de l'autre, quelles qualités naturellement attribuables à l'un on voudrait voir promues chez l'autre. On souhaiterait bien sûr un enseignement des mathématiques où les éléments historiques (contextuels, sociaux, philosophiques…) iraient au-delà des courtes vignettes qu'on voit dans les manuels scolaires. Les contraintes institutionnelles, de temps, de programmation, pèsent bien sûr lourd dans l'enseignement sous ce rapport. On pense aussi à l'évaluation, un élément central de l'enseignement qui n'a rien d'approchant dans les activités de vulgarisation, où les participants ne sont généralement soumis à quelque forme de jugement que ce soit. À quand un enseignement sans évaluation ? Il n'est pas (encore) interdit de rêver… La question de la 'captivité' du public est du même ordre, encore que comme le relève Rittaud, il est fréquent que des classes soient amenées par leur enseignant à participer à des activités de vulgarisation, estompant ainsi la frontière entre les deux domaines.

[305] Mme Caron a mentionné entre autres un regroupement de citoyens opposés à un projet de site d'enfouissement (« Site 41 ») dans le comté de Simcoe en Ontario, près d'un aquifère de grande qualité. Ce regroupement s'est battu contre le projet pendant près de 20 ans : pour plus de détails, consulter Caron et Garon (2014).

Pour ce qui est de la vocation à 'enseigner', a priori non essentielle en vulgarisation, s'il est vrai que celle-ci doit éviter le 'didactisme' (ou devrait-on dire le 'scolaire' ?) pour ne pas rebuter son public, doit-elle pour autant se refuser à enseigner ? Le mot clé est peut-être ici celui de l'*explication.* Dans les mathématiques de la vulgarisation, on ne cherche pas nécessairement à obtenir la conviction de l'interlocuteur, ce qui veut en particulier dire que les constructions (théoriques) irréfutables obtenues par enchaînement de déductions formelles (par des 'preuves') ne sont pas nécessaires, et d'ailleurs probablement pas souhaitables. À la preuve on préfèrera donc l'explication — étant bien entendu qu'il n'y a pas ici dichotomie et que certaines preuves ont forte valence explicative — parce que les activités de vulgarisation mathématique dont on sort avec le sentiment d'avoir *compris* quelque chose sont en général les plus satisfaisantes, à l'inverse de celles qui ne proposeraient que des éléments factuels, réduites au pur 'anecdotique', au « tourisme mathématique », et sombrant ainsi dans une complète insignifiance. La valeur pédagogique de l'explication a depuis un moment déjà éveillé la communauté des didacticiens, notamment ceux qui se sont penchés sur la question de la preuve en classe : voir par exemple Hanna (1989).

5. *Un dialogue didactique – vulgaristique*

La 2e présentation, celle du groupe AlPaGe, a proposé des outils pour évaluer et analyser des activités de vulgarisation, et la question s'est posée de l'apport que pourrait avoir le champ de la didactique des mathématiques au développement de ces outils d'évaluation, d'analyse, voire de théorisation de la vulgarisation. La sensibilité de la vulgarisation à ses contextes, aux formes diverses qu'elle prend selon le public visé, selon les lieux où elle diffuse, selon les médias et les technologies à disposition, selon les sources de financement et les contraintes administratives de toutes sortes, a naturellement suggéré que la *Théorie Anthropologique du Didactique* (ou TAD ; cf. par ex. Chevallard, 1992b) fournirait des outils utiles pour l'examen des rapports qu'entretient la vulgarisation, ou telle activité particulière de vulgarisation, avec ce qui a trait aux *institutions*.

Parmi ces outils présentés dans l'article de Fiorelli Vilmart et ses co-auteurs, on propose de considérer trois aspects à prendre en compte « du point de vue de l'animateur », soit pour mieux comprendre comment s'organise une activité de vulgarisation, soit pour mieux évaluer une activité dont on cherche à faire le bilan :

- donner à voir,
- donner à chercher,
- donner à comprendre.

Les didacticiens parmi les participants au groupe n'ont pas manqué de souligner la parenté de ce découpage avec les phases proposées par la Théorie des situations (TSD) de Brousseau (1998). L'aspect *donner à voir*, qui renvoie à la nécessité pour le vulgarisateur d'accrocher son public — qui contrairement aux élèves peut quitter à tout moment, rappelons-le —, de le 'captiver' si possible, de 'l'embarquer' dans l'activité, peut être mis en parallèle avec la *dévolution* de la TSD : le processus par lequel l'aménagement de la situation (adidactique) et sa gestion par l'enseignant permet de conduire l'élève à accepter de prendre en charge la résolution du problème.

L'aspect *donner à chercher* est celui par lequel le vulgarisateur veut rendre actif son public, veut l'engager à explorer et à aller au-devant des explications plutôt qu'à les recevoir passivement. Cela renvoie dès lors à la phase (ou situation) d'*action* de la TSD, ou à celle de *formulation* quand il s'agit d'échanger sur les stratégies mises en œuvre ou sur les résultats et résolutions supputés.

L'aspect *donner à comprendre* est le plus difficile à mettre en relation avec les phases de la TSD. Il renvoie aux *explications* dont nous avons parlé plus haut, qu'elles soient données par le vulgarisateur, construites par le public à travers sa participation à l'activité ou qu'une combinaison permette à ces deux modes de se compléter. Dans la mesure où l'explication est vue comme une modalité particulière de justification des énoncés et résultats visés par l'activité, on peut être tenté d'associer l'aspect 'donner à comprendre' à la phase (ou situation) de *validation* de la TSD. Dans le cas où c'est surtout le vulgarisateur (ou animateur) qui donne à comprendre en avançant lui-même les explications, on peut penser qu'on est alors dans une forme d'*institutionnalisation.*

Ce sont là quelques exemples du dialogue qui peut s'établir entre didactique et 'vulgaristique'. Nous pourrions poursuivre en relevant par exemple que la proposition de Fiorelli Vilmart et ses co-auteurs de considérer deux étapes dans l'expérimentation d'une « action de diffusion » — une a priori qui s'attache aux hypothèses de travail, une a posteriori « …qui correspond à la réalisation effective (l'expérimentation) » — s'apparente fortement à la méthodologie désignée par les didacticiens français comme *ingénierie didactique* (Artigue, 1988). Contentons-nous pour l'instant de cette ouverture au dialogue, qu'on cherchera à poursuivre en réfléchissant aux moyens de favoriser les échanges entre vulgarisateurs (ou devrait-on dire 'vulgaristiciens' ?) et didacticiens, que ce soit par l'entremise des congrès EMF ou autrement.

III. CONCLUSION

Ce bilan montre que le thème de la vulgarisation des mathématiques est riche, propice aux discussions et aux échanges, ainsi qu'au développement des réflexions maintenant bien engagées. La possibilité offerte par les colloques EMF de réunir des vulgarisateurs de terrain, des praticiens qui se penchent sur leurs pratiques et des didacticiens est une occasion unique pour tous de se nourrir des compétences des uns et des autres.

Il nous semble dès lors intéressant de poursuivre cette thématique lors des prochains colloques EMF et éventuellement, de la transformer en Groupe de travail. Ceci donnerait plus de temps aux différents acteurs de discuter plus profondément des aspects théoriques de la vulgarisation et permettrait de lancer et poursuivre les travaux pour établir une véritable 'vulgaristique' des mathématiques.

IV. REMERCIEMENTS

Nous tenons ici à remercier les présentateurs et participants

- Benoît Rittaud (Paris)
- Christian Mercat (Lyon)
- Shaula Fiorelli Vilmart (Genève), Pierre Audin (Paris) et Hacène Belbachir (Alger)
- Pierre Jullien (Aix-en-Provence)
- … et aussi de loin : Pierre-Alain Chérix, Nicolas Pelay, Alix Boissière, Karine Godot.

Merci au correspondant du comité scientifique Ahmed Semri, et à Robin Jamet, autre membre du groupe AlPaGe, pour sa participation aux discussions et son regard « expert » sur la vulgarisation.

Merci à tous les autres participants.

REFERENCES

Artigue M. (1988) Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 9(3), 281-308.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Caron F. et Garon A. (2014). Tackling the challenges of computational mathematics education of engineers. In Damlamian A., Rodrigues J. F. et Sträßer R. (Eds.) *Educational Interfaces between Mathematics and Industry – Report on an ICMI-ICIAM-Study*, (pp. 365-375). New ICMI Study Series. Switzerland : Springer International Publishing.

Chevallard Y. (1992a) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1992b) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactiques des mathématiques* 12(1), 73-112.

Hanna G. (1989) Proofs that prove and proofs that explain. In Vergnaud G., Rogalski J., Artigue M. (Eds.) *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol II, pp. 45-51). Paris.

CONTRIBUTIONS AU PROJET SPÉCIAL 2

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ÉVALUER UNE ACTION DE VULGARISATION DES MATHÉMATIQUES

Shaula FIORELLI VILMART[*] – Pierre AUDIN[**] – Hacène BELBACHIR[***] – Pierre-Alain CHERIX[****] – Benoît RITTAUD[*****]

Résumé – La vulgarisation des mathématiques est polymorphe et peut être menée de multiples façons. Le but de ce texte est de donner une définition suffisamment large pour les englober et suffisamment précise pour les décrire, tout en donnant un moyen de les comparer. Ces différences sont la conséquence de l'existence de différentes postures et interactions entre le public et le ou les animateurs. L'outil mis en place consiste en deux graphes quantifiant les différentes postures et interactions permettant ainsi une comparaison entre activités, mais aussi une évaluation de l'adéquation entre l'activité envisagée et son déroulement effectif.

Mots-clefs : (5 mots clefs séparés par des virgules)

Abstract – Popularization of mathematics may be done in many ways. The purpose of this article is to give a broad definition that includes most of them and is accurate enough to describe them. At the same time it would be useful to have a way of comparing these different forms of mathematical popularization. As these differences follow from the different possible interactions between the public and the presenter, the implementation tool consists of two graphs quantifying these different interactions. It allows a comparison between different activities, but it also provides a tool to quantify the adequacy between the planned activity and the show.

Keywords: (les 5 mots clefs en anglais séparés par des virgules)

À la suite d'EMF2012, les auteurs de cet article ont mis en place un groupe de travail informel nommé AlPaGe (Alger-Paris-Genève). Ce groupe est né de la volonté de désenclaver les petites unités de vulgarisation qui travaillent souvent de façon séparée, ainsi que d'unifier le sens donné au mot « vulgarisation » au vu du constat fait que chaque vulgarisateur sa propre définition de la vulgarisation. Un de ses buts principaux est donc de déceler les particularités de la vulgarisation mathématique, plus particulièrement par rapport à l'enseignement, pour en donner une définition consensuelle. Du point de vu méthodologique, nous avons choisi de répertorier les principales typologies des actions de vulgarisation et d'examiner si nos visions a priori sont en adéquation avec la réalité.

C'est dans ce but que nous avons mis en place l'étude que nous présentons dans cet article. Celle-ci n'en est qu'à ses débuts, ce qui suit doit donc être considéré comme une volonté des

[*] Université de Genève, Section de mathématiques et NCCR SwissMAP – Suisse – Shaula.fiorelli@unige.ch
[**] Département de mathématiques, Palais de la découverte, Paris – France – pierre.audin@universcience.fr
[***] USTHB, Faculté de Mathématiques, laboratoire RECITS, Alger – Algérie – hbelbachir@usthb.dz
[****] Université de Genève, Section de mathématiques– Suisse – Pierre-alain.cherix@unige.ch
[*****] Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539 – France – rittaud@math.univ-paris13.fr

Fiorelli Vilmart S., Audin P., Belbachir H., Cherix P.-A., Rittaud B. (2015) Évaluer une action de vulgarisation des mathématiques. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé2, pp. 909-917.

auteurs de confronter leurs réflexions à celles d'autres praticiens de la vulgarisation des mathématiques.

I. UN OUTIL POUR EVALUER UNE ACTION DE DIFFUSION (DU POINT DE VUE DE L'ANIMATEUR)

Nous dénommons « action de diffusion » tout type d'activité dont le but est de partager un savoir scientifique, en l'occurrence mathématique, avec un public non expert. Dans le cadre de cet article, nous nous restreindrons à des activités où une ou éventuellement plusieurs personnes (les animateurs) sont face à un public. Il peut s'agir par exemple d'un exposé ou d'un atelier, mais aussi d'un stand lors d'une fête de science.

Dès lors, qu'est-ce qui caractérise une action de diffusion des mathématiques ? Peut-on placer dans une même catégorie un atelier où l'on propose une activité de découverte des probabilités, un exposé sur $\sqrt{2}$ ou une exposition sur les symétries ? Quelles démarches apparaissent lors d'une action de diffusion ? Telles sont les questions à la base de notre réflexion.

Prenons le cas d'un atelier où l'on propose un jeu pour initier une réflexion sur les probabilités. Dans un premier temps, l'animateur va susciter la curiosité du public à l'aide d'un paradoxe ou d'un résultat étonnant : c'est la « vulgarisation » au sens courant du terme. Puis il va mettre le public en situation de recherche en lui donnant de temps en temps des pistes de réflexion. Finalement, il pourra conclure en donnant quelques éléments théoriques permettant de comprendre ce qui se cache derrière le phénomène étudié. Se pose alors la question suivante : l'animateur est-il dans une démarche de vulgarisation, d'enseignement ou de mise en situation de recherche ? (On ne s'intéressera qu'à ces trois démarches en les supposant distinctes.)

La réponse est un peu des trois. Ce sont ces trois types d'actions distincts qui, pris ensemble, constituent la démarche de vulgarisation suivie par notre animateur fictif.

Enseignement : ici pris au sens courant : l'animateur donne une explication du type *classe de mathématiques* (ce qui ne veut pas nécessairement dire cours magistral). Nous ne chercherons pas ici à définir rigoureusement l'enseignement, nous contentant d'une vision générale : la démarche de transmission à des apprenants d'un savoir et de ses méthodes par une personne qui en est dépositaire.

Mise en situation de recherche : il s'agit, par l'intermédiaire de problèmes ou de situations données, de faire en sorte que le groupe, de façon collective ou individuelle, se confronte au sujet sans que l'animateur n'ait à spécifier quelles questions se posent autrement qu'en ayant présenté la situation, qu'on voudra aussi auto-suffisante que possible..

Vulgarisation : sans doute l'aspect le plus difficile à cerner ; dans le contexte présenté, on peut commencer par la décrire par ce qu'elle n'est pas. En effet, la vulgarisation n'étant pas l'enseignement, elle n'a pas vocation à expliquer, mais plutôt à présenter un sujet donné. Il s'agit de *donner à voir* et non de *donner à comprendre*. À la limite, dans une vulgarisation « parfaite », on n'enseigne rien.

Ces trois aspects reflètent bien les différents moments d'une action de type atelier, mais qu'en est-il des autres types d'actions de diffusion de la science ? Dans le cas d'un exposé tout public, vulgarisation et enseignement sont les deux aspects les plus présents. Dans le cas d'un atelier, ces trois aspects sont plus ou moins représentés. Il est donc pertinent de retenir ces trois aspects pour décrire entièrement une action de diffusion des mathématiques.

Nous nous proposons de mettre en place un outil graphique qui met en exergue ces trois aspects des actions de diffusion et qui permettra de mieux cerner les spécificités de la diffusion par rapport à l'enseignement « scolaire ».

1. *Un graphique pour décrire une action de diffusion*

Comme nous l'avons mentionné avant, lors d'une action de diffusion on aborde essentiellement les trois aspects décrits plus haut. Cependant, les noms que nous leur avons donnés semblent trop reliés à des intuitions. Lorsque nous disons « enseignement », par exemple, apparaît sous nos yeux l'image d'un professeur de mathématiques. Commençons donc par renommer ces aspects. Nous proposons ici les trois dénominations suivantes du point de vue de l'animateur :

- **donner à voir** au lieu de Vulgarisation,
- **donner à chercher** au lieu de Démarche de recherche,
- **donner à comprendre** au lieu de Enseignement.

Nous nous proposons de construire un outil pour dégager les principales typologies d'actions de diffusion.

En nous basant sur une approche expérimentale, nous proposons de représenter une action de diffusion selon ces deux étapes :

- un graphe a priori qui correspond aux hypothèses de travail,
- un graphe a posteriori qui correspond à la réalisation effective (l'expérimentation).

Nous avons choisi de focaliser notre étude sur l'animateur et non sur le ressenti du public. En effet, face à un public hétérogène, il est difficile, voire impossible, d'évaluer la posture de celui-ci en tant qu'ensemble. Le choix de s'intéresser à l'animateur découle de cette impossibilité. De plus, l'évaluation a priori et a postériori via les temps passé dans chaque posture permet de quantifier l'adéquation de la préparation de la séance et de son déroulement.

Chaque graphe comporte trois axes nommés de la manière suivante : *donner à voir*, *donner à chercher* et *donner à comprendre*. Ces trois aspects sont les postures que prend l'animateur lors d'une action de diffusion. Une action sera représentée par un triangle dont les sommets sont sur les axes de coordonnées[306] ; il s'agit en fait d'un graphe radar qui sert de représentation prospective.

Ce graphe n'est qu'une représentation des données numériques, mais en superposant le graphe a priori et le graphe a posteriori, on peut rapidement évaluer, par exemple, si les deux graphes sont très semblables ou non.

Nous mettons une mesure sur les axes : la proportion du temps passé ou estimé au préalable dans chacune des postures. Ainsi, la somme des trois coordonnées sera égale à 100% du temps de l'action.

[306] On aurait pu choisir la représentation à l'aide d'un point défini par ses coordonnées sur les trois axes. Cependant, le choix du triangle permet une meilleure lisibilité.

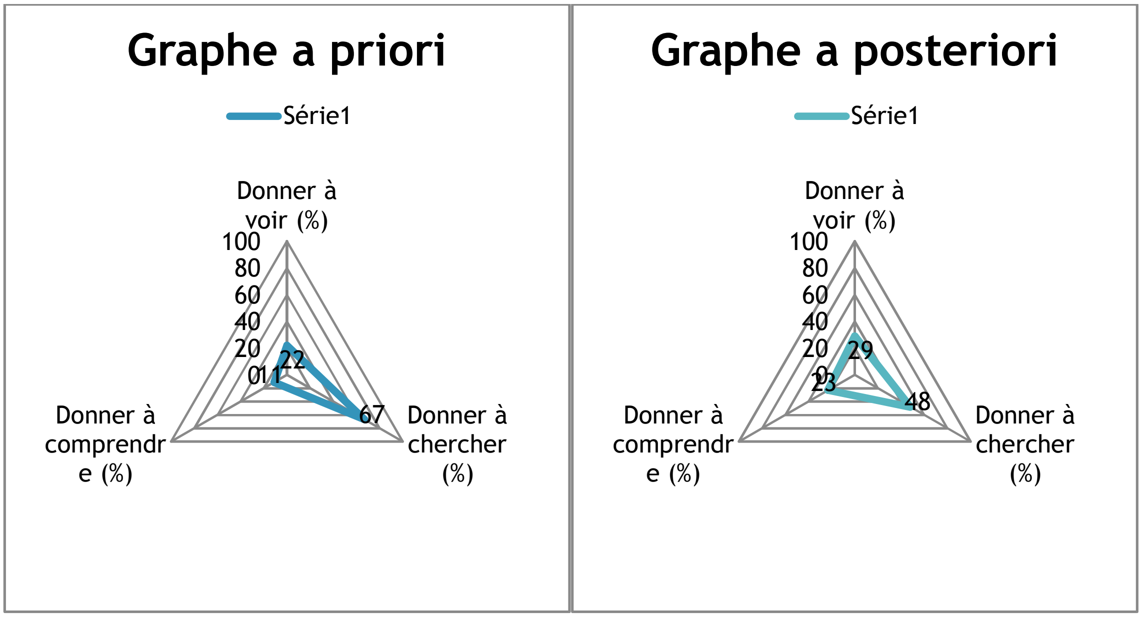


***Figure 16** – Le graphe a priori et a posteriori de l'activité Devenez des magiciens des nombres.*

2. *La fiche de relevé*

Munis de cet outil graphique, nous avons mis en place une fiche de relevé en trois parties (voir Annexe). La première partie est à remplir avant l'activité et comporte des informations générales comme le type d'activité, le matériel utilisé, le rodage de l'activité, le lieu où se déroulera l'activité et le statut du public ainsi que l'analyse a priori de l'activité, avec un séquençage prévu et le temps passé dans chaque posture selon ce séquençage, ce qui permet de construire le graphe a priori.

La deuxième partie est à remplir durant l'activité et recense le nombre de participants par genre et par classe d'âge, ainsi que les réactions du public, notamment (et surtout) les questions qu'il a posées. Cette deuxième partie est complétée par le séquençage exact de l'activité.

Finalement, dans la troisième partie, nous reprenons le séquençage de la deuxième partie pour construire le graphe a posteriori. On note aussi le ressenti de l'animateur à la suite de cette action de vulgarisation.

II. EXEMPLE D'ACTIVITE ET DE SA FICHE DE RELEVE

Pour mieux présenter notre travail, nous décrivons ici une activité, *Devenez un magicien des nombres*, et la manière dont on remplit la fiche de relevé.

Le déroulement habituel est le suivant.

L'activité commence avec le visionnement d'une vidéo du magicien belge Gili[307] où ce dernier réalise en moins de 35 secondes un carré magique dont le nombre magique (la somme sur chaque ligne, colonne ou grande diagonale) est choisi par le public parmi les nombres de 50 à 100.

---

[307] pour voir la vidéo sur YouTube : https://www.youtube.com/watch?v=4vQ-COdA2PY

Le carré magique est recopié au tableau. S'ensuit une discussion sur la définition d'un carré magique, en particulier sur tous les endroits où l'on peut trouver le nombre magique. Quelques remarques culturelles peuvent être faites à ce moment.

On distribue ensuite un jeu de 16 plots. Chaque plot comporte deux caractéristiques : une couleur et une hauteur, pour un total de quatre couleurs et quatre hauteurs différentes.

Dans un premier temps, on ne prend que 9 plots (de trois couleurs et trois hauteurs différentes) et on demande aux participants de les disposer sur une grille 3 x 3 de telle sorte que sur chaque ligne et chaque colonne soient représentées une et une seule fois chaque couleur et chaque hauteur. On demande ensuite à ceux qui ont réussi de tenir compte aussi de la diagonale, ce qui se relève vite impossible. Ce sera aux participants de démontrer la raison de cette impossibilité.

On passe ensuite à la grille 4 x 4 avec les 16 plots. Cette fois-ci, on demande aux participants de tenir compte de la diagonale. Autrement dit, il s'agit de disposer les 16 plots sur une grille 4 x 4 de telle sorte que sur chaque ligne, chaque colonne et chacune de deux diagonales soient représentées une et une seule fois chaque couleur et chaque hauteur. Ils construisent ainsi un carré gréco-latin. On explique ensuite comment passer du carré gréco-latin d'ordre 4 à un carré magique : chaque plot correspond à un nombre de 1 à 16 selon un tableau de correspondance établi avec les participants. Les participants construisent leur carré magique à l'aide de leur carré gréco-latin, obtenant ainsi un carré dont le nombre magique est 34. Il s'agit ensuite de leur faire trouver comment passer de leur carré magique à un carré magique dont le nombre magique est compris entre 50 et 100. Le but étant de comprendre la méthode du magicien.

Selon l'âge des participants, on peut finalement expliquer pourquoi cette construction du carré magique en se basant sur un carré gréco-latin est efficace. L'ingrédient nécessaire étant la représentation des nombre en base 4 et la commutativité de l'addition.

Remplissons maintenant le fiche de relevé (voir Annexe). Sur la première page, nous reportons des informations générales comme le nom du ou des animateurs, le titre de l'activité, la date, la durée prévue, le matériel utilisé le rodage de l'activité et le type de public. Puis, sur la deuxième page, nous reportons le séquençage prévu. Pour l'activité Devenez des magiciens des nombres nous avons le séquençage a priori suivant :

00:00	Présentation + vidéo (v)
00:10	Élèves au travail (3x3)+ relances (ch)
00:15	Élèves au travail (4x4)+ relances (ch)
00:25	Passage greco-latin → magique
00:30	Réaliser magique avec nombre donné
00:40	Conclusion (c)
00:45	Fin de l'activité

Il s'agit ensuite de déterminer quelle est la posture de l'animateur pour chacun de ces moments. Dans ce cas, l'animateur a indiqué les postures suivantes :

00:00	Présentation + vidéo	donner à voir
00:10	Élèves au travail (3x3)+ relances	donner à chercher
00:15	Élèves au travail (4x4)+ relances	donner à chercher
00:25	Passage greco-latin → magique	donner à chercher
00:30	Réaliser magique avec nombre donné	donner à chercher
00:40	Conclusion (c)	donner à comprendre

On obtient ainsi les données suivantes :

donner à voir	10 min.	22 %
donner à chercher	20 min.	67 %
donner à comprendre	5 min.	11 %.

Vient ensuite le moment de l'activité à proprement parler. En page 3 du relevé, nous reportons des données sur le public comme le nombre total de participants et leur répartition homme/femme et enfants/adolescents/adultes/retraités, le nombre de questions et les réactions du public (attention, bruit, distractions et commentaires des accompagnateurs).

Finalement, en page 4 et 5, nous notons le séquençage de l'activité dont nous tirons le temps passé dans chaque posture. On obtient finalement les graphes de la Figure 16. Une dernière case permet de récolter le ressenti de l'animateur.

III. PREMIERS RESULTATS… ET PREMIERES QUESTIONS

Jusqu'en janvier 2015, nous avons récolté 14 fiches de relevé. Elles concernent toutes des activités de type atelier impliquant des classes. Dix se sont déroulées en milieu scolaire et quatre concernaient des classes en visite au Palais de la découverte (Paris) ou au Musée d'histoire des sciences (Genève).

Nous présentons ici une première analyse des fiches récoltées. Il s'agit là de résultats préliminaires qui serviront de base à une récolte future plus ciblée sur les questionnements établis grâce à cette première analyse.

	A priori			A posteriori			Ecarts (Post-Priori)		
Titre	Donner à voir (%)	Donner à chercher (%)	Donner à comprendre (%)	Donner à voir (%)	Donner à chercher (%)	Donner à comprendre (%)	Donner à voir (%)	Donner à chercher (%)	Donner à comprendre (%)
Dés non transitifs	23	50	27	38	25	37	15	-25	10
Devenez des magiciens des nombres	16	56	28	32	64	4	16	8	-24
Devenez des magiciens des nombres	22	67	11	29	48	23	7	-19	12
En un coup de ciseau	24	50	26	18	55	27	-6	5	1
Formule de Pick	11	67	22	4	69	27	-7	2	5
Les plaques d'égoût	22	56	22	23	55	22	1	-1	0
Les ponts de Königsberg	17	50	33	27	54	19	10	4	-14
Mathématicien en herbe	10	80	10	6	51	43	-4	-29	33
Mathématicien en herbe	10	80	10	5	80	15	-5	0	5
Paradoxe des anniversaires	25	33	42	33	17	50	8	-16	8
Paradoxe des anniversaires	25	33	42	24	31	45	-1	-2	3
Pavages	17	33	50	14	21	65	-3	-12	15
Problème de poids	11	56	33	14	72	14	3	16	-19
Problème de poids	11	56	33	15	65	20	4	9	-13
Moyenne	17.4	54.8	27.8	20.1	50.5	29.4	2.7	-4.3	1.6
Ecart type	6	15.4	12.3	11	19.9	16.6	7.6	13.6	15.1

Tableau 1 *– Analyses a priori, a posteriori et écarts entre les deux dans les 14 fiches de relevés.*

Au premier abord, on observe qu'une action de diffusion de type atelier se caractérise par une forte proportion de la mise en situation de recherche (env. 50%). Les postures *donner à voir* et *donner à comprendre* se partagent les 50% restants selon la proportion 2/5 et 3/5 respectivement. Cependant, les écarts entre les différentes activités sont grands, surtout dans les valeurs a posteriori : on a par exemple 17% et 80% comme valeurs extrêmes dans la posture *donner à chercher* ou 4% et 65% dans la posture *donner à comprendre*. Ceci est aussi reflété par les valeurs des écarts-types.

Une difficulté vient du fait que chaque fois qu'il y a travail de groupe ou personnel dans un atelier, il y a un risque de sous-évaluation des parties « donner à voir » et « donner à comprendre » puisque celles-ci ne sont en général comptabilisées que dans les mises en commun. Il serait intéressant de voir si les statistiques diffèrent beaucoup si le minutage est fait dans chaque groupe. Si ce n'est pas le cas, cela indiquerait que nos mesures sur l'animateur sont robustes.

Remarquons qu'il est intéressant pour nous de calculer les moyennes et les écart-types. En effet, notre but premier étant de caractériser les différentes typologies d'actions de diffusion, il est intéressant d'avoir un modèle moyen pour l'action de type « Atelier ». Notre but est de recueillir plus de données, en particulier pour d'autres types d'actions de diffusion. Par exemple, des relevés de présentations pourront nous aider à avoir un modèle moyen pour ce type d'action.

On observe aussi que pour une même activité, de grands écarts peuvent se produire. Par exemple, dans l'activité *Mathématiciens en herbe*, on peut avoir 51% ou 80% (29 points d'écart) dans la posture *donner à chercher* et 15% ou 50% (35 points d'écart) dans la posture *donner à comprendre*. Ces écarts reflètent surtout la différence de niveau entre les groupes de public. En effet, les résultats a posteriori reflètent bien l'analyse a priori dans un cas tandis que dans l'autre il y a un grand écart entre les deux. Ceci est sûrement lié à l'attention du public comme indiqué dans le relevé : « au début lors de la première partie, bonne attention, puis dégradation vers la fin par manque de compréhension »[308]. La même observation peut être faite pour les activités *Paradoxe des anniversaires* et *Problème de poids*.

Ces observations entraînent trois remarques dont il faudra tenir compte dans nos relevés futurs :

R1) Un relevé correspond à une expérience et pour avoir des résultats fiables, il faut répéter plusieurs fois la même expérience. Il faudra donc relever plusieurs fois la même activité pour pouvoir en déduire une valeur moyenne si l'on veut exploiter celle-ci dans une étude des typologies des actions de diffusion.

R2) Le comportement du public est une variable qui influe beaucoup sur les durées des différentes postures et sur laquelle nous n'avons aucun contrôle. Il sera donc important de bien rendre compte de ce facteur dans le relevé et éventuellement de le quantifier, pour avoir une meilleure lecture des données a posteriori.

R3) Le type de public (scolaire ou libre) ainsi que son niveau scolaire est aussi déterminant. Il serait donc utile de faire une analyse a priori pour chaque groupe de population.

Si l'on se penche sur l'activité *Devenez des magiciens des nombres*, on remarque que les valeurs a priori ne sont pas les mêmes entre les deux fiches. Il s'agit en effet de la même activité mais présentée à un intervalle de 6 mois. L'animateur a refait une fiche sans se baser sur le relevé précédent mais a adapté les temps passés dans chaque posture selon son expérience précédente. Cela montre que le relevé peut aider à mieux analyser l'adéquation (ou non) entre ce qu'on veut présenter (l'analyse a priori) et la réalisation effective d'une activité (l'analyse a posteriori).

Cette observation suscite plusieurs questions qui restent ouvertes à la discussion :

Q1) Est-ce qu'un même animateur doit refaire une analyse a priori avant chaque nouvelle action ? Ou doit-il la refaire uniquement si l'analyse a priori n'est pas en adéquation

[308] Tous les relevés peuvent être consultés sur la Dropbox des auteurs : https://www.dropbox.com/sh/6jw5q263uebb233/AAC-WtSGBH-Nn5aouRi-GZ3ea?dl=0

avec l'analyse a posteriori ? Dans ce cas, quel serait le critère pour déterminer qu'une analyse a priori n'est pas en adéquation avec une analyse a posteriori ?

Un premier élément de réponse nous vient de la remarque R1 : il peut être utile de relever plusieurs fois une même activité pour avoir une valeur moyenne. À l'aide de cette valeur, on pourra éventuellement se prononcer sur l'adéquation. Reste à savoir combien de relevés peuvent permettre de donner une bonne valeur moyenne.

Ainsi, cette première analyse apporte des pistes de réflexion qui permettront de mieux orienter nos relevés futurs. D'autres questions peuvent aussi se poser, c'est ce que nous évoquerons dans la prochaine section.

IV. PISTES DE REFLEXION POUR LES FUTURS RELEVES

Une première analyse des relevés nous a permis de dégager certaines pistes de réflexion. En voici quelques autres.

1. Au sujet des animateurs

Une même action de diffusion peut être réalisée par différents animateurs. Ceci se produit notamment au Palais de la découverte ou au Mathscope, lieu d'accueil des groupes mis en place à l'Université de Genève depuis mars 2015. Précisons que, dans le cadre du Mathscope, les activités suivent un canevas bien déterminé. Toutefois, on peut admettre que les animateurs ont un peu de liberté. Dès lors :

Q2) Les différents animateurs doivent-ils se baser sur la même analyse a priori ou chacun doit faire la sienne ?

Cette question n'a pas encore trouvé d'éléments de réponse.

2. Les différentes typologies d'actions de diffusion

Pour mieux caractériser les différentes typologies d'actions de diffusion, il nous paraît intéressant de trouver des activités qui peuvent être réalisées sous différentes formes (atelier, conférence, installation sans animateur) et relever les différences à l'aide de notre outil graphique. En effet, en ne faisant varier qu'un seul paramètre, à savoir la typologie, nous pourrons mieux étudier les spécificités de chaque activité.

Nous sommes toutefois conscients qu'en faisant varier la typologie, nous modifierons sans doute d'autres facteurs et que nous devrons être attentifs à ces changements dans notre analyse.

3. Vulgarisation vs Enseignement

Si nous voulons mieux comprendre les spécificités de la vulgarisation par rapport à l'enseignement, il serait sans doute utile de procéder à des relevés de la même activité utilisée dans les deux contextes. Une telle réflexion a déjà été présentée par deux des auteurs lors d'EMF2012 (Cherix & Fiorelli Vilmart, 2012) mais, en vue de dégager les particularités de la vulgarisation par rapport à l'enseignement, il serait pertinent de quantifier les différences à l'aide de notre outil graphique.

4. *Un outil pour mieux analyser nos pratiques ?*

À l'aide de notre outil graphique, nous pouvons quantifier l'écart entre l'analyse a priori et la réalisation effective d'une action de diffusion. Pouvons-nous dès lors en déduire un outil pour mieux analyser nos pratiques ?

De plus, plus l'adéquation entre a priori et a posteriori est bonne, meilleur est le sentiment de réussite pour le présentateur. Qu'en est-il du ressenti du public ?

Ces deux questions montrent que nous sommes en train de construire non seulement un outil qui nous permet d'analyser les typologies d'actions de vulgarisation, mais aussi de mettre sur pied un outil qui nous permettra peut-être de mieux analyser notre travail. Notre étude future devra donc comporter ces deux aspects. En outre, il serait utile de pouvoir accentuer nos efforts sur le public dans nos relevés futurs.

V. EN CONCLUSION

Conçu à l'origine pour dégager et caractériser les différentes typologies d'actions de diffusion, l'outil graphique que nous ambitionnons de développer aura pour objectif non seulement dégager et caractériser les différentes typologies d'actions de diffusion mais aussi d'évaluer nos pratiques et mesurer l'adéquation entre nos attentes et le déroulement effectif d'une activité.. Cependant, pour qu'une telle lecture puisse être donnée à cet outil, il faut avant tout déterminer des critères qui le permettent, ce que nous nous proposons de faire dans un deuxième temps. Il ne faudra cependant pas perdre de vue notre but premier, à savoir donner une définition de la vulgarisation. Nous poursuivrons notre étude et, dans la mesure du possible, répondrons aux questions qui ont émergé à la suite de cette première analyse.

REFERENCES

Cherix P.-A., Fiorelli Vilmart S. (2012) L'expérience des Cafés Mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle — Actes du colloques EMF2012* (pp. 1883-1894). Genève.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

MATHS A MODELER, DES JEUX POUR APPRENDRE A CHERCHER EN MATHEMATIQUES

Karine GODOT*

Résumé- Né de la collaboration entre chercheurs en mathématiques et didacticiens, le projet Maths à modeler vise à développer des situations particulières présentées sous forme de jeu, les situations recherche, amenant le participant, élève, enfant ou grand public à rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques. À partir de l'exemple de la situation La roue aux couleurs, nous présenterons les caractéristiques de ces situations, leurs conditions de gestion dans un cadre scolaire et extrascolaire, ainsi que le rôle du support ludique dans leur dévolution, les apprentissages qu'elles mettent en jeu et leurs apports vis-à-vis de l'image des mathématiques.

Mots-clefs mathématiques- didactique- recherche- heuristique- jeu- médiation

Abstract: Maths à modeler is a project developped by discrete mathematics researchers and didacticians. The aim is to propose particular situations, the research situations, that permit to the public, pupils or not, to discover what means researching in mathematics. From the example of the situation called The wheel of colors, we present what are the characteristics of these situations, the role of the game, the learnings associated, how they can be used in the classroom or somewhere else (organization conditions) and hox they can change the feeling about mathematics.

Keywords: mathematics, didactik, research, heuristik, game, vulgarisation.

I. LE PROJET MATHS À MODELER

1. *Une équipe pluridisciplinaire*

Le projet Maths à modeler est né de la collaboration entre des chercheurs en mathématiques discrètes, des didacticiens, rejoints par des chercheurs en sciences de l'information et de la communication, en sciences de l'éducation ou encore en psycho-clinique. Il étudie depuis plusieurs années comment amener l'élève, du primaire à l'université, ou le grand public[1] à devenir apprenti chercheur en mathématiques, à entrer dans une démarche de recherche en mathématiques, c'est-à-dire essayer, observer, élaborer des stratégies de recherche, conjecturer, fournir des contre-exemples, prouver, mais aussi avoir du plaisir, persévérer, imaginer, …

* CNRS/UJF – France - sciencesetmalice@no-log.org

[1] Par exemple lors de la Fête de la science

Godot K. (2015) Maths à modeler, des jeux pour apprendre à chercher en mathématiques. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé2, pp. 918-925.

2. *Les situations recherche*

Les recherches menées dans le cadre du projet Maths à modeler s'articulent autour de situations que nous appelons situations recherche[2]. Au fil des années, nous avons expérimenté la recherche de plusieurs de ces situations recherche dans l'institution scolaire (du primaire à l'université) mais aussi dans un cadre de vulgarisation (atelier stand lors de la Fête de la science, atelier au sein du CCSTI[3] de Grenoble pendant les vacances, ateliers périscolaires, …)

Ces situations didactiques particulières peuvent être considérées comme la transposition pour la classe, ou ailleurs, de l'activité du chercheur en mathématiques. Nous les caractérisons ainsi (Grenier & Payan 2002 ; Godot 2005) :

- Le problème abordé est le plus souvent issu de problèmes de recherche actuels. Il peut donc comporter une, plusieurs ou aucune solution et être encore ouvert dans la recherche mathématique actuelle[4] .
- Le point de départ est une question facilement compréhensible pour celui à qui elle est posée. Elle n'est pas formalisée en termes mathématiques. C'est la situation qui amène l'élève à l'intérieur des mathématiques.
- Les méthodes de résolution ne sont pas désignées. Plusieurs pistes peuvent être suivies.
- Les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et réduites possibles
- Le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème, même s'il n'est pas familier, est d'un accès facile pour que l'on puisse prendre facilement possession de la situation, s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution.
- Une question résolue peut amener à se poser de nouvelles questions. Il n'y a que des critères de fin locaux. Il n'y a pas un résultat défini à obtenir, à démontrer mais une question ouverte qui amène à chercher à résoudre des sous-problèmes pour, petit à petit, répondre à la question générale.

La recherche d'une situation recherche, contrairement aux pratiques de classe et aux manuels (qui représentent pour la majorité de la population la voie d'accès aux mathématiques), comporte ces trois aspects fondamentaux de l'heuristique mathématique (Grenier & Payan 2002):

- « L'enjeu de vérité ». La plupart du temps, en classe, l'élève sait que ce qu'il a à prouver est vrai (« démontrer que »). « Il n'y a plus d'« enjeu de vérité. (…) L'enjeu est alors pour lui d'apprendre, non de produire une connaissance. » Dans les situations recherche, il peut être amené par exemple à rencontrer l'impossibilité sans que rien dans la situation ne le lui précise. Dès lors, il devra trancher : est-ce difficile ou impossible ? Comment être sûr ?
- « L'aspect social de l'activité ». Dans un cours de mathématiques, l'élève est habituellement seul à chercher. Dans une situation recherche, « il peut y avoir un vrai enjeu social de production mathématique », la classe ou le groupe d'enfants se transformant en communauté de jeunes chercheurs.

---

[2] vous en aurez plusieurs exemples sur le site: http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/debutval.php

[3] Centre de Culture Scientifique et Technique, sorte de petit musée des sciences.

[4] la plupart des situations recherche sont issues du domaine des mathématiques discrètes, un champ des mathématiques comportant de nombreux problèmes compréhensibles et encore ouverts dans la recherche.

- « L'aspect recherche». En classe, la recherche se réduit souvent à celle de la connaissance mathématique à utiliser, « du bon outil ». Dans le cas d'une situation recherche, l'élève est acteur de la recherche, comme le chercheur, il ne sait pas à quoi vont aboutir ses recherches et « utilise des résultats locaux (trouvés en cours de la recherche) ou même des propriétés encore à l'état de conjectures (qui devront être prouvées ou infirmées ensuite), parce qu'elles permettent d'avancer ».

La recherche se fait généralement en groupes de 3 ou 4, afin de favoriser le débat, l'argumentation et éviter les découragements. Elle est accompagnée, selon le cadre, soit par un enseignant, soit par un chercheur soit par un animateur scientifique. Ils ne sont pas là pour répondre aux questions des enfants mais pour les guider dans leurs recherches, les questionner, les inciter à des comparaisons mais en aucun cas pour leur fournir des résultats… Les apprentis chercheurs disposent d'une feuille de recherche pour noter ce qu'ils jugent important, garder des traces, parallèlement cela favorise les phases de formulation et incite la mise en place d'un codage, le besoin de chercher peu à peu comment modéliser... Après plusieurs séances de recherche, des mises en commun sont organisées pour que les groupes communiquent leurs résultats, débattent et ainsi créer une unité dans la « petite communauté mathématique » tout au long des séances. Les recherches sont enfin finalisées par une communication publique (présentation par affiche, séminaire Maths à modeler junior (Pastori, 2011)) afin d'amener les enfants à formaliser leurs résultats, les argumenter, prouver…

3. Jeu et situation recherche

Dans le cadre de mes recherches, je m'intéresse plus particulièrement aux situations recherche qui sont présentées sous forme ludique dans le sens où:

• On peut jouer à un, deux ou plusieurs joueurs.

• Les actions possibles sont organisées par des règles du jeu (les consignes).

• Le déroulement d'une partie s'appuie sur l'utilisation d'un support matériel.

• Le jeu permet de traiter tous ou certains aspects de la situation recherche dans le sens où il peut présenter le problème dans des cas particuliers (choix de valeurs).

Contrairement à la majorité des jeux mathématiques et autres casse-têtes disponibles dans le commerce, le modèle mathématique sous-jacent à une situation recherche est accessible, au moins en partie, au joueur, ce qui lui permet après un temps de recherche, de mettre en œuvre des arguments mathématiques et de se détacher d'une recherche hasardeuse.

II. EXEMPLE DU JEU DE LA ROUE AUX COULEURS

1. Règle du jeu

Ce jeu est constitué de deux disques de tailles différentes, disposés de façon concentrique. Sur le plus grand disque, on pose un certain nombre de pions, tous de couleurs différentes.

Figure 1*-Jeu de la roue aux couleurs*

Le joueur doit placer sur le petit disque le même nombre de pions, de une, deux, trois ou plus couleurs choisies parmi celles qui sont disposées à l'extérieur. On fait ensuite tourner le petit disque, cran par cran. Le joueur gagne si, dans chaque position du petit disque, un et un seul de ses pions est de la même couleur que celui qui lui correspond sur le grand disque. Quelles sont toutes les façons que le joueur a de choisir et disposer ses pions pour gagner ?

Par exemple,

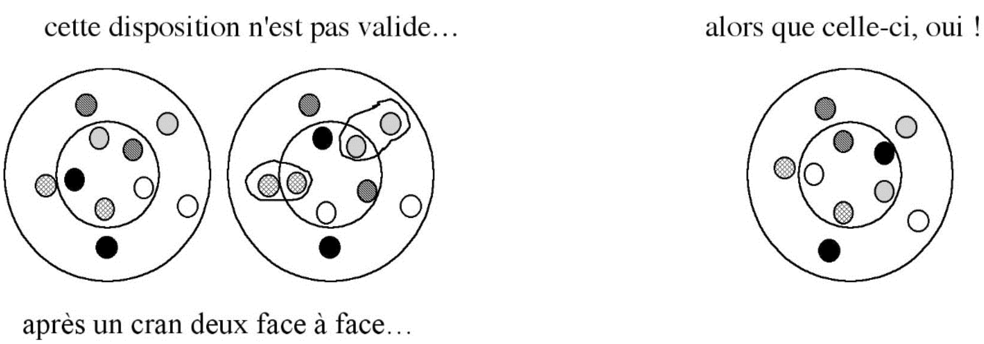


Figure 2*- Exemple de dispositions valide et invalide*

Maintenant, à vous de jouer !

2. *Éléments de résolution*

Nous noterons (n,k) les différents sous problèmes où n représente le nombre de couleurs placées sur le grand disque et k celui choisi par le joueur. Il apparaît au regard de la résolution que le couple (n,k) constitue une variable de la tâche «recherche», que nous appelons «variable de recherche » dont le choix est laissé à la charge du joueur.

On peut considérer que la résolution de ce problème, pour tout (n,k), se déroule en deux étapes:

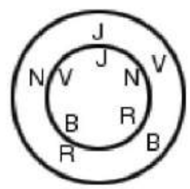
- Recherche d'une disposition des couleurs sur le disque central
- Validation de cette disposition par une rotation du disque central (réelle ou formelle)

Après quelques essais, plusieurs remarques générales peuvent s'imposer :

- Remarque « couleur»: la nature des couleurs n'a pas d'importance pour la résolution du problème, seule leur position et le fait qu'elles soient distinctes importent.

- Remarque « sens»: le sens de rotation de la roue n'a pas d'importance.

Enfin, coder les couleurs à l'aide de nombres de 0 à n-1 ou de 1 à n peut aider à la recherche. Dans le cadre de cette communication, nous allons nous centrer sur le sous-problème (n,n). Par expérimentation, on trouve facilement des solutions lorsque n = 3, 5, 7 ou encore 9. Mais qu'en est-il des cas (2,2), (4,4) ou tout autre couple (2p,2p)? Cela semble plus difficile… Pour avancer dans le problème, il faut oublier les couleurs et considérer la position relative des pions les uns par rapport aux autres, ce qui permet l'énoncé de méthodes de construction générales. On peut introduire une variable supplémentaire, le décalage entre la position sur le disque extérieur et la position sur le disque intérieur. On peut ainsi obtenir des arguments de preuve dans les cas où il n'y a pas de solution.



Disque extérieur	J V B N R
Disque intérieur	J N R B V
Décalages	0 2 4 3 1

Décalages, cas (n,n)

Figure 3*- Notion de décalages, exemple pour (n,n)*

III. PRODUCTIONS DES PARTICIPANTS

Cette situation recherche a été expérimentée de l'école primaire à l'université (auprès de cycle 3 (8-10 ans, 4éme et 5éme année du primaire), de 6ème (11 ans, 1ere année du collège) , de 1ère STI (16 ans, 2ème année du lycée) et de Deug 1 ère année). Chaque classe a cherché en groupes durant 4 ou 5 séances de 1 heure.

Nous l'avons également expérimentée dans un cadre extrascolaire lors d'un atelier de 2h proposé au CCSTI auprès d'enfants de 7 à 11 ans et sur le stand Maths à modeler pour la Fête de la science. Pour assurer la dévolution dès lors que le public chemine de stand en stand, la recherche était orientée vers les sous-problèmes (n,n) ou (n,2) dès la présentation. L'accompagnateur était plus présent auprès des apprentis chercheurs afin d'éviter qu'ils ne se découragent, les stimuler dans leurs recherches par ses questions, ses remarques, et les inviter à chercher suffisamment longtemps pour rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques.

1. Présentation synthétique des productions des élèves ou étudiants

Nous pouvons considérer que tous les groupes d'élèves sont entrés dans une démarche de recherche en mathématiques, plus ou moins élaborée.

Il n'y a pas de différences marquantes entre les dynamiques de recherche mises en place même si les niveaux scolaires sont différents, mis à part une méthode de recherche de proche en proche[5] qui n'est apparue qu'en primaire. Plusieurs autres méthodes de construction de solution ont été proposées, quels que soient le niveau et les cas étudiés. Elles s'appuient sur les démarches de recherche. Les décalages ont été introduits par plusieurs groupes, après 2 ou 3 séances de recherche. Toutefois, même si les méthodes découvertes sont similaires, leur formulation semble être influencée par l'utilisation ou non du support matériel. Parmi les

[5] Consiste à fixer ce qui marche et à ne modifier que le reste.

groupes de l'université, ceux qui ne l'ont utilisé qu'au début de leur recherche pour rapidement se tourner vers le support papier-crayon ont introduit un codage numérique des couleurs et une représentation du problème à l'aide d'un tableau, ils ont donné des méthodes de construction qui tendaient à se détacher de la description de ce qu'il faut faire, en utilisant un vocabulaire mathématique et en cherchant à généraliser. Les autres groupes, pour leur part, sont restés plus proches du commentaire d'une action.

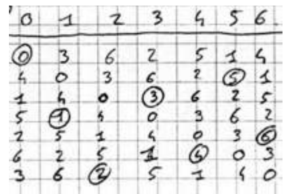


Figure 4- *Traduction de la rotation par un tableau prolongé en DEUG*

Tous ont émis des conjectures, qu'ils aient ou non mis en place des démarches de recherche organisées. Ceux qui ont procédé par tâtonnements ont énoncé des conjectures locales, liées à des cas particuliers, les autres les ont complétées par de conjectures globales, plus générales. Parmi eux, tous sont parvenus à émettre la conjecture qu'il n'y a pas de solution lorsque cela était le cas. Toutefois cela est apparu plus facilement à l'université. Nous faisons l'hypothèse que cette différence peut être due à la conception répandue chez les élèves de primaire et secondaire qu'un problème a toujours une solution, vu que cela est vrai pour la majorité des exercices qui leur sont proposés. Les étudiants de l'université, quant à eux, ont pu être confrontés à des exercices sans solution dans le cas de la résolution d'équations et ont de toute façon rencontré l'impossibilité dans les situations recherche qu'ils avaient déjà étudiées avant notre expérimentation.

Enfin, quel que soit le niveau de connaissance, tous ont été confrontés à l'activité de preuve. Ils ont montré notamment qu'il n'y avait pas de solution pour le cas (2,2) et pour (4,4), par exhaustivité des cas (qui n'était pas toujours garantie pour (4,4)) et forçage. Pour les autres cas impossibles, seuls certains groupes de l'université ont cherché des arguments de preuve.

Il n'y a donc pas de différences notoires quant à la dévolution aux élèves du problème et aux principaux résultats obtenus aux différents niveaux. Cependant, une différence majeure semble être liée à la conception que peuvent avoir les élèves sur la notion de solution.

2. Présentation des productions dans un cadre de vulgarisation

Même si les recherches ont duré moins longtemps (1h30 pour l'atelier, environ 30 min en moyenne pour l'animation stand), nous avons retrouvé plusieurs observables présents dans l'institution scolaire, notamment en primaire. Les participants ont eu recours au support matériel pour faire leurs essais, ils ont su s'organiser dans le choix des valeurs de (n,k) à étudier et ont adopté une progression régulière, par exemple, (4 ,2) ; (5,2) ; (6,2), jusqu'à (8 ,2) qui correspondait au nombre maximal de couleurs disponibles. Ils sont parvenus à énoncer Rem couleurs, ont cherché des méthodes de construction. Cependant, nous notons des différences pour les cas où il n'y a pas de solution. Sans les relances de l'accompagnateur, les enfants abandonnent très vite les cas plus difficiles (en fait impossibles). Avec l'aide de l'accompagnateur, ils arrivent à verbaliser leurs actions, justifier leurs propos, énoncer le fait que « ça ne marche pas du tout », voire à émettre la conjecture que certains cas sont impossibles, à prouver par forçage et exhaustivité sur de petites valeurs de (n,k).

Dans le cas du stand, plusieurs supports étaient disponibles simultanément. La dualité possible/impossible des cas à étudier a été un facteur stimulant à la recherche. En effet, pour (n,n), tous ont cherché des solutions, quel que soit le cas considéré, encouragés par le fait que certains trouvaient rapidement des solutions pour (5,5), même au hasard. A contrario, le fait que les cas (6,6) et (4,4) soient impossibles les a conduits à organiser leurs essais, pour parvenir à trouver des solutions, comme eux-mêmes ou d'autres y étaient parvenus pour (5,5). Certains avaient à l'esprit le fait qu'il puisse exister des méthodes, plusieurs cherchaient à anticiper la rotation quand ils plaçaient leurs pions, deux enfants ont découvert une méthode de construction par symétrie pour (2n+1, 2n+1). Pour (4,4) et (6,6), la majorité est restée dans le doute ou a conclu que *« ceux-là, ils sont beaucoup plus durs »* ou *« à 4, c'est presque impossible car il y a toujours 2 ou 0 à un moment »*. Cependant, quelques-uns ont évoqué l'idée que les cas pairs pouvaient être distingués des impairs et l'un d'entre eux a énoncé que (n,n) n'avait de solution que lorsque n est impair. Guidé par l'accompagnateur, il a ensuite étudié (3,3) et (2,2) pour vérifier cette idée. Comme dans les classes, la preuve de l'inexistence de solution pour (2,2) par exhaustivité des cas a alors été formulée.

Ainsi, même si rien dans le contrat didactique de notre situation ne force les enfants à continuer à chercher, leur seule curiosité et envie de trouver, comprendre, les poussent ici aussi à persévérer, se creuser la tête, essayer, recommencer... et donc à amorcer une démarche de recherche mathématique du problème. Cependant, suite à nos expérimentations, nous précisons que *La roue aux couleurs*, ainsi que toutes les autres situations recherche, est dévoluable dans le cadre d'une animation stand sous réserve qu'elle ne soit pas en concurrence directe avec des stands plus attractifs, type chimie amusante ou autre présentation spectaculaire. Dès lors, même si elle donne intrinsèquement envie de chercher, cela peut ne plus être assez fort pour parvenir à lutter contre la concurrence !

IV. JEU, SITUATION RECHERCHE ET APPRENTISSAGES

Nos expérimentations autour de plusieurs situations recherche ont montré que l'aspect ludique associé à un support matériel permet, quels que soient l'âge, le niveau de connaissance et le cadre d'intervention, de comprendre les règles du jeu et de mettre en place des stratégies de recherche, et s'avère donc être une aide à la dévolution du problème. Il est aussi une aide à la recherche pour les élèves, notamment ceux de l'école primaire, ainsi que pour les enfants dans le cadre du loisir ou le grand public car il donne l'opportunité de faire facilement des essais et d'exhiber des contre-exemples (Godot 2005). Ainsi, il permet d'aborder la recherche en mathématiques dans le cadre d'ateliers « sciences » proposés pendant les temps péri et extrascolaires, comme nous le faisons dans le cadre du projet Maths et malice mis en place en partenariat avec l'association grenobloise Sciences et malice (Godot 2012) ainsi que lors d'animations stand.

Dès lors, les situations recherche ludiques, à l'école ou en dehors, peuvent permettre des apprentissages en mathématiques. Ce ne sont pas des apprentissages notionnels mais transversaux, constitutifs de l'activité de recherche mathématique, tels que l'intérêt de commencer par étudier des petites valeurs (alors que les participants ont tendance à faire le contraire), d'organiser ses essais, de généraliser, d'autres liés à la mémoire de la recherche tels que l'importance de la clarté de la prise de notes et du fait qu'il est aussi important de marquer les erreurs « pour ne pas les refaire ». Les joueurs découvrent également ce qu'est un contre-exemple (et qu'un seul suffit), le statut d'une conjecture, d'une preuve, que certaines questions peuvent rester sans réponse… Des éléments relatifs à la notion même de problème mathématique sont aussi en jeu. D'une part, le fait qu'un problème de mathématiques n'a pas forcément une solution et une seule comme cela est souvent le cas dans les manuels, mais peut en avoir plusieurs ou aucune. D'autre part, qu'il n'y a pas qu'un seul schéma de résolution : quel que soit le niveau de connaissance, plusieurs stratégies de recherche apparaissent même chez les participants les plus en difficulté en mathématiques. Cependant, pour qu'il y ait apprentissages, jouer une seule fois ne suffit pas, il faut une pratique régulière.

