Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LES DIFFERENTES PENSEES MATHEMATIQUES ET LEUR DEVELOPPEMENT DANS LE CURRICULUM

Compte-rendu du Groupe de travail n° 3

Rahim KOUKI[*] - Doris JEANNOTTE[**] - Joëlle VLASSIS[***]

I. RAPPORT

Ce groupe de travail fait suite au Groupe de travail n° 3 « Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum » du colloque EMF 2012 et du groupe de travail n° 10 « La pensée mathématique, son développement et son enseignement » du colloque EMF 2009. Comme son titre l'indique, il porte sur les pensées mathématiques et, plus particulièrement, sur leur développement dans le curriculum ainsi que dans diverses communautés mathématiques à différents niveaux scolaires, et ce, en prenant en compte les diversités sociales et culturelles. Trois aspects principaux on été abordés dans ce groupe.

Le premier a consisté en l'étude de différents courants théoriques caractérisant la pensée mathématique et visait à éclairer des questions tant épistémologiques que pratiques, par la mise en lumière de divergences et de convergences quant à l'opérationnalisation de ces théories en lien avec différentes perspectives de recherches.

Le deuxième aspect visait à étudier la prise en compte de l'activité du sujet, son histoire et le milieu dans lequel il évolue, de la nature des objets avec lesquels il travaille, des méthodes qu'il met en œuvre en lien avec les processus de conceptualisation et le développement d'une pensée mathématique.

Le troisième questionnait la prise en compte des différentes pensées mathématiques dans les curricula des pays de l'espace mathématique francophone. Par exemple, leur place dans les programmes, les manuels, les ressources pour les enseignants et dans les pratiques effectives des enseignants en regard des apprentissages des élèves peuvent être éclairée par la recherche.

Quatorze personnes ont participé aux activités du GT3 dont sept provenaient du Canada, quatre de France, deux du Luxembourg, et une de Tunisie. En tout, onze textes ont donné lieu

[*] Université Tunis El Manar – Tunisie- Rahim.Kouki@ipeiem.rnu.tn
[**] Université du Québec à Montréal – Canada – jeannotte.doris@uqam.ca
[***] Université du Luxembourg – joelle.vlassis@uni.lu

Kouki, R., Jeannotte D., Vlassis J. (2015) Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum – *Compte-rendu du Groupe de Travail n° 3*. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*– Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 199-205.

à des présentations. Ces textes concernaient différents ordres d'enseignement du préscolaire jusqu'au lycée. Quoique certains textes touchaient à plusieurs des aspects abordés par le groupe, il est possible de leur attribuer une prédominance selon le classement suivant. Quatre des propositions portaient davantage sur le premier aspect en touchant diverses questions épistémologiques. Cinq concernaient plutôt le second aspect en s'intéressant à l'activité des élèves. Enfin, deux présentations ont fait état d'analyse de curriculum et touchaient donc davantage le troisième aspect.

Dans le reste de ce rapport, nous présentons un bref résumé des contributions écrites et des échanges qui ont eu lieu à leur sujet lors des séances du travail du groupe. Nous proposons ensuite une synthèse de nos discussions ainsi que des pistes pour le congrès EMF-2018.

1. *Mise en lumière de différentes perspectives théoriques pour caractériser la pensée mathématique*

Luis RADFORD a abordé le thème de la pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. Selon cette théorie, deux points de vue sont nécessaires pour définir la pensée mathématique : d'une part, le point de vue anthropologique directement lié à l'agir des individus et aux pratiques sociales; il s'agit d'une synthèse culturellement codifiée du travail ou labeur humain; cette pensée apparaît au sujet comme potentialité; d'autre part, le point de vue subjectif qui est liée à l'individu et renvoie à l'actualisation d'un archétype culturel, comme par exemple la résolution d'équation; l'activité du sujet pensant est donc médiation entre la pensée potentielle et la pensée actuelle. L'exemple du développement de la pensée algébrique dans une classe de deuxième année du primaire a permis d'illustrer les idées présentées. En particulier, la pensée algébrique a été définie en fonction de trois composantes élémentaires : l'indétermination, la dénotation et l'analycité.

Doris JEANNOTTE a proposé une conceptualisation des processus généralisation et abstraction en tant qu'activité de la pensée mathématique, conceptualisation qui prend racine dans une perspective commognitive. Les deux processus sont posés comme différents sur la base du discours qu'ils développent. Quoique nécessaire à l'évolution de la pensée mathématique du sujet, l'abstraction est nécessaire au développement d'un nouveau « discours incommensurable » (au sens de Sfard, 2008) avec celui dont il est issu.

Hassane SQUALLI a exploré l'apport du modèle de Dörfler (1991) pour l'analyse du développement de la pensée algébrique chez des élèves. Contrairement à la conceptualisation de Jeannotte, le processus de généralisation est ici posé comme une série d'abstractions d'invariants essentiels. En outre, l'analyse a permis de mettre en évidence le rôle des processus de validation dans le développement du processus de généralisation.

Joëlle VLASSIS a proposé une réflexion sur la dialectique conceptualisation/symbolisation propre à la pensée mathématique. Au départ d'une analyse épistémico-historique de l'évolution de la notation algébrique, et dans la foulée des approches socio-culturelles inspirées de Vygotsky, l'auteure témoigne du rôle et de l'importance des activités de symbolisation dans toute situation mathématique. Du point de vue des apprentissages, l'auteure met ainsi en lumière, sur la base d'une situation concrète de résolution d'équations, la nécessité de développer des pratiques de classe centrées sur le symbolisme mathématique. Celles-ci envisagent la possibilité pour l'élève de construire le sens de ce symbolisme en étroite interaction avec les concepts, selon une progression structurée en chaînes de signification évoluant vers une mathématisation de plus en plus abstraite au fil d'activités de complexité croissante.

2. *L'activité des élèves au cœur du développement de la pensée mathématique : du préscolaire au Lycée*

Nathalie ANDWANDTER a examiné le potentiel des activités de suites non-numériques au regard du développement d'une pensée algébrique chez les enfants de 5 ans. L'auteure analyse d'une part, les démarches des élèves, les gestes et le langage qu'ils utilisent pour résoudre les situations et d'autre part, les différents types d'étayage pour soutenir les apprentissages. L'auteure montre que des enfants de 5 ans peuvent développer une pensée récursive de type qualitatif voire de type quantitatif, même si pour certains d'entre eux, une des difficultés consiste à exprimer verbalement la variation entre les figures. L'auteure a également mis en évidence l'influence des interventions spécifiques de l'étayage sur la nature des réponses des enfants et le genre de pensée élaborée par ceux-ci. Ainsi, afin d'optimiser leurs interventions, il importe que les enseignants comprennent ce que l'élève doit discerner pour réaliser les apprentissages spécifiques.

Isabelle DEMONTY a présenté une étude centrée sur l'analyse des démarches des élèves dans des situations de généralisation de suites arithmétiques, à deux moments clés de la scolarité obligatoire : avant l'introduction formelle de l'algèbre (élèves de 12 ans) et après une année de travail en algèbre (élèves de 14 ans). Les résultats montrent les potentialités des élèves à s'impliquer dans ces tâches et ce, même avant tout apprentissage formel de l'algèbre. Ils pointent également les difficultés des élèves, ayant déjà une année d'enseignement de l'algèbre derrière eux, à manier correctement le symbolisme algébrique. Ces résultats témoignent également du caractère artificiel de la rupture introduite dans certains curricula qui préconisent d'enseigner l'algèbre au secondaire après que les élèves ont acquis une base de connaissances arithmétiques au primaire.

Adolphe ADIHOU a présenté quelques résultats d'une enquête portant sur l'analyse des raisonnements des élèves du premier cycle du secondaire au Québec (12-14 ans). L'analyse vise à documenter les raisonnements algébriques et arithmétiques mobilisés lors de la résolution de problèmes écrits de type comparaison, généralement utilisés à l'entrée du secondaire. L'analyse met en évidence la production par les élèves de raisonnements, parfois sophistiqués, qui ne peuvent être interprétés comme purement arithmétiques ou purement algébriques. Cela remet en question l'insistance à imposer rapidement aux élèves le recours à la méthode algébrique dans la résolution de problèmes.

Alain BRONNER a cherché les conditions d'une entrée vers « l'algèbre avant la lettre » via une typologie de problèmes de généralisation. Dans cette perspective, il a étudié les potentialités que peuvent offrir certaines classes de situations relatives à ces problèmes d'une part, et a proposé un travail exploratoire, s'appuyant sur une approche praxéologique, afin de voir comment ces types de situations de généralisation peuvent favoriser une pensée algébrique dans les classes du primaire et du début du secondaire avant toute introduction du symbolisme algébrique.

Nathalie BRIANT s'intéresse à la pensée algorithmique, relativement à la pensée mathématique dans le contexte d'un environnement informatisé, exploitant le logiciel Algobox. Elle montre, sur la base de l'expérimentation d'une situation de résolution d'équations, que l'introduction de l'outil informatique va remettre en question l'écologie des savoirs enseignés. En effet, la recherche d'un algorithme informatisé va nécessiter une double transposition, la première allant de la résolution mathématique à la résolution algorithmique ; la seconde passant de cette dernière à la résolution informatique. Ce détour par une pensée algorithmique a permis le développement d'une pensée algébrique. Cette double transposition a provoqué en effet l'évolution du rapport aux objets algébriques. Ceux-ci ont été réinterrogés, revisités allant jusqu'à l'étude de nouveaux objets comme le concept de paramètre.

3. *Analyse curriculaire et développement de la pensée mathématique*

Mirène LARGUIER a présenté une étude comparative des orientations curriculaires pour l'entrée en algèbre entre les programmes du Québec et de la France pour des élèves entre 10 et 12 ans. Cette analyse a mis en lumière l'intérêt des problèmes de généralisation exploités dans des classes au Québec. Ce type de problème semble permettre une entrée vers l'algèbre et le développement d'une pensée algébrique en comparaison avec une pensée arithmétique. Les analyses a priori et a posteriori de quelques problèmes de généralisation typiques expérimentés en France avaient pour objectif de tester la solidité de l'hypothèse concernant l'intérêt des problèmes de généralisation. L'auteur souligne, enfin, qu'une modification du curriculum en fin de primaire et en collège est souhaitable en France en prenant pour exemple le programme du Québec.

Rahim KOUKI propose une réflexion épistémologico-didactique sur le développement de la pensée algébrique dans le curriculum tunisien par une présentation des résultats d'une étude didactique sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au début du cycle secondaire tunisien. Deux analyses didactiques étaient conduites : l'une, de nature historique et épistémologique, portant sur l'évolution diachronique des praxéologies algébriques dans les trois champs conceptuels, syntaxique et sémiotique ; et l'autre, de nature institutionnelle, était consacrée à l'exploration des programmes et des manuels scolaires pour en décrypter les visées et les caractéristiques didactiques. Les principaux enseignements didactiques dégagés de cette étude invitent à privilégier les approches de modélisation in situ, la construction des concepts algébriques qui est en étroite relation avec leur fonctionnalité procédurale et la mobilisation des techniques opératoires.

II. SYNTHÈSE ET PERSPECTIVES

Il faut souligner que l'ensemble des communications présentées dans le groupe de travail n°3 s'est intéressé, explicitement ou implicitement, au développement de la pensée algébrique sur la base d'approches théoriques et méthodologiques variées. Les analyses ont porté sur les relations entre la pensée algébrique et divers autres types de pensée, tels que la pensée mathématique en général, la pensée arithmétique ou encore algorithmique.

Plusieurs questions de nature épistémologique ont émergé de nos discussions, en particulier autour des différences et des ressemblances entre pensée arithmétique et pensée algébrique, entre pensée algébrique et algorithmique mais aussi entre abstraction et généralisation. Durant les discussions, l'importance de continuer la réflexion épistémologique amorcée a été bien mise en évidence. Ces éléments ont pu être mis en parallèle avec des questions sur l'activité mathématique des élèves et sur le développement de curriculum.

