

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



VULGARISATION DES MATHÉMATIQUES

Compte-rendu du projet spécial n°2

Shaula FIORELLI VILMART* – Hacène BELBACHIR** – Denis TANGUAY***

Correspondant du comité scientifique : Ahmed SEMRI****

I. INTRODUCTION

Le Projet Spécial 2, ou Spé2, Vulgarisation des mathématiques, s'inscrit dans la continuité du Spé 4 d'EMF à Genève en 2012. Cependant, si les contributions à EMF 2012 étaient essentiellement tournées vers la pratique de la vulgarisation, certains textes présentés ici comportent une réflexion plus théorique.

Les discussions lors des trois plages horaires allouées au groupe spécial ont été très riches. Elles s'articulent autour de deux thèmes principaux :

- **Regard théorique sur les pratiques de vulgarisation** : présentations de B. Rittaud, S. Fiorelli Vilmart et al. (groupe ALPaGe) et C. Mercat.
- **Utilisation et étude de dispositifs de vulgarisation** : présentation du texte de N. Pelay et A. Boissière par C. Mercat, présentation succincte du texte de K. Godot par D. Tanguay, présentation de P. Jullien.

Pour la deuxième thématique, nous renvoyons le lecteur aux textes dans les actes ci-après. Le présent compte-rendu a surtout pour vocation de synthétiser les discussions relatives au premier thème. En effet, les trois présentations que nous associons à ce thème ont soulevé des questions d'ordre général, voire 'théorique' sur la vulgarisation, questions qui ont été reprises dans les discussions de groupe, tant celles qui ont suivi les présentations que celle de la dernière séance, où nous avons cherché à faire le bilan des réflexions suscitées.

Notons au passage que la présentation du texte de N. Pelay et A. Boissière faite par Christian Mercat est restée, pour des raisons de temps, circonscrite d'assez près au jeu de Dobble, mais mentionnons que l'article lui-même contient des éléments de théorisation fort

* Université de Genève – Suisse – shaula.fiorelli@unige.ch

** DGRSDT – Algérie – h.belbachir@dgrsdz.dz / hacenebelbachir@gmail.com

*** Université du Québec à Montréal (UQAM) – Canada – tanguay.denis@uqam.ca

**** USTHB – Algérie – asemri@usthb.dz / ahmedsemri@yahoo.fr

intéressants sur la vulgarisation en général, qui auraient leur place dans la première thématique.

II. SYNTHÈSE DES DISCUSSIONS

1. *Se donner des outils d'étude de la vulgarisation*

D'entrée de jeu, Benoît Rittaud a appelé de ses vœux le développement d'un domaine de recherche ou d'étude « qui serait à la vulgarisation ce que la didactique est à l'enseignement » ; le développement, donc, de ce qu'il a appelé une « vulgaristique » des mathématiques. L'enseignement et la vulgarisation ont en effet une intention commune, celle de permettre la transmission de savoirs, de ceux qui en sont dépositaires vers ceux qui a priori ne les détiennent pas.

Mais ayant énoncé cela, des différences entre les deux points de vue, celui de l'enseignement et celui de la vulgarisation, viennent assez spontanément à l'esprit. Elles ont fait l'objet de discussions, dont nous reprenons ici des éléments sans nécessairement suivre l'ordre ou les formulations de la recension proposée par Rittaud dans son papier.

2. *Enseignement versus vulgarisation*

On pourra par exemple de prime abord objecter que la vulgarisation n'a pas nécessairement vocation à transmettre des savoirs « savants », tout au plus cherche-t-elle à éveiller son public à leur existence, à leur intérêt, aux questions que ces savoirs traitent et souvent résolvent, et à ces autres questions que les solutions trouvées ne manquent pas d'ouvrir. Alors que l'enseignement a le but beaucoup plus clairement affirmé de provoquer l'acquisition de ces savoirs : que le mode d'acquisition soit la simple et directe « transmission » ou qu'elle fasse plus appel à l'autonomie de l'apprenant ne change pas cet horizon. Cette acquisition nécessitera d'ailleurs probablement un temps long, un découpage — voire un morcellement — et une organisation des savoirs qui est justement l'un des objets d'étude de la didactique des mathématiques, faisant partie de la démarche/processus objectivée et conceptualisée sous la notion de *transposition didactique* (cf. par ex. Chevallard, 1992a). Mais au fait, que serait donc une *transposition vulgaristique* ?

Ce temps long, cette possibilité d'étalement chronologique et de retour sur les contenus, avec les aménagements en séquence qu'elle permet, l'activité de vulgarisation n'en dispose évidemment pas. Aussi, le « bon » vulgarisateur voudra-t-il donner à son public le goût d'aller voir par lui-même (de plus près) ce qu'il en retourne des savoirs en cause, et pour cela le vulgarisateur doit au moins en partie laisser les questions en suspens, et l'activité de vulgarisation *ouverte*. C'est peut-être cette idée, pousser à l'extrême, qui fait avancer à Benoît Rittaud qu'à la limite, « la vulgarisation n'est authentique que lorsqu'elle n'enseigne rigoureusement rien », affirmation choc qu'il s'empresse de tempérer en ajoutant que « bien entendu, une telle vulgarisation 'pure' serait aussi abstraite et irréalisable que le vide parfait en physique. »

3. *Pourquoi fait-on de la vulgarisation des mathématiques ?*

Les considérations précédentes nous ont donc amenés à nous interroger, avec les participants, sur ce que peuvent être les buts de la vulgarisation mathématique, puisque l'enseignement n'en est en tout cas pas le principal. Il y a certainement, derrière toute activité de vulgarisation, la volonté de *faire connaître* des mathématiques ce qui, on l'a vu, n'est pas nécessairement la même chose que *faire savoir* des mathématiques. Ou peut-être faire

connaître *les* mathématiques, ce qui suppose alors qu'on s'attache plus expressément à leurs ressorts, à ce qui les motive : quels problèmes ont suscité ce ou ces développements, dans quels contextes (scientifique, historique, épistémologique, social, philosophique...), avec quelles visées, toutes considérations méta-mathématiques que l'enseignement a rarement le luxe d'aborder.

Faire connaître les mathématiques et leurs ressorts, cela peut aussi simplement consister à faire faire des mathématiques, à faire « jouer avec les mathématiques » celui qui prend part à l'activité de vulgarisation en suscitant chez lui, ouvertement ou 'subliminalement', réflexions et questionnements : qu'est-ce que faire de la recherche en maths, comment et pourquoi fait-on cela, en quoi les maths sont-elles utiles, mais doivent-elles seulement l'être ? Ne peuvent-elles simplement être belles, amusantes, ludiques ? Se demander ce que c'est que faire de la recherche en maths, c'est aussi se demander ce qu'est *être chercheur* en maths, et avec cette question s'ouvre la dimension plus proprement humaine des mathématiques — qui se sont faites, qui continuent de se faire... — à laquelle les interventions de Christian Mercat se sont attachées et qui renvoie entre autres à leurs dimensions historique et culturelle. Encore ici, la vulgarisation a plus facilement la possibilité — le loisir ! — de toucher à ces questions que l'enseignement.

Mais la dimension *politique* peut elle aussi être en jeu, et a donné lieu à une déclaration un brin provocante de la part d'un des participants : bien avant de chercher à « faire aimer les maths » à son auditoire, le vulgarisateur doit avant tout lui montrer quelle importance elles ont dans toutes les sphères de l'activité humaine, techniques, scientifiques ou autres, et ainsi le convaincre de la légitimité des fonds publics qui sont alloués à leur développement, à leur diffusion ; ou de la nécessité de relever et soutenir ces fonds le cas échéant. Dans la veine politique, France Caron a soulevé la question des *mathématiques citoyennes* : des mathématiques pour mieux comprendre le monde, la vulgarisation pour donner des outils qui permettent de remettre en cause les fondements prétendument scientifiques à l'appui de certaines décisions politiques, en interrogeant notamment les modèles et modélisations que ces fondements mettent en avant²⁹⁵.

4. *Un dialogue enseignement – vulgarisation*

Pour chacune des différences entre enseignement et vulgarisation comme celles relevées dans la contribution écrite de Rittaud, on peut se demander qu'est-ce que chacun des domaines a à apprendre de l'autre, quelles qualités naturellement attribuables à l'un on voudrait voir promues chez l'autre. On souhaiterait bien sûr un enseignement des mathématiques où les éléments historiques (contextuels, sociaux, philosophiques...) iraient au-delà des courtes vignettes qu'on voit dans les manuels scolaires. Les contraintes institutionnelles, de temps, de programmation, pèsent bien sûr lourd dans l'enseignement sous ce rapport. On pense aussi à l'évaluation, un élément central de l'enseignement qui n'a rien d'approchant dans les activités de vulgarisation, où les participants ne sont généralement soumis à quelque forme de jugement que ce soit. À quand un enseignement sans évaluation ? Il n'est pas (encore) interdit de rêver... La question de la 'captivité' du public est du même ordre, encore que comme le relève Rittaud, il est fréquent que des classes soient amenées par leur enseignant à participer à des activités de vulgarisation, estompant ainsi la frontière entre les deux domaines.

²⁹⁵ Mme Caron a mentionné entre autres un regroupement de citoyens opposés à un projet de site d'enfouissement (« Site 41 ») dans le comté de Simcoe en Ontario, près d'un aquifère de grande qualité. Ce regroupement s'est battu contre le projet pendant près de 20 ans : pour plus de détails, consulter Caron et Garon (2014).

Pour ce qui est de la vocation à ‘enseigner’, a priori non essentielle en vulgarisation, s’il est vrai que celle-ci doit éviter le ‘didactisme’ (ou devrait-on dire le ‘scolaire’ ?) pour ne pas rebuter son public, doit-elle pour autant se refuser à enseigner ? Le mot clé est peut-être ici celui de l’*explication*. Dans les mathématiques de la vulgarisation, on ne cherche pas nécessairement à obtenir la conviction de l’interlocuteur, ce qui veut en particulier dire que les constructions (théoriques) irréfutables obtenues par enchaînement de déductions formelles (par des ‘preuves’) ne sont pas nécessaires, et d’ailleurs probablement pas souhaitables. À la preuve on préférera donc l’explication — étant bien entendu qu’il n’y a pas ici dichotomie et que certaines preuves ont forte valence explicative — parce que les activités de vulgarisation mathématique dont on sort avec le sentiment d’avoir *compris* quelque chose sont en général les plus satisfaisantes, à l’inverse de celles qui ne proposeraient que des éléments factuels, réduites au pur ‘anecdotique’, au « tourisme mathématique », et sombrant ainsi dans une complète insignifiance. La valeur pédagogique de l’explication a depuis un moment déjà éveillé la communauté des didacticiens, notamment ceux qui se sont penchés sur la question de la preuve en classe : voir par exemple Hanna (1989).

5. *Un dialogue didactique – vulgaristique*

La 2^e présentation, celle du groupe AIPaGe, a proposé des outils pour évaluer et analyser des activités de vulgarisation, et la question s’est posée de l’apport que pourrait avoir le champ de la didactique des mathématiques au développement de ces outils d’évaluation, d’analyse, voire de théorisation de la vulgarisation. La sensibilité de la vulgarisation à ses contextes, aux formes diverses qu’elle prend selon le public visé, selon les lieux où elle diffuse, selon les médias et les technologies à disposition, selon les sources de financement et les contraintes administratives de toutes sortes, a naturellement suggéré que la *Théorie Anthropologique du Didactique* (ou TAD ; cf. par ex. Chevallard, 1992b) fournirait des outils utiles pour l’examen des rapports qu’entretient la vulgarisation, ou telle activité particulière de vulgarisation, avec ce qui a trait aux *institutions*.

Parmi ces outils présentés dans l’article de Fiorelli Vilmart et ses co-auteurs, on propose de considérer trois aspects à prendre en compte « du point de vue de l’animateur », soit pour mieux comprendre comment s’organise une activité de vulgarisation, soit pour mieux évaluer une activité dont on cherche à faire le bilan :

- donner à voir,
- donner à chercher,
- donner à comprendre.

Les didacticiens parmi les participants au groupe n’ont pas manqué de souligner la parenté de ce découpage avec les phases proposées par la Théorie des situations (TSD) de Brousseau (1998). L’aspect *donner à voir*, qui renvoie à la nécessité pour le vulgarisateur d’accrocher son public — qui contrairement aux élèves peut quitter à tout moment, rappelons-le —, de le ‘captiver’ si possible, de ‘l’embarquer’ dans l’activité, peut être mis en parallèle avec la *dévolution* de la TSD : le processus par lequel l’aménagement de la situation (didactique) et sa gestion par l’enseignant permet de conduire l’élève à accepter de prendre en charge la résolution du problème.

L’aspect *donner à chercher* est celui par lequel le vulgarisateur veut rendre actif son public, veut l’engager à explorer et à aller au-devant des explications plutôt qu’à les recevoir passivement. Cela renvoie dès lors à la phase (ou situation) d’*action* de la TSD, ou à celle de *formulation* quand il s’agit d’échanger sur les stratégies mises en œuvre ou sur les résultats et résolutions supputés.

L'aspect *donner à comprendre* est le plus difficile à mettre en relation avec les phases de la TSD. Il renvoie aux *explications* dont nous avons parlé plus haut, qu'elles soient données par le vulgarisateur, construites par le public à travers sa participation à l'activité ou qu'une combinaison permette à ces deux modes de se compléter. Dans la mesure où l'explication est vue comme une modalité particulière de justification des énoncés et résultats visés par l'activité, on peut être tenté d'associer l'aspect 'donner à comprendre' à la phase (ou situation) de *validation* de la TSD. Dans le cas où c'est surtout le vulgarisateur (ou animateur) qui donne à comprendre en avançant lui-même les explications, on peut penser qu'on est alors dans une forme d'*institutionnalisation*.

Ce sont là quelques exemples du dialogue qui peut s'établir entre didactique et 'vulgaristique'. Nous pourrions poursuivre en relevant par exemple que la proposition de Fiorelli Vilmart et ses co-auteurs de considérer deux étapes dans l'expérimentation d'une « action de diffusion » — une a priori qui s'attache aux hypothèses de travail, une a posteriori « ...qui correspond à la réalisation effective (l'expérimentation) » — s'apparente fortement à la méthodologie désignée par les didacticiens français comme *ingénierie didactique* (Artigue, 1988). Contentons-nous pour l'instant de cette ouverture au dialogue, qu'on cherchera à poursuivre en réfléchissant aux moyens de favoriser les échanges entre vulgarisateurs (ou devrait-on dire 'vulgaristiciens' ?) et didacticiens, que ce soit par l'entremise des congrès EMF ou autrement.

III. CONCLUSION

Ce bilan montre que le thème de la vulgarisation des mathématiques est riche, propice aux discussions et aux échanges, ainsi qu'au développement des réflexions maintenant bien engagées. La possibilité offerte par les colloques EMF de réunir des vulgarisateurs de terrain, des praticiens qui se penchent sur leurs pratiques et des didacticiens est une occasion unique pour tous de se nourrir des compétences des uns et des autres.

Il nous semble dès lors intéressant de poursuivre cette thématique lors des prochains colloques EMF et éventuellement, de la transformer en Groupe de travail. Ceci donnerait plus de temps aux différents acteurs de discuter plus profondément des aspects théoriques de la vulgarisation et permettrait de lancer et poursuivre les travaux pour établir une véritable 'vulgaristique' des mathématiques.

IV. REMERCIEMENTS

Nous tenons ici à remercier les présentateurs et participants

- Benoît Rittaud (Paris)
- Christian Mercat (Lyon)
- Shaula Fiorelli Vilmart (Genève), Pierre Audin (Paris) et Hacène Belbachir (Alger)
- Pierre Jullien (Aix-en-Provence)
- ... et aussi de loin : Pierre-Alain Chérix, Nicolas Pelay, Alix Boissière, Karine Godot.

Merci au correspondant du comité scientifique Ahmed Semri, et à Robin Jamet, autre membre du groupe AIPaGe, pour sa participation aux discussions et son regard « expert » sur la vulgarisation.

Merci à tous les autres participants.

REFERENCES

- Artigue M. (1988) Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques* 9(3), 281-308.
- Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Caron F. et Garon A. (2014). Tackling the challenges of computational mathematics education of engineers. In Damlamian A., Rodrigues J. F. et Sträßer R. (Eds.) *Educational Interfaces between Mathematics and Industry - Report on an ICMI-ICIAM-Study*, (pp. 365-375). New ICMI Study Series. Switzerland : Springer International Publishing.
- Chevallard Y. (1992a) *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Chevallard Y. (1992b) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactiques des mathématiques* 12(1), 73-112.
- Hanna G. (1989) Proofs that prove and proofs that explain. In Vergnaud G., Rogalski J., Artigue M. (Eds.) *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol II, pp. 45-51). Paris.

CONTRIBUTIONS AU PROJET SPÉCIAL 2

- FIORELLI VILMART S., AUDIN P., BELBACHIR H., CHERIX P.-A., RITTAUD B. – Évaluer une action de vulgarisation des mathématiques.
- GODOT K. – Maths à modeler, des jeux pour apprendre à chercher en mathématiques.
- JULLIEN P. – Principes fondamentaux des dénombrements élémentaires.
- MERCAT C. – La diffusion : un lieu pour une mathématique plus humaine ?
- PELAY N. et BOISSIÈRE A. – Vulgarisation et enseignement des mathématiques dans le jeu Dobble.
- RITTAUD B. – Pour une « Vulgaristique » des mathématiques.



ÉVALUER UNE ACTION DE VULGARISATION DES MATHÉMATIQUES

Shaula FIORELLI VILMART* – Pierre AUDIN** – Hacène BELBACHIR*** –
Pierre-Alain CHERIX**** – Benoît RITTAUD*****

Résumé – La vulgarisation des mathématiques est polymorphe et peut être menée de multiples façons. Le but de ce texte est de donner une définition suffisamment large pour les englober et suffisamment précise pour les décrire, tout en donnant un moyen de les comparer. Ces différences sont la conséquence de l'existence de différentes postures et interactions entre le public et le ou les animateurs. L'outil mis en place consiste en deux graphes quantifiant les différentes postures et interactions permettant ainsi une comparaison entre activités, mais aussi une évaluation de l'adéquation entre l'activité envisagée et son déroulement effectif.

Mots-clés : (5 mots clefs séparés par des virgules)

Abstract – Popularization of mathematics may be done in many ways. The purpose of this article is to give a broad definition that includes most of them and is accurate enough to describe them. At the same time it would be useful to have a way of comparing these different forms of mathematical popularization. As these differences follow from the different possible interactions between the public and the presenter, the implementation tool consists of two graphs quantifying these different interactions. It allows a comparison between different activities, but it also provides a tool to quantify the adequacy between the planned activity and the show.

Keywords: (les 5 mots clefs en anglais séparés par des virgules)

À la suite d'EMF2012, les auteurs de cet article ont mis en place un groupe de travail informel nommé AIPaGe (Alger-Paris-Genève). Ce groupe est né de la volonté de désenclaver les petites unités de vulgarisation qui travaillent souvent de façon séparée, ainsi que d'unifier le sens donné au mot « vulgarisation » au vu du constat fait que chaque vulgarisateur sa propre définition de la vulgarisation. Un de ses buts principaux est donc de déceler les particularités de la vulgarisation mathématique, plus particulièrement par rapport à l'enseignement, pour en donner une définition consensuelle. Du point de vue méthodologique, nous avons choisi de répertorier les principales typologies des actions de vulgarisation et d'examiner si nos visions a priori sont en adéquation avec la réalité.

C'est dans ce but que nous avons mis en place l'étude que nous présentons dans cet article. Celle-ci n'en est qu'à ses débuts, ce qui suit doit donc être considéré comme une volonté des

* Université de Genève, Section de mathématiques et NCCR SwissMAP – Suisse – Shaula.fiorelli@unige.ch

** Département de mathématiques, Palais de la découverte, Paris – France – pierre.audin@universcience.fr

*** USTHB, Faculté de Mathématiques, laboratoire RECITS, Alger – Algérie – hbelbachir@usthb.dz

**** Université de Genève, Section de mathématiques – Suisse – Pierre-alain.cherix@unige.ch

***** Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539 – France – rittaud@math.univ-paris13.fr

auteurs de confronter leurs réflexions à celles d'autres praticiens de la vulgarisation des mathématiques.

I. UN OUTIL POUR EVALUER UNE ACTION DE DIFFUSION (DU POINT DE VUE DE L'ANIMATEUR)

Nous dénommons « action de diffusion » tout type d'activité dont le but est de partager un savoir scientifique, en l'occurrence mathématique, avec un public non expert. Dans le cadre de cet article, nous nous restreindrons à des activités où une ou éventuellement plusieurs personnes (les animateurs) sont face à un public. Il peut s'agir par exemple d'un exposé ou d'un atelier, mais aussi d'un stand lors d'une fête de science.

Dès lors, qu'est-ce qui caractérise une action de diffusion des mathématiques ? Peut-on placer dans une même catégorie un atelier où l'on propose une activité de découverte des probabilités, un exposé sur $\sqrt{2}$ ou une exposition sur les symétries ? Quelles démarches apparaissent lors d'une action de diffusion ? Telles sont les questions à la base de notre réflexion.