Enfin, une telle pratique des mathématiques peut conduire à enrichir le rapport personnel du participant vis-à-vis des mathématiques car elle implique une appréhension différente de l'activité mathématique, en les montrant sous un angle expérimental, où le public est actif et acteur. Au cours de nos expérimentations, nous avons interrogé le public, dans le cadre scolaire et extrascolaire, pour savoir s'il reconnaissait les situations recherche comme faisant partie des mathématiques. La majorité des réponses rejette cette idée précisant que c'est plutôt « un jeu, un jeu de logique, de créativité », « qu'il n'y a pas de chiffres, qu'il faut réfléchir et non calculer », que « ce serait plutôt de la logique et pas des maths », que« ça ne peut pas être des maths puisqu'on s'amuse »… Une fois reconnus comme mathématiques (par le fait de les proposer en cours de mathématiques, par la présence d'un chercheur, après discussion avec l'accompagnateur, par un débat dans la classe, le groupe…), ces jeux pour apprentis chercheurs peuvent donc aussi contribuer à réconcilier certains avec cette discipline scientifique, en « cassant l'image caricaturale des mathématiques comme d'une matière où l'on applique, ou l'on ne doit pas se tromper, pour en faire une matière qui permet de développer l'autonomie, la prise d'initiative, de faire appel à l'imagination, de développer la créativité, d'attiser la curiosité, de déclencher l'envie et le plaisir d'apprendre, de réfléchir, de comprendre et de… trouver ! c'est-à-dire des qualités transférables au-delà des maths… » comme le souligne un enseignant. Ainsi, la pratique régulière de situations recherche dans le cadre scolaire et extrascolaire peut-elle, selon nous, permettre de développer un aspect de la culture mathématique très peu traité, que ce soit à l'école ou en dehors: comprendre ce qu'elles sont et ainsi leur donner plus de sens.

REFERENCES

Godot K. (2012) Maths et Malice, un projet pour faire découvrir les mathématiques sur le temps du loisir. *Enseignement des mathématiques et contrat social. Enjeux et défis pour le XXIe° siècle, colloque Espace Mathématiques Francophone*.

Godot K. (2005) *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, novembre 2005. En ligne sur http://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00102171.

Grenier D., Payan C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *RDM* 18(1), 59-100

Grenier D., Payan C. (2002) Situations de recherche en classe : essais de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques.*

Pastori M. (2011) Faire pratiquer une démarche d'investigation en classe en mathématiques, un exemple : Les ateliers Maths à Modeler et séminaires juniors. In Grangeat M. (Ed.) *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation.* Regards sur l'éducation, PUG.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DÉNOMBRER C'EST STRUCTURER

Pierre JULLIEN*

Résumé – Cette contribution veut être un plaidoyer pour introduire les dénombrements, tout au long de la scolarité (le plus tôt possible) et les vulgariser auprès du grand public. Cinq principes sont énoncés selon les signes : =, +, -, * et / qui correspondent à l'égalité, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Des exemples simples et pertinents illustrent le tout.

Mots-clefs : dénombrement, structure

Abstract – This contribution is a plea for the introduction of enumerative combinatorics all along the curriculum, as soon as possible and to a wide audience. Five principle are stated here according to the symbols =, +, -, * and /, corresponding to equality, addition, subtraction, multiplication and division. Some simple and useful examples illustrate this text.

Keywords: combinatorics, enumeration, structure

I. INTRODUCTION

Compter tout ce qui nous entoure est pour certains un réflexe premier. Malheureusement, faute de méthode, beaucoup trouvent la tâche difficile et renoncent ou obtiennent des résultats faux.

Les problèmes de dénombrements se prêtent parfaitement à la vulgarisation, dans la mesure où, d'une part, il s'agit de nombres entiers connus de tous et, d'autre part, il est possible de partir de choses très simples avant d'aborder des situations de plus en plus complexes.

Les principes (*) qui suivent, peuvent servir d'épine dorsale à une méthode pour aborder les problèmes de dénombrements. Il est possible d'illustrer par des situations concrètes, des activités de codages et/ou de schémas à consonance géométrique.

Je pense que l'enseignement de la combinatoire devrait être un souci constant des enseignants tout au long de la scolarité, dès l'école primaire. Pourquoi attendre d'être au lycée pour découvrir qu'il y a 300 manières de choisir deux élèves dans une classe de 25 ?

En France, souvent dans les programmes, les problèmes de dénombrements sont mentionnés de manière subsidiaire dans la partie *statistiques et probabilités*, au lycée. Il n'en est pas fait beaucoup mention au collège ; encore moins dans le primaire. C'est bien dommage !

* Universitaire retraité, 1er directeur de l'IREM de Grenoble - France – pierrelouisjullien@orange.fr

Jullien P. (2015) Dénombrer c'est structurer. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé2, pp. 926-933.

Dénombrer un ensemble fini, c'est trouver le nombre d'éléments qu'il possède.

Une méthode consiste à l'énumérer, c'est-à-dire à dresser une liste exhaustive de ses éléments, puis à compter les éléments de la liste constituée. Ce n'est là que déplacer la difficulté car il faut alors une méthode pour élaborer la liste en question.

La méthode qui suit consiste à connaître quelques principes simples et généraux s'appliquant à des ensembles dotés de structures simples et à reconnaître qu'un cas complexe n'est qu'une superposition de cas simples et connus.

On n'oubliera jamais que DÉNOMBRER c'est STRUCTURER.

Dans ce qui suit les ensembles considérés sont finis et le nombre d'éléments d'un ensemble X est noté |X| (Attention : cette notation n'est pas universelle).

II. PRINCIPE D'ÉGALITÉ

S'il existe une bijection de A sur B alors |A| = |B|

Aussi banal qu'il paraisse ce principe est très profond, puisqu'il est à la base même du concept de nombre cardinal.

Remarque. Pour montrer que f est une bijection de A sur B il suffit de montrer l'existence d'une application g de B sur A telle que les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ soient les applications identités de A et B respectivement.

Une telle application g est l'application réciproque de f ; elle se note aussi f^{-1}.

Ce principe est utilisé pour remplacer un problème de dénombrement par un autre, que l'on estime plus simple ! Par exemple, soient :

A l'ensemble des monômes de coefficient 1, de degré *n*, à *p* variables ;

B l'ensemble des chemins dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de (0,0) à $(p-1,n)$ tels que le suivant de (x,y) soit $(x+1,y)$ ou $(x,y+1)$;

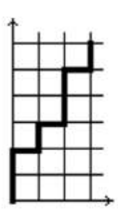
C l'ensemble des mots sur l'alphabet {h,v} comprenant $p-1$ occurrences de h et n occurrences de v ;

D l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3, \dots, n+p-1\}$ possédant n éléments ;

alors on a |A| = |B| = |C| = |D| = $\binom{n}{n+p-1}$.

En effet, le lecteur pourra, à titre d'exercice, vérifier que les applications schématisées ci-dessous sont bien des bijections. Ce qui justifie les égalités |A| = |B| = |C| = |D| . Par ailleurs, le résultat |D| = $\binom{n}{n+p-1}$ doit être connu.

Soit n=6 et p=4,

$x^2yz^2t \mapsto$  $\mapsto$ vvhvhvvhv $\mapsto$ {1,2,4,6,7,9},

y^4z^2 □ □ hvvvvhvvh □ {2,3,4,5,7,8}.

À un monôme en x y z t, de degré 6, associons le chemin du point (0,0) au point (3,9) de telle sorte que verticalement nous progressions d'un nombre égal à l'exposant de x puis après un pas à droite d'un nombre égal à l'exposant de y, etc ; à ce chemin associons le mot comprenant 3 lettres h et 6 lettres v dans l'ordre (horizontal ou vertical) de la progression et enfin associons une partie à 6 éléments de l'ensemble {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} caractérisant les emplacements de la lettre v.

III. PRINCIPE D'ADDITION

Si un ensemble est la réunion de parts disjointes deux à deux, alors son nombre d'éléments est la somme des nombres d'éléments de chaque part.

Plus formellement :

Si $E = \bigcup_{i \in I} A_i$ (où i ≠ j entraîne Ai ∩Aj = ∅) alors $|E| = \sum_{i \in I} |A_i|$.

Remarque. Certains A_i peuvent être vides.

Ce principe est à la base de la notion d'addition dans les entiers, son mode d'utilisation consiste à distinguer dans l'ensemble à dénombrer des classes d'objets deux à deux disjointes (ces classes étant plus faciles à dénombrer, a priori). Le cas le plus élémentaire est de distinguer deux classes complémentaires l'une de l'autre.

Le moyen le plus fréquent pour partager un ensemble est d'utiliser le retour inverse selon une application *f* de *E* dans un ensemble *I*. En effet,

$E = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\{i\})$ et les $f^{-1}(\{i\})$ sont distincts.

Exemple

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p}$$

Choisir pour E l'ensemble des parties à (p+1) éléments de { 0, 1, 2, ..., n } et pour f l'application de E dans { 0, 1, 2, ..., n } qui à chaque élément de E fait correspondre son plus grand élément.

IV. PRINCIPE D'ADDITION-SOUSTRACTION

Étant donné deux ensembles A et B non nécessairement disjoints, on a

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

De même

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Plus généralement la formule est compliquée.

Soit $E = \bigcup_{i \in I} A_i$, alors $|E| = \sum_{i \in I} |A_i| - \sum_{i \neq j \in I} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \neq j \neq k \in I} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$

qui se lit somme des nombres d'éléments de chaque A i , moins somme des nombres d'éléments des intersections des A i pris deux à deux, plus somme des nombres d'éléments des intersections des A i pris trois à trois, moins somme des nombres d'éléments des intersections des A i pris quatre à quatre, et ainsi de suite jusqu'à plus ou moins nombre d'éléments de l'intersection de tous les A i (où le signe est moins quand les A i sont en nombre pair et plus dans le cas contraire).

D'utilisation très délicate, ce principe est surtout intéressant lorsque les nombres d'éléments des intersections des A_i pris *p* à *p* ne dépendent que de *p* et non pas du choix des A_i.

Dans ce cas la formule s'écrit aussi

$$|E| = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \binom{n}{p} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_p| .$$

Exemple $\binom{n}{k} = \binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} - \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{k-3} - \ldots + (-1)^{k+1}\binom{n}{k}\binom{n-k}{0}$

Choisir pour E l'ensemble des parties à k éléments de { 1, 2, ..., n } et pour A_i la partie de E constituée des éléments de E auxquels i appartient.

V. PRINCIPE DE MULTIPLICATION

S'il existe un procédé d'énumération (de construction, d'identification) des éléments d'un ensemble E en k étapes de telle sorte que l'étape i ($1 \leq i \leq k$) comporte n_i choix, ce nombre n_i étant indépendant des choix précédents et qu'à l'issue de ces k étapes chaque élément de E soit obtenu une seule fois, alors E possède $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$ éléments.

Ce principe est à la base de la notion de multiplication dans les naturels. Son utilisation est très fréquente mais parfois délicate.

Exemple Il y a n (n-1) ... (n- p+1) mots de longueur p dont toutes les lettres sont distinctes, sur un alphabet à n éléments.

Définir l'étape i comme le choix de la iéme lettre du mot parmi les (n-i+1) symboles de l'alphabet non encore utilisés.

VI. PRINCIPE DE DIVISION

Soit une partition d'un ensemble E (non vide) telle que toutes les classes possèdent le même nombre d'éléments N. Notons C le nombre des classes. On a |E| = C*N soit encore C = |E| / N ou N = |E| / C .

Ce principe est en quelque sorte un cas particulier du principe précédent. Il est fréquemment utilisé pour déterminer C ou N. Il est connu sous le nom de principe des bergers, qui pour compter leurs moutons comptent le nombre de pattes et divisent par quatre.

Exemple $\binom{n}{p} = \dfrac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!}$

Prendre pour E l'ensemble des mots de longueur p, dont toutes les lettres sont distinctes sur un alphabet A à n éléments et la partition associée à l'application ß de source E telle que l'image d'un mot soit l'ensemble L des lettres qui y figurent, et dont le but est l'ensemble K des parties de A, qui possèdent p éléments. L'ensemble K possède $\binom{n}{p}$ éléments et ß est une surjection telle que $|\beta^{-1}(\{L\})| = p!$ quel que soit L de K.

VII. CE QU'IL FAUT CONNAÎTRE

Théoriquement il n'y a pas grand-chose à connaître mais en pratique mieux vaut en connaître un maximum. Par exemple, on ne saurait ignorer que :

Il y a n^p mots de longueur p sur un alphabet à n éléments

Ce qui est une autre manière d'exprimer qu'il y a n^p applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour terminer, voici à titre d'illustration une preuve combinatoire de la formule du binôme.

Soit trois ensembles E, A et B disjoints. Notons $|E| = n$, $|A| = a$, $|B| = b$ et $F = A \cup B$. Nous allons dénombrer de deux manières différentes le nombre N des applications de E dans F. De manière directe [N = (a+b) n] et de manière indirecte en décomposant l'ensemble W des applications de E dans F selon le nombre d'éléments de E qui ont leur image dans B.

Plus précisément, pour $0 \leq p \leq n$, notons A_p l'ensemble des applications de E dans F telles que p éléments de E aient leur image dans B (donc n-p ont leur image dans A).

Evidemment tous les A_p sont disjoints, donc $N = \sum_{0 \leq p \leq n} |A_p|$ (principe d'addition)

Calculons $|A_p|$. Pour obtenir un élément de A_p procédons en trois étapes satisfaisant au principe de multiplication :

- choix des p éléments de E dont l'image va dans B (il y a $\binom{n}{p}$ possibilités);
- choix de leurs images dans B (b^p possibilités) ;
- choix des images des n-p autres éléments dans A (a^{n-p} possibilités).

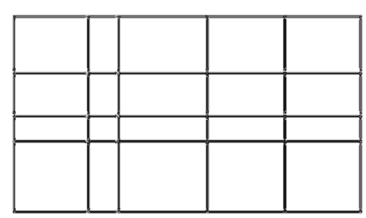
Ainsi $|A_p| = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

D'où la formule, dite du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p .$

On retrouve : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

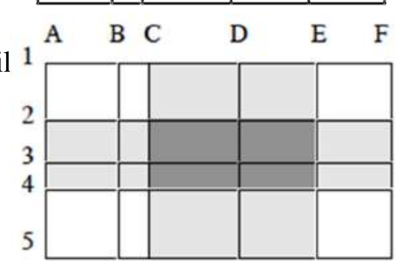
VIII. DÉNOMBRER C'EST STRUCTURER

Il s'agit de prendre possession des objets que l'on souhaite dénombrer.



Donnons quelques illustrationsCombien de rectangles dans cette figure ?

Qu'est-ce qu'un rectangle ? C'est ici l'intersection de deux



bandes, l'une "verticale", l'autre "horizontale".Pour en parler, il est commode de désigner les lignes. Ce que nous faisons avec des lettres et des chiffres.

Ainsi tout rectangle se désigne par une paire de lettres et

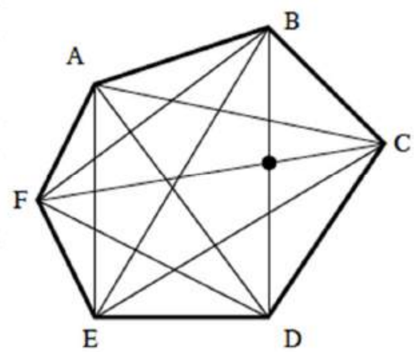
une paire de chiffres. Ici CE-24.

Il y a bijection entre les désignations et les rectangles.

Il suffit de dénombrer les désignations. Ici 15 paires de lettres et 10 paires de chiffres.

Il y a donc 150 rectangles dans cette figure.

Plus généralement, m(m+1)n(n+1) / 4 pour un rectangle de m cases par colonnes et n cases par lignes.Combien d'intersections des diagonales dans ce polygone?



Qu'est-ce qu'un point d'intersection ? C'est le choix de deux diagonales. Ci-contre : BD et CF . C'est aussi le choix du quadrilatère BCDF.

A tout point d'intersection est associé un quadrilatère et réciproquement. Il y a autant de points d'intersection que de quadrilatères, dont les sommets sont parmi ceux du polygone donné. Ici 15.

Plus généralement n(n-1)(n-2)(n-3) / 24 pour un polygone ayant n sommets.

1. *Combien de rectangles dans cette figure ?*

On note n le nombre de lignes (de colonnes). Ici n = 6 .Alors le nombre R(n) cherché vaut $\sum_{i+j\leq n} i\times j$.

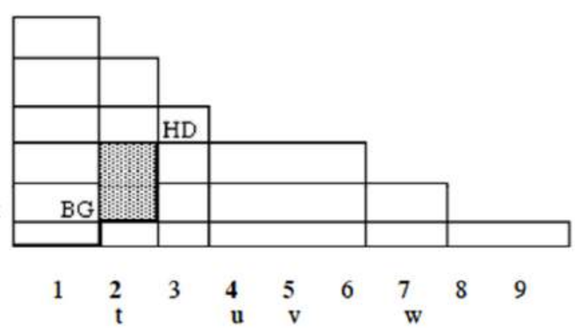
En effet, tout rectangle est caractérisé par son coin HD (en haut à droite) et son coin BG (en bas à gauche), la somme porte sur les coordonnées (i,j) des points HD possibles et $i\times j$ est le nombre des BG possibles.

Tous calculs faits on trouve $R(n)=n\times(n+1)\times(n+2)\times(n+3)/24$

C'est le coefficient $\binom{n+3}{4}$

Voici un codage direct qui permet de retrouver ce résultat comme une 4-partie du segment entier [1 , n+3] .

On code un rectangle de diagonale [BG, HD] par les coordonnées (t-1 , u-t-1) de BG et (v-u , w-v) les composantes de BG, HD.



Ce résultat se généralise à k dimensions et vaut $\binom{n+2k-1}{2k}$

2. *Le triangle de Pascal*

n\p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

La première colonne ne contient que des 1 ; le reste de la première ligne ne contient que des 0 et, pour le reste, chaque nombre est la somme de ceux qui figurent dans les cases immédiatement au-dessus

à gauche et au dessus

8	1	8	28	56	70
9	1	9	36	84	126

C'est l'illustration de la formule $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$

De manière analogue, chaque nombre est la somme de ceux qui figurent au-dessus dans la colonne de gauche et aussi en diagonale au-dessus et à gauche.

5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Ce qui illustre les formules $\binom{n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p}$ déjà présentée pour illustrer le principe d'addition, et $\binom{n+1}{n-p} = \binom{p}{0} + \binom{p+1}{1} + \cdots + \binom{n}{n-p}$

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LA DIFFUSION: UN LIEU POUR UNE MATHÉMATIQUE PLUS HUMAINE?

Christian MERCAT*

Résumé – Cet article rend compte de quelques expérimentations de vulgarisation des mathématiques tentant de mettre en œuvre certains aspects kinesthésiques, spatiaux, auditifs et visuels peu exploités dans l'enseignement des mathématiques actuel. Des arguments concernant cet enseignement proposent le terrain de la vulgarisation comme plus propice à de telles expérimentations, visant à modifier l'appréhension du public de la mathématique, la plaçant dans une dimension plus globale et humaine, convoquant plusieurs sens. Nous décrivons sommairement les activités « webcam conforme », « rebond », « clochettes de Galilée » et « danser comme une fonction », ainsi que quelques résultats très partiels, et pour tout dire peu concluants, les concernant.

Mots-clefs : mathématique incarnée, kinesthésique, visuelle, spatiale, tactile

Abstract – This article describes some experimentations in popularization of mathematics attempting to bring certain latent humane capabilities into service such as visual, aural, tactile, kinaesthetic and spatial perceptions, which are under exploited in mathematics teaching nowadays. Some arguments are given hinting at the fact that popularization is better suited than teaching for such an endeavour, aiming at changing public view of mathematics, through a more global and humane apprehension involving several senses. We describe shortly the following activities: "conformal webcam", "bouncing ball", "Galileo bells" and "dancing like a function", together with very partial and inconclusive results about them.

Keywords: embodied mathematics, kinaesthetic, visual, spatial, tactile

I. INTRODUCTION

La manière dont nous enseignons les mathématiques, dirigée en partie par la manière dont nous l'évaluons, en particulier à travers les examens et concours nationaux tels le baccalauréat, le brevet des collèges et les concours aux grandes écoles en France, promeut une certaine conception des mathématiques qui va à l'encontre de nombre de ses intérêts :

- instituée comme outil de sélection, la mathématique est clivante socialement, entrainant dédain, rejet et phobie. Elle n'est en effet ni comprise ni présentée comme, avant tout, un « simple » outil de résolution de problèmes parmi d'autres. S'ensuit un effet de contrat sclérosant sur les « métiers » respectifs des enseignants et des élèves (Brousseau, 1988). Paradoxalement les nombres ou le raisonnement formel sont parfois utilisés dans la cité à contre-sens comme argument d'autorité, pour couper à

* S2HEP EA 4148 – IREM de Lyon – Univ. Claude Bernard Lyon 1 – France – christian.mercat@math.univ-lyon1.fr

Mercat C. (2015) La diffusion : un lieu pour une mathématique plus humaine ? In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé2, pp. 934-943.

tout débat et faire sérieux ;

- naturalisée dans une technologie omniprésente, la mathématique, pourtant au cœur de plus en plus d'activités dématérialisées et numérisées, est rendue invisible et transparente par des interfaces « intuitives » prenant à leur charge les aspects techniques. Cette naturalisation est à l'œuvre pour le grand public mais aussi pour les enseignants qui peinent à reconnaître dans la technologie quoi que ce soit de familier pour eux ou d'exploitable dans la classe, ou inversement dans ce qui est enseigné des outils effectifs pour appréhender le monde ;
- cantonnée souvent à la maîtrise de techniques de manipulations d'expressions écrites, la mathématique enseignée est pauvre d'un point de vue esthétique, sensoriel, dynamique et créatif, donnant une fausse image du travail du mathématicien. En conséquence, elle attire trop peu les élèves talentueux, qui n'envisagent pas sa maîtrise comme une corde à leur arc créatif.

Le champ de l'enseignement des mathématiques est donc *a priori* un lieu peu propice à mettre en œuvre les potentialités humaines latentes favorisant une mathématique plus globalement humaine. J'entends par là une mathématique plus proche de l'expérience du chercheur, convoquant tous ses sens, s'appuyant sur les outils conceptuels et sensoriels que nous ont légués des centaines de milliers d'années d'évolution humaine (Lakoff, Núñez, 2000) :

- une appréciation spatiale,
- une liberté de mouvement pour explorer,
- une vision de chasseur-cueilleur extraordinairement efficace,
- des capacités de manipulation et de sensation bien supérieures à la maîtrise d'une craie, d'un clavier ou d'un stylo,
- une audition et un système d'énonciation verbale riche et complexe.

C'est peu de dire que l'enseignement contemporain des mathématiques ne convoque pas tous les sens : il s'agit essentiellement, comme le dit Victor Bret (2014), de manipuler des symboles, dessinés sur un rectangle, d'ardoise, de verre ou de papier. La technologie actuelle, même « tactile » et « intelligente », permettant une plus grande efficacité de quelques moyens d'expressions très restreints mais fonctionnels dans la relation homme-machine, contraint et formate la relation homme-homme, et ainsi accélère cet appauvrissement de l'expressivité humaine pour la réduire à la manipulation de symboles. Même si la maîtrise de l'abstraction et la capacité de généraliser sont visées, enseigner uniquement par ce moyen laisse sur le côté bon nombre d'élèves.

Bien-sûr l'enseignant « gesticule », s'exprime et donne chair à ces symboles par son jeu d'acteur et de chef d'orchestre de la classe. Les affects dont l'élève investit son professeur et son groupe-classe sont dans ces conditions primordiaux pour que l'expérience cognitive laisse des traces tangibles dans cette merveille de la sélection naturelle qu'est notre mémoire, tirant sans cesse et à notre insu des corrélations, des analogies et des conclusions entre les expériences tentées, présentes et passées, pour peu qu'elles nous impliquent personnellement et émotionnellement.

Il s'ensuit que de nombreux élèves, dont l'esprit n'est pas formaté pour ces formes étroites d'apprentissage, et qui auraient besoin qui de mouvement, qui de couleurs, qui de sensations tactiles, olfactives ou auditives pour mémoriser, sont astreints à inventer des stratégies de contournement compliquées et peu efficaces, gratouillant un doudou, traçant des lettres dans l'air, chantonnant pendant leurs leçons, ou passent carrément à côté des apprentissages : « les maths, ça ne me concerne pas » portent-ils, fièrement ou pas, à leur boutonnière.

Une hypothèse structure les quelques activités que nous allons décrire dans le présent article : convoquer des capacités sensorielles et des stratégies peu utilisées dans l'enseignement mathématique contemporain peut contribuer à rapprocher le participant de l'expérience multi-sensorielle et pleinement humaine du chercheur. Nous présentons quelques éléments de résultats de nos expérimentations sur certaines activités, mais admettons dès maintenant que ceux-ci ne permettent pas de conclure sur la validité de notre hypothèse, et que de plus amples études systématiques sont nécessaires. En effet, pris dans la position réflexive d'animateur scientifique, je ne me suis pas donné les moyens de mesurer cet aspect, qui ne m'est apparu comme essentiel qu'après coup. Par exemple, au cours d'opérations de vulgarisation ponctuelles dans des établissements, j'ai pu mener des entrevues avec des élèves brillants et motivés et même si elles permettent d'établir que les activités proposées les ont intéressés et qu'ils ont, au moins sommairement et localement, compris quelque-chose, je ne peux conclure ni pour la motivation ou le savoir à moyen terme, ni pour un public moins motivé d'emblée, qui ne serait pas resté assez longtemps autour des animations. Je proposerai donc, plutôt que des conclusions mal étayées, des perspectives d'observations futures.

II. LES ACTIVITES

Ces activités ont été conçues pour être réutilisables. Leur contenu, en particulier logiciel, est ouvert et disponible au téléchargement. Elles se veulent d'un niveau technologique assez peu élevé, ne requérant presque[1] rien qui ne soit déjà présent dans une salle de classe. L'analyse didactique de ces activités est assez faible et demande à être précisée. Leur intérêt est de composer un ensemble cohérent sur lequel des questions de recherches ont été développées et peuvent maintenant être testées. L'hypothèse principale à tester sera : « convoquer des modes d'appréhension du réel plus sensoriels permet de réduire la distance entre la réalité présentée et sa modélisation dans l'esprit des participants » mais des études sur des aspects plus ciblés de cette distance pourront porter sur la motivation et l'attention continue, l'imagination et la compréhension (quelles perceptions, quelles images, quel codage du phénomène?), la mémorisation et la réflexion concernant l'activité expérimentée.

1. *Webcam conforme*

L'activité « webcam conforme » prend sa source dans mon travail au sein de l'équipe de géométrie discrète de l'université technique de Berlin, autour des professeurs Alexander Bobenko et Ulrich Pinkall. Issue d'un travail de recherche, cette installation est utilisée comme une machine à fabriquer des images interactives, afin de forger des icônes visuelles pour des objets tels que « les zéros du polynôme », « la spirale logarithmique », « l'inversion de Möbius », « la tête au carré », « le polynôme de Taylor », « la trompe d'éléphant de la série », dans l'espoir qu'elles pourraient être des jalons conceptuels habitant l'imaginaire des participants ; des jalons vers lesquels progresser lors de leurs études, des destinations, lointaines, exotiques et pourquoi pas désirables et attrayantes du savoir mathématique, qui ne sont communément jamais convoquées, ou illustrées seulement par des formules angoissantes et des photos noir et blanc fanées d'hommes barbus. Ces images étant interactives, elles demandent au public de « jouer » avec, de faire des gestes, des grimaces, des mouvements de bras, et les convoquent : « c'est de moi dont il s'agit »... Cette installation a été expérimentée à de très nombreuses reprises dans des contextes de diffusion des mathématiques, telles les fêtes

[1] Un ordinateur muni d'une webcam est courant dans la classe, mais une Kinect® l'est moins...

de la science, à Montpellier et Lyon, comme installation dans des lieux d'exposition, bibliothèque, hall, en préalable à une conférence sur le sujet de la multiplication comme transformation géométrique ou plus en profondeur des applications conformes. Son objectif va de la simple interpellation visuelle des participants, qui voient leur image captée et déformée de manière singulière, à l'utilisation en tant qu'outil pédagogique pour enseigner la théorie de l'analyse complexe à l'université. En tant qu'installation, elle est le plus souvent accompagnée d'un poster qui explique son fonctionnement et la théorie qui la sous-tend. Les curieux s'étonnent quand ils prennent conscience que c'est leur image qui est déformée, ces images les concernent, parlent d'eux ! Ils commencent à chercher la caméra, à saluer, se pointer du doigt, de manière interpersonnelle ou réflexive, se déplacer et tentent de se positionner pour obtenir des effets visuellement intéressants, s'appuyant sur une forme spatiale de compréhension fondée sur la rétroaction de leur exploration. Quand un animateur est présent, les participants peuvent demander le fichier image, de leur « tête au carré » ou de la répétition spiralée hypnotique d'une singularité logarithmique. Certains sont franchement dérangés de voir leur image transformée et malmenée mais la plupart sont amusés et peuvent rester longtemps à modifier les paramètres à la recherche d'un effet visuel précis. L'analyse *a priori* de cette activité est trop complexe pour être décrite dans le présent article, je renvoie à mon article sur le site *Images des mathématiques*[2] pour une description détaillée. Disons simplement que, de même qu'une carte météo permet de lire la température en chaque point du domaine en coloriant *l'espace d'arrivée*, chaque point z de l'écran est colorié par la couleur du point image $f(z)$ qui est un point de l'image captée par la caméra. Ainsi, localement, on comprend dans le même regard la valeur de la fonction par la couleur du point mais également la valeur de sa dérivée par la raison de la similitude locale, qui y opère un agrandissement ou une réduction. En particulier les points où la dérivée est nulle sautent aux yeux. Les données les plus consistantes que je présente ici décrivent l'interaction avec un groupe d'élèves d'un établissement très favorisé de Lyon lors de la semaine des mathématiques 2013. Je fais découvrir à un groupe de quatre filles en première scientifique la notion de similitude, de monôme (surtout $z \longmapsto z^2$) et de polynôme. Je leur attribue à chacune un rôle que nous avons défini sur les exemples précédents : la gardienne du zéro a une cible colorée dont elle cherche les images, la spécialiste des endroits où la dérivée s'annule aime faire des grimaces, la compteuse du degré a le bras long et la « réelle » n'observe que la fine droite au milieu de l'écran. Je leur présente un nouveau polynôme, $z \longmapsto z^3 - z$ et leur demande de me le décrire.

- Alors, où sont les zéros ?
- (E1 bougeant légèrement sa cible pour bien la centrer à l'origine, montrant du doigt à l'écran les trois images de cette cible) : là, là et là.
- C'est-à-dire ?
- (E1) -1, 0 et 1.
- Où la dérivée s'annule-t-elle ?
- (E2 bougeant la tête jusqu'à être horriblement déformée avec deux bouches et quatre yeux) : ici la tête au carré et... (tâchant de bouger en même temps sa main droite pour que son doigt s'éclate en une croix) là !
- C'est où ça ?
- (E2) Entre -1 et 0 et 1, vers -1/2 et +1/2.
- Et le degré ?
- (E3) On voit là [sur la formule] bon, il y a un trois, mais... [elle tourne lentement son bras, sa main tournant autour de la limite de l'image, fixant des yeux une des images de sa main] un quart, un demi, un, un et demi, ah la moitié, deux, deux et demi, trois, j'ai fait le tour complet une fois et il m'en a fallu trois ! Et on se voit en tout trois fois ; [en agitant une main et en la pointant sur l'écran de l'autre] un, deux, trois, tout est triplé. C'est de degré trois.
- Et comme fonction réelle ?

---

[2] http://images.math.cnrs.fr/Applications-conformes.html

- (E4 tenant son index levé et le bougeant de gauche à droite) À gauche on est la tête en haut puis en bas jusque là, puis de nouveau en haut.
- Et ça veut dire quoi ?
- En bas, ça descend ; en haut, on est multiplié par un nombre positif, la dérivée est positive, ça monte. Elle est d'abord croissante puis, décroissante tout ici, puis croissante à partir de là.

Les arguments que ces élèves donnaient faisaient sens pour elles, étaient fondés sur l'expérience personnelle directe, leurs mouvements et leurs sensations corporelles et visuelles plutôt que sur des preuves statiques et rhétoriques.

Figure 1 *– Des enfants jouent avec la webcam conforme*

Ce groupe est resté avec moi plus de vingt minutes, chacune a compris son rôle mais il est difficile d'estimer si ces différents rôles faisaient vraiment sens pour elles, étaient coordonnés en une compréhension globale de ce polynôme en particulier, de la notion de polynôme en général, ou ce qu'il a pu rester de leur expérience. Encore une fois, l'intérêt premier de cet atelier dans ce cadre était surtout de montrer de belles images, des jalons visuels, accrochées à des jalons verbaux tels que « polynôme », « spirale logarithmique », « exponentielle », « fraction rationnelle », de faire interagir physiquement les élèves avec des mathématiques, qui leur demandent de bouger, qui opèrent sur eux (enfin sur leur image). Même si, en marge il était également question de faire passer la notion de dérivée comme taux d'accroissement, ici facteur de « zoom », d'agrandissement ou de réduction, il serait intéressant de savoir si ces jalons visuels ont aidé les jalons verbaux à persister jusqu'à ce qu'un enseignement traditionnel leur donne consistance. Je ne me suis pas donné les moyens d'étudier cette question. Parmi les participants à cette installation, combien retiendront comme icône pour la fonction carrée, à la place de la parabole réelle, leur tête au carré, monstre à quatre yeux et deux bouches ?

2. *Rebond*

L'activité « rebond » a été expérimentée pendant trois années consécutives dans le contexte de stages MathC2+ conduits à l'IREM de Lyon, à l'Institut Camille Jordan de l'Université Claude Bernard Lyon 1, en coopération avec l'association Plaisir Maths, notamment son président Nicolas Pelay et des animatrices et animateur scientifiques, Laura Pallez, Damien Lucas, Alix Boissière et Alix Laubez. Il s'agissait de l'activité « fil rouge » conduite dans ce stage de quelques jours (3 ou 4) d'initiation à la recherche autour de la thématique des mathématiques et du cinéma. Le public était composé d'élèves de seconde de l'Académie de Lyon. Ceux-ci ne se connaissaient pas et sont sélectionnés par leurs professeurs pour leur potentiel en mathématique mais pas nécessairement issus d'un milieu socio-culturel favorisant la poursuite d'études scientifiques. Ces stages étaient structurés autour d'exposés de chercheurs éclairant le sujet du cinéma et des mathématiques et apportant des éléments théoriques et pratiques qui étaient réinvestis dans l'activité « rebond ». Celle-ci se déroulait sur trois séances d'une heure et demie sur le stage. Son but était de fabriquer un petit film de synthèse du rebond d'une balle. Cette synthèse était le résultat de l'analyse puis de la modélisation du mouvement d'une balle physique lors de son rebond. Il ne s'agissait nullement d'expliquer les raisons physiques du mouvement, mais simplement, de manière phénoménologique, de décrire la trajectoire.

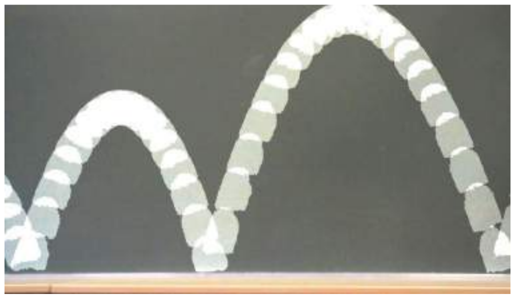


***Figure 2** – Une prise de vue fondue du rebond d'une balle*

Nous rapportons en particulier ce qui s'est passé dans le deuxième stage, en juin 2013, pour lequel nous avons le plus de données fiables, mais les autres stages étaient essentiellement similaires. Répartis par groupe de 4 ou 5, les élèves ont à tourner quelques séquences filmées du rebond d'une balle donnée, puis à les analyser à l'aide d'un logiciel de vision par ordinateur qui enregistre les données de position et de temps. Ces données sont ensuite transférées, exploitées et modélisées sur des calculatrices puissantes offrant des capacités d'analyse de données tabulaires, de représentation graphique et d'interpolation (FX Casio 35+ offertes par le fabricant), et un logiciel d'analyse et de visualisation de données (Geogebra) disponible sur les ordinateurs portables sur lesquels la séquence a été tournée. Les élèves sont libres de prendre une nouvelle prise pour avoir de nouvelles données si elles s'avèrent corrompues ou trop peu typiques. Un ordinateur effectue la prise de vue, par l'intermédiaire d'une webcam, et l'analyse se passe en direct : des points rouges sont surimposés à l'image, permettant de comprendre de quoi les données produites sont les coordonnées. Des essais avec la main ou le visage dans le champ de la caméra amènent des rires parmi les élèves (de nombreux points rouges émaillent l'image), mais participent à construire une relation d'intégrité et de proximité par rapport aux données : « ces données, c'est moi qui les ai produites, elles n'ont pas été nettoyées ». La production directe de données personnelles, dépendantes du contexte concret et immédiat de la prise de vue, permet que l'écrémage des points de bruits par exemple, ou des bouffées de points parasites, ait un sens, quasiment kinesthésique, dans tous les groupes, en témoignent leurs gestes fréquents à propos de la trajectoire de la balle devant des tableaux de nombres. De plus, les données, pourtant à distance dans le temps et l'espace (sur leur calculatrice, plusieurs minutes plus tard), sont analysées dans ce contexte et continuent à faire sens, s'aidant des données brutes de la visualisation du film pour déterminer les circonstances d'un événement dont ils observent la trace dans les données, au contraire de données « mortes » qui, sorties de leur contexte, ne signifient pas grand-chose pour les élèves.

Les procédures attendues étaient les suivantes :

- identifier les traces comme des portions de paraboles ;
- se placer dans un repère facilitant l'écriture (où le plan de rebond est d'ordonnée nulle) ;
- déterminer les paramètres des paraboles (le choix de la balle et le cadrage influent) ;

- choisir le paramétrage le plus adapté (sous la forme $a(x\text{-}s)^2+h$, où s est l'abscisse du sommet, h son ordonnée) et identifier ces paramètres comme ceux pertinents à déterminer ;
- remarquer que le paramètre a peut être considéré comme constant : *via* des comparaisons entre les groupes, à orchestrer par les animateurs, on met en évidence sa dépendance aux conditions initiales, en particulier la vitesse horizontale, mais sa relative constance à l'intérieur d'une séquence ;
- remarquer, et c'est le point crucial mathématiquement, que les hauteurs successives décroissent, à peu de choses près multipliées par une constante, de rebond en rebond. Un travail préalable sur tableur autour de « trouver l'élément manquant de la suite » sur des suites géométriques pures ou brouillées, induisait les élèves à cette conclusion, la notion de suite géométrique n'étant vue qu'en classe de première. Cette constante dépend de la balle et de la surface de rebond ;
- en déduire numériquement une formule pour les positions successives du sommet.

Nous avons récupéré les fichiers produits sur les ordinateurs portables pour chaque groupe et quelques fichiers sur calculatrices. L'utilisation sur la calculatrice de l'outil de régression quadratique, donnant les paramètres d'une parabole interpolant des données, est la différence la plus notable entre le travail individuel sur calculatrices et le travail plus collectif sur ordinateur. En effet, avec le logiciel de géométrie interactive, une première stratégie consistait à prendre les points extrémaux et médian des données, afin d'estimer le sommet et les autres paramètres de la fonction quadratique, mais le résultat était souvent assez mauvais. La plupart des groupes ont alors évolué vers le choix de modifier à la main trois paramètres de manière à définir une fonction quadratique qui soit visuellement au plus près des données. Aucune stratégie comparable de détermination par approximation manuelle des paramètres n'était apparue sur calculatrice jusqu'à ce que la découverte de la fonction de régression quadratique se répande parmi les groupes. Cette découverte entraina alors la recherche de son équivalent dans le logiciel sur ordinateur, amenant à des résultats numériquement plus satisfaisants, soit par l'interpolation quadratique de trois points libres soit par l'interpolation de la liste toute entière. Pour autant, la trop grande confiance dans les valeurs données par l'interpolation s'est avérée un frein à la modélisation : relativement peu d'élèves avaient assez de maturité pour évaluer comme pertinent le fait de modéliser un paramètre numériquement fluctuant par une constante. Prendre conscience de l'ordre de grandeur (faible!) de la fluctuation ne s'est imposé qu'après une mise en commun des résultats des différents groupes et un débat où il y avait de la résistance. Étant donné qu'il s'agissait de reproduire en un film de synthèse le mouvement de la balle, l'intérêt de la modélisation, avec ses paramètres modifiables à volonté, pas seulement reproduisant les données mais générant de nouvelles familles de courbes, n'est apparu à certains élèves clairement qu'à la fin, quand les données brutes numérisées ne cadraient pas avec les choix scéniques et graphiques de l'animation.

La conclusion de cette expérimentation, hormis son relatif succès parmi les participants, est l'impression, à confirmer par une analyse plus fine et détaillée, d'un bon degré de conscientisation par les élèves du sens et de l'intégrité des données analysées, permis par une production *in vivo* de ces données, comparées à des données *in vitro*, suspectées d'être nettoyées et simplifiées, obtenues par un procédé plus long ou complexe et non directement compréhensible *via* une rétroaction simple validant ou invalidant des conceptions naissantes. Un protocole expérimental serait à mettre au point pour mesurer cette distance entre le sens et les données pour les élèves, afin de comparer différentes situations de modélisations, allant de données dynamiques, très proches du concret, d'une intégrité vérifiée directement par le contexte personnel et sensible de l'élève, puis abstraites peu à peu dans une modélisation très progressive, comme ce que nous avons tenté de faire ici, à des données statiques, *Deus ex machina,* imposées par l'enseignant et dont le sens n'est basé que sur des explications discursives.

a) Clochettes de Galilée

L'activité « clochettes de Galilée » est relativement similaire pour une partie à l'activité rebond, car elle s'appuie sur la vision par ordinateur, mais elle sollicite également l'ouïe comme élément essentiel de décision. Sur le plan notionnel, elle tente également de mettre en place une abstraction progressive menant à une modélisation de plus en plus générale autour de la notion d'alignement, dans des espaces allant du concret des positions physiques des billes à l'abstrait de la vitesse en fonction du temps et des accélérations en fonction des pentes.

Cette activité, développée dans le cadre du projet européen mcSquared, reproduit l'expérience célèbre de Galilée qui, souhaitant étudier la chute d'une bille le long d'un plan incliné, se voit limité dans sa capacité à objectiver cette expérience, car la bille roule trop vite ! Il a alors l'excellente idée de disposer des clochettes le long du trajet, assez légères pour ne pas perturber la bille, mais assez sonores pour être clairement distinguées. Il dispose alors ces clochettes de manière à obtenir des sons à intervalles très courts, à un rythme régulier, ce que l'oreille est tout à fait capable de reconnaitre. Il est pédagogiquement intéressant de montrer qu'il est légitime de s'appuyer ainsi sur l'acuité particulière d'un sens disponible à l'humain pour faire de la science ! Nous avons tourné des petites séquences filmées de la bille glissant le long d'une pente à différentes inclinaisons, et la bille tombe effectivement si vite qu'il est bien difficile de la voir plan par plan! La reconnaissance visuelle par ordinateur peut cependant numériser ces séquences et procurer des données. Cela ne sauve pas les élèves de la frustration de Galilée car ces données sont assez « traditionnelles » : du fait de sa fugacité, l'expérience est moins prégnante que dans l'activité « rebond ». Mais la version « clochettes » de cette activité emporte beaucoup mieux l'assentiment ! Les données qui en sont issues font *a priori* sens. Cependant, notre expérience est qu'il est techniquement assez difficile de mettre en œuvre l'activité « clochettes » réellement dans la classe. Nous avons ainsi développé une version numérique de celle-ci, qui complète l'acquisition vidéo d'une bille réelle présentée dans un premier temps. Une simulation informatique avec le logiciel Cinderella permet de positionner des points le long d'un segment pentu, de lancer une bille virtuelle dessus. Les points émettent alors des sons de clochette quand la bille les approche. On peut ainsi positionner les points jusqu'à être satisfait de la régularité du rythme entendu et commencer à raisonner sur les mesures donnant les positions des « clochettes ».

Tout d'abord chaque groupe d'élèves est sensé travailler sur une vidéo avec une pente donnée. La première constatation est que les points images de la bille sont alignés dans l'espace physique (ils sont sur un segment). Une formule de la droite est trouvée, soit en prenant deux points libres qu'on manipule jusqu'à visuellement être satisfait, soit en introduisant l'outil « boîte noire » de régression linéaire. La pente de cette droite est ainsi estimée. On constate ensuite que le mouvement est accéléré. On calcule les vitesses entre deux images successives à l'aide du tableur. On constate que ces vitesses augmentent toujours approximativement de la même quantité : il est raisonnable de les modéliser par une suite arithmétique ou encore, géométriquement (mais dans un espace abstrait), de modéliser les points (temps, vitesse) comme alignés. Encore une fois, on estime numériquement la pente de cette droite, c'est l'accélération a. La distance physique entre deux points à deux instants différents est comprise comme l'aire sous le graphe des vitesses, qui est un triangle, ce qui permet d'obtenir la formule de la position $\frac{1}{2} a t^2$. Le travail de tous les groupes est collecté, l'ensemble des points (pente, accélération) est dressé et là encore un alignement est proposé comme modélisation. C'est de plus une fonction linéaire, l'accélération est proportionnelle à la pente.

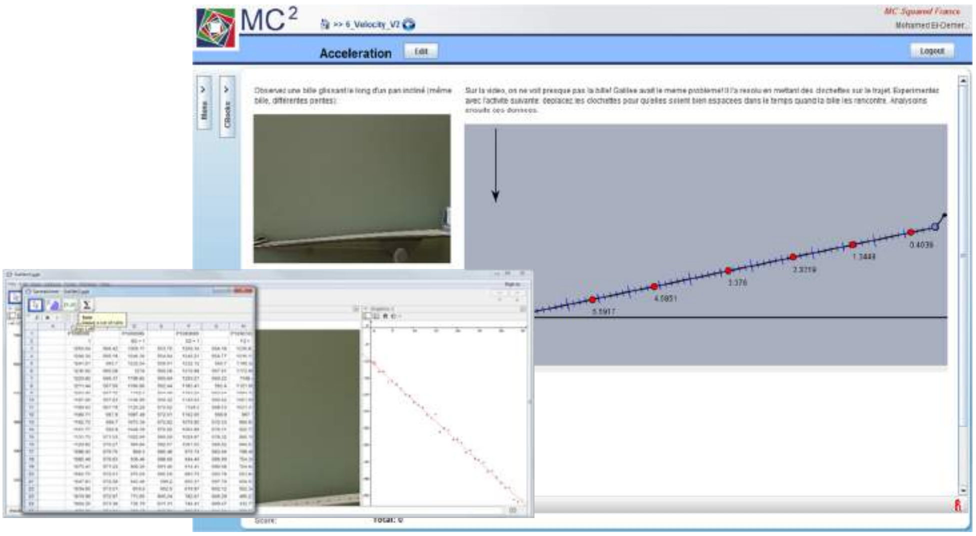


Figure 3 *– L'activité «Clochettes de Galilée»*

Dans un second temps, l'expérience est conduite avec l'activité clochette. Une progression quadratique des distances parcourues pour un temps donné est mise en évidence de la même manière, mais cette activité est plus intégratrice : plutôt que des données numériques, la preuve est fondée sur une disposition spatiale des clochettes et un rythme constant estimé à l'oreille. De plus, la pente n'influe sur le rythme qu'en modifiant sa vitesse mais pas sa régularité. Ainsi la proportionnalité entre la pente et l'accélération est concrètement estimée.

Il serait intéressant de mesurer la profondeur du sens que les élèves confèrent aux données dans ces différentes situations : les clochettes réelles, les clochettes simulées, l'expérience réelle (inexploitable numériquement), les vidéos (peu exploitables) et les vidéos numérisées par reconnaissance optique.

b) Danser comme une fonction

Cette activité, développée dans le cadre du projet européen mcSquared, provient en substance de l'exposition du Mathematikum de Gießen en Allemagne.

Le graphe d'une fonction est affiché sur un écran, avec un compte à rebours. Passé ce temps, un point est affiché, dont l'abscisse est le temps et l'ordonnée est la distance du participant à l'écran. Le participant voit ce point et sa trace et doit se déplacer de telle manière que l'ensemble des points décrivant son mouvement soit aussi proche que possible du graphe cible. Un score est alors affiché. Les stratégies attendues dévoilant de fausses conceptions et la difficulté à identifier variables spatiales et temporelles sont des tentatives de contrôler la variable temps, l'inversion avant/arrière pour une fonction croissante/décroissante, la prise en compte trop peu fine de la pente pour le contrôle de la vitesse.

Cette activité a été expérimentée principalement trois fois, à la fête de la science 2014 à l'université Claude Bernard Lyon 1, à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique et au forum des mathématiques 2015 d'Aix en Provence.

Les participants doivent tout d'abord prendre conscience que la variété de leurs mouvements est réduite à un seul nombre et que c'est la distance à l'écran. Pendant les premiers jeux, certains participants continuent à confondre le temps, qui n'est pas une variable libre, et leur position gauche/droite, tentant de « revenir en arrière » en se déplaçant sur la gauche pour réparer un mauvais début. Modéliser, c'est choisir certaines caractéristiques et en éliminer d'autres, comprendre et vivre cette réduction dans son corps n'est pas une chose évidente dans un monde où les interfaces tactiles intuitives prennent effectivement en compte, à notre insu, un nombre conséquent de paramètres. Ici, la modélisation est pauvre à dessein. L'ajustement de la vitesse en fonction de la pente se fait assez rapidement et une pente forte met le participant dans une tension de préparation où la galopade en arrière ou en avant s'affine avec les parties successives. De très bons scores après trois ou quatre parties sont la norme pour des fonctions relativement simples. Ce choix du catalogue de fonctions est la variable didactique principale, ajustée en fonction du public.

III. CONCLUSION

Ma pratique d'enseignant et de vulgarisateur m'a amené à tenter de prendre en compte dans les activités que je mets en œuvre des aspects peu présents dans l'enseignement des mathématiques comme le mouvement, l'ouïe et la vue. La vulgarisation semble un lieu où un contrat didactique et ludique est probablement plus facile à établir que dans la salle de classe, « réconciliant » à peu de frais le public avec les mathématiques. Cependant l'évaluation des apprentissages ou du changement de perception des mathématiques nécessiterait des études plus approfondies que celle-ci. L'hypothèse principale que je me propose d'explorer ultérieurement est que la perception directe d'un phénomène aide à réduire la distance avec sa modélisation : des données « près » du phénomène sensoriel entrainent une meilleure modélisation de celui-ci. La question de l'opportunité et de la facilité de la transposition dans la classe d'activités convoquant les sens *avant* la raison reste ouverte.

REMERCIEMENTS

Cette recherche a été partiellement financée par le septième programme cadre de l'Union Européenne (FP7/2007-2013) dans le cadre du projet n° 610467 « M C Squared ». Cette publication ne reflète que les opinions de l'auteur et l'Union n'est pas responsable de l'utilisation qui pourrait être faite des informations qui y sont exprimées.

REFERENCES

Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert.* Lyon : CÉRÉN-CRDP.

Bret V. (2014) Humane Representation of Thought : A Trail Map for the 21st Century. *SPLASH Keynote ACM SIGPLAN* doi 10.1145/2660252.2661746

Brousseau G. (1988) Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Daskolia, M., Kynigos, C. (2012) Applying a Constructionist Frame to Learning about Sustainability. *Creative Education* 3, 818-823.

Lakoff G., Núñez R. E. (2000) *Where Mathematics comes from : how the embodied mind brings mathematics into being.* Basic Books.

Mercat Ch. (2015) *Modelling and mathematics.* TEDxINSA May 2015.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

VULGARISATION ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS LE JEU DOBBLE

Nicolas PELAY[*] – Alix BOISSIERE[**]

Résumé – Les processus de vulgarisation et d'enseignement sont des processus souvent articulés, et nous défendons l'idée d'un modèle théorique commun pour l'analyse d'une action de diffusion des mathématiques. Nous présentons le jeu Dobble, un jeu grand public très populaire, actuellement prisé par les vulgarisateurs, et nous montrons comment il est utilisé de façon variée et comment il peut être l'objet d'un processus de vulgarisation ou d'enseignement plus ou moins marqué selon les actions.

Abstract – The process of popularization and teaching are often articulated processes, and we claim for a common theoretical model for the analysis of an action of diffusion of mathematics. We present the game Dobble, very popular and very appreciated by the popularizers. We show how it is used in a varied way and how it can be precisely the object of a process of popularization or teaching, more or less marked according to the actions.

Mots-clefs : vulgarisation, Dobble, raisonnement, contrat didactique et ludique, action de diffusion

Keywords: popularization, Dobble, reasoning, didactic and ludic contract

I. INTRODUCTION

Dans le contexte actuel d'évolution profonde des rapports aux savoirs dans nos sociétés, les formes de diffusion sont de plus en plus articulées et complémentaires, selon les lieux, contextes, publics, dans lesquelles elles se déroulent. C'est pourquoi nous cherchons à caractériser les pratiques de vulgarisation des mathématiques qui peuvent être très différentes selon le type d'action (articles, vidéos, médiation humaine, atelier, conférences, etc.), le vulgarisateur, ses objectif, son public, etc.

Nous avons choisi de traiter cette question en étudiant un jeu actuellement très prisé des vulgarisateurs mathématiques : le jeu « Dobble ». Il s'agit d'un jeu de cartes grand public qui connait un succès important, et dont les cartes sont organisées en une structure liée à la géométrie projective. Nous allons montrer dans cette communication comment un même jeu peut être l'objet de différentes vulgarisation, et nous tenterons de caractériser ces différences.

Nous adoptons pour cela une démarche didactique, en accordant une attention particulière aux connaissances et savoirs mathématiques en jeu dans les processus de diffusion. Notre communication s'inscrit en continuité de celle de Pelay et Mercat (2012) lors de la première

[*] Laboratoire de didactique André Revuz – France – nicolas.pelay@univ-paris-diderot.fr
[**] Plaisir Maths – France – alix.boissiere@plaisir-maths.fr

Pelay N., Boissière A. (2015) Vulgarisation et enseignement des mathématiques dans le jeu Dobble. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé2, pp. 944-956.

édition du groupe spécial « vulgarisation » du colloque EMF, dans laquelle est proposée une approche théorique pour étudier les actions de diffusion des mathématiques.

La thèse que nous défendons est que les processus de vulgarisation et d'enseignement sont des processus souvent articulés, et nous défendons l'idée d'un modèle théorique commun pour leur analyse, sans pour autant nier leurs différences.

Après avoir présenté le jeu dans une 1re partie, nous présenterons dans une 2e partie les éléments théoriques qui vont servir de base à notre analyse. Nous y verrons que le même jeu Dobble peut être l'objet de processus de transposition didactique différents et conduire à des actions de diffusion très variées :

- La 3e partie proposera ainsi des éléments qui nous permettront d'analyser deux articles de vulgarisation sur le jeu Dobble, accessibles sur internet, et d'y pointer des différences significatives en ce qui a trait aux enjeux d'enseignement et de vulgarisation.
- La 4e partie étudiera la mise en place d'un atelier sur le jeu Dobble au sein d'une structure de diffusion des mathématiques à laquelle appartiennent les auteurs du présent article. Nous verrons comment Dobble, utilisé dans un contexte de vulgarisation, est utilisé non pas pour transmettre des contenus notionnels mais des contenus transversaux liés à la preuve.

II. PRESENTATION DE DOBBLE

1. *Le principe du jeu*

Dobble est un jeu de discrimination visuelle[1] constitué de 55 cartes sur chacune desquelles sont dessinés 8 dessins. La particularité en est que **deux cartes quelconques ont toujours un, et un seul, symbole en commun**. Trouver le plus vite possible le symbole commun entre deux cartes est le principe de base sur lequel reposent les différentes façons de jouer à Dobble : se débarrasser le plus vite de toutes ses cartes, ou au contraire en collecter le plus possible.

Figure 1 *– Cartes du jeu Dobble*

[1] Il a été créé par Igor Polouchine, Denis Blanchot, Guillaume Gille-Naves et Jean-François Andreani, et il est édité par Asmodee. http://www.asmodee.com/ressources/jeux_versions/dobble.php, consulté le 31/01/2015

2. *Les mathématiques dans Dobble*

Le caractère remarquable de Dobble est lié à cette propriété du jeu : « *deux cartes quelconques ont toujours un, et un seul, symbole en commun* », et cette caractéristique est le fondement d'un questionnement mathématique : quelle est la nature mathématique de cette propriété ? Quelle est la structure du jeu pour réaliser cette propriété ? Existe-t-il un nombre fini ou infini de cartes réalisant cette propriété et s'il est fini, combien y a-t-il de cartes ? Peut-on construire un jeu Dobble avec un nombre prédéterminé de symboles, toujours dans le cas où il y a le même nombre de symboles par carte ?

Ce sont ces questions qui sont abordées dans les articles de vulgarisation qui ont fleuri sur le net ces dernières années. Tous sont très liés aux notions mathématiques de géométrie projective, et nous allons nous-mêmes donner quelques éléments de vulgarisation mathématique avant de poursuivre notre étude.

La propriété du Dobble ressemble à deux énoncés de géométrie dans le plan affine réel :

- P1 : Par deux points du plan passe une et une seule droite.
- P2 : Deux droites distinctes, non parallèles, ont un et un seul point d'intersection.

Deux droites parallèles distinctes n'ont pas de point d'intersection en géométrie affine, mais si l'on considère que deux droites parallèles distinctes se coupent à l'infini, ce qui est l'hypothèse de la géométrie projective, on peut alors modifier le deuxième énoncé en :

- P2' : Deux droites distinctes ont un et un seul point d'intersection.

En ajoutant à chaque droite un point à l'infini, ce point étant commun aux droites de même direction, on construit ce qui est appelé le *plan projectif réel.* Deux droites parallèles étant deux droites de même direction, dans le *plan projectif réel* deux droites parallèles se croisent à l'infini. L'énoncé P2' y est donc vérifié, l'énoncé P1 restant vrai.

L'analogie de la propriété du Dobble avec les énoncés P1 et P2' permet de considérer les symboles du Dobble comme des points et les cartes comme des droites (ou les symboles comme des droites et les cartes comme des points). Par ailleurs, comme le dobble n'a qu'un nombre fini de cartes, on ne considère qu'un nombre fini de points plutôt que l'ensemble des points du plan, et on se trouve alors dans le domaine de la géométrie finie.