<u>Du point de vue de l'activité de l'élève</u>, la question de l'enseignement précoce de l'algèbre a été posée dans plusieurs communications. Une hypothèse souvent soutenue est que l'apprentissage de l'arithmétique doit être bien entamé avant d'aborder les premiers apprentissages algébriques. Toutefois, les données présentées par Demonty, ainsi que les mouvements « Early Algebra » (voir notamment les travaux de Kaput, Carraher & Blanton, 2008 à ce sujet) remettent en question cette dernière et la recherche permet maintenant de conclure qu'il est possible de favoriser le développement de la pensée algébrique beaucoup plus tôt. En fait, lorsqu'une pensée arithmétique, axée essentiellement sur le sens du nombre, est très avancée, celle-ci pourrait nuire au développement de la pensée algébrique, qui elle

envisage le sens des opérations répétées un nombre infini de fois. Ces réflexions ont amené le groupe à discuter de la différence entre arithmétique et algèbre, débat qu'il serait intéressant de poursuivre dans les prochaines éditions d'EMF.

On ne peut étudier ces enjeux sans à nouveau pousser la réflexion sur le plan épistémologique. Plusieurs questions ont été abordées qui pourront être approfondies dans la suite :

Quels rôles jouent la généralisation et l'abstraction dans la création de nouveaux objets mathématiques ? Quels liens existe-t-il entre les processus d'abstraction et de généralisation ? Le modèle de Dörfler utilisé par Squalli ainsi que l'analyse conceptuelle dans une perspective commognitive développée par Jeannotte offrent une perspective contrastée à ces questions.

Quels sont les éléments épistémologiques et didactiques qui permettent le développement de la pensée algébrique ? Tout d'abord, les chercheurs semblent s'entendre sur l'importance des variables et des opérations dans la pensée algébrique. Ces derniers semblent importants pour la différencier de la pensée arithmétique principalement axée sur les nombres. Ensuite, Larguier et Bronner ont témoigné de l'intérêt des activités de généralisation pour permettre l'entrée dans l'algèbre. Dans la foulée, Radford précise qu'on observe des généralisations en arithmétique. Il y aurait également une pensée arithmétique avancée comme le principe de la « fausse position », mis en évidence par Adihou, que l'on retrouve dans l'activité mathématique des élèves lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes algébriques. Enfin, l'importance du développement des symbolisations évoluant en étroite interaction avec les concepts selon une chaîne de signification, souligné par Vlassis, permet de contribuer à l'émergence de nouveaux objets algébriques. De même, Briant montre que l'utilisation d'environnements informatisés impliquant un détour par une pensée algorithmique provoque l'évolution du rapport aux objets algébriques à la suite d'une double transposition du langage utilisé.

Du point de vue du développement de curriculum, se posent alors deux questions au moins. La première concerne le *« quand » débuter un enseignement favorisant le développement de la pensée algébrique*. L'arithmétique pourrait se poser en obstacle à l'algèbre. Toutefois, si on débute l'algèbre plutôt, on pourrait venir bloquer le développement de la pensée arithmétique. La deuxième question renvoie à la réflexion de Kouki, qui sur la base d'une analyse historique et institutionnelle, analyse *la prise en considération par l'institution des éléments du développement de la pensée algébrique dans la rédaction des curricula*. Il s'agit de questions ouvertes qui pourraient être abordées lors des prochains EMF.

Enfin, *la question du rôle de l'enseignant et de la nature de son étayage a été évoquée à plusieurs reprises lors des débats. Doit-il se contenter d'être un guide ? Quels types d'intervention sont-ils porteurs ?* Il semble que selon Anwandter, un enjeu crucial réside dans la compréhension par l'enseignant des raisonnements des élèves mais aussi des ressorts des activités proposées.

Comme constaté lors des discussions, la confrontation des cadres et des analyses a permis de soulever une richesse jusqu'ici absente en permettant d'articuler la dialectique arithmétique/algèbre, de préciser ce qu'on entend par pensée algébrique, arithmétique, par généralisation et abstraction.

Bien qu'une majorité de contributions aient porté sur la pensée algébrique, nous recommandons de maintenir ouverte la thématique de ce groupe de travail à d'autres modes de la pensée mathématique. En effet, cette ouverture apporterait une valeur ajoutée aux discussions, notamment en enrichissant les questions épistémologiques sur la manière de caractériser un mode de pensée mathématique ; les cadres méthodologiques d'analyse de leur développement, les liens entre ces différents modes de pensée ainsi que l'étude de questions transversales comme le lien entre pensée et raisonnement, le rôle de la symbolisation dans le développement d'un mode de pensée, etc.

En outre, en ouvrant la réflexion sur les pensées mathématiques, on réalise que son étude épistémologique est marquée par le projet didactique qui nous anime. *Comment différents cadres permettent d'éclairer notre compréhension de l'activité mathématique de l'élève ?* Les analyses, parfois complémentaires, parfois semblant contradictoires, ont mené à des questions à explorer : *Comment clarifier notre discours afin de favoriser une meilleure communication entre chercheurs ? Quelles autres pensées mathématiques se retrouvent dans les curricula ? Comment se différencie chacune des pensées mathématiques ?*

Enfin, nous pensons que les questions liées aux organisations mathématiques ainsi que celles liées à la formation des enseignants méritent d'être mieux développées dans les EMF à venir.

REFERENCES

Dörfler W. (1991) Forms and means of generalization in mathematics. In Bishop A. J., Mellin-Olsen S., Van Dormolen J. (Eds.) *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers..

Kaput J.J., Carraher D., Blanton M. (2008) Skeptic's guide to algebra in the early grades. In Kaput J.J., Carraher D.W., Blanton M.L. (Eds.) *Algebra in the early grades* (pp. xvii-xxi). New York : National Council of teachers of mathematics.

Radford L. (2013) Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education* 2(1), 7-44.

Sfard A. (2008) *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York : Cambridge University Press.

CONTRIBUTIONS AU GT3

Communications orales

ADIHOU, A. - Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison

ANWANDTER-CUELLA, N. - Étude du développement de la pensée algébrique au préscolaire : cas de suites non-numériques

BRIANT, N. - Etude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique

BRONNER, A. - Développement de la pensée algébrique avant la lettre. Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique

DEMONTY, I. - Le développement de la pensée algébrique : quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre ?

JEANNOTTE, D. - Les processus abstraire et généraliser conceptualisés dans une perspective commognitive.

KOUKI, R. - Développement de la pensée algébrique dans le Curriculum tunisien : analyse épistémologique et institutionnelle

LARGUIER, M. - Première rencontre avec l'algèbre

RADFORD, L. - La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation

SQUALLI, H. - La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels

VLASSIS, J. - Symboliser et conceptualiser, deux facettes indissociables de la pensée mathématique. L'exemple de l'algèbre.

Affiche

DEMONTY, I. - Construire un questionnaire valide centré sur les connaissances des enseignants en algèbre élémentaire : les apports croisés des recherches centrées sur l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre élémentaire.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ANALYSE DES RAISONNEMENTS D'ÉLÈVES À TRAVERS DES RÉSOLUTIONS DE PROBLÈMES DE COMPARAISON

Adolphe ADIHOU[*] – Hassane SQUALLI[**] - Mireille SABOYA[***] – Mélanie TREMBLAY[****]
Annick LAPOINTE[*****]

Résumé – Nous exposons quelques résultats d'une recherche conduite auprès d'élèves du premier cycle du secondaire au Québec (12-14 ans) visant à documenter les raisonnements algébriques et arithmétiques mobilisés par ces élèves dans la résolution de problèmes écrits de type comparaison, généralement utilisés à l'entrée du secondaire. L'analyse amène à constater une cohabitation, des allers-retours entre les pensées arithmétique et algébrique.

Mots-clefs : algèbre, arithmétique, structure, résolution de problèmes, raisonnements

Abstract - We present some results of a research conducted with junior high school students in Quebec (12- 14 years) to document the algebraic and arithmetic reasoning mobilized by these students in solving word problems type comparison, typically used at the entrance of the school. The analysis leads to the recognition of cohabitation, back and forth between arithmetic and algebraic thinking.

Keywords: algebra, arithmetic, structure, problem solving, reasoning

I. CONTEXTE DE LA RECHERCHE

L'étude s'inscrit dans la continuité de deux recherches québécoises ; celle de Bednarz et Janvier (1992), réalisée après la réforme des années 1980 et celle de Marchand (1998) réalisée après la réforme des années 1990 (Saboya, Besançon, Martin, Adihou, Squalli, Tremblay 2014). Comme ces deux recherches notre étude vise à éclairer le travail fait dans la résolution de problèmes de comparaison en algèbre après les changements mis sur pied dans le curriculum des mathématiques au secondaire dans les années 2000. Par ailleurs, Oliveira et Camara (2011) ont mené une étude qui brosse le portrait de la résolution de ces problèmes pour les élèves de 6e année primaire et du premier cycle du secondaire au Brésil et au Québec. Dans la recherche dont nous faisons état dans cette contribution, et dans une perspective du développement de la pensée algébrique, nous avons conçu et soumis des

[*] Université Sherbrooke – Canada - Adolphe.Adihou@USherbrooke.ca
[**] Université Sherbrooke– Canada - Hassane.Squalli@USherbrooke.ca
[***] Université du Québec à Montréal – Canada - Saboya.Mireille@uqam.ca
[****] Université du Québec à Rimouski – Canada - Melanie_Tremblay@uqar.ca
[*****] Université Sherbrooke – Canada - Annick.Lapointe@USherbrooke.ca

Adihou A., Squalli H., Saboya M., Tremblay M., Lapointe A. (2015) Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 206-219.

problèmes qui valorisent des raisonnements algébriques chez les élèves du 1er cycle du secondaire (1re année : 12/13 ans et 2e année : 13/14 ans) (Saboya et al. 2014).

II. ÉLEMENTS DE PROBLÉMATIQUE

Les recherches sur le recours aux problèmes à texte dans l'enseignement de l'algèbre sont très variées : celles qui étudient la place et le rôle des problèmes dans le curriculum de l'enseignement secondaire, celles qui étudient les difficultés liées à leur résolution, celles qui étudient le contenu qu'ils véhiculent et celles qui se focalisent sur les problèmes pour étudier le passage de l'arithmétique vers l'algèbre. Ainsi, les années 90 ont vu la réalisation d'une variété de recherches sur l'enseignement et l'introduction de l'algèbre par le biais de la résolution de problèmes. C'est le cas de Bednarz et Janvier (1996) qui soulignent dans leur introduction « For many reasons, we must consider problem solving as a significant perspective through which to introduce students to algebra » (p.115). Dans leurs études, elles mettent en évidence les différentes perspectives d'introduction de l'algèbre entre autres le développement des habiletés à généraliser et à raisonner de manière analytique qui sont deux composantes essentielles de la pensée algébrique (Squalli 2000), et a fortiori, deux enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre au moment de son introduction.

De nombreuses recherches empiriques ont montré qu'au lieu de stratégies algébriques de résolution de problèmes, un grand nombre d'élèves préfèrent utiliser des stratégies arithmétiques. Ces recherches ont mis en évidence le fait que lorsqu'il s'agit de résoudre une équation, plusieurs ont de la difficulté à opérer sur l'inconnue et utilisent plutôt la méthode par essais et erreurs, qui est souvent efficace dans certains problèmes scolaires. Filloy et Rojano (1984) considèrent que dans de tels cas il existe une coupure didactique le long de la ligne d'évolution d'une pensée arithmétique à une pensée algébrique chez l'élève. A l'instar de ces recherches, Marchand (1998) a travaillé spécifiquement sur l'aspect analytique de l'introduction à l'algèbre. Elle a montré qu'il existait des discontinuités dans la nature et la complexité des problèmes proposés aux élèves d'un niveau scolaire à un autre dans le cadre du programme de 1993. Elle a constaté que peu d'élèves du premier cycle du secondaire effectuait le passage à un raisonnement algébrique, plusieurs privilégiant le raisonnement essais et erreurs qui étaient pourtant peu fréquent avant la réforme de 1993.