Prenons le cas d'un atelier où l'on propose un jeu pour initier une réflexion sur les probabilités. Dans un premier temps, l'animateur va susciter la curiosité du public à l'aide d'un paradoxe ou d'un résultat étonnant : c'est la « vulgarisation » au sens courant du terme. Puis il va mettre le public en situation de recherche en lui donnant de temps en temps des pistes de réflexion. Finalement, il pourra conclure en donnant quelques éléments théoriques permettant de comprendre ce qui se cache derrière le phénomène étudié. Se pose alors la question suivante : l'animateur est-il dans une démarche de vulgarisation, d'enseignement ou de mise en situation de recherche ? (On ne s'intéressera qu'à ces trois démarches en les supposant distinctes.)

La réponse est un peu des trois. Ce sont ces trois types d'actions distincts qui, pris ensemble, constituent la démarche de vulgarisation suivie par notre animateur fictif.

Enseignement : ici pris au sens courant : l'animateur donne une explication du type *classe de mathématiques* (ce qui ne veut pas nécessairement dire cours magistral). Nous ne chercherons pas ici à définir rigoureusement l'enseignement, nous contentant d'une vision générale : la démarche de transmission à des apprenants d'un savoir et de ses méthodes par une personne qui en est dépositaire.

Mise en situation de recherche : il s'agit, par l'intermédiaire de problèmes ou de situations données, de faire en sorte que le groupe, de façon collective ou individuelle, se confronte au sujet sans que l'animateur n'ait à spécifier quelles questions se posent autrement qu'en ayant présenté la situation, qu'on voudra aussi auto-suffisante que possible..

Vulgarisation : sans doute l'aspect le plus difficile à cerner ; dans le contexte présenté, on peut commencer par la décrire par ce qu'elle n'est pas. En effet, la vulgarisation n'étant pas l'enseignement, elle n'a pas vocation à expliquer, mais plutôt à présenter un sujet donné. Il s'agit de *donner à voir* et non de *donner à comprendre*. À la limite, dans une vulgarisation « parfaite », on n'enseigne rien.

Ces trois aspects reflètent bien les différents moments d'une action de type atelier, mais qu'en est-il des autres types d'actions de diffusion de la science ? Dans le cas d'un exposé tout public, vulgarisation et enseignement sont les deux aspects les plus présents. Dans le cas d'un atelier, ces trois aspects sont plus ou moins représentés. Il est donc pertinent de retenir ces trois aspects pour décrire entièrement une action de diffusion des mathématiques.

Nous nous proposons de mettre en place un outil graphique qui met en exergue ces trois aspects des actions de diffusion et qui permettra de mieux cerner les spécificités de la diffusion par rapport à l'enseignement « scolaire ».

1. *Un graphique pour décrire une action de diffusion*

Comme nous l'avons mentionné avant, lors d'une action de diffusion on aborde essentiellement les trois aspects décrits plus haut. Cependant, les noms que nous leur avons donnés semblent trop reliés à des intuitions. Lorsque nous disons « enseignement », par exemple, apparaît sous nos yeux l'image d'un professeur de mathématiques. Commençons donc par renommer ces aspects. Nous proposons ici les trois dénominations suivantes du point de vue de l'animateur :

- **donner à voir** au lieu de Vulgarisation,
- **donner à chercher** au lieu de Démarche de recherche,
- **donner à comprendre** au lieu de Enseignement.

Nous nous proposons de construire un outil pour dégager les principales typologies d'actions de diffusion.

En nous basant sur une approche expérimentale, nous proposons de représenter une action de diffusion selon ces deux étapes :

- un graphe a priori qui correspond aux hypothèses de travail,
- un graphe a posteriori qui correspond à la réalisation effective (l'expérimentation).

Nous avons choisi de focaliser notre étude sur l'animateur et non sur le ressenti du public. En effet, face à un public hétérogène, il est difficile, voire impossible, d'évaluer la posture de celui-ci en tant qu'ensemble. Le choix de s'intéresser à l'animateur découle de cette impossibilité. De plus, l'évaluation a priori et a posteriori via les temps passés dans chaque posture permet de quantifier l'adéquation de la préparation de la séance et de son déroulement.

Chaque graphe comporte trois axes nommés de la manière suivante : *donner à voir*, *donner à chercher* et *donner à comprendre*. Ces trois aspects sont les postures que prend l'animateur lors d'une action de diffusion. Une action sera représentée par un triangle dont les sommets sont sur les axes de coordonnées²⁹⁶ ; il s'agit en fait d'un graphe radar qui sert de représentation prospective.

Ce graphe n'est qu'une représentation des données numériques, mais en superposant le graphe a priori et le graphe a posteriori, on peut rapidement évaluer, par exemple, si les deux graphes sont très semblables ou non.

Nous mettons une mesure sur les axes : la proportion du temps passé ou estimé au préalable dans chacune des postures. Ainsi, la somme des trois coordonnées sera égale à 100% du temps de l'action.

²⁹⁶ On aurait pu choisir la représentation à l'aide d'un point défini par ses coordonnées sur les trois axes. Cependant, le choix du triangle permet une meilleure lisibilité.

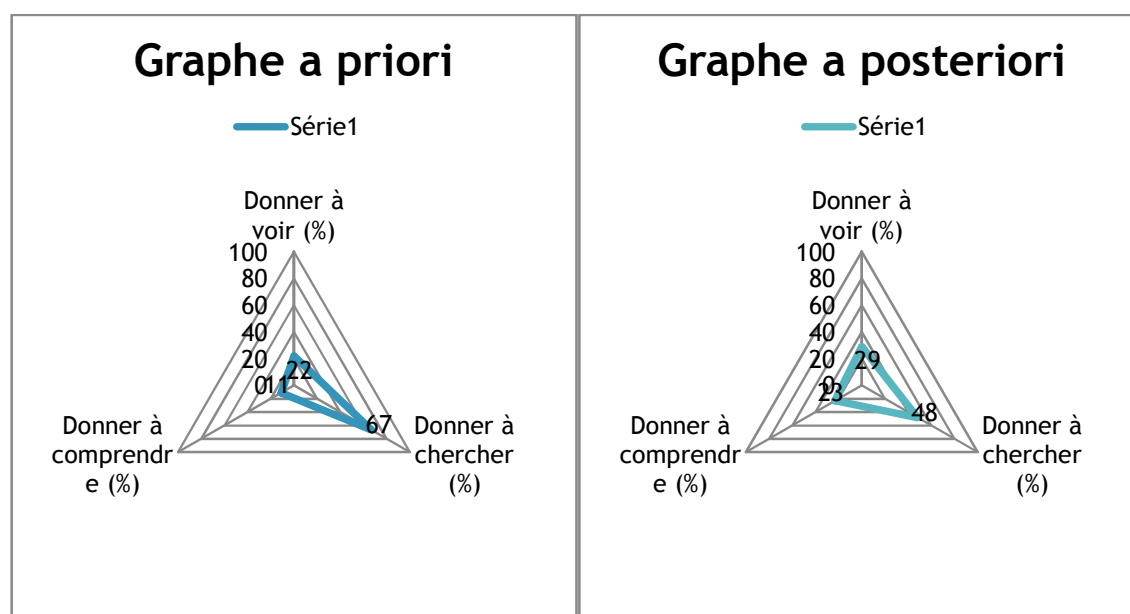


Figure 16 – Le graphe a priori et a posteriori de l'activité *Devenez des magiciens des nombres*.

2. La fiche de relevé

Munis de cet outil graphique, nous avons mis en place une fiche de relevé en trois parties (voir Annexe). La première partie est à remplir avant l'activité et comporte des informations générales comme le type d'activité, le matériel utilisé, le rodage de l'activité, le lieu où se déroulera l'activité et le statut du public ainsi que l'analyse a priori de l'activité, avec un séquençage prévu et le temps passé dans chaque posture selon ce séquençage, ce qui permet de construire le graphe a priori.

La deuxième partie est à remplir durant l'activité et recense le nombre de participants par genre et par classe d'âge, ainsi que les réactions du public, notamment (et surtout) les questions qu'il a posées. Cette deuxième partie est complétée par le séquençage exact de l'activité.

Finalement, dans la troisième partie, nous reprenons le séquençage de la deuxième partie pour construire le graphe a posteriori. On note aussi le ressenti de l'animateur à la suite de cette action de vulgarisation.

II. EXEMPLE D'ACTIVITE ET DE SA FICHE DE RELEVÉ

Pour mieux présenter notre travail, nous décrivons ici une activité, *Devenez un magicien des nombres*, et la manière dont on remplit la fiche de relevé.

Le déroulement habituel est le suivant.

L'activité commence avec le visionnement d'une vidéo du magicien belge Gili²⁹⁷ où ce dernier réalise en moins de 35 secondes un carré magique dont le nombre magique (la somme sur chaque ligne, colonne ou grande diagonale) est choisi par le public parmi les nombres de 50 à 100.

²⁹⁷ pour voir la vidéo sur YouTube : <https://www.youtube.com/watch?v=4vQ-CODa2PY>

Le carré magique est recopié au tableau. S'ensuit une discussion sur la définition d'un carré magique, en particulier sur tous les endroits où l'on peut trouver le nombre magique. Quelques remarques culturelles peuvent être faites à ce moment.

On distribue ensuite un jeu de 16 plots. Chaque plot comporte deux caractéristiques : une couleur et une hauteur, pour un total de quatre couleurs et quatre hauteurs différentes.

Dans un premier temps, on ne prend que 9 plots (de trois couleurs et trois hauteurs différentes) et on demande aux participants de les disposer sur une grille 3 x 3 de telle sorte que sur chaque ligne et chaque colonne soient représentées une et une seule fois chaque couleur et chaque hauteur. On demande ensuite à ceux qui ont réussi de tenir compte aussi de la diagonale, ce qui se relève vite impossible. Ce sera aux participants de démontrer la raison de cette impossibilité.

On passe ensuite à la grille 4 x 4 avec les 16 plots. Cette fois-ci, on demande aux participants de tenir compte de la diagonale. Autrement dit, il s'agit de disposer les 16 plots sur une grille 4 x 4 de telle sorte que sur chaque ligne, chaque colonne et chacune de deux diagonales soient représentées une et une seule fois chaque couleur et chaque hauteur. Ils construisent ainsi un carré gréco-latin. On explique ensuite comment passer du carré gréco-latin d'ordre 4 à un carré magique : chaque plot correspond à un nombre de 1 à 16 selon un tableau de correspondance établi avec les participants. Les participants construisent leur carré magique à l'aide de leur carré gréco-latin, obtenant ainsi un carré dont le nombre magique est 34. Il s'agit ensuite de leur faire trouver comment passer de leur carré magique à un carré magique dont le nombre magique est compris entre 50 et 100. Le but étant de comprendre la méthode du magicien.

Selon l'âge des participants, on peut finalement expliquer pourquoi cette construction du carré magique en se basant sur un carré gréco-latin est efficace. L'ingrédient nécessaire étant la représentation des nombres en base 4 et la commutativité de l'addition.

Remplissons maintenant le fiche de relevé (voir Annexe). Sur la première page, nous reportons des informations générales comme le nom du ou des animateurs, le titre de l'activité, la date, la durée prévue, le matériel utilisé le rodage de l'activité et le type de public. Puis, sur la deuxième page, nous reportons le séquençage prévu. Pour l'activité Devenez des magiciens des nombres nous avons le séquençage a priori suivant :

00:00	Présentation + vidéo (v)
00:10	Élèves au travail (3x3)+ relances (ch)
00:15	Élèves au travail (4x4)+ relances (ch)
00:25	Passage gréco-latin → magique
00:30	Réaliser magique avec nombre donné
00:40	Conclusion (c)
00:45	Fin de l'activité

Il s'agit ensuite de déterminer quelle est la posture de l'animateur pour chacun de ces moments. Dans ce cas, l'animateur a indiqué les postures suivantes :

00:00	Présentation + vidéo	donner à voir
00:10	Élèves au travail (3x3)+ relances	donner à chercher
00:15	Élèves au travail (4x4)+ relances	donner à chercher
00:25	Passage gréco-latin → magique	donner à chercher
00:30	Réaliser magique avec nombre donné	donner à chercher
00:40	Conclusion (c)	donner à comprendre

On obtient ainsi les données suivantes :

donner à voir	10 min.	22 %
donner à chercher	20 min.	67 %
donner à comprendre	5 min.	11 %.

Vient ensuite le moment de l'activité à proprement parler. En page 3 du relevé, nous reportons des données sur le public comme le nombre total de participants et leur répartition homme/femme et enfants/adolescents/adultes/retraités, le nombre de questions et les réactions du public (attention, bruit, distractions et commentaires des accompagnateurs).

Finalement, en page 4 et 5, nous notons le séquençage de l'activité dont nous tirons le temps passé dans chaque posture. On obtient finalement les graphes de la Figure 16. Une dernière case permet de récolter le ressenti de l'animateur.

III. PREMIERS RESULTATS... ET PREMIERES QUESTIONS

Jusqu'en janvier 2015, nous avons récolté 14 fiches de relevé. Elles concernent toutes des activités de type atelier impliquant des classes. Dix se sont déroulées en milieu scolaire et quatre concernaient des classes en visite au Palais de la découverte (Paris) ou au Musée d'histoire des sciences (Genève).

Nous présentons ici une première analyse des fiches récoltées. Il s'agit là de résultats préliminaires qui serviront de base à une récolte future plus ciblée sur les questionnements établis grâce à cette première analyse.

Titre	A priori			A posteriori			Ecart (Post-Priori)		
	Donner à voir (%)	Donner à chercher (%)	Donner à comprendre (%)	Donner à voir (%)	Donner à chercher (%)	Donner à comprendre (%)	Donner à voir (%)	Donner à chercher (%)	Donner à comprendre (%)
Dés non transitifs	23	50	27	38	25	37	15	-25	10
Devenez des magiciens des nombres	16	56	28	32	64	4	16	8	-24
Devenez des magiciens des nombres	22	67	11	29	48	23	7	-19	12
En un coup de ciseau	24	50	26	18	55	27	-6	5	1
Formule de Pick	11	67	22	4	69	27	-7	2	5
Les plaques d'égoût	22	56	22	23	55	22	1	-1	0
Les ponts de Königsberg	17	50	33	27	54	19	10	4	-14
Mathématicien en herbe	10	80	10	6	51	43	-4	-29	33
Mathématicien en herbe	10	80	10	5	80	15	-5	0	5
Paradoxe des anniversaires	25	33	42	33	17	50	8	-16	8
Paradoxe des anniversaires	25	33	42	24	31	45	-1	-2	3
Pavages	17	33	50	14	21	65	-3	-12	15
Problème de poids	11	56	33	14	72	14	3	16	-19
Problème de poids	11	56	33	15	65	20	4	9	-13
Moyenne	17.4	54.8	27.8	20.1	50.5	29.4	2.7	-4.3	1.6
Ecart type	6	15.4	12.3	11	19.9	16.6	7.6	13.6	15.1

Tableau 1 – Analyses a priori, a posteriori et écarts entre les deux dans les 14 fiches de relevés.

Au premier abord, on observe qu'une action de diffusion de type atelier se caractérise par une forte proportion de la mise en situation de recherche (env. 50%). Les postures *donner à voir* et *donner à comprendre* se partagent les 50% restants selon la proportion 2/5 et 3/5 respectivement. Cependant, les écarts entre les différentes activités sont grands, surtout dans les valeurs a posteriori : on a par exemple 17% et 80% comme valeurs extrêmes dans la posture *donner à chercher* ou 4% et 65% dans la posture *donner à comprendre*. Ceci est aussi reflété par les valeurs des écarts-types.

Une difficulté vient du fait que chaque fois qu'il y a travail de groupe ou personnel dans un atelier, il y a un risque de sous-évaluation des parties « donner à voir » et « donner à

comprendre » puisque celles-ci ne sont en général comptabilisées que dans les mises en commun. Il serait intéressant de voir si les statistiques diffèrent beaucoup si le minutage est fait dans chaque groupe. Si ce n'est pas le cas, cela indiquerait que nos mesures sur l'animateur sont robustes.

Remarquons qu'il est intéressant pour nous de calculer les moyennes et les écart-types. En effet, notre but premier étant de caractériser les différentes typologies d'actions de diffusion, il est intéressant d'avoir un modèle moyen pour l'action de type « Atelier ». Notre but est de recueillir plus de données, en particulier pour d'autres types d'actions de diffusion. Par exemple, des relevés de présentations pourront nous aider à avoir un modèle moyen pour ce type d'action.

On observe aussi que pour une même activité, de grands écarts peuvent se produire. Par exemple, dans l'activité *Mathématiciens en herbe*, on peut avoir 51% ou 80% (29 points d'écart) dans la posture *donner à chercher* et 15% ou 50% (35 points d'écart) dans la posture *donner à comprendre*. Ces écarts reflètent surtout la différence de niveau entre les groupes de public. En effet, les résultats a posteriori reflètent bien l'analyse a priori dans un cas tandis que dans l'autre il y a un grand écart entre les deux. Ceci est sûrement lié à l'attention du public comme indiqué dans le relevé : « au début lors de la première partie, bonne attention, puis dégradation vers la fin par manque de compréhension »²⁹⁸. La même observation peut être faite pour les activités *Paradoxe des anniversaires* et *Problème de poids*.

Ces observations entraînent trois remarques dont il faudra tenir compte dans nos relevés futurs :

- R1) Un relevé correspond à une expérience et pour avoir des résultats fiables, il faut répéter plusieurs fois la même expérience. Il faudra donc relever plusieurs fois la même activité pour pouvoir en déduire une valeur moyenne si l'on veut exploiter celle-ci dans une étude des typologies des actions de diffusion.
- R2) Le comportement du public est une variable qui influe beaucoup sur les durées des différentes postures et sur laquelle nous n'avons aucun contrôle. Il sera donc important de bien rendre compte de ce facteur dans le relevé et éventuellement de le quantifier, pour avoir une meilleure lecture des données a posteriori.
- R3) Le type de public (scolaire ou libre) ainsi que son niveau scolaire est aussi déterminant. Il serait donc utile de faire une analyse a priori pour chaque groupe de population.

Si l'on se penche sur l'activité *Devenez des magiciens des nombres*, on remarque que les valeurs a priori ne sont pas les mêmes entre les deux fiches. Il s'agit en effet de la même activité mais présentée à un intervalle de 6 mois. L'animateur a refait une fiche sans se baser sur le relevé précédent mais a adapté les temps passés dans chaque posture selon son expérience précédente. Cela montre que le relevé peut aider à mieux analyser l'adéquation (ou non) entre ce qu'on veut présenter (l'analyse a priori) et la réalisation effective d'une activité (l'analyse a posteriori).

Cette observation suscite plusieurs questions qui restent ouvertes à la discussion :

- Q1) Est-ce qu'un même animateur doit refaire une analyse a priori avant chaque nouvelle action ? Ou doit-il la refaire uniquement si l'analyse a priori n'est pas en adéquation

²⁹⁸ Tous les relevés peuvent être consultés sur la Dropbox des auteurs : <https://www.dropbox.com/sh/6jw5q263uebb233/AAC-WtSGBH-Nn5aouRi-GZ3ea?dl=0>

avec l'analyse a posteriori ? Dans ce cas, quel serait le critère pour déterminer qu'une analyse a priori n'est pas en adéquation avec une analyse a posteriori ?

Un premier élément de réponse nous vient de la remarque R1 : il peut être utile de relever plusieurs fois une même activité pour avoir une valeur moyenne. À l'aide de cette valeur, on pourra éventuellement se prononcer sur l'adéquation. Reste à savoir combien de relevés peuvent permettre de donner une bonne valeur moyenne.

Ainsi, cette première analyse apporte des pistes de réflexion qui permettront de mieux orienter nos relevés futurs. D'autres questions peuvent aussi se poser, c'est ce que nous évoquerons dans la prochaine section.

IV. PISTES DE REFLEXION POUR LES FUTURS RELEVES

Une première analyse des relevés nous a permis de dégager certaines pistes de réflexion. En voici quelques autres.

1. *Au sujet des animateurs*

Une même action de diffusion peut être réalisée par différents animateurs. Ceci se produit notamment au Palais de la découverte ou au Mathscope, lieu d'accueil des groupes mis en place à l'Université de Genève depuis mars 2015. Précisons que, dans le cadre du Mathscope, les activités suivent un canevas bien déterminé. Toutefois, on peut admettre que les animateurs ont un peu de liberté. Dès lors :

Q2) Les différents animateurs doivent-ils se baser sur la même analyse a priori ou chacun doit faire la sienne ?

Cette question n'a pas encore trouvé d'éléments de réponse.

2. *Les différentes typologies d'actions de diffusion*

Pour mieux caractériser les différentes typologies d'actions de diffusion, il nous paraît intéressant de trouver des activités qui peuvent être réalisées sous différentes formes (atelier, conférence, installation sans animateur) et relever les différences à l'aide de notre outil graphique. En effet, en ne faisant varier qu'un seul paramètre, à savoir la typologie, nous pourrions mieux étudier les spécificités de chaque activité.

Nous sommes toutefois conscients qu'en faisant varier la typologie, nous modifierons sans doute d'autres facteurs et que nous devons être attentifs à ces changements dans notre analyse.

3. *Vulgarisation vs Enseignement*

Si nous voulons mieux comprendre les spécificités de la vulgarisation par rapport à l'enseignement, il serait sans doute utile de procéder à des relevés de la même activité utilisée dans les deux contextes. Une telle réflexion a déjà été présentée par deux des auteurs lors d'EMF2012 (Cherix & Fiorelli Vilmart, 2012) mais, en vue de dégager les particularités de la vulgarisation par rapport à l'enseignement, il serait pertinent de quantifier les différences à l'aide de notre outil graphique.