On peut alors appliquer les théorèmes de géométrie projective finie et parvenir à répondre aux questions mathématiques posées par le jeu, et comprendre finement la construction du Dobble et les liens entre le nombre de cartes, le nombre de symboles et le nombre de symboles par cartes.

III. MODELISATION D'UNE ACTION DE DIFFUSION DES MATHEMATIQUES

Une action de diffusion des mathématiques sera ici définie comme la mise en place d'un *dispositif mathématique* dans un *contexte* donné, par un *acteur de la diffusion* et pour un *public donné.*

Cette définition assez large permet de se donner les moyens d'étudier avec un même cadre théorique une action d'enseignement et une action de vulgarisation : un article, une vidéo, ou une animation menée par un médiateur avec un public donné, etc.

Bien sûr, il est évident qu'il existe des différences profondes entre le processus de *vulgarisation* et le processus *d'enseignement*, mais plutôt que de les opposer *a priori*, l'approche théorique consiste à développer un cadre commun pour étudier les phénomènes d'enseignement et de vulgarisation.

L'hypothèse sous-jacente est qu'il existe des éléments de vulgarisation dans le processus d'enseignement, et des éléments d'enseignement dans le processus de vulgarisation. Ce sont la priorité donnée à certains enjeux plutôt qu'à d'autres, les choix réalisés dans les activités proposées, le discours et le langage utilisé dans les textes et les échanges avec le public, qui vont permettre de caractériser les processus d'enseignement et de vulgarisation mis en œuvre. Aussi, une action de diffusion va pouvoir être étudiée avec une approche théorique globale.

1. Enjeux, intentions et rôle

Toute action de diffusion présente des *enjeux* et *intentions* qui viennent des acteurs de la diffusion et du dispositif choisi. Le public lui-même a ses propres intentions et enjeux.

En reprenant le modèle de Sousa Do Nascimento (1999), on considère qu'une action de diffusion des mathématiques est susceptible de répondre à différents types d'enjeux.

INTENTIONS	ENJEUX	ROLE DE L'ANIMATEUR
Elucidation	Valeurs (conscientisation, démystification)	Militant
Production	Procédures (règles, normes, techniques de fabrication)	Technicien
Médiation	Culture scientifique et technique partagée	Médiateur
Instruction	Connaissances scientifiques	Instructeur
Loisirs	Plaisir, sensibilisation	Amuseur

Tableau 1 - *Les modèles d'analyse de l'animation scientifique*

On voit dans ce tableau que les composantes « *enseignement* » et « *vulgarisation* » sont des enjeux parmi d'autres, et que c'est bien la priorité donnée à l'un ou l'autre des enjeux qui détermine la nature principale de l'action.

Dans une action d'enseignement, la priorité est donnée à la transmission de connaissances et de savoirs mathématiques, c'est le rôle « instructeur » qui est privilégié. Dans une action de vulgarisation au contraire, les enjeux sont beaucoup plus variés, et le rôle « instructeur » est en général beaucoup moins important. L'objectif de médiation est important, car les aspects culturels, historiques y sont généralement très présents, de même que l'intention « loisir » est aussi prise en compte : le vulgarisateur cherche aussi à partager un certain plaisir, et à faire vivre un bon moment à son public. Le témoignage d'un médiateur mathématique professionnel interrogé en 2012 montre très bien la priorité donnée au plaisir par rapport au contenu :

> *L'essentiel, c'est d'essayer au maximum que les gens passent un bon moment. […] A la limite en étant extrémiste, je dirais que le contenu passe après. C'est-à-dire que déjà, si les gens passent un bon moment, évidemment en ayant entendu parler de maths, […] si ils sentent que vraiment il y a des maths là où ils sont, et qu'ils se sentent bien, pour beaucoup c'est déjà énorme. Et donc quelque part, je considère que c'est de notre responsabilité, c'est d'essayer de faire en sorte que ça se passe bien. […] Donc je ne me fixe jamais d'objectif de contenu, il passera ce qui passera.*

2. *Le concept de contrat didactique et ludique*

Etudier une action de diffusion des mathématiques et ses enjeux peut aussi être décrit d'un point de vue théorique par la nature du contrat didactique et ludique qui se met en place et son évolution au cours du temps. Ce concept a été défini dans la thèse de Pelay (2011) en prolongement du concept de contrat didactique de la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998).

Il est défini comme l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un "éducateur" et un ou plusieurs "participants" dans un projet, qui lie, de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné.

Ce concept permet de se donner l'outillage théorique pour décrire et analyser la façon dont évoluent les intentions et les enjeux dans une action de diffusion. Il permet ainsi de repérer des moments où un contrat didactique se met en place en lien avec la transmission d'un savoir mathématique précis, des moments où un contrat ludique d'instaure pour faire jouer les participants, ou leur raconter une anecdote amusante, et des moments où le contrat didactique et ludique se stabilise pour faire vivre simultanément des enjeux didactiques et ludiques.

Sans qu'elle soit obligatoire ou systématique, il apparaît à l'observation de nombreuses actions de vulgarisation que l'intention de divertissement et de plaisir est très souvent présente sous une forme ou une autre, et que cela engendre des choix dans le déroulement d'une conférence, d'un atelier ou d'un article. Ainsi, le conférencier, médiateur ou animateur sera souvent à la recherche du « bon équilibre » et en particulier de la bonne adaptation au niveau mathématique de son public.

3. *La trajectoire d'une action de diffusion*

L'adaptation au public est directement liée à l'adéquation de la nature des connaissances et savoirs mathématiques entre le public est les informations qu'il reçoit. Nous distinguons trois zones :

- la **zone magique** est la zone où le public n'a aucune prise sur ce dont on lui parle. Il ne peut pas faire de référence à des choses déjà connues. Plus la distance est grande, plus les mathématiques paraissent inaccessibles et en quelque sorte magiques pour le public. Le savoir expert est tellement éloigné de celui du public que celui-ci n'a aucune prise sur la réalité mathématique qui lui est proposée : elle lui est même invisible, incompréhensible, inaccessible.
- la **zone maîtrisée** est la zone où le public a une certaine maîtrise du contenu mathématique. Les connaissances mathématiques évoquées ont du sens, et il peut se « raccrocher » à des choses connues. Il peut toujours y avoir des approfondissements dans cette zone.
- la **zone didactique** est la zone où une compréhension et un approfondissement sont possibles autour d'une notion, d'un théorème, d'une technique, etc.

Ces zones étant définies, nous considérons qu'un dispositif de diffusion des mathématiques est comme un vaste territoire mathématique que l'intervenant peut exploiter différemment en fonction du contexte et de son public, et en s'appuyant sur différents ressorts (didactiques, ludiques, magiques, etc.) : il peut poser des jalons et des étapes, et organiser temporellement son action pour réaliser les enjeux fixés. Une action de diffusion des mathématiques est alors définie comme une trajectoire qui se réalise dans la zone de diffusion permise par le dispositif.

Le dessin ci-dessous de la figure 6, bien qu'encore schématique à ce stade de nos recherches, permet de donner une représentation de ce que nous cherchons à décrire par cette notion de trajectoire entre les différentes zones. Les axes représentent le niveau des connaissances mathématiques portées par le dispositif et par le participant.

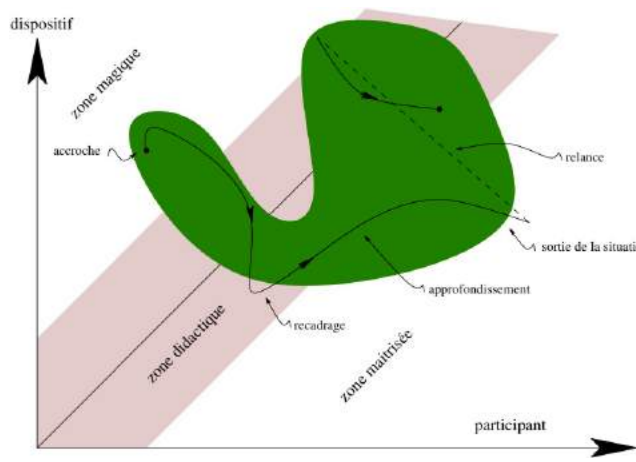


Figure 6 *- Trajectoire individuelle et collective dans l'espace des connaissances*

On peut à nouveau faire un lien avec ce que nous avons vu précédemment : dans une action d'enseignement, l'enseignant évoluera quasiment exclusivement dans la zone didactique, naviguant sur les frontières des zones maîtrisées et des zones magiques. Dans les actions de vulgarisation, les trajectoires sont beaucoup plus variées car le vulgarisateur cherche souvent à rendre accessible un savoir expert et à créer des ponts entre toutes les zones.
Nous allons mettre cela en évidence dans la vulgarisation mathématique du jeu Dobble, d'abord dans les articles de vulgarisation, puis dans un atelier mathématique.

IV. DES ARTICLES DE VULGARISATION SUR LE DOBBLE

1. Dobble : rendre accessible des mathématiques complexes

De nombreux mathématiciens se sont intéressés ces dernières années au jeu Dobble, comme en témoigne le nombre important d'articles et de forum de discussion auxquels on peut accéder en entrant « Dobble et mathématiques » dans un moteur de recherche. Chaque article, par les choix opérés par l'auteur, correspond alors à une trajectoire particulière dans la zone de diffusion permise par le Dobble.

La **zone magique** du Dobble est directement liée à la structure mathématique du jeu, aux éléments de géométrie finie et de géométrie projective mis en jeu dans celle-ci. Elle se manifeste pour le public par une série d'interrogations tels que : comment se fait-il qu'il y ait toujours un symbole en commun ? Existe-t-il une infinité de cartes possibles pour un nombre donné de symbole par carte ? Comment se fait-il que le nombre de cartes soit égal au nombre de symboles, etc. ? Ces notions mathématiques sont tellement éloignées des connaissances du public non expert qu'en pratique la zone magique est indépendante du public concerné (élèves du secondaire, adultes).

La **zone maîtrisée** du Dobble varie en fonction du public concerné. Comme cela est visible dans le paragraphe I.2, les connaissances sur lesquelles s'appuie la vulgarisation sont principalement relatives au domaine de la géométrie affine réelle. Il faut maîtriser deux énoncés fondamentaux de la géométrie telle qu'elle est enseignée au secondaire :

- P1 : Par deux points du plan passe une et une seule droite.
- P2 : Deux droites distinctes, non parallèles, ont un et un seul point d'intersection.

Ces notions font en général partie de la zone maîtrisée dès le secondaire. Par contre la maîtrise de mécanismes de raisonnement et d'élaboration de preuve n'apparaît qu'au lycée (secondaire 2), et les rudiments d'algèbre et d'arithmétique modulaire qui peuvent être utilisés ne sont maîtrisés que dans les premières années universitaires.

La **zone didactique** du Dobble est plus difficile à définir, car elle dépend directement du public et des enjeux de l'action de diffusion. C'est au vulgarisateur de créer – ou non – un espace didactique propice où des savoirs vont pouvoir être transmis et compris par le public.

Nous avons choisi d'analyser deux articles aux trajectoires très différentes dans chacune des trois zones :

- un article tiré du site de diffusion des mathématiques Images des Maths, *Dobble et la géométrie finie*, de Bourrigan (Bourrigan 2011), qui est un des premiers articles sur le sujet et qui est régulièrement cité dans les autres articles ;
- un article de Deléglise publié sur sa page personnelle, *Plans projectifs, arithmétique modulaire et Dobble* (Deléglise 2013).

2. *Article de Bourrigan*

L'article de Bourrigan, publié dans Images des Mathématiques[2], présente la structure mathématique que cache le Dobble. Il s'adresse à un public non expert d'adultes et d'élèves du secondaire[3], et cherche à expliquer comment construire un Dobble simplifié à trois symboles par carte à l'aide des mathématiques. Pour cela, il introduit des rudiments de géométrie finie puis de géométrie projective, et s'appuie sur de nombreuses figures pour illustrer ses propos.

Le point d'accroche de l'article se situe selon nous au niveau des enjeux de la construction du Dobble :

> […] il a fallu que les concepteurs du jeu respectent un principe important : Deux cartes quelconques du jeu Dobble ont toujours exactement un symbole en commun. On va essayer d'expliquer comment les mathématiques peuvent nous aider à construire un tel jeu, en essayant de construire notre propre version de Dobble, en modèle réduit.

L'article opère un recadrage en ramenant le problème à la zone maîtrisée et à des notions de géométrie : l'énoncé P1 et les coordonnées cartésiennes.

On entre ensuite dans la zone didactique du Dobble avec l'introduction de la géométrie finie en deuxième et troisième parties de l'article, et l'élaboration d'un Dobble à trois symboles par cartes.

L'auteur termine la construction du Dobble dans la zone magique en parlant de géométrie projective sans entrer dans les détails :

> On peut encore enrichir notre mini-Dobble en lui ajoutant une droite. Cette idée, qui est la base de ce que les mathématiciens appellent la géométrie projective date en fait des peintres de la Renaissance et consiste à ajouter un point (le point de fuite des peintres) pour chaque famille de droites parallèles. Ce point est alors le point d'intersection de la famille des droites. Les points de fuite sont tous alignés sur une droite, que les mathématiciens appellent « la droite à l'infini » et tous les autres « l'horizon. »

---

[2] http://images.math.cnrs.fr/

[3] Le site *Images des maths* utilise une analogie avce les pistes de ski pour signaler la difficulté de ses articles (verte, bleue, rouge, noire et hors-piste). Celui de Bourrigan est caractérisé comme « piste bleue ».

> Il est possible de définir très rigoureusement ces notions, dont on a déjà parlé çà et là mais nous n'entrerons pas dans les détails ici.

L'article se termine sur une relance du problème intitulé « Retour au « vrai » Dobble ». La relance se trouve elle aussi dans la zone magique du Dobble car l'auteur explique que la construction s'appuie sur un système de nombres plus complexe, mais ne développe pas.

3. *Article de Deléglise*

L'article de Deléglise est plus technique que celui de Bourrigan, en ceci que les objets mathématiques manipulés sont définis plus rigoureusement et les propriétés sont démontrées. Cela est en partie dû au fait que l'auteur se penche sur un Dobble plus complexe que celui présenté dans l'article du site *Images des Maths*, un dobble à 6 symboles par carte, mais surtout au fait que l'auteur pose des enjeux didactiques plus importants :

> Le jeu de Dobble édité par Asmodée est une excellente occasion d'introduire des objets mathématiques importants : les plans projectifs, l'arithmétique modulaire et les nombres premiers. (Déléglise 2013, p.1)

Toutefois, le public visé est semblable à celui de l'article d'*Images des Maths*, comme le signale Deléglise dans le résumé :

> […] texte élémentaire à la portée d'un élève des classes secondaires. (Ibid.)

Pour cet article, il n'y a pas d'accroche dans la zone magique. L'article commence dans la zone maitrisée du public avec des rappels de géométrie affine réelle, puis on entre dans la zone didactique avec la construction du plan projectif réel, le corps des entiers modulo cinq, la géométrie affine sur ce corps et la géométrie projective sur ce corps.

L'auteur effectue deux « écarts » dans la zone magique en généralisant les notions abordées au corps des entiers modulo p (où p est premier) dans les parties 4 et 7 de l'article.

C'est dans le dernier paragraphe, « Application au jeu de Dobble », que l'auteur fait le lien avec la construction du Dobble, qui est alors vu comme une application de ce qui est développé précédemment.

4. *Conclusion*

Ces deux articles sont représentatifs de deux actions de diffusion très différentes. Le premier, l'article de Bourrigan, met l'accent sur le côté magique, étonnant, de la structure du Dobble. L'article n'entre pas dans les détails techniques relatifs à la géométrie finie, ce qui en fait selon nous un article où l'enjeu principal est la vulgarisation.

A l'inverse, le second article, celui de Deléglise, a des enjeux didactiques importants. La structure de l'article se rapproche de la structure d'un cours, avec la construction de nouvelles notions, en partant de connaissances maitrisées, et en terminant par une application. Le Dobble est privé de sa zone magique car il est vu comme une application des notions développées.

Ces deux articles illustrent parfaitement selon nous la façon dont les enjeux de l'action de diffusion influent sur sa trajectoire et sur sa caractérisation en tant qu'action de vulgarisation ou d'enseignement.

V. ETUDE D'UN ATELIER MATHEMATIQUE AUTOUR DU DOBBLE

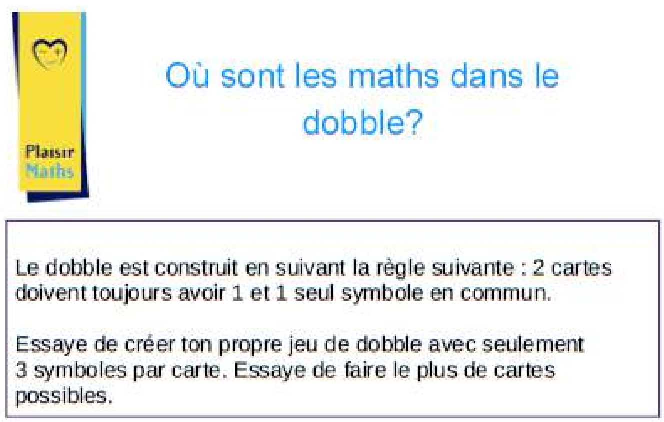
Nous avons pu voir comment la complexité des contenus mathématiques fait de Dobble un jeu très propice à la vulgarisation, avec des possibilités d'enseignement à la fin du secondaire. Nous souhaitons montrer une toute autre possibilité d'utilisation du jeu Dobble où des enjeux d'enseignement peuvent être introduits dès 10 ans pour travailler sur la preuve en mathématique.

1. Contexte

Le jeu Dobble fait partie d'une ludothèque mathématique développée par une structure de diffusion, *Plaisir Maths*[4], qui propose un ensemble de jeux et d'activités ludiques s'adressant à un public varié (de l'élève de primaire à l'adulte) dans différents contextes (intervention en classe, stage mathématique, fête de la science). Les interventions qui découlent de ces jeux ont des modalités très variées, une même activité peut être déclinée de plusieurs façons selon l'âge des élèves, la durée d'intervention et le contexte. Les activités ayant une *épaisseur didactique* importante, au sens de Pelay et Mercat (2012), sont donc privilégiées afin de permettre de les décliner de nombreuses façons.

2. Une nouvelle action de diffusion des mathématiques autour du Dobble

Le jeu de société Dobble a été choisi pour créer une activité accessible pour des enfants à partir de 10 ans, permettant de travailler le raisonnement et l'élaboration d'une démonstration. Le choix d'orienter l'activité vers un travail de raisonnement et d'explication nous paraissait cohérent par rapport aux programmes scolaires du collège qui préconisent une « introduction très progressive à la démonstration » en mettant l'accent sur « la recherche et la production d'une preuve » plutôt que sur « la mise en forme de la preuve ». Nous avons donc construit notre activité pour confronter les élèves à la nécessité de produire une preuve et pour les amener à formuler celle-ci.



La première observation est qu'une variable déterminante du jeu est changée : il s'agit de construire un Dobble à 3 symboles, et non plus à 8 symboles comme le jeu d'origine. Mais le principe du jeu reste inchangé, les règles restent les mêmes, ce sont juste les cartes qui sont modifiées. Bien sûr, l'intérêt ludique diminue considérablement, car jouer avec un Dobble à 3 symboles est relativement peu ludique, mais en revanche, un enjeu mathématique émerge et se trouve propulsé comme enjeu premier : comment sont construites les cartes du Dobble ?

Et alors que cet enjeu mathématique est inaccessible avec 8 symboles, il devient accessible mathématiquement dès l'âge de 10 ans, et la zone didactique peut être abordée systématiquement sur des enjeux mathématiques de raisonnement et de preuve.

[4] www.plaisir-maths.fr

Les élèves ont à leur disposition des feuilles de brouillon, des crayons, des feuilles avec des cartes à remplir puis à découper, des symboles à coller et de la colle. Les élèves ont le droit d'utiliser autant de matériel qu'ils le souhaitent.

Il y a un double travail de raisonnement à faire sur cette activité. Le premier consiste à vérifier que chacune des nouvelles cartes créées respectent les conditions imposées et le deuxième consiste à démontrer qu'on a atteint le nombre maximal de cartes possibles. La difficulté de ces raisonnements est croissante, et chacun d'eux permet d'introduire un type de preuves différent.

3. Vérification de chaque nouvelle carte

Le principe sur lequel s'appuie le Dobble est simple en apparence : « deux cartes, prises au hasard, ont toujours un, et un seul, symbole en commun ». Les élèves en comprennent facilement le sens car l'énoncé est similaire à celui de l'intersection de deux droites non parallèles. Toutefois, ils ont du mal à l'appliquer.

Pour les premières cartes créées, nous guidons les élèves pour qu'ils vérifient qu'elles respectent bien les conditions imposées. Nous cherchons à ce que les élèves mettent en place un mécanisme permettant de valider toute nouvelle carte créée. Pour cela nous nous appuyons sur l'expression « un, et un seul », et essayons d'instaurer une vérification du type « existence et unicité ». Nous insistons aussi sur le fait qu'il faut vérifier que la nouvelle carte fonctionne avec toutes les cartes déjà créées et non pas seulement avec une carte (que les élèves ont choisie au hasard).

4. La huitième carte

Le ressort didactique central de cette activité vient du fait que, si on exclut la solution infinie où un seul symbole est commun à toutes les cartes[5], il n'y a qu'un nombre limité de cartes possibles, et dans ce cas sept cartes. En introduisant la consigne demandant de faire *le plus* de cartes possible, l'objectif est de confronter les élèves à l'impossibilité de faire une huitième carte. C'est ce blocage que l'on exploite pour introduire le travail de la preuve.

a) Un blocage systématique

La façon dont se déroule l'activité mène inévitablement à la confrontation de l'impossible huitième carte. Nous avons fait en sorte que les élèves construisent les cartes une par une et essaient d'en créer le plus possible. Comme les élèves ne savent pas combien de cartes ils sont supposés créer, une fois qu'ils en ont créé sept, ils essaient systématiquement d'en construire une huitième.

Le matériel utilisé pour créer les cartes peut permettre d'accentuer la situation. En effet, nous avons fait le choix de fournir aux élèves un document avec des cartes à remplir, or sur une feuille au format standard se trouvent huit cartes à remplir. Les élèves ont reçu pour consigne de créer le plus de cartes possible et d'utiliser autant de feuilles que nécessaire. Il s'avère que les élèves sont persuadés qu'ils doivent faire au minimum huit cartes. Nous pourrions prédécouper les cartes, mais nous trouvons que la feuille de huit cartes est plus efficace pour confronter les élèves au problème de la huitième carte.

[5]La solution infinie (1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7) est mathématiquement possible mais n'a pas d'intérêt ludique. En effet, le symbole en commun étant toujours le même, il n'y a pas de jeu à le chercher. Ainsi, lorsque les élèves trouvent cette solution, l'animateur l'accepte car elle est mathématiquement juste, mais relance l'activité de recherche chez les élèves en soulignant son peu d'intérêt ludique.

b) De l'expérimentation à la conjecture

Lorsqu'ils essaient de créer la huitième carte, les élèves procèdent par essais/erreur. Ils créent une carte et appliquent le mécanisme de vérification qu'ils ont développé dans la première partie de l'activité. Ils sont alors dans une démarche d'expérimentation avec un moyen de valider ou d'invalider leur carte hypothétique. Chaque nouvelle carte étant invalidé par leur mécanisme de vérification, les élèves sont amenés à faire l'hypothèse qu'ils ne peuvent pas faire de huitième carte.

Par ailleurs, le nombre de symboles disponibles sur la table est trop important pour que les élèves essaient toutes les combinaisons possibles, les élèves ne peuvent pas vérifier leur conjecture par l'expérience. Ils se trouvent confrontés à la nécessité de démontrer qu'il n'y a pas de huitième carte possible, de se convaincre qu'il n'y a pas de huitième carte possible.

c) Un raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'il n'y a pas de huitième carte possible, le plus simple est de faire un raisonnement par l'absurde en s'aidant d'un tableau répertoriant les cartes créées :

1re étape : Le tableau

Il est utile d'appuyer la démonstration sur un tableau tel que celui-ci après. C'est aussi à ce moment qu'il devient intéressant de modéliser les symboles par des chiffres pour simplifier les explications.

Cartes \symbole	1	2	3	4	5	6	7
Carte 1	X	x	x				
Carte 2	X			x	x		
Carte 3	X					x	x
Carte 4		x		x		x	
Carte 5		x			x		x
Carte 6			x	x			x
Carte 7			x		x	x	

2e étape : La démonstration par l'absurde.

Supposons que l'on puisse faire une 8e carte avec les 7 symboles utilisés.

Tous les symboles sont équivalents (utilisés 3 fois et combinés 1 fois avec tous les autres).

Pour notre huitième carte, nous choisissons un symbole, le 1 par exemple.

A cause de la carte C1 on ne peut utiliser ni le 2 ni le 3.

A cause de la carte C2 on ne peut utiliser ni le 4 ni le 5.

A cause de la carte C3 on ne peut utiliser ni le 6 ni le 7.

On ne peut donc pas former de nouvelle carte avec le 1 en utilisant seulement les 7 symboles.

Comme tous les symboles sont équivalents, on ne peut pas former de nouvelle carte avec les 7 symboles déjà utilisés.

Supposons que l'on puisse faire une 8e carte en ajoutant de nouveaux symboles.

On ajoute le symbole 8.

On crée une carte avec le symbole 8.

Il existe 2 façons de la compléter :

- en ajoutant un des 7 premiers symboles, disons le 1. Dans ce cas on retombe sur la première partie de la preuve et on ne peut utiliser aucune des 6 autres symboles. On doit ajouter un nouveau symbole : le 9. Dans ce cas les cartes numéros 4, 5, 6 et 7 n'ont aucun symbole en commun avec la nouvelle.e
- n ajoutant 2 nouveaux symboles (9 et 10), mais dans ce cas aucune carte n'a de symbole commun avec la nouvelle.

Dans tous les cas il est impossible de former une huitième carte.

VI. CONCLUSION

Il existe de nombreuses manières de vulgariser, mais la façon de définir une trajectoire dans les différentes zones (magique, didactique ou maîtrisée) est déterminante selon nous de la capacité de l'action à réaliser ses objectifs auprès du public. Qu'est-ce que le vulgarisateur donne à comprendre ? A apprendre ? Quels savoirs tente-t-il de rapprocher de son public, ou au contraire, qu'est-ce qu'il laisse –intentionnellement ou non - inatteignable ?

A travers l'étude et la description de plusieurs actions de diffusion des mathématiques autour du Dobble, nous avons cherché à montrer comment les processus de vulgarisation et d'enseignement peuvent être articulés, et qu'il est possible d'étudier une action de diffusion, non pas comme un bloc unique, mais comme une succession de moments où les enjeux et les intentions peuvent évoluer, rendant ainsi possible l'existence de moments d'enseignement dans une action de vulgarisation, et réciproquement des de moments de vulgarisation dans une action d'enseignement.

REFERENCES

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations,* Grenoble, La Pensée Sauvage.

Bourrigan M. (2011) *Dobble et la géométrie finie*, Images des Maths, http://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html

Deléglise M. (2013) *Plan projectif, arithmétique modulaire et Dobble.* http://math.univ-lyon1.fr/~deleglis/PDF/dobble.pdf

EL JJ (2014) *Du simple au Dobble.* Choux romaneso, vache qui rit et intégrale curviligne, http://eljjdx.canalblog.com/archives/2014/07/06/30181178.html

Pelay N. (2011) *Jeu et apprentissages mathématiques : Elaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat, Université de Lyon I, Lyon, mai 2011, https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00665076/

Pelay N., Mercat C. (2012) Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques. In Dorier J.-L. et Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle — Actes du colloques EMF2012* (Spe4, pp. 1914-1925).

Sousa Do Nascimento S. (1999) *L'animation scientifique : essai d'objectivation de la pratique des associations de culture scientifique et de techniques françaises*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

POUR UNE « VULGARISTIQUE » DES MATHÉMATIQUES

Benoît RITTAUD*

Résumé – L'article présente quelques considérations sur ce qu'est la vulgarisation en mathématiques et illustre en quoi la didactique ou la pédagogie ne sont pas pleinement adaptés pour son étude en tant qu'objet scientifique. À l'aide de l'exemple de la problématique des nombres irrationnels, l'article met en relief quelques différences fondamentales entre vulgarisation et enseignement. Il suggère que, ces deux activités étant tout de même liées, l'une et l'autre pourraient être regardées comme s'intégrant à un même cadre théorique plus général : celui de la transmission du savoir.

Mots-clefs : vulgarisation ; enseignement ; nombres irrationnels

Abstract – The article deals with some considerations on the activity of popularization of mathematics, and shows why the science of mathematics education is not fully convenient to study it as a scientific object. The article makes use of the example of irrational numbers to emphasize on some fundamental differences between popularization and teaching. It suggests that, since these two kind of activities are linked, both should be regarded as parts of a more general framework: transmission of knowledge.

Keywords: popularization; teaching; irrational numbers.

Une façon commune de penser la vulgarisation consiste à l'envisager comme un effort de simplification du contenu d'un savoir, destiné à permettre à un public de non-spécialistes de s'en approprier à bon compte quelques rudiments. Selon ce point de vue, la vulgarisation serait une sorte d'enseignement allégé. Il est vrai que les deux activités partagent un point de leur structure fondamentale : les deux consistent en une rencontre (au sens large) entre dépositaires du savoir et novices, rencontre dont l'objet est une transmission des connaissances des premiers aux seconds.

Un aspect périphérique pour expliquer cette captation d'une pratique par une autre est que beaucoup d'acteurs de la vulgarisation sont eux-mêmes des enseignants, qui s'inspirent donc tout naturellement de leurs habitudes de salle de classe pour procéder à une transmission « allégée ». Ce point est tout particulièrement criant dans le cas des mathématiques, qui est une discipline scientifique peu médiatisée par rapport à d'autres (médecine, cosmologie…) et à laquelle peu de médias non-spécialisés consacrent des efforts suffisants pour créer une authentique culture autonome de la vulgarisation mathématique pour de bon émancipée de toute tutelle scolaire. La vulgarisation demeure donc, pour une large part, prisonnière du schéma de fonctionnement issu des pratiques professionnelles de ses promoteurs les plus naturels et les plus nombreux.

* Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539 – France – rittaud@math.univ-paris13.fr

Rittaud B. (2015) Pour une "vulgaristique" des mathématiques. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé2, pp. 957-962.

Nous proposons ici une première approche pour illustrer que, en réalité, les outils d'analyse de l'enseignement sont partiellement inadaptés à l'analyse de la vulgarisation des mathématiques. L'intention comme les méthodes de cette dernière semblent en effet suffisamment distinctes pour qu'il soit légitime de parler d'une réelle différence de nature, et non d'une simple différence de degré. Le présent article présente ainsi quelques pistes modestes à partir desquelles il pourrait être possible de réfléchir à la fondation d'une « vulgaristique », qui serait à la vulgarisation ce que la didactique est à l'enseignement.

Cet article a grandement bénéficié des réflexions issues du groupe de travail informel AlPaGe, qui réunit depuis 2012 divers acteurs de la vulgarisation mathématique : Pierre Audin (Palais de la Découverte, Paris), Hacène Belbachir (université d'Alger), Pierre-Alain Chérix (université de Genève) et Shaula Fiorelli-Vilmart (université de Genève). Il peut être considéré comme une introduction à l'article de Shaula Fiorelli-Vilmart et ses co-auteurs, dans les présents actes du colloque EMF 2015.

I. SUR LE MOT « VULGARISATION »

Il n'est peut-être pas inutile, pour commencer, de consacrer quelques lignes à justifier notre choix du mot de « vulgarisation ». Pour beaucoup, le terme est négativement connoté, pour des raisons à la fois anecdotiques et profondes. Il y a, bien sûr, cette proximité phonétique avec des mots comme « vulgaire », « vulgarité ». L'argument serait mineur, à la rigueur défendable dans un pur contexte de communication, si cette proximité phonétique ne tenait pas à la parenté effective de ces mots, tous issus du latin *vulgus*.

Certes, le sens originel de *vulgus* est moins synonyme de « grossier » que de « commun ». La *langue vulgaire* n'est rien d'autre, à l'origine, que la langue partagée par tous, la langue du peuple. Nous pourrions donc céder au jeu érudit consistant à séparer le bon grain étymologique de l'ivraie. Il n'en resterait pas moins que le sens actuel de « vulgaire » est clairement dépréciatif, et qu'il est donc défendable de considérer que « vulgarisation » l'est aussi. Des tentatives ont régulièrement lieu pour proposer un autre mot : « valorisation », « partage », « diffusion », ou encore « popularisation » (peut-être inspiré de l'anglais *popularization*). En France, par exemple, c'est ce dernier terme qui a été retenu pour les 1[eres] journées de popularisation des mathématiques qui se sont tenues à Orléans en 2012.

Chercher dans le lexique un mot à substituer à « vulgarisation » ne semble toutefois pas une bonne idée. Nous n'allons pas nous livrer ici à une critique exhaustive de toutes les propositions envisageable, mais seulement envisager brièvement le cas de « popularisation ». Sans même gloser sur le glissement de sens (s'agit-il de rendre les mathématiques « populaires » plutôt que « communes » ?), le mot présente en réalité le même défaut que « vulgarisation ». En effet, le tropisme qui conduit à attribuer à « vulgaire » (et mots apparentés) le sens péjoratif que nous lui connaissons a des causes qui sont tout autant à l'œuvre pour les termes dérivés de « peuple ». Par exemple, il faut n'avoir jamais entendu de cinéaste s'indigner de l'expression « cinéma populaire », ni de politicien dénoncer le peu de considération pour le peuple que sous-entend le sens de « populisme », pour imaginer sans sourciller que *popularisation* échapperait, à terme, au sort de *vulgarisation*.

Toutefois, la principale raison qui doit nous pousser à nous en tenir au mot de « vulgarisation » est ailleurs : elle est que c'est ce mot et non un autre qui est aujourd'hui en usage dans le grand public. Même si, comme nous le verrons plus loin, une définition exacte de la vulgarisation est difficile à saisir, du moins peut-on aisément s'accorder sur son intention générale : présenter de manière simple, accessible, attrayante, un champ donné du savoir à un public donné. Or le plus souvent (pas toujours, il est vrai), le public sur lequel il s'agit de porter les efforts de vulgarisation est un public novice. Cela implique notamment que, à chaque fois que cela est possible, ce sont les mots utilisés par ce public que nous nous devons d'employer, en proscrivant tout élément de jargon qui ne serait pas absolument nécessaire. La dimension psychologique n'est pas indifférente et, s'agissant de ce qui nous occupe ici, c'est celle du public qui nous intéresse.

Retenir le mot de vulgarisation, c'est donc faire le choix d'une dénomination qui correspond à ce qu'il s'agit de désigner, mais aussi, et surtout, avec ce qu'il s'agit de faire : parler au public dans une langue qui lui soit familière.

II. VULGARISATION VS. ENSEIGNEMENT

Voici une liste d'éléments susceptibles d'aider à distinguer de façon théorique la vulgarisation de l'enseignement et montrent que la première ne peut se réduire à une simple déclinaison allégée du second :

- *la mise en scène* : non centrale dans l'enseignement (bien que n'en étant pas absente), elle est un élément crucial de la vulgarisation, qui recherche délibérément à créer des effets sous toutes ses formes (effets de surprise, images, discussions informelles…).
- *la captivité du public* : alors que des élèves ou des étudiants sont contraints d'être présents à une séance d'enseignement, assister à une présentation de vulgarisation (quelle qu'en soit la forme : conférence, atelier, article magazine…) relève en principe d'une démarche volontaire. La disposition mentale du public y est donc *a priori* très différente. En particulier, la vulgarisation est bien adaptée pour capter des publics alternatifs (adultes, retraités…) ou à qui il est spécifiquement important de s'adresser pour des raisons spécifiques (journalistes, décideurs…).
- *la pérennité du discours* : alors qu'un enseignement s'inscrit en principe sur la durée, une présentation de vulgarisation est limitée dans le temps. Aucun lien durable n'a vocation à s'établir entre le présentateur et le public, ou entre l'auteur et le lecteur. (En conséquence, le vulgarisateur a moins le droit à l'erreur que l'enseignant, ce dernier disposant toujours de la possibilité de rectifier un point lors d'une séance ultérieure lorsqu'il y a lieu de le faire.)
- *la mise en perspective* : sorte de contrepoint au point précédent, inscrire le domaine dans un paysage plus large (les mathématiques dans l'histoire, dans l'art, dans l'ingénierie, en philosophie…) fait partie de cette liberté que la vulgarisation peut davantage se permettre que l'enseignement, celui-ci étant bien souvent corseté dans des contraintes diverses (horaires limités, programmes officiels, influence des parents d'élèves, intangibilité des exigibles…).
- *la dimension hiérarchique* : l'enseignant est souvent un juge au travers de l'évaluation qu'il fait de ses élèves, tandis que le vulgarisateur n'a jamais ce rôle.
- *l'adaptabilité du contenu* : alors que l'enseignant est en général contraint par un programme, le vulgarisateur est plus souvent libre d'orienter son discours ou son atelier vers des éléments qui, sur le moment, apparaissent retenir davantage l'attention, ou susciter les questions les plus stimulantes.

Deux éléments viennent toutefois brouiller les cartes. Le premier, qui découle d'un phénomène déjà signalé en introduction, est qu'une partie significative du public de la vulgarisation est composée d'élèves, sous l'impulsion d'un enseignant. Le public de la vulgarisation peut donc à l'occasion se révéler tout aussi « captif » que celui de l'enseignement. C'est d'autant plus vrai qu'il est fréquent que l'enseignant exploite un matériau de vulgarisation dans l'idée que celui-ci lui permettra par la suite de développer telle ou telle partie du programme scolaire.

Un second élément tient à ce qu'une autre partie significative de la vulgarisation s'adresse en réalité aux enseignants eux-mêmes, ou plus généralement à un public professionnel. Cette vulgarisation peut être qualifiée d'*interne*, par opposition à une vulgarisation *externe* qui vise un public moins acquis à la discipline. De plus, étant donné que la vulgarisation externe est souvent jugée et évaluée par des professionnels, il est fréquent d'observer des initiatives qui, visant initialement la vulgarisation externe, se transforment progressivement en vulgarisation interne. Il est raisonnable d'estimer que cette dernière, pour indispensable qu'elle soit, est conceptuellement moins intéressante à étudier. Relevant davantage d'une démarche d'information par et pour des spécialistes, elle tient probablement plus de l'enseignement informel entre pairs. Son principal intérêt théorique dans le cadre d'une étude des mécanismes de la vulgarisation est plutôt ce tropisme fréquent qui conduit une démarche de vulgarisation conçue comme externe à se changer plus ou moins vite en vulgarisation interne, sous l'effet conjugué des habitudes des contributeurs et de la facilité plus grande qu'il y a à s'adresser à un public plus ou moins captif (voir à ce sujet l'étude réalisée en 2014 par le site internet français *Images des mathématiques*[1], qui convient de la difficulté qu'il y a à s'adresser à un public qui ne se réduise pas à des personnes déjà passionnées). Pour ce qui nous concerne, nous ne considérons dans cet article que la vulgarisation externe des mathématiques, et nous l'appelons simplement « vulgarisation » par souci de concision.

III. UN TRAITEMENT VULGARISE DE LA PROBLEMATIQUE DES NOMBRES IRRATIONNELS

Pour illustrer la différence entre enseignement et vulgarisation, considérons le sujet classique de l'existence de nombres irrationnels selon ces deux angles.

Dans la perspective qui est celle de l'enseignement, la notion de nombre irrationnel s'effectue en général de la façon suivante. On commence par définir l'ensemble **Q** des nombres rationnels comme étant celui des nombres x pour lesquels on peut trouver deux entiers p et q tels que $x = p/q$. Il s'agit ensuite de montrer qu'il existe des nombres qui ne sont pas dans **Q**. Au niveau le plus élémentaire, cela peut se faire en prenant un exemple explicite (tel que $\sqrt{2}$) et en établissant qu'il ne peut s'écrire comme rapport de deux entiers, à l'aide de l'une ou l'autre des multiples démonstrations élémentaires existantes. (Pour $\sqrt{2}$, il en existe plus d'une vingtaine.) Un enseignant soucieux d'intéresser ses élèves et d'élargir leurs connaissances complètera cette démonstration avec différents éléments extra-mathématiques ou extra-scolaires reliés à cette problématique de l'irrationalité : conséquences historiques et philosophiques de l'existence des nombres irrationnels (notamment dans l'Antiquité), importance dans les applications (en architecture, en musique, dans la norme A4…), questions ouvertes (par exemple sur la structure des décimales de $\sqrt{2}$), etc. Ces aspects sortent du champ de l'enseignement proprement dit (au sens où ils ne font pas partie du programme de mathématiques), leur fonction est celle d'anecdotes éclairantes qui permettent d'aérer un cours qui porte sur une notion particulièrement abstraite.

Dans une démarche de vulgarisation ces aspects extra-mathématiques seront bien sûr regardés avec davantage d'intérêt, mais si la différence ne résidait que là, elle ne serait qu'une simple différence de degré. Or l'essentiel qui permet de distinguer enseignement et vulgarisation réside plutôt dans la manière dont cette dernière peut aborder les aspects strictement mathématiques de la notion de nombre irrationnel. En mettant l'accent sur la

---

[1] http://images.math.cnrs.fr/Reactions-du-comite-de-redaction.html

présentation de la notion plutôt que sur son *explication*, ce peut être un choix du vulgarisateur de s'« interdire » d'enseigner ce que sont vraiment les nombres irrationnels, pour éviter l'écueil si fréquent qui consiste à en dire trop. (Le défaut inverse, en dire trop peu, existe aussi mais est moins « naturel ».) Une présentation vulgarisée de l'irrationnalité peut ainsi se structurer selon les idées-forces suivantes :

- les nombres entiers sont des briques et les opérations arithmétiques usuelles (addition, multiplication, soustraction, division) sont des outils. Briques et outils permettent de construire de nouveaux objets (des nombres non-entiers, par exemple en divisant 8 par 3).
- Ces briques et ces outils ont pour particularité de permettre de créer un très vaste ensemble, noté **Q**, de nombres appelés *rationnels*. Celui-ci contient en particulier tous les nombres décimaux (mais pas seulement).
- Tout nombre pouvant être approché de façon arbitrairement précise par un élément de **Q** (par exemple *via* les décimaux), une question naturelle est de savoir si tous les nombres sont en réalité des rationnels.
- Or il n'y a aucune raison *a priori* (quoi qu'aient pu en penser les Pythagoriciens) pour que nos briques et nos outils précédents suffisent à atteindre toute l'immensité des nombres.
- En l'occurrence, il se trouve qu'en effet, ces briques et ces outils ne suffisent pas. (D'où découle en particulier la nécessité d'inventer des notations spécifiques pour les nombres les plus courants qui échappent à ces briques et ces outils : $\sqrt{2}$, π, e, etc.)

Il y a là extrêmement peu d'enseignement à proprement parler (même si ce qui précède n'est pas exclusif et que le présentateur pourrait aussi, en passant, signaler d'autres voies de réflexion plus techniques, comme la construction de **R**, sans s'y engager). Comme aucune caractérisation des rationnels par la représentation fractionnaire n'y apparaît, on n'y trouve aucune définition de l'irrationalité. On n'y trouve pas davantage de démonstration, ce qui s'en rapproche le plus étant l'usage du principe selon lequel nul outil n'a vocation à être universel.

Ainsi donc, au sens mathématique, les points précédents ne définissent ni ne démontrent quoi que ce soit. Pour l'enseignant, c'est là leur défaut rédhibitoire : il est à peu près impossible d'en extraire une substance mathématique précise. Pour le vulgarisateur en revanche, c'est là un atout, pour plusieurs raisons : d'abord, le risque est faible de « perdre en route » tout ou partie d'un public peu habitué aux techniques mathématiques. Ensuite, un point de vue aussi « lointain » permet d'avancer beaucoup plus vite. Le temps ainsi libéré peut alors permettre d'aborder des aspects culturels extra-mathématiques de la notion de nombre irrationnel, ou même servir à approcher des notions mathématiques plus complexes. C'est ainsi que, alors qu'il faudra à notre enseignant bien des heures de cours sur les corps de nombres et leurs extensions algébriques pour démontrer l'impossibilité de la quadrature du cercle, notre vulgarisateur, lui, peut immédiatement réinvestir en géométrie le principe qui lui a servi à affirmer l'existence des irrationnels : à l'instar des quatre opérations, la règle et le compas ne sont rien d'autre que des outils, avec lesquels on ne saurait prétendre *a priori* pouvoir tout faire, en particulier tracer un carré d'aire π.

IV. DE LA VULGARISATION SANS ENSEIGNEMENT ?

En poussant ce qui précède à sa limite la plus extrême, l'on en viendrait à affirmer que la vulgarisation n'est authentique que lorsqu'elle n'enseigne rigoureusement rien. Bien entendu, une telle vulgarisation « pure » serait aussi abstraite et irréalisable que le vide parfait en physique. (Qui imaginerait pour de bon une présentation vulgarisée un tant soit peu développée sur les irrationnels qui n'enseignerait rien sur les fractions ?) De plus, une vulgarisation vierge de tout enseignement manquerait probablement son objectif, tant il est difficile de soutenir qu'un public, quel qu'il soit, ne serait là que sous la condition de ne rigoureusement rien apprendre. De la même manière que l'enseignement gagne en efficacité et en qualité en intégrant des éléments culturels vulgarisés, la vulgarisation s'enrichit évidemment d'une part d'enseignement. Il reste que ce qui précède montre qu'elle ne saurait s'éclairer avec les mêmes outils d'analyse.

Ainsi donc, il faut convenir que les points communs entre la pratique de l'enseignement et celle de la vulgarisation ne suffisent pas à réduire la seconde à une version allégée de la première. Puisque, toutefois, les deux exploitent parfois des outils similaires, une manière possiblement féconde d'aborder la question ne réside ni dans la subordination de la première aux schémas qui régissent le second, ni dans l'opposition de principe entre les deux, mais d'envisager les deux comme faisant partie d'un ensemble plus vaste, et à l'intérieur duquel il n'est pas nécessaire de dresser des frontières nettes. Lorsque, à l'occasion par exemple d'un atelier, un animateur propose un jeu pour initier une réflexion sur les probabilités, est-il dans une démarche de vulgarisation ? d'enseignement ? de recherche ? À l'évidence, la seule réponse valide est : un peu de tout cela à la fois. La détermination des paramètres structurants les plus pertinents pour décrire une activité de ce type est l'un des enjeux de ce qui pourrait constituer une didactique de la vulgarisation, une « *vulgaristique* », qui serait à la vulgarisation ce que la didactique est à l'enseignement, c'est-à-dire un domaine de recherche dont l'objet serait la vulgarisation elle-même.

REFERENCES

Fiorelli Vilmart S., Audin P., Belbachir H., Chérix P.-A., Rittaud B. (2015) Évaluer une action de vulgarisation des mathématiques. *Actes du colloque EMF2015.*

Rittaud B. (2006) *Le Fabuleux destin de* $\sqrt{2}$. Paris : Le Pommier.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

TRANSITIONS DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Compte-rendu du Projet Spécial n°3

Fabrice VANDEBROUCK[*] – Claudia CORRIVEAU[**] – Ouahiba CHERIKH[***]

Pendant le colloque EMF2015, le projet spécial n°3 portant sur les transitions dans l'enseignement des mathématiques, a disposé de trois plages de travail d'une durée d'une heure et demie à deux heures. Le travail lors des trois séances s'est réparti entre des présentations et des discussions sur la base de textes soumis. Les présentations ont plus particulièrement porté sur deux thèmes : celui de la compréhension des phénomènes de transition et celui de la remédiation des problèmes de transition. Les présentations faites dans le cadre de ce projet spécial ont été diversités en termes de transition investiguée (de l'école élémentaire à l'école secondaire ou encore de l'école secondaire à l'enseignement supérieur) et en termes d'objets étudiés.

Le projet spécial s'est conclu avec une table ronde dans laquelle des intervenants ont présenté ou bien des dispositifs mis en place pour pallier les difficultés de transition du primaire au secondaire et du lycée à l'université dans leur pays respectif, ou bien des difficultés vécues par les élèves, étudiants et enseignants en lien avec les transitions.

Les participants

Nous remercions chaleureusement les nombreux participants, professeurs et professeures de mathématiques, didacticiens et didacticiennes, étudiants et étudiantes, inspecteurs des écoles, etc., pour les échanges riches. Ils étaient une trentaine lors des deux premières séances et une quinzaine lors de la troisième et dernière séance.

I. LES CONTRIBUTIONS

Pour aborder les transitions dans l'enseignement des mathématiques, les présentateurs ont choisi des objets distincts et des angles variés. Comme nous l'avons déjà mentionné, certains proposent une meilleure compréhension des phénomènes de transitions et d'autres s'engagent dans des remédiations possibles pour pallier les difficultés d'élèves liées à ces transitions.

[*] Université Paris Diderot – France – vandebro@univ-paris-diderot.fr
[**] Université Laval – Canada – claudia.corriveau@fse.ulaval.ca
[***] USTHB – Algerie – ouahiba_cherikh@yahoo.fr

Vandebrouck F., Corriveau C., Cherikh O. (2015) Transitions dans l'enseignement des mathématiques - *Compte-rendu du Projet Spécial n°3*. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 963-969.

1. Compréhension du phénomène de transition

Timbila Sawadogo dégage, d'une analyse des programmes du secondaire et du supérieur au Burkina Faso, une différence de structuration tant dans le fond (dans les contenus privilégiés à enseigner), que dans la forme (à travers une méthodologie d'enseignement plus ou moins explicite dans les programmes) dans le passage du secondaire à l'université. Sawadogo résume les exigences en termes de démonstration et de formalisation du secondaire à la maitrise de la pensée déductive sur de courtes séquences. De plus, il note un engagement prudent dans l'utilisation des symboles des quantificateurs existentiel et universel. Quant à l'université, les exigences en termes de démonstration et de formalisation sont très peu explicitées dans les programmes, de sorte que les enseignants ont une grande marge de manœuvre par rapport à ce qu'ils peuvent faire.

Par sa présentation, Isabelle Demonty a mis en évidence que plusieurs recherches en didactique des mathématiques, qui ne portent pas spécifiquement sur les questions de transition interordres, peuvent tout de même présenter des résultats éclairants pour les questions de transition. C'est le cas des recherches qui mettent de l'avant d'importants sauts conceptuels à propos de grands domaines mathématiques – par exemple les travaux menés sur le passage des nombres naturels aux nombres rationnels (Brousseau, 1981), de l'arithmétique à l'algèbre (Bednarz et Janvier, 1996) ou encore d'une géométrie empirique à une géométrie déductive (Salin, 2003). Dans le projet de recherche présenté, elle a voulu savoir si et comment les enseignants prenaient en considération ces résultats dans leur enseignement ? Sont-ils intuitivement au fait de ces résultats ? Elle a aussi mis en évidence que la tendance est à regarder la transition sous l'angle de l'ordre d'enseignement supérieur (en termes de difficultés des élèves arrivant au nouvel ordre), mais l'étude qu'elle a menée tend à montrer que les connaissances des sauts conceptuels concernent tout aussi bien les enseignants des ordres inférieurs pour assurer la préparation de leurs élèves.

Aurélie Chesnais, Nicolas GrenieR-Boley et Julie Horoks ont montré, notamment par des analyses de manuels aux différents ordres scolaires, primaire, collège et Lycée en France, le peu d'articulation entre les différents aspects des notions, en particulier au niveau inférieur de la transition où la prise en compte de ce qui est nécessaire pour le niveau suivant semble insuffisante. Par exemple, par leurs analyses autour de la notion de symétrie dans le passage de la CM2 à la 6^{e} ou encore ceux autour de la notion de fonction entre le collège et le Lycée, ils remarquent une grande variabilité entre les manuels, en particulier ceux de la CM2, de la façon de prendre en considération la transition. Le travail mené par ces chercheurs, avec la mise en parallèle de deux transitions, permet d'entrevoir l'intérêt de pousser l'étude de différentes transitions, autour de différents contenus, pour en dégager des spécificités, mais aussi des invariants.

2. Remédiation des problèmes de transition

Selon Claudia Corriveau, les enseignants ont un rôle important à jouer dans la compréhension des questions de transitions, surtout lorsque l'on cherche à réfléchir aux articulations possibles entre deux ordres. Le projet de recherche présenté a été mené en collaboration avec des enseignants des ordres secondaire et postsecondaire, collaboration qui a permis d'une part de mieux comprendre les manières de faire des mathématiques à chacun des ordres, et d'autre part, d'envisager un rapprochement entre les deux ordres. Dans le cadre de la présentation, elle a exposé la reconstitué d'une *trajectoire d'harmonisation* en lien avec le travail sur les fonctions. Elle note trois moments centraux dans cette reconstruction : l'émergence d'éléments clés (par ex. des aspects de l'enseignement/apprentissage des mathématiques considérés importants pour les enseignants des deux ordres), l'établissement de liens concrets et l'élaboration d'activités à mener en classe avec les élèves ou étudiants. Ce travail conjoint permet aux enseignants de réorganiser leurs manières de faire à la lumière de ce qui est fait à l'autre ordre, de problématiser au besoin leurs façons de faire usuelles et de leur accorder un nouveau sens.

Patrick Fretigné et Viviane Durand-Guerrier ont présenté les travaux de la commission inter IREM Université. Cette commission est l'une des 13 commissions nationales du réseau des IREM en France. Les IREM permettent la collaboration des enseignants de différents ordres. En particulier, le travail au sein de la commission Université a permis de dégager des difficultés et des pistes de remédiations à travers la collaboration des enseignants des lycées et des universités sur deux thèmes, celui d'une part de la nature des nombres réels et la structure de leur ensemble, et celui d'autre part de la place de la logique dans les contenus et les pratiques des enseignants des deux ordres – avec un exemple explicite d'articulation possible entre les deux ordres.

II. LA TABLE RONDE

Le thème des transitions interordres est un objet d'intérêt commun pour différents acteurs du monde de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques. Il a fait l'objet de nombreuses recherches en didactique des mathématiques ; il interpelle les enseignants qui préparent leurs élèves à l'autre ordre ou ceux qui les reçoivent; il intéresse aussi les inspecteurs et conseillers pédagogiques qui ont une vue d'ensemble du système scolaire et, le plus souvent, travaillent avec des enseignants de plusieurs ordres scolaires. Ainsi, dans le cadre du projet spécial n°3, nous avons organisé une table ronde sur le thème des transitions dans le but d'une part de favoriser les échanges entre ces différents acteurs, et d'autre part, pour discuter de différents dispositifs mis en place pour aborder les questions de transition interordres ou pour pallier les difficultés liées aux transitions selon divers pays.

La table ronde, animée par Ouahiba Cherikh, a réuni quatre intervenants : Abdelmoumen Zekiri (Université des Sciences et Technologies Houari Boumediene, Algérie), Salah Makaci (inspecteur des écoles, Algérie), Viviane Durand-Guerrier (Université de Montpellier, France) et Claudia Corriveau (Université Laval, Québec).

- Abdelmoumen Zekiri a présenté de manière détaillée la situation vécue par les étudiants dans le passage de l'école secondaire à l'université. Il décrit une rupture quasi-totale entre les deux ordres. Cette transition engendre des difficultés énormes pour les étudiants qui finissent par déserter la filière Licence Mathématiques. Les étudiants arrivent alors à compenser le module de Mathématiques par d'autres modules qui leur apparaissent plus accessibles. Zekiri dénonce aussi le fait de ne pas associer les enseignants de mathématiques lors de l'élaboration de réformes et la rédaction de programmes scolaires. Ces réformes, introduites par les ministères de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur, sont alors imposées aux enseignants qui les subissent sans être préparés ni suffisamment formés.

- Salah Makaci a articulé sa présentation autour de deux idées : les difficultés reliées au passage à l'enseignement moyen en Algérie et les besoins en termes de continuité. Il a présenté les difficultés des élèves repérées par les professeurs de mathématiques de l'enseignement moyen. Ces derniers mentionnent que les bases minimales de l'enseignement primaire sont mal assurées (difficultés avec les opérations de base, que ce soit les tables à connaître ou les calculs à faire par écrit, difficultés à choisir l'opération sollicitée par une situation, ne pas savoir utiliser les instruments géométriques, etc.). De plus, la transition vers l'enseignement moyen s'accompagne, selon Salah Makaci, du passage de la manipulation aux raisonnements (difficulté à maîtriser le vocabulaire mathématique, à traduire des énoncés par un dessin, à passer du langage mathématique à l'arabe et inversement, à se représenter dans l'espace, etc.). M. Makaci met en évidence l'importance de constituer ce qu'il nomme un « fil rouge » et la nécessité de mettre en place des outils qui favorisent la continuité entre l'enseignement primaire et l'enseignement moyen. Les pistes envisagées sont les suivantes :

  - Prendre connaissance des programmes respectifs.
  - Préciser, dans un document, le profil de sortie et d'entrée pour chaque niveau.
  - Organiser des opérations de formation conjointe primaire/moyen.
  - Repenser le système d'évaluation.
  - Etc.