Par ailleurs, le programme québécois (Gouvernement du Québec 2006) préconise d'introduire l'algèbre par une double voie : 1) par la généralisation et 2) par l'introduction au raisonnement analytique dans le cadre de la résolution de problèmes (considérer l'inconnue et opérer sur elle comme on opère sur les données connues). En effet, la capacité à généraliser et celle à raisonner sur l'inconnue favorisent la capacité à symboliser (Squalli 2000) et ces deux voies favorisent l'introduction du langage symbolique de l'algèbre. En effet, comme le précise Pimm (1995):

> We symbolise when we want something that is absent or missing in some way – and then we work on or with the symbol as a substitute, and on occasion as a consolation.
>
> […] One central reason, then, for symbolising is that symbols allows us to *manipulate*, by proxy, things that are not easily handled, or which are even impossible to handle, by our physical selves (p. 109).

Par contre pour la première voie, le travail de Denis (1997) et celui de Squalli, Theis, Ducharmes-Rivard et Cotnoir (2007) ont mis en évidence le glissement qui s'est opéré dans les manuels: de l'idée d'exploitation de situations qui se voulaient prétexte à une généralisation et à l'introduction du symbolisme algébrique, à un enseignement devenu avant tout celui des suites numériques. Concernant la seconde voie, par une analyse des problèmes utilisés dans des manuels pour l'introduction à l'algèbre (nature et complexité), Marchand et Bednarz (1999) ont mis en évidence que les problèmes choisis n'aident pas les élèves à voir la pertinence d'un passage au raisonnement algébrique (raisonner de manière analytique) et à saisir la puissance de l'algèbre (Squalli 2002) dans la résolution d'une classe de problèmes pour laquelle le raisonnement arithmétique se révèle en réalité suffisant. Bednarz et Janvier (1994) distinguent trois classes de problèmes : des problèmes de taux, des problèmes de comparaison et des problèmes avec des transformations dans le temps. Elles ont mis en place une grille pour analyser des problèmes arithmétiques et algébriques et leur complexité. Bednarz et Janvier (1996) ont étudié la résolution de problèmes sous l'angle de continuité et de discontinuité entre la résolution avec l'arithmétique et l'approche algébrique. Elles ont analysé la façon dont les élèves procèdent lors d'une résolution arithmétique (les raisonnements, le traitement, l'utilisation des relations, etc.) dans le but de faire un lien entre une résolution arithmétique et celle algébrique. Elles ont ainsi fait ressortir la différence qui existe entre le calcul relationnel à l'œuvre lors d'une résolution arithmétique et d'une résolution algébrique. «The preceding analysis appears to link a priori this way of connecting the problem (algebraic solution) to the reasoning we called « numeric trial » (p.128). Dans leur conclusion, elles ont laissé transparaître que la difficulté des étudiants à résoudre un problème par l'arithmétique pourrait être une motivation pour passer à une résolution par l'algèbre. Leur étude fait aussi ressortir les difficultés des élèves de revenir à des résolutions arithmétiques lorsque ces derniers maitrisent les résolutions algébriques.

Dans la perspective du développement de la pensée algébrique, **quels sont les raisonnements algébriques chez les élèves du 1^er cycle du secondaire ?** Nous analysons les raisonnements utilisés par les élèves dans la perspective selon laquelle la pensée algébrique articule les dimensions arithmétique et algébrique.

III. CADRE DE RÉFÉRENCE

Dans cette perspective, il importe alors de pouvoir reconnaitre et distinguer les différentes stratégies de résolution mobilisées par les élèves en situation pour ainsi mieux adapter les interventions. **Le raisonnement algébrique est caractérisé, entre autres, par la capacité à se détacher des grandeurs et du contexte (habillage du problème) soit pour opérer sur l'inconnue, soit pour modéliser des relations, soit pour généraliser un phénomène.** Pour ce faire, on a recours à l'utilisation d'outils sémiotiques (tels que les graphiques ou les symboles algébriques) qui permettent la représentation et le calcul algébrique (Kieran 2007; Squalli 2003). On entend alors par **raisonnement analytique cette capacité à « se servir de l'inconnue comme si elle était déjà connue pour en tirer des conclusions nécessaires jusqu'à en obtenir quelque chose qui soit a déjà été démontré vrai ou a déjà été démontré faux. »** (traduction libre de Lins, 1993, produite par Jeannotte 2009). Bednarz et Janvier (1992) et Lins (1993) voient le raisonnement analytique comme étant une constituante importante du raisonnement algébrique.

Depuis fort longtemps, les Anciens opposaient les méthodes d'analyse et de synthèse (Squalli 2000). Hintikka et Rems (1964) expliquent:

> Analysis is a method Greek geometers used in looking for proofs of theorems and for constructions to solve problems. In both cases, analysis apparently consists in assuming what was being sought for, in inquiring where it comes from, and in proceeding further till one reaches something already known. Analysis is followed by a synthesis in which the desired theorem or construction is established step by step in the usual manner by retracing the stages of the analysis in the reverse order. (p. 1)

ou encore, comme Pappus lui-même l'affirme:

> Now, analysis is a method of taking what is sought as though it were admitted and passing from it through its consequences in order to something which is admitted as a result of synthesis; for in analysis we

> suppose that which is sought to be already done, and we inquire what it is from which this comes about, and again what is the antecedent cause of the latter, and so on until, by retracing our steps, we light upon something already known or ranking as first principle; and such a method we call analysis, as being a reverse solution. (…) But in synthesis, proceeding in the opposite way, we suppose to be already done that which was last reached in the analysis, and arranging in their natural order as consequence what were formerly antecedents and linking them one with another, we finally arrive at the construction of what was sought; and this we call synthesis. (Fauvell & Gray, 1990, p. 209, cité dans Lins, 1992, p. 15).

La distinction entre un raisonnement arithmétique et un raisonnement algébrique réside précisément dans le caractère analytique du raisonnement et non sur l'absence ou la présence de lettres pour représenter les inconnues. Comme le font remarquer Mason et Binns (1993), dans une démarche arithmétique, on fait simplement une suite de calculs sur des quantités connues; jamais on n'opère sur des inconnues. Dans la démarche algébrique, par contre, on procède de l'inconnue vers le connu, en opérant sur l'inconnue comme si c'était un nombre connu. Il va de soi que le symbole utilisé pour représenter l'inconnue peut être verbal ou écrit ; dans ce dernier cas, il peut être un mot (comme le mot *racine* utilisé par Al-Khawarizmi) ou n'importe quel caractère écrit (comme x, ?, □, …). La nature du symbole est secondaire du moment que ce symbole soit utilisé comme substitut de l'inconnue, que l'on peut manipuler lorsqu'on veut opérer sur l'inconnue.

IV. MÉTHODOLOGIE

Nous nous avons conçu et soumis des problèmes qui valorisent des raisonnements algébriques chez les élèves (12-14 ans) du 1er cycle du secondaire en vue d'analyser ces raisonnements sur la base des productions des élèves (Saboya et al., 2014). Pour cette étude réalisée au Québec, nous avons choisi les mêmes types de problème de comparaison que

Marchand (1998). Ce sont des problèmes à texte qui possèdent des données numériques et des relations de types additif et multiplicatif.

Exemple : Martin fait l'inventaire de trois produits de son dépanneur. Il compte 22 produits laitiers de plus que de produit céréaliers et il compte 201 produits en conserve de plus que de produit céréaliers. S'il y a 460 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type ?

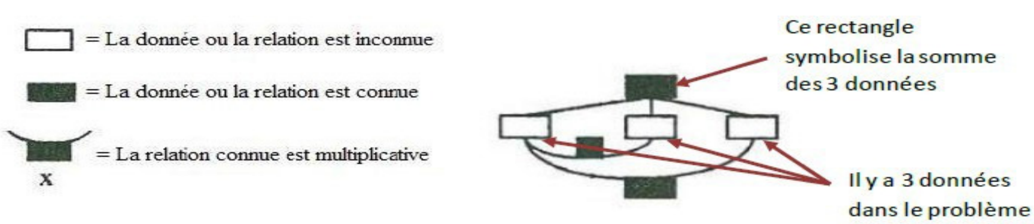


Figure 1 *– Un exemple de la schématisation de Vergnaud*

Lien entre l'exemple et la figure 1

Il y a trois types de produits soit 460 produits en tout (somme des trois données), ce qui symbolise le premier rectangle noir. Les trois rectangles blancs symbolisent le nombre de produits de chaque type recherché (Céréalier, Laitier et Conserve). Une première relation est mise en évidence entre les produits céréaliers et les produits laitiers (22 produits laitiers de plus que de produit céréaliers) et une deuxième relation est mise en évidence entre les produits céréaliers et les conserves (201 produits en conserve de plus que de produit céréaliers).

Les problèmes peuvent être connectés ou déconnectés (Bednarz et Janvier, 1994). Ces auteures précisent que pour les problèmes connectés « une relation peut facilement être établie entre deux données connues, induisant alors un raisonnement de type arithmétique s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir en fin de processus à retrouver la donnée inconnue » (p. 279) alors que pour les problèmes déconnectés « aucun pont ne peut être établi a priori directement entre les données connues du problème » (p. 279) (Saboya et al., 2014). Ainsi, les problèmes déconnectés «résistent» à une démarche de résolution arithmétique et favorisent l'émergence du raisonnement analytique (Squalli, 2002).

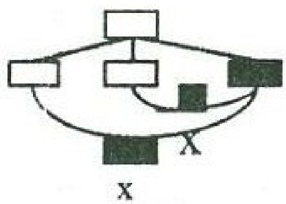
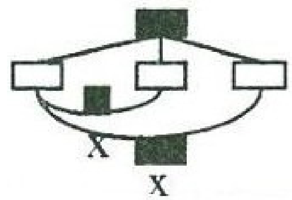
 Un exemple de schématisation d'un ***problème connecté.***	 Un exemple de schématisation d'un ***problème déconnecté.***
Comme une des grandeurs est connue, il suffit d'appliquer les relations également connues pour retrouver les autres grandeurs (relations qui sont dans le cas illustré ici multiplicatives).	Nous pouvons remarquer que cette schématisation est semblable à celle de la colonne de gauche. Toutefois, il n'y a pas de pont direct entre le total (connu) et les autres grandeurs. La résolution est moins immédiate.

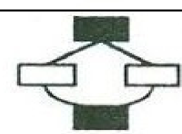
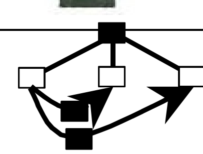
Figure 2 - *Schématisation d'un problème connecté et d'un problème déconnecté (Saboya et al. 2014)*

1. *Grille utilisée pour l'élaboration des problèmes de comparaison*

Les problèmes ayant des relations de comparaison ont été élaborés d'après la grille de Bednarz et Janvier (1994). Celle-ci a été également utilisée dans la conception des questionnaires élaborés par Marchand (1998) et ceux d'Oliveira et Camara (2011). Nous avons élaboré 12 problèmes connectés ou déconnectés avec différents habillages (contexte).

La schématisation de Vergnaud permet de mettre en évidence dans le problème les relations entre les données connues et les inconnues. Bednarz et Janvier (1992) ont classé les problèmes avec des relations de comparaison selon leur degré de complexité et leur structure. Elles considèrent à l'intérieur de chacune des catégories deux variables importantes : la nature des relations (multiplicative et/ou additive) et l'enchaînement des relations. Celles-ci influencent la complexité du problème.