4. *Un outil pour mieux analyser nos pratiques ?*

À l'aide de notre outil graphique, nous pouvons quantifier l'écart entre l'analyse a priori et la réalisation effective d'une action de diffusion. Pouvons-nous dès lors en déduire un outil pour mieux analyser nos pratiques ?

De plus, plus l'adéquation entre a priori et a posteriori est bonne, meilleur est le sentiment de réussite pour le présentateur. Qu'en est-il du ressenti du public ?

Ces deux questions montrent que nous sommes en train de construire non seulement un outil qui nous permet d'analyser les typologies d'actions de vulgarisation, mais aussi de mettre sur pied un outil qui nous permettra peut-être de mieux analyser notre travail. Notre étude future devra donc comporter ces deux aspects. En outre, il serait utile de pouvoir accentuer nos efforts sur le public dans nos relevés futurs.

V. EN CONCLUSION

Conçu à l'origine pour dégager et caractériser les différentes typologies d'actions de diffusion, l'outil graphique que nous ambitionnons de développer aura pour objectif non seulement dégager et caractériser les différentes typologies d'actions de diffusion mais aussi d'évaluer nos pratiques et mesurer l'adéquation entre nos attentes et le déroulement effectif d'une activité.. Cependant, pour qu'une telle lecture puisse être donnée à cet outil, il faut avant tout déterminer des critères qui le permettent, ce que nous nous proposons de faire dans un deuxième temps. Il ne faudra cependant pas perdre de vue notre but premier, à savoir donner une définition de la vulgarisation. Nous poursuivrons notre étude et, dans la mesure du possible, répondrons aux questions qui ont émergé à la suite de cette première analyse.

REFERENCES

Cherix P.-A., Fiorelli Vilmart S. (2012) L'expérience des Cafés Mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle — Actes du colloques EMF2012* (pp. 1883-1894). Genève.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



MATHS A MODELER, DES JEUX POUR APPRENDRE A CHERCHER EN MATHEMATIQUES

Karine GODOT*

Résumé- Né de la collaboration entre chercheurs en mathématiques et didacticiens, le projet Maths à modeler vise à développer des situations particulières présentées sous forme de jeu, les situations recherche, amenant le participant, élève, enfant ou grand public à rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques. À partir de l'exemple de la situation La roue aux couleurs, nous présenterons les caractéristiques de ces situations, leurs conditions de gestion dans un cadre scolaire et extrascolaire, ainsi que le rôle du support ludique dans leur dévolution, les apprentissages qu'elles mettent en jeu et leurs apports vis-à-vis de l'image des mathématiques.

Mots-clefs mathématiques- didactique- recherche- heuristique- jeu- médiation

Abstract: Maths à modeler is a project developed by discrete mathematics researchers and didacticians. The aim is to propose particular situations, the research situations, that permit to the public, pupils or not, to discover what means researching in mathematics. From the example of the situation called The wheel of colors, we present what are the characteristics of these situations, the role of the game, the learnings associated, how they can be used in the classroom or somewhere else (organization conditions) and how they can change the feeling about mathematics.

Keywords: mathematics, didactic, research, heuristik, game, vulgarisation.

I. LE PROJET MATHS À MODELER

1. Une équipe pluridisciplinaire

Le projet Maths à modeler est né de la collaboration entre des chercheurs en mathématiques discrètes, des didacticiens, rejoints par des chercheurs en sciences de l'information et de la communication, en sciences de l'éducation ou encore en psycho-clinique. Il étudie depuis plusieurs années comment amener l'élève, du primaire à l'université, ou le grand public¹ à devenir apprenti chercheur en mathématiques, à entrer dans une démarche de recherche en mathématiques, c'est-à-dire essayer, observer, élaborer des stratégies de recherche, conjecturer, fournir des contre-exemples, prouver, mais aussi avoir du plaisir, persévérer, imaginer, ...

* CNRS/UJF – France - sciencesetmalice@no-log.org

¹ Par exemple lors de la Fête de la science

2. *Les situations recherche*

Les recherches menées dans le cadre du projet Maths à modeler s'articulent autour de situations que nous appelons situations recherche². Au fil des années, nous avons expérimenté la recherche de plusieurs de ces situations recherche dans l'institution scolaire (du primaire à l'université) mais aussi dans un cadre de vulgarisation (atelier stand lors de la Fête de la science, atelier au sein du CCSTI³ de Grenoble pendant les vacances, ateliers périscolaires, ...)

Ces situations didactiques particulières peuvent être considérées comme la transposition pour la classe, ou ailleurs, de l'activité du chercheur en mathématiques. Nous les caractérisons ainsi (Grenier & Payan 2002 ; Godot 2005) :

- Le problème abordé est le plus souvent issu de problèmes de recherche actuels. Il peut donc comporter une, plusieurs ou aucune solution et être encore ouvert dans la recherche mathématique actuelle⁴.
- Le point de départ est une question facilement compréhensible pour celui à qui elle est posée. Elle n'est pas formalisée en termes mathématiques. C'est la situation qui amène l'élève à l'intérieur des mathématiques.
- Les méthodes de résolution ne sont pas désignées. Plusieurs pistes peuvent être suivies.
- Les connaissances scolaires nécessaires sont les plus élémentaires et réduites possibles
- Le domaine conceptuel dans lequel se trouve le problème, même s'il n'est pas familier, est d'un accès facile pour que l'on puisse prendre facilement possession de la situation, s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution.
- Une question résolue peut amener à se poser de nouvelles questions. Il n'y a que des critères de fin locaux. Il n'y a pas un résultat défini à obtenir, à démontrer mais une question ouverte qui amène à chercher à résoudre des sous-problèmes pour, petit à petit, répondre à la question générale.

La recherche d'une situation recherche, contrairement aux pratiques de classe et aux manuels (qui représentent pour la majorité de la population la voie d'accès aux mathématiques), comporte ces trois aspects fondamentaux de l'heuristique mathématique (Grenier & Payan 2002):

- « L'enjeu de vérité ». La plupart du temps, en classe, l'élève sait que ce qu'il a à prouver est vrai (« démontrer que »). « Il n'y a plus d'« enjeu de vérité. (...) L'enjeu est alors pour lui d'apprendre, non de produire une connaissance. » Dans les situations recherche, il peut être amené par exemple à rencontrer l'impossibilité sans que rien dans la situation ne le lui précise. Dès lors, il devra trancher : est-ce difficile ou impossible ? Comment être sûr ?
- « L'aspect social de l'activité ». Dans un cours de mathématiques, l'élève est habituellement seul à chercher. Dans une situation recherche, « il peut y avoir un vrai enjeu social de production mathématique », la classe ou le groupe d'enfants se transformant en communauté de jeunes chercheurs.

² vous en aurez plusieurs exemples sur le site: <http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr/LAVALISE/debutval.php>

³ Centre de Culture Scientifique et Technique, sorte de petit musée des sciences.

⁴ la plupart des situations recherche sont issues du domaine des mathématiques discrètes, un champ des mathématiques comportant de nombreux problèmes compréhensibles et encore ouverts dans la recherche.

- « L'aspect recherche ». En classe, la recherche se réduit souvent à celle de la connaissance mathématique à utiliser, « du bon outil ». Dans le cas d'une situation recherche, l'élève est acteur de la recherche, comme le chercheur, il ne sait pas à quoi vont aboutir ses recherches et « utilise des résultats locaux (trouvés en cours de la recherche) ou même des propriétés encore à l'état de conjectures (qui devront être prouvées ou infirmées ensuite), parce qu'elles permettent d'avancer ».

La recherche se fait généralement en groupes de 3 ou 4, afin de favoriser le débat, l'argumentation et éviter les découragements. Elle est accompagnée, selon le cadre, soit par un enseignant, soit par un chercheur soit par un animateur scientifique. Ils ne sont pas là pour répondre aux questions des enfants mais pour les guider dans leurs recherches, les questionner, les inciter à des comparaisons mais en aucun cas pour leur fournir des résultats... Les apprentis chercheurs disposent d'une feuille de recherche pour noter ce qu'ils jugent important, garder des traces, parallèlement cela favorise les phases de formulation et incite la mise en place d'un codage, le besoin de chercher peu à peu comment modéliser... Après plusieurs séances de recherche, des mises en commun sont organisées pour que les groupes communiquent leurs résultats, débattent et ainsi créer une unité dans la « petite communauté mathématique » tout au long des séances. Les recherches sont enfin finalisées par une communication publique (présentation par affiche, séminaire Maths à modeler junior (Pastori, 2011)) afin d'amener les enfants à formaliser leurs résultats, les argumenter, prouver...

3. *Jeu et situation recherche*

Dans le cadre de mes recherches, je m'intéresse plus particulièrement aux situations recherche qui sont présentées sous forme ludique dans le sens où :

- On peut jouer à un, deux ou plusieurs joueurs.
- Les actions possibles sont organisées par des règles du jeu (les consignes).
- Le déroulement d'une partie s'appuie sur l'utilisation d'un support matériel.
- Le jeu permet de traiter tous ou certains aspects de la situation recherche dans le sens où il peut présenter le problème dans des cas particuliers (choix de valeurs).

Contrairement à la majorité des jeux mathématiques et autres casse-têtes disponibles dans le commerce, le modèle mathématique sous-jacent à une situation recherche est accessible, au moins en partie, au joueur, ce qui lui permet après un temps de recherche, de mettre en œuvre des arguments mathématiques et de se détacher d'une recherche hasardeuse.

II. EXEMPLE DU JEU DE LA ROUE AUX COULEURS

1. *Règle du jeu*

Ce jeu est constitué de deux disques de tailles différentes, disposés de façon concentrique. Sur le plus grand disque, on pose un certain nombre de pions, tous de couleurs différentes.

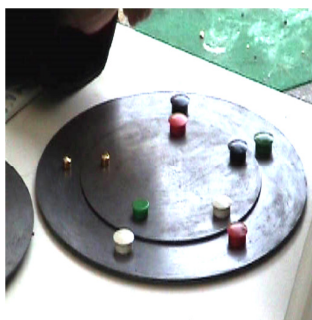
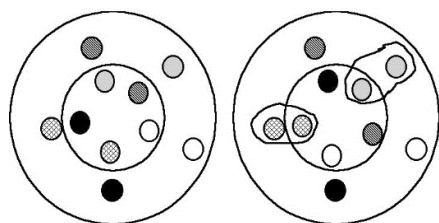


Figure 1-Jeu de la roue aux couleurs

Le joueur doit placer sur le petit disque le même nombre de pions, de une, deux, trois ou plus couleurs choisies parmi celles qui sont disposées à l'extérieur. On fait ensuite tourner le petit disque, cran par cran. Le joueur gagne si, dans chaque position du petit disque, un et un seul de ses pions est de la même couleur que celui qui lui correspond sur le grand disque. Quelles sont toutes les façons que le joueur a de choisir et disposer ses pions pour gagner ?

Par exemple,

cette disposition n'est pas valide...



après un cran deux face à face...

alors que celle-ci, oui !

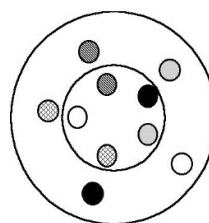


Figure 2- Exemple de dispositions valide et invalide

Maintenant, à vous de jouer !

2. Éléments de résolution

Nous noterons (n,k) les différents sous problèmes où n représente le nombre de couleurs placées sur le grand disque et k celui choisi par le joueur. Il apparaît au regard de la résolution que le couple (n,k) constitue une variable de la tâche «recherche», que nous appelons «variable de recherche » dont le choix est laissé à la charge du joueur.

On peut considérer que la résolution de ce problème, pour tout (n,k) , se déroule en deux étapes:

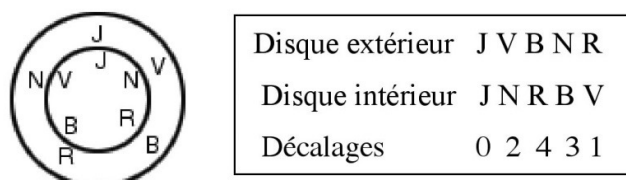
- Recherche d'une disposition des couleurs sur le disque central
- Validation de cette disposition par une rotation du disque central (réelle ou formelle)

Après quelques essais, plusieurs remarques générales peuvent s'imposer :

- Remarque « couleur»: la nature des couleurs n'a pas d'importance pour la résolution du problème, seule leur position et le fait qu'elles soient distinctes importent.

- Remarque « sens »: le sens de rotation de la roue n'a pas d'importance.

Enfin, coder les couleurs à l'aide de nombres de 0 à $n-1$ ou de 1 à n peut aider à la recherche. Dans le cadre de cette communication, nous allons nous centrer sur le sous-problème (n,n) . Par expérimentation, on trouve facilement des solutions lorsque $n = 3, 5, 7$ ou encore 9. Mais qu'en est-il des cas $(2,2)$, $(4,4)$ ou tout autre couple $(2p,2p)$? Cela semble plus difficile... Pour avancer dans le problème, il faut oublier les couleurs et considérer la position relative des pions les uns par rapport aux autres, ce qui permet l'énoncé de méthodes de construction générales. On peut introduire une variable supplémentaire, le décalage entre la position sur le disque extérieur et la position sur le disque intérieur. On peut ainsi obtenir des arguments de preuve dans les cas où il n'y a pas de solution.



Décalages, cas (n,n)

Figure 3- Notion de décalages, exemple pour (n,n)

III. PRODUCTIONS DES PARTICIPANTS

Cette situation recherche a été expérimentée de l'école primaire à l'université (auprès de cycle 3 (8-10 ans, 4^{ème} et 5^{ème} année du primaire), de 6^{ème} (11 ans, 1^{ère} année du collège), de 1^{ère} STI (16 ans, 2^{ème} année du lycée) et de Deug 1^{ère} année). Chaque classe a cherché en groupes durant 4 ou 5 séances de 1 heure.

Nous l'avons également expérimentée dans un cadre extrascolaire lors d'un atelier de 2h proposé au CCSTI auprès d'enfants de 7 à 11 ans et sur le stand Maths à modeler pour la Fête de la science. Pour assurer la dévolution dès lors que le public chemine de stand en stand, la recherche était orientée vers les sous-problèmes (n,n) ou $(n,2)$ dès la présentation. L'accompagnateur était plus présent auprès des apprentis chercheurs afin d'éviter qu'ils ne se découragent, les stimuler dans leurs recherches par ses questions, ses remarques, et les inviter à chercher suffisamment longtemps pour rentrer dans une démarche de recherche en mathématiques.

1. Présentation synthétique des productions des élèves ou étudiants

Nous pouvons considérer que tous les groupes d'élèves sont entrés dans une démarche de recherche en mathématiques, plus ou moins élaborée.

Il n'y a pas de différences marquantes entre les dynamiques de recherche mises en place même si les niveaux scolaires sont différents, mis à part une méthode de recherche de proche en proche⁵ qui n'est apparue qu'en primaire. Plusieurs autres méthodes de construction de solution ont été proposées, quels que soient le niveau et les cas étudiés. Elles s'appuient sur les démarches de recherche. Les décalages ont été introduits par plusieurs groupes, après 2 ou 3 séances de recherche. Toutefois, même si les méthodes découvertes sont similaires, leur formulation semble être influencée par l'utilisation ou non du support matériel. Parmi les

⁵ Consiste à fixer ce qui marche et à ne modifier que le reste.

groupes de l'université, ceux qui ne l'ont utilisé qu'au début de leur recherche pour rapidement se tourner vers le support papier-crayon ont introduit un codage numérique des couleurs et une représentation du problème à l'aide d'un tableau, ils ont donné des méthodes de construction qui tendaient à se détacher de la description de ce qu'il faut faire, en utilisant un vocabulaire mathématique et en cherchant à généraliser. Les autres groupes, pour leur part, sont restés plus proches du commentaire d'une action.

	0	1	2	3	4	5	6
0							
1	3	6	2	5	1	4	
2	0	3	6	?	5	1	
3	4	0	3	6	2	5	
4	1	4	0	3	6	2	
5	2	5	1	4	0	3	6
6	2	5	1	4	0	3	6
3	6	2	5	1	4	0	3

Figure 4- Traduction de la rotation par un tableau prolongé en DEUG

Tous ont émis des conjectures, qu'ils aient ou non mis en place des démarches de recherche organisées. Ceux qui ont procédé par tâtonnements ont énoncé des conjectures locales, liées à des cas particuliers, les autres les ont complétées par de conjectures globales, plus générales. Parmi eux, tous sont parvenus à émettre la conjecture qu'il n'y a pas de solution lorsque cela était le cas. Toutefois cela est apparu plus facilement à l'université. Nous faisons l'hypothèse que cette différence peut être due à la conception répandue chez les élèves de primaire et secondaire qu'un problème a toujours une solution, vu que cela est vrai pour la majorité des exercices qui leur sont proposés. Les étudiants de l'université, quant à eux, ont pu être confrontés à des exercices sans solution dans le cas de la résolution d'équations et ont de toute façon rencontré l'impossibilité dans les situations recherche qu'ils avaient déjà étudiées avant notre expérimentation.

Enfin, quel que soit le niveau de connaissance, tous ont été confrontés à l'activité de preuve. Ils ont montré notamment qu'il n'y avait pas de solution pour le cas (2,2) et pour (4,4), par exhaustivité des cas (qui n'était pas toujours garantie pour (4,4)) et forçage. Pour les autres cas impossibles, seuls certains groupes de l'université ont cherché des arguments de preuve.

Il n'y a donc pas de différences notoires quant à la dévolution aux élèves du problème et aux principaux résultats obtenus aux différents niveaux. Cependant, une différence majeure semble être liée à la conception que peuvent avoir les élèves sur la notion de solution.

2. Présentation des productions dans un cadre de vulgarisation

Même si les recherches ont duré moins longtemps (1h30 pour l'atelier, environ 30 min en moyenne pour l'animation stand), nous avons retrouvé plusieurs observables présents dans l'institution scolaire, notamment en primaire. Les participants ont eu recours au support matériel pour faire leurs essais, ils ont su s'organiser dans le choix des valeurs de (n,k) à étudier et ont adopté une progression régulière, par exemple, (4,2) ; (5,2) ; (6,2), jusqu'à (8,2) qui correspondait au nombre maximal de couleurs disponibles. Ils sont parvenus à énoncer Rem couleurs, ont cherché des méthodes de construction. Cependant, nous notons des différences pour les cas où il n'y a pas de solution. Sans les relances de l'accompagnateur, les enfants abandonnent très vite les cas plus difficiles (en fait impossibles). Avec l'aide de l'accompagnateur, ils arrivent à verbaliser leurs actions, justifier leurs propos, énoncer le fait que « ça ne marche pas du tout », voire à émettre la conjecture que certains cas sont impossibles, à prouver par forçage et exhaustivité sur de petites valeurs de (n,k).

Dans le cas du stand, plusieurs supports étaient disponibles simultanément. La dualité possible/impossible des cas à étudier a été un facteur stimulant à la recherche. En effet, pour (n,n) , tous ont cherché des solutions, quel que soit le cas considéré, encouragés par le fait que certains trouvaient rapidement des solutions pour $(5,5)$, même au hasard. A contrario, le fait que les cas $(6,6)$ et $(4,4)$ soient impossibles les a conduits à organiser leurs essais, pour parvenir à trouver des solutions, comme eux-mêmes ou d'autres y étaient parvenus pour $(5,5)$. Certains avaient à l'esprit le fait qu'il puisse exister des méthodes, plusieurs cherchaient à anticiper la rotation quand ils plaçaient leurs pions, deux enfants ont découvert une méthode de construction par symétrie pour $(2n+1, 2n+1)$. Pour $(4,4)$ et $(6,6)$, la majorité est restée dans le doute ou a conclu que « ceux-là, ils sont beaucoup plus durs » ou « à 4, c'est presque impossible car il y a toujours 2 ou 0 à un moment ». Cependant, quelques-uns ont évoqué l'idée que les cas pairs pouvaient être distingués des impairs et l'un d'entre eux a énoncé que (n,n) n'avait de solution que lorsque n est impair. Guidé par l'accompagnateur, il a ensuite étudié $(3,3)$ et $(2,2)$ pour vérifier cette idée. Comme dans les classes, la preuve de l'inexistence de solution pour $(2,2)$ par exhaustivité des cas a alors été formulée.

Ainsi, même si rien dans le contrat didactique de notre situation ne force les enfants à continuer à chercher, leur seule curiosité et envie de trouver, comprendre, les poussent ici aussi à persévérer, se creuser la tête, essayer, recommencer... et donc à amorcer une démarche de recherche mathématique du problème. Cependant, suite à nos expérimentations, nous précisons que *La roue aux couleurs*, ainsi que toutes les autres situations recherche, est dévoluable dans le cadre d'une animation stand sous réserve qu'elle ne soit pas en concurrence directe avec des stands plus attractifs, type chimie amusante ou autre présentation spectaculaire. Dès lors, même si elle donne intrinsèquement envie de chercher, cela peut ne plus être assez fort pour parvenir à lutter contre la concurrence !