- Salah Makaci a aussi présenté la situation de la transition de l'enseignement moyen à l'enseignement secondaire à partir de ce que Bachir Bouchelif, qui n'a malheureusement pas pu participer à la dernière séance, avait préparé. Après avoir relaté les difficultés des élèves et des enseignants, M. Makaci a présenté un programme de liaison impliquant des enseignants du collège (enseignement moyen), du Lycée (enseignement secondaire) et de l'université. La mise en place de cette cellule de réflexion pour les différents programmes a permis de déterminer les points communs et a permis d'élaborer des grilles d'évaluation pour déterminer les acquis et la mise en place d'un système de remédiation avant le passage au cycle supérieur

- Après avoir présenté les particularités du système scolaire québécois, Claudia Corriveau a fait état d'une part des initiatives du Ministère de l'Éducation, de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche (MEESR) du Québec en lien avec les transitions interordres et, d'autre part, a présenté quelques initiatives locales. Elle relève deux initiatives importantes du MEESR dans l'enseignement des mathématiques : 1) le développement d'un document qui s'intitule « Progression des apprentissages » (MELS, 2009) dans lequel tous les contenus mathématiques du primaire jusqu'au secondaire sont présentés selon leur progression dans le parcours scolaire des élèves avec des indications sur ce que l'élève devrait être capable de faire avec l'aide de l'enseignant, ce qu'il peut faire seul ou ce qu'il devrait pouvoir réinvestir dans le cadre d'autres apprentissages mathématiques. 2) La constitution d'une table interordres dont le mandat est d'élaborer des pistes d'action pour rendre les mathématiques plus accessibles; les valoriser; et en faciliter la continuité dans l'enseignement. Cette table interordres est composée de représentants de différents ordres d'enseignement et de didacticien des mathématiques du Québec. La présentation des initiatives locales a permis de mettre en lumière que les questions de transition interordres préoccupent les enseignants qui ressentent le besoin d'organiser des lieux de rencontres entre les différents ordres d'enseignement.

Viviane Durand-Guerrier a présenté des éléments de réflexion à propos des transitions à partir du contexte de la France. Elle met de l'avant l'importance d'une circulation des professeurs entre le collège et le lycée. Ils ont la même formation, mais ils sont dans des établissements différents (elle mentionne par ailleurs que cela n'a pas toujours été le cas). Ce cloisonnement rend les questions de transition un peu plus complexes. L'idée est donc de développer un dispositif de collaboration qui permettrait aux enseignants des différents ordres d'être en contact.

Dans le domaine de l'enseignement des mathématiques, les initiatives nationales sont souvent mises en œuvre à travers les groupes IREM et les différentes académies. Au niveau de la transition lycée université, Viviane Durand-Guerrier décrit des initiatives locales qui se retrouvent dans un certain nombre d'académies sous forme de groupes liaison lycée-université où chacun y participe avec sa propre expertise. Ces groupes sont constitués des enseignants du secondaire, des enseignants universitaires, des didacticiens de mathématiques (menant des recherches soit au secondaire, soit à l'université ou encore sur les questions de transitions interordres) et des inspecteurs. L'intervention de ces différents acteurs permet d'avoir une vision assez globale et assez générale de la situation. Les travaux de ces différents groupes ont permis de conclure entre autres qu'il est nécessaire de coordonner les connaissances et les expériences de chacun pour aboutir à des solutions : la connaissance des programmes du lycée ne suffit pas à l'enseignant du postsecondaire pour avoir une idée de la réalité du terrain. Ce sera plutôt l'enseignant du secondaire qui pourra lui relater la réalité du secondaire. Leur mise en dialogue apparaît essentielle. De plus, Viviane Durand-Guerrier mentionne que la transition peut être pensée en termes de rupture, mais aussi en matière de continuité.

En France des changements de programme sont en cours, le primaire est composé actuellement de trois cycles, une perspective institutionnelle de transition est d'introduire un quatrième cycle à cheval entre l'école primaire et le collège.

III. CONCLUSION

Les discussions qui ont suivi les présentations et qui se sont prolongées pendant la synthèse du projet spécial ont ouvert sur un ensemble de questions d'intérêt pour aborder la problématique des transitions interordres. Nous avons pu repérer, à travers ces discussions, des interrogations pouvant se regrouper en deux thèmes.

Un premier thème qui a soulevé un questionnement concerne **la formation des enseignants et les questions de transition**.

- À travers les présentations et les discussions qui en ont découlé, nous nous sommes demandé dans quelle mesure les enseignants étaient renseignés des résultats de recherche susceptibles d'éclairer des difficultés liées aux transitions interordres en mathématiques ? Les enseignants des ordres primaire, secondaire, postsecondaire sont-ils au fait, ne serait qu'intuitivement, de ces sauts conceptuels dans le passage du primaire au secondaire (Demonty) ? Des nouvelles exigences en termes de formalisme dans le passage à l'université (Sawadogo) ? Des répercussions à ne travailler que très peu la logique au secondaire ou des conceptions du nombre qu'ont les étudiants à leur arrivée à l'université (Fretigné et Durand Guerrier) ? Comment les aborder avec ceux-ci (Fretigné et Durand Guerrier ; Corriveau) ? Que peut-on faire en ce sens du point de la formation ?

- En effet, ce questionnement, initié par Demonty, renvoie notamment aux dispositifs de formation à mettre en place pour aborder les questions de transition interordres avec les enseignants des différents paliers. Plusieurs présentations, particulièrement celle de Corriveau et celle de Fretigné et Durand-Guerrier, ont mis en évidence l'intérêt d'organiser des formations sur le thème des transitions qui permettent à des enseignants de plusieurs ordres de travailler ensemble. Bien que l'idée de décloisonnement amène plusieurs enjeux, notamment celui des rapports asymétriques entre les enseignants de différents ordres, les expériences relatées par les chercheurs se sont avérées instructives pour ceux-ci. En effet, la mise en dialogue apparaît un élément clé pour mieux comprendre les mathématiques qui se font à chaque ordre et comment elles se font de part et d'autre.

- Il a aussi été mis en évidence l'intérêt de travailler sur des thèmes proches des programmes des enseignants des deux ordres. Par exemple, Durand-Guerrier a bien montré comment, à travers des contenus des programmes du secondaire, il est possible de concevoir un enseignement qui satisfait aussi des exigences en logique préalable à l'enseignement supérieur, bien que la logique ne fasse plus explicitement partie des programmes du secondaire. Corriveau a montré que les enseignants du secondaire, en travaillant avec ceux du postsecondaire, ont donné un tout nouveau sens à certaines prescriptions des programmes, plus particulièrement ce qui relève de la composition de fonctions et des opérations sur les fonctions. Ainsi, lorsque des difficultés liées aux transitions sont soulevées par des chercheurs, il n'est pas toujours nécessaire d'en conclure qu'il faut réintroduire tel ou tel contenu dans les programmes. Durand-Guerrier et Corriveau ont montré comment partir du « territoire » de secondaire, il est possible de l'enrichir à partir des résultats de recherche en didactique ou par la collaboration avec des enseignants de l'autre ordre.

- Un lien a été fait entre les difficultés des étudiants dans la transition secondaire-université et les approches d'enseignement privilégiées à l'université. La synthèse a aussi mené à un questionnement à propos de ce qui est attendu comme formation pour enseigner au niveau de l'université. Il a alors été mis en évidence que les attentes des enseignants du supérieur envers les étudiants se formulent en termes d'appropriation conceptuelle des objets mathématiques, or, ces attentes ne sont pas toujours en adéquation avec les moyens pris pour y parvenir. Si la collaboration entre didacticiens et enseignants des ordres primaires et secondaire a permis de mettre en place des approches d'enseignement favorisant la compréhension des élèves, comment se fait-il qu'il soit plus ardu d'intervenir, comme didacticien, auprès des enseignants (mathématiciens) universitaires ? Plusieurs recherches menées en didactique des mathématiques proposent des approches alternatives à la présentation formelle du savoir au niveau de l'université ou mettent de l'avant les difficultés vécues par les étudiants liées aux exigences accrues en termes de formalisme dans le passage à l'université. Pourtant, il semble y avoir une forte résistance dans le milieu de l'enseignement des mathématiques universitaire.

Le deuxième thème à susciter un questionnement traite de **la poursuite de l'investigation des questions de transition sur le plan de la recherche**

- Contraster différentes transitions permet une réflexion théorique et méthodologique sur la façon d'étudier les transitions d'un point de vue didactique. Chesnais, Grenier-Boley, Horoks, Robert ont mis en évidence des invariants et des distinctions entre différents types de transition à partir d'analyse de manuels, mais qu'en serait-il sous l'angle des manières de faire à chaque ordre (Corriveau et Bednarz, 2013), des cultures mathématiques (Artigue, 2004), etc.
- Mettre en lumière la manière de voir les transitions permet une réflexion théorique et méthodologique sur la façon d'étudier les transitions d'un point de vue didactique : sous l'angle des sauts, de ruptures, de vide, de différences, de ressemblances, de continuité, d'une comparaison, d'arrimage, d'harmonisation, d'articulation, etc.
- Dans la discussion synthèse, il a été mis en évidence que les transitions interordres peuvent être abordées à un niveau institutionnel et à un niveau local. La question posée est alors celle du rôle du didacticien dans ces deux contextes distincts. Comment

intervient-il ? En termes de formalisme et de démonstration, en particulier au Burkina Faso, Sawadogo pense que ce serait bien que les didacticiens puissent définir une jonction entre les différents cycles sans forcément changer les programmes.

RÉFÉRENCES

Artigue M. (2004, juillet) Le défi de la transition secondaire/supérieur : Que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine. *Communication présentée au 1er Congrès Canada-France des sciences mathématiques, Toulouse*.

Bednarz N., Janvier B. (1996) Algebra as a problem solving tool : Continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.) *Approches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136).Dordretch : Kluwer.

Brousseau G. (1981) Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques* 2(1), 37-127.

Corriveau C., Bednarz N. (2013). Manières de faire des mathématiques comme enseignants : une perspective ethnométhodologique. *For the Learning of Mathematics* 33(2), 24-30.

MELS (2009) Progression des apprentissages : Mathématiques. *Programme de formation de l'école québécoise*. Québec.

Salin M.-H. (2003) Comprendre les difficultés des élèves à passer de la « géométrie de l'école primaire » à la « géométrie du collège ». In Samida H. (Ed.) *Actes du 2^{e} colloque international Espace Mathématique Francophone* (CD-Rom). Tozeur : Commission Tunisienne pour l'Enseignement des Mathématiques et Association Tunisienne des Sciences Mathématiques.

CARACTÉRISATION DIDACTIQUE DE L'ÉVOLUTION DES CONTENUS A ENSEIGNER LORS DES TRANSITIONS – DEUX EXEMPLES D'UNE MEME NOTION ABORDEE AVANT ET APRES UNE TRANSITION (SYMETRIE ET FONCTION)

Aurélie CHESNAIS*–Nicolas GRENIER-BOLEY**–Julie HOROKS***–Aline ROBERT****

Résumé – Pour comprendre ce qui se joue en mathématiques lors de transitions institutionnelles, nous pensons qu'il est nécessaire de mettre en regard les résultats et difficultés des élèves et les pratiques des enseignants, compte tenu des contenus à enseigner et des contextes scolaires concernés. Mais nous postulons que c'est de la qualité des descriptions (analyses didactiques) de ces contenus que dépend la possibilité d'apprécier suffisamment les pratiques et leurs conséquences sur les activités des élèves. Dans ce travail nous présentons ainsi les éléments d'une caractérisation didactique de l'évolution des contenus à enseigner lors des transitions, en les développant sur deux exemples.

Mots-clefs : transition institutionnelle, analyse didactique, activités des élèves, symétrie axiale, fonction.

Abstract – To understand what is at stake in mathematics during institutional transitions, we believe that it is necessary to compare pupils' results and difficulties with teachers' practices, taking into account the teaching contents and the underlying school contexts. However we assume that the quality of description (didactical analysis) determines the possibility to acknowledge teachers' practices and their consequences on pupils's activities. To this end we present elements of a didactical characterisation of the evolution of teaching contents during transitions and we develop them on two examples.

Keywords: institutional transition, didactical analysis, pupils' activities, reflection symmetry, function

Dans ce travail nous présentons les outils que nous avons construits en vue d'une caractérisation didactique de l'évolution des contenus à enseigner lors des transitions, qui nous paraissent un préalable nécessaire à l'étude plus complète de ce qui se passe notamment dans les classes. Nous donnons en introduction une vue d'ensemble de l'étude à mener, justifiée par notre inscription théorique, puis nous développons l'analyse de l'évolution des contenus sur deux exemples, l'un à la transition école primaire/collège et l'autre à la transition collège/lycée, qui nous permettent de mettre à l'épreuve nos outils sur deux transitions différentes. Il s'agit de revenir à la nature même des notions et à la description de leurs spécificités, pour dégager et différencier ce qui est retenu dans les programmes des deux années concernées, analyser les mises en fonctionnement possibles de ces notions dans les contenus proposés aux élèves en classe, en précisant les niveaux de conceptualisation visés. L'étude des manuels enrichit ces premières analyses, et, dans la

* Universités Montpellier 2 et Montpellier 3 (LIRDEF EA 3749) – France – aurelie.chesnais@univ-montp2.fr
** Université de Rouen (LDAR EA 4434) – France – nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr
*** Université Paris Est Créteil (LDAR EA4434) – France – jhoroks@gmail.com
**** Université de Cergy-Pontoise (LDAR EA 4434) – France – aline.robert@iufm.u-cergy.fr

Chesnais A., Grenier-Boley N., Horoks J., Robert A. (2015) Caractérisation didactique de l'évolution des contenus à enseigner lors des transitions – deux exemples d'une même notion avordée avant et après une transition (symétrie et fonction). In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 970-981.

mesure où leurs contenus peuvent orienter les pratiques des enseignants, elles préparent l'étude de ce qui se passe en classe.

I. INTRODUCTION

De nombreuses recherches soulignent que les moments de transition inter-ordres en mathématiques sont cruciaux à plusieurs égards et qu'ils sont révélateurs de différents types de ruptures. Dans de nombreux cas, c'est la question de l'adaptation des élèves à la nouvelle structure qui est abordée, avec des augmentations ou des accélérations d'échec scolaire pour certains élèves (notamment liées à l'origine sociale mais pas seulement) ainsi que des accélérations de réussite pour certains autres élèves.

Pourquoi ou pour quoi étudier du point de vue didactique une transition inter-ordre particulière ? L'enjeu serait ici pour nous de trouver des pistes pour faciliter le passage des élèves dans les classes supérieures au moment de cette transition, et pour cela, ne pas se limiter à ce qui est attendu au niveau supérieur mais questionner des différences qui peuvent être sources de perturbations pour les élèves, en étudiant les contenus et les logiques de pratiques des enseignants des deux ordres considérés. Dans cette contribution, nous nous intéressons aux transitions école/collège (E/C) et collège/lycée (C/L) en France.

1. Aspects institutionnels des transitions école/collège et collège/lycée en France

Dans cette contribution, nous restreignons notre propos au système éducatif français même si les mêmes questions ont du sens dans de nombreux pays. En France, l'enseignement obligatoire est divisé en trois ordres distincts : l'*école élémentaire* (cinq niveaux, élèves de 6 à 11 ans), le *collège* (quatre niveaux, élèves de 12 à 15 ans) puis le *lycée* (trois niveaux, élèves de 15 à 18 ans). Nous considérons seulement la voie *générale* du lycée (et non les voies technique ou professionnelle).

Les deux transitions auxquelles nous nous intéressons sont à la fois des transitions inter-niveaux et inter-ordres, donc définies d'abord par une modification institutionnelle et structurelle : passage du CM2 à la sixième (de l'école primaire au collège), passage de la troisième à la seconde générale (du collège au lycée général). Ces deux transitions n'ont cependant pas les mêmes caractéristiques. D'une part, entre la troisième et la seconde générale, une orientation des élèves se fait après une évaluation nationale dont la préparation peut influencer les contenus travaillés ; ce ne sont pas les élèves les plus en difficulté que l'on retrouve en seconde générale, tandis qu'entre le CM2 et la sixième il y a moins de sélection. D'autre part, si les enseignants de troisième et de seconde ont généralement suivi la même formation initiale – ce sont des professeurs de collège et lycée spécialistes de mathématiques qui ont passé des concours similaires –, ce n'est pas le cas des enseignants de l'école élémentaire et du collège, ceux de l'école élémentaire ayant suivi une formation généraliste et passé des concours différents de ceux du collège. Enfin il y a généralement peu de communication entre les écoles et les collèges.

2. Un point de vue didactique sur les transitions

Comprendre ce qui se joue à l'intérieur des classes et penser des alternatives peut passer par une entrée didactique (même si celle-ci ne peut suffire à prendre en charge toutes les difficultés liées aux transitions). Les travaux antérieurs menés sur les questions de transition en mathématiques les abordent en général sous l'angle des difficultés des élèves, ou des comparaisons des contenus enseignés, montrant par exemple les changements conceptuels ou les ruptures (voir par exemple Salin 2003 ou Grugeon 1997). En didactique des mathématiques, le travail de Colomb et al. (1987) est un des rares à tenir compte aussi des enseignants, mais ces auteurs ne s'intéressent qu'aux représentations qu'ont les enseignants des mathématiques et de leur enseignement et mettent en évidence essentiellement des similitudes entre enseignants de CM2 et de sixième. Plus récemment, Bednarz et al. (2009), dans une perspective d'articulation entre les deux ordres d'enseignement (école et collège), pointent eux aussi la nécessité de prendre en considération le point de vue des enseignants.

Nous nous intéressons ici à des notions mathématiques dont l'apprentissage et la conceptualisation[1] sont longs, et qui mettent en jeu des enseignements qui commencent avant une transition inter-ordre (au moins une année) et se poursuivent au-delà. Nous admettons plusieurs hypothèses générales justifiant l'étude :

- cette poursuite de l'enseignement, après la transition, se fait d'une autre manière, et les différences peuvent être mises en relation avec certains échecs ;

les transitions révèlent certains échecs, davantage que les autres passages d'un niveau au suivant ; en particulier les publics défavorisés, fragiles, sont susceptibles de réagir plus négativement encore à des changements qui sont en jeu dans les transitions : changements de rythme, changements d'attentes sur les investissements des élèves, changements liés aux mathématiques à mettre en fonctionnement (implicites ou non) qui sont conséquence de la « différence » entre les enseignants concernés. Ces deux hypothèses s'appuient d'une part sur des constats tirés d'échanges avec les enseignants du niveau supérieur dans la transition, qui s'étonnent des difficultés de certains de leurs élèves et d'autre part sur le fait qu'il y a effectivement de grandes différences dans les exercices proposés entre les deux niveaux d'une transition s'agissant de ce que l'on propose aux élèves ou de ce que les enseignants attendent d'eux (Benzekry et al. 2011). Pour étudier les transitions, le travail du didacticien consiste à caractériser les notions visées à chaque niveau (nature, place dans les programmes, attentes, difficultés), en déduire les évolutions entre les deux niveaux, puis réfléchir aux scénarios possibles et analyser les déroulements en classe, en prenant en compte tout ce qui peut avoir une influence sur les activités des élèves (ce dernier point n'étant pas abordé ici faute d'avancée suffisante dans cette partie de la recherche).

L'évolution des contenus entre deux niveaux peut être analysée suivant plusieurs axes :

- en termes d'objets de savoir à enseigner : les notions visées sont-elles définies et représentées de la même manière ou en tout cas dans une continuité des deux côtés de la transition ? qu'est-ce qui va permettre aux élèves de reconnaître les notions déjà abordées l'année précédente ?
- en termes de tâches : on peut supposer une augmentation dans la complexité des tâches proposées aux élèves (suivant les différentes adaptations demandées, et les initiatives potentiellement laissées aux élèves dans la résolution), mais on peut aussi étudier si les tâches proposées sont plus ou moins nombreuses et variées.
- en termes de niveaux de conceptualisation visés, dégagés à partir de ce qui précède et des programmes, en s'intéressant en particulier aux caractères objets et outils des notions, au travail attendu sur les cadres et registres, au niveau de rigueur attendu (par exemple dans le vocabulaire employé, le statut et la généralité de ce que l'on affirme), et en précisant sur toutes ces dimensions les liens entre ancien et nouveau, tant au niveau des notions que des tâches et des modes de raisonnement, tout ceci participant à

[1] Nous associons à la conceptualisation une certaine disponibilité des connaissances, outils et objets et leur réorganisation dans les acquis antérieurs.

la fois à la complexité des tâches proposées aux élèves, et à la richesse de ce qui leur est proposé pour apprendre.

- en termes de difficultés répertoriées d'élèves de chaque niveau scolaire.

Une analyse des programmes et des manuels des niveaux considérés est menée à cette fin, précédée d'une analyse épistémologique des notions visées dans laquelle on intègre ce qu'on sait des élèves. C'est la partie qui sera illustrée ci-dessous sur deux exemples contrastés.

II. DEUX EXEMPLES D'ETUDE DE CONTENUS

Nous avons choisi de travailler sur des notions communes aux deux niveaux de la transition pour faciliter la comparaison (mais pas communes aux deux transitions, faute de trouver des notions communes aux programmes scolaires des 4 niveaux) : pour la transition CM2/6ème, la symétrie, et pour la transition 3ème/2nde, les fonctions. Ce sont des notions donc la conceptualisation n'est pas simple, comme nous le détaillons ci-dessous, en nous appuyant sur des études de chaque notion d'un point de vue épistémologique et institutionnel.

La notion de **symétrie axiale** fait partie des programmes des deux niveaux, où se négocient les enjeux du passage à une géométrie plus « théorique ». Quant aux **fonctions,** il s'agit d'une notion complexe, nouvelle pour les élèves de 3ème, même si leur apprentissage repose sur un grand nombre de prérequis (algèbre, lecture graphique), ce qui nous amène à regarder les liens qui pourront être faits pour à la fois s'appuyer et rompre avec les connaissances anciennes. De plus les fonctions font l'objet d'un exercice au Brevet des Collèges en fin de 3ème et prennent une place importante dans le programme de 2nde et dans la suite de la scolarité au lycée dans les cursus scientifiques ou non.

1. *Évolution des contenus : analyse épistémologique des notions choisies*

<u>Symétrie</u>

La symétrie axiale n'est pas seulement un concept mathématique, mais aussi, pour reprendre les termes de Vygotski (1934), un concept quotidien (Chesnais 2012). Le travail scolaire sur cet objet nécessite une articulation de ces deux aspects. Par ailleurs, nous distinguons la symétrie comme propriété d'une figure (aspect statique) et comme transformation géométrique (aspect dynamique) (Chesnais 2012). Mathématiquement parlant, l'aspect dynamique précède l'aspect statique, dans la mesure où l'existence d'un axe de symétrie dans une figure est la conséquence de l'existence d'une symétrie la conservant. En revanche, dans le concept quotidien, l'aspect dynamique est presque absent, excepté dans le mouvement de pliage, mais dans ce cas, une figure symétrique est une figure telle qu'une de ses moitiés est l'image de l'autre: le caractère symétrique n'est pas associé à l'invariance globale. Par ailleurs, l'association de la symétrie au pliage et au miroir (notamment du point de vue quotidien), renforce une conception erronée de la symétrie comme transformation d'un demi-plan dans un autre. Cette conception erronée, de même que le fait de ne pas articuler les aspects statique et dynamique de la symétrie n'empêche pas de réussir la plupart des tâches proposées à l'école, comme la construction du symétrique d'une figure située d'un côté de l'axe, ou trouver les axes de symétrie de figures élémentaires, mais l'articulation des deux aspects représente une composante de l'accès au concept mathématique. Certaines tâches permettent de travailler ces éléments : par exemple, construire la symétrique d'une figure coupée par l'axe ou compléter une figure pour qu'elle admette un axe de symétrie à partir de morceaux situés de part et d'autre de l'axe nécessitent de relier les aspects statique et dynamique de la symétrie ainsi que de dépasser la conception de la symétrie comme transformation d'un demi-plan dans un autre dans un seul sens.

Fonction

Une fonction est définie comme un processus qui à chaque nombre d'un ensemble donné associe un nombre et un seul. Elle peut être exprimée au moyen de différentes représentations au sein de différents registres (Duval 1993) :

- dans le registre algébrique, avec une expression algébrique, valable pour tout x d'un ensemble donné, dans laquelle x est une variable, et pas un nombre générique ou une inconnue comme c'est généralement le cas des équations étudiées jusque-là en algèbre;
- avec une formule qui donne le calcul à effectuer à partir de tout nombre x de l'ensemble de départ, et peut s'écrire globalement avec un formalisme nouveau par rapport à celui des expressions algébriques et des programmes de calcul : $f : x \to f(x)$;
- dans le registre numérique, sous forme d'un tableau de valeurs, qui donne un certain nombre de couples de nombres, formés d'un antécédent (nombre de départ) et de son image (le nombre que f lui associe), ce qui donne une représentation très ponctuelle et partielle de la fonction, puisqu'on ne peut pas en déduire en général d'autres couples de points;
- dans le registre graphique, à l'aide d'une courbe qui représente la correspondance entre les nombres de départ et d'arrivée, et permet en particulier d'observer les variations de la fonction (la façon dont f(x) se comporte lorsque x augmente, et réciproquement), ainsi que des propriétés de la fonction (parité, continuité, monotonie) qu'on n'impute généralement pas directement à une expression algébrique ou à un programme de calcul;
- il existe enfin aussi un registre formel, dans lequel on considère la fonction sans en donner une formule ni une représentation graphique, mais en la situant parmi des types de fonctions ayant certains attributs (affines, continues, croissantes…) ; certaines propriétés pouvant s'énoncer dans ce registre formel sans passer par les autres registres (comme la monotonie de la somme de deux fonctions croissantes, que l'on peut prouver en passant par le cadre algébrique par exemple).

La compréhension de la notion de fonction repose donc sur l'appropriation d'une articulation de cadres et registres qui, si elle se limite à une juxtaposition, ne permet peut-être pas de comprendre le sens de la notion et les potentialités de chaque cadre pour exprimer certains aspects d'une fonction et résoudre des problèmes mettant en jeux des fonctions (cf. Douady 1986). De plus les registres ne sont pas congruents, et le vocabulaire utilisé dans chaque cas n'est pas forcément le même (par exemple : « *la fonction f est positive* » et « *la courbe représentative de f est au-dessus de l'axe des x* ») ce qui peut renforcer les difficultés des élèves, surtout s'ils n'ont pas des occasions de prendre des initiatives en ce qui concerne le choix d'un registre pertinent ou le passage d'un registre à un autre, qui peut se faire de manière très automatisée (par exemple, remplir un tableau de valeurs à partir de la formule ou du graphique).

Cette acquisition de la notion repose aussi sur un certain nombre de prérequis liés au calcul numérique, à l'algèbre et à la gestion de données graphiques (dont on suppose la disponibilité pour pouvoir aborder les fonctions), mais on ne peut pas dire qu'elle prolonge ces notions, ce qui pose la question du lien de cette notion avec l'ancien. Qu'apporte ici la notion de fonction ? Que peut-on faire avec les fonctions qu'on ne peut pas faire sans ? Quel nouveau type de problème permettent-elles de résoudre (ou quel problème déjà connu permettent-elles de résoudre plus simplement ?). La notion de fonction est-elle alors Formalisatrice, Unificatrice, et/ou Généralisatrice (notion FUG) ? (cf. Robert 1998)

Pour ces deux notions, plusieurs conceptions sont possibles, reposant sur différents aspects et représentations, et l'on peut craindre que si cette variété n'est pas investie de la même façon de part et d'autre de la transition, les objets enseignés l'année passée ne soient pas facilement reconnus par les élèves au niveau supérieur.

2. *Évolution des contenus : analyse des programmes*

En France, les programmes scolaires « définissent les connaissances essentielles et les méthodes qui doivent être acquises au cours du cycle par les élèves ». C'est un cadrage national pour les manuels et les enseignants, pour organiser les enseignements.

Les contenus des programmes sont très peu différents en cycle 3 et en sixième en mathématiques. Toutefois, en géométrie, un changement du statut des objets doit être initié dès la classe de sixième pour permettre une entrée dans la géométrie déductive. La symétrie orthogonale est un des objets emblématiques de cette évolution dans le programme de sixième (Chesnais 2011).

En ce qui concerne les fonctions dans les programmes de 3ème et de 2nde, on peut noter de nombreux apports en 2nde par rapport à la 3ème :

- la définition de la notion de fonction est un objectif d'apprentissage pour la 2nde mais pas pour la 3ème, où la notion est proposée sans être rigoureusement définie dans son seul aspect « correspondance »[2] ;
- en 2nde on rajoute la notion de domaine de définition d'une fonction (donc un nouveau formalisme attaché à l'objet) ;
- on rajoute aussi de nouveaux problèmes, liés à l'étude qualitative des fonctions (variations, extremums sur un intervalle) ;
- on trouve aussi de nouveaux objets : les fonctions carrée, inverse, polynomiales de degré 2 ou homographiques (alors que le programme de 3ème ne propose que les fonctions affines) ;
- enfin, on trouve de nouveaux outils en 2nde, avec la résolution graphique d'équations et d'inéquations, pour résoudre des problèmes déjà abordés.

En 3ème, seule la notion les calculs d'images et d'antécédents sont proposés dans les programmes, et on peut penser que les manuels proposeront donc majoritairement ce type de tâche. La variété des tâches possibles est a priori plus grande en 2nde. D'après la lecture des programmes, on enrichit l'étude des fonctions par un grand nombre de caractéristiques nouvelles qui permettent peut-être d'en faire une étude plus globale que celle possible en 3ème avec le travail ponctuel sur image et antécédent.

Donc pour chacune des deux notions étudiées ici, on retrouve à la transition concernée des changements importants, aussi bien quantitatifs (variété des tâches proposées) que qualitatifs (changement de paradigme géométrique, de statut outil/objet), qui peuvent être à l'origine de difficultés pour les élèves. On conçoit que l'accompagnement de l'enseignant peut aussi intervenir, ne serait-ce que pour éclaircir ou non les changements attendus dans le travail des élèves (même si nous n'abordons pas ici cet aspect).

[2] Ce n'est pas un attendu du programme de 3ème que de présenter la notion de fonction sous ses autres aspects (dépendance, variation voire covariation).

3. Analyser les manuels : premiers éléments

Il s'agit d'une autre entrée dans les niveaux de conceptualisation visée, qui permet aussi d'introduire les études ultérieures de pratiques.

En France, il n'existe pas de manuel national : à chaque niveau, un grand nombre d'ouvrages sont disponibles, publiés par différents éditeurs. Les auteurs ont des statuts variés : professeur des écoles ou de collège et lycée, inspecteurs, formateurs d'enseignants ou chercheurs et ils choisissent les contenus librement, tout en respectant des critères commerciaux (nombre de pages, poids du manuel, conformité aux programmes et aux habitudes des enseignants). Dans les écoles, le choix du manuel utilisé peut revenir aux enseignants, de manière individuelle ou collective, ou à l'établissement.

Bien entendu on ne peut pas analyser les manuels comme on analyserait un scénario d'enseignement, car l'histoire ne dit pas quelle utilisation en sera faite, et en particulier :

- quels choix dans la multitude d'exercices.
- quelle dynamique (liens, allers-retours) entre cours et exercices.

Mais on peut supposer que les contenus des manuels constituent l'éventail de ce qui est à la disposition des enseignants pour faire la classe, et qu'une absence (de tâche, de discours, de rigueur mathématique) dans la plupart voire la totalité des manuels entraîne cette même absence dans ce qui est proposé par les enseignants.

4. Analyser les manuels : méthodologie

De manière générale, on va s'intéresser non seulement aux objets présentés dans les manuels, mais aussi aux aspects de ces objets privilégiés et à la façon dont ils sont travaillés (introduits, formulés, comment et pour quoi faire), à travers ce qui participe selon nous à leur conceptualisation :

- l'introduction de la notion : comment se fait-elle, elle est motivée par quoi ? quel nouveau est introduit et pour faire quoi, quelle raison d'être dans les programmes de ce niveau ? Cela amène à se pencher sur plusieurs points :
  - le lien avec l'ancien et les apports par rapport à l'ancien ;
  - le caractère outil attendu pour résoudre des problèmes.
- les cours : quelles définitions et propriétés sont données, quel vocabulaire est utilisé, avec quelle rigueur mathématique, quels exemples sont développés, ce qui amène aussi à regarder des éléments propres à chaque notion (registre, paradigme) compte tenu de l'analyse qui en a été faite, et des points qui ont été identifiés comme potentiellement sensibles pour les apprentissages des élèves :
  - **pour la symétrie**, cela nous amène à regarder comment sont travaillés les conceptions erronées, les aspects statique et dynamique de la symétrie, la manière dont le travail sur ces notions s'inscrit dans une logique d'initiation à une géométrie plus théorique, notamment en lien avec la distinction entre dessin et figure, en questionnant aussi quelle « mathématisation » des objets est visée en sixième.
  - **pour les fonctions** cela induit de regarder les apports du nouveau par rapport à l'ancien à travers les liens ou ruptures qui sont explicitement faits entre les deux aspects (comment on peut appréhender le fait que la fonction n'est pas « juste » une expression algébrique ou un graphique ?), les différents registres et leur articulation (comment présente-t-on les propriétés des fonctions dans les différents registres, indépendamment ou non) ? comment les met-on en parallèle,

voire en concurrence ? ou bien choisit-on un registre privilégié pour présenter chaque propriété ?), le formalisme introduit et ce qu'on en fait effectivement, le caractère global/ponctuel qui donne à voir ou non la fonction dans toute sa généralité, mais aussi le statut de la variable, et en particulier sans la notion de variation en 3ème et enfin la nature des fonctions, en réalisant un « herbier » pour voir ici aussi une variété ou non.

- les tâches : quelle utilité de la notion visée et pour résoudre quoi ? quelle variété des exercices, et quelles éventuelles tâches manquantes qui nous sembleraient pertinentes *a priori* pour donner du sens à la notion (par exemple des exercices induisant le passage du registre graphique au registre algébrique pour les fonctions), quelle complexité des tâches en terme d'adaptation à faire pour les élèves, en particulier des types de tâches et adaptations spécifiques à la notion que l'on vise :
    - **pour les fonctions**, quel travail sur les registres : mise en concurrence, limite ? ou juste traduction d'un registre à l'autre ? quelles initiatives de choix ou de changements de registres pour les élèves dans les exercices ? est-ce toujours forcé par l'énoncé ?
    - **pour la symétrie**, nous avons regardé la présence et les caractéristiques des tâches de construction de symétriques de figures, les tâches de reconnaissance d'axes de symétrie de figure, ainsi que plus particulièrement les tâches qui permettent de travailler sur l'articulation des aspects statique et dynamique, à savoir les tâches qui consistent à compléter une figure pour qu'elle admette un axe de symétrie ou à reconnaître des axes de symétrie sur des « figures doubles » ou encore des tâches qui permettraient de travailler sur l'aspect statique en introduisant l'idée d'invariance globale.

5. *Différentes analyses de manuels : nos résultats en parallèle, puis en perspective*

Nous avons regardé :

- les manuels d'un même niveau pour chercher des régularités ou une grande variabilité ;
- les manuels des deux niveaux pour repérer des différences liées à la transition.

On peut noter une différence a priori entre les deux transitions, à savoir que les manuels de CM2 sont souvent organisé de manière assez linéaire, les notions n'étant pas regroupées par chapitre, mais réparties page après page sur toute l'année (pour permettre une progression éventuelle en suivant les pages du manuel) alors que ce n'est pas le cas en 6ème. Il n'y a pas de différence aussi marquée entre les manuels de de 3ème et de 2nde, même si la variabilité est plus grande en 2nde.

<u>Symétrie</u>

Dans les deux niveaux, la prise en considération des conceptions erronées (par des tâches spécifiques ou dans la construction des contenus en général) est très inégale.

Concernant l'articulation entre les aspects statique et dynamique de la symétrie, seuls cinq manuels sur les huit étudiés contiennent au moins une tâche consistant à compléter une figure par symétrie, malgré les recommandations explicites des programmes. Cinq sur huit également contiennent des tâches concernant l'identification d'axes sur des figures doubles. Seuls deux manuels sur huit contiennent ces deux types de tâches. Ces deux manuels sont également ceux qui incluent un travail permettant de mettre en cause la conception erronée de transformation d'un demi-plan dans un autre. L'un d'eux propose également une première approche des propriétés de la symétrie qui seront retravaillées dans un contexte plus théorique en sixième.

La moitié des manuels de sixième sépare ce qui correspond à chacun des aspects de la symétrie dans deux chapitres différents. Trois d'entre eux mentionnent des « figures doubles » dans le chapitre à propos des axes de symétrie : cela favorise l'établissement du lien entre les deux aspects. A propos de l'aspect statique également, trois d'entre eux limitent le travail à la reconnaissance perceptive (comme à l'école primaire). La moitié des manuels mentionne l'invariance globale, mais parfois d'une manière peu logique : l'un la mentionne avant de parler de la transformation; trois relient le pliage et l'invariance globale mais seul l'un d'entre eux la mentionne dans la leçon, tandis que cela n'est abordé qu'en exercice dans les deux autres. Tous les manuels contiennent des tâches de construction de symétriques de figures coupées par l'axe.

Des tâches permettant l'entrée dans une géométrie plus théorique, nécessitant des raisonnements sur les figures indépendamment des dessins sont présentes dans tous les manuels de sixième, à propos de la symétrie. Toutefois, seul un manuel prend en charge explicitement une clarification du changement de statut des objets et des rapports entre observation, mesurage et démonstration, tandis que cela reste implicite dans les autres.

En conclusion, nous pouvons affirmer que les approches des manuels peuvent être très différentes et qu'elles ne prennent pas en considération la transition de la même manière. Notamment, certains manuels de CM2 choisissent d'introduire des notions ou tâches qui correspondent aux attentes des programmes de 6ème, tandis que d'autres font d'autres choix : par exemple, Euromaths prépare la transition en travaillant précisément sur les difficultés, conceptions erronées et spécifiquement le sens des concepts (aspects statique et dynamique de la symétrie). Selon les manuels, les conceptions erronées sont travaillées ou non. Quant aux manuels de sixième, certains considèrent qu'un certain niveau de conceptualisation a déjà été atteint par les élèves, en contradiction avec ce qui est effectivement abordé dans les manuels de CM2.

Le travail d'identification des acquis des élèves et de dépassement de certaines conceptions erronées reste donc de la responsabilité du professeur.

Fonction

En 3ème, on trouve un étiquetage variable et flou des définitions et propriétés (et pas de définition de fonction, conformément aux programmes). C'est moins vrai en 2nde, où les quantifications sur la variable sont malgré tout toujours assez peu présentes. On constate en 3ème un formalisme peu exploité et un caractère global de la fonction qui a peu d'occasions d'être rencontré, faute de pouvoir faire travailler sur les propriétés des fonctions telles que la monotonie ou la parité, qui ne sont pas au programme de 3ème. Il n'y a pas d'articulation ni de mise en relief des registres dans les manuels de 3ème qui présentent la notion en parallèle dans les différents registres sans évoquer les potentialités et les limites de chacun, ni même les liens (exprimer un même phénomène dans plusieurs registres, choisir un registre pertinent pour résoudre un problème). Les propriétés sont généralement exprimées dans un seul registre à la fois.

En 2nde, on trouve un nombre très important d'exercices variés (souvent plus d'une centaine par chapitre !) surtout par rapport à la 3ème où on trouve des tâches assez répétitives, en particulier sur le calcul d'image et d'antécédent (passage indiqué du registre graphique ou algébrique au registre numérique, généralement sans initiative pour les élèves) et en nombre plus limité (à relier avec la préparation au Brevet des Collèges ?). Il y a peu de variabilité d'un manuel de 3ème à l'autre sur ce point.

En 2nde on trouve une plus grande variété entre les manuels et sur la façon dont ils motivent l'introduction des fonctions ; avec quelques problèmes d'optimisation dans certains manuels. Le cours ne semble pas beaucoup plus riche sur l'articulation des registres, mais la variété des exercices permet davantage un travail de passage d'un registre à l'autre, avec plus d'initiatives (potentiellement moins répétitif, moins automatisable ?)

Finalement on peut noter une plus grande variabilité des manuels de 2nde par rapport à ceux de 3ème, peut-être à rapprocher des contraintes liées au Brevet en fin de 3ème et, a contrario, des orientations différenciées des élèves après la 2nde. Mais l'articulation des registres n'est pas explicitement faite, en 3ème comme en 2nde ; en revanche le formalisme, qui permet en particulier de voir le caractère global de la fonction, n'est pas très utilisé en 3ème alors qu'il l'est déjà plus en 2nde. Sur ce point, on ne constate donc pas d'anticipation en 3ème sur ce qui sera fait en 2nde, à relier aux préconisations des programmes, et, encore une fois, à la préparation du brevet (avec des tâches ponctuelles sur image et antécédent et des passages indiqués du registre algébrique (ou numérique) au registre graphique).

Dans les deux cas on note une absence d'articulation des aspects qui caractérisent ces notions, plus grande au niveau inférieur des deux transitions. On peut y voir aussi un manque fréquent de prise en compte de ce qui sera traité au niveau supérieur : peu de travail sur les conceptions erronées liées à la symétrie pour préparer à l'entrée en 6$^{\text{ème}}$ d'une part, et d'autre part un travail plutôt technique sur les fonctions en 3$^{\text{ème}}$ (recherche d'image / d'antécédent) qui ne donne probablement pas à voir le caractère global de l'objet fonction ni son caractère outil, et n'assure pas aux élèves d'arriver en 2$^{\text{nde}}$ en ayant réellement abordé le concept de fonction, contrairement à ce que pourraient penser les enseignants de lycée. Dans les deux cas, l'analyse des programmes scolaires respectés par les manuels analysés explique en partie ces écarts.

III. CONCLUSION : VERS QUELLES ETUDES DES PRATIQUES EFFECTIVES ?

1. Comparaison de « ce qu'on trouve en classe » et de «ce qui est/n'est pas dans les manuels » : le cas de la symétrie

L'analyse des manuels nous informe sur l'éventail des possibles (en ce qui concerne les cours et les tâches) à la disposition des enseignants, mais nous ne pouvons pas en déduire comment ils sont effectivement utilisés par les enseignants, qui peuvent s'appuyer sur un ou plusieurs manuels, ou sur aucun, avec des différences éventuelles sur l'usage des ressources.

Pour la symétrie, on se demande quelle prise en charge par les enseignants des enjeux identifiés comme problématiques a priori : comment les enseignants de CM2 « préparent » à la sixième et comment les enseignants de sixième tiennent compte des acquis des élèves, comment ils articulent à leurs connaissances anciennes. Notamment, nous nous intéressons au travail sur les conceptions erronées, les deux aspects de la symétrie et leur articulation.

De premiers résultats (Chesnais & Munier 2013) indiquent que les observations en classe confortent les analyses faites dans les manuels. On constate une grande diversité dans ce qui est abordé ou non en CM2 et sur la nature du travail demandé aux élèves (axé sur l'acquisition d'algorithmes relevant éventuellement plus de la sixième ou bien sur un travail plus conceptuel, notamment sur les conceptions erronées). En sixième, on retrouve une non-identification d'un certain nombre d'enjeux, considérés comme non problématiques ou déjà acquis (à tort), en particulier sur la mathématisation des objets, l'introduction de la mesure (le sens même de ce qu'est une mesure, de la notion de précision et d'incertitude), ainsi que l'entrée dans la géométrie théorique (par exemple sur la distinction entre dessin et figure).

Pour donner un exemple précis, les enseignants de sixième prennent manifestement pour acquis le lien entre symétrie et pliage, y compris en considérant que les élèves maîtrisent des techniques de construction ou de vérification de symétriques par pliage ou usage du calque alors que cela n'est pas travaillé dans toutes les classes de cycle 3.

On peut faire l'hypothèse que l'on risque de retrouver dans beaucoup de classes de 2[nde] cette même absence de prise en compte des enjeux liés aux fonctions (changements de registre ou de point de vue) et non encore acquis en fin de collège.

2. *Comment analyser les pratiques ?*

Côté enseignants, il s'agit de reconstituer les pratiques individuelles et dans une certaine mesure collectives (cf. régularités, problèmes de la profession) – dans leur complexité. C'est ici une méthodologie différente de celle utilisée pour l'analyse des manuels, car, même si elle tient compte des spécificités des notions mathématiques énoncées plus haut, elle s'attache à des études de cas, dans la mesure où nous ne savons pas encore mettre en œuvre des études qualitatives à grande échelle sur les enseignants comme nous pouvons le faire sur les manuels.

Les outils de caractérisation didactique développés ici nous permettent d'anticiper des difficultés probables pour les élèves, liées à ces notions et à leur traitement différent à chaque niveau, d'affiner nos observations en classe pour repérer la façon dont les enseignants prennent ou non en compte ces difficultés, et mesurer ainsi des écarts plus ou moins grands entre les deux années. On peut supposer que le rôle des moments d'exposition des connaissances sera décisif à cet égard d'autant que les habitudes institutionnelles diffèrent (peu développés en CM2, présents en 6ème et en 3ème, importants en 2nde).

REFERENCES

Bednarz N., Lafontaine J., Auclair M., Morelli C., Leroux C. (2009) Pour une plus grande harmonisation dans la transition du primaire au secondaire en mathématiques. *Bulletin de l'AMQ* XLIX (1), mars 2009.

Benzekry B., Fauvé C., Robert A., Rousse S., Vuong M., Zélicourt C. (2011) La transition Troisième/Seconde. Constats et questions à partir de la comparaison d'exercices variés des deux niveaux. *Repères IREM* 83, 5-37.

Chesnais A. (2011) Apprentissages mathématiques en sixième : contextes différents, pratiques différentes et inégalités. *Revue Française de Pédagogie*, 176, 57-72.

Chesnais A. (2012) L'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième : des contraintes, des ressources et des choix. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32(2), 229-278.

Chesnais A., Munier V. (2013) Learning and teaching geometry at the transition from primary to secondary school in France: the cases of axial symmetry and angle, *Proceedings CERME 8*, 595-604.

Colomb J., Guillaume J.-C., Charnay R. (1987) Articulation école/collège, quels contrats disciplinaires en mathématiques. *Revue Française de Pédagogie* n°80, 25-36.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5-31.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, 37-65.

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques* 17(2), 167-210.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2), 139-190.

Robert A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 27/3, 271-311.

Robert A. (2008) Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed .) *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants* (pp. 31-69). Octarès, Toulouse.

Salin M.-H. (2003) Comprendre les difficultés des élèves à passer de la « géométrie de l'école primaire » à la « géométrie du collège ». *Actes du colloque international « Espace Mathématique Francophone »*. CD-ROM. Tozeur, Tunisie, 19 au 23 décembre.

Vygotsky L. [1934] (1997) *Pensée et langage*. Paris : La Dispute.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ABORDER LES QUESTIONS DE TRANSITION DANS UNE PERSPECTIVE D'HARMONISATION

Claudia CORRIVEAU*

Résumé – La transition entre les mathématiques au secondaire et au postsecondaire est principalement étudiée sous l'angle de la différenciation : des façons de penser distinctes (Tall 1992), des mathématiques de natures différentes (Robert 1998), pour des contenus apparemment communs, des organisations mathématiques qui se distinguent (par exemple Bosch & al. 2004, Gueudet 2004; Winslow 2007); des cultures mathématiques différentes (Artigue 2004), etc. L'idée d'une articulation possible entre les ordres est rarement étudiée. Cette proposition présente une façon de mener d'aborder les questions de transition en introduisant une perspective d'harmonisation, dans laquelle le dialogue entre les enseignants des deux ordres est au premier plan et facilite l'émergence de nouvelles façons de faire des mathématiques à chacun des ordres.

Mots-clefs : Transition secondaire postsecondaire, manières de faire des mathématiques, perspective d'harmonisation, fonctions

Abstract – The transition between secondary and postsecondary levels is mainly looked at in terms of differentiations: different ways of thinking (e.g. Tall 1995); different natures of mathematics (Robert 1998); different mathematical organizations (e.g. Bosch & al. 2004); different mathematical cultures (Artigue 2004); etc. The idea of a possible harmonization between the levels is rarely studied. This paper presents a new way to work on transitional issues, introducing a harmonization perspective in which dialogue between teachers of both levels facilitates new ways of thinking and doing mathematics at their specific levels.

Keywords: Secondary-postsecondary transition, ways of doing mathematics, harmonization perspective, functions

I. INTRODUCTION

Des chercheurs de plusieurs pays soulignent que le passage du secondaire au postsecondaire est sensible pour les élèves qui n'en décodent pas toujours les nouvelles règles du jeu (Tinto 1993; Coulon 1993). C'est le cas notamment en mathématiques où cette transition constitue un enjeu de taille au regard de la réussite des élèves. Au Québec, plusieurs élèves ont des difficultés à cerner les exigences de certains cours à leur arrivée au collégial[1] (Chenard & al. 2007).

* Université Laval – Canada – claudia.corriveau@fse.ulaval.ca

[1] Tout en rejoignant les travaux menés dans d'autres pays sur la transition secondaire supérieur, cette étude s'inscrit dans un contexte spécifique, différent de celui de ces travaux. Au Québec, l'ordre collégial, d'une durée de deux ans (12^e et 13^e années) pour les programmes pré-universitaires (options sciences, sciences de la santé, sciences humaines), et de trois ans pour les programmes professionnels, suit le secondaire et est préalable à l'université. Il est attaché, tout comme

Corriveau C. (2015) Aborder les questions de transition dans une perspective d'harmonisation. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 982-993.

Les moments de transition occasionnent en effet des difficultés importantes chez les élèves (Corriveau & Tanguay 2007; Najar 2011; Praslon 2000; Vandebrouck 2011*a*), mais aussi par leurs enseignants (Corriveau 2007, 2013). Cette transition a été abordée de diverses façons par les chercheurs en didactique des mathématiques. Plusieurs induisent des difficultés de transition par une étude des mathématiques au postsecondaire. Par exemple, Tall (1992, 1995) définit ce qu'est la pensée mathématique avancée en la différenciant des processus cognitifs élémentaires en mathématiques. De ce point de vue, la transition exige une reconstruction cognitive de la part des élèves. D'autres chercheurs s'entendent pour dire que la nature formalisatrice, unificatrice et généralisatrice (Robert 1998) des concepts abordés dans l'enseignement postsecondaire commande un niveau d'abstraction et de généralisation à la source de plusieurs difficultés des étudiants (Edward, Dubinsky & McDonald 2005; Harel & Tall 1991; Luk 2005). C'est en partant de leurs travaux, menés au postsecondaire, que les chercheurs cernent des problèmes et difficultés liés à la transition. D'autres ont considéré les deux ordres en étudiant la transition par le biais d'une comparaison des manuels et des tâches mathématiques des deux ordres autour de contenus spécifiques. Par exemple, en s'appuyant sur la théorie anthropologique du didactique (Bosch & Chevallard 1999) plusieurs chercheurs ont mis en lumière les organisations mathématiques à chacun des ordres. Bosch et al. (2004), Gueudet (2004), Najar (2011) et Winsløw (2007) viennent éclairer sur différents contenus, la nature différente des praxéologie mathématiques en jeu. D'autres études, centrées sur une analyse de tâches à propos d'un même contenu aux deux ordres, ont abordé cette transition par le concept de domaine de travail pour caractériser ces transitions. Vandebrouck (2011*b*) repère ainsi les différents « domaines de travail » (Robert 2003) autour du concept de fonction, du Lycée à l'université, en croisant une étude des travaux en didactique des mathématiques et une analyse des programmes, des manuels et des notes de cours.

Peu de travaux de recherche en didactique des mathématiques ont abordé la transition sous l'angle d'un rapprochement entre les ordres. Parmi les chercheurs qui se sont intéressés à cette question de l'articulation entre les deux ordres secondaire postsecondaire, figurent les études de Bloch (2000) et Praslon (2000) en regard de l'enseignement et l'apprentissage de l'analyse. Bloch (2000) a conçu et expérimenté deux situations d'enseignement dans une classe à la fin du lycée en France, documentant l'apport de celles-ci pour l'apprentissage des élèves. Ces résultats ont été mis en relation avec les connaissances préalables que requiert le cours d'analyse à l'université, connaissances qu'elle a mises en évidence par l'analyse de transcriptions de cours et de productions d'étudiants universitaires dans ces cours. Bloch conclut qu'il est possible de mettre en place, pour les élèves de la fin du secondaire, un enseignement de l'analyse à la jonction secondaire-postsecondaire. Quant à Praslon, en plus d'une étude comparée de tâches de manuels du lycée et d'universités en analyse, il a proposé à des étudiants de première année universitaire des ateliers en petits groupes autour de tâches préparant à la transition. Ces ateliers, conçus par le chercheur, ont été élaborés suite à l'analyse comparative des tâches aux deux ordres. Selon Praslon, dans le domaine de l'analyse, le passage du secondaire au postsecondaire s'accompagne d'une accumulation de

---

l'université, à l'enseignement supérieur. Les établissements d'enseignement collégial, créés à la fin des années 1960, sont indépendants des instances secondaires (7e à 11e années) et universitaires et mènent, comme le secondaire et l'université, à une diplômation qui leur est propre (diplôme d'études collégiales, DEC). Les enseignants du collégial ont une formation disciplinaire (maîtrise en mathématiques, en littérature, en histoire géographie, etc) et ont accès à des subventions de recherche. Mais contrairement à l'université, ils ne sont pas tenus de faire de la recherche. Il peut donc paraître délicat de parler du phénomène de transition interordres d'un point de vue international, les institutions scolaires, comme le souligne Gueudet (2008), différant d'un pays à l'autre.

micro-ruptures. Praslon confirme l'existence d'un « vide didactique »[2] que les étudiants doivent eux-mêmes combler dans la transition. Les expérimentations réalisées par Bloch, au secondaire, et Praslon, à l'université, sont des tentatives en ce sens pour ne pas laisser ce vide didactique à la seule charge des élèves, et faciliter le passage du secondaire au postsecondaire, en lien dans ce cas avec l'apprentissage de l'analyse.

Remarquant que les enseignants sont peu présents dans les travaux à propos de la transition, dans notre recherche, nous avons voulu considérer leurs points de vue pour travailler autour de cette question. Leur expérience d'enseignement peut certainement être mise à profit dans l'exploration de ce qui peut être fait à leurs niveaux respectifs pour surmonter les problèmes de transition. Pour cette raison, nous avons également engagé un dialogue entre les enseignants des deux ordres. Ces enseignants ne travaillent habituellement pas ensemble; ils vivent dans des mondes différents ou dans des cultures mathématiques différentes (Artigue 2004). Ils ont peu d'occasions d'échanger autour de l'enseignement des mathématiques. Comme le soulève Bednarz (2008) en ce qui a trait à la transition primaire secondaire, et qui est tout aussi pertinent pour la transition secondaire collégial, « un tel isolement est peu propice à une transition harmonieuse pour les élèves » (p. 2).

Ces deux considérations (travailler avec des enseignants et engager un dialogue) a permis, d'une part, l'exploration de ce qui se fait aux deux ordres, mais, d'autre part, a permis d'aller plus loin dans une perspective d'harmonisation. C'est ce dont il est question dans cette proposition. Lorsque des enseignants des ordres secondaire et collégial explorent ensemble la transition, de quelles façons l'harmonisation est-elle approchée dans cette exploration ? Comment se développe-t-elle ?

II. UNE RECHERCHE COLLABORATIVE POUR UNE FAVORISER LE DIALOGUE ENTRE DES ENSEIGNANTS DES DEUX ORDRES

Un groupe de six participants (trois enseignants du secondaire et trois enseignants postsecondaires) ont été invités à se joindre à un projet de recherche collaborative, dispositif de recherche dans lequel le chercheur travaille avec les praticiens sur une question liée à leur pratique (Bednarz 2013; Desgagné 2001). Ici, il s'agissait de créer un groupe d'enseignants du secondaire et du collégial autour de la transition. Pour travailler avec les enseignants, un objet précis d'étude lié à leur pratique a été choisi. Comme nous le disions, Artigue (2004) traite de questions de transition en termes de culture mathématique, reprenant les travaux de Hall (1959). Artigue a tenté de caractériser la culture mathématique du secondaire basé sur une analyse de son programme (la partie explicite de la culture). Toutefois, selon Hall, ce sont les « manières de faire » implicites qui conduisent aux plus grandes différences culturelles. Dans la salle de classe, les enseignants font des mathématiques d'une certaine manière et font faire des mathématiques à leurs élèves. Donc, nous avons décidé de travailler sur les questions de transition par le biais des « manières de faire des mathématiques » des enseignants à chaque ordre. Des contenus mathématiques ont aussi été négociés au sein du groupe. Le thème des fonctions a été retenu par les enseignants des deux ordres. Le projet s'est déroulé sur un an. Il y avait des réunions régulières: une réunion pour expliquer le projet et six journées complètes (de 7 heures) pour travailler autour de la transition. Toutes ces réunions ont été enregistrées et transcrites.

[2] Selon l'analyse des tâches qu'a faite Praslon (2000), les tâches du postsecondaire sont tout à fait inhabituelles pour les étudiants qui arrivent du lycée. Du point de vue de l'activité mathématique (comme le degré de généralité, l'usage du formalisme, etc.), ces tâches ne sont pas maîtrisées par les étudiants du Lycée. Or, ces tâches ne font pas l'objet d'une gestion particulière dans la transition, ce qui crée un « vide didactique ».

III. FONDEMDENT THÉORIQUE : L'ETHNOMÉTHODOLOGIE

Dans le cadre de notre recherche, nous avons fait appel à des horizons épistémologiques, théoriques et conceptuels en accord avec notre position initiale, soit celle de considérer les enseignants comme des acteurs clés pour l'étude des transitions (on ne peut s'inspirer de cadres théoriques dans lesquels l'enseignant, ou l'acteur ne serait pas central et où son expertise ne serait pas reconnue). L'ethnométhodologie (Garfinkel 1967) fournit des éléments pertinents pour mieux comprendre, d'un point de vue théorique, comment se constituent les manières de faire des mathématiques des enseignants dans le cadre de leurs pratiques quotidiennes. D'un point de vue terminologique, ethnométhodologie renvoie à « ethnométhodes », et à « logie » et signifie donc l'étude des ethnométhodes. L'ethnométhodologie n'est donc pas une méthodologie de recherche, mais elle sert de fondement conceptuel en se proposant d'étudier les façons de faire banales que les acteurs mobilisent afin de réaliser leurs actions de tous les jours (Coulon 1993).