2. *Les problèmes et leur structure*

Problèmes à 2 branches	Problèmes avec UNE relation de comparaison (additive ou multiplicative)	
Problèmes à 3 branches	**SOURCE** Les deux relations on la même donnée comme point de départ.	

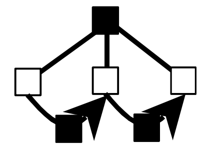
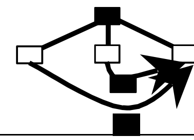
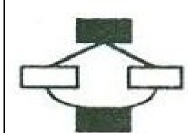
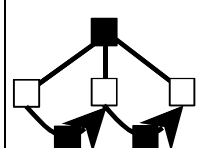
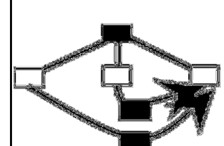
	COMPOSITION Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.	
	PUITS Les deux relations on la même donnée comme point d'arrivée.	

Figure 3 *– Structures de problèmes*

3. *Échantillon*

Nous avons administré le questionnaire à un échantillon comportant 1203 élèves québécois de 48 classes du premier cycle du secondaire (secondaire 1 et 2).

V. ANALYSE DES RAISONNEMENTS DES ÉLÈVES

Problèmes à 2 branches	Problèmes avec UNE relation de comparaison (additive ou multiplicative)	Énoncé : Un camp de jour offre deux activités de plein air. Le soccer regroupe 3 fois plus de jeunes que le tir à l'arc. S'il y a 212 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles ?	
Problèmes à 3 branches	**COMPOSITION** Une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.	Énoncé : Trois personnes comparent leur nombre d'amis sur le site <<facebouille>>. François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François. Si au total ils sont 494 amis, combien d'amis ont-ils chacun ? Réponse Sophia : 380, Carlos : 38, François: 76	
	PUITS Les deux relations on la même donnée comme point d'arrivée.	Un camp de jour offre trois activités de plein air. Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, combien de jeunes participent à chacune d'elles ?	

Nous présentons une analyse des raisonnements utilisés par quatre élèves pour résourdre des problèmes de type connectés ou déconnectés. Rappellons qu'un *raisonnement est qualifié de raisonnement arithmétique explicite si l'élève trouve la valeur de l'inconnue en n'opérant que sur des nombres ou grandeurs connues. Un raisonnement est qualifié de raisonnement algébrique explicite, si l'élève considère l'inconnue, la représente par*

*un symbole et opère sur l'inconnue comme si c'était un nombre connu***.** Bien que dans cette recherche des élèves aient produit des raisonnements arithmétiques explicites et des raisonnements algébriques explicites, dans cette analyse, nous nous intéressons particulièrement à documenter les raisonnements qui ne peuvent être qualifiés ni de raisonnement arithmétique explicite ni de raisonnement algébrique explicite. En effet, les élèves ne maîtrisant pas encore l'outil algébrique, nous nous attendons à ce que la manifestation de tels raisonnements se réalise dans la résolution des problèmes déconnectés. Dans cette section, nous présentons des exemples de raisonnements d'élèves qui ne sont ni des raisonnements arithmétiques explicites ni des raisonnements algébriques explicites.

1. *Résolution purement numérique : cas de problèmes déconnectés*

Dans ce premier exemple (voir figure 4), la résolution du problème est entièrement dans le registre numérique. Toutefois, comme nous allons le montrer, l'élève considère les inconnues dans le problème et opère sur elles, mais ne les représente pas explicitement. Nous dirons que l'inconnue est muette.

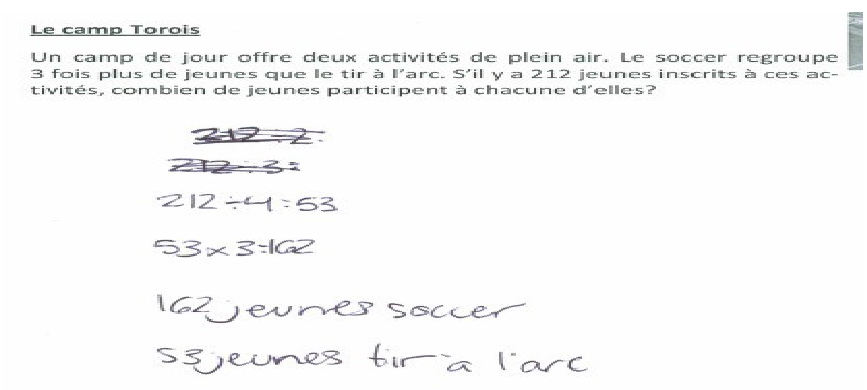


Figure 4 *– Production : Le camp Torois*

L'élève divise 212 par 2 (212 / 2) et ensuite (212 / 3), puis décide de changer de stratégie. Il exécute le calcul 212 par 4 et trouve 53. Ensuite il multiplie 53 par 3 et trouve 162 au lieu de 159 (son erreur renvoie au fait que : « 3x3 = 12 »). Comme le montre la dernière ligne de la figure 4, le nombre 53 réfère au nombre de jeunes inscrits au tir à l'arc. Le nombre 53 a été obtenu de l'opération 212 : 4.

Dans l'égalité 212 : 4 = 53 « jeunes inscrits au tir à l'arc » le nombre « 4 » proviendrait du raisonnement implicite suivant : «si le soccer regroupe 3 fois plus de jeunes que le tir à l'arc, alors le total des jeunes est 4 fois le nombre des jeunes qui font le tir à l'arc; ce nombre est donc égal à 212 : 4».Dans ce schéma de raisonnement, l'élève opère bien sur l'inconnue sans la représenter symboliquement de manière explicite. Nous dirons que l'inconnue est objet de la pensée de l'élève, sur laquelle il opère, mais elle reste muette.

2. Résolution par essais numériques

Dans ce deuxième exemple (voir figure 5), la résolution du problème est dans le registre numérique avec un tableau comme support. Cet élève explicite les relations du problème (François a 2 fois plus d'amis que Carlos et Sophia a 5 fois plus d'amis que François). La résolution met en évidence le fait qu'il ait trouvé un pont entre les données ou qu'il positionne les inconnues dans son tableau par ordre. Il commence sa résolution en mettant en premier lieu le nombre d'amis de François et en leur attribuant des valeurs. Il s'est rendu compte du lien qui unit le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia.

Cet élève positionne les trois relations; le nombre d'amis de François = 2x le nombre d'amis de Carlos; le nombre d'amis de Sophia = 5x le nombre d'amis de François et le total des amis est de 494. Il donne des valeurs pour l'inconnue, le nombre d'amis de Carlos, et applique les relations mises en évidence dans le problème (le nombre d'amis de François = 2x le nombre d'amis de Carlos; le nombre d'amis de Sophia = 5x le nombre d'amis de François et vérifie le total). Il ne désigne pas le nombre d'amis de Carlos par un symbole. Il utilise un raisonnement numérique à l'aide d'un tableau. Cet élève n'utilise pas de lettre mais des relations. Il fait des calculs, des essais numériques. Il met en évidence un raisonnement numérique que l'on utilise pour une approche fonctionnelle. L'approche algébrique est ici implicite. Ce type de raisonnement ne permet pas d'exprimer avec certitude si l'élève résout le problème par un raisonnement arithmétique ou algébrique. Toutefois, le travail de l'élève colle à une résolution algébrique en désignant par n = le nombre d'amis de Carlos, alors le nombre d'amis de François = 2n; et le nombre d'amis de Sophia = 5x le nombre d'amis de François = 5*2*n= 10n; et n+2n+10n=13n=494 et n=494 :13= 38).

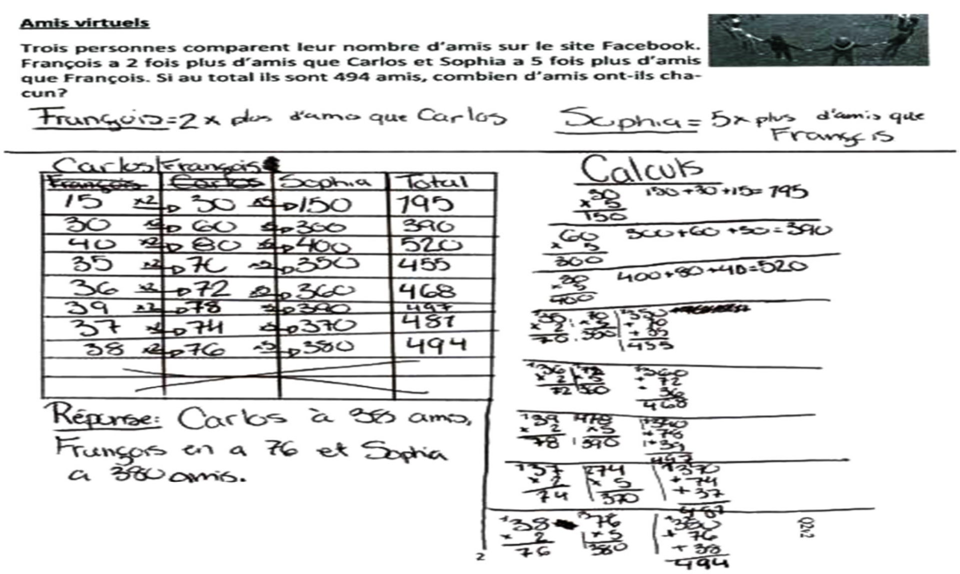


Figure 5 *– Production : Amis Virtuels1*

3. Raisonnement de type retour à l'origine et fausse position : cas additif

Le problème « Le camp Vifranc » (voir figure 6) propose de déterminer le nombre total de jeunes qui pratiquent trois activités : « Soccer », « Tir à l'arc » et le « Canoe ». « Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le tir à l'arc regroupe 29 jeunes de plus que le canoë. L'énoncé précise qu'il y a 315 jeunes inscrits à ces trois activités et explicite une relation additive entre le nombre de jeunes pratiquant le soccer et le tir à l'arc et une relation additive entre le nombre de jeunes pratiquant le tir à l'arc et le canoë. Il s'agit donc d'un problème, faisant intervenir trois inconnues et trois relations connues.

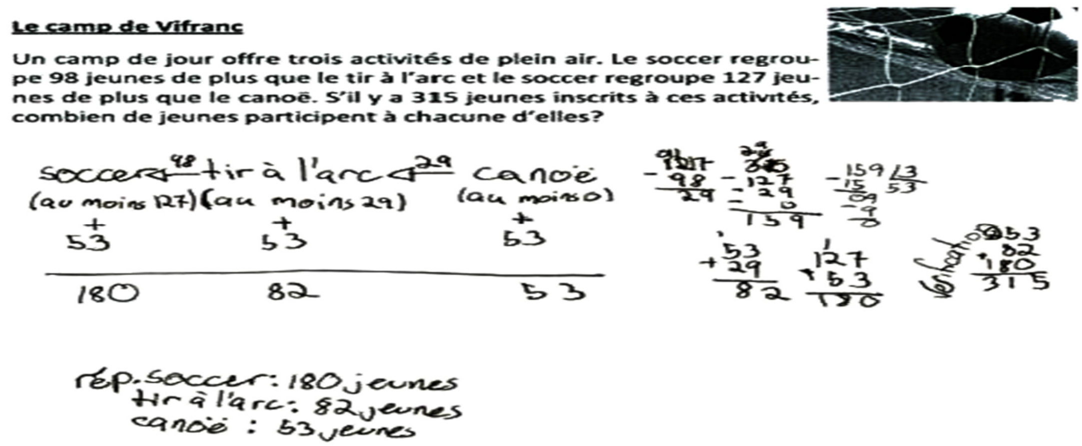


***Figure 6** – Production : Le camp de Vifranc*

Dans ce troisième exemple, la résolution du problème est entièrement dans le registre numérique. L'élève considère les inconnues dans le problème et opère sur elles, mais ne les représentent pas explicitement. Nous dirons que l'inconnue est muette.