IV. JEU, SITUATION RECHERCHE ET APPRENTISSAGES

Nos expérimentations autour de plusieurs situations recherche ont montré que l'aspect ludique associé à un support matériel permet, quels que soient l'âge, le niveau de connaissance et le cadre d'intervention, de comprendre les règles du jeu et de mettre en place des stratégies de recherche, et s'avère donc être une aide à la dévolution du problème. Il est aussi une aide à la recherche pour les élèves, notamment ceux de l'école primaire, ainsi que pour les enfants dans le cadre du loisir ou le grand public car il donne l'opportunité de faire facilement des essais et d'exhiber des contre-exemples (Godot 2005). Ainsi, il permet d'aborder la recherche en mathématiques dans le cadre d'ateliers « sciences » proposés pendant les temps péri et extrascolaires, comme nous le faisons dans le cadre du projet Maths et malice mis en place en partenariat avec l'association grenobloise Sciences et malice (Godot 2012) ainsi que lors d'animations stand.

Dès lors, les situations recherche ludiques, à l'école ou en dehors, peuvent permettre des apprentissages en mathématiques. Ce ne sont pas des apprentissages notionnels mais transversaux, constitutifs de l'activité de recherche mathématique, tels que l'intérêt de commencer par étudier des petites valeurs (alors que les participants ont tendance à faire le contraire), d'organiser ses essais, de généraliser, d'autres liés à la mémoire de la recherche tels que l'importance de la clarté de la prise de notes et du fait qu'il est aussi important de marquer les erreurs « pour ne pas les refaire ». Les joueurs découvrent également ce qu'est un contre-exemple (et qu'un seul suffit), le statut d'une conjecture, d'une preuve, que certaines questions peuvent rester sans réponse... Des éléments relatifs à la notion même de problème mathématique sont aussi en jeu. D'une part, le fait qu'un problème de mathématiques n'a pas forcément une solution et une seule comme cela est souvent le cas dans les manuels, mais peut en avoir plusieurs ou aucune. D'autre part, qu'il n'y a pas qu'un seul schéma de résolution : quel que soit le niveau de connaissance, plusieurs stratégies de recherche apparaissent même chez les participants les plus en difficulté en mathématiques. Cependant, pour qu'il y ait apprentissages, jouer une seule fois ne suffit pas, il faut une pratique régulière.

Enfin, une telle pratique des mathématiques peut conduire à enrichir le rapport personnel du participant vis-à-vis des mathématiques car elle implique une appréhension différente de l'activité mathématique, en les montrant sous un angle expérimental, où le public est actif et acteur. Au cours de nos expérimentations, nous avons interrogé le public, dans le cadre scolaire et extrascolaire, pour savoir s'il reconnaissait les situations recherche comme faisant partie des mathématiques. La majorité des réponses rejette cette idée précisant que c'est plutôt « un jeu, un jeu de logique, de créativité », « qu'il n'y a pas de chiffres, qu'il faut réfléchir et non calculer », que « ce serait plutôt de la logique et pas des maths », que « ça ne peut pas être des maths puisqu'on s'amuse »... Une fois reconnus comme mathématiques (par le fait de les proposer en cours de mathématiques, par la présence d'un chercheur, après discussion avec l'accompagnateur, par un débat dans la classe, le groupe...), ces jeux pour apprentis chercheurs peuvent donc aussi contribuer à réconcilier certains avec cette discipline scientifique, en « cassant l'image caricaturale des mathématiques comme d'une matière où l'on applique, ou l'on ne doit pas se tromper, pour en faire une matière qui permet de développer l'autonomie, la prise d'initiative, de faire appel à l'imagination, de développer la créativité, d'attiser la curiosité, de déclencher l'envie et le plaisir d'apprendre, de réfléchir, de comprendre et de... trouver ! c'est-à-dire des qualités transférables au-delà des maths... » comme le souligne un enseignant. Ainsi, la pratique régulière de situations recherche dans le cadre scolaire et extrascolaire peut-elle, selon nous, permettre de développer un aspect de la culture mathématique très peu traité, que ce soit à l'école ou en dehors: comprendre ce qu'elles sont et ainsi leur donner plus de sens.

REFERENCES

- Godot K. (2012) Maths et Malice, un projet pour faire découvrir les mathématiques sur le temps du loisir. *Enseignement des mathématiques et contrat social. Enjeux et défis pour le XXI^e siècle, colloque Espace Mathématiques Francophone.*
- Godot K. (2005) *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, novembre 2005. En ligne sur <http://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00102171>.
- Grenier D., Payan C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *RDM* 18(1), 59-100
- Grenier D., Payan C. (2002) Situations de recherche en classe : essais de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques.*
- Pastori M. (2011) Faire pratiquer une démarche d'investigation en classe en mathématiques, un exemple : Les ateliers Maths à Modeler et séminaires juniors. In Grangeat M. (Ed.) *Les enseignants de sciences face aux démarches d'investigation.* Regards sur l'éducation, PUG.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



DÉNOMBRER C'EST STRUCTURER

Pierre JULLIEN*

Résumé – Cette contribution veut être un plaidoyer pour introduire les dénombrements, tout au long de la scolarité (le plus tôt possible) et les vulgariser auprès du grand public. Cinq principes sont énoncés selon les signes : =, +, -, * et / qui correspondent à l'égalité, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Des exemples simples et pertinents illustrent le tout.

Mots-clefs : dénombrement, structure

Abstract – This contribution is a plea for the introduction of enumerative combinatorics all along the curriculum, as soon as possible and to a wide audience. Five principle are stated here according to the symbols =, +, -, * and /, corresponding to equality, addition, subtraction, multiplication and division. Some simple and useful examples illustrate this text.

Keywords: combinatorics, enumeration, structure

I. INTRODUCTION

Compter tout ce qui nous entoure est pour certains un réflexe premier. Malheureusement, faute de méthode, beaucoup trouvent la tâche difficile et renoncent ou obtiennent des résultats faux.

Les problèmes de dénombrements se prêtent parfaitement à la vulgarisation, dans la mesure où, d'une part, il s'agit de nombres entiers connus de tous et, d'autre part, il est possible de partir de choses très simples avant d'aborder des situations de plus en plus complexes.

Les principes (*) qui suivent, peuvent servir d'épine dorsale à une méthode pour aborder les problèmes de dénombrements. Il est possible d'illustrer par des situations concrètes, des activités de codages et/ou de schémas à consonance géométrique.

Je pense que l'enseignement de la combinatoire devrait être un souci constant des enseignants tout au long de la scolarité, dès l'école primaire. Pourquoi attendre d'être au lycée pour découvrir qu'il y a 300 manières de choisir deux élèves dans une classe de 25 ?

En France, souvent dans les programmes, les problèmes de dénombrements sont mentionnés de manière subsidiaire dans la partie *statistiques et probabilités*, au lycée. Il n'en est pas fait beaucoup mention au collège ; encore moins dans le primaire. C'est bien dommage !

* Universitaire retraité, 1^{er} directeur de l'IREM de Grenoble - France – pierrelouisjullien@orange.fr

Dénombrer un ensemble fini, c'est trouver le nombre d'éléments qu'il possède.

Une méthode consiste à l'énumérer, c'est-à-dire à dresser une liste exhaustive de ses éléments, puis à compter les éléments de la liste constituée. Ce n'est là que déplacer la difficulté car il faut alors une méthode pour élaborer la liste en question.

La méthode qui suit consiste à connaître quelques principes simples et généraux s'appliquant à des ensembles dotés de structures simples et à reconnaître qu'un cas complexe n'est qu'une superposition de cas simples et connus.

On n'oubliera jamais que DÉNOMBRER c'est STRUCTURER.

Dans ce qui suit les ensembles considérés sont finis et le nombre d'éléments d'un ensemble X est noté |X| (Attention : cette notation n'est pas universelle).

II. PRINCIPE D'ÉGALITÉ

S'il existe une bijection de A sur B alors |A| = |B|

Aussi banal qu'il paraisse ce principe est très profond, puisqu'il est à la base même du concept de nombre cardinal.

Remarque. Pour montrer que f est une bijection de A sur B il suffit de montrer l'existence d'une application g de B sur A telle que les composées $g \circ f$ et $f \circ g$ soient les applications identités de A et B respectivement.

Une telle application g est l'application réciproque de f ; elle se note aussi f^{-1} .

Ce principe est utilisé pour remplacer un problème de dénombrement par un autre, que l'on estime plus simple ! Par exemple, soient :

A l'ensemble des monômes de coefficient 1, de degré n , à p variables ;

B l'ensemble des chemins dans $\square \times \square$ de $(0,0)$ à $(p-1,n)$ tels que le suivant de (x,y) soit $(x+1,y)$ ou $(x,y+1)$;

C l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{h,v\}$ comprenant $p-1$ occurrences de h et n occurrences de v ;

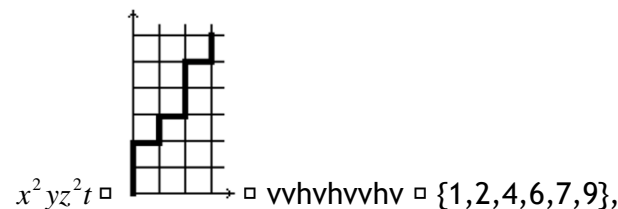
D l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3, \dots, n+p-1\}$ possédant n éléments ;

alors on a $|A| = |B| = |C| = |D| = \binom{n}{n+p-1}$.

En effet, le lecteur pourra, à titre d'exercice, vérifier que les applications schématisées ci-dessous sont bien des bijections. Ce qui justifie les égalités $|A| = |B| = |C| = |D|$. Par ailleurs,

le résultat $|D| = \binom{n}{n+p-1}$ doit être connu.

Soit $n=6$ et $p=4$,



$$y^4 z^2 \square \square h v v v v h v v h \square \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}.$$

À un monôme en $x y z t$, de degré 6, associons le chemin du point (0,0) au point (3,9) de telle sorte que verticalement nous progressions d'un nombre égal à l'exposant de x puis après un pas à droite d'un nombre égal à l'exposant de y , etc ; à ce chemin associons le mot comprenant 3 lettres h et 6 lettres v dans l'ordre (horizontal ou vertical) de la progression et enfin associons une partie à 6 éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ caractérisant les emplacements de la lettre v .

III. PRINCIPE D'ADDITION

Si un ensemble est la réunion de parts disjointes deux à deux, alors son nombre d'éléments est la somme des nombres d'éléments de chaque part.

Plus formellement :

$$E = \bigsqcup_{i \in I} A_i \quad \text{Si} \quad (o\grave{u} \ i \neq j \text{ entraîne } A_i \cap A_j = \emptyset) \text{ alors} \quad |E| = \sum_{i \in I} |A_i|.$$

Remarque. Certains A_i peuvent être vides.

Ce principe est à la base de la notion d'addition dans les entiers, son mode d'utilisation consiste à distinguer dans l'ensemble à dénombrer des classes d'objets deux à deux disjointes (ces classes étant plus faciles à dénombrer, a priori). Le cas le plus élémentaire est de distinguer deux classes complémentaires l'une de l'autre.

Le moyen le plus fréquent pour partager un ensemble est d'utiliser le retour inverse selon une application f de E dans un ensemble I . En effet,

$$E = \bigsqcup_{i \in I} f^{-1}(\{i\}) \text{ et les } f^{-1}(\{i\}) \text{ sont distincts.}$$

Exemple

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} \square + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p}$$

Choisir pour E l'ensemble des parties à $(p+1)$ éléments de $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ et pour f l'application de E dans $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ qui à chaque élément de E fait correspondre son plus grand élément.

IV. PRINCIPE D'ADDITION-SOUSTRACTION

Étant donné deux ensembles A et B non nécessairement disjoints, on a

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

De même

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Plus généralement la formule est compliquée.

$$\text{Soit } E = \bigcup_{i \in I} A_i, \text{ alors } |E| = \sum_{i \in I} |A_i| - \sum_{i \neq j \in I} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \neq j \neq k \in I} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

qui se lit somme des nombres d'éléments de chaque A_i , moins somme des nombres d'éléments des intersections des A_i pris deux à deux, plus somme des nombres d'éléments des intersections des A_i pris trois à trois, moins somme des nombres d'éléments des intersections des A_i pris quatre à quatre, et ainsi de suite jusqu'à plus ou moins nombre d'éléments de

l'intersection de tous les A_i (où le signe est moins quand les A_i sont en nombre pair et plus dans le cas contraire).

D'utilisation très délicate, ce principe est surtout intéressant lorsque les nombres d'éléments des intersections des A_i pris p à p ne dépendent que de p et non pas du choix des A_i .

Dans ce cas la formule s'écrit aussi

$$|E| = \sum_{p=1}^n (-1)^{p+1} \binom{n}{p} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_p|.$$

Exemple $\binom{n}{k} = \binom{n}{1} \binom{n-1}{k-1} - \binom{n}{2} \binom{n-2}{k-2} + \binom{n}{3} \binom{n-3}{k-3} - \dots + (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \binom{n-k}{0}$

Choisir pour E l'ensemble des parties à k éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ et pour A_i la partie de E constituée des éléments de E auxquels i appartient.

V. PRINCIPE DE MULTIPLICATION

S'il existe un procédé d'énumération (de construction, d'identification) des éléments d'un ensemble E en k étapes de telle sorte que l'étape i ($1 \leq i \leq k$) comporte n_i choix, ce nombre n_i étant indépendant des choix précédents et qu'à l'issue de ces k étapes chaque élément de E soit obtenu une seule fois, alors E possède $n_1 * n_2 * \dots * n_k$ éléments.

Ce principe est à la base de la notion de multiplication dans les naturels. Son utilisation est très fréquente mais parfois délicate.

Exemple Il y a $n(n-1) \dots (n-p+1)$ mots de longueur p dont toutes les lettres sont distinctes, sur un alphabet à n éléments.

Définir l'étape i comme le choix de la i ème lettre du mot parmi les $(n-i+1)$ symboles de l'alphabet non encore utilisés.

VI. PRINCIPE DE DIVISION

Soit une partition d'un ensemble E (non vide) telle que toutes les classes possèdent le même nombre d'éléments N . Notons C le nombre des classes. On a $|E| = C * N$ soit encore $C = |E| / N$ ou $N = |E| / C$.

Ce principe est en quelque sorte un cas particulier du principe précédent. Il est fréquemment utilisé pour déterminer C ou N . Il est connu sous le nom de principe des bergers, qui pour compter leurs moutons comptent le nombre de pattes et divisent par quatre.

Exemple $\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{p!}$

Prendre pour E l'ensemble des mots de longueur p , dont toutes les lettres sont distinctes sur un alphabet A à n éléments et la partition associée à l'application β de source E telle que l'image d'un mot soit l'ensemble L des lettres qui y figurent, et dont le but est l'ensemble K des parties

de A , qui possèdent p éléments. L'ensemble K possède $\binom{n}{p}$ éléments et β est une surjection telle que $|\beta^{-1}(\{L\})| = p!$ quel que soit L de K .

VII. CE QU'IL FAUT CONNAÎTRE

Théoriquement il n'y a pas grand-chose à connaître mais en pratique mieux vaut en connaître un maximum. Par exemple, on ne saurait ignorer que :

Il y a n^p mots de longueur p sur un alphabet à n éléments

Ce qui est une autre manière d'exprimer qu'il y a n^p applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour terminer, voici à titre d'illustration une preuve combinatoire de la formule du binôme.

Soit trois ensembles E , A et B disjoints. Notons $|E| = n$, $|A| = a$, $|B| = b$ et $F = A \cup B$. Nous allons dénombrer de deux manières différentes le nombre N des applications de E dans F . De manière directe [$N = (a+b)^n$] et de manière indirecte en décomposant l'ensemble W des applications de E dans F selon le nombre d'éléments de E qui ont leur image dans B .

Plus précisément, pour $0 \leq p \leq n$, notons A_p l'ensemble des applications de E dans F telles que p éléments de E aient leur image dans B (donc $n-p$ ont leur image dans A).

Evidemment tous les A_p sont disjoints, donc
$$N = \sum_{0 \leq p \leq n} |A_p| \quad (\text{principe d'addition})$$

Calculons $|A_p|$. Pour obtenir un élément de A_p procédons en trois étapes satisfaisant au principe de multiplication :

- choix des p éléments de E dont l'image va dans B (il y a $\binom{n}{p}$ possibilités);
- choix de leurs images dans B (b^p possibilités);
- choix des images des $n-p$ autres éléments dans A (a^{n-p} possibilités).

Ainsi $|A_p| = \binom{n}{p} a^{n-p} b^p$

D'où la formule, dite du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$

On retrouve : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

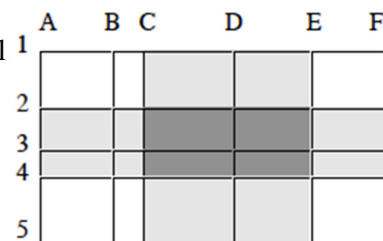
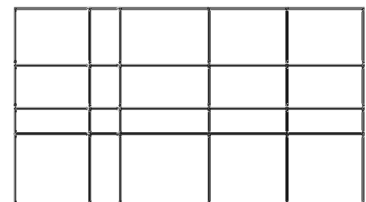
VIII. DÉNOMBRER C'EST STRUCTURER

Il s'agit de prendre possession des objets que l'on souhaite dénombrer.

Donnons quelques illustrations Combien de rectangles dans cette figure ?

Qu'est-ce qu'un rectangle ? C'est ici l'intersection de deux

bandes, l'une "verticale", l'autre "horizontale". Pour en parler, il est commode de désigner les lignes. Ce



que nous faisons avec des lettres et des chiffres.

Ainsi tout rectangle se désigne par une paire de lettres et une paire de chiffres. Ici CE-24.

Il y a bijection entre les désignations et les rectangles.

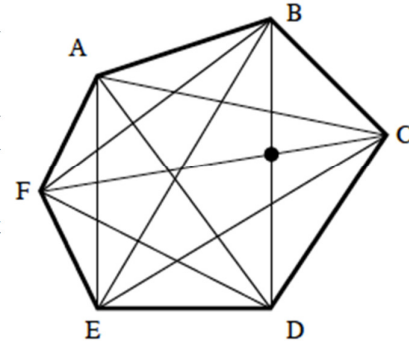
Il suffit de dénombrer les désignations. Ici 15 paires de lettres et 10 paires de chiffres.

Il y a donc 150 rectangles dans cette figure.

Plus généralement, $m(m+1)n(n+1) / 4$ pour un rectangle de m cases par colonnes et n cases par lignes. Combien d'intersections des diagonales dans ce polygone?

Qu'est-ce qu'un point d'intersection ? C'est le choix de deux diagonales. Ci-contre : BD et CF . C'est aussi le choix du quadrilatère $BCDF$.

A tout point d'intersection est associé un quadrilatère et réciproquement. Il y a autant de points d'intersection que de quadrilatères, dont les sommets sont parmi ceux du polygone donné. Ici 15.

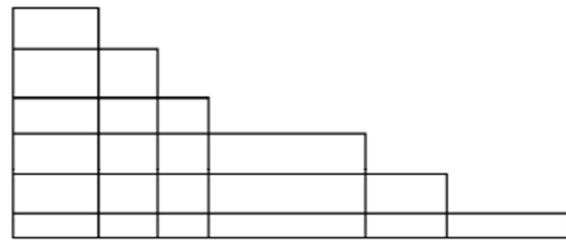


Plus généralement $n(n-1)(n-2)(n-3) / 24$ pour un polygone ayant n sommets.

1. Combien de rectangles dans cette figure ?

On note n le nombre de lignes (de colonnes). Ici $n = 6$. Alors le nombre $R(n)$ cherché vaut

$$\sum_{i+j \leq n} i \times j.$$



En effet, tout rectangle est caractérisé par son coin HD (en haut à droite) et son coin BG (en bas à gauche), la somme porte sur les coordonnées (i,j) des points HD possibles et $i \times j$ est le nombre des BG possibles.

Tous calculs faits on trouve $R(n) = n \times (n+1) \times (n+2) \times (n+3) / 24$

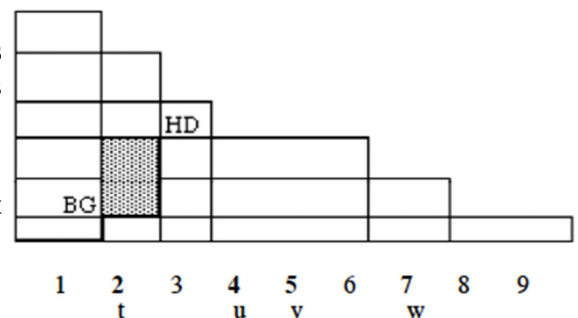
C'est le coefficient $\binom{n+3}{4}$

Voici un codage direct qui permet de retrouver ce résultat comme une 4-partie du segment entier $[1, n+3]$.

On code un rectangle de diagonale $[BG, HD]$ par les coordonnées $(t-1, u-t-1)$ de BG et $(v-u, w-v)$ les composantes de BG, HD.

Ce résultat se généralise à k dimensions et vaut

$$\binom{n+2k-1}{2k}$$



2. *Le triangle de Pascal*

n\p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

La première colonne ne contient que des 1 ; le reste de la première ligne ne contient que des 0 et, pour le reste, chaque nombre est la somme de ceux qui figurent dans les cases immédiatement au-dessus

à gauche et au dessus

8	1	8	28	56	70
9	1	9	36	84	126

C'est l'illustration de la formule
$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$$

De manière analogue, chaque nombre est la somme de ceux qui figurent au-dessus dans la colonne de gauche et aussi en diagonale au-dessus et à gauche.