En ethnométhodologie, on conçoit toute activité socialement organisée comme continuellement en train de se faire, constamment constituée et actualisée par les acteurs : un monde d'interactions sociales perçues et interprétées par les acteurs en continuelles négociation et construction de sens. Dans cette perspective, le point de vue des acteurs est central puisque c'est en assignant un sens à ce qui les entoure qu'ils constituent leur monde social (Coulon, 1993), ou toute activité organisée (comme enseigner les mathématiques pour un enseignant). On accorde en ce sens une grande importance à la rationalité de l'acteur, laquelle selon Garfinkel, « situe le thème central de [ses] recherches : ce caractère rationnel des descriptions d'actions pratiques, vu comme résultat d'une performance pratique et continue » (Garfinkel 1967, p. 13).

À partir du concept central d'ethnométhode, nous avons développé, dans le cadre de la recherche, le concept d'ethnométhodes mathématiques (Corriveau 2013; Corriveau & Bednarz 2013), qui sont les MFM mobilisées par les enseignants dans leur vie de travail quotidiennes. Ces ethnométhodes mathématiques concernent donc l'action : des MFM partagées par des enseignants d'un niveau spécifique, supportées par un *rationnel* et liées à des *circonstances* particulières (des circonstances qui délimitent les MFM). Le concept d'ethnométhode est aussi lié à l'acteur dans la mesure où les manières de faire reposent sur les capacités interprétatives des enseignants qui reconnaissent, constituent et actualisent ce qui signifie que « faire des mathématiques » à leur ordre donné. Cette théorie est susceptible d'être utile dans la compréhension de « manières de faire » familières pour des enseignants d'un même ordre (par exemple quelles sont les MFM en lien avec les fonctions à chaque ordre), mais permet par ailleurs de considérer les nouvelles « manières de faire » susceptibles d'être développées à travers l'exploration conjointe de la transition par les enseignants.

L'exemple des MFM autour des fonctions

Le thème des fonctions a occupé une place prépondérante dans le cadre des rencontres de l'activité réflexive[3] (plus du tiers des séances). Le dialogue a tourné autour des activités habituelles des enseignants en lien avec les fonctions : la chercheuse a présenté les tâches, comme base de discussion, développées autour d'actions que les enseignants posent quotidiennement dans leur pratique (choisir des tâches, anticiper le travail des élèves,

[3] Il a été retenu par les enseignants lors d'une rencontre d'information. Ce contenu apparaît important dans l'activité professionnelle des enseignants du secondaire (il fait partie des programmes de 4e et 5e secondaires, en constitue une partie importante en termes de temps) et dans celle du collégial (il est repris dans les deux premiers cours de calcul différentiel et intégral du cégep). Comme ce contenu est commun aux deux ordres, il était intéressant de s'y intéresser pour comprendre les MFM qui se constituent à propos des fonctions à chacun des ordres.

organiser un enseignement). Avant d'entreprendre un travail d'harmonisation, il nous a fallu comprendre les MFM autour des fonctions à chacun des ordres. Ces MFM ont été explicitées à travers ces tâches et la première partie de notre travail d'analyse a été de mettre en évidence un certain territoire[4] de MFM avec des fonctions à chaque ordre. Le tableau 1 présente un bref aperçu du territoire de chaque ordre (voir Corriveau 2013).

Territoire des enseignants du secondaire	Territoire des enseignants du collégial
MFM Les enseignants impliqués dans la recherche associent une table de valeurs, un graphique ou une expression algébrique à une fonction (à l'étude). Ils esquissent le graphique d'une fonction à partir d'un tableau de valeurs ou une expression algébrique (en utilisant les paramètres, dans la forme canonique). Ils utilisent une certaine symbolisation pour représenter la fonction de base (par exemple, $f(x) = x^2$) et ils introduisent progressivement les paramètres pour représenter toutes les fonctions possibles (dans la famille des fonctions quadratiques par exemple, $f(x) = a(bx-h)^2 + k$).	MFM Les enseignants du collégial ayant participé à la recherche mentionnent qu'ils retracent le comportement de n'importe quelle fonction à partir d'une expression algébrique. Ils mobilisent des outils pour retracer le comportement d'une fonction et pour tracer le graphique. Ils anticipent les comportements limites d'une fonction en tout point, à partir d'une expression algébrique ou d'un graphique.
Rationnel lié à des considérations institutionnelles Les différentes représentations sont considérées comme un moyen de donner un sens à chaque groupe de fonctions à étudier (par exemple une fonction quadratique a ce genre de forme sur un graphique, ce type de variation dans le tableau de la valeur, et est identifiable par ce type d'expression algébrique).	**Rationnel de l'ordre d'exigences institutionnelles** Un des buts du cours de calcul différentiel est de tracer le graphique d'une fonction complexe et donc, d'arriver à comprendre son comportement. De plus, ils veulent préparer les étudiants à des études scientifiques à l'université.

Tableau 1 - *Territoires à propos du travail sur les fonctions (et les représentations) constitué par les enseignants*

Dans le cadre de la deuxième rencontre, nous avons commencé à travailler sur l'harmonisation.

IV. RECONSTRUCTION D'UNE TRAJECTOIRE D'HARMONISATION A PROPOS DES FONCTIONS

De l'analyse, nous avons pu reconstruire une trajectoire d'harmonisation en trois temps : (A) un premier temps dans lequel vont émerger des idées clés qui serviront de tremplin dans la construction qui suivra; (B) un deuxième temps portant sur les modes de représentation (tableaux de valeurs et tableaux de variation) qui sert à enrichir la construction amorcée au temps 1; et (C) un troisième temps d'élaboration de tâches concrètes par les enseignants du secondaire et du collégial. Chaque temps se décline en plusieurs *moments clés* dans cette trajectoire. Dans le cadre de cette proposition, nous présentons le premier temps de la trajectoire qui se décline en trois moments.

La reconstitution de ce premier temps est issue des données provenant de la discussion entre un enseignant du secondaire (Scott) et deux enseignantes du collégial (Corinne et Colette) lors d'une deuxième rencontre.

[4] Le territoire est une métaphore parlante pour signifier l'idée d'une « terre » qu'on organise, qu'on aménage pour y « vivre » (Raffestin, 1981). C'est un espace en continuelle organisation. Autrement dit, les enseignants organisent, de manière cohérente, un territoire familier à propos des fonctions, dans lequel ils se reconnaissent entre enseignants d'un même ordre. Le « voyageur » étranger ne s'y reconnaîtra pas nécessairement.

1. *Moment 1 : émergence d'une première idée clé (importance du registre graphique)*

Ce premier moment de la trajectoire s'est constitué dans des discussions informelles entre les enseignants. L'analyse des échanges fait ressortir progressivement l'importance du registre graphique pour les enseignants et éventuellement les raisons d'un tel choix. Le graphique apparaît pour les enseignants comme un mode « parlant » pour les élèves. Scott relate que ses élèves peuvent résoudre des systèmes de deux équations aisément de manière algébrique, mais qu'ils sont incapables d'interpréter les résultats : « Algébriquement ce qu'on obtient c'est spécial [fait référence à une résolution qui donnerait par ex. 0 = 7] ça fait comme si on s'était trompé. Graphiquement, certains se rendent compte pourquoi : 'ah, c'est parce que c'est parallèle, y'a pas de point de rencontre' ». Ainsi, Scott mentionne qu'il travaille la résolution dans le graphique (en articulation avec la résolution algébrique), un registre « parlant » pour donner sens à l'interprétation algébrique (*donner sens*, rationnel invoqué par les enseignants du secondaire). Lorsque la chercheuse reprend les propos de Sam « donc graphiquement, il y a quelque chose qui 'parle' aux élèves alors qu'algébriquement ça n'est pas nécessairement le cas ? », Corinne enchaîne en relatant un événement dans lequel elle avait demandé aux étudiants de trouver un domaine. Ceux qui avaient utilisé un graphique avaient tous réussi. Elle aussi confirme que le mode graphique est « parlant » pour trouver les caractéristiques de la fonction (ici le domaine). On retrouve donc ce que les enseignants du collégial recherchent dans un mode de représentation (*retracer le comportement en tout point du domaine*, MFM).

Cet élément central restera dans la trajectoire à venir : **celui du mode graphique comme d'un mode « parlant » pour les élèves et les étudiants.** Il s'agit en effet d'un élément sur lequel les enseignants s'entendent (un mode de représentation important aux deux ordres).

2. *Moment 2 : des constatations de part et d'autre et la création d'un contraste et d'un vide à combler*

Lors de la première rencontre, les enseignants parlaient déjà du registre graphique comme d'un registre important dans le contexte des fonctions et la chercheuse avait senti le besoin, en lien avec le travail amorcé, de demander aux enseignants ce que signifiait travailler avec les fonctions à leur ordre. Cette question, lancée dans l'action avait pour but de faire apparaître des MFM en lien avec les fonctions via des attentes et un rationnel, de façon à dégager les éléments importants à chacun des ordres.

La chercheuse a noté au tableau ce qui ressortait globalement (dans ce qui était alors dit) pour le secondaire et le collégial, s'assurant que les enseignants se reconnaissaient bien dans ce qu'elle écrivait (voir figure 1). La chercheuse voulait que cette figure soit utilisée comme base de réflexion dans une perspective d'harmonisation. À gauche, elle a écrit sommairement ce qui se fait au secondaire autour des fonctions, et à droite, ce qui se fait au collégial. La question mise en avant était donc : *comment au secondaire s'approcher du collégial, et au collégial, s'approcher du secondaire ?*

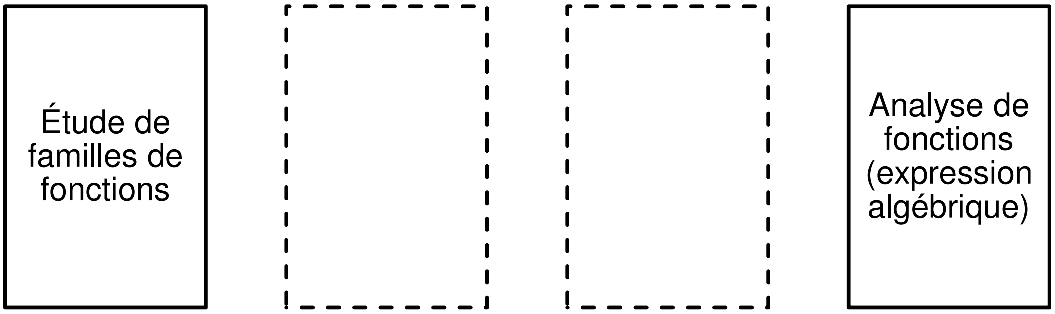


Figure 1 *- Schéma 1 utilisé comme base de réflexion*

Il est intéressant de constater ici que plusieurs façons schématiques de lier le secondaire et le collégial auraient pu être mis en avant par la chercheuse. **Implicitement, en faisant ce schéma, elle met en œuvre une façon de concevoir l'harmonisation (qui se place, pour elle, à chacun des ordres) et essaie d'établir des ponts, de se rapprocher de l'autre.** D'autres schémas auraient en effet été possibles. Par exemple, en mettant ce qui se fait au secondaire et au collégial côte à côte (sans les rectangles vides au centre), l'exercice de lier la manière de travailler les fonctions à chacun des ordres aurait pu conduire à penser l'harmonisation dans le sens suivant : qu'est-ce qui prépare à quoi ou qu'est-ce qui est le prolongement de quoi ? Ou encore comment passer de l'un à l'autre ? L'utilisation d'un seul rectangle vide aurait pu mener à tenter de trouver des manières de travailler communes aux deux ordres. La figure retenue dans l'action par la chercheuse n'est donc pas anodine : elle a orienté la réflexion autour de la perspective d'harmonisation d'une certaine façon; elle sous-entend en effet « qu'est-ce qui n'existe ni au secondaire, ni au collégial, et qui pourrait se situer entre les deux, dans le territoire du secondaire ou dans celui du collégial. » Les liens à créer sont en dehors de ce qui se fait au secondaire et au collégial mais en même temps, doivent être plausibles au secondaire (dans le cas du premier rectangle vide) et au collégial (dans le cas du deuxième rectangle vide).

3. Moment 3 : des ponts possibles à chacun des ordres pour se rapprocher de l'autre

Une discussion autour des liens entre ce qui se fait de part et d'autre sur les fonctions (au secondaire et au collégial) a suivi. Scott met alors en évidence ce à quoi on s'attend de l'élève au secondaire : qu'il connaisse et soit capable d'identifier différents modèles de fonctions de base. Il mentionne de plus qu'ultimement, même si l'élève est confronté à un mélange de fonctions (il fait référence au travail qui l'attend au collégial), il doit se dire « une x carré par une racine de x [$x^2\sqrt{x}$], ça ne m'énerve pas parce qu'une $\sqrt{x}$, je sais c'est quoi et un x^2 aussi » (Scott, reprenant les propos fictifs d'un élève). Or, en réalité, dit-il, « on ne le fait vraiment pas dans cette optique-là ». Ce que Scott affirme, c'est que les opérations sur les fonctions ne sont pas vues comme la création de nouvelles fonctions à partir de celles déjà connues. La chercheuse, ayant en tête le registre graphique comme élément important aux deux ordres, mentionne : « si c'est un mode de représentation parlant, est-il possible de voir graphiquement l'effet de l'opération proposée par Scott dans un graphique » ? Elle tente en ce sens d'établir un premier pont : elle propose en fait de faire les « mélanges » dont parle Scott, dans un mode de représentation important aux deux ordres.

Scott	Moi, définitivement, c'est ce que je vois. Sans aller jusqu'à…[il pointe au tableau, le rectangle de droite], je ne ferais pas du collégial. On a vu des fonctions [fait référence aux différentes fonctions de base] et on essaie de passer au moins une période là-dessus : on essaie de mélanger des fonctions. On a vu quelque chose de nouveau [sous-entendu une nouvelle fonction à l'étude] et on essaie de mélanger dès que c'est

possible. Puis, trouver une façon de présenter à quoi ça ressemble [sous-entendu dans le graphique].

Colette — Puis quand on arrive dans le cours NYA [cours de calcul différentiel], ça fait longtemps que je ne l'ai pas enseigné, mais quand on arrive avec des fonctions comme sécante, 1/cos, il y a toute cette histoire de $1/x$ [sous-entendu que les élèves ont vu au secondaire, c'est ce qu'ils voient dans l'expression donnée $1/\cos x$], mais c'est pas $1/x$, c'est une autre fonction, donc la logique [comment retrouver le graphique de 1/cos en réfléchissant au comportement de $1/x$] doit être là parce qu'on l'applique, dans le fond.

Chercheuse — $1/\cos x$, est-ce que c'est vu au secondaire ?

Scott — La définition de cosécante est vue, mais pas la fonction.

Dans ce que dit Scott, on voit apparaître des MFM proches de celles du collégial : « mélanger »[5] des fonctions (travailler avec des fonctions qui ne sont pas juste des fonctions de base) et retracer le comportement (regarder à quoi ça ressemble) graphiquement. L'idée de construire le « mélange » est une idée intéressante pour Scott. Pour Colette aussi qui réagit, laissant apparaître l'intérêt pour le collégial. Elle met en évidence une difficulté des étudiants dans le passage au collégial : voir $1/\cos x$ comme $1/x$.

La chercheuse écrit alors au tableau (figure 2) ce qui ressort en ajoutant « dans le registre graphique » puisque c'est ce qui semble être parlant pour les élèves. Selon Scott, dans les manuels le travail se fait algébriquement, essentiellement. Scott suggère aussi d'ajouter les réciproques des fonctions : « C'est comme une tradition que tout le monde ne remet pas en question, ça va bien ensemble. Au secondaire, on va faire les opérations sur les fonctions, les compositions et les réciproques ». Ce faisant, Scott ouvre les possibilités du secondaire, il reste en quelque sorte sur **le territoire du secondaire (après tout, les opérations sur les fonctions, la composition, les réciproques sont au programme), mais il a maintenant un nouvel horizon, celui du collégial pour voir autrement ce territoire, lui donner un nouveau sens.**

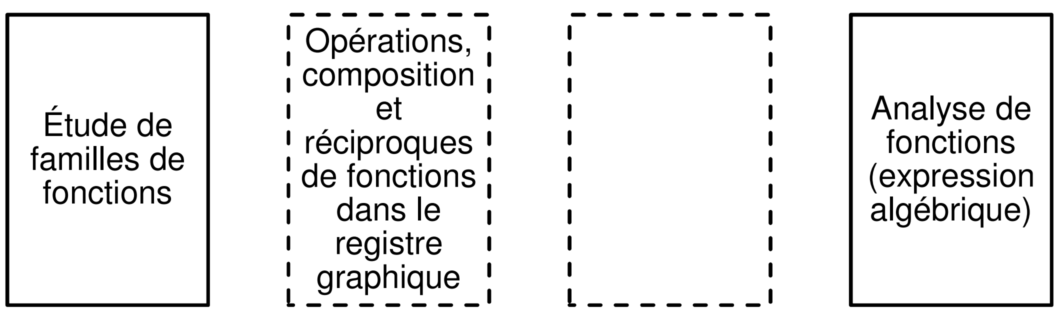


***Figure 2** - Schéma 2 utilisé comme base de réflexion*

La discussion porte ensuite sur le rectangle vide restant, pour le collégial. La discussion tourne autour de l'utilisation des paramètres. On essaie de faire le lien entre le secondaire via les paramètres (écriture canonique d'une fonction) puisqu'ils sont beaucoup utilisés (il en avait d'ailleurs été question à la première séance). Comment les réinvestir ? Cette avenue paraît peu prometteuse dans la mesure où les enseignants du collégial n'en voient pas l'intérêt, comme l'explicite Corinne : « on ne fera pas de retour sur les paramètres, on ne réinvestit pas la partie faite sur les paramètres. On n'en a pas vraiment besoin au collégial ». Ceci met en évidence qu'**il y a recherche de quelque chose de plausible, pertinent pour sa**

[5] Terme introduit par Sandra, du secondaire, à la première séance pour exprimer ce que les enseignants du secondaire font (« toi [au collégial], dans le fond, tu mélanges un paquet de fonctions »).

pratique. On cherche à aller vers l'autre, mais tout en restant cohérent dans son propre territoire.

Colette fait une proposition. Elle propose d'écrire dans le dernier rectangle de droite $\frac{x^3}{1-x^2}$ en mentionnant qu'elle voit une sorte de progression. Elle mentionne qu'au collégial, on pourrait revoir le tracé des fonctions de base avec les paramètres (entendus comme les paramètres tels qu'ils sont utilisés au secondaire), et passer à une fonction où ce n'est plus possible de réfléchir comme au secondaire (avec les paramètres) pour tracer son graphique. La chercheuse écrit la suggestion (voir figure 3, 3^{e} rectangle).

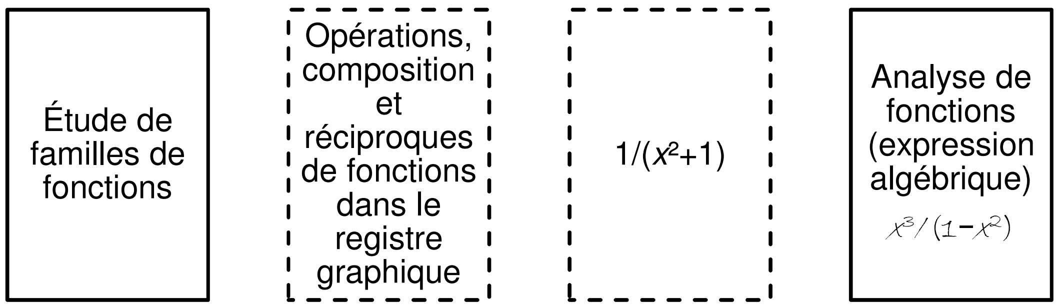


Figure 3 - *Schéma 3 utilisé comme base de réflexion*

Colette amène cette idée en relatant une expérience vécue : « Moi je voyais $1/(x^2+1)$. Je sais qu'en *Calcul intégral*, quand les étudiants m'arrivaient, ils avaient un truc à faire, je ne me rappelle plus exactement quoi, trouver une intégrale… Ils ne savaient pas comment tracer ça. Il y avait tellement d'étudiants qui venaient à mon bureau. Puis là, c'était pas le temps de commencer à prendre la dérivée première et la dérivée seconde. C'était pas ça ! Puis c'était pas non plus une fonction avec les paramètres [comme au secondaire] donc, quelque part, il fallait une intuition… ».

Dans ce que propose Corinne, il y a cette idée d'ébranler la conception que l'étude des paramètres donne accès à toutes les fonctions. Il est intéressant de constater qu'elle fait cette suggestion à la suite du commentaire de Corinne qui mentionne qu'au collégial, on ne réinvestit pas les paramètres. Ainsi, **une façon de passer à autre chose est d'ébranler la conception que l'étude des paramètres donne accès à toutes les fonctions, de mette à l'épreuve cette conception, bref de la problématiser.** Avec l'exemple proposé par Colette ($1/(x^2+1)$, tracer un graphique à l'aide des paramètres (déplacements horizontaux et verticaux, dilatation, contraction) n'est plus possible (par exemple à partir de $1/x^2$). En effet, bien qu'en apparence la fonction ressemble à ce qui pourrait être vu au secondaire, ça ne fait pas partie du territoire du secondaire. Or, Colette mentionne que ça ne relève pas non plus du territoire du collégial. Il s'agit donc, selon elle, d'un « entre-deux ». Comment tracer le graphique de ces fonctions qui ne sont ni du territoire du secondaire, ni de celui du premier cours de calcul au collégial. Un nouveau travail émerge de cette réflexion, celui de **développer une manière différente d' « analyser » ou de retracer le comportement d'une fonction pour en esquisser le graphique (intuitivement).** On voit par ailleurs que tout le travail fait jusqu'à maintenant s'appuie sur un mode de représentation particulier, le graphique, qui sert de « pont ».

On constate, à cette étape, que chacun vise l'ordre de l'autre dans sa démarche, mais en s'appuyant sur des éléments qui relèvent de son propre ordre : un « mélange » de fonctions (plutôt de l'ordre du collégial) mis en relation avec les opérations sur les fonctions (vues au secondaire) pour l'ordre secondaire; et ébranler le concept de paramètres (plutôt de l'ordre du secondaire) en analysant de nouvelles fonctions autrement qu'avec les outils du calcul, plus intuitivement (retracer le comportement d'une fonction) pour l'ordre collégial. Du point de l'harmonisation, il s'agit en quelque sorte de **rester dans le territoire à un ordre donné, mais un territoire ayant comme horizon le territoire de l'autre ordre, et parfois même d'élargir ce territoire (au collégial).**

En effet, ce que propose Colette fait partie d'un territoire élargi pour le collégial. En ce sens, le schéma proposé oriente en quelque sorte la lecture du « vide » à combler. Développer une intuition pour comprendre le comportement d'une fonction à partir d'une expression algébrique et permettre d'esquisser directement le graphique sans passer par les paramètres (puisqu'ils sont inopérants ici), non plus que par l'attirail d'outils du premier cours de calcul (la dérivée et tout ce qui vient avec), un tel travail avec cet 'attirail' faisant partie des compétences attendues dans le cours de calcul différentiel. De plus, ce que Colette propose d'ajouter dans le dernier rectangle (celui du collégial), l'expression $x^3/(1-x^2)$, est pour elle l'occasion de susciter chez les étudiants un besoin pour la création de nouveaux outils qui permettront de savoir à quoi ressemble le graphique, et même de le tracer de façon relativement fiable. Pour Colette, l'intuition n'est plus suffisante ici.

V. CONCLUSION : QU'APPORTE CETTE RECONSTRUCTION DE LA TRAJECTOIRE D'HARMONISATION ?

La première partie de la trajectoire d'harmonisation visant l'émergence d'idées nouvelles, se développe autour de l'identification de liens (la représentation graphique), la création d'un contraste dans la discussion à propos des MFM autour des fonctions (un vide à combler) et enfin, la construction de ponts. Cette reconstruction fait apparaître un maillage entre les contributions des uns et des autres dans cette tentative d'harmonisation, celles des enseignants, mais celle aussi de la chercheuse. Une certaine conception de l'harmonisation insufflée par le schéma retenu, qui va agir comme ressource structurante dans la manière dont les uns et les autres vont s'engager dans ce travail d'harmonisation; des éléments de transition ramenés dans la construction (le travail dans le registre graphique pour par exemple les opérations sur les fonctions; le travail sur le tableau de valeurs et de variation). La chercheuse identifie des problèmes liés à la transition, identifie un vide que les enseignants des deux ordres, avec leurs idées et leur expertise respective, aident à combler. Les enseignants constituent les liens en revisitant leur territoire avec comme nouvel horizon le territoire de l'autre.

REFERENCES

Artigue M. (2004) *Le défi de la transition secondaire/supérieur : Que peuvent nous apporter les recherches didactiques et les innovations développées dans ce domaine.* Texte de la communication présentée au 1er Congrès Canada-France des sciences mathématiques, Toulouse.

Bednarz N. avec la collaboration de Auclair M., Barrette M.A., Lafontaine J., Péloquin M.È., Rodrigue I., Leroux C., Morelli C. (2008) Une expérience de collaboration enrichissante en enseignement des mathématiques. *Vie pédagogique* 147, 43-51.

Bednarz N. (2013) *Recherche collaborative et pratique enseignante: regarder ensemble autrement.* Paris : L'Harmattan.

Bloch I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université : savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de doctorat inédite. Université Victor Segalen, Bordeaux 2, France.

Bosch M., Fonseca C., Gascon J. (2004) Incompletud de las organizaciones atematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques* 24(2-3), 205-250.

Bosch M., Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(1), 77-123.

Chenard É., Francoeur, Doray P. (2007) Les transitions scolaires dans l'enseignement postsecondaire : normes et impacts sur les carrières étudiantes. *Notes de recherche du CIRST*. http://www.cirst.uqam.ca/Portals/0/docs/note_rech/2007_04.pdf

Corriveau C. (2013) Des manières de faire des mathématiques comme enseignants abordées dans une perspective ethno-méthodologique pour explorer la transition secondaire collégial. Thèse de doctorat inédite. Québec : Université du Québec à Montréal.

Corriveau C. (2007) *Arrimage secondaire-collégial : démonstration et formalisme*. Mémoire de maîtrise inédit. Montréal : Université du Québec à Montréal.

Corriveau C., Tanguay D. (2007) Formalisme accru du secondaire au collégial : les cours d'Algèbre linéaire comme indicateurs. *Bulletin AMQ* XLVII(1), 6-25.

Corriveau C., Bednarz N. (2013) Manières de faire des mathématiques comme enseignants : une perspective ethnométhodologique*.* *For the Learning of Mathematics* 33(2), 24-30.

Coulon A. (1993) *Ethnométhodologie et éducation*. Paris: Presses universitaires de France.

Desgagné S. (2001) La recherche collaborative : une nouvelle dynamique de recherche en éducation. In Anadón M. (Ed.) *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation* (pp. 51-76). Québec : Les presses de l'université Laval.

Edwards B. E., Dubinsky E., Mc Donald M. A. (2005) Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 15–25.

Garfinkel H. (1967) *Studies in Ethnomethodology*. New Jersey : Prentice-Hall. [Trad. Barthélemy M., Beaudoin D., de Queiroz J.-M., Quéré L. (2007) *Recherches en ethnométodologie*. Paris : Presses Universitaires de France].

Gueudet G. (2004) Rôle du géométrique dans l'enseignement de l'algèbre linéaire *Recherchen en didactique des mathématiques* 24(1), 81-114.

Hall E. T. (1959) *Le langage silencieux* [traduction 1984]. Paris: Seuil, Points.

Harel G., Tall D. (1991) The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the learning of mathematics* 11(1), 38-42.

Luk H. S. (2005) The gap between secondary school and university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 36(2-3), 161-174.

Najar R. (2011) Notions ensemblistes et besoins d'apprentissage dans la transition secondaire-supérieur. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 11(2), 107-128.

Praslon F. (2000) *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S / DEUG Sciences en analyse : Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat inédite. Paris : Université Paris 7.

Robert A. (2003) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième: l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation. *Petit x* 63, 7-29.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques* 21(1-2), 57-80.

Tall D. (1992) The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In G. D.A. (Ed.) *Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning* (pp. 495–511). New York : Macmillan.

Tall D. (1995) *Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking.* Paper presented at the Conference of the International Group for the Psychology of Learning Mathematics, Recife, Brazil.

Tinto V. (1993) *Leaving college: Rethinking the Causes and Curses of Students Attrition.* Chicago & London: Chicago University Press.

Vandebrouck F. (2011*b*) Students conceptions of functions at the transition between secondary school and university. In Pytlak M., Rowland T., Swoboda E. (Eds.) *Proceedings of CERME 7* (pp. 2093-2102). Rzesvow, Pologne : University of Rzesvow.

Vandebrouck F. (2011*a*) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 16, 149-185.

Winsløw C. (2007) Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 12, 195-215.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

PENSER LA QUESTION DES CONTENUS A LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR AU SEIN DU RESEAU DES IREM EN FRANCE

Patrick FRETIGNE[*] – Geneviève BOUVART[**] - Viviane DURAND-GUERIER[***] – Zoé MESNIL[****] - Fabrice VANDEBROUCK[*****] - Martine VERGNAC[******]

Résumé – En 2013, trois Commissions Inter IREM se sont associées pour organiser un colloque sur la transition secondaire-supérieur et plus particulièrement sur la réforme des programmes scientifiques du lycée, en mathématiques et en physique, qui venait d'entrer en vigueur en France. Nous présentons dans ce texte une réflexion issue de deux des ateliers. Le premier concerne les nombres réels qui ont disparu des programmes, tandis que le second s'intéresse aux possibilités offertes par le retour explicite de la logique. Un large consensus s'est dégagé à l'issue du colloque pour estimer que les nouveaux programmes rendent plus difficile la transition entre secondaire/supérieur.

Mots-clefs : Transition secondaire – supérieur ; réseau des IREM ; réforme des programmes ; nombres réels ; logique.

Abstract – In 2013, three Inter IREM national commissions joined to organize a conference on the transition between secondary and university mathematics, focusing on the recent reform of the secondary programs, in mathematics and in physics, in France. We present in this text a reflection stemming from two of the workshops. The first one concerns real numbers, which disappeared from French programs, whereas the second focus on the possibility opened by the explicit come back of logic. A wide consensus emerged at the end of the colloquium to consider that the new programs make more difficult the transition between secondary and university mathematics.

Keywords: Transition secondary/university mathematics; programs reform; real numbers; logic.

I. INTRODUCTION GENERALE

Les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) sont des structures universitaires où peuvent travailler ensemble, sur des contenus mathématiques ciblés, des

[*] Commission Inter-IREM Université, IREM de Rouen – France – pf@univ-rouen.fr
[**] Lycée Bichat à Lunéville, IREM de Lorraine – France
[***] Université de Montpellier, I3M UMR 5149, IREM de Montpellier – France – vdurandg@univ-montp2.fr
[****] Université Paris Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, IREM de Paris – France – zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr
[*****] Université Paris Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, IREM de Paris – France – vandebro@univ-paris-diderot.fr
[******] Lycée Jean Lurçat, Perpignan, IREM de Montpellier – France – martine.vergnac@wanadoo.fr

Frétigné P., Bouvart G., Durand-Guerrier V., Mesnil Z., Vandebrouck F., Vergnac M. (2015) Penser la question des contenus à la transition secondaire supérieur au sein du réseau des IREM en France. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 994-1004.

enseignants du primaire, du secondaire, du supérieur mais aussi des formateurs d'enseignants et parfois des inspecteurs. Ils sont en France des acteurs majeurs, pour les mathématiques, de la recherche en éducation, de la formation initiale et continue des enseignants, en partenariat avec les Ecoles Supérieures du Professorat et de l'Education (ESPE), les départements disciplinaires et les laboratoires de recherche dont ils sont proches dans les universités.

Les IREM forment un réseau d'environ un millier d'enseignants et chercheurs en mathématiques, histoire et didactique des mathématiques. Ils se répartissent dans toute la France : 28 IREM (c'est-à-dire, à deux exceptions près, un IREM par académie). Leurs travaux portent sur tous les niveaux du système éducatif, du premier degré à l'université. Ils sont constitués en réseau national, structuré autour de l'assemblée des directeurs (ADIREM) avec un comité scientifique (CS), des commissions inter IREM (C2I, treize), et avec des publications et rencontres nationales. Les IREM organisent en particulier annuellement les colloques importants en France de la COPIRELEM (Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Elémentaire) et de la CORFEM (Commission de Recherche sur la Formation et l'Enseignement des Mathématiques du second degré) qui sont des points de rencontres pour les formateurs en mathématiques des ESPE. Les revues éditées par le réseau des IREM (Petit *x*, Grand N, Repères IREM) sont aussi des ressources importantes pour la formation initiale et continue des enseignants.

La recherche développée dans les groupes IREM est une recherche appliquée – ou recherche action – qui suit un protocole scientifique strict : travail mathématique, épistémologique et didactique (bibliographie, élaboration de séquences…) en appui sur la recherche fondamentale en didactique des mathématiques, expérimentations en classe par les enseignants de terrain, analyse de ces expériences au sein des groupes, rédaction et publication de documents, alimentation de formations initiales, mise en œuvre de stages de formation continue, participation aux commissions inter IREM nationales. Á travers leurs publications, leurs actions de formations initiales et continues, les actions de diffusion scientifique ou les rencontres organisées au sein du réseau, ce sont au moins dix mille enseignants de mathématiques de tous statuts qui sont en contact avec les IREM chaque année.

En 2013, trois C2I se sont associées pour organiser un colloque sur la transition lycée-post baccalauréat et plus particulièrement sur la réforme des programmes scientifiques du lycée, en mathématiques et en physique, qui venait d'entrer en vigueur en France.[1] Il s'agissait d'aider les nouveaux collègues. A la suite d'une réflexion menée à la CIIU[2], dont l'un des thèmes récurrents est celui de la transition secondaire-supérieur, nous étions conscients que ce n'était pas juste « une réforme de plus » et que celle-ci allait modifier profondément la façon d'enseigner les mathématiques et la physique au lycée et les savoirs et savoir-faire sur lesquels les enseignants du supérieur allaient pouvoir s'appuyer.

Lorsque ce colloque s'est tenu, les 24 et 25 mai 2013, nous n'avions pas encore beaucoup de recul sur l'impact de la réforme puisque c'était à la fin de la première année où nous accueillions à l'université, dans les IUT et les CPGE, les élèves l'ayant vécue au lycée, mais devant l'importance de cette réforme et de son impact prévisible, la CIIU (Commission Inter-IREM « Universités ») a décidé de ne pas attendre davantage : l'un de nos objectifs était de profiter des premières expériences et réflexions dont disposaient les enseignants du lycée pour les présenter à leurs collègues du supérieur et les aider à identifier les pertes et les nouveautés dans les programmes de terminale en mathématiques et en physique et leurs conséquences

[1] Le colloque a donné lieu à des actes publiés par l'IREM de Paris 7 (IREM de Paris 7 2013)

[2] Commission Inter IREM Université qui réuni des formateurs de plusieurs IREMs autour des questions de transition lycée – Université et d'enseignement supérieur.

probables sur les connaissances des étudiants entrant dans le supérieur. Nous souhaitions également mettre en commun les expériences s'appuyant sur ces nouveaux programmes pour aider les collègues du secondaire à y repérer les opportunités qui s'y trouvent.

Grâce à la richesse structurelle du réseau des IREM, nous avons pu former un comité organisateur parfaitement en adéquation avec le thème en associant la CIIU à deux autres Commissions Inter-IREM : la CII – Lycée et la CII probabilités-statistique, dont la participation s'imposait par l'augmentation substantielle de ces disciplines dans les programmes de Première et de terminale.

Les 3 conférences et les 12 ateliers étaient tous des exposés à « deux-têtes » : co-animés par soit un enseignant de mathématiques et de physique, soit un enseignant du secondaire et un enseignant du supérieur. Nous présentons dans ce qui suit deux exemples parmi les ateliers proposés dont les comptes rendus se trouvent dans les actes du colloque. Le premier exemple concerne les nombres qui ne sont plus objet d'étude dans les programmes actuels de lycée en France et met en évidence la fragilité des connaissances des élèves de lycée et de début d'université. Le second exemple concerne la logique qui a fait en 2009 un retour explicite dans les programmes de lycée, programme pour lequel de nombreux enseignants se sentent démunis.

II. LES REELS A LA TRANSITION SECONDAIRE - SUPERIEUR[3]

1. *Introduction*

De par les relations étroites entretenues entre la construction des nombres réels et les fondements de l'analyse, on peut faire l'hypothèse qu'une appropriation adéquate du concept de nombre réel est nécessaire pour une bonne compréhension de l'analyse enseignée dans les cursus universitaires mathématiques. En particulier, la distinction essentielle entre la propriété de densité, satisfaite par Q, D et R et la propriété de continuité non satisfaite par Q et D et qui caractérise R est au cœur de la construction des réels et de la notion de convergence. En France, au collège, les élèves sont principalement sensibilisés à la nécessité de considérer des nombres irrationnels sur quelques exemples emblématiques ($\sqrt{2}$, π), et éventuellement à l'existence d'écritures décimales illimitées pour les rationnels non décimaux. Jusqu'en 2009, en France un chapitre sur les ensembles de nombres en seconde, et un chapitre sur la convergence des suites adjacentes en terminale S permettaient d'aborder ces aspects. Suite à leur disparition des nouveaux programmes, le travail sur ces questions tend à disparaître comme le montrent les entretiens conduits en 2013 auprès d'enseignants de Lycée en France. Or la fréquentation de ces nombres tout au long du cursus secondaire ne suffit pas à elle seule à permettre aux élèves une telle appropriation : les résultats de questionnaires proposés à des élèves de lycée et à des étudiants de licence montrent que la plupart d'entre eux ne développent pas des conceptions adéquates pour une poursuite d'étude dans le domaine de l'analyse.

2. *Conceptions d'élèves de seconde à propos des nombres réels*

Nous nous sommes attachées au travers d'une étude de cas menée dans l'académie de Montpellier en 2012/2013 à tenter de cerner quelles sont les connaissances des élèves de lycée à propos des nombres réels. Dans cette étude, nous avons testé l'hypothèse selon laquelle les connaissances des élèves sur les nombres réels ne sont pas stabilisées à l'entrée à l'université.

[3] Ce paragraphe est un résumé étendu de Vergnac et Durand-Guerrier (2013)

Nous avons tout d'abord conduit sept entretiens des enseignants de lycée en France ; nous avons ensuite posé un questionnaire dans les huit classes de seconde de ceux-ci. Parmi les points abordés dans les entretiens, nous avons cherché à savoir si la disparition dans les nouveaux programmes du chapitre sur les ensembles de nombres avait modifié leurs pratiques et dans l'affirmative de quelle façon se traduisait cette modification. Pour la quasi-totalité[4] des enseignants interrogés, cela avait pour conséquence un moindre travail sur les nombres et en particulier aucun travail sur l'irrationalité des nombres. Pour tous les enseignants interrogés, à l'entrée en seconde les élèves ne distinguent que deux types de nombres : les entiers et les « autres ». L'usage de la calculatrice amène selon eux les élèves arrivant en lycée à identifier un nombre à son affichage à la calculatrice. L'analyse des questionnaires posés dans les classes de seconde montre que les réponses apportées par les élèves correspondent pour une grande part aux perceptions de leurs enseignants. Pour les élèves de seconde interrogés, la nature des nombres qu'ils rencontrent et/ou utilisent, est liée à l'écriture de ceux-ci. Par exemple, pour plus de deux tiers des élèves interrogés, 5/3 n'est pas un nombre rationnel mais un nombre décimal et seulement la moitié des élèves interrogés, considèrent explicitement que $\sqrt{7}$ est un nombre. Parmi eux, un tiers se le représente comme un décimal, et une moitié ne se le représente pas. Pour ces élèves, les nombres ont toujours une écriture décimale et il y a identification du nombre avec son écriture décimale. Une fraction est un nombre décimal car on peut l'écrire à l'aide d'un nombre « à virgule ». Les racines carrées ne sont pas des nombres pour la moitié des élèves interrogées : ce sont des fonctions ou des opérateurs. Elles ne deviennent des nombres pour une partie de ces élèves que lorsqu'ils en proposent une écriture décimale à l'aide de la calculatrice. La question : « *Comment peux-tu définir un nombre réel?* », est de manière évidente une question très difficile pour un élève de seconde, et à laquelle il ne peut apporter aucune réponse qui soit une définition formelle, mais nous attendions que conformément aux pratiques de classe décrites par les enseignants interviewés, un certain nombre d'entre eux identifient l'ensemble des nombres réels à une droite représentant l'axe réel. Or cette réponse n'a été proposée par aucun des 252 élèves interrogés ; dans un certain nombre de cas, l'ensemble des nombres réels a été défini comme étant l'intervalle$]-\infty ; +\infty[$ mais cela ne signifie pas que cet intervalle soit identifié par ces élèves à l'axe réel. Aucune de ces réponses n'était accompagnée d'une figure de droite ; l'intervalle]-∞ ; +∞[est un symbole qui n'est associé à aucune représentation.

3. *Evolutions de la seconde à la terminale scientifique et en licence*

Afin d'observer s'il y a une évolution des conceptions à propos du nombre réel de la seconde à la terminale S, nous avons soumis en 2012-2013 à deux classes de terminale S un questionnaire[5], qui a également été proposé en 2012-2013 à quelques étudiants de Licence 1, 2 et 3, puis en 2013-2014 à un nombre plus important d'étudiants de Licence 1 au début du second semestre[6]. Les deux classes de terminale S étaient toutes les deux considérées comme des classes d'assez bon niveau et comportaient respectivement 24 et 32 élèves. Même si l'échantillon observé est moindre que pour les élèves de seconde, il permet de dégager un paysage des conceptions sur les nombres à l'entrée de l'université. Nous avons proposé une classification plus fine qu'en seconde afin de comparer les réponses des élèves de terminale S

---

[4] 6 enseignants sur 7, le septième étant un enseignant dont c'est la première année d'enseignement

[5] Repris de Bronner (1997)

[6] Nous insérons dans ce texte les résultats obtenus qui sont présentés dans Verganc et Durand-Guerrier (2014)

et des étudiants de licence[7] : nous avons identifié dix conceptions indiquées dans le tableau récapitulatif ci-dessous :

Catégorie	TS en 2012-2013	L en 2012-2013	L1 en 2013-2014
1. Conception « Ensemble de tous les nombres (sauf les nombres complexes) »	13%	12,5%	8,5% + (16%)
2. Conception « Vision géométrique – axe réel »	7%		1,5%
3. Conception « Intervalle]-∞ ; +∞[»	11%	8%	14,5%
4. Conception « Complexes non imaginaires »	14,5%	6%	4%
5. Conception « Réaliste »	7%	0%	4%
6. Conception « Ecriture décimale illimitée »	0%	14,5%	2,5%
7. Conception « Partition Q ou I »	4%	14,5%	5%
8. Conception « Partition incorrecte »	14,5%	14,5%	22%
9. Reformulation	13%	10,5%	18%
10. Autres	13%	20%	13%
11. Non réponses	16%	4%	5%

Tableau 1*- classification des réponses et pourcentages obtenus en TS et en Licence*

Dans la classification opérée en seconde, les conceptions 1 et 3 étaient regroupées. Nous avons pu observer que la conception *« intervalle »* reste solidement ancrée probablement parce qu'elle est la seule à être travaillée explicitement de la seconde à la terminale, en particulier dans la résolution d'inéquations. On peut noter des évolutions significatives par rapport à la seconde. Il y a beaucoup moins de non réponses : cela semble signifier que les élèves de terminale S expriment plus aisément leurs conceptions d'un nombre réel, en particulier les élèves ayant choisi la spécialité mathématique. Les conceptions « *Ensemble de tous les nombres* » et « *réaliste* » prévalent moins qu'en seconde même si on peut encore observer des réponses telles que : « *Un nombre pur* » ou « *Un nombre qui existe, que l'on peut toucher* ». De nouvelles conceptions émergent : « *Complexes non imaginaires* » ainsi que « *Vision géométrique* ». On peut penser que la manipulation des graphiques en analyse favorise la construction de cette conception. En outre il nous paraît important de signaler que les quelques élèves ayant exprimé des conceptions correctes des nombres réels sont tous des élèves ayant choisi la spécialité mathématiques, qui ont donc travaillé davantage que les autres sur les nombres dans la partie arithmétique du programme. Quand on compare les réponses des élèves de lycée à celles des étudiants de licence, on voit apparaître une nouvelle conception liée aux cours dispensés à l'université qui est celle liée à l'écriture décimale illimitée. Mais nous pouvons noter que beaucoup de conceptions observées au lycée restent présentes et pour les conceptions « *Ensemble de tous les nombres* » et « *Partition incorrecte* » quasiment dans les mêmes proportions. Même en ayant travaillé les limites et la continuité de manière formelle, des conceptions erronées sur les nombres réels subsistent jusqu'en troisième année de licence.

---

[7] Le questionnaire a été proposé à un petit nombre d'étudiant en avril 2013 (14 en L1 ; 11 en L2 ; 13 en L3) ; les résultats ne sont donc pas significatifs ; ils sont donnés à titre indicatif.

4. Conclusion

Les résultats de notre étude, bien que celle-ci soit limitée, montrent que les connaissances des élèves sur les nombres sont essentiellement opératoires et ne leur permettent pas d'accéder au concept de nombre réel lui-même. Nous faisons l'hypothèse que ceci est un obstacle pour l'appropriation aux concepts de l'analyse, comme peuvent l'observer les enseignants en début d'université. Dans leurs travaux de recherche Bloch et Ghedamsi (2005) ont mis en évidence des raisons liées aux différences entre le travail en analyse dans le secondaire et dans le supérieur. Au moment de la transition lycée - post bac, on passe d'un travail de type algébrique en analyse, reposant sur une approche intuitive du continu (*les nombres réels sont tous les nombres qu'on connaît*) à un point de vue théorique (*axiomatique*) sans prise en compte explicite des changements conceptuels que cela représente. On peut également supposer que la fragilité des connaissances sur les liens entre aspects pratiques et aspects théoriques en analyse aura des effets sur l'application des outils de l'analyse à d'autres domaines, et pourra mettre en difficultés les futurs enseignants.

III. UN "RETOUR" DE LA LOGIQUE DANS LES PROGRAMMES DU LYCEE : UNE OCCASION À NE PAS MANQUER ![8]

1. Introduction

Les nouveaux programmes pour le lycée comportent des objectifs explicites concernant certaines notions de logique. Dans le supérieur, la maîtrise des éléments du langage mathématique, notamment des quantificateurs, est un élément essentiel pour pouvoir comprendre définitions et théorèmes qui sont rédigés dans un langage plus formel qu'au lycée. Les démonstrations se complexifient, portent sur des objets plus abstraits et cela représente une réelle difficulté pour les étudiants. Plusieurs universités proposent au début de leur cursus mathématique un cours de "méthodologie" consacré à la démonstration et au langage mathématique, afin que les étudiants puissent non seulement acquérir des pratiques, mais également réfléchir sur ces pratiques en mobilisant des outils, notamment logiques, qui pourront être réinvestis. Nous gageons que malgré les imperfections des nouveaux programmes de lycée quant aux notions de logique, notamment le manque de précisions sur les connaissances en jeu, malgré d'éventuelles difficultés pour les professeurs liées au manque de formation et de ressources, dont nous trouvons trace dans les propositions des manuels, ce retour d'un accent sur les questions de logique et de raisonnement ouvre la porte à un apprentissage spécifique qui peut être bénéfique pour la transition lycée/supérieur.

2. Un aperçu de la réaction des enseignants du secondaire au nouveau programme

La logique était explicitement objet d'enseignement dans les programmes de mathématiques du lycée pendant la période des mathématiques modernes (entre 1969 et 1981), puis était explicitement exclue des programmes entre 1981 et 2001, date à laquelle elle a fait un timide retour, plus prononcé dans les récents programmes. Ces allers-retours ont pour première conséquence que nous manquons aujourd'hui de recul et d'expérimentations en ce qui concerne l'enseignement de notions de logique au lycée. Par ailleurs, les professeurs actuels ont reçu des formations différentes selon l'époque à laquelle ils ont été élèves et selon leur cursus dans le supérieur (la logique mathématique ne fait pas partie de la formation initiale des enseignants du secondaire, certains n'en ont jamais entendu parler, d'autres ont suivi certains modules spécifiques).

[8] Ce paragraphe est un résumé étendu de Bouvart et al. (2013)

Nous pouvons alors faire l'hypothèse que les pratiques d'enseignement de notions de logique des enseignants du secondaire seront assez diversifiées. Nous avons voulu en savoir plus sur ce point en proposant un questionnaire. D'autre part, la logique étant partie intégrante de l'activité mathématique, est-ce que les enseignants n'intégraient pas déjà un travail sur l'expression et le raisonnement mathématiques dans les activités proposées aux élèves ? Nous avons donc voulu également évaluer l'impact des nouvelles préconisations institutionnelles.

Sur 45 enseignants du second degré interrogés, on constate une très légère accentuation de la pratique de l'apprentissage de la logique. On distingue trois « attitudes » d'enseignants par rapport à l'enseignement de la logique au lycée :

- Ceux qui ressentent le besoin d'un cours de logique *a priori* et qui le font contre vents et marées.
- Ceux qui respectent « l'esprit du programme » en établissant les principes au fur et à mesure des situations étudiées.
- Ceux qui trouvent que cela se fait naturellement et qui n'éprouvent pas le besoin d'expliciter davantage les notions de logique.

Pour les travaux réalisés avec les élèves, la préférence est donnée aux exercices des manuels mais les 2/3 des professeurs ayant répondu au questionnaire donnent très peu d'exercices étiquetés logique[9] et encore moins de situations de recherche permettant de travailler la logique. La logique est loin d'être une priorité.

3. *La nécessité d'une formation : l'exemple du traitement de l'implication dans les manuels de Seconde*

Une écrasante majorité de professeurs pensent que la logique doit être enseignée lors de la formation des professeurs. Ils confirment ainsi que le fait qu'ils sachent utiliser des notions de logique dans leur propre activité mathématique n'est pas suffisant pour les enseigner, même si ce qui leur est demandé dans le programme concerne uniquement l'aspect outil de ces notions. Or, dans le contexte actuel, la logique mathématique n'apparaît pas comme une théorie de référence pour l'enseignement de ces notions, rôle qu'elle pourrait pourtant pertinemment jouer en articulant ce qu'elle dit de ces notions en tant qu'objets avec leur utilisation dans l'activité mathématique. D'où la présence d'un discours imprécis dans les manuels, que nous allons illustrer à travers l'exemple de l'implication.

Dans les manuels, une implication est une phrase[10] de la forme "si… alors…". En mathématiques, ces propositions comportent presque systématiquement une quantification universelle implicite[11]. Ce ne sont donc pas des propositions de la forme $A \Rightarrow B$, mais des propositions de la forme $\forall x \quad A[x] \Rightarrow B[x]$. La présence d'une variable et d'un quantificateur universel est essentielle. On ne peut que les expliciter pour justifier qu'il suffit d'UN contre-exemple pour montrer qu'une proposition en "si … alors …" est fausse, justification qui s'appuie sur deux propriétés : la négation de $A \Rightarrow B$ est $A\ ET\ NON(B)$, et celle de $\forall x \quad P[x]$ est $\exists x \quad NON(P)[x]$. Une telle justification n'apparaît pas dans les manuels : le contre-exemple est donné comme une technique isolée, non reliée à des connaissances logiques qui pourraient être réinvesties ailleurs. Sans être une erreur, cette absence de propos

[9] On trouve dans presque tous les manuels publiés suite aux nouveaux programmes des exercices repérés par un logo "Logique".
[10] Quelques manuels parlent de *proposition*, mais ce terme n'est pas très utilisé.
[11] Qui n'est pas toujours repérée par les élèves.

sur les variables en général, et notamment par rapport à l'implication, nous parait être un manque bien dommageable.

Mais peut-être plus grave, il y a dans plusieurs manuels une confusion entre "si… alors…" et "donc" qui pour le coup relève d'une méconnaissance de ces objets. Une phrase de la forme "si *A* alors *B*" est une proposition mathématique, ce qui n'est pas le cas d'une phrase de la forme "*A* donc *B*". Dire "*A* donc *B*" c'est dire 3 choses : que A est vraie, que B est vraie, et que j'ai de bonnes raisons de penser qu'il y a un lien entre ces deux informations, la plupart du temps le fait que je sais que "si *A* alors *B*" est vraie. Je ne peux pas m'interroger sur la vérité d'une telle phrase, mais seulement sur la validité de l'inférence qu'elle sous entend.

4. *Dans le supérieur : exemple du cours Langage Mathématique*

Dans le supérieur, plusieurs enseignants, notamment en classe préparatoire, font en début d'année un petit topo sur les notions de logique classiques : connecteurs, quantificateurs, types de raisonnement. Il se présente la plupart du temps de manière plus formelle que ce qui est proposé dans les nouveaux manuels pour le lycée (on y trouve par exemple souvent les tables de vérité des connecteurs).

À l'Université Paris Diderot, de 2009 à 2014, un cours Langage Mathématique[12] a été proposé au premier semestre des filières math, math-info et info. Les étudiants y apprennent ce qu'est une *expression mathématique* (assemblage de signes obéissant à certaines règles et à certaines conventions ; les expressions mathématiques sont divisées en deux catégories : celle des noms d'objets mathématiques, et celle des propositions qui affirment des faits concernant ces objets). Dans ces expressions, une attention particulière est accordée au statut des variables : *muette* comme dans l'expression $\int_0^1 x dx$ qui "ne parle pas de *x*", ou *parlante*[13] comme dans l'expression $x^2 \geq 1$, qui "parle de *x*". Ces notions pourraient bien sûr être introduites dès le lycée[14]. Les étudiants voient ensuite définitions et premières propriétés des connecteurs et des quantificateurs. Une attention particulière est portée sur les multiples façons de dire la quantification en mathématiques, et les étudiants sont entraînés à exhiber les quantifications dans les propositions. Des liens sont faits entre structure logique d'une proposition et structure de sa preuve. Ce cours n'est pas un cours de logique mathématique : les définitions et propriétés sont données non pas pour un traitement formel, mais pour être illustrées par une utilisation dans des contextes particuliers. Par exemple, différentes formulations de la propriété "Toute fonction réelle périodique qui admet une limite en $+\infty$ est constante" sont reliées à différentes propositions équivalentes à $(A \text{ ET } B) \Rightarrow C$. Ce travail semble aider les bons étudiants à avoir une attitude réflexive sur ce qu'ils écrivent, mais semble trop loin des étudiants les plus faibles. Une difficulté pour tous les étudiants est que le contrôle qu'ils sont invités à exercer dans ce cours est bien vite oublié.

5. *Un exemple d'articulation entre travail mathématique et travail sur des notions de logique*

L'exercice qui a été présenté dans l'atelier avait été proposé dans une classe de terminale S en 2013. Dans cette classe, un théorème-élève erroné a surgi à la suite d'une analogie abusive entre « l'intégrale conserve l'ordre » et « la dérivée conserve l'ordre ». L'exercice permet

[12] http://didel.script.univ-paris-diderot.fr/claroline/course/index.php?cid=LM1

[13] On dit aussi libre/liée

[14] La notion de variable muette est présente à propos de la variable d'intégration, mais n'est pas utilisée dans d'autres cas, comme par exemple dans l'expression $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

d'infirmer cette proposition, et de travailler sur les connecteurs et les quantificateurs. Pour ne pas ajouter aux difficultés de compréhension des notions d'analyse celles de compréhension de logique, l'exercice est bâti à partir de l'herbier des fonctions usuelles de terminale S. Les fonctions à étudier ont été données pour gagner du temps, pour revisiter les fonctions incontournables de TS[15] et pour l'exhaustivité des cas à analyser.

Voici le texte de l'exercice :

Exercice 1 :

1. Dans chacun des cas comparer, sur l'intervalle donné, les fonctions f et g puis les fonctions f' et g'.

I	$f(x)$	$g(x)$	Comparer f et g sur I	Comparer f' et g' sur I
$\mathbb{R}$	e^x	e^{x+1}		
$\mathbb{R}$	x	e^x		
$]0;+\infty[$	$ln(x)$	x		
$\mathbb{R}$	x^2	x^2+2x		

2. Vrai ou faux ?
Pour chacune des propositions suivantes dire si elle est vraie ou fausse en justifiant les réponses.
Proposition 1 : "Il existe un réel a de I tel que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f'(a) \leqslant g'(a)$."
Proposition 2 : "Il existe un réel a de I tel que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f'(a) > g'(a)$."
Proposition 3 : "Pour tout réel x de I, $(f(x) \leqslant g(x) \Longrightarrow f'(x) \leqslant g'(x))$."
Proposition 4 : "(Pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant g(x)) \Longrightarrow$ (Pour tout réel x de I , $f'(x) \leqslant g'(x)$)"

Résumer les réponses obtenues en complétant le tableau ci-dessous par **V** si la proposition est vraie et **F** si la proposition est fausse.

I	$f(x)$	$g(x)$	$f \leqslant g$	$f' \leqslant g'$	Prop 1	Prop 2	Prop 3	Prop 4
$\mathbb{R}$	e^x	e^{x+1}	**V**	...	...	...	...	...
$\mathbb{R}$	x	e^x	...	...	...	...	...	...
$]0;+\infty[$	$ln(x)$	x	...	...	...	...	...	...
$\mathbb{R}$	x^2	x^2+2x	...	...	...	...	...	...