L'élève ordonne les inconnues de la plus petite à la plus grande, réécrit les relations entres les inconnues successives. Il extrait les trois activités du problème dans l'ordre d'apparition dans l'énoncé : « Soccer », « Tir à l'arc » et le « Canoe ». Il explicite les relations du problème et positionne les deux relations par rapport au nombre de jeunes pratiquant le canoe. Dans cette opération il a bien considéré les inconnues et opéré sur elles. Il connaît maintenant les écarts entre les inconnues et leur somme. Pour trouver les valeurs des inconnues, il utilise un raisonnement qui s'apparente à la fois au raisonnement de type ***fausse position*** et à la procédure de retour à l'unité dans les raisonnements propotionnels. Il affecte la valeur minimale à l'inconnue de plus petite valeur, (retour à l'origine) et tout en maintenant stables les relations entres les inconnues, il génère les valeurs des deux autres inconnues. Il obtient un total plus petit que le total réel. Il corrige alors les valeurs des inconnues en ajoutant à chacune des valeurs le tiers de l'écart entre les deux totaux. La répartition équitable de cet écart est justifiée pour garder stable les relations entres les différentes variables.

Cet élève représente le nombre de jeunes inscrits dans les trois activités dans l'ordre de leur apparition dans l'énoncé : « Soccer », « Tir à l'arc » et le « Canoe ». Il explicite les relations du problème et positionne les deux relations par rapport au nombre de jeunes pratiquant le canoe. Cette façon de faire est rendue possible parce que le problème établit deux relations additives d'une part entre le « Soccer » et le « Tir à l'arc » et d'autre part entre le « Soccer » et le « Canoe ». L'élève part du principe selon lequel au moins 127 jeunes pratiquent le soccer, si aucun jeune ne pratique le canoe « au moins 0 » et il en déduit qu'au moins 29 jeunes pratiquent le tir à l'arc si le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc. C'est comme un retour à l'origine. En fait avec ces relations qui sont tirées du problème

« Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le soccer regroupe 127 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités » L'élève a établi d'autres types de relations équivalentes « Le soccer regroupe 98 jeunes de plus que le tir à l'arc et le tir à l'arc regroupe 29 jeunes de plus que le canoë. S'il y a 315 jeunes inscrits à ces activités ». Dans la deuxième partie de son raisonnement qui prend en compte le nombre total de jeunes inscrits (il y a 315 jeunes inscrits à ces activités), son raisonnement part du fait que si aucun jeune ne pratique le canoe et au moins 29 jeunes pratiquent le tir à l’arc 127 jeunes pratiquent le soccer. Or il le problème précise qu’il y a 315 jeunes inscrits à ces activités, donc, il y a 159 jeunes (315 – 127 – 29 =159) qui pratiquent les trois activités et ces derniers sont répartis équitablement. Donc 53 jeunes (159 / 3 = 53) pratiquent le canoe, 53 + 29= 82 pratiquent le tir à l’arc et 180 jeunes pratiquent (53 + 127 = 82 + 98=180) le soccer. Il transforme les relations du problème en des relations équivalentes, il positionne un générateur pour ramener le problème en un problème ou le nombre de jeunes pratiquant le canoe est 0 (retour à l’origine ou positionnement d’une origine) et ensuite par un jeu qui ressemble à une translation (+ 53) ramène le problème à une autre origine (Changement d’origine). Dans le cas de cette résolution « 29 » jeunes a le statut de « relation ».

Cet élève fait un calcul relationnel. Il met en évidence un raisonnement algébrique implicitement. Ce type de raisonnement ne permet pas d’exprimer avec certitude si l’élève résout le problème par un raisonnement arithmétique ou algébrique.

4. *Raisonnement de type retour à l’unité et fausse position : cas multiplicatif*

Le raisonnement utilisé par cet élève (voir figure 7) est en quelque sorte la version multiplicative du raisonnement présenté précédemment. Ce problème est le même que celui de la figure **5**. L’inconnue “nombre d’amis de Carlos” génère les deux autres inconnues. Cet élève fait aussi un tableau et désigne par les lettres F, C et S le nombre d’amis de François, le nombre d’amis de Carlos et le nombre d’amis de Sophia. Dans le tableau il positionne ces lettres selon l’ordre d’apparition dans l’énoncé explicite les relations du problème, toutefois il commence par donner des valeurs au nombre d’amis de Carlos en premier. Ce qui permet de dire que c’est la version multiplicative du raisonnement présenté précédemment (***Figure 6***) et que cet élève ramème le nombre d’amis de Carlos à l’unité.

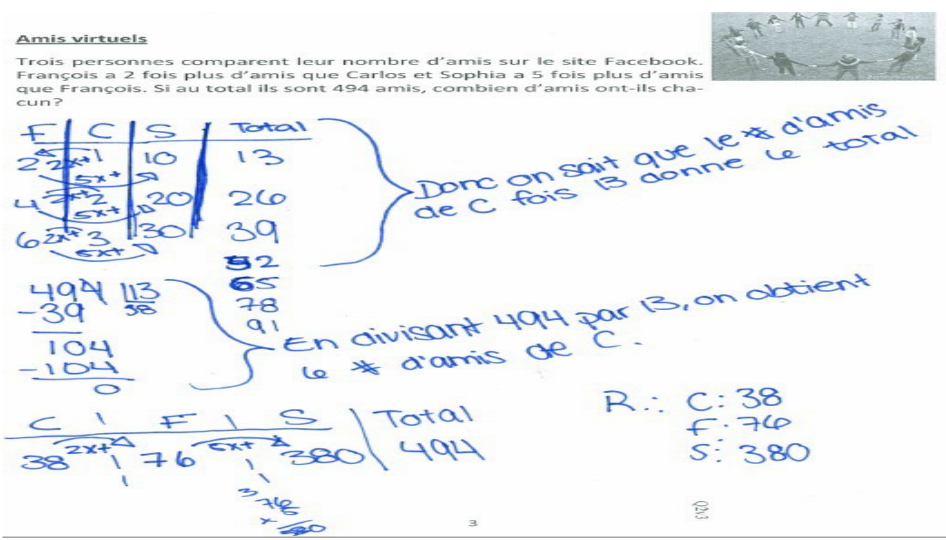


Figure 7 *–Production : Amis Virtuels2*

Le fait d’avoir commencé par le nombre d’amis de Carlos en premier et les flèches qu’il utilise, témoignent d’une analyse du problème ou du moins, d’une analyse des relations entre le nombre d’amis de François, le nombre d’amis de Carlos et le nombre d’amis de Sophia, ou de l’ordre des relations qui permet d’établir des relations dans une certaine séquence. Il donne des valeurs à différentes au nombre d’amis de Carlos, comme dans une table des valeurs. Esuite, il exprime le nombre d’amis de François sur la base de la relation mise en évidence dans le problème (François a 2 fois plus d’amis que

Carlos). Après, il exprime le nombre d'amis de Sophia sur la base de la relation mise en évidence dans le problème (Sophia a 5 fois plus d'amis que François). Il fait la somme avec le nombre d'amis de Carlos, le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia.

Le nombre d'amis de François	*Le nombre d'amis de Carlos*	*Le nombre d'amis de Sophia*	*Total*
2	*1*	*10*	*13*
4	*2*	*20*	*26*
6	*3*	*30*	*39*

Figure 8 *–Illustration 1 : Amis Virtuels2*

De ce travail il déduit que si au total ils ont 494 amis, 494 est un multiple de 13. Le raisonnement qui lui permet de mettre cet aspect en évidence c'est que pour 1 ami de Carlos, on a un total de 13. Donc pour 38 amis on a 494 amis au total. C'est en cela qu'il fait une division 494 par 13, en posant l'opération et en exécutant l'algorithme et trouve 38. Ce qu'il exprime par : *« Donc on sait que le ?? d'amis de C fois 13 donne le total ».*

Le nombre d'amis de Carlos		*Le nombre d'amis de François*		*Le nombre d'amis de Sophia*	*Total*
	2 X +		*5 X +*		
38		*76*		*380*	*494*

Figure 9 *–Illustration 2 : Amis Virtuels2*

Dans le premier tableau (***Figure 8****)* « le nombre d'amis de Carlos » est positionné dans la deuxième colonne et la flèche y part. Dans le deuxième, « le nombre d'amis de Carlos » est positionné dans la première colonne et la flèche y part. Ce détail met en évidence le fait que le nombre d'amis de François, le nombre d'amis de Carlos et le nombre d'amis de Sophia (les inconnues) sont identifiées selon l'ordre de leur apparition dans le problème. Remarquons cependant que l'approche de cet élève soulève la question suivante: Raisonne-t-il de façon uniquement numérique après avoir extrait des relations qui l'amènent à trouver une régularité et sur cette base, fait-il des déductions et oublie-t-il le problème ? Cet élève utilise des lettres. Mais ces lettres sont utilisées pour identifier (pour désigner). Elles ne sont pas symbolisées comme des inconnues. Il utilise des relations. Il fait des calculs. Il met en évidence implicitement un raisonnement fonctionnel et algébrique comme dans le cas de l'élève de la figure 5. Ils positionnent un générateur, c'est-à-dire une inconnue qui génère les autres relations et ce dans une certaine séquence. En effet le problème génère une fonction à trois variables qui peut être réduite à une relation multiplicative à une variable.($F(x, y, z)$ avec $y = ax;$ et $z = by = bax,$ c'est-à-dire $F(x, y, z) = F(x, ax, bax) = G(x),$ avec la contrainte $x + y + z = K$ (494)). Toutefois, ce type de raisonnement ne permet pas d'exprimer avec certitude si l'élève résout le problème par un raisonnement purement arithmétique ou algébrique.

VI. DISCUSSION ET CONCLUSION

Dans cette analyse, nous avons exposé quatre type de raisonnement qui ne sont ni arithmétique explicite ni algébrique explicite. Dans un de ces raisonnements (***Figure 4***), l’élève considère les inconnues et opère sur elles sans jamais les expliciter. Dans les autres raisonnements, les élèves considèrent les inconnues, les représentent symboliquement et utilise ces représentations pour décrire les relations entre les inconnues. Cependantt, ils ne vont pas opérer sur ces représentations. Comme dans le cas du raisonnement de type fausse position, pour ne pas opérer sur l’inconnue, ils vont affecter une valeur numérique à l’inconnue (cette valeur est choisie de manière pertinente comme un générateur). Cette valeur est comme dans le cas du raisonnement proportionnel du type retour à l’unité (retour à l’origine dans le cas de problème à stucture additive). Cela permet de corriger la valeur initiale en tenant compte des relations entre les inconnues. Dans un des raisonnements, l’élève représente bien les valeurs connues et les relations symboliquement, et utilise un raisonnement de type essais–erreurs (***Figure 5***).

Ces analyses illustrent bien que ce n’est pas dans l’utilisation de lettres ou d’un symbolisme que le raisonnement peut être qualifié d’algébrique. Dans le même sens, une résolution faisant intervenir uniquement des nombres et des calculs numériques n’est pas automatiquement arithmétique. Notre hypothèse est que ces raisonnements ont été possibles car l’élève ne dispose pas encore ou ne maîtrise pas encore l’outil algébrique. Ceci questionne la pertinence d’une introduction trop précoce de l’approche algébrique de résolution de problèmes ou de ne concevoir le développement de la pensée algébrique que comme moyen d’introduction à l’algèbre. Les raisonnements où l’inconnue est muette et ceux du type fausse position sont des raisonnements mathématiques sophistiqués et témoignent de l’avancée de la pensée mathématique des élèves même si ces raisonnements ne sont pas ceux attendus dans une classe d’algèbre. Le développement de la pensée algébrique avant l’introduction du calcul algébrique doit permettre d’enrichir les compétences mathématiques des élèves et non exclusivement à les préparer à l’algèbre.