5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Ce qui illustre les formules $\binom{n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p}$ déjà présentée pour illustrer le principe d'addition, et $\binom{n+1}{n-p} = \binom{p}{0} + \binom{p+1}{1} + \binom{n}{n-p}$

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



LA DIFFUSION: UN LIEU POUR UNE MATHÉMATIQUE PLUS HUMAINE?

Christian MERCAT*

Résumé – Cet article rend compte de quelques expérimentations de vulgarisation des mathématiques tentant de mettre en œuvre certains aspects kinesthésiques, spatiaux, auditifs et visuels peu exploités dans l'enseignement des mathématiques actuel. Des arguments concernant cet enseignement proposent le terrain de la vulgarisation comme plus propice à de telles expérimentations, visant à modifier l'appréhension du public de la mathématique, la plaçant dans une dimension plus globale et humaine, convoquant plusieurs sens. Nous décrivons sommairement les activités « webcam conforme », « rebond », « clochettes de Galilée » et « danser comme une fonction », ainsi que quelques résultats très partiels, et pour tout dire peu concluants, les concernant.

Mots-clefs : mathématique incarnée, kinesthésique, visuelle, spatiale, tactile

Abstract – This article describes some experimentations in popularization of mathematics attempting to bring certain latent humane capabilities into service such as visual, aural, tactile, kinaesthetic and spatial perceptions, which are under exploited in mathematics teaching nowadays. Some arguments are given hinting at the fact that popularization is better suited than teaching for such an endeavour, aiming at changing public view of mathematics, through a more global and humane apprehension involving several senses. We describe shortly the following activities: “conformal webcam”, “bouncing ball”, “Galileo bells” and “dancing like a function”, together with very partial and inconclusive results about them.

Keywords: embodied mathematics, kinaesthetic, visual, spatial, tactile

I. INTRODUCTION

La manière dont nous enseignons les mathématiques, dirigée en partie par la manière dont nous l'évaluons, en particulier à travers les examens et concours nationaux tels le baccalauréat, le brevet des collèges et les concours aux grandes écoles en France, promeut une certaine conception des mathématiques qui va à l'encontre de nombre de ses intérêts :

- instituée comme outil de sélection, la mathématique est clivante socialement, entraînant dédain, rejet et phobie. Elle n'est en effet ni comprise ni présentée comme, avant tout, un « simple » outil de résolution de problèmes parmi d'autres. S'ensuit un effet de contrat sclérosant sur les « métiers » respectifs des enseignants et des élèves (Brousseau, 1988). Paradoxalement les nombres ou le raisonnement formel sont parfois utilisés dans la cité à contre-sens comme argument d'autorité, pour couper à

* S2HEP EA 4148 – IREM de Lyon – Univ. Claude Bernard Lyon 1 – France – christian.mercat@math.univ-lyon1.fr

tout débat et faire sérieux ;

- naturalisée dans une technologie omniprésente, la mathématique, pourtant au cœur de plus en plus d'activités dématérialisées et numérisées, est rendue invisible et transparente par des interfaces « intuitives » prenant à leur charge les aspects techniques. Cette naturalisation est à l'œuvre pour le grand public mais aussi pour les enseignants qui peinent à reconnaître dans la technologie quoi que ce soit de familier pour eux ou d'exploitable dans la classe, ou inversement dans ce qui est enseigné des outils effectifs pour appréhender le monde ;
- cantonnée souvent à la maîtrise de techniques de manipulations d'expressions écrites, la mathématique enseignée est pauvre d'un point de vue esthétique, sensoriel, dynamique et créatif, donnant une fausse image du travail du mathématicien. En conséquence, elle attire trop peu les élèves talentueux, qui n'envisagent pas sa maîtrise comme une corde à leur arc créatif.

Le champ de l'enseignement des mathématiques est donc *a priori* un lieu peu propice à mettre en œuvre les potentialités humaines latentes favorisant une mathématique plus globalement humaine. J'entends par là une mathématique plus proche de l'expérience du chercheur, convoquant tous ses sens, s'appuyant sur les outils conceptuels et sensoriels que nous ont légués des centaines de milliers d'années d'évolution humaine (Lakoff, Núñez, 2000) :

- une appréciation spatiale,
- une liberté de mouvement pour explorer,
- une vision de chasseur-cueilleur extraordinairement efficace,
- des capacités de manipulation et de sensation bien supérieures à la maîtrise d'une craie, d'un clavier ou d'un stylo,
- une audition et un système d'énonciation verbale riche et complexe.

C'est peu de dire que l'enseignement contemporain des mathématiques ne convoque pas tous les sens : il s'agit essentiellement, comme le dit Victor Bret (2014), de manipuler des symboles, dessinés sur un rectangle, d'ardoise, de verre ou de papier. La technologie actuelle, même « tactile » et « intelligente », permettant une plus grande efficacité de quelques moyens d'expressions très restreints mais fonctionnels dans la relation homme-machine, contraint et formate la relation homme-homme, et ainsi accélère cet appauvrissement de l'expressivité humaine pour la réduire à la manipulation de symboles. Même si la maîtrise de l'abstraction et la capacité de généraliser sont visées, enseigner uniquement par ce moyen laisse sur le côté bon nombre d'élèves.

Bien-sûr l'enseignant « gesticule », s'exprime et donne chair à ces symboles par son jeu d'acteur et de chef d'orchestre de la classe. Les affects dont l'élève investit son professeur et son groupe-classe sont dans ces conditions primordiaux pour que l'expérience cognitive laisse des traces tangibles dans cette merveille de la sélection naturelle qu'est notre mémoire, tirant sans cesse et à notre insu des corrélations, des analogies et des conclusions entre les expériences tentées, présentes et passées, pour peu qu'elles nous impliquent personnellement et émotionnellement.

Il s'ensuit que de nombreux élèves, dont l'esprit n'est pas formaté pour ces formes étroites d'apprentissage, et qui auraient besoin qui de mouvement, qui de couleurs, qui de sensations tactiles, olfactives ou auditives pour mémoriser, sont astreints à inventer des stratégies de contournement compliquées et peu efficaces, gratouillant un doudou, traçant des lettres dans

l'air, chantonnant pendant leurs leçons, ou passent carrément à côté des apprentissages : « les maths, ça ne me concerne pas » portent-ils, fièrement ou pas, à leur boutonnière.

Une hypothèse structure les quelques activités que nous allons décrire dans le présent article : convoquer des capacités sensorielles et des stratégies peu utilisées dans l'enseignement mathématique contemporain peut contribuer à rapprocher le participant de l'expérience multi-sensorielle et pleinement humaine du chercheur. Nous présentons quelques éléments de résultats de nos expérimentations sur certaines activités, mais admettons dès maintenant que ceux-ci ne permettent pas de conclure sur la validité de notre hypothèse, et que de plus amples études systématiques sont nécessaires. En effet, pris dans la position réflexive d'animateur scientifique, je ne me suis pas donné les moyens de mesurer cet aspect, qui ne m'est apparu comme essentiel qu'après coup. Par exemple, au cours d'opérations de vulgarisation ponctuelles dans des établissements, j'ai pu mener des entrevues avec des élèves brillants et motivés et même si elles permettent d'établir que les activités proposées les ont intéressés et qu'ils ont, au moins sommairement et localement, compris quelque-chose, je ne peux conclure ni pour la motivation ou le savoir à moyen terme, ni pour un public moins motivé d'emblée, qui ne serait pas resté assez longtemps autour des animations. Je proposerai donc, plutôt que des conclusions mal étayées, des perspectives d'observations futures.

II. LES ACTIVITES

Ces activités ont été conçues pour être réutilisables. Leur contenu, en particulier logiciel, est ouvert et disponible au téléchargement. Elles se veulent d'un niveau technologique assez peu élevé, ne requérant presque¹ rien qui ne soit déjà présent dans une salle de classe. L'analyse didactique de ces activités est assez faible et demande à être précisée. Leur intérêt est de composer un ensemble cohérent sur lequel des questions de recherches ont été développées et peuvent maintenant être testées. L'hypothèse principale à tester sera : « convoquer des modes d'appréhension du réel plus sensoriels permet de réduire la distance entre la réalité présentée et sa modélisation dans l'esprit des participants » mais des études sur des aspects plus ciblés de cette distance pourront porter sur la motivation et l'attention continue, l'imagination et la compréhension (quelles perceptions, quelles images, quel codage du phénomène?), la mémorisation et la réflexion concernant l'activité expérimentée.

1. Webcam conforme

L'activité « webcam conforme » prend sa source dans mon travail au sein de l'équipe de géométrie discrète de l'université technique de Berlin, autour des professeurs Alexander Bobenko et Ulrich Pinkall. Issue d'un travail de recherche, cette installation est utilisée comme une machine à fabriquer des images interactives, afin de forger des icônes visuelles pour des objets tels que « les zéros du polynôme », « la spirale logarithmique », « l'inversion de Möbius », « la tête au carré », « le polynôme de Taylor », « la trompe d'éléphant de la série », dans l'espoir qu'elles pourraient être des jalons conceptuels habitant l'imaginaire des participants ; des jalons vers lesquels progresser lors de leurs études, des destinations, lointaines, exotiques et pourquoi pas désirables et attrayantes du savoir mathématique, qui ne sont communément jamais convoquées, ou illustrées seulement par des formules angoissantes et des photos noir et blanc fanées d'hommes barbus. Ces images étant interactives, elles demandent au public de « jouer » avec, de faire des gestes, des grimaces, des mouvements de bras, et les convoquent : « c'est de moi dont il s'agit »... Cette installation a été expérimentée à de très nombreuses reprises dans des contextes de diffusion des mathématiques, telles les fêtes

¹ Un ordinateur muni d'une webcam est courant dans la classe, mais une Kinect® l'est moins...

de la science, à Montpellier et Lyon, comme installation dans des lieux d'exposition, bibliothèque, hall, en préalable à une conférence sur le sujet de la multiplication comme transformation géométrique ou plus en profondeur des applications conformes. Son objectif va de la simple interpellation visuelle des participants, qui voient leur image captée et déformée de manière singulière, à l'utilisation en tant qu'outil pédagogique pour enseigner la théorie de l'analyse complexe à l'université. En tant qu'installation, elle est le plus souvent accompagnée d'un poster qui explique son fonctionnement et la théorie qui la sous-tend. Les curieux s'étonnent quand ils prennent conscience que c'est leur image qui est déformée, ces images les concernent, parlent d'eux ! Ils commencent à chercher la caméra, à saluer, se pointer du doigt, de manière interpersonnelle ou réflexive, se déplacer et tentent de se positionner pour obtenir des effets visuellement intéressants, s'appuyant sur une forme spatiale de compréhension fondée sur la rétroaction de leur exploration. Quand un animateur est présent, les participants peuvent demander le fichier image, de leur « tête au carré » ou de la répétition spiralee hypnotique d'une singularité logarithmique. Certains sont franchement dérangés de voir leur image transformée et malmenée mais la plupart sont amusés et peuvent rester longtemps à modifier les paramètres à la recherche d'un effet visuel précis. L'analyse *a priori* de cette activité est trop complexe pour être décrite dans le présent article, je renvoie à mon article sur le site *Images des mathématiques*² pour une description détaillée. Disons simplement que, de même qu'une carte météo permet de lire la température en chaque point du domaine en coloriant *l'espace d'arrivée*, chaque point z de l'écran est colorié par la couleur du point image $f(z)$ qui est un point de l'image captée par la caméra. Ainsi, localement, on comprend dans le même regard la valeur de la fonction par la couleur du point mais également la valeur de sa dérivée par la raison de la similitude locale, qui y opère un agrandissement ou une réduction. En particulier les points où la dérivée est nulle sautent aux yeux. Les données les plus consistantes que je présente ici décrivent l'interaction avec un groupe d'élèves d'un établissement très favorisé de Lyon lors de la semaine des mathématiques 2013. Je fais découvrir à un groupe de quatre filles en première scientifique la notion de similitude, de monôme (surtout $z \mapsto z^2$) et de polynôme. Je leur attribue à chacune un rôle que nous avons défini sur les exemples précédents : la gardienne du zéro a une cible colorée dont elle cherche les images, la spécialiste des endroits où la dérivée s'annule aime faire des grimaces, la compteuse du degré a le bras long et la « réelle » n'observe que la fine droite au milieu de l'écran. Je leur présente un nouveau polynôme, $z \mapsto z^3 - z$ et leur demande de me le décrire.

- Alors, où sont les zéros ?
- (E1 bougeant légèrement sa cible pour bien la centrer à l'origine, montrant du doigt à l'écran les trois images de cette cible) : là, là et là.
- C'est-à-dire ?
- (E1) -1, 0 et 1.
- Où la dérivée s'annule-t-elle ?
- (E2 bougeant la tête jusqu'à être horriblement déformée avec deux bouches et quatre yeux) : ici la tête au carré et... (tâchant de bouger en même temps sa main droite pour que son doigt s'éclate en une croix) là !
- C'est où ça ?
- (E2) Entre -1 et 0 et 1, vers -1/2 et +1/2.
- Et le degré ?
- (E3) On voit là [sur la formule] bon, il y a un trois, mais... [elle tourne lentement son bras, sa main tournant autour de la limite de l'image, fixant des yeux une des images de sa main] un quart, un demi, un, un et demi, ah la moitié, deux, deux et demi, trois, j'ai fait le tour complet une fois et il m'en a fallu trois ! Et on se voit en tout trois fois ; [en agitant une main et en la pointant sur l'écran de l'autre] un, deux, trois, tout est triplé. C'est de degré trois.
- Et comme fonction réelle ?

² <http://images.math.cnrs.fr/Applications-conformes.html>

- (E4 tenant son index levé et le bougeant de gauche à droite) À gauche on est la tête en haut puis en bas jusque là, puis de nouveau en haut.
- Et ça veut dire quoi ?
- En bas, ça descend ; en haut, on est multiplié par un nombre positif, la dérivée est positive, ça monte. Elle est d'abord croissante puis, décroissante tout ici, puis croissante à partir de là.

Les arguments que ces élèves donnaient faisaient sens pour elles, étaient fondés sur l'expérience personnelle directe, leurs mouvements et leurs sensations corporelles et visuelles plutôt que sur des preuves statiques et rhétoriques.



Figure 1 – Des enfants jouent avec la webcam conforme

Ce groupe est resté avec moi plus de vingt minutes, chacune a compris son rôle mais il est difficile d'estimer si ces différents rôles faisaient vraiment sens pour elles, étaient coordonnés en une compréhension globale de ce polynôme en particulier, de la notion de polynôme en général, ou ce qu'il a pu rester de leur expérience. Encore une fois, l'intérêt premier de cet atelier dans ce cadre était surtout de montrer de belles images, des jalons visuels, accrochées à des jalons verbaux tels que « polynôme », « spirale logarithmique », « exponentielle », « fraction rationnelle », de faire interagir physiquement les élèves avec des mathématiques, qui leur demandent de bouger, qui opèrent sur eux (enfin sur leur image). Même si, en marge il était également question de faire passer la notion de dérivée comme taux d'accroissement, ici facteur de « zoom », d'agrandissement ou de réduction, il serait intéressant de savoir si ces jalons visuels ont aidé les jalons verbaux à persister jusqu'à ce qu'un enseignement traditionnel leur donne consistance. Je ne me suis pas donné les moyens d'étudier cette question. Parmi les participants à cette installation, combien retiendront comme icône pour la fonction carrée, à la place de la parabole réelle, leur tête au carré, monstre à quatre yeux et deux bouches ?

2. *Rebond*

L'activité « rebond » a été expérimentée pendant trois années consécutives dans le contexte de stages MathC2+ conduits à l'IREM de Lyon, à l'Institut Camille Jordan de l'Université Claude Bernard Lyon 1, en coopération avec l'association Plaisir Maths, notamment son président Nicolas Pelay et des animatrices et animateur scientifiques, Laura Pallez, Damien Lucas, Alix Boissière et Alix Laubez. Il s'agissait de l'activité « fil rouge » conduite dans ce stage de quelques jours (3 ou 4) d'initiation à la recherche autour de la thématique des mathématiques et du cinéma. Le public était composé d'élèves de seconde de l'Académie de Lyon. Ceux-ci ne se connaissaient pas et sont sélectionnés par leurs professeurs pour leur potentiel en mathématique mais pas nécessairement issus d'un milieu socio-culturel favorisant la poursuite

d'études scientifiques. Ces stages étaient structurés autour d'exposés de chercheurs éclairant le sujet du cinéma et des mathématiques et apportant des éléments théoriques et pratiques qui étaient réinvestis dans l'activité « rebond ». Celle-ci se déroulait sur trois séances d'une heure et demie sur le stage. Son but était de fabriquer un petit film de synthèse du rebond d'une balle. Cette synthèse était le résultat de l'analyse puis de la modélisation du mouvement d'une balle physique lors de son rebond. Il ne s'agissait nullement d'expliquer les raisons physiques du mouvement, mais simplement, de manière phénoménologique, de décrire la trajectoire.

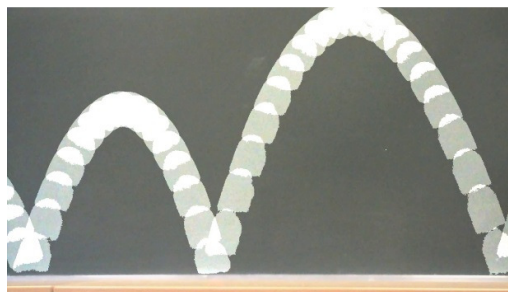


Figure 2 – Une prise de vue fondue du rebond d'une balle

Nous rapportons en particulier ce qui s'est passé dans le deuxième stage, en juin 2013, pour lequel nous avons le plus de données fiables, mais les autres stages étaient essentiellement similaires. Répartis par groupe de 4 ou 5, les élèves ont à tourner quelques séquences filmées du rebond d'une balle donnée, puis à les analyser à l'aide d'un logiciel de vision par ordinateur qui enregistre les données de position et de temps. Ces données sont ensuite transférées, exploitées et modélisées sur des calculatrices puissantes offrant des capacités d'analyse de données tabulaires, de représentation graphique et d'interpolation (FX Casio 35+ offertes par le fabricant), et un logiciel d'analyse et de visualisation de données (Geogebra) disponible sur les ordinateurs portables sur lesquels la séquence a été tournée. Les élèves sont libres de prendre une nouvelle prise pour avoir de nouvelles données si elles s'avèrent corrompues ou trop peu typiques. Un ordinateur effectue la prise de vue, par l'intermédiaire d'une webcam, et l'analyse se passe en direct : des points rouges sont surimposés à l'image, permettant de comprendre de quoi les données produites sont les coordonnées. Des essais avec la main ou le visage dans le champ de la caméra amènent des rires parmi les élèves (de nombreux points rouges émaillent l'image), mais participent à construire une relation d'intégrité et de proximité par rapport aux données : « ces données, c'est moi qui les ai produites, elles n'ont pas été nettoyées ». La production directe de données personnelles, dépendantes du contexte concret et immédiat de la prise de vue, permet que l'écrémage des points de bruits par exemple, ou des bouffées de points parasites, ait un sens, quasiment kinesthésique, dans tous les groupes, en témoignent leurs gestes fréquents à propos de la trajectoire de la balle devant des tableaux de nombres. De plus, les données, pourtant à distance dans le temps et l'espace (sur leur calculatrice, plusieurs minutes plus tard), sont analysées dans ce contexte et continuent à faire sens, s'aidant des données brutes de la visualisation du film pour déterminer les circonstances d'un événement dont ils observent la trace dans les données, au contraire de données « mortes » qui, sorties de leur contexte, ne signifient pas grand-chose pour les élèves.

Les procédures attendues étaient les suivantes :

- identifier les traces comme des portions de paraboles ;
- se placer dans un repère facilitant l'écriture (où le plan de rebond est d'ordonnée nulle) ;
- déterminer les paramètres des paraboles (le choix de la balle et le cadrage influent) ;

- choisir le paramétrage le plus adapté (sous la forme $a(x-s)^2+h$, où s est l'abscisse du sommet, h son ordonnée) et identifier ces paramètres comme ceux pertinents à déterminer ;
- remarquer que le paramètre a peut être considéré comme constant : *via* des comparaisons entre les groupes, à orchestrer par les animateurs, on met en évidence sa dépendance aux conditions initiales, en particulier la vitesse horizontale, mais sa relative constance à l'intérieur d'une séquence ;
- remarquer, et c'est le point crucial mathématiquement, que les hauteurs successives décroissent, à peu de choses près multipliées par une constante, de rebond en rebond. Un travail préalable sur tableur autour de « trouver l'élément manquant de la suite » sur des suites géométriques pures ou brouillées, induisait les élèves à cette conclusion, la notion de suite géométrique n'étant vue qu'en classe de première. Cette constante dépend de la balle et de la surface de rebond ;
- en déduire numériquement une formule pour les positions successives du sommet.