3. Proposer un intervalle I sur lequel la proposition 3 est vraie.

***Figure 1**- Exercice proposé en TS*

Lors d'une première séquence, les élèves ont cherché individuellement à répondre à la première question, qui a ensuite été corrigée collectivement avant de passer à la suite. L'objectif de la deuxième partie du travail était d'établir d'éventuels liens logiques entre les propositions énoncées. Les élèves devaient d'abord compléter seuls le tableau de la question 2 mais la plupart ne comprenait pas la différence entre les propositions 3 et 4. En visualisant les représentations graphiques des fonctions f, g, f' et g', les réponses pour les propositions 1, 2 et 3 ont été explicitées collectivement. Pour les propositions 1 et 2, il était facile d'exhiber un bon candidat ou de montrer que l'on ne pouvait pas en trouver. Lors du débat pour justifier la valeur de vérité de la proposition 3 du deuxième exemple, les élèves ont cherché à écrire la

[15] Proposé en début de première année d'université, un tel exercice pourrait permettre un rapide retour sur ces fonctions et leurs propriétés.

négation de la proposition 3 et certains ont remarqué que la proposition 2 était la négation de la 3. A partir de là, la proposition 3 n'a plus posé de problème. La proposition 3 a été écrite sous la forme : « Pour tout $x, P[x] \Longrightarrow Q[x]$ ». Puis sa négation sous la forme : « Il existe x tel que $P[x]$ et non $Q[x]$. » La proposition 4 ne prenant pas de sens pour les élèves, ils ont écrit sa négation par analogie avec le travail réalisé précédemment. Ils ont alors complété la dernière colonne. Pour le dernier exemple une utilisation de la négation s'est révélée nécessaire. En fin de séance, les élèves ont été invités à refaire le même travail pour deux fonctions, choisies de façon à ce que les valeurs de vérité des propositions 3 et 4 soient différentes, en argumentant par écrit leurs réponses. Le taux de réponses exactes pour les trois premières propositions était proche de 80%. Il n'atteignait que 50% pour la proposition 4.

6. *Conclusion*

Les discussions lors de l'atelier ont surtout porté sur l'intégration au lycée des notions de logiques à d'autres activités : comment faire pour qu'elle ne semble pas "factice" ? Quelle proportion d'un travail "technique" ? Notre parti dans les activités que nous avons présenté est de provoquer un travail spécifique, tout en contextualisant les propositions étudiées pour que d'autres notions du programme soient abordées. Les questions portant spécifiquement sur des notions de logique peuvent alors paraître un peu artificielles, mais l'expérience montre que les élèves s'y intéressent. Les éléments du langage mathématique et les types de raisonnement sont souvent abordés au début des études mathématiques dans le supérieur de façon plus décontextualisée et avec un point de vue plus clairement assumé comme étant celui de la logique mathématique, même s'il n'est pas question de faire un cours formel. Plusieurs enseignants du supérieur présents dans l'atelier ont confirmé que le travail possible au lycée, dont nous avons donné des exemples, était un atout permettant que ce discours, bien que se situant à un niveau supérieur d'abstraction et de généralisation, soit dans la continuité de ce qui est amorcé au lycée.

IV. CONCLUSION GENERALE

Le colloque et les actes dont sont extraits ces deux comptes rendus d'atelier ont permis de réunir plus d'une centaine de personnes, de tous statuts, des professeurs de lycée, des universitaires, des formateurs d'enseignants, des inspecteurs de l'éducation nationale.

Les mathématiques sont la seule discipline à bénéficier de structures telles que les IREM. Ces structures regroupées au sein d'un réseau national permettent l'émergence de groupes de travail sur les problématiques liées à l'enseignement des mathématiques dont la transition entre le lycée et l'université en est un exemple. Le réseau des IREM permet ainsi la rencontre des différentes catégories de professeurs et favorise les relations entre tous les différents niveaux, de l'enseignement élémentaire jusqu'à l'enseignement universitaire. Les travaux de ces groupes sont coordonnés et mutualisés au niveau national par l'intermédiaire des commissions inter IREM. Cette organisation du travail conduit ainsi à des productions de qualité, bénéficiant d'une large diffusion et surtout répondant réellement aux attentes des enseignants. Ces éléments contribuent entre autres à faire des IREM un acteur essentiel dans la formation continue des professeurs. C'est donc tout naturellement que la didactique des mathématiques a largement profité du travail effectué dans les IREM depuis quarante ans si bien que sa place au sein des mathématiques appliquées est pleinement reconnue en France. Lorsque la nécessité d'organiser un colloque sur l'impact de la réforme des programmes du lycées et son implication sur la transition Lycée/Université, c'est tout aussi naturellement que les commission CI2U et CII Lycée se sont retrouvées autour de la problématique de la transition secondaire supérieur.

On voit dans cette contribution comment les analyses des contenus à la transition secondaire-supérieur sont nourries tant par les apports des enseignants de terrain – qu'ils soient en poste dans le secondaire ou le supérieur – des chercheurs dans des disciplines académiques – spécifiquement l'analyse et la logique ici – que par des didacticiens des mathématiques qui permettent d'approfondir les relations entre enseignement et apprentissage en jeu dans ces échanges.

Les thèmes des deux ateliers que nous avons choisis d'exposer dans ce texte cristallisent de nombreuses difficultés en analyse rencontrées par des étudiants au début de l'université : la structure de la droite réelle et la formalisation logique. Une construction du concept de nombre réel peut-être amorcée au lycée mais elle ne peut se faire que dans le long terme et ne peut faire l'économie de moments d'institutionnalisation. La connaissance essentiellement opératoire qu'ont les élèves à l'issue du lycée ne suffit pas à elle seule pour asseoir le processus de conceptualisation de nombre réel et ensuite des concepts fondamentaux de l'analyse, comme la notion de limite par exemple. Les nouveaux programmes laissent encore à la discrétion des enseignants les activités qui favorisent ces constructions. Il en va de même des notions de logique qui doivent provoquer un travail spécifique, tout en étant contextualisé pour que d'autres notions du programme soient abordées, ou en travaillant logique et raisonnement dans des activités spécifiquement conçues pour ça. Là encore, il est à craindre que les contraintes horaires et les hétérogénéités des parcours des enseignants ne les dissuadent de faire ce travail, d'autant plus qu'une majorité de professeurs pense que faire de la logique en acte est suffisant pour les élèves.

Ces nouveaux programmes des filières scientifiques ont finalement été pensés pour donner une culture scientifique à une majorité d'élèves, qui n'étudieront pas nécessairement les sciences après le lycée. L'approfondissement serait repoussé aux enseignements scientifiques post baccalauréat. Cependant le développement des capacités attendues à la fin de la terminale S ne permet plus, sauf aux très bons élèves, d'envisager sereinement des études scientifiques. Un large consensus s'est donc dégagé à l'issue de notre colloque pour estimer que les nouveaux programmes rendent la transition entre le lycée et le supérieur encore plus rude et complexe à intégrer dans nos activités en classes qu'elle ne l'était déjà, tant en terminale qu'en première année d'Université.

REFERENCES

Bloch I., Ghedamsi I. (2005) Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie. *Petit x* 69, 7-30

Bronner A. (1997) *Etude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée*. Thèse de doctorat. Université Grenoble.

Bouvart G., Forgeoux E., Fabert C. Grenier, D., Mesnil Z. (2013) Un « retour » de la logique dans les programmes, une occasion à ne pas manquer ! In IREM Paris 7 (2013), *Actes du colloque La réforme des programmes du lycée et alors ?*, *IREM Paris 7 – Université Paris Diderot* (pp. 171-182).

Durand-Guerrier V., Vergnac M. (2013) Les réels à la transition secondaire-supérieur. Du discret au continu-Quelle élaboration ? In La Réforme des Programmes de Lycée : et alors ? In IREM Paris 7 (2013), *Actes du colloque La réforme des programmes du lycée et alors ?*, *IREM Paris 7 – Université Paris Diderot* (pp. 135-147).

IREM Paris 7 (2013) *Actes du colloque La réforme des programmes du lycée et alors ?, IREM Paris 7 – Université Paris Diderot.*

Vergnac M., Durand-Guerrier V. (2014) Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique. *Petit x* 96, 7-28.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

RUPTURE EN FORMALISME ET EN DEMONSTRATION DANS LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR : CAS DES FILIERES SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITE DE OUAGADOUGOU

Timbila SAWADOGO*

Résumé : L'échec massif en mathématiques des étudiants en première année des filières scientifiques de l'université de Ouagadougou qui étaient pourtant brillants dans cette matière au secondaire, impose des réflexions sur le phénomène de transition entre le lycée et l'université. Après une analyse des programmes de mathématiques des cycles secondaire et supérieur, nous montrons qu'il existe une certaine rupture en matière de formalisme et les exigences en démonstration.

Mots-clés : transition, rupture, formalisme, démonstration, programme de mathématiques,

Abstract : The massive failure in mathematics of first year students of the University of Ouagadougou scientific fields that were yet brilliant in that subject in secondary school, imposes thoughts on the phenomenon of transition between high school and college. After analyzing the mathematics curriculum in secondary and higher cycles, we show that there is some formality material out and demonstration requirements.

Keywords: transition, breaking, formalism, demonstration, mathematics program

I. INTRODUCTION

L'échec scolaire en première année d'enseignement supérieur est un phénomène répandu dans le monde (Romainville, 2000 ; Corriveau, 2007). Cet échec semble beaucoup plus accru dans certaines disciplines comme les mathématiques et pose le problème de la qualité de la transition entre le secondaire et le supérieur en mathématiques (Sawadogo, 2014).

Cet échec des étudiants en mathématiques dans l'enseignement supérieur est probablement une des causes du désintérêt des élèves titulaires du baccalauréat pour des études scientifiques au Burkina Faso si on compare les effectifs des nouveaux bacheliers demandant à s'inscrire dans les filières scientifiques à ceux des autres filières.

Les difficultés en mathématiques dans la transition secondaire-supérieur ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche (Praslon 2000; Corriveau 2007; Najar 2010; Fulvi 2010 ; Sawadogo 2014). Des difficultés liées au formalisme et à la démonstration ont été relevées par certaines auteurs(Corriveau 2007; Fulvi 2010).

* Université de Koudougou - Burkina Faso

Sawadogo T. (2015) Rupture en formalisme et en démonstration dans la transition secondaire-supérieur : cas des filières scientifiques de l'université de Ouagadougou. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 1005-1013.

Dans cette communication, il s'agit pour nous, de montrer qu'entre les programmes de mathématiques du secondaire du Burkina Faso et ceux de la première année des filières scientifiques de l'Université de Ouagadougou, il y a un saut en matière de formalisme et de démonstration.

Pour mieux comprendre notre analyse, il nous semble important de présenter le contexte de l'étude. Par la suite les programmes d'enseignement en mathématiques des deux ordres d'enseignement sont analysés en lien avec le formalisme et les exigences en démonstration.

II. CONTEXTE ET METHODOLOGIE

Le Burkina Faso a entamé en 2007 une réforme de son système éducatif. Le système éducatif du Burkina Faso compte quatre ordres d'enseignement que sont l'éducation de base, l'enseignement secondaire, l'enseignement supérieur et la formation professionnelle et technique. L'enseignement secondaire général se subdivise en séries littéraires et scientifiques. Les séries scientifiques[344] préparent pour les parcours scientifiques dans l'enseignement supérieur. Dans la vision de cette réforme de l'éducation, un continuum devrait exister entre ces quatre ordres d'enseignement. Deux ministères ont la charge de ces quatre ordres d'enseignement. Le ministère de l'éducation nationale et de l'alphabétisation a en charge l'éducation de base[345] tandis que le ministère des enseignements secondaire et supérieur s'occupe du reste[346].

On constate cependant que chaque ordre semble évoluer de manière isolée. C'est ainsi qu'au niveau des programmes d'enseignement, chaque ordre d'enseignement dispose de ses commissions de programmes d'enseignement.

Dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons aux programmes du secondaire. A ce niveau, la commission des programmes a une sous-commission chargée des programmes de mathématiques. Cette sous-commission est formée d'encadreurs[347] des niveaux primaire, secondaire et d'enseignants de mathématiques du secondaire et du supérieur. Les programmes de mathématiques du niveau de l'enseignement post-primaire[348] ont été révisés en 2009 tandis que ceux de l'enseignement secondaire l'ont été depuis 1995. Notre analyse prend en compte les programmes des deux ordres.

Pour l'enseignement supérieur, les programmes de mathématiques des filières scientifiques de l'université de Ouagadougou sont en relecture. Les programmes que nous analyserons sont ceux datant de l'entrée dans le système LMD[349] en 2009. Nous utilisons à cet effet une analyse de contenus visant à repérer les objectifs et instructions des programmes, à les rapprocher et à tirer des interprétations.

---

[344] Les séries scientifiques au lycée sont la série C (Sciences expérimentales) et la série C (Sciences et mathématiques)

[345] L'éducation de base regroupe le préscolaire (enfants de 3 à 5 ans), le primaire (enfants de 6 à 11 ans) et le post-primaire (120à 15 ans)

[346] L'enseignement secondaire regroupe les classes de seconde à la terminale (enfants de 16 à 18 ans)

[347] Les encadreurs sont des inspecteurs ou des conseillers pédagogiques

[348] Le post-primaire est le cycle du système secondaire comprenant les classes de la sixième à la troisième.

[349] Licence-Master-Doctorat

III. LES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Historiquement les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire au Burkina Faso étaient ceux de la France (pays colonisateur) des années 1970. Ce n'est que récemment que des programmes propres au Burkina Faso ont été élaborés. Ceux en vigueur datent des années 1995.

1. Objectifs et instruction relatives à la démonstration et au formalisme

En sus des contenus à enseigner, les programmes de mathématiques contiennent des instructions et commentaires relatifs aux contenus et à la méthodologie d'enseignement. Ces instructions et commentaires fixent les limites à ne pas dépasser en termes de contenus par rapport au niveau de la classe. Les programmes se subdivisent principalement en trois grands domaines que sont l'arithmétique, l'analyse et la géométrie. Le formalisme et la démonstration se retrouvent dans tous ces domaines.

Dans le cadre du formalisme et de la démonstration, il est préconisé un apprentissage progressif du raisonnement logique. C'est ainsi que dans les classes de sixième et de cinquième l'accent est mis sur l'apprentissage d'un certain vocabulaire lié au langage mathématique et à la logique :

> L'étude de ce vocabulaire a pour but d'apprendre à l'élève à utiliser correctement chacun des mots (un, le, les, des, chaque, tout, tous, et, ou). La distinction du sens des mots « un », « tous », en particulier est fondamentale pour la compréhension de l'énoncé de certaines définitions ou propriétés (propriétés des opérations par exemple) et l'apprentissage de la démonstration. (MESSRS 2009, p.23)

Le programme stipule néanmoins que l'apprentissage de ce vocabulaire ne doit pas faire l'objet d'une leçon ; une mise en garde qui peut ouvrir le chemin à un déficit d'enseignement de ce vocabulaire lorsque les enseignants ne trouvent pas dans les autres contenus indexés les situations pour introduire le vocabulaire mentionné.

Des éléments de formalisme tels que les symboles d'inclusion, d'union, d'intersection, d'appartenance, d'infériorité et de supériorité sont aux programmes des classes de sixième et de cinquième.

L'intention des programmes des classes de quatrième ($4^{ème}$) et de troisième ($3^{ème}$) sont la consolidation de l'usage des instruments de dessin et de mesure, l'acquisition des techniques opératoires et l'entrainement au raisonnement déductif.

La connaissance et l'utilisation des propriétés de certaines applications du plan, l'utilisation de l'outil vectoriel pour certaines démonstrations apparaissent clairement dans le programme de quatrième. Le même programme mentionne aussi la nécessité d'un apprentissage de la logique à travers des instructions relatives à l'entraînement à la démonstration et à l'utilisation de *« si…alors… » :*

> L'enseignement des mathématiques en classe de quatrième doit familiariser progressivement l'élève avec la pratique de la démonstration. La locution « si A alors B » est utilisée dans le sens de « A est vrai » donc « B est vrai ». On ne parlera pas du fait que « si A alors B » est vrai lorsque A est faux ! Et on n'utilisera pas le symbole « $\Rightarrow$ ». L'équivalence logique et l'emploi de son symbole ne sont pas au programme. Cette familiarisation progressive de l'élève avec la pratique de la démonstration ne doit pas faire l'objet d'un cours théorique mais sera faite en liaison avec les différentes parties du programme tout au long de l'année.(MESSRS 2009, p.34)

L'enseignement/apprentissage de la démonstration est clairement annoncé à travers le raisonnement déductif à un pas. L'expression « si A alors B » marquant le raisonnement par implication doit être enseigné aux apprenants sans cependant faire l'objet d'un cours spécifique. Le programme exclut l'utilisation de son symbole et l'enseignement de l'équivalence logique.

Les programmes de la classe de troisième ($3^{ème}$) prévoient le renforcement de la pensée déductive, l'apprentissage de l'équivalence logique et l'apprentissage de la rédaction d'une démonstration. L'extrait ci-dessous du programme de troisième, intitulé logique, entrainement à la démonstration est illustratif à ce sujet :

Utilisation du « si…alors… »

> Enoncé réciproque. L'énoncé « si A alors B » est considéré dans le cas où A est vrai .Lorsque deux énoncés « si A alors B » et « si B alors A » sont vrais, on les résumera en « A si et seulement si B ». Le professeur veillera à ce que l'élève ne confonde pas l'énoncé « si A alors B » avec sa réciproque « si B alors A » .Le professeur veillera à ce que l'élève prenne conscience du rôle joué par des notions telles que la négation, les connecteurs et les quantificateurs sans que ces notions soient formalisées. L'utilisation de leurs symboles n'est donc pas au programme (MESSRS 2009, p.48)

L'entraînement à la démonstration ne doit pas faire l'objet d'un cours théorique mais sera fait en liaison avec les différentes parties du programme tout au long de l'année. Les quantificateurs sont mentionnés comme une nécessité par le programme qui exclut cependant leur formalisation. Les notations symboliques de l'implication, de l'équivalence sont aussi exclues.

Les programmes de l'enseignement secondaire peuvent être considérés comme une suite des programmes du post-primaire. Nous axerons notre analyse sur les programmes de mathématiques des séries scientifiques car elles sont les pourvoyeuses d'étudiants poursuivant des études mathématiques au niveau du supérieur. Les buts visés par l'enseignement des mathématiques dans les séries scientifiques de l'enseignement secondaire général peuvent être perçus dans le passage suivant:

> Le présent programme est celui d'une classe de seconde préparant de manière privilégiée aux différentes filières scientifiques et techniques (sections C, D, E, F). Afin d'éviter une orientation trop marquée par une section de type C, il convient de le préserver d'une intervention artificielle de descriptions de structures et de ne pas l'alourdir par une algébrisation prématurée. Ont été ainsi résolument écartés les sujets présentant de trop grandes difficultés conceptuelles et techniques au bénéfice d'une meilleure solidité sur les points essentiels. On s'en tiendra à un cadre et à un vocabulaire théoriques modestes, mais suffisamment efficaces pour l'étude des situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation mathématique solide. (MESSRS 1996a, p.1)

L'orientation méthodologique générale selon le programme de Seconde C doit développer chez les élèves la pratique d'une démarche scientifique « en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique » et l'accent doit être mis sur l'acquisition de méthodes.

Le programme de la classe de seconde C indique la nécessité :

> […]d'entrainer les élèves à la pratique d'une démarche scientifique, en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique, l'accent doit être mis sur l'acquisition de méthodes. (MESSRS 1996a, p.1).

L'activité des élèves est à privilégier en les orientant vers la résolution de problèmes et en limitant le contenu aux notions et aux résultats essentiels. La mise en place du raisonnement mathématique et des différentes phases de la démarche mathématique est au centre de l'enseignement des mathématiques en classe de seconde C :

> Il convient de souligner les formes diverses des raisonnements mathématiques mis en jeu dans les situations étudiées. Tout exposé a priori de logique mathématique est exclu. C'est à travers les activités que l'on mettra en lumière les différentes phases de la démarche mathématique : expérimentation, conjectures, argumentation, élaboration d'une preuve et rédaction de la démonstration. (MESSRS 1996b, p.1)

L'utilisation des connecteurs et des quantificateurs y est aussi recommandée. La clarification des notions d'exemple, de contre-exemple, de vérification, de conjecture, de déduction et d'équivalence figure au centre des objectifs au programme.

> Ainsi, tout au long de l'année, chaque fois que cela peut faciliter la compréhension, il est bon d'apprendre aux élèves à utiliser :
> - les connecteurs : "et", "ou" ;
> - les quantificateurs : "quel que soit", "il existe".
>
> En fin d'année scolaire, les élèves doivent avoir une idée claire des notions suivantes :
> - notion d'exemple,
> - notion de contre-exemple (utilisation du contre-exemple),
> - notion de vérification,
> -notion de déduction (si...alors...; hypothèse; conclusion; condition nécessaire; condition suffisante),
> - notion de conjecture,
> - notion d'équivalence (...si et seulement si...). (MESSRS 1996b, p.1)

Le programme spécifie que les sujets présentant de trop grandes difficultés conceptuelles ou techniques doivent être écartés au bénéfice de ceux développant chez les élèves une bonne solidité sur les points essentiels et les savoir-faire fondamentaux. On constate que la classe de seconde marque le début d'un véritable apprentissage de la démonstration. L'utilisation des quantificateurs et connecteurs doit être faite en liaison avec d'autres contenus car le programme proscrit un cours spécifique de logique. Le programme reste cependant muet sur l'utilisation des symboles des quantificateurs et d'autres symboles. Le fait que les programmes des classes antérieures aient été explicites sur l'exclusion des symboles nous laisse penser à une autorisation des symboles en classe de seconde C.

Les intentions de programmes de classes de terminales des séries C et E sont dans la continuité de ceux des programmes de la seconde C :

- poursuivre et approfondir la pratique d'une démarche scientifique ;
- exploiter les interactions entre les mathématiques et les autres disciplines ;
- initier une réflexion sur l'existence de structures mathématiques.

Les programmes mettent l'accent sur la résolution de problèmes, l'entrainement à l'activité scientifique et la promotion de l'acquisition de méthodes chez les élèves :

> On dégagera clairement les objectifs, on s'attachera à mettre en place des synthèses brèves, on veillera à respecter les limites strictes du programme en ce qui concerne le niveau d'approfondissement des concepts et le degré de technicité exigible.
>
> Dans la perspective d'une formation ultérieure en mathématiques plus spécialisée, on mettra en évidence, principalement en Terminale C, la notion d'une identité de structure pour des ensembles d'objets de natures différentes, sans que pour autant cette structure fasse l'objet d'une étude en soi. C'est ainsi, par exemple, qu'à l'occasion d'un travail sur les nombres complexes, de certaines transformations du plan, on abordera la notion de groupe et de corps. Le calcul vectoriel dans le plan ou dans l'espace permettra de rappeler la notion d'espace vectoriel sur IR. (MESSRS 1996d, p.1)

Ce passage des programmes montre qu'il est exclu une étude systématique des structures algébriques.

2. *Que retenir de l'analyse en lien avec le formalisme et la démonstration*

De l'analyse des programmes de l'enseignement secondaire général, on peut tirer les conclusions suivantes :

Un agencement clair dans les objectifs et consignes dans le cadre de la démonstration et du formalisme. De la sensibilisation à la démonstration en classes de $6^{ème}$ et de $5^{ème}$ on passe à l'entrainement de la démonstration en classes de $4^{ème}$ et de $3^{ème}$ pour terminer par la mise en place d'une démarche scientifique dans les classes du second cycle. Les quantificateurs existentiel et universel sont vus en classe de seconde sans instruction sur l'utilisation de leurs symboles. Les cours spécifiques de logique sont exclus et les structures algébriques ne doivent pas faire l'objet d'une étude en soi.

D'après les programmes, les principales exigences en démonstration de la sixième à la terminale D et à la terminale C peuvent se résumer à la maîtrise de la pensée déductive sur de courtes séquences et de la démonstration par récurrence. En terme de formalisme, l'utilisation des connecteurs "et" et "ou" et des quantificateurs "quelque soit" et "il existe" sont des objectifs du programme. Toute fois l'utilisation des symboles des quantificateurs ne sont pas au programme.

IV. LES PROGRAMMES DE MATHEMATIQUES DE LA PREMIERE ANNEE DES FILIERES SCIENTIFIQUES

Notre analyse à ce niveau porte sur les programmes de mathématiques des deux premiers semestres de la licence sciences et technologies de l'université de Ouagadougou.

1. Objectifs et instructions relatives à la démonstration et au formalisme

Les programmes actuels de la première année des filières scientifiques de l'université sont ceux adoptés à l'entrée au système LMD en 2009. Ces programmes en vigueur mais toujours en relecture contiennent deux cours de mathématiques désignés respectivement MATH11 et MATH12. Ces deux cours constituent les cours de mathématiques de la première année d'étude (S_1 et S_2) des filières scientifiques de l'université de Ouagadougou.

D'après les documents programmes, le cours MATH11 est commun à tous les parcours et se déroule au premier semestre. Ce cours destiné à réviser les bases et à égaliser les niveaux est destiné à tous les étudiants des parcours biologie, biochimie, géologie, informatique, mathématique, chimie physique.

Ce cours d'un volume horaire de 40 heures se subdivise en cours théoriques et travaux dirigés. Il porte sur les contenus suivants :

- La géométrie élémentaire du plan (repérage dans le plan, produit scalaire, déterminant de deux vecteurs, droites du plan, distance d'un point à une droite, équation normale d'une droite, coniques),
- la géométrie élémentaire de l'espace (repérage dans l'espace, produits scalaire et vectoriel, déterminant, produit mixte),
- la notion d'espace vectoriel (combinaisons linéaires de vecteurs, bases, coordonnées)
- les nombres complexes (construction de $\mathbb{C}$, notion de corps)
- les nombres réels, les suites numériques
- les fonctions numériques (continuité, théorèmes de valeurs intermédiaires)

Nous constatons, de notre expérience d'enseignants, que la plupart des notions, sont dans leur large majorité étudiées en classe de terminale C. Ce cours étant destiné à tous les étudiants des filières scientifiques, les mathématiques de la série D devraient suffire comme prérequis à ce cours. Autrement dit tous les bacheliers de la série D devraient pouvoir suivre ce cours sans trop de difficultés puisque le BAC est encore un examen très sélectif (38,38% de succès en 2012). On peut sans risque de se tromper dire que les bacheliers sont au moins des élèves moyens surtout que dans les conditions d'orientation dans ces parcours, il y a l'exigence d'avoir obtenu au moins la moyenne en en mathématiques au Baccalauréat des séries C et D.

Quant au cours MATH12, il n'exige pas une validation du cours MATH11. On pourrait alors penser que les seuls prérequis sont aussi les connaissances mathématiques de la terminale D. Mais ce cours utilise les acquis mathématiques de MATH11 comme nous le verrons dans son contenu. Il est prévu au semestre 2 et est destiné aux étudiants des filières chimie, informatique, mathématiques et physique. Il se subdivise en deux parties : analyse et algèbre et géométrie.

Dans la partie analyse, sont à l'étude :

- Les suites numériques (suites extraites, suites de Cauchy, théorème de Bolzano-Weierstrass)
- les fonctions réelles (fonctions continues, fonctions continues et monotones, fonctions réciproques, fonctions dérivables, formule de Taylor, développements limités.

La partie algèbre porte sur :

- les espaces vectoriels (définitions, sous-espaces vectoriels, bases et dimension).
- les applications linéaires (noyau, image, calcul dans l'espace vectoriel $l(E,F)$).
- Les matrices (définition, calcul matriciel, changement de base, déterminants d'ordre 2 et 3).

2. *Des points de rupture entre les programmes du secondaire et du supérieur*

Nous constatons sur le plan de la forme, à la différence des programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire, qu'il n'y a pas d'objectifs spécifiques définis par contenu d'enseignement. Il n'y a pas non plus des instructions ou des commentaires indiquant la méthodologie ou circonscrivant les notions à enseigner. L'organisation du cours en cours théoriques et en travaux dirigés avec plusieurs enseignants laisse voir la rupture avec les pratiques enseignantes au secondaire. Il n'y a pas de consignes spécifiques en ce qui concerne la démonstration et le formalisme.

Un autre constat que nous faisons est que les programmes de mathématiques de la première année des filières scientifiques sont assez synthétiques. Il n'y a pas de balises en termes d'objectifs spécifiques d'enseignement. Il n'y a pas d'orientation méthodologique globale et spécifique d'enseignement, ce qui peut ouvrir la voie à tous les manquements ou excès tant dans la méthodologie que dans les contenus d'enseignement.

Sur le plan du formalisme et de la démonstration, les contenus comme les structures algébriques, les fonctions numériques, les suites numériques pour ne citer que celles-ci sont d'énormes réservoirs de formalismes mathématiques. Par exemple les définitions de limite de fonction ou de suite seront formelles avec l'utilisation de plusieurs quantificateurs : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in IN / n > N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$. Les limites de références des fonctions et des suites seront démontrées. Dans ce volet on notera l'absence de cours spécifiques de logique dans les contenus ci-dessus évoqués.

Le cas des limites des suites et des fonctions mérite qu'on s'y attarde. Que disent les programmes du secondaire à cet effet.

Les programmes du secondaire sont assez explicites à propos de la notion de limite dans le cas des fonctions et des suites numériques. Les objectifs pour la classe de première C prévoient une initiation à la notion de limite en excluant toute étude théorique :

Les élèves doivent :

- connaître le comportement des fonctions de référence quand |x| devient "grand" ou "petit" ;
- avoir une connaissance intuitive du sens des notations : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 0} f(x)$
- savoir calculer sur des exemples la limite d'une fonction à l'aide des opérations algébriques ou de la comparaison avec une fonction dont on a déterminé la limite ; (MESSRS, 1996b ; p.11)

Le programme exclut toute étude théorique impliquant la définition évoquée ci-dessus. Le programme de terminale C prévoit un renforcement des propriétés vues en classe de première :

> Pour la notion de limite, le point de vue adopté reste le même qu'en classe de première : les définitions par $(\varepsilon;\alpha)$ et $(\varepsilon;A)$ sont hors programme.
>
> Les résultats sur les limites sont admis : il n'y a pas lieu de s'y attarder. Ils ne constituent pas un objectif en soi, mais visent uniquement à faciliter l'étude du comportement d'une fonction aux bornes de son ensemble de définition. (MESSRS 1996d ; p.7)

Ces deux extraits indiquent que les programmes de l'enseignement secondaire excluent tout exposé théorique sur les limites des fonctions. Les mêmes consignes sont adoptées pour les suites numériques. Ceci montre bien que l'utilisation de la définition théorique de la limite d'une fonction ou d'une suite n'est pas au programme de l'enseignement secondaire, excluant du coup une initiation à la manipulation d'énoncés par les élèves du secondaire. Les programmes d'enseignement jouent alors un rôle dans la rupture en formalisme dans la transition secondaire-supérieur.

V. CONCLUSION

De l'analyse des programmes des deux cycles d'enseignement, il se dégage une différence de structuration tant dans le fond que dans la forme. Dans l'enseignement secondaire, les programmes encadrent l'activité de l'enseignant à travers des consignes portant sur les contenus à enseigner et la méthodologie d'enseignement à utiliser. De ces instructions officielles se dégage un enseignement progressif du raisonnement logique, de la démonstration et du formalisme. Cet enseignement progressif devrait passer par des situations liées à des contenus du programme sans passer par des leçons spécifiques d'enseignement de la logique. On remarque un engagement prudent dans l'utilisation des symboles des quantificateurs existentiel et universel.

Dans l'enseignement supérieur, les programmes sont muets par rapport aux limites dans les contenus car ne précisant pas les objectifs à atteindre et les limites à respecter. Le même constat est fait par rapport au formalisme et à la démonstration. Une quasi-liberté dans ces deux volets est laissée aux enseignants du supérieur. Le manque d'instructions spécifiques sur ces aspects dans le supérieur peut être source d'un saut dans les exigences en formalisme et en démonstration.

L'analyse des programmes montre donc qu'ils peuvent être les causes d'une rupture au niveau du formalisme et de la démonstration dans la transition secondaire-supérieur au Burkina Faso. Des pistes de solutions à cette rupture passeraient par une prise de conscience au niveau institutionnel, un rapprochement des programmes.

REFERENCES

Corriveau C. (2007) *Arrimage secondaire-collégial, démonstration et formalisme.* Mémoire inédit. Montréal : Université du Québec à Montréal.

Fulvi J. (2010) *Préparation à la démonstration et au formalisme supplée au collégial par le cours de mathématiques pour les sciences.* Mémoire inédit. Université du Québec, Service des bibliothèques.

MESSRS (1996a) *Mathématiques, programmes et instructions, classes du second cycle, classe de seconde C.* Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique; Direction des inspections et de la formation du personnel de l'éducation, Inspection de Mathématiques, Burkina Faso.

MESSRS. (1996b). *Mathématiques, programmes et instructions, classes du second cycle, classe de Première C/E.* Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique; Direction des inspections et de la formation du personnel de l'éducation, Inspection de Mathématiques, Burkina Faso.

MESSRS (1996d) *Mathématiques, programmes et instructions, classes du second cycle, classe de Terminale C/E.* Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique; Direction des inspections et de la formation du personnel de l'éducation, Inspection de Mathématiques, Burkina Faso.

MESSRS (2009) Nouveaux programmes de mathématiques de l'enseignement général post-primaire: Ministère des enseignements secondaire, supérieur et de la recherche scientifique; Direction des inspections et de la formation des personnels de l'éducation, Inspection de Mathématiques, Burkina Faso.

Najar R. (2010) *Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants: Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur.* (Thèse de doctorat inédit). Paris : Université Paris Diderot,.

Praslon F. (2000) *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG Sciences en Analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement.* Thèse de doctorat inédit. Paris: Université Paris Diderot, Paris 7.

Romainville M. (2000) *L'échec dans l'université de masse.* Paris, l'Harmattan

Sawadogo T. (2014) *Transition secondaire supérieure: Causes d'échecs en mathématiques dans les filières scientifiques de l'université de Ouagadougou.* Thèse de doctorat inédit. Koudougou : Université de Koudougou.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ÉVALUATIONS NATIONALES ET INTERNATIONALES EN MATHEMATIQUES : QUELLES ANALYSES DIDACTIQUES ?

Compte-rendu du Projet Spécial n°4

Éric RODITI* - Caroline BARDINI** - Claire VAUGELADE BERG***

I. BILAN ET PERSPECTIVES

Le projet spécial n°4 de la rencontre EMF 2015 à Alger a été principalement consacré aux analyses didactiques des questions – et aux questionnaires – d'évaluation. Ce projet s'inscrivait dans le prolongement des deux projets spéciaux consacrés à l'évaluation lors des rencontres EMF 2009 et 2012 qui ont respectivement développé la question des impacts politiques et curriculaires des évaluations internationales puis celle du lien entre évaluation, compétence et orientation dans les transitions entre les cycles d'enseignement. En 2015, c'est la question du regard didactique sur l'évaluation externe qui a été posée, et plus particulièrement sur l'évaluation standardisée, nationale ou internationale.

Trois types de préoccupations émergent à l'issue de la rencontre. Le premier type de préoccupations porte sur la validité des questionnaires d'évaluation c'est-à-dire sur le fait que les questionnaires aboutissent bien à rendre compte de ce qu'on veut observer. Le second porte sur les critères d'évaluation de l'activité mathématique des élèves interrogés dans les enquêtes internationales comme PISA et leur effet sur ce que ces enquêtes donnent à voir des compétences des élèves. Le dernier concerne ce qu'à l'échelle nationale, un pays peut mettre en œuvre pour piloter l'enseignement des mathématiques en fonction des données qu'il parvient à recueillir sur les acquis des élèves.

Concernant la question de la validité des questionnaires d'évaluation, le projet spécial s'est particulièrement nourri d'une étude concernant la France et ses outils d'évaluation des acquis des élèves dans le domaine numérique. La méthodologie d'analyse convoquait différentes approches disciplinaires – épistémo-didactique, psycho-didactique et psychométrique – et les résultats obtenus ont montré la richesse et l'intérêt de croiser ces différentes approches. L'analyse épistémologique et didactique permet de contrôler le contenu de l'évaluation au

* Université Paris Descartes – France – eric.roditi@paris5.sorbonne.fr
** Melbourne Graduate School of Education – Australie – caroline.bardini@unimelb.edu.au
*** University of Agder – Norvège – claire.v.berg@uia.no

Roditi E., Bardini C., Vaugelade Berg C. (2015) Évaluations nationales et internationales en mathematiques : quelles analyses didactiques? - *Compte-rendu du Projet Spécial n°4*. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé4, pp. 1014-1016.

niveau local (pour chaque tâche d'évaluation au sein du questionnaire) et global (sur le recouvrement et la variété des compétences évaluées à travers les différentes tâches du questionnaire). Il apparaît toutefois important pour la didactique des mathématiques de croiser, d'une part, ce qui apparaît comme relevant de la complexité de la tâche et qui est déterminée par l'analyse *a priori*, avec, d'autre part, l'indice de difficulté de la tâche rapporté par le taux de réussite. D'éventuelles incohérences sont autant de pistes pour une compréhension didactique renouvelée des manières dont les élèves mettent en œuvre leurs connaissances mathématiques pour résoudre un problème. Des questions similaires peuvent aussi se poser sur des items qui pourraient sembler pertinents d'un point de vue didactique, mais qui ne se révèleraient pas discriminants, c'est-à-dire qui seraient massivement réussis ou échoués. Dans tous les cas, l'interprétation d'écarts nécessite une analyse épistémo-didactique et psycho-didactique des items à conjuguer avec des éléments relatifs aux pratiques enseignantes. On comprend ainsi qu'il ne s'agit ni d'opposer les approches ni de les mettre en œuvre de manière successive, mais bien de points de vue complémentaires à conjuguer qui renseignent différemment sur le contenu des évaluations et sur leurs résultats.

La question des critères d'évaluation des activités des élèves dans les enquêtes a complété la question précédente, en portant le regard à la fois sur les items et les démarches potentiellement mises en œuvre par les élèves pour les traiter. Les enquêtes du PISA visent un suivi des acquis scolaires des élèves de 15 ans, et, en ce qui concerne ceux de la culture mathématique, le choix de l'OCDE est d'évaluer des compétences, c'est-à-dire des capacités à mobiliser ses connaissances pour résoudre un problème en lien avec une situation de la vie réelle. Le regard didactique porté sur l'évaluation de 2012, et qui a été développé dans le projet spécial n°4 d'EMF 2015, ne peut manquer de pointer que l'OCDE ne se donne les moyens ni de recenser précisément les connaissances acquises des élèves ni d'estimer le niveau d'acquisition de ces connaissances. Une classification des items par des catégories issues de la recherche en didactique a en effet permis de distinguer les activités potentielles des élèves suivant différents « niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques » : mise en fonctionnement directe dans des configurations usuelles ; mise en œuvre nécessitant une adaptation des données (conversion d'unités par exemple) ou des questions (changement de point de vue) ; mise en fonctionnement nécessitant l'introduction d'intermédiaires (changement de variable, introduction d'un objet géométrique supplémentaire, questions intermédiaires, etc.) ; ou enfin mise en œuvre de la compréhension qualitative d'un concept (distinction entre aire et périmètre, indépendance d'événements aléatoires, etc.). Ces niveaux permettent, d'une certaine manière, d'évaluer le niveau d'acquisition de ces connaissances. Cette nouvelle classification permet ainsi de différencier des items que les catégories définies par les experts de l'OCDE ne permettent pas de distinguer, qui requièrent pourtant des niveaux différents de mise en fonctionnement des connaissances évaluées et qui conduisent à des scores de réussite significativement différents. L'étude complète de l'ensemble des items du PISA menée à l'aune de cette nouvelle classification montre que les trois premiers niveaux de mise en fonctionnement des connaissances, qui correspondent à une exigence croissante de richesse et d'autonomie de l'activité, correspondent également, en moyenne, à un niveau de difficulté croissant pour les élèves. L'étude révèle enfin des éléments nouveaux concernant, pour le cas de la France, les inégalités de performances selon le sexe, l'origine sociale ou le retard scolaire. L'analyse s'appuyant sur la classification didactique montre que les filles sont d'autant plus pénalisées que les tâches demandent de l'initiative, mais que les élèves de milieux populaires comme les élèves en retard scolaire, ne sont pas mis davantage en difficulté lorsque les activités attendues d'eux sont plus exigeantes. Cette étude, comme la précédente, montre que le croisement d'approches – ici didactique et évaluative – sur les apprentissages scolaires en mathématiques peuvent être fructueux, tant concernant les résultats obtenus que concernant la recherche en didactique.

Les questions de pilotage national, au vu des enquêtes évaluatives portant sur les acquis des élèves, ont été particulièrement développées en s'appuyant sur l'exemple d'une étude concernant les résultats obtenus par les élèves marocains de certains niveaux des cycles primaire et secondaire collégial dans des évaluations nationales et internationales. L'étude a permis de donner quelques interprétations quant à la faiblesse des performances constatées en mathématiques qui sont très inférieures à la moyenne internationale. L'étude se base sur une analyse de la réalité actuelle de l'enseignement marocain des mathématiques et sur l'analyse des rapports du Conseil Supérieur de l'Enseignement et de ses recommandations. Elle permet ainsi de souligner l'impact de certains facteurs institutionnels, comme ceux liés au fonctionnement du système éducatif, sur la qualité de l'enseignement des mathématiques. Ainsi, la discussion a porté sur un problème qui concerne le Marco mais qui dépasse ce cas particulier, il s'agit de l'adéquation d'une évaluation homogène sur un territoire national alors qu'on constate une hétérogénéité territoriale du système éducatif. De manière générale, les échanges ont porté sur l'interprétation des acquis des élèves s'appuyant sur différentes facettes de la gestion du système éducatif et, au bout du compte, sur la question du pilotage du système éducatif par les résultats portant sur les acquis des élèves. Trois préoccupations majeures ont émergé de l'étude et des discussions tenues dans le projet spécial n°4 d'EMF 2015 : celle de la formation des enseignants de mathématiques, celle d'un socle de connaissances à faire acquérir à tous les élèves, et celle de l'évaluation comme moyen de régulation de l'enseignement.

Les participants au projet spécial ont maintes fois soulevé l'intérêt qu'il y aurait à développer, parallèlement aux études sur les évaluations externes nationales et internationales, des recherches portant sur l'évaluation des apprentissages dans le quotidien de la classe de mathématiques. Sans doute un espace à ouvrir pour le projet spécial « évaluation » du prochain EMF…

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE D'ÉVALUATIONS EXTERNES

Brigitte GRUGEON-ALLYS[*] – Nadine GRAPIN[**]

Résumé – En France, des évaluations bilans réalisées sur échantillon sont menées tous les six ans en mathématiques, en fin d'école et de collège, pour déterminer les acquis des élèves. Après avoir présenté ce dispositif spécifique, nous présentons une méthodologie d'analyse des évaluations s'appuyant sur trois approches (épistémo-didactique, psycho-didactique et psychométrique) et nous montrons comment ces dernières se révèlent complémentaires pour garantir la validité des résultats produits. Enfin, nous utilisons cette méthodologie pour étudier les évaluations bilans 2008 et 2014 sur deux domaines : l'arithmétique des nombres entiers en fin d'école et l'algèbre en fin de collège.

Mots-clefs : évaluation standardisée, validité, épistémo-didactique, psycho-didactique, psychométrie.

Abstract – In France, assessments realised on sample are conducted every six years in mathematics, at the end of school and college, to determine students' knowledge. After presenting this specific device, we present an assessment analysis methodology founded on three approaches (epistemo-didactic, psycho-didactic and psychometric) and show how these prove complementary to ensure the validity of the results. Finally, we use this methodology to study the results of assessments 2008 and 2014 on two areas: arithmetic of whole numbers at the the end of school and algebra at the end of college.

Keywords: standardized assessment, validity, epistemo-educational, psycho-educational, psychometrics

En France, en parallèle des enquêtes internationales PISA et TIMSS, des évaluations standardisées sont menées régulièrement nationalement, sur échantillon ou sur la totalité des élèves d'un niveau scolaire donné, par l'intermédiaire de la DEPP (Direction de l'évaluation, de la performance et de la prospective) (Roditi & Chesne 2012). Alors que les résultats des élèves à ces évaluations sont utilisés pour réguler les programmes d'enseignement, voire pour orienter les politiques éducatives (Mons 2009, p.7) la didactique, en particulier la didactique des mathématiques, s'empare davantage des questions d'évaluation telles que – l'évaluation diagnostique et la régulation (Grugeon 1997, Grugeon-Allys 2012, Pilet 2012), l'évaluation de compétences (Winslow 2005 ou Schneider 2006), l'évaluation formative (El Hage & al. 2014), la comparaison des évaluations nationales ou internationales (Artigue & Winslow 2010 ou Ruminot-Vergara 2014), les perspectives à partir de données récoltées sur ces épreuves réalisées à grande échelle (Deblois, Freiman & Rousseau 2007), l'impact des évaluations standardisées sur les pratiques des enseignants (Ruminot-Vergara 2014[350]).

Dans la continuité des travaux de Bodin (1997), nous cherchons à étudier la validité d'un test, ce qui revient à déterminer si un test mesure effectivement ce pour quoi il a été construit et uniquement cela. Cette question apparaît comme essentielle pour les concepteurs de test et

[*] Université Paris Est Créteil – ESPE de Créteil – France – brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr
[**] Université Paris Est Créteil – ESPE de Créteil – France – nadine.grapin@u-pec.fr
[350] Étude menée à partir de l'évaluation SIMCE au Chili

Grugeon-Allys B., Grapin N. (2015) Méthodologie d'analyse d'évaluations externes. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé4, pp. 1017-1027.

de nombreux travaux en psychométrie ont été menés autour de ce concept (Grégoire & Laveault 2014 p. 163), mais ici nous nous centrons principalement sur la validité de contenu qui « se réfère à la qualité des questions de l'épreuve » (De Landsheere, 1998) c'est-à-dire la représentativité des questions relativement au domaine mathématique évalué. Nous fondons notre travail sur des approches didactique, prenant en compte des aspects épistémologique et, psychologique, et psychométrique en nous situant à deux niveaux de granularité - global sur l'ensemble des items d'un domaine puis local pour chaque item. Afin d'éclairer pourquoi ces différentes approches sont nécessaires et complémentaires, nous illustrons notre questionnement en présentant d'abord un dispositif d'évaluation nationale, le bilan CEDRE (Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon) puis nous explicitons la méthodologie d'analyse de la validité que nous avons établie et enfin, nous l'appliquons à deux domaines distincts : celui de l'arithmétique des entiers en fin d'école et celui de l'algèbre en fin du collège.

II. PRESENTATION DU DISPOSITIF D'EVALUATION ET QUESTIONNEMENT

1. *Dispositif de conception des épreuves*

En France, les acquis des élèves en mathématiques à la fin de l'école primaire (élèves âgés de 10 ans) et du collège (élèves âgés de 15 ans) sont en partie évalués par le bilan CEDRE. Cette évaluation externe est renouvelée tous les 6 ans (2008 - 2014 pour les mathématiques) et permet par conséquent une comparaison temporelle des apprentissages des élèves. Il ne s'agit pas d'établir un diagnostic des difficultés des élèves, ni de comparer des groupes d'élèves selon les établissements, mais d'établir un bilan des connaissances et des compétences des élèves au regard des programmes scolaires en vigueur (Lescure & Pastor 2012).

La conception des items et l'analyse des résultats sont menées par des personnels de l'enseignement qui définissent des items, la forme des questions et le codage des réponses puis les sélectionnent et par des statisticiens qui calculent différents indicateurs psychométriques. Selon les enjeux assignés à l'évaluation, les items du test sont répartis selon les différents domaines définis par les programmes : 385 items répartis sur 6 domaines pour le primaire (organisation des données numériques, résolution de problèmes, nombres et calcul, espace et géométrie, grandeurs et mesures) et 172 items répartis sur 5 domaines pour le collège (géométrie, nombres et calculs, organisation de données & fonctions, grandeurs & mesures). Même s'il a été demandé aux concepteurs de produire des items de difficulté variée (Brun & Huguet 2012), aucun outil d'analyse didactique ne leur a été fourni pour ce faire.

Enfin, trois formes de questions sont proposées : des questions à choix multiples (QCM) avec le plus souvent quatre choix de réponse, des Vrai-Faux et des questions ouvertes. La correction des QCM et des Vrai-Faux est faite automatiquement alors que la plupart des questions ouvertes sont corrigées par des enseignants.

Dans le dispositif CEDRE, et comme pour les évaluations internationales PISA et TIMSS, une pré-expérimentation a lieu l'année précédant l'expérimentation définitive, qui permettra aux concepteurs de choisir les items retenus définitivement pour l'évaluation. Enfin, comme il est impossible que chaque élève passe la totalité du test, un principe de cahiers tournants est mis en place (Brun & Huguet 2008) ; l'étude psychométrique rend possible d'estimer, pour tous les items du test, la probabilité de réussite de chaque élève, même s'il n'a pas été confronté à toutes les questions.

2. *Éléments de méthodologie statistique*

La méthodologie employée pour recueillir les résultats des élèves dans CEDRE est similaire à celle des évaluations internationales, telles que PISA. Sans revenir sur les différents modèles de mesure (théorie classique des scores et modèles de réponse à l'item) détaillés dans différents ouvrages de synthèse, tels que Grégoire et Laveault (2014, pp. 281-304) ou de façon plus synthétique dans Bottani & Vrignaud (2005, pp. 93-105), nous précisons que le modèle statistique utilisé est le modèle de réponse à l'item (MRI). Il permet la réalisation d'échelles de scores et de comparaisons temporelles (Lescure & Pastor 2012, Brun & Huguet 2008), mais repose sur deux contraintes fortes : l'unidimensionnalité du test et l'indépendance locale des items (Bottani & Vrignaud 2005 p. 100).

En psychométrie, un item est principalement caractérisé par son indice de difficulté (calculé *a posteriori* en fonction du nombre d'élèves qui l'ont réussi) et par son indice de discrimination. Les items de l'évaluation CEDRE étant codés 0 ou 1 selon l'échec ou la réussite, l'indice de difficulté correspond à la proportion des élèves qui réussissent l'item et par conséquent est compris entre 0 et 1 (Grégoire & Laveault 2014, p. 204) ; le score d'un élève correspond au nombre d'items réussis par cet élève. La discrimination de l'item est déterminée par la valeur du coefficient bisérial (r_{bis}), défini comme « le coefficient de corrélation linéaire entre le score et une variable latente (ici, la compétence mathématique), régie par une loi normale, conditionnant la réussite à l'item » (Megherbi & al. 2009). Cet indice renseigne sur le « pouvoir discriminant » de l'item, c'est à dire « dans quelle mesure l'item s'inscrit dans la dimension générale (corrélation item-test). Il indique également la différence de performance constatée entre les individus qui réussissent l'item et ceux qui l'échouent. » (ibid, p.72). Dans des évaluations telles que CEDRE, où les résultats conduisent à la construction d'échelles, il est important de différencier entre eux les scores, et par conséquent d'avoir des items qui ont un fort pouvoir de discrimination. Par conséquent, à la suite de la pré-expérimentation, certains items sont écartés en vue de l'évaluation définitive puisqu'ils ne sont pas suffisamment discriminants (par rapport à la compétence mesurée) et n'apportent pas d'informations supplémentaires par rapport aux autres.

3. *Résultats produits*

Notons d'abord que les réponses des élèves ne sont pas analysées pour révéler des difficultés spécifiques (ce n'est pas l'objectif de l'évaluation CEDRE), mais uniquement traitées en tant que réponse correcte ou incorrecte ; à la différence d'évaluation telles que PISA, aucun crédit partiel n'est accordé pour des réponses à des questions ouvertes.

La mesure de la performance des élèves produite à la suite du test par le MRI permet de déterminer les compétences maîtrisées par les élèves ; ce qui se traduit pour le bilan CEDRE, par une échelle de performance qui répartit les élèves en six groupes (de 0 à 5, du plus faible au plus performant). Chacun des groupes est ensuite caractérisé par un niveau de compétence (globalement sur l'ensemble du test, mais aussi par domaine), les élèves d'un groupe maîtrisant aussi les compétences définies dans les groupes de niveaux inférieurs (Brun & Huguet 2008, Lescure & Pastor 2012). A titre d'exemple, nous présentons ci-dessous un premier graphique (Figure 1) qui représente, pour le collège, les taux de réussite par domaine suivant les différents groupes.

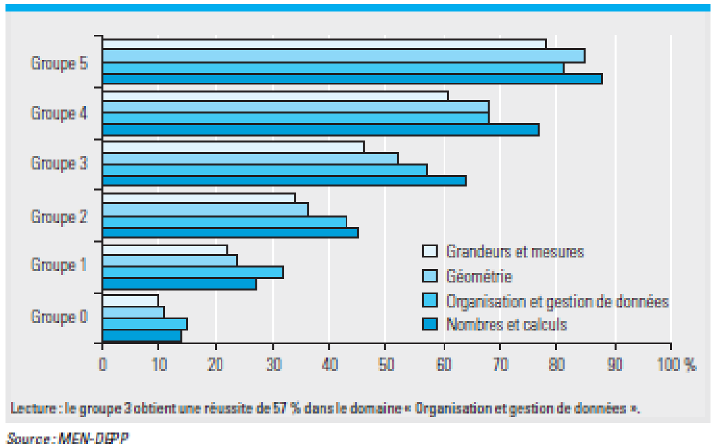


Figure 1 *- Groupes et taux de réussite à chacun des quatre champs (extrait de Brun & Huguet 2008)*

Si la lecture directe de ce graphique permet de comparer selon les domaines, les pourcentages de réussite et de constater par exemple que pour les groupes 3-4-5, la réussite est la plus importante dans le domaine « nombres et calcul » alors que pour les groupes de plus bas niveaux, ils réussissent davantage dans le domaine « organisation et gestion de données », la question fondamentale reste posée : quelles sont les connaissances que possèdent les élèves de ces groupes ? à partir de quels items l'évaluation de ces connaissances a-t-elle été faite ?

4. *Questionnement*

Comme nous l'avons illustré précédemment à partir de la conception des évaluations CEDRE, la détermination des compétences des élèves dans de telles évaluations repose majoritairement sur une approche psychométrique (Bottani & Vrignaud 2005, p. 101), mais comment garantir que le test est valide ? Comment s'assurer que l'ensemble des tâches permet effectivement d'évaluer les connaissances des élèves au regard des programmes ?

Il s'agit ainsi de rechercher des preuves de la validité du test en interrogeant le contenu (les items sont-ils représentatifs du domaine évalué ? Couvrent-ils le domaine évalué au regard des programmes ?) ou en étudiant les processus de réponse afin de s'assurer que les élèves qui répondent mobilisent bien les connaissances qui sont supposées être évaluées et que chaque item possède les caractéristiques psychométriques demandées. Ces trois conditions correspondent aux trois approches qui fondent notre travail :

1. préalablement à la conception des items
   - approche épistémo-didactique : étude de la représentativité des items et de la couverture du domaine mathématique concerné au filtre de l'épistémologie et de la didactique des mathématiques relativement au domaine (types de tâche proposés, modalités de réponse, codage des réponses de l'élève en fonction du type de raisonnement,...),
   - approche psycho-didactique : analyse des processus de réponses mis en jeu par les élèves pour produire une réponse en lien avec la forme des énoncés et des variables extra-mathématiques (contexte, découpage de l'énoncé, ..),

2. a *posteriori* à partir des réponses des élèves
   - approche psychométrique : calcul des caractéristiques statistiques des items et production de l'échelle des scores et des groupes selon leur niveau de compétence.

La question du choix des tâches dans une évaluation a déjà été soulevée par Bodin (2006), mais peut difficilement être traitée de façon effective à partir de l'analyse d'évaluations externes existantes. En effet, même si les évaluations internationales telles que PISA et TIMSS sont conçues à partir d'un cadre reposant sur des travaux en didactique, et que nous supposons que les groupes d'experts de ces évaluations s'assurent de la représentativité des tâches choisies, les chercheurs n'ont pas accès à l'ensemble des items des évaluations et ne peuvent par conséquent établir une analyse didactique de l'ensemble des tâches proposées. Deux recherches ont néanmoins été menées en ce sens : celle de Roditi & Salles (2015) sur l'évaluation PISA 2012 ou celle de Sayac & Grapin (2014) sur l'analyse du bilan CEDRE 2008 fin d'école à partir de « facteurs de complexité et de compétences ».

Pour notre recherche, nous avons eu l'opportunité d'avoir accès à l'ensemble du dispositif des évaluations CEDRE fin d'école et fin de collège de 2008 et de 2014, et nous présentons dans le paragraphe suivant la méthodologie que nous avons adoptée, puis quelques résultats sur l'analyse de ces évaluations.

III. METHODOLOGIE D'ANALYSE

1. Complémentarité des trois approches : un point de vue global et local sur le test

L'enjeu de CEDRE étant d'évaluer les acquis des élèves au regard des savoirs visés dans les différents domaines mathématiques dans le cadre des programmes scolaires, l'ensemble des items du test doit « couvrir » les différents aspects épistémologiques des savoirs décrits dans les programmes ; par conséquent, un premier niveau d'analyse concerne la pertinence des tâches proposées dans chaque domaine mathématique et leur couverture du domaine (validité épistémo-didactique). Pour ce faire, nous avons situé notre travail dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard 1999). A partir des tâches proposées dans les évaluations, il s'agit de caractériser les connaissances apprises des élèves en relation avec les savoirs à enseigner et enseignés mis en jeu dans les différentes étapes de la transposition didactique. En effet, quelle validité accorder aux inférences faites à partir des scores si les tâches présentes dans l'évaluation ne sont pas pertinentes ou « représentatives » de celles relevant du domaine évalué, au regard des programmes et de ce qui est enseigné en classe ?