Nous avons observé que l’analyse des raisonnements fait ressortir le fait que dans le cas de ces résolutions puisque les élèves ne disposent pas encore de l’outil algébrique, ils ont plus de liberté à construire des raisonnements et résoudre les problèmes sans une démarche algébrique imposée. Certains élèves mettent ainsi en évidence des démarches ou des approches sophistiquées, bref des raisonnements riches qui contribuent au développement de la pensée mathématique. La résolution de ces problèmes offre ainsi un espace pour permettre aux élèves de mettre en évidence des contenus qui leur permettent de développer la pensée algébrique. Ils mettent en évidence des raisonnements qui dépassent des raisonnements purement arithmétiques, tels que les raisonnements où l'inconnue est muette ou désignée expliciment par une lettre. On remarque que pour un même problème des élèves utilise un raisonnement algébrique explicite et un raisonnement arithmétique/algébrique non explicite. Toutefois certains raisonnements ne permettent pas d’exprimer avec certitude si l’élève résout le problème par un raisonnement arithmétique ou algébrique. Une observation importante que cette analyse a mis en évidene est l’intérêt de proposer aux élèves des problèmes déconnectés avant l’introduction des lettres. Ils permettent aux élèves d’induire des raisonnements sur la base des connaissances en lien avec la dimension arithmétique. La façon dont les liens entre les relations et les données sont faits dans le problème (problème connecté ou problème déconnecté), influence certes leur résolution. Par exemple, l’élève s’active dans certains cas à articuler de façon linéaire (dans un certain ordre) les relations. Mais pour les problèmes déconnectés l’activité mathématique qui consiste à trouver la réponse, pousse les élèves à positionner l’inconnue et à opérer sur elle (explicitement ou non) par un raisonnement qui n’est pas centré sur le symbolisme comme le met en évidence Squalli (2002).

Eu égard à la façon d'aborder la résolution de ces problèmes, les élèves ne sont pas dans une dynamique où l'introduction de l'algèbre est un lieu de transition, ce qui connote un avant et un après, mais dans ils sont dans une dynamique selon laquelle le développement de la pensée algébrique consiste en articulation des dimensions arithmétique et algébrique dans la perspective d'un développement et d'approfondissement des concepts mathématiques. Les interactions entre les contenus classiquement dénommés de type algébrique ou de type arithmétique cohabitent dans un espace ouvert.

Les élèves se positionnent par rapport aux inconnues, ensuite ils cherchent une façon d'articuler les relations et les données, soit dans une perspective équationnelle ou dans une démarche opératoire sur des variables, ce qui semble mettre en évidence un recours à une pensée algébrique, soit dans une perspective de produire des réponses de nature numérique dans le but de faire des calculs, ce qui semble mettre en évidence un recours à une pensée arithmétique. Dans les deux cas la dimension numérique est présente et à cette étape de développement de la pensée algébrique. Au travers des exemples des élèves et de nos analyses on pourrait évoquer, la suprématie de la pensée arithmétique sur la pensée algébrique. Pour nous, il ne devrait pas y avoir de suprématie de la pensée arithmétique sur la pensée algébrique ni de la pensée algébrique sur la pensée arithmétique dans la perspective de développement de compétences, en termes d'intentions didactiques, bien que l'algèbre sera par la suite un outil puissant pour résoudre plus tard des problèmes plus complexes. Le développement de la pensée algébrique met en évidence une dialectique entre « une pensée arithmétique» et « une pensée algébrique».

REFERENCES

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1992) *L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : didactique des mathématiques, formation normale des enseignants.* École normale supérieur Marrakech. p. 21-40.

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1994) The emergence and development of algebra in a problem solving context: A problem analysis. In da Ponte J. et Matos J. (Eds.) *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. II, 64-71. Lisbonne: Université de Lisbonne.

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1996) Emergence and development of Algebra as a problem solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz N., Kieran C. et Lee L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 115- 136). Dordrecht: Kluwer.

Câmara M., Oliveira I. (2010) Estratégias e registros utilizados por alunos de 6º ano na resoluçao de problemas de estrutura algébrica. *X Encontro Nacional de Educaçao Matemática*. Educaçao Matemátic, Cultura e Diversidade. Salvador. Brasil.

Denis C. (1997) Une introduction de l'algèbre en secondaire 3: généralisation et construction de formule. Mémoire de maitrise en enseignement des mathématiques. Montréal, Université du Québec à Montréal.

Filloy E. et Rojano T. (1984) From an arithmetical to an algebraic thought. *Proceedings of PME-NA VI,* Madison, Wisconsin, 51-56.

Fauvel J., Gray J. (1990) *The history of mathematics: a reader.* London: Macmillan.

Gouvernement du Québec (2006) Programme de formation de l'école québécoise : enseignement secondaire, premier cycle : version approuvée. Québec : Gouvernement du Québec.

Hintikka J., Remes U. (1964) *The Method of Analysis*. Its *Geometrical Origin and Its General Significance*. Boston studies in the philosophy of science, volume 75. Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Jeannotte D. (2009) Une comparaison des erreurs commises en algèbre par des élèves du secondaire d'aujourd'hui et d'autres de la fin des années 70. *Actes du colloque GDM-2004.*

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In Lester F. K. Jr., (Ed.) Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Lins R. (1992) A framework for understanding what algebraic thinking is, Unpublished PhD Thesis. Nottingham, UK: Shell Centre for Mathematics Education.

Lins R. C. (1993) *Understanding what Algebraic Thinking is : Analysis and Synthesis.* A contribution at the ESRC Seminar Group on Algebraic processes and the Role of symbolism. London: University of London.

Marchand P. (1998) *Résolution de problèmes en algèbre au secondaire : analyse de deux approches et des raisonnements des élèves.* Mémoire de maîtrise en mathématiques, option enseignement, Université du Québec à Montréal.

Marchand P., Bednarz N. (1999) L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec* XXXIX(4), 30-42.

Marchand P., Bednarz N. (2000) Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes: résolution des élèves. *Bulletin de l'Association des Mathématiques du Québec* XL(4), 15-24.

Mason J., Binns L. (1993) *Exploration of Vergnaud's theorem-in-action in the context of algebra.* A contribution at the ESRC Seminar Group on Algebraic processes and the Role of symbolism. London: University of London.

Oliveira I., Camâra M. (2011) Problemas de estrutura algébrica : uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. *XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil.

Pimm D. (1995). *Symbols and meaning in school mathematics.* NY: Routledge.

Saboya M., Besançon V., Martin F., Adihou A., Squalli H., Tremblay M. (2014) Résolution de problèmes écrits au moment de l'introduction de l'algèbre : analyse de productions d'élèves du premier cycle du secondaire. *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec 2013*, 112-122.

Squalli H. (2000) *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base.* Thèse de doctorat, Université Laval.

Squalli H. (2002) Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire: un exemple de raisonnement à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques,* 39, 4-13.

Squalli H. (2003) *Tout, tout, tout, vous saurez tout sur l'algèbre*. Coll. "Mathèse". Montréal : Éditions Bande didactique, 316 p.

Squalli H., Theis L., Ducharmes-Rivard A., Cotnoir G. (2007) Finalités et approches d'enseignement-apprentissage de l'algèbre dans les manuels du premier cycle du secondaire au Québec. *CD-Rom des actes du colloque de International Organisation of Science and technology Education : Critical Analysis of Science Texbooks.*

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ÉTUDE DU DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE AU PRÉSCOLAIRE : CAS DE SUITES NON-NUMÉRIQUES

Manon BOILY [*] – Geneviève LESSARD [**] – Elena POLOTSKAIA [***] – Nathalie ANWANDTER-CUELLAR [****]

Résumé – Dans cet article, nous examinons le potentiel de l'activité portant sur les suites non-numériques au regard du développement d'une pensée algébrique chez les enfants de 5 ans. À cet égard, les relations récursive et explicite sont abordées. Nous apportons une réflexion sur les tâches proposées en nous attardant aux gestes et au langage utilisé par les élèves en relation avec celles-ci et ce, dans le but d'identifier le type de pensée mathématique sollicité. Une attention particulière est portée aux difficultés des élèves et aux stratégies utilisées par les enseignants, pour soutenir les apprentissages de leurs élèves dans l'expression des suites.

Mots-clefs : pensée algébrique, étayage, suite non-numérique, pensée récursive

Abstract – In this article, we examine the potential of educational activities, involving non-numerical patterns, to support the development of algebraic reasoning in five-year-old children. We focus our attention on recursive and explicit relationships present between and within elements of these patterns. In order to identify the type of mathematical thinking students may apply while solving tasks, we analyze the students' language and gestures, used in relation to the tasks' mathematical characteristics. We pay special attention to the students' difficulties and to the strategies used by teachers, to support the students' understanding of non-numerical patterns.

Keywords: Algebraic thinking, scaffolding, non-numerical patterns, recursive thinking

I. INTRODUCTION

Les régularités quantitatives et géométriques sont parmi les domaines d'étude les plus importants en mathématiques (Kieran 2014; Cai & Knuth 2011; Ministère de l'Éducation de l'Ontario 2005). En fait, l'étude de suites non-numériques fait partie de programmes de formation au sein de nombreux pays qui ont comme visée d'introduire le développement de la pensée algébrique de la maternelle à la 12ième année (Moss & McNab 2011 s'appuyant sur les travaux de Noss et al. 1997; Sasman et al. 1999; Warren 2000). Le fait d'introduire le raisonnement algébrique plus tôt dans le cheminement scolaire de l'élève aurait été influencé par plusieurs résultats de recherche démontrant les difficultés vécues par les élèves lorsqu'ils

[*] Université du Québec à Montréal – Canada – *boily.manon@uqam.ca*
[**] Université du Québec en Outaouais – Canada – *genevieve.lessard@uqo.ca*
[***] Université du Québec en Outaouais – Canada – *elena.polotskaia@uqo.ca*
[****] Université du Québec en Outaouais – Canada – *nathalie.anwandter@uqo.ca*

Boily M., Lessard G., Polotskaia E., Anwandter-Cuellar N. (2015) Étude du développement de la pensée algébrique au préscolaire. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 220-230.

sont initiés à l'algèbre au secondaire (Radford 2012; Carraher & Schliemann 2007 ; Kieran 1992).

II. L'ÉTUDE DES RÉGULARITÉS DANS LE PROGRAMME DE L'ONTARIO

À l'instar de ces travaux de recherche, le Ministère de l'Éducation de l'Ontario (MEO 2008) a décidé d'instaurer un programme préconisant le développement de la pensée algébrique, dès la maternelle, pour les élèves de 4 ans et le jardin, chez les élèves de 5 ans. L'idée étant que l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre soient présentés dans le curriculum non pas de façon linéaire et hiérarchique, mais en concomitance avec l'enseignement de l'arithmétique (Cai & Knuth 2011, Masson 2008; Squalli 2002). Toutefois, le MEO (2008) précise, en s'appuyant sur Squalli (2002), qu'il ne s'agit pas d'aborder plus tôt l'algèbre et son langage littéral mais d'amener l'élève à développer une pensée algébrique. À cet égard, le MEO (2008) accorde une place d'importance à l'étude des suites non-numériques et numériques qui, souligne-t-il, est une façon d'amener l'élève à observer les changements et analyser les relations marquées par ces changements ; ceux-ci étant au cœur du raisonnement algébrique.

Bien que les suites à motifs croissants ne soient vues qu'à partir de la deuxième année, nous voulions examiner la compétence de l'élève de 4 et 5 ans à réaliser ce type de suite au regard de la pensée mathématique suscitée.