Nous avons récupéré les fichiers produits sur les ordinateurs portables pour chaque groupe et quelques fichiers sur calculatrices. L'utilisation sur la calculatrice de l'outil de régression quadratique, donnant les paramètres d'une parabole interpolant des données, est la différence la plus notable entre le travail individuel sur calculatrices et le travail plus collectif sur ordinateur. En effet, avec le logiciel de géométrie interactive, une première stratégie consistait à prendre les points extrémaux et médian des données, afin d'estimer le sommet et les autres paramètres de la fonction quadratique, mais le résultat était souvent assez mauvais. La plupart des groupes ont alors évolué vers le choix de modifier à la main trois paramètres de manière à définir une fonction quadratique qui soit visuellement au plus près des données. Aucune stratégie comparable de détermination par approximation manuelle des paramètres n'était apparue sur calculatrice jusqu'à ce que la découverte de la fonction de régression quadratique se répande parmi les groupes. Cette découverte entraîna alors la recherche de son équivalent dans le logiciel sur ordinateur, amenant à des résultats numériquement plus satisfaisants, soit par l'interpolation quadratique de trois points libres soit par l'interpolation de la liste toute entière. Pour autant, la trop grande confiance dans les valeurs données par l'interpolation s'est avérée un frein à la modélisation : relativement peu d'élèves avaient assez de maturité pour évaluer comme pertinent le fait de modéliser un paramètre numériquement fluctuant par une constante. Prendre conscience de l'ordre de grandeur (faible!) de la fluctuation ne s'est imposé qu'après une mise en commun des résultats des différents groupes et un débat où il y avait de la résistance. Étant donné qu'il s'agissait de reproduire en un film de synthèse le mouvement de la balle, l'intérêt de la modélisation, avec ses paramètres modifiables à volonté, pas seulement reproduisant les données mais générant de nouvelles familles de courbes, n'est apparu à certains élèves clairement qu'à la fin, quand les données brutes numérisées ne cadraient pas avec les choix scéniques et graphiques de l'animation.

La conclusion de cette expérimentation, hormis son relatif succès parmi les participants, est l'impression, à confirmer par une analyse plus fine et détaillée, d'un bon degré de conscientisation par les élèves du sens et de l'intégrité des données analysées, permis par une production *in vivo* de ces données, comparées à des données *in vitro*, suspectées d'être nettoyées et simplifiées, obtenues par un procédé plus long ou complexe et non directement compréhensible *via* une rétroaction simple validant ou invalidant des conceptions naissantes. Un protocole expérimental serait à mettre au point pour mesurer cette distance entre le sens et les données pour les élèves, afin de comparer différentes situations de modélisations, allant de données dynamiques, très proches du concret, d'une intégrité vérifiée directement par le contexte personnel et sensible de l'élève, puis abstraites peu à peu dans une modélisation très

progressive, comme ce que nous avons tenté de faire ici, à des données statiques, *Deus ex machina*, imposées par l'enseignant et dont le sens n'est basé que sur des explications discursives.

a) *Clochettes de Galilée*

L'activité « clochettes de Galilée » est relativement similaire pour une partie à l'activité rebond, car elle s'appuie sur la vision par ordinateur, mais elle sollicite également l'ouïe comme élément essentiel de décision. Sur le plan notionnel, elle tente également de mettre en place une abstraction progressive menant à une modélisation de plus en plus générale autour de la notion d'alignement, dans des espaces allant du concret des positions physiques des billes à l'abstrait de la vitesse en fonction du temps et des accélérations en fonction des pentes.

Cette activité, développée dans le cadre du projet européen mcSquared, reproduit l'expérience célèbre de Galilée qui, souhaitant étudier la chute d'une bille le long d'un plan incliné, se voit limité dans sa capacité à objectiver cette expérience, car la bille roule trop vite ! Il a alors l'excellente idée de disposer des clochettes le long du trajet, assez légères pour ne pas perturber la bille, mais assez sonores pour être clairement distinguées. Il dispose alors ces clochettes de manière à obtenir des sons à intervalles très courts, à un rythme régulier, ce que l'oreille est tout à fait capable de reconnaître. Il est pédagogiquement intéressant de montrer qu'il est légitime de s'appuyer ainsi sur l'acuité particulière d'un sens disponible à l'humain pour faire de la science ! Nous avons tourné des petites séquences filmées de la bille glissant le long d'une pente à différentes inclinaisons, et la bille tombe effectivement si vite qu'il est bien difficile de la voir plan par plan ! La reconnaissance visuelle par ordinateur peut cependant numériser ces séquences et procurer des données. Cela ne sauve pas les élèves de la frustration de Galilée car ces données sont assez « traditionnelles » : du fait de sa fugacité, l'expérience est moins prégnante que dans l'activité « rebond ». Mais la version « clochettes » de cette activité emporte beaucoup mieux l'assentiment ! Les données qui en sont issues font *a priori* sens. Cependant, notre expérience est qu'il est techniquement assez difficile de mettre en œuvre l'activité « clochettes » réellement dans la classe. Nous avons ainsi développé une version numérique de celle-ci, qui complète l'acquisition vidéo d'une bille réelle présentée dans un premier temps. Une simulation informatique avec le logiciel Cinderella permet de positionner des points le long d'un segment pentu, de lancer une bille virtuelle dessus. Les points émettent alors des sons de clochette quand la bille les approche. On peut ainsi positionner les points jusqu'à être satisfait de la régularité du rythme entendu et commencer à raisonner sur les mesures donnant les positions des « clochettes ».

Tout d'abord chaque groupe d'élèves est sensé travailler sur une vidéo avec une pente donnée. La première constatation est que les points images de la bille sont alignés dans l'espace physique (ils sont sur un segment). Une formule de la droite est trouvée, soit en prenant deux points libres qu'on manipule jusqu'à visuellement être satisfait, soit en introduisant l'outil « boîte noire » de régression linéaire. La pente de cette droite est ainsi estimée. On constate ensuite que le mouvement est accéléré. On calcule les vitesses entre deux images successives à l'aide du tableur. On constate que ces vitesses augmentent toujours approximativement de la même quantité : il est raisonnable de les modéliser par une suite arithmétique ou encore, géométriquement (mais dans un espace abstrait), de modéliser les points (temps, vitesse) comme alignés. Encore une fois, on estime numériquement la pente de cette droite, c'est l'accélération a . La distance physique entre deux points à deux instants différents est comprise comme l'aire sous le graphe des vitesses, qui est un triangle, ce qui permet d'obtenir la formule de la position $\frac{1}{2} a t^2$. Le travail de tous les groupes est collecté, l'ensemble des points (pente, accélération) est dressé et là encore un alignement est proposé

comme modélisation. C'est de plus une fonction linéaire, l'accélération est proportionnelle à la pente.

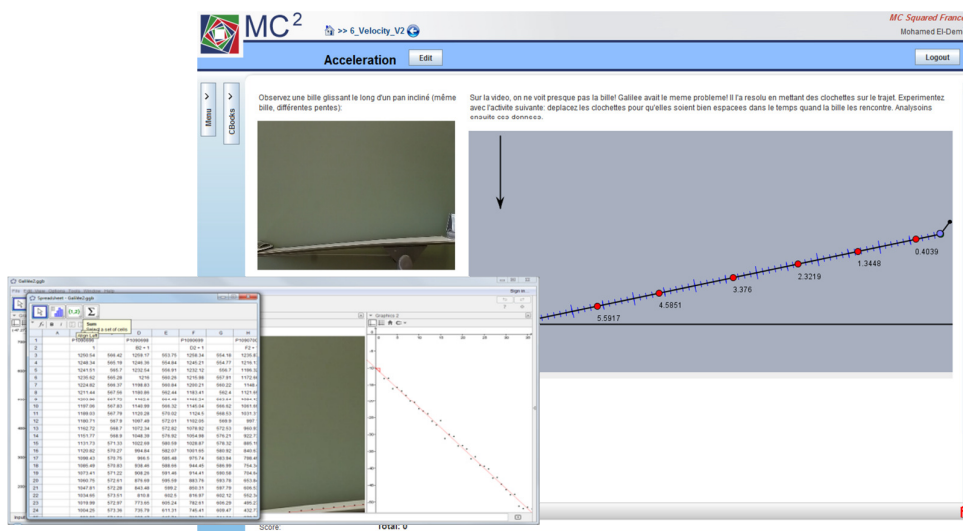


Figure 3 – L'activité «Clochettes de Galilée»

Dans un second temps, l'expérience est conduite avec l'activité clochette. Une progression quadratique des distances parcourues pour un temps donné est mise en évidence de la même manière, mais cette activité est plus intégratrice : plutôt que des données numériques, la preuve est fondée sur une disposition spatiale des clochettes et un rythme constant estimé à l'oreille. De plus, la pente n'influe sur le rythme qu'en modifiant sa vitesse mais pas sa régularité. Ainsi la proportionnalité entre la pente et l'accélération est concrètement estimée.

Il serait intéressant de mesurer la profondeur du sens que les élèves confèrent aux données dans ces différentes situations : les clochettes réelles, les clochettes simulées, l'expérience réelle (inexploitable numériquement), les vidéos (peu exploitables) et les vidéos numérisées par reconnaissance optique.

b) Danser comme une fonction

Cette activité, développée dans le cadre du projet européen mcSquared, provient en substance de l'exposition du Mathematikum de Gießen en Allemagne.

Le graphe d'une fonction est affiché sur un écran, avec un compte à rebours. Passé ce temps, un point est affiché, dont l'abscisse est le temps et l'ordonnée est la distance du participant à l'écran. Le participant voit ce point et sa trace et doit se déplacer de telle manière que l'ensemble des points décrivant son mouvement soit aussi proche que possible du graphe cible. Un score est alors affiché. Les stratégies attendues dévoilant de fausses conceptions et la difficulté à identifier variables spatiales et temporelles sont des tentatives de contrôler la variable temps, l'inversion avant/arrière pour une fonction croissante/décroissante, la prise en compte trop peu fine de la pente pour le contrôle de la vitesse.

Cette activité a été expérimentée principalement trois fois, à la fête de la science 2014 à l'université Claude Bernard Lyon 1, à la Maison des Mathématiques et de l'Informatique et au forum des mathématiques 2015 d'Aix en Provence.

Les participants doivent tout d'abord prendre conscience que la variété de leurs mouvements est réduite à un seul nombre et que c'est la distance à l'écran. Pendant les premiers jeux, certains participants continuent à confondre le temps, qui n'est pas une variable

libre, et leur position gauche/droite, tentant de « revenir en arrière » en se déplaçant sur la gauche pour réparer un mauvais début. Modéliser, c'est choisir certaines caractéristiques et en éliminer d'autres, comprendre et vivre cette réduction dans son corps n'est pas une chose évidente dans un monde où les interfaces tactiles intuitives prennent effectivement en compte, à notre insu, un nombre conséquent de paramètres. Ici, la modélisation est pauvre à dessein. L'ajustement de la vitesse en fonction de la pente se fait assez rapidement et une pente forte met le participant dans une tension de préparation où la galopade en arrière ou en avant s'affine avec les parties successives. De très bons scores après trois ou quatre parties sont la norme pour des fonctions relativement simples. Ce choix du catalogue de fonctions est la variable didactique principale, ajustée en fonction du public.

III. CONCLUSION

Ma pratique d'enseignant et de vulgarisateur m'a amené à tenter de prendre en compte dans les activités que je mets en œuvre des aspects peu présents dans l'enseignement des mathématiques comme le mouvement, l'ouïe et la vue. La vulgarisation semble un lieu où un contrat didactique et ludique est probablement plus facile à établir que dans la salle de classe, « réconciliant » à peu de frais le public avec les mathématiques. Cependant l'évaluation des apprentissages ou du changement de perception des mathématiques nécessiterait des études plus approfondies que celle-ci. L'hypothèse principale que je me propose d'explorer ultérieurement est que la perception directe d'un phénomène aide à réduire la distance avec sa modélisation : des données « près » du phénomène sensoriel entraînent une meilleure modélisation de celui-ci. La question de l'opportunité et de la facilité de la transposition dans la classe d'activités convoquant les sens *avant* la raison reste ouverte.

REMERCIEMENTS

Cette recherche a été partiellement financée par le septième programme cadre de l'Union Européenne (FP7/2007-2013) dans le cadre du projet n° 610467 « M C Squared ». Cette publication ne reflète que les opinions de l'auteur et l'Union n'est pas responsable de l'utilisation qui pourrait être faite des informations qui y sont exprimées.

REFERENCES

- Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : CÉRÉEN-CRDP.
- Bret V. (2014) Humane Representation of Thought : A Trail Map for the 21st Century. *SPLASH Keynote ACM SIGPLAN* doi [10.1145/2660252.2661746](https://doi.org/10.1145/2660252.2661746)
- Brousseau G. (1988) *Théorie des situations didactiques : Didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Daskolia, M., Kynigos, C. (2012) Applying a Constructionist Frame to Learning about Sustainability. *Creative Education* 3, 818-823.
- Lakoff G., Núñez R. E. (2000) *Where Mathematics comes from : how the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.
- Mercat Ch. (2015) *Modelling and mathematics*. TEDxINSA May 2015.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



VULGARISATION ET ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

DANS LE JEU DOBBLE

Nicolas PELAY* – Alix BOISSIERE**

Résumé – Les processus de vulgarisation et d’enseignement sont des processus souvent articulés, et nous défendons l’idée d’un modèle théorique commun pour l’analyse d’une action de diffusion des mathématiques. Nous présentons le jeu Dobble, un jeu grand public très populaire, actuellement prisé par les vulgarisateurs, et nous montrons comment il est utilisé de façon variée et comment il peut être l’objet d’un processus de vulgarisation ou d’enseignement plus ou moins marqué selon les actions.

Abstract – The process of popularization and teaching are often articulated processes, and we claim for a common theoretical model for the analysis of an action of diffusion of mathematics. We present the game Dobble, very popular and very appreciated by the popularizers. We show how it is used in a varied way and how it can be precisely the object of a process of popularization or teaching, more or less marked according to the actions.

Mots-clefs : vulgarisation, Dobble, raisonnement, contrat didactique et ludique, action de diffusion

Keywords: popularization, Dobble, reasoning, didactic and ludic contract

I. INTRODUCTION

Dans le contexte actuel d’évolution profonde des rapports aux savoirs dans nos sociétés, les formes de diffusion sont de plus en plus articulées et complémentaires, selon les lieux, contextes, publics, dans lesquelles elles se déroulent. C’est pourquoi nous cherchons à caractériser les pratiques de vulgarisation des mathématiques qui peuvent être très différentes selon le type d’action (articles, vidéos, médiation humaine, atelier, conférences, etc.), le vulgarisateur, ses objectifs, son public, etc.

Nous avons choisi de traiter cette question en étudiant un jeu actuellement très prisé des vulgarisateurs mathématiques : le jeu « Dobble ». Il s’agit d’un jeu de cartes grand public qui connaît un succès important, et dont les cartes sont organisées en une structure liée à la géométrie projective. Nous allons montrer dans cette communication comment un même jeu peut être l’objet de différentes vulgarisations, et nous tenterons de caractériser ces différences.

Nous adoptons pour cela une démarche didactique, en accordant une attention particulière aux connaissances et savoirs mathématiques en jeu dans les processus de diffusion. Notre communication s’inscrit en continuité de celle de Pelay et Mercat (2012) lors de la première

* Laboratoire de didactique André Revuz – France – nicolas.pelay@univ-paris-diderot.fr

** Plaisir Maths – France – alix.boissiere@plaisir-maths.fr

2. Les mathématiques dans Dobble

Le caractère remarquable de Dobble est lié à cette propriété du jeu : « *deux cartes quelconques ont toujours un, et un seul, symbole en commun* », et cette caractéristique est le fondement d'un questionnement mathématique : quelle est la nature mathématique de cette propriété ? Quelle est la structure du jeu pour réaliser cette propriété ? Existe-t-il un nombre fini ou infini de cartes réalisant cette propriété et s'il est fini, combien y a-t-il de cartes ? Peut-on construire un jeu Dobble avec un nombre prédéterminé de symboles, toujours dans le cas où il y a le même nombre de symboles par carte ?

Ce sont ces questions qui sont abordées dans les articles de vulgarisation qui ont fleuri sur le net ces dernières années. Tous sont très liés aux notions mathématiques de géométrie projective, et nous allons nous-mêmes donner quelques éléments de vulgarisation mathématique avant de poursuivre notre étude.

La propriété du Dobble ressemble à deux énoncés de géométrie dans le plan affine réel :

- P1 : Par deux points du plan passe une et une seule droite.
- P2 : Deux droites distinctes, non parallèles, ont un et un seul point d'intersection.

Deux droites parallèles distinctes n'ont pas de point d'intersection en géométrie affine, mais si l'on considère que deux droites parallèles distinctes se coupent à l'infini, ce qui est l'hypothèse de la géométrie projective, on peut alors modifier le deuxième énoncé en :

- P2' : Deux droites distinctes ont un et un seul point d'intersection.

En ajoutant à chaque droite un point à l'infini, ce point étant commun aux droites de même direction, on construit ce qui est appelé le *plan projectif réel*. Deux droites parallèles étant deux droites de même direction, dans le *plan projectif réel* deux droites parallèles se croisent à l'infini. L'énoncé P2' y est donc vérifié, l'énoncé P1 restant vrai.

L'analogie de la propriété du Dobble avec les énoncés P1 et P2' permet de considérer les symboles du Dobble comme des points et les cartes comme des droites (ou les symboles comme des droites et les cartes comme des points). Par ailleurs, comme le dobble n'a qu'un nombre fini de cartes, on ne considère qu'un nombre fini de points plutôt que l'ensemble des points du plan, et on se trouve alors dans le domaine de la géométrie finie.

On peut alors appliquer les théorèmes de géométrie projective finie et parvenir à répondre aux questions mathématiques posées par le jeu, et comprendre finement la construction du Dobble et les liens entre le nombre de cartes, le nombre de symboles et le nombre de symboles par cartes.

III. MODELISATION D'UNE ACTION DE DIFFUSION DES MATHÉMATIQUES

Une action de diffusion des mathématiques sera ici définie comme la mise en place d'un *dispositif mathématique* dans un *contexte* donné, par un *acteur de la diffusion* et pour un *public donné*.

Cette définition assez large permet de se donner les moyens d'étudier avec un même cadre théorique une action d'enseignement et une action de vulgarisation : un article, une vidéo, ou une animation menée par un médiateur avec un public donné, etc.

Bien sûr, il est évident qu'il existe des différences profondes entre le processus de *vulgarisation* et le processus *d'enseignement*, mais plutôt que de les opposer *a priori*,

l'approche théorique consiste à développer un cadre commun pour étudier les phénomènes d'enseignement et de vulgarisation.

L'hypothèse sous-jacente est qu'il existe des éléments de vulgarisation dans le processus d'enseignement, et des éléments d'enseignement dans le processus de vulgarisation. Ce sont la priorité donnée à certains enjeux plutôt qu'à d'autres, les choix réalisés dans les activités proposées, le discours et le langage utilisé dans les textes et les échanges avec le public, qui vont permettre de caractériser les processus d'enseignement et de vulgarisation mis en œuvre. Aussi, une action de diffusion va pouvoir être étudiée avec une approche théorique globale.

1. Enjeux, intentions et rôle

Toute action de diffusion présente des *enjeux* et *intentions* qui viennent des acteurs de la diffusion et du dispositif choisi. Le public lui-même a ses propres intentions et enjeux.

En reprenant le modèle de Sousa Do Nascimento (1999), on considère qu'une action de diffusion des mathématiques est susceptible de répondre à différents types d'enjeux.

INTENTIONS	ENJEUX	ROLE DE L'ANIMATEUR
Elucidation	Valeurs (conscientisation, démystification)	Militant
Production	Procédures (règles, normes, techniques de fabrication)	Technicien
Médiation	Culture scientifique et technique partagée	Médiateur
Instruction	Connaissances scientifiques	Instructeur
Loisirs	Plaisir, sensibilisation	Amuseur

Tableau 1 - Les modèles d'analyse de l'animation scientifique

On voit dans ce tableau que les composantes « *enseignement* » et « *vulgarisation* » sont des enjeux parmi d'autres, et que c'est bien la priorité donnée à l'un ou l'autre des enjeux qui détermine la nature principale de l'action.

Dans une action d'enseignement, la priorité est donnée à la transmission de connaissances et de savoirs mathématiques, c'est le rôle « instructeur » qui est privilégié. Dans une action de vulgarisation au contraire, les enjeux sont beaucoup plus variés, et le rôle « instructeur » est en général beaucoup moins important. L'objectif de médiation est important, car les aspects culturels, historiques y sont généralement très présents, de même que l'intention « loisir » est aussi prise en compte : le vulgarisateur cherche aussi à partager un certain plaisir, et à faire vivre un bon moment à son public. Le témoignage d'un médiateur mathématique professionnel interrogé en 2012 montre très bien la priorité donnée au plaisir par rapport au contenu :

L'essentiel, c'est d'essayer au maximum que les gens passent un bon moment. [...] A la limite en étant extrémiste, je dirais que le contenu passe après. C'est-à-dire que déjà, si les gens passent un bon moment, évidemment en ayant entendu parler de maths, [...] si ils sentent que vraiment il y a des maths là où ils sont, et qu'ils se sentent bien, pour beaucoup c'est déjà énorme. Et donc quelque part, je considère que c'est de notre responsabilité, c'est d'essayer de faire en sorte que ça se passe bien. [...] Donc je ne me fixe jamais d'objectif de contenu, il passera ce qui passera.

2. *Le concept de contrat didactique et ludique*

Etudier une action de diffusion des mathématiques et ses enjeux peut aussi être décrit d'un point de vue théorique par la nature du contrat didactique et ludique qui se met en place et son évolution au cours du temps. Ce concept a été défini dans la thèse de Pelay (2011) en prolongement du concept de contrat didactique de la théorie des situations didactiques (Brousseau 1998).