De ce fait, au delà d'une étude cognitive, nous fondons l'analyse des connaissances apprises par les élèves, dans un domaine donné, sur la caractérisation d'une référence épistémologique (Bosch & Gascon 2005). La définition de cette dernière repose sur une analyse épistémologique des « savoirs savants », relativement au domaine mathématique concerné, ici, respectivement en algèbre en fin de collège (Grugeon 1997) et aux nombres entiers en fin d'école (en particulier Tempier 2013); elle conduit, relativement au domaine étudié, à une description des types de tâches, des techniques permettant de les traiter et des éléments technologiques et théoriques justifiant les techniques. Nous prenons aussi en compte, dans l'analyse des tâches, leur complexité relativement au niveau d'enseignement auquel l'évaluation a lieu ainsi que la congruence sémantique des registres de représentation sémiotique (Duval 1996).

Par conséquent, au regard de la référence, relativement au domaine considéré, nous pouvons analyser la validité d'un test à partir de preuves basées sur le contenu d'une évaluation par une étude « globale » du contenu à savoir : la représentativité des types de tâches et la couverture du domaine selon les tâches proposées dans l'évaluation, la complexité des tâches à partir de l'étude des valeurs des variables didactiques en jeu et du niveau d'intervention du type de tâche et des savoirs en jeu (Castela 2008), les différents registres sémiotiques mis en jeu.

Ce point de vue épistémo-didactique, sur la totalité des items relevant d'un domaine donné, permet d'apporter *a priori* des éléments relatifs à la validité de contenu. Mais au-delà, quelque soit la tâche proposée, il faut s'assurer, en situation, qu'elle permet bien d'évaluer ce qu'elle est sensée évaluer, lorsque les élèves vont la résoudre, et en particulier la nature du raisonnement mobilisé au regard du niveau scolaire visé. Pour ceci, il est nécessaire de s'assurer que l'élève mobilisera bien les savoirs attendus, ce qui dépend aussi d'autres paramètres liés en particulier à l'énoncé.

Développée dans le cadre des approches psycho-didactiques en évaluation, la validité d'un test, qualifiée de « psycho-didactique » Vantourout et Goasdoué (2015) s'appuie sur des preuves basées sur le « processus de réponse de l'évalué, avec le souci de comprendre avant tout son fonctionnement cognitif ». Un deuxième niveau d'analyse se pose donc au niveau local, item par item, et se révèle d'autant plus complémentaire à l'analyse épistémo-didactique développée précédemment, que bon nombre des items sont sous la forme de QCM ou de Vrai-Faux. Les études menées par Sayac et Grapin (2014) sur les stratégies employées par les élèves de fin d'école pour répondre à des questions sous forme de QCM montrent que ce ne sont pas toujours des stratégies de savoir qui sont employées et que les élèves changent de stratégies au cours d'un même test, selon leur niveau de connaissance. On peut alors raisonnablement questionner l'impact de la forme de la question sur les connaissances que mobilisera l'élève, et étudier le décalage entre ce qui est attendu et ce qui est effectif. A ce stade, nous entrevoyons comment une approche psycho-didactique, fondée sur les processus de réponse de l'élève vient en complément d'une analyse épistémo-didactique. Comment l'approche psychométrique s'articule-t-elle par la suite ?

Le troisième niveau d'analyse vise à vérifier les caractéristiques psychométriques des items comme par exemple, leur pouvoir de discrimination, leur indice de difficulté ou encore, dans le cadre de comparaison temporelle entre 2008 et 2014, les items présentant des fonctionnements différentiels (items biaisés). Pour ces items, une analyse didactique relativement aux savoirs en jeu et à leur enseignement ou une observation d'élèves en train de résoudre l'exercice peut permettre d'expliquer leurs caractéristiques statistiques ; et réciproquement, les indicateurs statistiques correspondant à ces items peuvent nous conduire à interroger les pratiques enseignantes (praxéologies enseignées) et les savoirs évalués.

Par ailleurs, en psychométrie, la difficulté d'un item se détermine *a posteriori*, selon la réussite des élèves au test. En didactique des mathématiques, la complexité d'une tâche peut être définie à partir de différents descripteurs (que nous listons dans le paragraphe suivant) lors de l'analyse *a priori* mais aussi en considérant les difficultés des élèves recensées par différentes recherches relativement à l'apprentissage d'un savoir donné. Par conséquent, il est intéressant d'étudier la corrélation entre la difficulté de l'item (*a posteriori*) et ces éléments théoriques, déterminés *a priori* : nous faisons l'hypothèse que ce double éclairage (épistémo-didactique et psychométrique) permettra ainsi de préciser l'état des connaissances des élèves en fin d'école ou en fin de collège, et réciproquement, d'apporter des éléments supplémentaires pour garantir la validité des inférences faites à partir des résultats.

2. *Descripteurs de tâches retenus pour l'analyse*

Présentons désormais plus spécifiquement la méthodologie d'analyse que nous avons retenue.

Une première étape consiste à faire, pour le domaine étudié, une analyse de toutes les tâches de l'évaluation en précisant : les types de tâches et les objets mis en jeu, les valeurs des variables didactiques associées, les techniques possibles et celles mettant en jeu le raisonnement attendu, les registres de représentations sémiotiques en jeu et leur congruence (Duval 1996). Ensuite, comme nous l'avons expliqué précédemment, nous étudions la couverture du domaine par les tâches proposées relativement à une organisation mathématique de référence : ce qui nous permet de repérer les manques ou les redondances en termes de types de tâches, mais aussi la variété des représentations sémiotiques convoqués dans le dispositif d'évaluation.

Pour la deuxième étape, nous nous centrons plus localement sur chaque item et au delà de l'analyse *a priori*, par des observations d'élèves, étudions le processus de réponse développé par l'élève, notamment en fonction du format de question.

Ces deux analyses devraient être menées avant passation du test et permettre à la fois l'échantillonnage des tâches et le choix du format de question, pour garantir *a minima* que les distracteurs des QCM correspondent à des erreurs d'élèves et que le processus de réponse engagé pour répondre est bien celui attendu.

La troisième étape d'analyse correspond à la mise en perspective des caractéristiques statistiques des items (difficulté de l'item, indice de corrélation) avec les analyses épistémo-didactique et psycho-didactique : y a t-il une cohérence localement, globalement ? Si oui, quel éclairage apporte l'approche didactique ? si non, quelles modifications apporter pour enrichir l'évaluation ? Quelles conclusions apporter sur l'état des connaissances des élèves selon les groupes de l'échelle de performance ? Quelles hypothèses formuler alors sur la raison de ces difficultés en lien avec les programmes d'enseignement existants et les pratiques des enseignants ?

IV. ANALYSE DES EVALUATIONS EXISTANTES

1. *Observations générales et évolution 2008-2014*

Sur les évaluation CEDRE fin d'école et fin de collège, nous observons que les questions relatives au contenu, que ce soit dans sa globalité ou sur un domaine donné, mais aussi plus localement, item par item (choix des distracteurs pour les QCM ou modalités de correction pour les questions à réponse ouverte) restent insuffisamment prises en compte, notamment parce qu'elles ne font pas l'objet d'une analyse *a priori* (avant expérimentation) ou *a posteriori* (après expérimentation). Parallèlement, les questions ouvertes notamment en résolution de problèmes ont des consignes de correction qui ne permettent pas de prendre en compte différents types d'erreurs, la réponse étant considérée comme correcte ou incorrecte au regard du résultat attendu.

La question du choix des distracteurs dans les QCM est importante puisqu'elle impacte sur la réussite de l'élève. Même s'il est recommandé (Leclercq 2000) de choisir des distracteurs qui correspondent à des erreurs d'élèves correspondants à des conceptions ou des démarches erronées, nous avons pu constater, notamment dans l'évaluation 2008, que ce n'était pas forcément toujours le cas, et que par conséquent ces items ne se révélaient pas toujours valides d'un point de vue épistémo-didactique et psycho-didactique.

Nous présentons ci-après, pour les deux domaines, des résultats synthétiques de l'analyse que nous avons menée selon les deux premières étapes : une analyse épistémo-didactique et psycho-didactique.

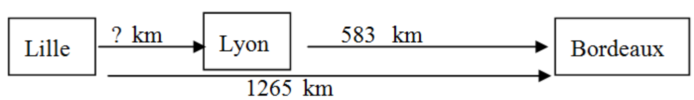
2. *L'arithmétique des entiers en fin d'école*

Nous entendons par « arithmétique des nombres entiers » le domaine couvert par la numération (écriture et lecture des nombres dans différents systèmes sémiotiques), le calcul posé et mental (addition, soustraction, multiplication et division euclidienne) ainsi que la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs.

En ce qui concerne les registres sémiotiques mis en jeu, une évolution est constatée entre 2008 et 2014 : alors qu'ils étaient absents en 2008, des items mobilisant des écritures avec des unités de numération et des représentations symboliques avec du matériel de numération ont été insérés dans l'évaluation 2014. Les autres registres (écriture chiffrée, droite graduée, décomposition additive ou en puissances de dix) figurent parmi les exercices proposés, mais les écritures en lettres (et plus largement la numération parlée) sont très peu présentes. Par ailleurs, la plupart des nombres mobilisés sont de l'ordre du millier ou de la centaine, mais « les grands nombres » sont peu présents (une quinzaine d'items pour chacune des évaluations).

Certains manques constatés dans l'évaluation 2008, en termes de types de tâches ont pu être comblés en 2014, en particulier celles portant sur les conversions de registres (par exemple, le passage d'une écriture en chiffres à une écriture en lettre n'était pas évalué en 2008). Enfin, aussi bien en 2008 qu'en 2014, les quatre opérations (maîtrise des techniques opératoires) ont fait l'objet de nombreuses tâches similaires (ce qui interroge leur redondance et l'équilibre global), mais on observe une répartition équilibrée des types de problèmes proposés (additifs et multiplicatifs).

Dans un deuxième temps, si on s'intéresse plus localement à certains items, on peut constater par exemple un effet du format de la question sur la réussite de l'élève. L'item suivant (Figure 2) a été proposé sous forme ouverte et sous forme de QCM :



Quelle est la distance entre Lille et Lyon ?

□ 682 km □ 1082 km □ 1265 km □ 1848 km

Figure 2 - *Item extrait de CEDRE fin d'école 2008*

Dans le cas du QCM, les choix proposés étaient : 682 km (la bonne réponse), 1082 km (pas d'explication reposant sur un type d'erreur reconnu), 1265 km (recopie du nombre le plus grand) et 1848 km (la somme des deux nombres). Alors que l'item est réussi en ouvert à 62 %, il est réussi en QCM à 73 % ; le constat de cet écart de réussite (11 %) cible bien la question de ce qui est évalué en fonction de la forme de la question et l'impact de cette dernière sur l'activité de l'élève. Dans ce type de cas, une première analyse épistémo-didactique permettra de mettre en avant les procédures de résolution possibles, celles attendues, les erreurs possibles et conduira à trouver des distracteurs « pertinents » pour le QCM ; dans cet item, nous interrogeons justement le choix du distracteur « 1082 » qui aurait pu avantageusement être remplacé par 1322 correspondant à une mauvais maitrise de la technique opératoire de la soustraction (soustraire le plus grand du plus petit systématiquement sur chaque colonne). Par ailleurs, l'écart de réussite avec la question sous forme ouverte peut s'expliquer par l'effet rétroactif du QCM (si l'élève, après calcul, ne trouve pas une des réponses proposées, il peut vérifier ou modifier son raisonnement), mais aussi par la possibilité d'utiliser les choix de réponse et les tester un par un (calculer 682 + 583 et constater que la somme est égale 1265). Mais, c'est en observant l'activité de l'élève lors de la résolution effective du problème que l'on pourra savoir s'il mobilise effectivement les procédures attendues ou s'il met en place des stratégies autres, en particulier dans le cas de QCM.

3. *L'algèbre en fin de collège*

Nous entendons par algèbre, en fin de collège, le domaine couvert par la résolution de différents types de problèmes intra ou extra mathématiques et dans différents cadres - problèmes de généralisation (expressions littérales), problèmes de modélisation (formules), des problèmes de mise en équation (équations ou inéquations), problèmes de preuve - ainsi que le calcul sur les expressions littérales, les équations, mobilisant des propriétés d'ordre syntaxique et sémantique (propriété de distributivité, conservation de l'égalité, mais aussi équivalence des expressions) et des modes de représentation associés à différents registres sémiotiques de représentation.

Pour la première étape d'analyse, les tâches mises en jeu dans l'évaluation CEDRE en 2008 et en 2014 relèvent bien du domaine algébrique mais ne couvrent tous les types de tâches du domaine.

Dans CEDRE 2008, au-delà des tâches de calcul habituelles bien représentées - substituer, développer ou factoriser une expression algébrique, tester si un nombre est solution d'une équation ou inéquation du premier degré, résoudre une équation produit, un système de deux équations du premier degré à deux inconnues – certaines, plus complexes, permettent d'étudier la capacité des élèves à articuler calcul algébrique et numérique (figure 3). Cette tâche n'a pas été reprise en 2014.

a et b sont deux nombres tels que $a + b = 5$ et que $a - b = 3$. Quelle est la valeur de $a^2 – b^2$?	En 2008, Chantal fête ses 53 ans et sa fille Sophie, ses 24 ans. En quelle année l'âge de Chantal sera-t-il le double de celui de sa fille Sophie ?

Figure 3 - *Item extrait CEDRE fin de collège 2008* ***Figure 4 -*** *Item extrait CEDRE fin de collège 2008*

En 2014, la résolution d'une équation du premier à une inconnue « $8x - 3 = 5x + 30$ », sous forme ouverte, permet de repérer les techniques utilisées par les élèves. Une tâche « développer » de format V/F, repris en 2014, permet d'aborder la problématique de l'équivalence des expressions algébriques. Du côté objet, globalement les items en 2008 sont représentatifs du domaine, l'aspect calcul intelligent étant même présent via l'item de la figure 3 et les exercices V/F.

En 2008, au delà des tâches de production de formules, les problèmes numériques proposés, au vu de leur structure et des valeurs numériques retenues, peuvent être résolus par des démarches numériques et ne nécessitent pas la mise en équation, la résolution algébrique du problème s'avérant en plus difficile (réponse décimale) (cf. Figure 4). On peut donc remettre en cause la validité de cet item, au vu de l'objectif visé « mettre en équation ». Cet item a été repris en 2014, mais l'objectif visé est devenu « résoudre un problème par diverses démarches ». Aucun problème de généralisation, de modélisation fonctionnelle, de mise en équation ou de preuve ne permet d'étudier si les élèves rentreraient d'eux mêmes dans une démarche algébrique pour les résoudre. Des tâches de généralisation ont été ajoutées en 2014, sans prise en charge de la mobilisation des lettres, mais des types de tâches restent absents.

En ce qui concerne la deuxième étape d'analyse, on peut s'interroger sur le codage des réponses, limité à correct / incorrect et le choix des distracteurs pour certains problèmes. Dans le cas des questions ouvertes, ce codage ne permet pas de distinguer les types de technique utilisés par les élèves conduisant à une réponse correcte, ni les types d'erreurs. Ces techniques relèvent-elles de l'algébrique (Cf. figure 4) ? En 2014, davantage d'énoncés à « question ouverte » ont été proposés mais quelle exploitation en sera faite ?

En bilan, l'analyse des items du test, au niveau global (couverture des items relativement au domaine) et local (choix des distracteurs ou modalités de correction pour les réponses ouvertes), nous amène à interroger partiellement la répartition de la population sur l'échelle de performance, réalisée *a posteriori* à partir de la réussite aux exercices.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

La méthodologie d'analyse proposée ici et illustrée à partir de quelques exemples montre la richesse et l'intérêt de croiser différents champs de recherche (épistémo-didactique, psycho-didactique et psychométrique). Si une analyse épistémologique et didactique permet de contrôler le contenu de l'évaluation au niveau local (par tâche) et global (sur le recouvrement et la variété), il s'agit aussi de mettre en perspective la complexité de la tâche déterminée par l'analyse *a priori* avec l'indice de difficulté de l'item pour repérer d'éventuelles incohérences. Des questions similaires peuvent aussi se poser sur des items qui pourraient sembler pertinents d'un point de vue didactique, mais qui ne se révèleraient pas discriminants après calcul du r_{bis}. Dans les deux cas, une analyse de la validité psycho-didactique des items, ou la formulation d'hypothèses relatives aux pratiques enseignantes permettraient d'interpréter ces écarts. On comprend ainsi qu'il ne s'agit pas de trois approches successives, mais bien de points de vue complémentaires, parfois sur un même item, qui renseignent différemment sur le contenu des évaluations et sur leurs résultats.

Au-delà de l'analyse des évaluations existantes, les résultats obtenus devraient ainsi contribuer à perfectionner la conception des évaluations externes existantes. Signalons pour conclure que les évaluations CEDRE en mathématiques entre 2008 et 2014 ont vu leurs dispositifs de conception évoluer grâce à deux types de travaux en didactique : l'intégration des exercices extraits du dispositif Pépite (Grugeon 1997) pour évaluer les compétences des élèves en algèbre (fin de collège) et l'exploitation de l'outil d'analyse « facteurs de complexité et de compétence » développé par Sayac & Grapin (2014) pour équilibrer les items de l'évaluation CEDRE fin d'école.

REFERENCES

Artigue M., Winslow C. (2010) International comparative studies on mathematics education: a view from the anthropological theory of didactics. *Recherches en didactique des mathématiques* 30(1/3), 47–82.

Bodin A. (2006) L'évaluation du savoir mathématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(1/3), 49–96.

Bosch M., Gascon J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier A., Margolinas C. (Eds.) *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 197 – 122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bottani N., Vrignaud P. (2005) La France et les évaluations internationales. Rapport établi à la demande du Haut Conseil de l'Évaluation de l'École, 16. Paris : DEP/Bureau de l'édition.

Brun A., Huguet T. (2008) Les compétences des élèves en mathématiques en fin de collège, *Note d'information*, 10-18. Direction de l'Évaluation de la Prospective et de la Performance.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques* 28(2/3), 135–182.

Chevallard Y., Feldmann S. (1986) *Pour une analyse didactique de l'évaluation.* IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19 (2/3), 221 – 266.

De Landsheere (1988) *Faire réussir, faire échouer.* Paris : PUF

Duval R. (1996) Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en didactique des mathématiques* 16(3/3), 349–380.

El Hage S., Le Hebel F., Coppé S., Tiberghien A. (2014) Identifier l'évaluation formative en classe. In *Cultures et politiques de l'évaluation en éducation et en formation*, *Actes du 26ème colloque ADMEE-Europe*. Marrakech.

Grégoire J., Laveault D. (2014) *Introduction aux théories des tests en sciences humaines* Bruxelles : De Boeck Université.

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique des mathématiques*17 (2/3), 167 – 210.

Grugeon-Allys B., Pilet J., Chenevotot-Quentin F., Delozanne E. (2012) Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. In Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.L., Robert A. (Eds.) Recherche en Didactique des Mathématiques, *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives*, Hors-série (pp. 137-162). Paris : La pensée sauvage.

Leclercq D. (1986) *La conception des questions à choix multiple.* Bruxelles : Labor.

Lescure S. & Pastor J-M. (2012) Mathématiques en fin d'école primaire. Le bilan des compétences. Paris : Scéren.

Megherbi H., Rocher T., Gyselink V., Troseille B., Tardieu H. (2009) Évaluation de la compréhension de l'écrit chez l'adulte. *Économie et statistique*, 424-425, 63-86.

Mons N. (2009) Les effets théoriques et réels de l'évaluation standardisée. Compléments à l'étude Eurydice. Réseau Eurydice.

Pilet J. (2012) *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation.* Thèse de doctorat Paris : Université Paris-Diderot.

Roditi E., Chesne J.-F. (2012). Un point de vue didactique sur les questions d'évaluation en éducation. In Lattuati M., Penninckx J. & Robert A. (Eds.) (pp. 279–292) *Une caméra au fond de la classe.* Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

Roditi E., Salles F. (2015) Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques, un autre regard sur les résultats. *Revue Education et Formations* 86 – 87, 235-255.

Ruminot-Vergara C. (2014) Effets d'un système d'évaluation sur l'enseignement des mathématiques : le cas de SIMCE au Chili. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Diderot.

Sayac N., & Grapin N. (2014) Evaluer les capacités des élèves à résoudre des problèmes dans le cadre d'une évaluation externe en France ; la spécificité des QCM. *Education et francophonie* XLII :2.

Schneider M. (2006) Comment des théories didactiques permettent-elles de penser le transfert en mathématiques ou dans d'autres disciplines ? *Recherches en didactique des mathématiques* 26(1), 9 – 38.

Tempier F. (2013) La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. Thèse de doctorat. Paris : Université Paris Diderot (Paris 7).

Vantourout M., Goasdoué R. (2015) Approches et validité psycho-didactique des évaluations. *Revue Éducation et Formations* e302, 139-156.

Winslow C. (2005) Définir les objectifs de l'enseignement mathématique : la dialectique matières - compétences. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 10, 131 – 155.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ESSAI D'EXPLICATION DU NIVEAU FAIBLE DES PERFORMANCES MATHÉMATIQUES DES ÉLÈVES MAROCAINS DES CYCLES PRIMAIRE ET SECONDAIRE COLLÉGIAL

Mustapha OURAHAY[*] - Somaya EL GHARRAS[**] – Omar ROUAN[***]

Résumé : Cette présentation s'appuie sur des résultats obtenus par les élèves marocains de certains niveaux des cycles primaire et secondaire collégial dans des évaluations nationales et internationales. Elle cherche à donner quelques explications à la faiblesse de leur performance en mathématiques qui est très inférieure à la moyenne internationale. Elle se base sur une analyse de la réalité actuelle de l'enseignement marocain des mathématiques et sur l'analyse des rapports du Conseil Supérieur de l'Enseignement et de ses recommandations. Elle permet de montrer qu'il ne faut pas sous-estimer l'impact de certains facteurs qui sont de l'ordre du fonctionnement du système éducatif sur la qualité de l'enseignement des mathématiques.

Mots clés : évaluation, acquis, mathématique, apprentissage, enseignement

Abstract -This presentation leans upon some national and international assessments results, obtained by the Moroccan students at the primary and secondary school levels. It seeks to explain the weakness of their mathematics performances, which are far under the international average. It is based on the analysis of the reality of the Moroccan mathematical teaching as well as on the reports and the recommendations of the Supreme Council of Education. It concludes that the impact of certain factors, linked to the educational system, on the quality of mathematics education should not be underestimated.

Keywords : assessment, acquired, mathematics, learning, teaching

Cette présentation est le fruit d'une analyse des différentes enquêtes nationales et internationales relatives à l'évaluation des acquis des élèves en mathématiques, des rapports réalisés par le Conseil Supérieur de l'Enseignement (SCE) réalisés entre 2007 et 2008, et des cadres de référence d'évaluation relatifs aux examens certificatifs des différents cycles d'enseignement et les différentes notes ministérielles qui les accompagnent.

L'évaluation des acquis des élèves constitue un outil essentiel à la fois pour l'élève, pour l'enseignant et pour le système éducatif. Elle a pour objet d'étayer un diagnostic pertinent, de permettre à l'enseignant de réguler sa pratique pédagogique afin d'optimiser son enseignement et, aux responsables du système scolaire, de prendre des décisions relatives à l'orientation et à la gestion de la carte scolaire.

[*] Ecole Normale Supérieure, Université Cadi Ayyad Marrakech - Maroc - mu.ourahay@uca.ma
[**] Ecole Normale Supérieure, Université Cadi Ayyad Marrakech – Maroc - so.elgharras@uca.ma
[***] Ecole Normale Supérieure, Université Cadi Ayyad Marrakech - Maroc - omarrouan@gmail.com

Ouharay M., El Gharras S., Rouan O. (2015) Essai d'explication du niveau faible des performances mathématiques des élèves marocains des cycles primaire et secondaire collégial. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé4, pp. 1028-1041.

Les différentes évaluations nationale (PNEA)[1] et internationale (TIMSS)[2] des acquis des élèves marocains s'accordent pour affirmer que le niveau de performance en mathématiques des élèves de la quatrième année du primaire et ceux de la deuxième année du secondaire collégial, considérées comme des années charnières, est très inférieur à la moyenne internationale.

En confrontant les résultats de ces évaluations aux notes des élèves en mathématiques obtenus au contrôle continu et aux examens de passage, nous avons constaté la présence d'une discordance. D'une part, les évaluations nationales et internationales affirment que le niveau des élèves est faible alors que les pratiques pédagogiques d'évaluation laissent croire le contraire. Comment peut-on expliquer cette discordance ? Quelles sont les raisons qui sont derrière sa présence ? Ces différentes évaluations visent-elles les mêmes objectifs, les mêmes niveaux d'habiletés et d'acquisition de connaissances et le même contenu mathématique ?

I. PRESENTATION SYNTHETIQUE DES RESULTATS DE L'EVALUATION DES ACQUIS REALISEE PAR TIMSS

TIMSS est une enquête internationale conduite par l'Association Internationale pour l'Évaluation du rendement scolaire (AIE). Le Maroc a participé à TIMSS 2003, TIMSS 2007 et TIMSS 2011. Cette enquête cherche à évaluer l'enseignement des sciences et des mathématiques à travers plusieurs facteurs, par la mesure de la performance dans ces champs disciplinaires sur des élèves de quatrième année du cycle primaire (4ème année de scolarité) et de deuxième année du cycle secondaire collégial (8ème année de scolarité).

1. Présentation de la méthodologie de TIMSS

L'évaluation des acquis des élèves réalisée par l'intermédiaire de ces différentes enquêtes se base sur le curriculum prévu, tel qu'il est défini par les pays ou les systèmes éducatifs. Elle échantillonne par niveau scolaire et par classes entières d'élèves au sein d'établissements.

TIMSS définit quatre niveaux de performance des élèves: le niveau de performance avancé, élevé, intermédiaire et bas. Pour pouvoir situer la performance des élèves d'un pays dans chacun de ces niveaux, TIMSS utilise quatre indices sur l'échelle de rendement.

[1]Programme National d'Evaluation des Acquis PNEA 2008
[2]Trends in International Mathematics and Science Study

Repères internationaux de rendement	Indice	4ème année du primaire	2ème année du secondaire collégial
Bas	400	Posséder les connaissances mathématiques de base.	Avoir une connaissance des nombres entiers et décimaux, des opérations, et des diagrammes élémentaires
Intermédiaire	475	Appliquer les connaissances de base dans des situations simples.	Appliquer les connaissances et la compréhension dans des situations simples : résoudre des problèmes à une étape comprenant des nombres entiers et des nombres décimaux
Élevé	550	Appliquer les connaissances et la compréhension pour résoudre les problèmes.	Appliquer les connaissances et la compréhension dans une variété de situations relativement complexes
Avancé	625	Appliquer la compréhension dans des situations relativement complexes et expliquer le raisonnement.	Organiser des renseignements et en tirer des conclusions, faire des généralisations et résoudre des problèmes hors de l'ordinaire.

Tableau 1 *- Niveaux de rendement des systèmes d'enseignement des mathématiques*

TIMSS projette les items d'évaluation sur des domaines cognitifs d'activité mathématique et des domaines de contenu de chaque niveau scolaire. Ces différents domaines recouvrent le contenu mathématique enseigné ainsi que l'ensemble des processus cognitifs mobilisés dans l'activité mathématique tout au long des années scolaires primaires et secondaires. Le cadre conceptuel ainsi que la méthodologie de cette évaluation peuvent être consultés dans l'un des rapports TIMSS 2007 ou TIMSS 2011. Les tableaux suivants précisent ces différents domaines ainsi que les poids qui leurs sont associés dans les tests.

4ème année du primaire		2ème année du secondaire	
Domaine de contenu	**Représentativité**	**Domaine de contenu**	**Représentativité**
Nombre	50%	Nombre	30%
		Algèbre	30%
Formes géométriques et mesure	35%	Géométrie	20%
Traitement de données	15%	Traitement de données	20%

Tableau 2 *- Représentativité des domaines de contenu de chaque niveau scolaire*

Domaine cognitif	4ème année du primaire	2ème année du secondaire
Connaître	40%	35%
Appliquer	40%	40%
Raisonner	20%	25%

Tableau 3 *- Représentativité des domaines cognitifs*

2. *Présentation des résultats*

La mesure des performances des élèves s'appuie sur la technique du « scale score » qui permet de ramener tous les tests à une même échelle et sur une estimation de la moyenne par intervalle de confiance avec un degré de certitude de 95%. La performance des élèves d'un pays est ainsi représentée par deux valeurs : la valeur du score moyen estimée sur la base des résultats échantillonaux et la valeur mise entre parenthèse qui représente la longueur de l'intervalle de confiance qui contient ce score avec un degré de certitude de 95%.

Les résultats de TIMSS 2007 et TIMSS 2011 sont regroupés dans un même tableau pour faciliter la lecture et la comparaison. Nous avons choisi de présenter les résultats de Singapour en tant que l'un des pays du monde ayant les meilleures performances pour mieux situer et estimer les résultats des élèves marocains.

3. *Résultats des élèves de la 4ème année du cycle primaire*

Pays	TIMSS	connaître	appliquer	raisonner	Moyenne
Singapour	TIMSS 2007	620(4)	590(3.7)	578(3.8)	599(3.9)
	TIMSS 2011	629(3.5)	602 (3.4)	588(3.7)	606(3.2)
Maroc	TIMSS 2007	354(4.8)	346(4.7)	Non calculé[3]	341(4.7)
	TIMSS 2011	320(4.2)	332(3.9)	347(4.2)	335(4.0)

Tableau 4 *- Résultats des élèves par domaine cognitif*

Le score moyen des élèves marocains est très inférieur à l'indice international du niveau "bas" (400) et à la moyenne internationale (500). On constate une diminution de la performance "moyenne" des élèves dans les domaines « savoir » et « appliquer ».

[3] Le rendement moyen ne pouvait pas être estimé avec précision

Pays	TIMSS	Nombre	Géométrie et mesure	Traitement de données	Moyenne
Singapour	2007	661(4.3)	570(3.2)	583(3.2)	599(3.9)
	2011	619(3.4)	589(3.6)	588(3.4)	606(3.2)
Maroc	2007	353(4.5)	365(4.3)	316(6.1)	341(4.7)
	2011	340(3.8)	350(4.0)	271(4.7)	335(4.0)

Tableau 5 *- Résultats des élèves par domaine de contenu*

On remarque une nette diminution du score moyen des élèves marocains en traitement de données. Il est passé de 316 à 271. Ce score est très inférieur à l'indice international du niveau "bas".

4. Résultats des élèves de la deuxième année du cycle secondaire collégial

Pays	TIMSS	Connaître	appliquer	raisonner	Moyenne
Singapour	2007	581(3.4)	593(3.6)	579(4.1)	593(3.8)
	2011	617(3.8)	613(3.9)	604 (4.3)	611(3.8)
Maroc	2007	363(2.2)	378(1.9)	357 (2.7)	371(2.0)
	2011	365(4.4)	389(3.3)	383(3.5)	381(3.0)

Tableau 6 *- Résultats des élèves par domaine de cognitif*

Le rendement "moyen" des élèves marocains est inférieur au rendement "moyen" international. Leur rendement le plus bas est dans le domaine cognitif « connaître ». On note aussi une petite amélioration entre 2007 et 2011 dans les domaines « appliquer » et « raisonner ».

Pays	TIMSS	Nombre	Algèbre	Mesure et Géométrie	Représentation. de données	Moyenne
Singapour	2007	597(3.5)	579(3.7)	578(3.4)	574(3.9)	593(3.8)
	2011	611(3.6)	614(4.1)	609(3.9)	607(4.4)	611(3.8)
Maroc	2007	389(3.4)	362(4.0)	396(3.6)	371(3.4)	381(3.0)
	2011	379(2.6)	357(2.7)	390(2.5)	332(3.1)	371(2.0)

Tableau 7 *- Résultats des élèves par domaine de contenu*

Le rendement "moyen" des élèves marocains a connu une baisse entre 2007 et 2011, surtout dans le domaine de contenu « traitement de données ». Le domaine où ce rendement se rapproche de l'indice international du niveau bas est « Mesure et Géométrie ».

5. *Performance des élèves par rapport aux repères internationaux de rendement de mathématiques*

	Pays	**Singapour**		**Maroc**		**Seuil international Moyen**	
	TIMSS Seuil	**2007**	**2011**	**2007**	**2011**	**2007**	**2011**
4ème primaire	**Avancé**	41%(2.1)	43%(2.0)	0%(0.1)	0%(0.2)	5%	4%
	Élevé	74%(1.7)	78%(1.4)	2%(0.8)	2%(0.7)	26%	28%
	Intermédiaire	92%(0.9)	94%(0.7)	9%(1.1)	10%(1.2)	67%	69%
	Bas	98%(0.3)	99% (0.2)	26%(2.0)	26% (1.5)	90%	90%
2ème collège	**Avancé**	48%(2.0)	40%(1.9)	0%(0.0)	0%(0.1)	3%	2%
	Élevé	78%(1.8)	70%(1.1)	2%(0.2)	1%(0.5)	17%	15%
	Intermédiaire	92%(1.1)	88%(1.4)	12%(0.5)	13 %(1.1)	46%	46%
	Bas	99%(0.3)	97%(0.6)	36%(1.0)	41%(2.0)	75%	75%

Tableau n° 8 *- taux et niveaux de performance des élèves*

Ces tableaux donnent pour chaque niveau et pour chaque pays les pourcentages cumulés croissants allant des niveaux supérieurs aux niveaux inférieurs.

Au primaire les résultats de TIMSS 2007 et de TIMSS 2011 montrent que le taux des élèves marocains qui ont atteint le seuil international du niveau bas ainsi que celui des élèves du niveau intermédiaire n'ont pas changé. Ces taux sont nettement inférieurs aux taux moyens internationaux qui sont respectivement de l'ordre de 90% et de 67%. Seulement 37% des élèves marocains ont pu avoir un score supérieur ou égal à 400. Plus de 60% des élèves sont en dessous du seuil international associé au niveau bas.

Quant au collège, les taux des niveaux bas et intermédiaire ont connu une petite augmentation sauf que ces taux restent inférieurs aux taux moyens internationaux relatifs à chacun de ces deux niveaux qui sont respectivement de 75% et 45%. Plus de 40% des élèves sont au dessous du seuil du niveau bas.

Le rapport TIMSS 2011 souligne que, d'une part, plus de 25% des élèves marocains de la quatrième année du cycle primaire ont obtenu un score inférieur à 250 alors que leur score moyen est de 335. D'une autre part, plus de 25% des élèves marocains de la deuxième année du collège ont obtenu un score inférieur à 250 alors que leur score moyen est de 371. Ceci montre que la distribution des scores des élèves marocains est très hétérogène, ce qui permet de supposer que le score moyen n'a pas de signification.

Il faut noter que, dans l'évaluation des acquis, la mesure est plus efficace quand il existe une correspondance raisonnable entre le niveau d'habiletés mathématiques de l'élève à évaluer et la difficulté des éléments d'évaluation. Plus il y a décalage, plus il devient difficile d'obtenir une évaluation fiable. En particulier, lorsque les tâches d'évaluation sont beaucoup trop difficiles pour la plupart des élèves, ces derniers auront tendance à réagir d'une manière hasardeuse, et dans ce cas, il est extrêmement difficile d'atteindre la qualité acceptable de l'évaluation.

II. ÉVALUATION DES ACQUIS DES ELEVES PAR PNEA

Le Programme National d'Évaluation des Acquis (PNEA) a été piloté en 2008 par l'Instance Nationale d'Évaluation du Système d'Éducation et de Formation (INESEF) auprès du Conseil Supérieur de l'Enseignement (CSE), en collaboration avec le Centre National des Examens et d'Évaluation relevant du Ministère de l'Éducation Nationale. Il s'est assigné pour objectif de mesurer les acquis scolaires des élèves marocains en langues arabe et française, en mathématiques et en sciences.

Ce programme vise une évaluation diagnostique des apprentissages et porte sur les programmes scolaires officiels. Pour chacune des matières ciblées, l'accent a été mis sur les connaissances et compétences effectivement acquises par les élèves, en regard des curricula et programmes prescrits. Les niveaux scolaires visés sont la 4ème et la 6ème année de l'enseignement primaire et la 2ème et la 3ème année de l'enseignement secondaire collégial.

1. *Présentation de la méthodologie de PNEA*

La méthodologie adoptée pour évaluer les acquis des élèves par le PNEA est fondée sur des tests disciplinaires (Arabe, Français, Mathématiques et Sciences) administrés à un échantillon représentatif d'élèves mais aussi sur des questionnaires "Élève", "École", "Enseignant" et "Parents".

Les différents questionnaires ont pour but de recueillir de l'information permettant l'interprétation des performances des élèves. Les variables retenues par PNEA renvoient aux différents facteurs de la réussite scolaire exprimés dans Boufrahi & al. (2003) qui sont :

Les facteurs associés aux caractéristiques personnelles des élèves, et à leurs conditions socio-économiques;

Le rôle, le suivi et la participation des ménages dans la vie scolaire ainsi que leurs conditions socio-économiques;

Les caractéristiques personnelles des enseignants, leurs aspects professionnels et l'exercice du métier en relation avec la discipline enseignée ;

L'environnement de l'établissement scolaire et sa gestion pédagogique et administrative.

Les tests disciplinaires de rendement scolaire sont formulés sur la base de cadres de références et portent sur les apprentissages relatifs au niveau visé. Dans chaque cadre de référence on détermine le degré d'importance de chaque domaine d'apprentissage ainsi que les principaux objectifs d'apprentissage qui lui sont associés, et on élabore des tableaux de spécification pour chaque test dans lesquels on établit le pont entre les items, les domaines d'apprentissages et les domaines cognitifs.

Cette méthodologie a été développée par le Centre National des Examens et d'Évaluation relevant du Ministère de l'Éducation Nationale. Elle s'appuie sur les cadres de référence des examens des cycles primaire et secondaire collégial. En mathématiques, les objectifs d'apprentissage sont répartis selon trois domaines de contenu, à savoir les « activités numériques », les « activités géométriques » et les « activités de mesure ». Les domaines cognitifs d'activité mathématique retenus sont « connaître », « appliquer » et « résoudre ». Les tableaux ci-dessous montrent comment les objectifs d'apprentissage sont répartis selon les domaines de contenus et les domaines cognitifs. Notons que dans cette évaluation, le domaine cognitif « connaitre » n'apparait pas au niveau 6ème année primaire.

Domaine/objectif	4ème primaire				6ème primaire		
	Connaître	Appliquer	Résoudre	Total	Appliquer	Résoudre	Total
Domaine numérique	4%	32%	5%	41%	33%	6%	39%
Domaine géométrique	4%	18%	5%	27%	22%	6%	28%
Domaine de la mesure	4%	23%	5%	32%	7%	6%	33%
Total	12%	73%	15%	10%	82%	18%	100%

Tableau n° 9 *- Tableau de spécification des objectifs du cycle primaire*

Domaine/objectif	2ème collège				3ème collège			
	Connaître	Appliquer	Résoudre	Total	Connaître	Appliquer	Résoudre	Total
Domaine numérique	12%	31%	5%	48%	11%	18%	7%	35%
Domaine géométrique	11%	27%	4%	42%	15%	25%	10%	50%
Domaine de la mesure	3%	6%	1%	10%	5%	8%	3%	15%
Total	26%	64%	10%	100%	30%	50%	20%	100%

Tableau n° 10 - *Tableau de spécification des objectifs du cycle secondaire collégial.*

2. *Présentation et analyse des résultats*

Le codage retenu pour le traitement des productions des élèves consiste à affecter pour les domaines « Connaître » et « Appliquer », 1 point pour une bonne réponse et 0 point pour une mauvaise. Quand à « Résoudre », le codage adopté consiste à affecter 2 points aux réponses complètes, 1 point aux réponses partielles et 0 aux réponses fausses.

Que ce soit au collège ou au primaire, les objectifs d'apprentissage du domaine cognitif « résoudre » ne dépassent pas 20%, alors qu'ils dépassent 80% pour les deux autres domaines. Cette répartition des domaines cognitifs et de contenus adoptée par le PNEA est similaire à celle utilisée par TIMSS. Dans ce sens, nous dirons que ces deux évaluations adoptent la même méthodologie et elles diffèrent au niveau du traitement des données. TIMSS vise l'évaluation des acquis alors que PNEA vise l'évaluation de la performance du système éducatif.

Chez PNEA, le traitement des performances des élèves porte sur une analyse descriptive des scores des élèves par domaine de contenus et par domaine cognitif et ce, selon le genre, le milieu et la région.

En l'absence d'une échelle répartissant les élèves selon des seuils de performance, les résultats de chaque catégorie d'élèves sont donnés sous forme d'un score moyen calculé sur une échelle de 100. Par ce traitement, le PNEA cherche à relier les scores moyens des différentes catégories aux facteurs choisis comme étant ceux de la réussite scolaire. Il vise surtout l'analyse du rendement du système éducatif en relation avec les facteurs de la réussite scolaire retenus, au lieu de l'analyse de la représentativité des différents seuils de performances.

Nous retenons des résultats présentés dans le rapport PNEA, que la performance moyenne des élèves est de 34% en quatrième année du cycle primaire et de 25% en deuxième année du cycle secondaire collégial. Cette performance est faible et très inférieure au taux moyen requis.

Selon ce rapport, le facteur genre n'est pas significatif ce qui lui a permis de conclure que l'école joue en faveur de l'égalité des chances entre les deux sexes.

PNEA	Primaire		Secondaire	
	4ème année primaire	**6ème année primaire**	**2ème année collège**	**3ème année collège**
Enseignement privé	57%	68%	53%	65%
Enseignement public urbain	38%	48%	26%	31%
Enseignement public rural	31%	39%	22%	22%

Tableau n°11 *- Performance des élèves en mathématique, PNEA 2008*

Les résultats de ce tableau montrent que les élèves qui étudient dans des écoles privées ont de meilleures performances que ceux des écoles publiques et que les élèves des écoles publiques en milieu urbain ont de meilleures performances que ceux des écoles publiques en milieu rural.

Selon PNEA, l'analyse des résultats des différents questionnaires a permis de relever des indices qui permettent d'expliquer à la fois la faible performance des élèves en mathématiques ainsi que l'écart entre les performances des différentes catégories d'élèves. Parmi ces facteurs, on peut citer:

La majorité des élèves de l'enseignement privé ont profité, dans leur majorité, d'un enseignement préscolaire d'au moins deux ans. De plus, les élèves de l'enseignement privé font généralement l'objet d'une sélection, par des tests appropriés, avant leur admission.

Les différences au niveau de la réussite scolaire entre les deux milieux sont dues aux disparités du développement social et humain entre les zones rurales et les zones urbaines. L'offre d'enseignement préscolaire, plus importante en milieu urbain, est encore au stade embryonnaire dans le milieu rural. Aussi, les conditions de travail des enseignants en ville sont plus favorables que celles de leurs collègues du milieu rural.

L'analphabétisme touche plus les parents du milieu rural. Ceci se répercute sur l'intérêt qu'ils portent à la formation et à l'instruction de leurs enfants.

L'adoption des programmes officiels comme référence à l'évaluation des acquis scolaires des élèves peut être un frein à l'obtention de résultats performants. En effet il s'est avéré que, souvent, ces programmes ne sont pas réalisés complètement et que, lorsqu'ils le sont, les enseignements sont conduits dans des conditions qui ne permettent pas aux élèves de maîtriser suffisamment les compétences visées.

3. Commentaires

Ce programme national d'évaluation des acquis ne cherche pas à catégoriser les élèves selon leurs performances. Il cherche surtout à évaluer la performance du système éducatif en fonction de certains facteurs de réussite scolaire. Il n'a pas fourni d'éléments explicatifs du faible rendement de la totalité du système scolaire.

Rappelons que le rapport TIMSS 2011 montre que, d'une part, les résultats des élèves marocains ne sont pas homogènes, d'autre part, le traitement de données adopté par le PNEA n'a pas tenu compte de l'hétérogénéité et de la dispersion des performances des élèves au sein d'une même catégorie. Ceci permet de supposer que le score moyen des élèves marocains peut être biaisé et peut ne pas avoir de signification.

III. ANALYSE ET DISCUSSION

Les deux évaluations se complètent dans le sens où elles ont adopté la même ingénierie méthodologique. Toutefois, elles ne visent pas les mêmes objectifs dans le sens où TIMSS essaie de comparer les différentes performances des élèves des différents pays tandis que PNEA s'intéresse au rendement du système éducatif et à l'impact de facteurs dominants de la réussite scolaire.

Ces différentes évaluations des acquis se sont toutes appuyées sur le curriculum, tel qu'il est défini par le système éducatif et par conséquent sur les connaissances et compétences que l'apprenant devrait acquérir. Elles attestent qu'il y a présence d'un écart considérable entre ce qui est visé comme acquis scolaire et ce que les élèves ont acquis réellement sans fournir d'éléments explicatifs.

Le rapport de PNEA soutient les résultats de TIMSS dans leur globalité et permet d'apporter des explications à la disparité des scores des élèves marocains en se référant à des facteurs de réussite comme le milieu et le type d'enseignement. La disparité soulignée par PNEA concerne la performance des différentes catégories d'élèves. Mais il n'a pas abordé la disparité des performances des élèves dans une même catégorie que nous pensons être plus importante que celle entre les catégories d'élèves.

Pour compléter ces deux analyses, nous essayons de déterminer certains facteurs qui semblent agir sur la totalité du système éducatif et qui pourraient expliquer ce faible rendement. Pour déterminer ces facteurs explicatifs, nous nous sommes basés sur nos échanges avec différents acteurs et instances pédagogiques et sur la réforme du système éducatif de 2002, qui a apporté des changements au niveau des pratiques pédagogiques et de l'évaluation des acquis soutenant l'enseignement des mathématiques. Il s'agit de suppositions plutôt que d'affirmations.

1. L'abolissement du redoublement

Dans le rapport[4] sur l'état et les perspectives du système éducatif marocain et de la formation, le Conseil Supérieur d'Enseignement affirme que le taux élevé du redoublement que connaît le système éducatif devient un obstacle majeur à la réforme. En 2005-2006 les redoublants

[4] Volume 2 Rapport analytique, 2008 réalisé par l'Instance Nationale d'Évaluation du système d'Éducation et de formation (une structure au sein de conseil supérieur de l'enseignement).

représentaient 13% des effectifs du primaire, 16% de ceux du secondaire collégial et 18% de l'ensemble des lycéens[5]. Il ajoute que : « Le redoublement réduit de façon substantielle la capacité de notre système éducatif à généraliser la scolarité obligatoire et à améliorer la qualité de l'enseignement. » p.57 et qu'« Il est donc nécessaire que le système d'évaluation et d'examens tienne compte des dangers liés au redoublement massif des élèves et ses répercussions négatives sur l'atteinte des objectifs de la Charte en matière de généralisation de la scolarisation obligatoire et l'extension de l'enseignement. » p.58.

Pour palier à ce problème de redoublement, le système éducatif a pris la décision d'abolir le redoublement en cycle primaire, sauf pour des cas exceptionnels, sans aucun accompagnement pédagogique auprès des élèves en difficulté d'apprentissage et sans aucune formation continue pour les enseignants dans le but de les accompagner dans ce changement de paradigme.

Il faut reconnaître que ni le passage automatique ni le redoublement ne peuvent à eux seuls résoudre les problèmes des élèves en difficulté d'apprentissage. D'un côté, s'ils sont promus sans avoir acquis le minimum de connaissances et d'habiletés exigibles, ils risquent d'avoir autant de mal à la poursuite de leurs études. D'un autre côté, s'ils redoublent, ils auront peu de chances de réussir avec la reprise à l'identique d'une année scolaire. Dans les deux cas, il serait plus efficace de prendre des mesures d'accompagnement pour répondre aux besoins spécifiques de chaque élève d'autant plus que le redoublement est étroitement lié à un même rythme d'apprentissage imposé à l'ensemble des élèves, regroupés au sein d'un même groupe pédagogique, la classe. Ils doivent assimiler le même ensemble de connaissances dans le cadre d'une planification scolaire annuelle, rigide et identique.

2. *Les pratiques pédagogiques et l'évaluation*

Les pratiques pédagogiques se caractérisent par le peu de place allouée à l'évaluation formative. Par « manque de formation » des enseignants, comme l'affirme le rapport du CSE[6], l'évaluation sommative est le mode le plus utilisé. Par conséquent, le seul feed-back retourné aux élèves prend généralement la forme d'une note.

Dans le cadre de la réforme du système éducatif marocain entamé en 2002, le ministère de l'éducation nationale a produit des cadres de référence des examens de fin de cycle et des notes ministérielles relatives à l'évaluation continue. Ces différents documents permettent de cadrer les pratiques évaluatives, d'expliciter les niveaux d'habiletés et de connaissances à évaluer, et de fixer le minimum exigible à la réussite scolaire.

Notons que la correspondance entre les niveaux d'acquisition du savoir et de développement d'habiletés exigées aux élèves pour réussir et celles exigées pour poursuivre les études est conditionnée par :

1) Le rôle de régulateur de l'enseignant qui doit optimiser son enseignement en fonction des résultats d'évaluation des acquis de ses élèves,

2) La présence d'une concordance entre l'offre et la demande scolaire du système éducatif qui se traduit par la carte scolaire.

Une analyse des pratiques évaluatives en enseignement des mathématiques pourrait nous offrir des éléments de réponses au rendement faible des élèves en mathématiques. Le rapport du CSE souligne que les enseignants du primaire manquent de compétences professionnelles pour assurer un enseignement de mathématiques de qualité. Ce manque de compétence

[5] Volume 2 Rapport analytique, 2008, Paragraphe « Le redoublement est pédagogiquement inefficace », p. 55
[6] État et perspectives du système d'éducation et de formation Volume 4 : Métier de l'enseignant, CSE 2008.

impose une diminution des exigences de réussite, ce qui permet d'assurer, par voie de conséquences, d'une part, une fluidité dans la gestion de la carte scolaire, mais d'autre part, mène à une inadéquation entre la gestion de la carte scolaire et le minimum des acquis exigible à la poursuite des études.

L'évaluation des acquis des élèves en dernière année du cycle primaire (6ème année) est soutenue par un cadre de référence qui permet de définir à la fois les orientations générales soutenant les pratiques évaluatives et les deux niveaux d'habiletés à évaluer, à savoir, le niveau des applications directes et celui de la résolution de problèmes. Cette évaluation donne une importance considérable aux applications directes avec un taux de 80%. Ce premier niveau des habiletés renvoie à l'activité mathématique opératoire qui consiste à effectuer une opération de calcul, à construire une figure géométrique ou à convertir une mesure, domaines cognitifs "connaître" et "appliquer". Quant au deuxième niveau des habiletés, il représente 20% et il renvoie à la compréhension et à la construction du sens des notions et des opérations mathématiques, domaine cognitif "raisonner " ou "résoudre".

Selon ce cadre de référence d'évaluation des acquis en mathématiques, le seuil de réussite est fondé sur le premier niveau des habiletés alors que le seuil de poursuite des études renvoie au deuxième niveau des habiletés qui fait appel à la compréhension, à la communication et à la résolution en mathématique.

Nos contacts et échanges avec les enseignants de mathématiques laissent savoir que la majorité de ces derniers déclarent avoir des classes d'élèves dont la majorité d'entre eux ont des difficultés majeures en mathématiques dues aux lacunes cumulées dans les niveaux inférieurs. Ce cumul de lacunes est en grande partie due à l'écart qui se creuse entre le minimum des acquis nécessaire à la réussite et celui qu'exige la poursuite des études. Ces enseignants sont ainsi pris entre un niveau initialement faible des élèves et une programmation rigide d'exécution du programme planifiée sous forme d'un calendrier à respecter dans lequel le nombre d'heures par thème et le nombre de semaines par domaine de contenu sont prédéfinis dans une progression linéaire.

La réduction du nombre de redoublants, la planification pédagogique annuelle et rigide de l'enseignement des mathématiques et l'absence de soutien pédagogique aux élèves en difficultés d'apprentissage favorisent le cumul de lacunes chez ces derniers et creusent l'écart entre leurs acquis et le minimum exigible à la poursuite de leurs études. Ceci amène les enseignants à mettre l'accent sur la maîtrise des techniques et sur la préparation aux épreuves de l'évaluation sommative en leur donnant des activités et des problèmes similaires aux épreuves d'examen, c'est-à-dire à conditionner leurs pratiques pédagogiques par l'évaluation pour permettre à leurs élèves d'avoir les notes qui leurs permettraient de réussir. Les enseignants se sentent souvent obligés d'enseigner « pour l'examen » et les élèves sont encouragés à réussir aux examens aux dépens des véritables objectifs d'apprentissage. De plus, les pratiques évaluatives pourraient conduire les élèves à concevoir leurs évaluations comme des moments stressants, en raison de leur importance pour leur avenir scolaire et social.

Ce glissement pédagogique des pratiques des enseignants est l'une des causes de l'écart qui existe actuellement entre le niveau des acquis des élèves et le niveau minima exigible pour la poursuite des études. Ce cadre de référence d'évaluation associé aux pratiques pédagogiques de la majorité des enseignants encouragent les élèves à maitriser des techniques opératoires sans comprendre leurs sens et sans pouvoir les mobiliser dans des situations problèmes contextuelles.

IV. CONCLUSION

Nous pensons que le problème de l'adéquation de l'évaluation des acquis à la carte scolaire se traduit actuellement par une baisse de niveau des acquis des élèves et qu'il résulte des facteurs qui sont de l'ordre de la gestion du système scolaire qui dépasse le cadre de l'enseignement des mathématiques.

En y regardant de près, ces différentes pistes d'explication ont un point commun : elles sont toutes des facettes de la gestion du système éducatif. Pour cette raison, nous encourageons l'amorce d'une réflexion importante sur cette problématique, dans laquelle la question du pilotage du système éducatif par les résultats devrait tenir une place centrale.

Malheureusement, pour diverses raisons, dans le pilotage quotidien du système éducatif, cette dimension des acquisitions des élèves n'est pas directement prise en compte. Cette situation contribue à expliquer l'écart qui se creuse entre ce qui est prescrit comme performances en mathématiques et les niveaux d'acquisitions atteints.

Tout enseignement des mathématiques doit être soutenu par un minimum d'exigences telles que:

Les enseignants doivent avoir une certaine maîtrise de la discipline à enseigner et une compétence professionnelle qui leur permettraient d'assurer leur fonction d'enseignant

Les élèves doivent avoir un minimum de pré requis qui leur permettraient de poursuivre un apprentissage en mathématiques.

L'évaluation sommative et/ou certificative doit avoir pour objectif de valider les acquis des élèves et d'assurer le niveau minimal d'acquisition de connaissances et de développement de compétences nécessaire à la poursuite des études au niveau supérieur.

Quand l'une de ces trois exigences n'est pas satisfaite, les difficultés d'apprentissage commencent à se cumuler et peuvent devenir insurmontables.

REFERENCES

A. RAPPORTS D'ENQUÊTES

Programme National d'Évaluation des Acquis PNEA 2008, Rapport analytique version en langue française réalisé par le Conseil Supérieur de l'Enseignement du Maroc publié en 2009

Programme National d'Évaluation des Acquis PNEA 2008, Rapport synthétique en langue française réalisé par le Conseil Supérieur de l'Enseignement du Maroc publié en 2009

État et perspectives du système d'éducation et de formation Volume 3 : Atlas du système d' »éducation et de formation, publié par le Conseil Supérieur de l'Enseignement du Maroc, l'Instance Nationale d'Évaluation du système d'Éducation et de formation, rapport annuel 2008.

État et perspectives du système d'éducation et de formation Volume 2 : Rapport analytique, publié par le Conseil Supérieur de l'Enseignement du Maroc, l'Instance Nationale d'Évaluation du système d'Éducation et de formation, rapport annuel 2008.

État et perspectives du système d'éducation et de formation Volume 4 : Métier de l'enseignant, publié par le Conseil Supérieur de l'Enseignement du Maroc, l'Instance Nationale d'Évaluation du système d'Éducation et de formation, rapport annuel 2008.

TIMSS (2007) International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades, Mullis, I.V.S., Martin M.O., Foy P. (with Olson J.F., Preuschoff C., Erberber E., Arora A., Galia J.) (2008) Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

TIMSS (2011) International Results in Mathematics, Ina V.S. Mullis, Michael O. Martin, Pierre Foy, and Alka Aroram, TIMSS&PIRLS International Study Center, Boston College

B. NOTES MINISTÉRIELLES

Arrêté ministériel Numéro 2383.06 (16/09/2006) relatif à l'organisation d'examen d'option du certificat des études primaires

Note ministérielle N° 46-2006, Cadre de référence d'évaluation des matières d'examen normalisé pour l'obtention du certificat des études primaires

Note ministérielle N°43 - 2006, organisation des études en enseignement secondaire

Note ministérielle N° 28-2010, Cadre de référence d'évaluation des matières d'examen normalisé pour l'obtention du certificat des études secondaire collégiales

Note ministérielle, note142-8, 2007 relative à l'évaluation en mathématiques du cycle secondaire qualifiant

C. DOCUMENTS PEDAGOGIQUES OFFICIELS

Ministère de l'Éducation Nationale de l'Enseignement supérieur et de la recherche scientifique, Guide pédagogique de l'enseignement primaire, Maroc, 2009

Le livre blanc volume 2, curricula des cycles primaires, Maroc, 2002

Les programmes de mathématiques de l'enseignement primaire

Les programmes de mathématiques de l'enseignement primaire 2010

Les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire collégial 2009

Les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire qualifiant 2007

DIDACTIQUE ET ÉVALUATION : UN NOUVEAU REGARD SUR LE PISA 2012

Eric RODITI*

Résumé – Les enquêtes du PISA visent à mettre au jour les acquis des élèves de 15 ans. Ce que le PISA nous apprend dépend strictement de ce qui est mesuré. En mathématiques, un éventail de compétences diverses est évalué, mais les critères ne tiennent pas compte du degré d'initiative demandée à l'élève. Une catégorisation des items est proposée dans cette communication, elle distingue les compétences en fonction de différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques. Elle conduit à un nouveau regard sur le test PISA ainsi que sur les résultats de la France.