III. L'INTÉRÊT DE CETTE ÉTUDE

Très peu d'études abordant le développement de la pensée algébrique ont été réalisées auprès d'élèves de 4 et 5 ans. En fait, les études ont plutôt été effectuées auprès d'élèves du primaire. Cependant, il semble qu'en introduisant le raisonnement algébrique dans le programme de maternelle, les enseignants peuvent construire des fondements solides chez leurs élèves, fondements qui leur seront utiles à l'étude de la notion de fonction dans les classes supérieures (Kieran 2004). Nous nous joignons donc à quelques-uns de ces auteurs tels que Moss et McNab (2011), Beatty (2010) et Warren Cooper (2008) pour examiner le potentiel de l'activité portant sur les suites non-numériques au regard du développement d'une pensée algébrique chez des élèves de l'âge préscolaire.

IV. CADRE THÉORIQUE

Dans cet article, nous présentons les compétences des élèves de la maternelle et du jardin à reconnaître et à prolonger une suite non-numérique à motifs croissants. Puis, une attention particulière est portée aux difficultés des élèves et aux stratégies utilisées par les enseignants pour soutenir les apprentissages de leurs élèves dans l'activité sur les suites. Nous apportons également une réflexion sur le développement de la pensée algébrique des élèves à l'égard des tâches proposées en nous attardant aux gestes et au langage utilisé par les élèves en relation avec celles-ci et ce, dans le but d'identifier le type de pensée mathématique sollicité.

1. Le développement de la pensée algébrique

Kieran (2004) explique que la pensée algébrique dans les premières années implique certains modes de pensée, non exclusif à l'algèbre, qui servent de base commune pour des pensées mathématiques, telle que : raisonner sur les relations, représenter et modeler. Les modes de pensée ayant cette caractéristique peuvent être sollicités dans différents types de tâches. Dans le présent article, nous nous intéressons à l'élaboration de cette pensée associée aux suites non-numériques.

Quant à Blanton et Kaput (2011), ils précisent que « *les expériences dans la construction, l'expression, et la justification des généralisations mathématiques* » sont au centre de la préparation à l'algèbre. Ils suggèrent que de telles expériences soient proposées aux élèves dès le début de la scolarisation. En outre, Kaput, Carraher et Blanton (2008) caractérisent la pensée algébrique à partir de deux aspects fondamentaux: (1) la construction et l'expression des généralisations dans des systèmes de symboles conventionnels de plus en plus formels et, (2) le raisonnement avec des formes symboliques (a-a=0), y compris les manipulations syntaxiquement guidées par les formes symboliques. Toutefois, tenant compte de l'âge de nos participants, dans notre étude, nous nous préoccupons principalement de l'aspect de construction et de l'expression non formel (non conventionnel) des relations en contexte de suites non-numériques. Nous adhérons, à l'instar de Kaput et al. (2008), à l'étude du développement d'une pensée algébrique associée aux relations et aux variations au sein de l'activité reliée aux suites non-numériques.

Par ailleurs, dans le contexte d'étude de suites, Bezuszka et Kenney (2008) distinguent la relation récursive : relation entre l'élément de la suite et l'élément suivant (exemple : f(5)=f(4)+2), et la relation explicite : relation entre la position de l'élément dans la suite et la composition (valeur) de cet élément (exemple : f(n)=2n+1). Les pensées donnant accès à l'appréciation de ces relations sont distinctes mais étroitement liées entre elles. Les deux types de pensées sont de nature algébrique selon les auteures car celles-ci sont en fait, les généralisations des relations entre des quantités. Quant à Radford (2012) ce qui fait une pensée de type algébrique est son aspect analytique. Par exemple, la reconnaissance d'une relation sous une forme généralisée.

Dans le cas de suites non-numériques, nous pouvons parler de : (1) l'appréciation d'un motif récurrent dans une suite répétitive ; (2) l'appréciation de la variation dans une suite croissante. Par conséquent, on peut se demander comment la répétition ou la variation influence le type de pensée de l'élève : récursive ou explicite (Bezuszka & Kenney 2008). La distinction entre la pensée récursive et la pensée associée à la relation explicite est importante, car selon (Moss et al. 2008 cités dans Kieran 2014) le raisonnement récursif peut poser un obstacle à l'élève dans son appréciation de la relation explicite pour arriver à une formule (règle fonctionnelle) pour exprimer le n-ième élément. On peut aussi se demander quels sont les aspects des éléments de la suite (figures) qui ont nourri la pensée de l'élève : quantitative et/ou qualitative (+2 ou «ça augmente»), géométrique et spatial («un autre carré», «plus haut») (Berdonneau 2005). Ces pensées peuvent apparaître à l'aide d'un soutien pédagogique de l'enseignant à l'intérieur d'une situation spécifique où l'enfant peut atteindre sa zone proximale de développement.

2. *Le soutien pédagogique de l'enseignant au regard de l'atteinte de la zone proximale de développement de la pensée algébrique de l'enfant*

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la théorie vygotskienne portant sur la zone proximale de développement qui fait référence à «*un niveau de développement potentiel*» que l'élève peut atteindre s'il reçoit le soutien pédagogique approprié d'un adulte expert (Brodrova & Leong 2012 ; Bouchard 2009). Ce soutien est optimal si l'étayage, qui «consiste à soutenir et guider l'apprentissage de l'enfant, notamment par le dialogue, en tenant compte de ses capacités actuelles et potentielles» est utilisé comme stratégie de soutien pédagogique (Bouchard 2009, p.165), puisqu'il permet alors à l'élève d'atteindre sa propre zone proximale de développement. Wood, Bruner et Ross (1976) proposent un cadre théorique pertinent pour analyser le soutien pédagogique, l'étayage, que l'enseignant peut apporter à l'élève lorsque celui-ci est en apprentissage. À cet effet, les auteurs présentent plusieurs types d'interventions pédagogiques pour amener l'élève dans sa zone proximale de développement.

Dans cet article, les expérimentations des élèves seront examinées au regard de six types d'interventions de soutien pédagogique que proposent Wood, Bruner et Ross (1976) : 1) Attirer l'intérêt et susciter l'engagement de l'enfant à la tâche ; 2) Encadrer l'enfant dans la tâche (proposition de stratégies et d'interventions pour alléger la tâche) ; 3) Garder l'attention de l'enfant sur l'activité et la poursuite des objectifs à atteindre en préservant sa motivation et son engagement ; 4) Orienter l'enfant vers les caractéristiques essentielles de la tâche (notamment l'inviter à apprécier un motif récurrent, à porter attention à la variation dans une suite croissante et attirer son attention sur les caractéristiques quantitatives et qualitatives des figures observées) ; 5) Contrôler la frustration de l'enfant en diminuant son stress ; 6) Démontrer, modeler et proposer des solutions à l'enfant afin de le guider vers les étapes de réalisation de l'activité.

V. LA MÉTHODOLOGIE

1. *Composition de l'échantillon*

L'échantillon se compose de 24 élèves provenant de deux écoles et quatre classes dont 12 en maternelle 4 ans et 12 en jardin 5 ans. Chaque enseignante de niveau scolaire maternelle et jardin devait choisir 2 élèves « forts », 2 « moyens », et 2 élèves « faibles » par classe comme échantillon pour représenter les élèves de la classe. Un seul élève de niveau «faible» de la maternelle représentait le deuxième groupe. Le niveau des élèves était évalué par l'enseignante en lien avec son rendement général (écoute, niveau de participation, apprentissages réalisés, etc.). Toutefois, dans cet article, nous présentons uniquement trois cas d'élèves de maternelle et du jardin. Ceux-ci ont tous 5 ans.

2. *Instruments de collecte de données*

La tâche était construite comme instrument de prétest dans le cadre d'une enquête collaborative. La tâche consistait à présenter aux élèves 4 modèles de suites différents. Les tests sur les régularités ont été inspirés de « clinical interviews » apparu dans « Public Lesson: February 6, 2013, Bishop Strachan School ». Dans ce texte, il s'agit de deux modèles particuliers de suites. Le modèle 2 est une suite dont chaque élément est composé d'un nombre de carrés rouges qui correspond à la position d'éléments dans la suite, disposés horizontalement, puis d'un hexagone jaune placé au-dessus des carrés.

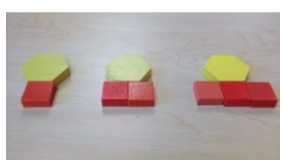


Figure 1 - *Le modèle 2 est un motif croissant avec un hexagone jaune constant et des carrés orange représentant la variable*

Pour construire l'élément suivant, l'élève doit placer un nombre exact de carrés, puis un hexagone jaune.

Le modèle 3 est une suite dont chaque élément est composé d'un nombre de carrés qui correspond à la position d'éléments dans la suite, disposés verticalement, ainsi que d'un autre carré rouge disposé différemment (tourné à 90 degré). Pour construire l'élément suivant, l'élève doit placer un nombre exact de carrés en ajoutant un carré tourné à 90 degré sur le dessus.

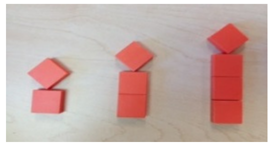


Figure 2 - *Le modèle 3 est un motif croissant de même couleur. Il s'agissait d'un changement d'orientation pour faire la distinction entre la constante et la variable.*

Pendant le déroulement du prétest, les élèves étaient filmés. Dans un premier temps, trois modèles de suites de complexité croissante ont été présentés à chaque élève individuellement. Dans chaque cas, on demandait aux élèves de montrer, « Qu'est-ce qui vient après? » et d'expliquer « Pourquoi? ». Dans un deuxième temps, on demandait aux élèves de construire leur propre modèle de régularité. Par la suite, l'enseignante et la conseillère pédagogique pouvaient questionner l'élève pour l'amener à réaliser la tâche demandée. Ainsi, elles ont pris l'initiative de poser d'autres questions dans le but d'aider l'enfant dans la tâche à accomplir. Elles ont également pris l'initiative de poser des questions d'entrée quelque peu différentes d'un enfant à l'autre. Plusieurs de leurs interventions sont analysées au regard des types de soutien pédagogique proposés par Wood, Bruner et Ross (1976). Dans cet article, nous présentons uniquement l'analyse et les résultats portant sur l'activité des modèles 2 et 3 qui sont reproduits ci-dessous.

VI. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

1. Un tout début d'émergence d'une pensée algébrique

Exemple 1 : Matthieu 5 ans élève au jardin (modèle 3)

Pour le modèle 3, l'enseignante indique à Matthieu qu'il y a une suite sur la table puis lui demande : «Dis-moi ce que tu vois?» Il répond en pointant les ensembles d'objets d'une même figure : «un de plus en montant». Dans cette activité, Matthieu est en mesure de décrire la relation en termes récursifs en établissant une règle « un de plus » qui peut être répétée à l'infini. Plus précisément, il perçoit la récursion présente dans la suite et la généralise. Dans cet exemple, Matthieu démontre sa capacité à généraliser en établissant sa propre règle récursive qui intègre les sens quantitatif et qualitatif : «un de plus en montant». Le sens quantitatif provient du fait que c'est «un de plus», peu importe le nombre. Le sens qualitatif (spatial) vient du fait qu'il nous indique la direction «en montant». Il semble donc que dans cette situation, la pensée de Matthieu soit associée à l'émergence d'une pensée de généralisation qui elle sous-tend une forme de pensée algébrique.

Si nous portons notre analyse sous un autre angle, en abordant l'aspect pédagogique, nous constatons que la demande de l'enseignante était en soi très ouverte : «Dis-moi ce que tu vois». À cet effet, nous pensons que l'essence même de la question ait pu influencer la pensée de Matthieu et l'amener à formuler à son tour une réponse générale. En fait, l'enseignante n'a pas demandé à Matthieu de lui dire ce qui venait après, ce qui aurait probablement orienté tout autrement la pensée de Matthieu, et par conséquent, sa réponse. En réalité, la question posée par l'enseignante nous laisse croire que la réponse de Matthieu réfère à toute la situation et non à la construction du prochain élément concret, ce qui l'a donc amené à trouver une règle qu'il pouvait appliquer à toute la séquence.