Il est défini comme l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un "éducateur" et un ou plusieurs "participants" dans un projet, qui lie, de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné.

Ce concept permet de se donner l'outillage théorique pour décrire et analyser la façon dont évoluent les intentions et les enjeux dans une action de diffusion. Il permet ainsi de repérer des moments où un contrat didactique se met en place en lien avec la transmission d'un savoir mathématique précis, des moments où un contrat ludique d'instaure pour faire jouer les participants, ou leur raconter une anecdote amusante, et des moments où le contrat didactique et ludique se stabilise pour faire vivre simultanément des enjeux didactiques et ludiques.

Sans qu'elle soit obligatoire ou systématique, il apparaît à l'observation de nombreuses actions de vulgarisation que l'intention de divertissement et de plaisir est très souvent présente sous une forme ou une autre, et que cela engendre des choix dans le déroulement d'une conférence, d'un atelier ou d'un article. Ainsi, le conférencier, médiateur ou animateur sera souvent à la recherche du « bon équilibre » et en particulier de la bonne adaptation au niveau mathématique de son public.

3. *La trajectoire d'une action de diffusion*

L'adaptation au public est directement liée à l'adéquation de la nature des connaissances et savoirs mathématiques entre le public et les informations qu'il reçoit. Nous distinguons trois zones :

- la **zone magique** est la zone où le public n'a aucune prise sur ce dont on lui parle. Il ne peut pas faire de référence à des choses déjà connues. Plus la distance est grande, plus les mathématiques paraissent inaccessibles et en quelque sorte magiques pour le public. Le savoir expert est tellement éloigné de celui du public que celui-ci n'a aucune prise sur la réalité mathématique qui lui est proposée : elle lui est même invisible, incompréhensible, inaccessible.
- la **zone maîtrisée** est la zone où le public a une certaine maîtrise du contenu mathématique. Les connaissances mathématiques évoquées ont du sens, et il peut se « raccrocher » à des choses connues. Il peut toujours y avoir des approfondissements dans cette zone.
- la **zone didactique** est la zone où une compréhension et un approfondissement sont possibles autour d'une notion, d'un théorème, d'une technique, etc.

Ces zones étant définies, nous considérons qu'un dispositif de diffusion des mathématiques est comme un vaste territoire mathématique que l'intervenant peut exploiter différemment en fonction du contexte et de son public, et en s'appuyant sur différents ressorts (didactiques, ludiques, magiques, etc.) : il peut poser des jalons et des étapes, et organiser temporellement son action pour réaliser les enjeux fixés. Une action de diffusion des mathématiques est alors définie comme une trajectoire qui se réalise dans la zone de diffusion permise par le dispositif.

Le dessin ci-dessous de la figure 6, bien qu'encore schématique à ce stade de nos recherches, permet de donner une représentation de ce que nous cherchons à décrire par cette notion de trajectoire entre les différentes zones. Les axes représentent le niveau des connaissances mathématiques portées par le dispositif et par le participant.

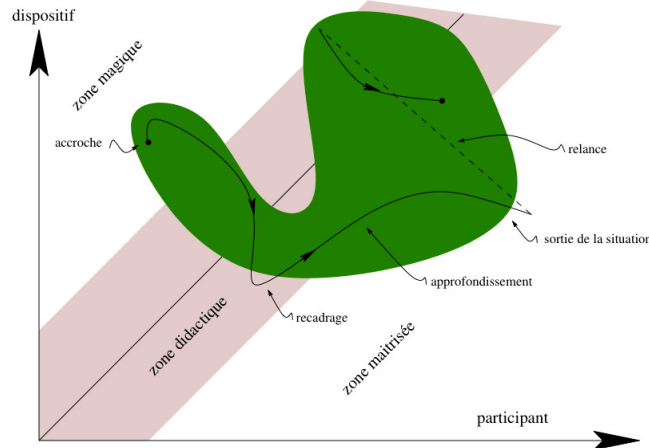


Figure 6 - Trajectoire individuelle et collective dans l'espace des connaissances

On peut à nouveau faire un lien avec ce que nous avons vu précédemment : dans une action d'enseignement, l'enseignant évoluera quasiment exclusivement dans la zone didactique, naviguant sur les frontières des zones maîtrisées et des zones magiques. Dans les actions de vulgarisation, les trajectoires sont beaucoup plus variées car le vulgarisateur cherche souvent à rendre accessible un savoir expert et à créer des ponts entre toutes les zones.

Nous allons mettre cela en évidence dans la vulgarisation mathématique du jeu Dobble, d'abord dans les articles de vulgarisation, puis dans un atelier mathématique.

IV. DES ARTICLES DE VULGARISATION SUR LE DOBBLE

1. *Dobble : rendre accessible des mathématiques complexes*

De nombreux mathématiciens se sont intéressés ces dernières années au jeu Dobble, comme en témoigne le nombre important d'articles et de forum de discussion auxquels on peut accéder en entrant « Dobble et mathématiques » dans un moteur de recherche. Chaque article, par les choix opérés par l'auteur, correspond alors à une trajectoire particulière dans la zone de diffusion permise par le Dobble.

La **zone magique** du Dobble est directement liée à la structure mathématique du jeu, aux éléments de géométrie finie et de géométrie projective mis en jeu dans celle-ci. Elle se manifeste pour le public par une série d'interrogations tels que : comment se fait-il qu'il y ait toujours un symbole en commun ? Existe-t-il une infinité de cartes possibles pour un nombre donné de symbole par carte ? Comment se fait-il que le nombre de cartes soit égal au nombre de symboles, etc. ? Ces notions mathématiques sont tellement éloignées des connaissances du public non expert qu'en pratique la zone magique est indépendante du public concerné (élèves du secondaire, adultes).

La **zone maîtrisée** du Dobble varie en fonction du public concerné. Comme cela est visible dans le paragraphe I.2, les connaissances sur lesquelles s'appuie la vulgarisation sont principalement relatives au domaine de la géométrie affine réelle. Il faut maîtriser deux énoncés fondamentaux de la géométrie telle qu'elle est enseignée au secondaire :

- P1 : Par deux points du plan passe une et une seule droite.
- P2 : Deux droites distinctes, non parallèles, ont un et un seul point d'intersection.

Ces notions font en général partie de la zone maîtrisée dès le secondaire. Par contre la maîtrise de mécanismes de raisonnement et d'élaboration de preuve n'apparaît qu'au lycée (secondaire 2), et les rudiments d'algèbre et d'arithmétique modulaire qui peuvent être utilisés ne sont maîtrisés que dans les premières années universitaires.

La **zone didactique** du Dobble est plus difficile à définir, car elle dépend directement du public et des enjeux de l'action de diffusion. C'est au vulgarisateur de créer – ou non – un espace didactique propice où des savoirs vont pouvoir être transmis et compris par le public.

Nous avons choisi d'analyser deux articles aux trajectoires très différentes dans chacune des trois zones :

- un article tiré du site de diffusion des mathématiques Images des Maths, *Dobble et la géométrie finie*, de Bourrigan (Bourrigan 2011), qui est un des premiers articles sur le sujet et qui est régulièrement cité dans les autres articles ;
- un article de Deléglise publié sur sa page personnelle, *Plans projectifs, arithmétique modulaire et Dobble* (Deléglise 2013).

2. Article de Bourrigan

L'article de Bourrigan, publié dans Images des Mathématiques², présente la structure mathématique que cache le Dobble. Il s'adresse à un public non expert d'adultes et d'élèves du secondaire³, et cherche à expliquer comment construire un Dobble simplifié à trois symboles par carte à l'aide des mathématiques. Pour cela, il introduit des rudiments de géométrie finie puis de géométrie projective, et s'appuie sur de nombreuses figures pour illustrer ses propos.

Le point d'accroche de l'article se situe selon nous au niveau des enjeux de la construction du Dobble :

[...] il a fallu que les concepteurs du jeu respectent un principe important : Deux cartes quelconques du jeu Dobble ont toujours exactement un symbole en commun. On va essayer d'expliquer comment les mathématiques peuvent nous aider à construire un tel jeu, en essayant de construire notre propre version de Dobble, en modèle réduit.

L'article opère un recadrage en ramenant le problème à la zone maîtrisée et à des notions de géométrie : l'énoncé P1 et les coordonnées cartésiennes.

On entre ensuite dans la zone didactique du Dobble avec l'introduction de la géométrie finie en deuxième et troisième parties de l'article, et l'élaboration d'un Dobble à trois symboles par cartes.

L'auteur termine la construction du Dobble dans la zone magique en parlant de géométrie projective sans entrer dans les détails :

On peut encore enrichir notre mini-Dobble en lui ajoutant une droite. Cette idée, qui est la base de ce que les mathématiciens appellent la géométrie projective date en fait des peintres de la Renaissance et consiste à ajouter un point (le point de fuite des peintres) pour chaque famille de droites parallèles. Ce point est alors le point d'intersection de la famille des droites. Les points de fuite sont tous alignés sur une droite, que les mathématiciens appellent « la droite à l'infini » et tous les autres « l'horizon. »

² <http://images.math.cnrs.fr/>

³ Le site *Images des maths* utilise une analogie avec les pistes de ski pour signaler la difficulté de ses articles (verte, bleue, rouge, noire et hors-piste). Celui de Bourrigan est caractérisé comme « piste bleue ».

Il est possible de définir très rigoureusement ces notions, dont on a déjà parlé çà et là mais nous n'entrerons pas dans les détails ici.

L'article se termine sur une relance du problème intitulé « Retour au « vrai » Dobble ». La relance se trouve elle aussi dans la zone magique du Dobble car l'auteur explique que la construction s'appuie sur un système de nombres plus complexe, mais ne développe pas.

3. Article de Deléglise

L'article de Deléglise est plus technique que celui de Bourrigan, en ceci que les objets mathématiques manipulés sont définis plus rigoureusement et les propriétés sont démontrées. Cela est en partie dû au fait que l'auteur se penche sur un Dobble plus complexe que celui présenté dans l'article du site *Images des Maths*, un dobble à 6 symboles par carte, mais surtout au fait que l'auteur pose des enjeux didactiques plus importants :

Le jeu de Dobble édité par Asmodée est une excellente occasion d'introduire des objets mathématiques importants : les plans projectifs, l'arithmétique modulaire et les nombres premiers. (Deléglise 2013, p.1)

Toutefois, le public visé est semblable à celui de l'article d'*Images des Maths*, comme le signale Deléglise dans le résumé :

[...] texte élémentaire à la portée d'un élève des classes secondaires. (Ibid.)

Pour cet article, il n'y a pas d'accroche dans la zone magique. L'article commence dans la zone maîtrisée du public avec des rappels de géométrie affine réelle, puis on entre dans la zone didactique avec la construction du plan projectif réel, le corps des entiers modulo cinq, la géométrie affine sur ce corps et la géométrie projective sur ce corps.

L'auteur effectue deux « écarts » dans la zone magique en généralisant les notions abordées au corps des entiers modulo p (où p est premier) dans les parties 4 et 7 de l'article.

C'est dans le dernier paragraphe, « Application au jeu de Dobble », que l'auteur fait le lien avec la construction du Dobble, qui est alors vu comme une application de ce qui est développé précédemment.

4. Conclusion

Ces deux articles sont représentatifs de deux actions de diffusion très différentes. Le premier, l'article de Bourrigan, met l'accent sur le côté magique, étonnant, de la structure du Dobble. L'article n'entre pas dans les détails techniques relatifs à la géométrie finie, ce qui en fait selon nous un article où l'enjeu principal est la vulgarisation.

A l'inverse, le second article, celui de Deléglise, a des enjeux didactiques importants. La structure de l'article se rapproche de la structure d'un cours, avec la construction de nouvelles notions, en partant de connaissances maîtrisées, et en terminant par une application. Le Dobble est privé de sa zone magique car il est vu comme une application des notions développées.

Ces deux articles illustrent parfaitement selon nous la façon dont les enjeux de l'action de diffusion influent sur sa trajectoire et sur sa caractérisation en tant qu'action de vulgarisation ou d'enseignement.

V. ETUDE D'UN ATELIER MATHÉMATIQUE AUTOUR DU DOBBLE

Nous avons pu voir comment la complexité des contenus mathématiques fait de Dobble un jeu très propice à la vulgarisation, avec des possibilités d'enseignement à la fin du secondaire. Nous souhaitons montrer une toute autre possibilité d'utilisation du jeu Dobble où des enjeux


d'enseignement peuvent être introduits dès 10 ans pour travailler sur la preuve en mathématique.

1. Contexte

Le jeu Dobble fait partie d'une ludothèque mathématique développée par une structure de diffusion, *Plaisir Maths*⁴, qui propose un ensemble de jeux et d'activités ludiques s'adressant à un public varié (de l'élève de primaire à l'adulte) dans différents contextes (intervention en classe, stage mathématique, fête de la science). Les interventions qui découlent de ces jeux ont des modalités très variées, une même activité peut être déclinée de plusieurs façons selon l'âge des élèves, la durée d'intervention et le contexte. Les activités ayant une *épaisseur didactique* importante, au sens de Pelay et Mercat (2012), sont donc privilégiées afin de permettre de les décliner de nombreuses façons.

2. Une nouvelle action de diffusion des mathématiques autour du Dobble

Le jeu de société Dobble a été choisi pour créer une activité accessible pour des enfants à partir de 10 ans, permettant de travailler le raisonnement et l'élaboration d'une démonstration. Le choix d'orienter l'activité vers un travail de raisonnement et d'explication nous paraissait cohérent par rapport aux programmes scolaires du collège qui préconisent une « introduction très progressive à la démonstration » en mettant l'accent sur « la recherche et la production d'une preuve » plutôt que sur « la mise en forme de la preuve ». Nous avons donc construit notre activité pour confronter les élèves à la nécessité de produire une preuve et pour les amener à formuler celle-ci.



Où sont les maths dans le
dobble?

Le dobble est construit en suivant la règle suivante : 2 cartes doivent toujours avoir 1 et 1 seul symbole en commun.

Essaye de créer ton propre jeu de dobble avec seulement 3 symboles par carte. Essaye de faire le plus de cartes possibles.

La première observation est qu'une variable déterminante du jeu est changée : il s'agit de construire un Dobble à 3 symboles, et non plus à 8 symboles comme le jeu d'origine. Mais le principe du jeu reste inchangé, les règles restent les mêmes, ce sont juste les cartes qui sont modifiées. Bien sûr, l'intérêt ludique diminue considérablement, car jouer avec un Dobble à 3 symboles est relativement peu ludique, mais en revanche, un enjeu mathématique émerge et se trouve propulsé comme enjeu premier : comment sont construites les cartes du Dobble ?

Et alors que cet enjeu mathématique est inaccessible avec 8 symboles, il devient accessible mathématiquement dès l'âge de 10 ans, et la zone didactique peut être abordée systématiquement sur des enjeux mathématiques de raisonnement et de preuve.

⁴ www.plaisir-maths.fr

Les élèves ont à leur disposition des feuilles de brouillon, des crayons, des feuilles avec des cartes à remplir puis à découper, des symboles à coller et de la colle. Les élèves ont le droit d'utiliser autant de matériel qu'ils le souhaitent.

Il y a un double travail de raisonnement à faire sur cette activité. Le premier consiste à vérifier que chacune des nouvelles cartes créées respectent les conditions imposées et le deuxième consiste à démontrer qu'on a atteint le nombre maximal de cartes possibles. La difficulté de ces raisonnements est croissante, et chacun d'eux permet d'introduire un type de preuves différent.

3. Vérification de chaque nouvelle carte

Le principe sur lequel s'appuie le Dobble est simple en apparence : « deux cartes, prises au hasard, ont toujours un, et un seul, symbole en commun ». Les élèves en comprennent facilement le sens car l'énoncé est similaire à celui de l'intersection de deux droites non parallèles. Toutefois, ils ont du mal à l'appliquer.

Pour les premières cartes créées, nous guidons les élèves pour qu'ils vérifient qu'elles respectent bien les conditions imposées. Nous cherchons à ce que les élèves mettent en place un mécanisme permettant de valider toute nouvelle carte créée. Pour cela nous nous appuyons sur l'expression « un, et un seul », et essayons d'instaurer une vérification du type « existence et unicité ». Nous insistons aussi sur le fait qu'il faut vérifier que la nouvelle carte fonctionne avec toutes les cartes déjà créées et non pas seulement avec une carte (que les élèves ont choisie au hasard).

4. La huitième carte

Le ressort didactique central de cette activité vient du fait que, si on exclut la solution infinie où un seul symbole est commun à toutes les cartes⁵, il n'y a qu'un nombre limité de cartes possibles, et dans ce cas sept cartes. En introduisant la consigne demandant de faire *le plus* de cartes possible, l'objectif est de confronter les élèves à l'impossibilité de faire une huitième carte. C'est ce blocage que l'on exploite pour introduire le travail de la preuve.

a) Un blocage systématique

La façon dont se déroule l'activité mène inévitablement à la confrontation de l'impossible huitième carte. Nous avons fait en sorte que les élèves construisent les cartes une par une et essaient d'en créer le plus possible. Comme les élèves ne savent pas combien de cartes ils sont supposés créer, une fois qu'ils en ont créé sept, ils essaient systématiquement d'en construire une huitième.

Le matériel utilisé pour créer les cartes peut permettre d'accentuer la situation. En effet, nous avons fait le choix de fournir aux élèves un document avec des cartes à remplir, or sur une feuille au format standard se trouvent huit cartes à remplir. Les élèves ont reçu pour consigne de créer le plus de cartes possible et d'utiliser autant de feuilles que nécessaire. Il s'avère que les élèves sont persuadés qu'ils doivent faire au minimum huit cartes. Nous pourrions prédécouper les cartes, mais nous trouvons que la feuille de huit cartes est plus efficace pour confronter les élèves au problème de la huitième carte.

⁵La solution infinie (1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7) est mathématiquement possible mais n'a pas d'intérêt ludique. En effet, le symbole en commun étant toujours le même, il n'y a pas de jeu à le chercher. Ainsi, lorsque les élèves trouvent cette solution, l'animateur l'accepte car elle est mathématiquement juste, mais relance l'activité de recherche chez les élèves en soulignant son peu d'intérêt ludique.

b) De l'expérimentation à la conjecture

Lorsqu'ils essaient de créer la huitième carte, les élèves procèdent par essais/erreur. Ils créent une carte et appliquent le mécanisme de vérification qu'ils ont développé dans la première partie de l'activité. Ils sont alors dans une démarche d'expérimentation avec un moyen de valider ou d'invalider leur carte hypothétique. Chaque nouvelle carte étant invalidé par leur mécanisme de vérification, les élèves sont amenés à faire l'hypothèse qu'ils ne peuvent pas faire de huitième carte.

Par ailleurs, le nombre de symboles disponibles sur la table est trop important pour que les élèves essaient toutes les combinaisons possibles, les élèves ne peuvent pas vérifier leur conjecture par l'expérience. Ils se trouvent confrontés à la nécessité de démontrer qu'il n'y a pas de huitième carte possible, de se convaincre qu'il n'y a pas de huitième carte possible.

c) Un raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'il n'y a pas de huitième carte possible, le plus simple est de faire un raisonnement par l'absurde en s'aidant d'un tableau répertoriant les cartes créées :

1^{re} étape : Le tableau

Il est utile d'appuyer la démonstration sur un tableau tel que celui-ci après. C'est aussi à ce moment qu'il devient intéressant de modéliser les symboles par des chiffres pour simplifier les explications.

Cartes \symbole	1	2	3	4	5	6	7
Carte 1	X	x	x				
Carte 2	X			x	x		
Carte 3	X					x	x
Carte 4		x		x		x	
Carte 5		x			x		x
Carte 6			x	x			x
Carte 7			x		x	x	

2^e étape : La démonstration par l'absurde.

Supposons que l'on puisse faire une 8^e carte avec les 7 symboles utilisés.

Tous les symboles sont équivalents (utilisés 3 fois et combinés 1 fois avec tous les autres).

Pour notre huitième carte, nous choisissons un symbole, le 1 par exemple.

A cause de la carte C1 on ne peut utiliser ni le 2 ni le 3.

A cause de la carte C2 on ne peut utiliser ni le 4 ni le 5.

A cause de la carte C3 on ne peut utiliser ni le 6 ni le 7.

On ne peut donc pas former de nouvelle carte avec le 1 en utilisant seulement les 7 symboles.

Comme tous les symboles sont équivalents, on ne peut pas former de nouvelle carte avec les 7 symboles déjà utilisés.

Supposons que l'on puisse faire une 8^e carte en ajoutant de nouveaux symboles.

On ajoute le symbole 8.

On crée une carte avec le symbole 8.

Il existe 2 façons de la compléter :

- en ajoutant un des 7 premiers symboles, disons le 1. Dans ce cas on retombe sur la première partie de la preuve et on ne peut utiliser aucune des 6 autres symboles. On doit ajouter un nouveau symbole : le 9. Dans ce cas les cartes numéros 4, 5, 6 et 7 n'ont aucun symbole en commun avec la nouvelle.
- n ajoutant 2 nouveaux symboles (9 et 10), mais dans ce cas aucune carte n'a de symbole commun avec la nouvelle.

Dans tous les cas il est impossible de former une huitième carte.