Mots-clefs : Didactique des mathématiques, Évaluation, PISA, ANR.

Abstract – The inquiries of the PISA aim at indicating the knowledge of the 15-year-old pupils. What the PISA teaches us depends strictly on what is measured. Different mathematical skills are assessed, but the criteria do not take into account the level of initiative attempt from the pupil. A new categorization of items is proposed in this lecture, it distinguishes the skills according to various levels of using mathematical knowledge. It leads to a new comprehension on the test PISA as well as on the results of France.

Keywords: Mathematics education, Assessment, PISA, ANR

Les enquêtes du PISA (Programme International de Suivi des Acquis des élèves) visent à mettre au jour les acquis des élèves de 15 ans – c'est-à-dire ce qu'ils sont capable de faire avec ce qu'ils ont appris –, avec quelles différences suivant les pays comme au sein de chacun d'eux. Ces enquêtes conduisent à un classement international, mais aussi à rendre compte du niveau des élèves les plus performants comme de celui des plus faibles, à pointer les inégalités entre les filles et les garçons ou selon les catégories professionnelles et sociales. Les connaissances produites par le PISA dépendent strictement de ce qui est mesuré. En mathématiques, par exemple, on ne demande pas aux élèves de restituer leur connaissance des définitions ou des règles. On évalue leur compétence, c'est-à-dire ce qu'ils mobilisent pour comprendre et résoudre un problème. Les organisateurs du PISA cherchent à évaluer un éventail de compétences diverses : les questions ont différents niveaux de difficulté, elles font appel à différents processus psycho-cognitifs, elles correspondent à plusieurs domaines mathématiques et elles sont posées dans des contextes diversifiés de la vie réelle. Néanmoins, même s'il apparaît clairement que les questions posées tiennent compte, en amont, du degré d'initiative nécessaire, les grilles de codages – et donc les analyses qui en résultent en aval –

* Sorbonne Paris-Cité, Université Paris Descartes, Laboratoire EDA – France – eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

Roditi E. (2015) Didactique et évaluation : un nouveau regard sur le PISA 2012. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé4, pp. 1042-1053.

ne différencient pas, par exemple, les questions qui nécessitent l'application directe d'une règle mathématique de celles qui exigent une prise d'initiative de la part de l'élève[1].

Une nouvelle catégorisation des items est proposée dans cette communication ; elle distingue les compétences en fonction de différents niveaux concernant les activités mathématiques requises. Sur deux items, des informations présentées dans le rapport de l'OCDE et des analyses auxquelles conduit cette nouvelle catégorisation sont mises en regard. Puis une étude des données concernant la France conduira à une réinterprétation des connaissances apportées par le PISA quant aux difficultés en mathématiques, aux inégalités filles-garçons, à l'effet des différences sociales ou du retard scolaire sur les acquis en mathématiques. Cette recherche s'intègre dans un projet plus large soutenu par l'ANR[2]

I. DESCRIPTION DES COMPETENCES MATHÉMATIQUES : OUTILS DE L'OCDE ET CLASSIFICATION ISSUE DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Piloté par l'OCDE (Organisation pour la Coopération et le Développement Économique), le PISA fait référence quant à l'évaluation des acquis des élèves à la fin de la scolarité obligatoire. En 2012, comme pour la dernière fois en 2003, le domaine majeur de l'évaluation PISA fut la culture mathématique. Mais qu'évalue vraiment le PISA en mathématiques ? Qu'est-ce que la culture mathématique et comment est-elle représentée dans les items du test ?

1. Cadre défini par l'OCDE pour l'évaluation de la culture mathématique

Le cadre d'évaluation de la culture mathématique est fondé sur une approche psychologique de l'activité mathématique des élèves répondant aux items du test. Il a été élaboré pour l'OCDE conjointement par l'*Australian Council for Educational Research* (ACER) et par une organisation de recherche pédagogique basée aux États-Unis, *Achieve Inc*. (OCDE 2013). Indiquons-en les éléments essentiels à partir de quelques extraits de cette documentation.

> L'enquête PISA se fonde sur une conception de l'évaluation des connaissances, des compétences et des attitudes qui reflète l'évolution des programmes d'enseignement : elle va au-delà des acquis purement scolaires et se concentre sur la mise en œuvre des savoirs et savoir-faire dans des tâches et des défis quotidiens, que ce soit en famille ou dans le monde du travail. […]. L'enquête PISA cible des activités que les élèves âgés de 15 ans auront à accomplir dans l'avenir et cherche à identifier ce qu'ils sont capables de faire avec ce qu'ils ont appris […]. Les épreuves sont conçues à la lumière du dénominateur commun des programmes scolaires des pays participants, sans toutefois s'y cantonner. Elles servent à évaluer les connaissances des élèves, certes, mais aussi leur faculté de réflexion et leur capacité à appliquer leurs connaissances et leurs expériences dans des situations qui s'inspirent du monde réel. (OCDE 2013, p. 13)
>
> La culture mathématique est l'aptitude d'un individu à formuler, employer et interpréter des mathématiques dans un éventail de contextes, c'est-à-dire à raisonner en termes

[1] Le document http://research.acer.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1003&context=pisa, rend bien compte du fait que, selon le PISA, la question de la prise d'initiative est présente dans chacune des compétence et constitue de surcroît une compétence à part entière : « *devising strategies* ». Elle apparaît dans la construction des items, dans leur choix et se traduit dans la prédiction de difficulté de chacun des items (http://research.acer.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1006&context=pisa).

[2] L'ANR (Agence Nationale de la Recherche) soutient le projet NEOPRAEVAL sur les nouveaux outils et les nouvelles pratiques d'évaluation en mathématiques.

mathématiques et à utiliser des concepts, procédures, faits et outils mathématiques pour décrire, expliquer et prévoir des phénomènes. Elle aide les individus à comprendre le rôle que les mathématiques jouent dans le monde et à se comporter en citoyens constructifs, engagés et réfléchis, c'est-à-dire à poser des jugements et à prendre des décisions en toute connaissance de cause. (OCDE 2013, p. 27)

Afin de mesurer les acquis des élèves en mathématiques, retenons que l'OCDE catégorise les items suivant quatre grands domaines mathématiques (quantité, incertitude et données, variations et relations, espace et formes), suivant quatre types de contextes (personnel, sociétal, professionnel, scientifique) et suivant trois processus psycho-cognitifs : formuler (mathématiser les situations de vie réelle), employer (travailler au sein du modèle mathématique) et interpréter/évaluer (mettre un résultat mathématique à l'épreuve d'une situation réelle). Les experts s'accordent pour penser qu'il ne serait pas pertinent de construire un dispositif d'évaluation portant, pour toutes les questions de ce dispositif, sur chacun des processus psycho-cognitif. Il est ainsi fréquent, dans les items de l'enquête PISA, que plusieurs d'entre eux soient déjà pris en charge dans l'énoncé et que l'élève qui cherche à résoudre le problème n'en ait qu'un ou deux à mettre en œuvre (OCDE 2013, p. 28).

Ainsi, bien que tous les problèmes soient posés dans un contexte de vie réelle, ce dernier n'a pas toujours d'influence effective sur l'activité de l'élève traitant l'un des items liés à un problème. En outre, même lorsque l'élève doit *formuler* en langage mathématique la situation issue de ce contexte de la vie réelle et/ou *interpréter/évaluer* les résultats obtenus par rapport à ce contexte, il reste toujours une partie de l'activité de résolution qui consiste à *employer* des connaissances mathématiques. C'est donc la subdivision des étapes de la résolution du problème en différents items qui permet aux experts du PISA de classer chaque item dans une et une seule de ces trois catégories ; et ce classement témoigne, non pas d'une seule activité, mais plutôt de l'activité dominante. Il reste que tous les items ne sont pas équivalents quant au niveau de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques, et qu'ils ne reflètent donc pas le même niveau d'acquisition. C'est justement pour se donner les moyens de distinguer ces niveaux qu'une étude a été menée en 2013. D'autres études complémentaires avaient d'ailleurs déjà été menées, en France, après le PISA 2003, pour étudier la correspondance entre les items du questionnaire et les pratiques usuelles d'enseignement en fonction des programmes scolaires en vigueur dans notre pays (Bodin 2009).

2. *Différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques dans les items de mathématiques du PISA 2012*

L'étude complémentaire dont il est question a été réalisée par un groupe d'experts de la DEPP, c'est elle en effet qui, en France, administre le test PISA. Le groupe était composé d'enseignants, de formateurs, d'inspecteurs et d'un professeur des universités, didacticien des mathématiques et auteur de cette communication.

Les analyses produites se fondent sur des apports de la recherche en didactique des mathématiques et conduisent à des interprétations nouvelles des résultats du PISA. La nouvelle classification s'applique à tous les items du questionnaire, elle repose sur une analyse de l'énoncé visant à déterminer la nature de la mise en fonctionnement de connaissances mathématiques nécessaire pour répondre à la question posée dans l'item[3]. Elle

[3] L'étude porte donc sur tous les items de toutes les questions « papier-crayon » du PISA 2012. Le travail ne peut être montré que partiellement, faute de place et pour des raisons de confidentialité, ce qui biaise parfois peut-être le regard que peut porter le lecteur sur les analyses produites des items analysés dans ce texte. Des analyses complémentaires figurent dans une publication liée à cette recherche (Roditi & Salles, 2015). En outre, d'autres questions ont été soumises à des élèves, le travail s'effectuant par ordinateur cette fois. Leur analyse n'a pas été

est par conséquent indépendante des passations préalables qui permettent de déterminer la difficulté relative des items et leur pouvoir discriminant, en référence à la théorie de la réponse à l'item utilisée par les experts du PISA.

Les didacticiens se sont encore peu consacrés aux questions d'évaluation hormis pour l'analyse des productions d'élèves en situations scolaires afin de comprendre les conceptions que produit l'enseignement quant aux notions dont les recherches sont l'objet (Roditi 2012). Il est intéressant toutefois de tirer profit des travaux produits en didactique pour l'analyse de situations d'enseignement afin d'étudier des questions d'évaluation. Les items du PISA peuvent ainsi être différenciés selon deux premières catégories de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques : ceux pour lesquels la réponse repose uniquement sur la compréhension qualitative de contenus – concepts, théorèmes, etc. –, sans mise en fonctionnement de la part de l'élève, et ceux qui nécessitent la mise en œuvre d'une procédure reposant sur des contenus mathématiques. Les questions posées dans le PISA émergent toujours de situations liées à la vie réelle. Les items de la première catégorie évaluent ainsi la compréhension d'un savoir mathématique en contexte, mais seulement en tant qu'objet, les élèves n'ayant pas à l'utiliser. Les items de la seconde catégorie évaluent, en revanche, l'acquisition de ces savoirs en tant qu'outils, c'est-à-dire la capacité à les mettre en œuvre pour résoudre un problème. Cette distinction entre les caractères objet et outil des savoirs mathématiques avait été effectuée par Douady (1986), didacticienne, pour rendre compte de la dynamique à l'œuvre lors de la construction de nouvelles connaissances mathématiques, ces deux caractères entretenant une relation dialectique au cours de l'activité.

Ainsi, certaines questions d'évaluation portent sur des contenus mathématiques pour attester de leur compréhension pour eux-mêmes, elles visent le caractère objet de ces contenus. C'est le cas des exercices classiques d'entraînement de calcul numérique ou algébrique où les élèves attestent de leur capacité à effectuer une opération sans même que soit interrogée l'opportunité de poser cette opération dans un problème. Comme cela a déjà été expliqué, il n'y a pas d'items de la sorte dans le PISA. Il y a, en revanche, des items qui portent sur le caractère objet d'un concept, et où les élèves doivent témoigner d'une compréhension de ce concept sans avoir à le mettre en œuvre, ce que certains auteurs appellent une compréhension conceptuelle (Kilpatrick & al. 2001). Ce serait le cas, par exemple, d'un item demandant si un enfant qui jette un dé qui est tombé sur 6 la première fois, possède plus ou moins de chance d'obtenir 6 la deuxième fois. Il s'agirait seulement d'exprimer par une réponse sa compréhension de l'indépendance des événements aléatoires. Les savoirs ainsi évalués dans le PISA concernent souvent la probabilité, la notion de moyenne, les fonctions et les grandeurs. Nous avons réuni ces items dans une même catégorie appelée *Compréhension qualitative de concepts* ou plus simplement *Concept*.

D'autres questions évaluent le caractère outil des savoirs, l'élève doit alors mettre une connaissance mathématique en fonctionnement après s'être assuré de la pertinence de cette connaissance pour traiter la question posée dans le contexte indiqué. Nous distinguons ces mises en fonctionnement suivant qu'elles sont plus ou moins suggérées par l'énoncé, suivant aussi le degré d'initiative demandée à l'élève. Cela correspond en effet, selon nous, à différents niveaux d'acquisition des connaissances. En nous inspirant de travaux déjà effectués sur ce sujet en didactique (Robert 1998), nous considérons trois niveaux de mise en fonctionnement des contenus mathématiques.

Le premier d'entre eux est celui où l'élève effectue une tâche courante et obtient directement le résultat attendu par la mise en œuvre d'une procédure, souvent unique, qui est

---

menée dans le cadre de cette recherche, le lecteur pourra toutefois en consulter une analyse effectuée par Bardini (2015).

indiquée ou suggérée par l'énoncé, et dont les programmes scolaires permettent de penser qu'elle est automatisée pour les élèves. Dans les items du PISA, de tels items conduisent généralement à l'application d'une propriété géométrique, d'une règle de calcul, d'une lecture graphique directe, etc. Les items correspondant à ce premier niveau de mise en fonctionnement sont regroupés dans une catégorie appelée *Mise en fonctionnement directe d'une procédure* ou plus simplement *Directe*.

Les items qui relèvent du second niveau nécessitent que l'élève adapte ou transforme l'énoncé – les données ou la question posée – avant d'appliquer ses connaissances. La transformation peut prendre la forme d'une transformation d'information : convertir, par exemple, une donnée dans une autre unité de mesure. Il peut s'agir d'un changement de point de vue sur des objets mathématiques ou sur une relation entre des objets : isoler, par exemple, une figure plane d'une figure de l'espace ; ou, ayant à établir que trois points sont alignés, considérer la droite qui passe par les deux premiers et montrer que le troisième appartient à cette droite. L'élève peut aussi avoir à changer de cadre (Douady 1986) ou de registre de représentation (Duval 1995) : passer, par exemple, dans le cadre graphique pour résoudre un problème numérique ; convertir une procédure indiquée dans le registre langagier en un calcul appartenant au registre numérique ou algébrique. Tous ces items ont été regroupés dans une catégorie appelée *Mise en fonctionnement d'une procédure avec adaptation de l'énoncé* ou plus simplement *Adaptation*.

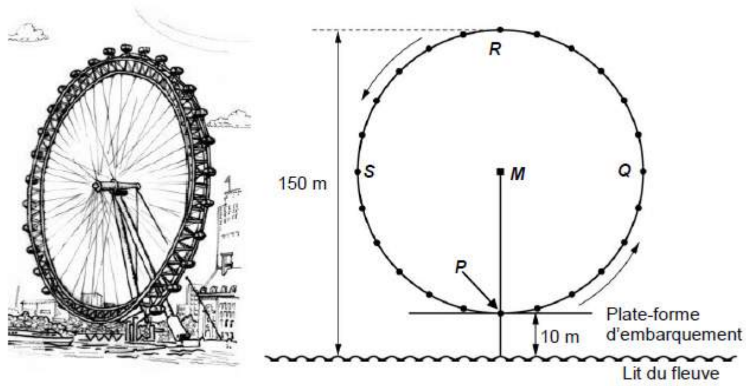
Dans les items du troisième niveau, la mise en fonctionnement des contenus nécessite que l'élève, de manière autonome, introduise un ou plusieurs intermédiaires. Ils peuvent concerner le processus de résolution lui-même : décomposer une question en plusieurs étapes ; introduire une notation pour traiter le problème, par exemple en attribuant une lettre à différentes variables ; etc. Il peut s'agir également d'intermédiaires ajoutés aux données : considérer une nouvelle variable combinant, par exemple, deux variables déjà explicitées dans un problème numérique ; utiliser un nouvel objet géométrique pour résoudre un problème, par exemple en considérant une droite ou un cercle qui n'apparaît pas dans l'énoncé ; introduire une fonction là où deux variables étaient indiquées avec une relation numérique les reliant ; etc. Parce qu'il s'agit d'un intermédiaire qui n'est pas suggéré par l'énoncé, l'introduction correspond à une initiative de la part de l'élève, elle est totalement à sa charge. Les items de ce type sont regroupés dans une catégorie appelée *Mise en fonctionnement d'une procédure avec introduction d'intermédiaires* ou plus simplement *Intermédiaires*.

La distinction de ces quatre catégories de mises en fonctionnement des connaissances mathématiques, qui portent sur leur dimension objet comme sur leur dimension outil, conduit à poser un nouveau regard sur les items du PISA ainsi que sur les résultats produits par ce programme. Le fait que les items du PISA ne soient pas tous libéré nous interdit d'en montrer l'analyse exhaustive à l'aide de cette nouvelle classification. Deux exemples sont néanmoins proposés qui montrent son intérêt pour apprécier un item. Puis nous développerons ce qu'apporte ce nouveau regard sur les résultats du PISA 2012 en mathématiques.

II. APPORTS DE LA NOUVELLE CLASSIFICATION A L'ANALYSE D'UN ITEM DE MATHEMATIQUES DU PISA 2012

Illustrons l'intérêt de cette nouvelle classification pour l'étude de deux items du questionnaire de culture mathématique du PISA 2012. Comme tous les items du PISA, ces deux items sont liés à des contextes de la vie réelle, néanmoins, comme nous l'avons déjà signalé, ce contexte n'a pas toujours d'influence sur l'activité de l'élève. Les deux items analysés sont regroupés dans la catégorie « employer » selon le cadre du PISA. C'est bien le cas dans l'exemple ci-dessous (figure 1) où l'étude d'une roue de manège est proposée mais où l'activité de l'élève porte essentiellement sur la figure géométrique représentée dans l'illustration figurant dans l'énoncé.

Une grande roue est installée sur les rives d'un fleuve.
En voici un dessin et un schéma :



Le diamètre externe de la grande roue est de 140 mètres et son point le plus élevé se situe à 150 mètres au-dessus du lit du fleuve. Elle tourne dans le sens indiqué par les flèches.

Question : LA GRANDE ROUE

La lettre *M* dans le diagramme indique le centre de la roue.

À combien de mètres (m) au-dessus du lit du fleuve se trouve le point *M* ?

Réponse :... m

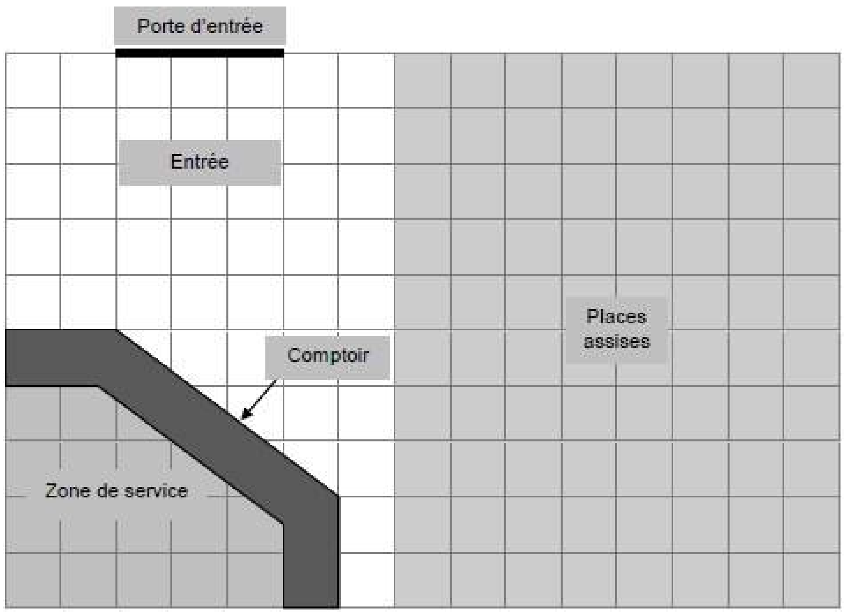
Figure 1 – *Item libéré du PISA 2012*

Dans cet item en effet, l'élève peut appliquer les propriétés du diamètre et du rayon d'un cercle à une figure où les mesures sont de simples nombres entiers puis tenir compte de la longueur séparant le bas de la roue avec le lit du fleuve. La figure proposée rend possible une utilisation implicite de ces connaissances puisque le point M, défini comme le centre du cercle, est placé au milieu du segment [PR] qui en est un diamètre. Différentes procédures directes et équivalentes sont envisageables : 1°) calculer la moitié de 140 et ajouter 10 ; 2°) enlever la moitié de 140 à 150 ; etc. Ce qui est important ici, c'est de noter que l'activité de l'élève porte seulement sur la figure géométrique donnée dans l'énoncé, c'est pourquoi l'item est associé au processus psycho-cognitif *employer* et au domaine mathématique *espace et formes*. C'est de remarquer ensuite que la résolution de l'exercice nécessite une application *directe* des connaissances mathématiques.

Examinons maintenant un autre item (Figure 2) portant lui aussi sur une situation du champ géométrique et ne demandant pas non plus à l'élève d'utiliser le contexte dans son activité de résolution du problème posé.

Voici le plan du magasin de glaces de Marie, qu'elle est en train de rénover.

La zone de service est entourée d'un comptoir.



Remarque : Chaque carré de la grille représente 0,5 mètre sur 0,5 mètre.

Question 1 : CHEZ LE GLACIER

Marie veut installer une nouvelle bordure le long de la paroi extérieure du comptoir.
Quelle est la longueur totale de bordure dont elle a besoin ? Montrez votre travail.

Figure 2 – *Item libéré du PISA 2012*

Après lecture de l'énoncé et identification de la paroi extérieure du comptoir sur le plan, plusieurs méthodes de résolution sont possibles pour un élève en fin de scolarité obligatoire en France. Par exemple une méthode par mesure et application d'échelle est possible : déterminer l'échelle en mesurant à la règle graduée la longueur de deux carreaux sur le dessin qui représentent un mètre dans la réalité ; mesurer la longueur sur le plan de la paroi extérieure ; appliquer enfin l'échelle précédemment déterminée pour calculer la longueur réelle recherchée. Il est à noter qu'une valeur approchée de la réponse sera acceptée par le correcteur, les consignes de correction internationales étant appliquées. L'élève peut également travailler tout autrement et mener un raisonnement géométrique fondé sur le théorème de Pythagore après avoir introduit sur le plan un triangle rectangle dont l'hypoténuse est la partie oblique du comptoir. Le contexte du magasin de glace n'intervenant pas sur l'activité permettant de trouver la bonne réponse, cet item est, comme le précédent, associé au processus psycho-cognitif *employer* et au domaine de connaissances mathématiques *espace et formes*. La résolution de l'exercice, quelle que soit la méthode, nécessite l'introduction d'intermédiaires et cette introduction est laissée à l'initiative des élèves.

Dans les deux items que nous venons d'examiner, on ne peut être certain de la connaissance mathématique mobilisée pour répondre aux questions posées. Le PISA ne cherche pas à connaître précisément les connaissances mathématiques acquises par les élèves, mais seulement leur domaine parmi les quatre qui sont distingués pour cette discipline. Il ne vise pas non plus à rendre compte des différentes modalités d'expression des connaissances mathématiques acquises par les élèves. Les deux items se retrouvent en effet classés dans les mêmes catégories *employer* et *espace et formes* par les experts du PISA, ils requièrent pourtant des modalités d'expression des connaissances mathématiques très différentes. Dans le premier, l'élève effectue un calcul explicitement demandé dans la consigne, ce calcul portant sur deux longueurs clairement indiquées sur une figure elle-même fournie dans l'énoncé. Dans le second, l'emploi d'un calcul d'échelle ou d'un raisonnement basé sur le théorème de Pythagore nécessite des étapes qui, n'étant absolument pas induites par l'énoncé, sont entièrement à la charge de l'élève. Ces deux items évaluent donc bien la capacité à *employer* des connaissances dans des situations géométriques déjà mathématisées, mais ils ne sont absolument pas équivalents quant au niveau de mise en fonctionnement de ces connaissances. L'échec ou la réussite à ces deux items ne témoigne donc pas du même niveau d'acquisition. C'est ce dont la classification que nous proposons permet de justement rendre compte.

La classification des items à partir d'une analyse de la mise en fonctionnement des savoirs mathématiques requise (Concept, Directe, Adaptation ou Intermédiaires) a en effet abouti à une étude systématique de l'ensemble du questionnaire afin de mieux connaître les questions posées aux élèves et de mieux comprendre les résultats de l'enquête du PISA 2012.

III. ANALYSES COMPLEMENTAIRES DU QUESTIONNAIRE DE CULTURE MATHEMATIQUE ET DES RESULTATS DU PISA 2012

1. *Analyse complémentaire du questionnaire du PISA 2012 à l'aide de la classification des items selon les niveaux requis de mise en fonctionnement*

La répartition des 85 items de mathématiques du PISA 2012 selon le niveau requis de mise en fonctionnement des connaissances confirme que l'OCDE vise essentiellement l'évaluation de la capacité à utiliser ses acquis en tant qu'outil dans des situations issues de la vie réelle plutôt que l'acquisition de notions pour elles-mêmes en tant qu'objet d'étude. Seulement 7 items concernent en effet la compréhension qualitative d'un concept. Les 78 autres se répartissent assez équitablement selon les trois niveaux de mise en fonctionnement : on en dénombre 29 de la catégorie regroupant les items nécessitant la mise en œuvre directe d'une procédure connue, 27 exigeant une adaptation de l'énoncé et 22 nécessitant de prendre l'initiative d'introduire des intermédiaires.

Nous avons ensuite mené une analyse croisée de la répartition des items suivant, d'une part, la nouvelle catégorisation didactique et, d'autre part, une catégorie de l'OCDE : le domaine mathématique d'abord, et le processus psycho-cognitif ensuite. Le croisement avec le domaine mathématique conduit au tableau n°1 où figurent, dans chaque case, l'effectif des items, à gauche, et le pourcentage-ligne, entre parenthèses à droite.

Classifications		Didactique				
		Concept	Directe	Adaptation	Intermédiaires	Total
PISA	Espace et formes	0 (0%)	2 (10%)	7 (33%)	12 (57%)	21 (100%)
	Incertitude et données	5 (24%)	7 (33%)	7 (33%)	2 (10%)	21 (100%)
	Quantité	0 (0%)	15 (68%)	4 (18%)	3 (14%)	22 (100%)
	Variations et relations	2 (9%)	5 (24%)	9 (43%)	5 (24%)	21 (100%)
	Total	7 (8%)	29 (34%)	27 (32%)	22 (26%)	85 (100%)

Tableau 1 *- Domaines mathématiques et niveaux de mise en fonctionnement*

La dernière colonne du tableau montre la volonté des experts du PISA 2012 de répartir les questions mathématiques de manière équivalente suivant chacun des quatre domaines (21 ou 22 items par domaine, soit un quart des 85 items du test complet). Alors que le niveau de mise en fonctionnement des connaissances se détermine indépendamment des contenus mathématiques, les écarts qui apparaissent dans le tableau ci-dessus révèlent que ces différents niveaux ne sont pas évalués indépendamment des champs mathématiques. Inversement, notre nouvelle classification révèle que les savoirs en jeu dans les items PISA ne sont pas évalués de manière équivalente puisque les items ne conduisent pas à les mettre tous en fonctionnement aux mêmes niveaux. Par exemple, ceux du champ *quantité* sont essentiellement évaluées par des tâches nécessitant la mise en œuvre directe d’une procédure connue (68% des items) alors que ceux du champ *espace et formes* le sont plus souvent par des problèmes nécessitant l’introduction d’intermédiaires (57% des items).

Une étude analogue a été menée concernant l’évaluation des processus psycho-cognitifs et des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques (tableau n°2).

Classifications		Didactique				
		Concept	Directe	Adaptation	Intermédiaires	Total
PISA	Employer	1 (3%)	16 (43%)	10 (27%)	10 (27%)	37 (100%)
	Formuler	2 (7%)	6 (22%)	8 (30%)	11 (41%)	27 (100%)
	Interpréter	4 (19%)	7 (33%)	9 (43%)	1 (5%)	21 (100%)
	Total	7 (8%)	29 (34%)	27 (32%)	22 (26%)	85 (100%)

Tableau 2 *- Processus psycho-cognitifs et niveaux de mise en fonctionnement*

Quelques écarts apparaissent qui témoignent du fait que le niveau de mise en fonctionnement des connaissances n’est pas évalué indépendamment des processus psycho-cognitifs et inversement. Ainsi, par exemple, la capacité à prendre l’initiative d’introduire des intermédiaires est davantage testée dans les items où le processus attendu est « formuler » et pratiquement jamais dans ceux où l’élève doit *interpréter*. De même, la capacité à « employer » des connaissances mathématiques est surtout évaluée par des items où c’est une mise en fonctionnement directe de procédure qui est requise.

2. *Nouveau regard sur les résultats du PISA 2012 apporté par la prise en compte des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances*

La classification des items selon le niveau requis de mise en fonctionnement des connaissances s’effectue indépendamment de toute mesure de difficulté. Les trois niveaux concernant les items qui portent sur le caractère outil des savoirs différencient ces items selon une activité mathématique de plus en plus riche et autonome. Néanmoins, nous avons observé que le niveau de mise en fonctionnement à lui seul ne pouvait expliquer la difficulté d'un item : de nombreux autres facteurs interviennent comme la connaissance en jeu, la familiarité avec le contexte du problème, la lisibilité de l'énoncé, etc. Ainsi, les items de chaque niveau de mise en fonctionnement se répartissent dans presque tous les niveaux de difficulté – tels qu'ils sont définis par PISA. L'étude complète du questionnaire permet de croiser le niveau croissant de mise en fonctionnement des connaissances avec le niveau croissant de difficulté des items. L'analyse révèle, d'une part, une dispersion relativement importante de la difficulté des items de chaque niveau de mise en fonctionnement, ce qui confirme que ce critère n'est pas suffisant pour prévoir la difficulté d'un item. Elle montre aussi, d'autre part, qu'en moyenne, les niveaux *directe*, *adaptation* et *intermédiaires*, qui correspondent à une exigence croissante de l'activité mathématique, correspondent également à une difficulté croissante pour les élèves. Les items de ces trois niveaux sont en effet réussis en moyenne par respectivement 59,3 %, 46,8 % et 33,9 % des élèves scolarisés en France et, de manière comparable, par 59,8 %, 45,1 % et 34,8 % des élèves scolarisés dans les pays de l'OCDE. Signalons enfin que le cas des items de la catégorie *concept* n'est pas examiné car leur effectif dans le questionnaire PISA est trop faible pour permettre des interprétations.

Cette étude globale a été complétée par une étude des sous-groupes respectivement définis selon le sexe, la catégorie socio-professionnelle et le retard scolaire des élèves de 15 ans scolarisés en France.

La publication du PISA sur les réussites aux items de culture mathématique révèle notamment que les filles scolarisées en France, en moyenne, réussissent moins bien que les garçons : la différence de réussite est de 2,5 pp (points de pourcentage) à l'avantage des garçons). L'étude des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances apporte quelques informations supplémentaires. L'écart de performance à la faveur des garçons est de 1,5 pp pour les items qui requièrent la mise en œuvre directe d'une procédure connue et de 3,3 pp pour ceux qui nécessitent l'introduction d'un intermédiaire. Autrement dit, les filles sont d'autant plus en difficulté par rapport aux garçons que le niveau requis de mise en fonctionnement des connaissances est un niveau exigeant.

Une étude analogue a été menée concernant le lien entre les catégories socioprofessionnelles (CSP) des élèves et leur réussite. Un des constats majeurs de l'étude PISA 2012 pour la France est que notre système éducatif est fortement différenciateur : les élèves issus de milieux défavorisés obtiennent une performance moyenne de 39,4 % de réussite contre 57,4 % pour ceux de milieux favorisés, soit un écart de 18 pp. En outre, un tel écart de réussite est constaté pour tous les items, sa valeur allant de 1,9 pp pour le plus faible à 31,9 pp pour le plus élevé. L'étude complémentaire menée par la DEPP montre, contrairement à ce qui a été constaté concernant les différences entre filles et garçons, que les différences de réussite selon les CSP restent stables lorsque le niveau requis de mise en fonctionnement des connaissances augmente. Autrement dit, les élèves de milieu défavorisé n'apparaissent pas plus désavantagés que ceux de milieu favorisé par l'exigence d'autonomie mathématique requise dans les items.

Le dernier aspect étudié ici est celui du retard scolaire. L'étude du PISA révèle que les élèves ayant redoublé au moins une fois dans leur scolarité obtiennent une réussite moyenne de 28,9 % aux 85 items de mathématiques, alors qu'elle est de 56,0 % pour les autres, soit un écart moyen de 27,2 pp. Pour tous les items, les élèves à l'heure réussissent mieux que les élèves en retard, la différence de réussite allant de 3,1 pp pour la plus faible à 46,7 pp pour la plus élevée. L'étude menée par la DEPP met en lumière le fait que la différence de réussite entre les élèves scolairement en retard et les élèves à l'heure n'est pas constante lorsque varie le niveau requis de mise en fonctionnement des connaissances. Ainsi, et peut-être contre l'idée qu'on pourrait avoir *a priori*, l'écart de performance est d'autant plus faible que le niveau de mise en fonctionnement est élevé : il est de 22,3 pp pour les tâches nécessitant l'introduction d'un intermédiaire et de 30,6 pp pour celles qui se réalisent par la mise en œuvre directe d'une procédure connue. Autrement dit, les élèves en retard sont plus souvent mis en difficulté par des tâches routinières que par celles qui nécessitent davantage d'initiative. Ici encore, ces résultats invitent à s'interroger sur le système éducatif français et les pratiques des enseignants, en particulier sur les activités proposées aux élèves ayant rencontré des difficultés qui ont conduit à un redoublement au cours de leur scolarité.

IV. CONCLUSION

Les enquêtes du PISA visent donc un suivi des acquis scolaires des élèves de 15 ans. En ce qui concerne ceux de la culture mathématique, le choix de l'OCDE est d'évaluer des compétences, c'est-à-dire des capacités à mobiliser ses connaissances pour résoudre un problème en lien avec une situation de la vie réelle. Un regard didactique porté sur l'évaluation de 2012 ne peut manquer de pointer que l'OCDE ne se donne les moyens ni de recenser précisément les connaissances acquises des élèves ni d'estimer le niveau d'acquisition de ces connaissances. Inversement, les didacticiens qui ont concentré leurs recherches sur les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des savoirs n'ont pas suffisamment développé d'outils théoriques et pratiques pour étudier la question de l'évaluation des connaissances des élèves.

Une classification des items issue de la recherche en didactique permet de les distinguer suivant différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mathématiques et donc, d'une certaine manière, d'évaluer le niveau d'acquisition de ces connaissances. Cette nouvelle classification permet de différencier des items que les catégories définies par les experts de l'OCDE ne permettent pas de distinguer, qui requièrent pourtant des niveaux différents de mise en fonctionnement des connaissances évaluées et qui conduisent à des scores de réussite significativement différents.

Une étude complète de l'ensemble des items du PISA 2012 a été menée à l'aune de cette nouvelle classification. Elle montre d'une part que l'OCDE évalue peu la compréhension qualitative des concepts mathématiques. Elle montre également que les trois autres niveaux de mise en fonctionnement des connaissances, qui correspondent à une exigence croissante de richesse et d'autonomie de l'activité, correspondent également, en moyenne, à un niveau de difficulté croissant pour les élèves. Une attention particulière a ensuite été portée sur le cas de la France, et notamment les inégalités de performances selon le sexe, l'origine sociale ou le retard scolaire. L'OCDE, dans son rapport, indique une meilleure réussite des garçons ; l'analyse, en s'appuyant sur la classification didactique, montre en outre que les filles sont d'autant plus pénalisées que les tâches demandent de l'initiative. Concernant les élèves de milieux populaires comme les élèves en retard scolaire, l'étude s'appuyant sur cette même classification révèle enfin que ces élèves ne sont pas mis davantage en difficulté lorsque les activités attendues d'eux sont plus exigeantes.

Cette étude, réalisée à partir de quelques outils issus de la didactique des mathématiques, apporte des résultats qui permettent de poser un regard nouveau sur le PISA et ses conclusions. Ce croisement d'approche – didactique et évaluative – sur les apprentissages scolaires s'avère fructueux. Certains chercheurs tentent depuis quelques années d'approfondir une telle démarche (Vantourout & Goasdoué 2011 ; Sayac 2012 ; Chesné 2014 ; Sayac & Grapin 2015), gageons qu'ils ouvriront de nouvelles perspectives, pour l'enseignement des mathématiques comme pour la recherche en didactique.

REFERENCES

Bardini C. (2015) Computer-based assessment of Mathematics in PISA 2012. In Stacey K., Turner R. (Eds.) *Assessing Mathematical Literacy – The PISA Experience*. Springer.

Bodin A. (2009) L'étude PISA pour les mathématiques. Résultats français et réactions. *Gazette de la SMF* 120, 53-67.

Chesné J.-F. (2014) *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot.

Douady R. (1986) Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2), 5-31.

Duval R. (1995) *Semiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Kilpatrick J., Swafford J., Findel B. (2001) *Adding it up: Helping children learn mathematics,* Washington: National Academy Press, pp. 115-135.

OCDE (2013) *Cadre d'évaluation et d'analyse du cycle PISA 2012*. Paris : OCDE.

OCDE (2014) *Résultats du PISA 2012 : savoirs et savoir-faire des élèves : Performance des élèves en mathématiques, en compréhension de l'écrit et en sciences (Volume I)*. PISA, Editions OCDE.

OCDE (2014) *PISA 2012 Results: Ready to Learn: Students' Engagement, Drive and Self-Beliefs* (Volume III). PISA, Editions OCDE, 98-106.

Robert A. (1998) Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques* 18(2), 139-190.

Roditi E. (2012) Un point de vue didactique sur les questions d'évaluation en éducation. In Lattuati M., Penninckx J., Robert A. (Eds.) *Une caméra au fond de la classe de mathématiques* (pp. 275-289). Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

Roditi E., Salles F. (2015) Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. *Éducation et formations* 86-87, 236-267.

Sayac N. (2012) Évaluations nationales ou internationales : limites et perspectives. *Actes en ligne du colloque Sociologie et Didactiques*. Lausanne (Suisse).

Sayac N., Grapin N. (2015) Évaluation externe et didactique des mathématiques : un regard croisé nécessaire et constructif. *Recherches en didactique des mathématiques* 35(1), 1°1-126.

Vantourout M., Goasdoué R. (2011) Correction de dissertations en SES. *Idées* 63, 71-78.

AFFICHES EMF2015

Questionnaire centré sur les croyances des enseignants en mathématiques et les connaissances pour enseigner l'algèbre

UNIVERSITÉ DU LUXEMBOURG

Isabelle Demonty & Joëlle Vlassis

1. Le contenu du questionnaire

Elaboré dans le cadre du projet « Probal » visant à développer des stratégies d'enseignement de l'algèbre élémentaire dans le cadre d'une approche par problèmes, ce questionnaire comporte deux parties :

- la première, rédigée sous la forme d'une échelle de type « likert », cible la vision des enseignants à propos des mathématiques et leur enseignement;
- la seconde partie est constituée de 10 analyses de cas liés à l'enseignement de l'algèbre élémentaire.

2. Le public concerné

89 enseignants luxembourgeois responsables des premiers apprentissages algébriques

3. Les étapes de l'élaboration du questionnaire

Revue de la littérature de recherche	Construction du questionnaire	Essais préliminaires
Identifier les dimensions à explorer dans le questionnaire	Créer les items et anticiper les réponses des enseignants	Entretiens auprès de 4 enseignants Prétest auprès de 40 enseignants (8 écoles) Conservation des items valides (R.bis>.20; alpha de Cronbach > 0.70)

4. Les dimensions évaluées dans le questionnaire

Les croyances des enseignants concernant les mathématiques et son enseignement

Vision des maths

- Maths vue comme un ensemble de procédures
- Maths envisagées comme un processus de résolution de problèmes

Enseignement des mathématiques

- Enseignement orienté vers un apprentissage direct et explicite des contenus mathématiques ou plutôt basé sur l'apprentissage actif des élèves?

Les connaissances pédagogiques de contenu des enseignants en algèbre élémentaire

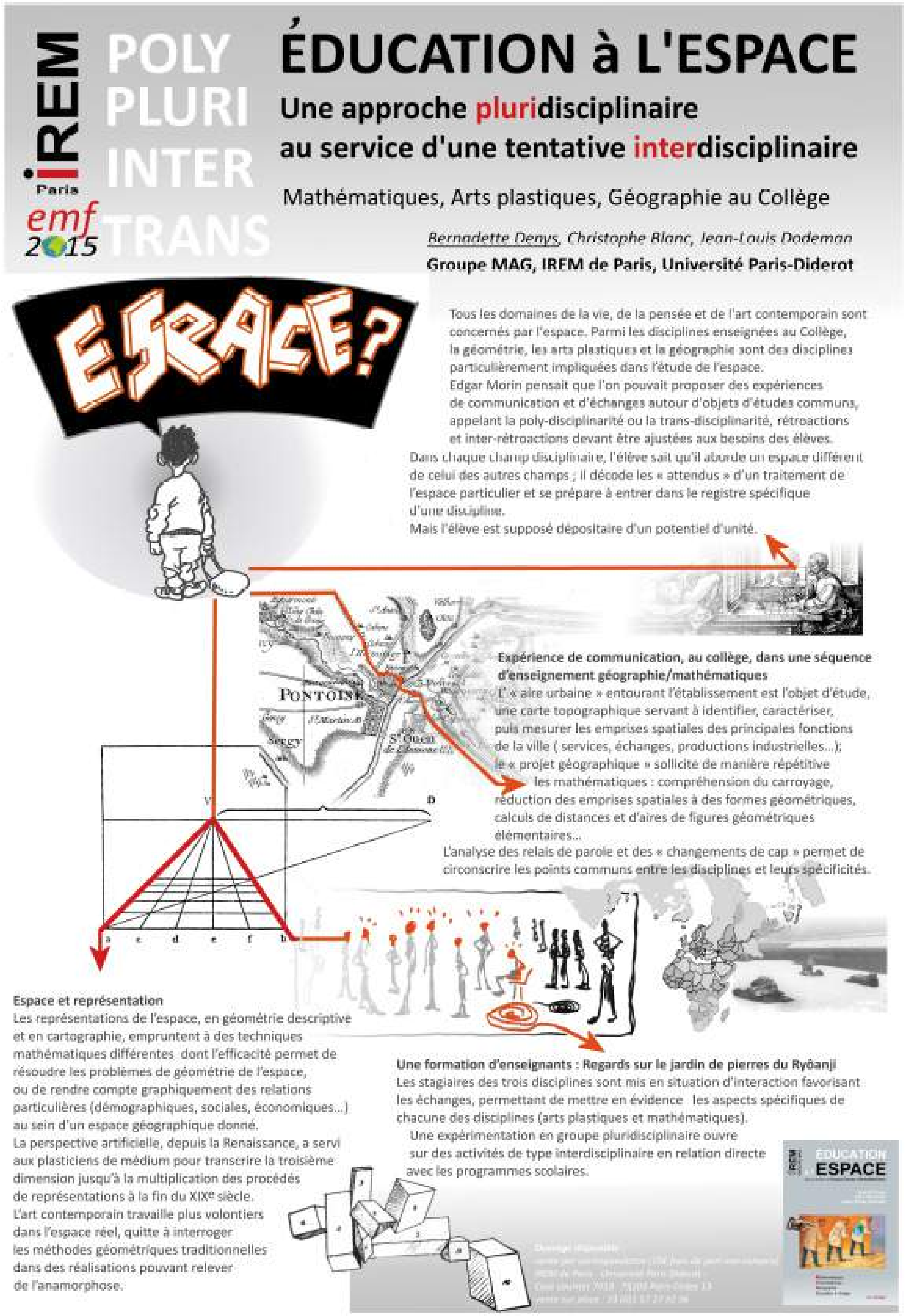
Contenus d'apprentissage / Tâches analysées	Activités génératives	Activités transformationnelles	Activités globales
Connaissances pour enseigner l'algèbre • Sélectionner et/ou adapter des tâches. • Etablir ou revoir des objectifs pour les élèves.	Faire des ponts – établir des connections entre des thèmes, des idées et des concepts		
		Réduire la complexité– rendre les concepts accessibles aux élèves	
Connaissance des démarches et difficultés des élèves • Analyser les travaux des élèves. • Construire et supporter la communauté mathématique et le discours.			Décompresser – rendre apparent des éléments sans importance pour les experts

Références principales

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M., & Senk, S. (2012). Knowledge of algebra for teaching: Framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-615.

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407

Demonty I., Vlassis J.(2015) Questionnaire centré sur les croyances des enseignants en mathématiques et les connaissances pour enseigner l'algèbre. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Affiches, p. 1054.



Denys B., Blanc C., Dodeman J-L. (2015) Éducation à l'espace: Une approche pluridisciplinaire au service d'une tentative interdisciplinaire. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Affiches, p. 1055.

PARIS DIDEROT
IREM PARIS 7

WIMS&IREM, un nouveau groupe de travail à l'IREM de Paris

André GNANSOUNOU & Ana LOBO DE MESQUITA
IREM de Paris / Université Paris Diderot

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

Un nouveau groupe a été créé en 2014 à l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de l'Université Paris Diderot. Constitué d'enseignants, de mathématiciens et de didacticiens, le groupe travaille sur des ressources interactives destinées à l'enseignement des mathématiques au niveau du lycée. Ce travail consiste à proposer ou à concevoir des ressources, à en faire une analyse didactique en lien avec les programmes du lycée, à les enrichir ou à les modifier. La plate-forme WIMS (Web Interactive Multipurpose Server), une importante base de ressources, en accès libre, en est utilisée.

Le groupe a vocation à intégrer d'autres collègues, utilisant dans leurs classes des exercices en ligne, pour constituer un espace de discussion didactique sur leurs pratiques.
N'hésitez pas à nous contacter !

CHOIX DE LA PLATE-FORME WIMS

Il s'agit d'une plate-forme d'accès libre, dans laquelle existe une base d'exercices utilisables directement ou modifiables par les enseignants, permettant de :
- Créer des 'feuilles d'exercices'
- Créer des exercices originaux
- Modifier des exercices de la base WIMS
- Étudier des possibilités d'utilisations diverses :
  - classe
  - en dehors de la classe

OBJECTIFS DU GROUPE

- Création d'une 'classe virtuelle' de l'IREM de Paris

>> Une classe virtuelle est un espace privé sur la plate-forme WIMS, utilisé par des enseignants ou par des élèves, incluant :
  - des exercices interactifs
    - ✓mathématiquement robustes
    - ✓didactiquement robustes
    - ✓conformes aux programmes officiels actuels en France
    - ✓en accès libre pour les enseignants
  - des corrections des exercices, disponibles après la résolution de l'élève
  - des éléments d'aide à la résolution (suggestions, éléments de cours, …)
- Gestion et utilisation de la classe virtuelle

PREMIÈRE PHASE: UNE ENTRÉE par les 'capacités attendues'

Dans cette première phase, certains choix ont été faits :
- Domaine mathématique retenu: *Fonctions* (Seconde, élèves de 15-16 ans)
- Une entrée par les 'capacités attendues des programmes officiels

À LONG TERME, D'AUTRES ENTRÉES POSSIBLES…

Plusieurs entrées possibles dans la classe virtuelle sont envisagées :
- Par des capacités attendues
- Par le type d'activités souhaitées, par exemple :
  - activités de motivation
  - exercices d'entraînement
  - problèmes
- Par les contenus mathématiques
- Par le niveau de scolarité

WIMS ET ÉVALUATION FORMATIVE

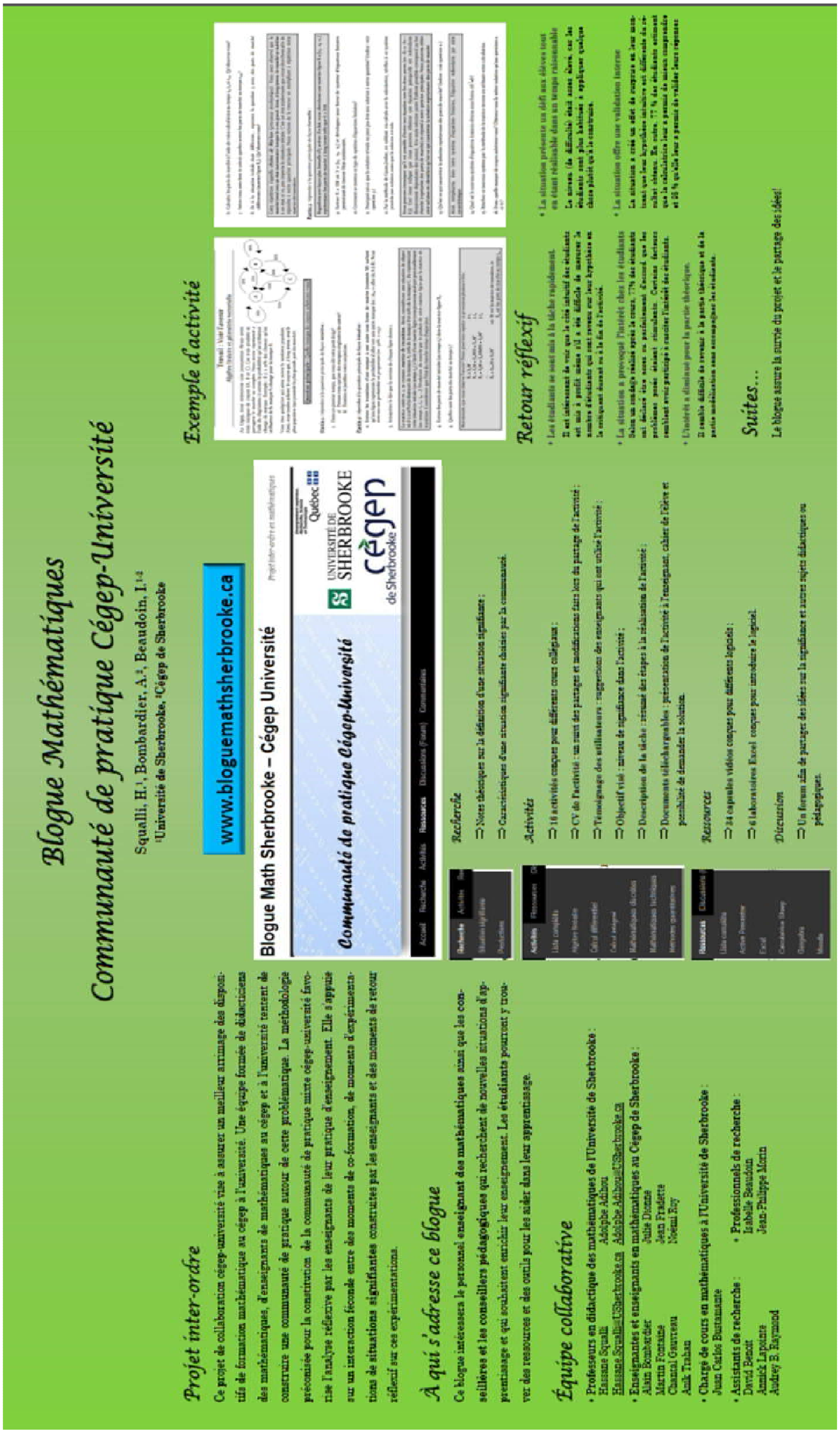
Notons que la proposition d'exercices suivie d'éléments de correction interactifs – ce qui est possible avec WIMS – permet aux élèves de développer des méthodes de résolution d'exercices. Des évaluations formatives peuvent ainsi être envisagées.

CONSTITUTION DU GROUPE WIMS&IREM

Carole Baheux, Université d'Artois
Françoise Chenevotot, Université d'Artois /Université Paris Diderot
Marie-Claude David, Université Paris Sud, Faculté des Sciences d'Orsay
Bernadette Denys, Université Paris Diderot
Marie-Pierre Galisson, Université d'Artois /Université Paris Diderot
André Gnansounou (responsable), Lycée Carcado-Saisseval /Université Paris Diderot
Ana Lobo de Mesquita, Université Paris Diderot

André Gnansounou <andre.gnansounou#ac-paris.fr>
Ana Lobo de Mesquita <alobomesquita#free.fr>

Rabut C. (2015) Une pédagogie active originale: PEG « Progresser En Groupe ». In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Affiches, p. 1057.


Blogue Mathématiques
Communauté de pratique Cégep-Université
Squalli, H.[1], Bombardier, A.[2], Beaudoin, I.[1-2]
[1]Université de Sherbrooke, [2]Cégep de Sherbrooke
Projet inter-ordre
Ce projet de collaboration cégep-université vise à assurer un meilleur arrimage des dispositifs de formation mathématique au cégep à l'université. Une équipe formée de didacticiens des mathématiques, d'enseignants de mathématiques au cégep et à l'université tentent de construire une communauté de pratique autour de cette problématique. La méthodologie préconisée pour la constitution de la communauté de pratique mixte cégep-université favorise l'analyse réflexive par les enseignants de leur pratique d'enseignement. Elle s'appuie sur un interaction féconde entre des moments de co-formation, de moments d'expérimentations de situations signifiantes construites par les enseignants et des moments de retour réflexif sur ces expérimentations.
À qui s'adresse ce blogue
Ce blogue intéressera le personnel enseignant des mathématiques ainsi que les conseillères et les conseillers pédagogiques qui recherchent de nouvelles situations d'apprentissage et qui souhaitent enrichir leur enseignement. Les étudiants pourront y trouver des ressources et des outils pour les aider dans leur apprentissage.
Équipe collaborative
Professeurs en didactique des mathématiques de l'Universite de Sherbrooke :
Hassane Squalli Adolphe Adihou
Hassane.Squalli@USherbrooke.ca Adolphe.Adihou@USherbrooke.ca
Enseignantes et enseignants en mathématiques au Cégep de Sherbrooke :
Alain Bombardier Julie Dionne
Martin Fontaine Jean Fradette
Chantal Gauvreau Noémi Roy
Anik Trahan
Chargé de cours en mathématiques à l'Université de Sherbrooke :
Juan Carlos Bustamante
Assistants de recherche :
David Benoit
Annick Lapointe
Audrey B. Raymond
Professionnels de recherche :
Isabelle Beaudoin
Jean-Philippe Morin
www.bloguemathsherbrooke.ca
Blogue Math Sherbrooke – Cégep Université
Projet inter-ordre en mathématiques
Communauté de pratique Cégep-Université
Québec
UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE
cégep de Sherbrooke
Accueil Recherche Activités Ressources Discussions (Forum) Commentaires
Recherche
Notes théoriques sur la définition d'une situation signifiante ;
Caractéristiques d'une situation signifiante choisies par la communauté.
Activités
16 activités conçues pour différents cours collégiaux ;
CV de l'activité : un suivi des partages et modifications faits lors du partage de l'activité ;
Témoignage des utilisateurs : suggestions des enseignants qui ont utilisé l'activité ;
Objectif visé : niveau de signifiance dans l'activité ;
Description de la tâche : résumé des étapes à la réalisation de l'activité ;
Documents téléchargeables : présentation de l'activité à l'enseignant, cahier de l'élève et possibilité de demander la solution.
Ressources
24 capsules vidéos conçues pour différents logiciels ;
6 laboratoires Excel conçues pour introduire le logiciel.
Discussion
Un forum afin de partager des idées sur la signifiance et autres sujets didactiques ou pédagogiques.
Exemple d'activité
Retour réflexif
Les étudiants se sont mis à la tâche rapidement.
Il est intéressant de voir que le côté intuitif des étudiants est mis à profit même s'il a été difficile de mesurer le nombre d'étudiants qui sont revenu sur leur hypothèse en la critiquant durant ou à la fin de l'activité.
La situation a provoqué l'intérêt chez les étudiants
Selon un sondage réalisé après le cours, 77% des étudiants ont déclaré être assez ou parfaitement d'accord que les problèmes posés étaient stimulants. Certains facteurs semblent avoir participé à susciter l'intérêt des étudiants.
L'intérêt a diminué pour la partie théorique.
Il semble difficile de revenir à la partie théorique et de la partie modélisation sans accompagner les étudiants.
La situation présente un défi aux élèves tout en étant réalisable dans un temps raisonnable
Le niveau (de difficulté) était assez élevé, car les étudiants sont plus habitués à appliquer quelque chose plutôt qu'à le construire.
La situation offre une validation interne
La situation a créé un effet de surprise en leur montrant que leur hypothèse intuitive est différente du résultat obtenu. En outre, 77 % des étudiants estiment que la calculatrice leur a permis de mieux comprendre et 55 % qu'elle leur a permis de valider leurs réponses.
Suites...
Le blogue assure la survie du projet et le partage des idées!

ACTES EMF2015 - SOMMAIRE

PLÉNIÈRES

GROUPES DE TRAVAIL

GT1 - *Articulations, dialectiques et interactions entre mathématiques et didactique en didactique des mathématiques: origines et états du domaine d'étude et de recherche*

GT2 - *Analyse de dispositifs et de stratégies de formation initiale et continue des enseignants*

PROJETS SPÉCIAUX

SPE2 - *Vulgarisation des mathématiques*

SPE3 - *Transitions dans l'enseignement des mathématiques*

AFFICHES