VI. CONCLUSION

Il existe de nombreuses manières de vulgariser, mais la façon de définir une trajectoire dans les différentes zones (magique, didactique ou maîtrisée) est déterminante selon nous de la capacité de l'action à réaliser ses objectifs auprès du public. Qu'est-ce que le vulgarisateur donne à comprendre ? A apprendre ? Quels savoirs tente-t-il de rapprocher de son public, ou au contraire, qu'est-ce qu'il laisse –intentionnellement ou non - inatteignable ?

A travers l'étude et la description de plusieurs actions de diffusion des mathématiques autour du Dobble, nous avons cherché à montrer comment les processus de vulgarisation et d'enseignement peuvent être articulés, et qu'il est possible d'étudier une action de diffusion, non pas comme un bloc unique, mais comme une succession de moments où les enjeux et les intentions peuvent évoluer, rendant ainsi possible l'existence de moments d'enseignement dans une action de vulgarisation, et réciproquement des de moments de vulgarisation dans une action d'enseignement.

REFERENCES

- Brousseau G. (1998) *Théorie des situations*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Bourrigan M. (2011) *Dobble et la géométrie finie*, Images des Maths, <http://images.math.cnrs.fr/Dobble-et-la-geometrie-finie.html>
- Deléglise M. (2013) *Plan projectif, arithmétique modulaire et Dobble*. <http://math.univ-lyon1.fr/~deleglis/PDF/dobble.pdf>
- EL JJ (2014) *Du simple au Dobble*. Choux romanesco, vache qui rit et intégrale curviligne, <http://eljjdx.canalblog.com/archives/2014/07/06/30181178.html>
- Pelay N. (2011) *Jeu et apprentissages mathématiques : Elaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat, Université de Lyon I, Lyon, mai 2011, <https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00665076/>

- Pelay N., Mercat C. (2012) Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques. In Dorier J.-L. et Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle — Actes du colloques EMF2012* (Spe4, pp. 1914-1925).
- Sousa Do Nascimento S. (1999) *L'animation scientifique : essai d'objectivation de la pratique des associations de culture scientifique et de techniques françaises*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015



POUR UNE « VULGARISTIQUE » DES MATHÉMATIQUES

Benoît RITTAUD*

Résumé – L'article présente quelques considérations sur ce qu'est la vulgarisation en mathématiques et illustre en quoi la didactique ou la pédagogie ne sont pas pleinement adaptés pour son étude en tant qu'objet scientifique. À l'aide de l'exemple de la problématique des nombres irrationnels, l'article met en relief quelques différences fondamentales entre vulgarisation et enseignement. Il suggère que, ces deux activités étant tout de même liées, l'une et l'autre pourraient être regardées comme s'intégrant à un même cadre théorique plus général : celui de la transmission du savoir.

Mots-clefs : vulgarisation ; enseignement ; nombres irrationnels

Abstract – The article deals with some considerations on the activity of popularization of mathematics, and shows why the science of mathematics education is not fully convenient to study it as a scientific object. The article makes use of the example of irrational numbers to emphasize on some fundamental differences between popularization and teaching. It suggests that, since these two kind of activities are linked, both should be regarded as parts of a more general framework: transmission of knowledge.

Keywords: popularization; teaching; irrational numbers.

Une façon commune de penser la vulgarisation consiste à l'envisager comme un effort de simplification du contenu d'un savoir, destiné à permettre à un public de non-spécialistes de s'en approprier à bon compte quelques rudiments. Selon ce point de vue, la vulgarisation serait une sorte d'enseignement allégé. Il est vrai que les deux activités partagent un point de leur structure fondamentale : les deux consistent en une rencontre (au sens large) entre dépositaires du savoir et novices, rencontre dont l'objet est une transmission des connaissances des premiers aux seconds.

Un aspect périphérique pour expliquer cette captation d'une pratique par une autre est que beaucoup d'acteurs de la vulgarisation sont eux-mêmes des enseignants, qui s'inspirent donc tout naturellement de leurs habitudes de salle de classe pour procéder à une transmission « allégée ». Ce point est tout particulièrement criant dans le cas des mathématiques, qui est une discipline scientifique peu médiatisée par rapport à d'autres (médecine, cosmologie...) et à laquelle peu de médias non-spécialisés consacrent des efforts suffisants pour créer une authentique culture autonome de la vulgarisation mathématique pour de bon émancipée de toute tutelle scolaire. La vulgarisation demeure donc, pour une large part, prisonnière du schéma de fonctionnement issu des pratiques professionnelles de ses promoteurs les plus naturels et les plus nombreux.

* Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539 – France – rittaud@math.univ-paris13.fr

Nous proposons ici une première approche pour illustrer que, en réalité, les outils d'analyse de l'enseignement sont partiellement inadaptés à l'analyse de la vulgarisation des mathématiques. L'intention comme les méthodes de cette dernière semblent en effet suffisamment distinctes pour qu'il soit légitime de parler d'une réelle différence de nature, et non d'une simple différence de degré. Le présent article présente ainsi quelques pistes modestes à partir desquelles il pourrait être possible de réfléchir à la fondation d'une « vulgaristique », qui serait à la vulgarisation ce que la didactique est à l'enseignement.

Cet article a grandement bénéficié des réflexions issues du groupe de travail informel AIPaGe, qui réunit depuis 2012 divers acteurs de la vulgarisation mathématique : Pierre Audin (Palais de la Découverte, Paris), Hacène Belbachir (université d'Alger), Pierre-Alain Chérix (université de Genève) et Shaula Fiorelli-Vilmart (université de Genève). Il peut être considéré comme une introduction à l'article de Shaula Fiorelli-Vilmart et ses co-auteurs, dans les présents actes du colloque EMF 2015.

I. SUR LE MOT « VULGARISATION »

Il n'est peut-être pas inutile, pour commencer, de consacrer quelques lignes à justifier notre choix du mot de « vulgarisation ». Pour beaucoup, le terme est négativement connoté, pour des raisons à la fois anecdotiques et profondes. Il y a, bien sûr, cette proximité phonétique avec des mots comme « vulgaire », « vulgarité ». L'argument serait mineur, à la rigueur défendable dans un pur contexte de communication, si cette proximité phonétique ne tenait pas à la parenté effective de ces mots, tous issus du latin *vulgus*.

Certes, le sens originel de *vulgus* est moins synonyme de « grossier » que de « commun ». La *langue vulgaire* n'est rien d'autre, à l'origine, que la langue partagée par tous, la langue du peuple. Nous pourrions donc céder au jeu érudit consistant à séparer le bon grain étymologique de l'ivraie. Il n'en resterait pas moins que le sens actuel de « vulgaire » est clairement dépréciatif, et qu'il est donc défendable de considérer que « vulgarisation » l'est aussi. Des tentatives ont régulièrement lieu pour proposer un autre mot : « valorisation », « partage », « diffusion », ou encore « popularisation » (peut-être inspiré de l'anglais *popularization*). En France, par exemple, c'est ce dernier terme qui a été retenu pour les 1^{ères} journées de popularisation des mathématiques qui se sont tenues à Orléans en 2012.

Chercher dans le lexique un mot à substituer à « vulgarisation » ne semble toutefois pas une bonne idée. Nous n'allons pas nous livrer ici à une critique exhaustive de toutes les propositions envisageable, mais seulement envisager brièvement le cas de « popularisation ». Sans même gloser sur le glissement de sens (s'agit-il de rendre les mathématiques « populaires » plutôt que « communes » ?), le mot présente en réalité le même défaut que « vulgarisation ». En effet, le tropisme qui conduit à attribuer à « vulgaire » (et mots apparentés) le sens péjoratif que nous lui connaissons a des causes qui sont tout autant à l'œuvre pour les termes dérivés de « peuple ». Par exemple, il faut n'avoir jamais entendu de cinéaste s'indigner de l'expression « cinéma populaire », ni de politicien dénoncer le peu de considération pour le peuple que sous-entend le sens de « populisme », pour imaginer sans sourciller que *popularisation* échapperait, à terme, au sort de *vulgarisation*.

Toutefois, la principale raison qui doit nous pousser à nous en tenir au mot de « vulgarisation » est ailleurs : elle est que c'est ce mot et non un autre qui est aujourd'hui en usage dans le grand public. Même si, comme nous le verrons plus loin, une définition exacte de la vulgarisation est difficile à saisir, du moins peut-on aisément s'accorder sur son intention générale : présenter de manière simple, accessible, attrayante, un champ donné du savoir à un public donné. Or le plus souvent (pas toujours, il est vrai), le public sur lequel il

s'agit de porter les efforts de vulgarisation est un public novice. Cela implique notamment que, à chaque fois que cela est possible, ce sont les mots utilisés par ce public que nous devons d'employer, en proscrivant tout élément de jargon qui ne serait pas absolument nécessaire. La dimension psychologique n'est pas indifférente et, s'agissant de ce qui nous occupe ici, c'est celle du public qui nous intéresse.

Retenir le mot de vulgarisation, c'est donc faire le choix d'une dénomination qui correspond à ce qu'il s'agit de désigner, mais aussi, et surtout, avec ce qu'il s'agit de faire : parler au public dans une langue qui lui soit familière.

II. VULGARISATION VS. ENSEIGNEMENT

Voici une liste d'éléments susceptibles d'aider à distinguer de façon théorique la vulgarisation de l'enseignement et montrent que la première ne peut se réduire à une simple déclinaison allégée du second :

- *la mise en scène* : non centrale dans l'enseignement (bien que n'en étant pas absente), elle est un élément crucial de la vulgarisation, qui recherche délibérément à créer des effets sous toutes ses formes (effets de surprise, images, discussions informelles...).
- *la captivité du public* : alors que des élèves ou des étudiants sont contraints d'être présents à une séance d'enseignement, assister à une présentation de vulgarisation (quelle qu'en soit la forme : conférence, atelier, article magazine...) relève en principe d'une démarche volontaire. La disposition mentale du public y est donc *a priori* très différente. En particulier, la vulgarisation est bien adaptée pour capter des publics alternatifs (adultes, retraités...) ou à qui il est spécifiquement important de s'adresser pour des raisons spécifiques (journalistes, décideurs...).
- *la pérennité du discours* : alors qu'un enseignement s'inscrit en principe sur la durée, une présentation de vulgarisation est limitée dans le temps. Aucun lien durable n'a vocation à s'établir entre le présentateur et le public, ou entre l'auteur et le lecteur. (En conséquence, le vulgarisateur a moins le droit à l'erreur que l'enseignant, ce dernier disposant toujours de la possibilité de rectifier un point lors d'une séance ultérieure lorsqu'il y a lieu de le faire.)
- *la mise en perspective* : sorte de contrepoint au point précédent, inscrire le domaine dans un paysage plus large (les mathématiques dans l'histoire, dans l'art, dans l'ingénierie, en philosophie...) fait partie de cette liberté que la vulgarisation peut davantage se permettre que l'enseignement, celui-ci étant bien souvent corseté dans des contraintes diverses (horaires limités, programmes officiels, influence des parents d'élèves, intangibilité des exigibles...).
- *la dimension hiérarchique* : l'enseignant est souvent un juge au travers de l'évaluation qu'il fait de ses élèves, tandis que le vulgarisateur n'a jamais ce rôle.
- *l'adaptabilité du contenu* : alors que l'enseignant est en général contraint par un programme, le vulgarisateur est plus souvent libre d'orienter son discours ou son atelier vers des éléments qui, sur le moment, apparaissent retenir davantage l'attention, ou susciter les questions les plus stimulantes.

Deux éléments viennent toutefois brouiller les cartes. Le premier, qui découle d'un phénomène déjà signalé en introduction, est qu'une partie significative du public de la vulgarisation est composée d'élèves, sous l'impulsion d'un enseignant. Le public de la vulgarisation peut donc à l'occasion se révéler tout aussi « captif » que celui de l'enseignement. C'est d'autant plus vrai qu'il est fréquent que l'enseignant exploite un

matériau de vulgarisation dans l'idée que celui-ci lui permettra par la suite de développer telle ou telle partie du programme scolaire.

Un second élément tient à ce qu'une autre partie significative de la vulgarisation s'adresse en réalité aux enseignants eux-mêmes, ou plus généralement à un public professionnel. Cette vulgarisation peut être qualifiée d'*interne*, par opposition à une vulgarisation *externe* qui vise un public moins acquis à la discipline. De plus, étant donné que la vulgarisation externe est souvent jugée et évaluée par des professionnels, il est fréquent d'observer des initiatives qui, visant initialement la vulgarisation externe, se transforment progressivement en vulgarisation interne. Il est raisonnable d'estimer que cette dernière, pour indispensable qu'elle soit, est conceptuellement moins intéressante à étudier. Relevant davantage d'une démarche d'information par et pour des spécialistes, elle tient probablement plus de l'enseignement informel entre pairs. Son principal intérêt théorique dans le cadre d'une étude des mécanismes de la vulgarisation est plutôt ce tropisme fréquent qui conduit une démarche de vulgarisation conçue comme externe à se changer plus ou moins vite en vulgarisation interne, sous l'effet conjugué des habitudes des contributeurs et de la facilité plus grande qu'il y a à s'adresser à un public plus ou moins captif (voir à ce sujet l'étude réalisée en 2014 par le site internet français *Images des mathématiques*¹, qui convient de la difficulté qu'il y a à s'adresser à un public qui ne se réduise pas à des personnes déjà passionnées). Pour ce qui nous concerne, nous ne considérons dans cet article que la vulgarisation externe des mathématiques, et nous l'appelons simplement « vulgarisation » par souci de concision.

III. UN TRAITEMENT VULGARISE DE LA PROBLEMATIQUE DES NOMBRES IRRATIONNELS

Pour illustrer la différence entre enseignement et vulgarisation, considérons le sujet classique de l'existence de nombres irrationnels selon ces deux angles.

Dans la perspective qui est celle de l'enseignement, la notion de nombre irrationnel s'effectue en général de la façon suivante. On commence par définir l'ensemble \mathbf{Q} des nombres rationnels comme étant celui des nombres x pour lesquels on peut trouver deux entiers p et q tels que $x = p/q$. Il s'agit ensuite de montrer qu'il existe des nombres qui ne sont pas dans \mathbf{Q} . Au niveau le plus élémentaire, cela peut se faire en prenant un exemple explicite (tel que $\sqrt{2}$) et en établissant qu'il ne peut s'écrire comme rapport de deux entiers, à l'aide de l'une ou l'autre des multiples démonstrations élémentaires existantes. (Pour $\sqrt{2}$, il en existe plus d'une vingtaine.) Un enseignant soucieux d'intéresser ses élèves et d'élargir leurs connaissances complètera cette démonstration avec différents éléments extra-mathématiques ou extra-scolaires reliés à cette problématique de l'irrationalité : conséquences historiques et philosophiques de l'existence des nombres irrationnels (notamment dans l'Antiquité), importance dans les applications (en architecture, en musique, dans la norme A4...), questions ouvertes (par exemple sur la structure des décimales de $\sqrt{2}$), etc. Ces aspects sortent du champ de l'enseignement proprement dit (au sens où ils ne font pas partie du programme de mathématiques), leur fonction est celle d'anecdotes éclairantes qui permettent d'aérer un cours qui porte sur une notion particulièrement abstraite.

Dans une démarche de vulgarisation ces aspects extra-mathématiques seront bien sûr regardés avec davantage d'intérêt, mais si la différence ne résidait que là, elle ne serait qu'une simple différence de degré. Or l'essentiel qui permet de distinguer enseignement et vulgarisation réside plutôt dans la manière dont cette dernière peut aborder les aspects strictement mathématiques de la notion de nombre irrationnel. En mettant l'accent sur la

¹ <http://images.math.cnrs.fr/Reactions-du-comite-de-redaction.html>

présentation de la notion plutôt que sur son *explication*, ce peut être un choix du vulgarisateur de s'« interdire » d'enseigner ce que sont vraiment les nombres irrationnels, pour éviter l'écueil si fréquent qui consiste à en dire trop. (Le défaut inverse, en dire trop peu, existe aussi mais est moins « naturel ».) Une présentation vulgarisée de l'irrationalité peut ainsi se structurer selon les idées-forces suivantes :

- les nombres entiers sont des briques et les opérations arithmétiques usuelles (addition, multiplication, soustraction, division) sont des outils. Briques et outils permettent de construire de nouveaux objets (des nombres non-entiers, par exemple en divisant 8 par 3).
- Ces briques et ces outils ont pour particularité de permettre de créer un très vaste ensemble, noté \mathbf{Q} , de nombres appelés *rationnels*. Celui-ci contient en particulier tous les nombres décimaux (mais pas seulement).
- Tout nombre pouvant être approché de façon arbitrairement précise par un élément de \mathbf{Q} (par exemple *via* les décimaux), une question naturelle est de savoir si tous les nombres sont en réalité des rationnels.
- Or il n'y a aucune raison *a priori* (quoi qu'aient pu en penser les Pythagoriciens) pour que nos briques et nos outils précédents suffisent à atteindre toute l'immensité des nombres.
- En l'occurrence, il se trouve qu'en effet, ces briques et ces outils ne suffisent pas. (D'où découle en particulier la nécessité d'inventer des notations spécifiques pour les nombres les plus courants qui échappent à ces briques et ces outils : $\sqrt{2}$, π , e , etc.)

Il y a là extrêmement peu d'enseignement à proprement parler (même si ce qui précède n'est pas exclusif et que le présentateur pourrait aussi, en passant, signaler d'autres voies de réflexion plus techniques, comme la construction de \mathbf{R} , sans s'y engager). Comme aucune caractérisation des rationnels par la représentation fractionnaire n'y apparaît, on n'y trouve aucune définition de l'irrationalité. On n'y trouve pas davantage de démonstration, ce qui s'en rapproche le plus étant l'usage du principe selon lequel nul outil n'a vocation à être universel.

Ainsi donc, au sens mathématique, les points précédents ne définissent ni ne démontrent quoi que ce soit. Pour l'enseignant, c'est là leur défaut rédhibitoire : il est à peu près impossible d'en extraire une substance mathématique précise. Pour le vulgarisateur en revanche, c'est là un atout, pour plusieurs raisons : d'abord, le risque est faible de « perdre en route » tout ou partie d'un public peu habitué aux techniques mathématiques. Ensuite, un point de vue aussi « lointain » permet d'avancer beaucoup plus vite. Le temps ainsi libéré peut alors permettre d'aborder des aspects culturels extra-mathématiques de la notion de nombre irrationnel, ou même servir à approcher des notions mathématiques plus complexes. C'est ainsi que, alors qu'il faudra à notre enseignant bien des heures de cours sur les corps de nombres et leurs extensions algébriques pour démontrer l'impossibilité de la quadrature du cercle, notre vulgarisateur, lui, peut immédiatement réinvestir en géométrie le principe qui lui a servi à affirmer l'existence des irrationnels : à l'instar des quatre opérations, la règle et le compas ne sont rien d'autre que des outils, avec lesquels on ne saurait prétendre *a priori* pouvoir tout faire, en particulier tracer un carré d'aire π .

IV. DE LA VULGARISATION SANS ENSEIGNEMENT ?

En poussant ce qui précède à sa limite la plus extrême, l'on en viendrait à affirmer que la vulgarisation n'est authentique que lorsqu'elle n'enseigne rigoureusement rien. Bien entendu, une telle vulgarisation « pure » serait aussi abstraite et irréalisable que le vide parfait en physique. (Qui imaginerait pour de bon une présentation vulgarisée un tant soit peu

développée sur les irrationnels qui n'enseignerait rien sur les fractions ?) De plus, une vulgarisation vierge de tout enseignement manquerait probablement son objectif, tant il est difficile de soutenir qu'un public, quel qu'il soit, ne serait là que sous la condition de ne rigoureusement rien apprendre. De la même manière que l'enseignement gagne en efficacité et en qualité en intégrant des éléments culturels vulgarisés, la vulgarisation s'enrichit évidemment d'une part d'enseignement. Il reste que ce qui précède montre qu'elle ne saurait s'éclairer avec les mêmes outils d'analyse.

Ainsi donc, il faut convenir que les points communs entre la pratique de l'enseignement et celle de la vulgarisation ne suffisent pas à réduire la seconde à une version allégée de la première. Puisque, toutefois, les deux exploitent parfois des outils similaires, une manière possiblement féconde d'aborder la question ne réside ni dans la subordination de la première aux schémas qui régissent le second, ni dans l'opposition de principe entre les deux, mais d'envisager les deux comme faisant partie d'un ensemble plus vaste, et à l'intérieur duquel il n'est pas nécessaire de dresser des frontières nettes. Lorsque, à l'occasion par exemple d'un atelier, un animateur propose un jeu pour initier une réflexion sur les probabilités, est-il dans une démarche de vulgarisation ? d'enseignement ? de recherche ? À l'évidence, la seule réponse valide est : un peu de tout cela à la fois. La détermination des paramètres structurants les plus pertinents pour décrire une activité de ce type est l'un des enjeux de ce qui pourrait constituer une didactique de la vulgarisation, une « *vulgaristique* », qui serait à la vulgarisation ce que la didactique est à l'enseignement, c'est-à-dire un domaine de recherche dont l'objet serait la vulgarisation elle-même.

REFERENCES

- Fiorelli Vilmart S., Audin P., Belbachir H., Chérix P.-A., Rittaud B. (2015) Évaluer une action de vulgarisation des mathématiques. *Actes du colloque EMF2015*.
- Rittaud B. (2006) *Le Fabuleux destin de $\sqrt{2}$* . Paris : Le Pommier.