Dans la suite de l'activité, l'enseignante a posé plusieurs questions à Matthieu. Nous analysons également cette partie afin de comprendre de façon plus large l'expression de la pensée de Matthieu. À cet effet, au regard des questions posées par l'enseignante, nous constatons que Matthieu n'exprime pas la constante au sein des figures. Plus précisément, il n'établit pas verbalement le lien entre les carrés en-dessous où il faut en ajouter un de plus et le carré sur le dessus dont la quantité reste toujours la même (la constante). Nous pouvons le percevoir lorsque l'enseignante lui demande combien il y a de carrés dans la première figure, il répond «1», dans la deuxième figure, il répond «2», dans la troisième figure, il répond «3». À ce moment, Matthieu n'exprime aucune relation entre le nombre de carrés en dessous et le carré sur le dessus dont la quantité reste toujours la même. Notre première hypothèse est la suivante : il se peut que l'attention de Matthieu ne soit pas dirigée vers cet élément qu'est la constante mais qu'il porte plutôt son attention sur la partie qui change et que par ailleurs, ce soit celle-là qu'il analyse. Notre deuxième hypothèse est que le terme «carré» n'est probablement pas maîtrisé par l'enfant. Si la figure avait été constituée de deux formes différentes ou si l'enseignante avait nommé les deux formes de façon distincte, par exemple : « carré droit» et « carré tourné », Matthieu aurait pu répondre correctement à la question posée par l'enseignante et exprimer la distinction entre la constante et les autres formes qui composent les figures. En fait, pour accéder à la pensée de Matthieu en ce sens, il faudra l'amener à s'exprimer sur la relation entre les parties variables et la partie «constante» dans la suite. Ainsi, par le questionnement de l'enseignante, nous pourrions accéder à la pensée de Matthieu par rapport à l'élément présent dans la figure associé à la constante.

Dans l'ensemble, cette analyse nous amène à émettre l'hypothèse qu'une question «ouverte» tend à favoriser l'élaboration d'une réponse générale. En fait, il est probable que le fait que l'enseignante ait utilisé une question très ouverte, ait permis à l'élève d'investiguer et de porter son attention sur plusieurs aspects tels que «numérique» et «spatial». En d'autres termes, la question de l'enseignante a offert l'opportunité à l'élève d'investiguer la récursion autant sur le plan visuel que numérique (Bezuszka & Kenney 2008). Ainsi, il se peut également que ce soit la question de l'enseignante de type «ouvert» qui ait incité l'élève à observer l'ensemble de la situation et à construire une règle générale. Moss et London Mc Nab (2011) vont dans ce sens en précisant que le choix des questions de l'enseignante peut diriger l'attention de l'élève vers des éléments spécifiques, ce qui par conséquent, amènerait l'élève à utiliser une forme de pensée algébrique.

Exemple 2 : Sébastien 5 ans élève de la maternelle (modèle 3)

Pour le modèle 3, qui représente une suite à régularité croissante de même couleur et de même forme, de différentes dispositions, l'enseignante demande à Sébastien de continuer la suite. Il réussit à continuer la suite avec un ordre de croissance mais ne met pas le bon nombre de carrés dans la figure construite. À cet effet, il établit une relation existante entre les ensembles en se référant au concept de grandeur. Il qualifie ainsi le premier ensemble de «petit», le deuxième de «moyen», le troisième de «grand». Lorsque la conseillère pédagogique lui demande de continuer la suite et de l'expliquer, Sébastien ajoute des carrés (plus de carrés qu'il n'en faut) et en pointant chacun des ensembles, il dit : «petit», «moyen», «grand» et «ben plus grand». La conseillère lui demande ce qu'il y aurait après, Sébastien répond «ben plus grand que ça». Sébastien fut donc en mesure de trouver une relation de variation entre les figures, celle reliée à un ordre croissant qualitatif. Toutefois, Sébastien, n'a pas été en mesure de continuer la suite avec le bon nombre d'objets, il en a mis cinq au lieu de quatre. La relation qu'il a établie n'a pas suffi à l'amener à trouver la règle complète de la suite. Dans le cas de Sébastien, nous pensons que le travail de la conseillère pédagogique serait d'amener Sébastien à observer davantage les détails de la suite pour être capable de discerner le changement quantitatif exact qui se produit d'une figure à l'autre.

Par ailleurs, l'enseignante a utilisé plusieurs interventions d'étayage proposées par Wood, Bruner et Ross (1976) qui visent à encadrer l'enfant dans la tâche : «Peux-tu continuer la suite?» ; «Peux-tu expliquer ta suite?» ; «Et qu'est-ce qu'il y aurait ici?» et «Est-ce que tu peux me dire ce que tu vois ici?» De plus, quelques interventions utilisées par l'enseignante, de type trois, visent à préserver la motivation de l'enfant : «Très bien!» et «Super!». Toutefois, certaines interventions de l'enseignante de type quatre auraient pu amener l'élève à observer les caractéristiques essentielles de l'activité dont les détails quantitatifs, ce qui aurait peut-être pu aider Sébastien à construire à bon escient les prochaines figures de la suite. Par ailleurs, une question plus ouverte telle que «Que vois-tu?», aurait peut-être permis à Sébastien de coordonner plusieurs caractéristiques et d'émettre une tout autre réponse.

Exemple 3 : Maryanne 5 ans élève au jardin (modèle 2)

Pour le modèle 2, l'enseignante dit à Maryanne de regarder sur la table parce qu'elle a une autre suite puis lui dit: «Peux-tu m'expliquer ce que tu vois devant toi?» À cet effet, l'enfant répond «une suite». On constate ici que la question posée à Maryanne oriente la pensée de l'enfant non pas sur l'interprétation de la structure en terme de changement d'une figure à l'autre, mais sur une pensée déjà construite axée sur une connaissance antérieure au niveau de la terminologie qui sous-tend la notion de «suite». Ainsi, Maryanne s'est plutôt attardée à percevoir la suite comme répétitive parce que c'est ce qu'elle a appris antérieurement. La pensée de Maryanne semble donc avoir été construite au regard de la phrase d'entrée évoquée par l'enseignant. Malheureusement, nous ne pouvons pas savoir ce qui se serait passé si l'enseignante avait posé directement la question «Que vois-tu?» à Maryanne. Peut-être que celle-ci aurait influencé Maryanne à percevoir d'entrée de jeu le changement au sein de la suite et à émettre une réponse différente. En fait, l'enfant est souvent orienté vers un désir de dire ou faire ce qu'il pense que l'enseignant aimerait qu'il dise ou qu'il fasse (Brousseau 1980). Ainsi, lorsque l'on examine les réponses de Maryanne, nous sommes portées à croire que celles-ci ont été orientées par son désir de satisfaire l'enseignante en faisant référence à un apprentissage précédent.

Par ailleurs, l'élève semble utiliser un comportement qu'elle a appris avec les suites répétitives, c'est-à-dire «nommer les couleurs». À cet effet, elle essaie d'appliquer sa connaissance précédente à l'activité sur les suites croissantes que l'enseignante lui présente. Elle nomme les couleurs. Par la suite, lorsque l'enseignante pose la question suivante à Maryanne «Qu'est-ce qui vient après?», l'élève utilise sa connaissance précédente sur les suites répétitives et essaie de changer sa suite en cohérence avec cette connaissance, c'est-à-dire, la transformer en une suite répétitive. Ce n'est que lorsque l'enseignante lui dit qu'elle ne peut rien changer que Maryanne est amenée à porter attention sur la relation récursive et à construire le prochain élément de la suite. Il semble que la question de l'enseignante ait permis à Maryanne d'établir un raisonnement récursif de type quantitatif qui l'a finalement amenée à mettre le bon nombre de carrés dans chacune des figures de la suite. À cet effet, Maryanne utilise une procédure de comptage adéquate mais n'est toujours pas en mesure de prononcer la règle de la suite. Une autre question de l'enseignante fait suite à celle précédemment citée. Cette fois-ci, la question de l'enseignante fait référence au processus de changement qui se passe au sein des figures de la suite : «Qu'est-ce que tu vois qui est différent au premier, au deuxième et au troisième»? L'enfant est ainsi amené à observer la suite, à prendre conscience de l'unicité de chacune des figures et à établir des relations entre celles-ci et par conséquent à percevoir le changement qui se produit au sein de la suite. Les interventions de l'enseignante ont permis d'orienter l'attention de l'enfant vers le changement. Par la perception de ce changement, elle a réussi au niveau de la manipulation concrète des objets à continuer la suite. Cependant, sur le plan verbal, elle ne peut exprimer ce changement par une règle qui le sous-tend. Ainsi, bien que les questions de l'enseignante aient sollicité la pensée récursive de Maryanne et que celle-ci ait été en mesure de continuer la suite, elle n'est pas parvenue à exprimer verbalement la formule récursive associée à la suite du modèle 2.

Étant donné que Maryanne exprime bien ce changement par la manipulation des objets de la suite puisqu'elle peut continuer la suite, il est donc plausible de croire que Maryanne possède une connaissance implicite lui permettant de réguler la situation par manipulation (Brousseau 1971). Toutefois, nous ne sommes pas en mesure de confirmer l'essence de cette pensée puisqu'elle n'a pas été exprimée verbalement.

En résumé, nous concluons que les interventions de l'enseignante dans un cadre d'étayage ont amené Maryanne à apprécier les caractéristiques variées de la suite à un stade qui lui a permis de continuer correctement celle-ci. Toutefois, nous pensons qu'elle n'a pas eu accès à un *niveau* de pensée algébrique au même titre que Matthieu et Sébastien. En fait, Maryanne n'a pas exprimé verbalement la généralisation correspondante à cette construction comme l'avait fait Matthieu sous forme quantitative, ni sous forme qualitative tel que Sébastien l'a fait.

De plus, treize interventions ont été nécessaires pour amener l'enfant à réaliser l'activité et par conséquent atteindre sa zone proximale de développement. À cet effet, l'enseignant utilise des interventions de type 2 qui visent à simplifier la tâche sans indiquer la solution directement (L'enseignante aide Maryanne en enlevant les carrés de surplus qu'elle avait ajoutés) et de type quatre qui consiste à orienter l'attention de l'enfant sur certaines caractéristiques essentielles de l'activité et vers le but de l'activité car Maryanne semble avoir dévié de la direction en puisant dans ses connaissances antérieures reliées aux suites répétitives. Ainsi, l'enseignante réoriente son attention en l'amenant sur une autre piste, celle du changement. À cet effet, elle formule la question suivante: «Que remarques-tu qui est différent?» Elle tente alors d'attirer et d'accentuer l'attention de l'enfant sur des caractéristiques qui lui permettront de comprendre le changement au sein de la suite et ainsi de poursuivre l'activité : «Combien vois-tu de carrés dans le premier?» ; «Dans le deuxième?» ; «le troisième?» ; «le quatrième?» Ces interventions permettent à Maryanne de s'orienter vers l'aspect quantitatif des figures. De plus, les questions de l'enseignante contiennent des remarques qui donnent l'information nécessaire à l'enfant pour comprendre ce vers quoi l'enseignante aimerait l'amener, plus précisément le but de l'activité c'est-à-dire l'observation du changement dans la suite. Enfin, l'enseignante fait une intervention de type 6 en indiquant à l'enfant la prochaine étape à réaliser. Elle lui demande: «Qu'est-ce que tu mettrais dans ton dernier?» À cet effet, Maryanne qui semble avoir établi la relation entre les figures, met 4 carrés et 1 hexagone à la dernière figure et complète la dernière figure.

VII. DISCUSSION

1. Le développement de la pensée algébrique et les stratégies de soutien apportées par l'expert (enseignant ou conseillère pédagogique)

Dans le premier exemple, Matthieu a perçu la variation en s'appuyant sur une pensée récursive de type quantitatif et qualitatif «un de plus en montant». À cet effet, Bezuska et Kenney précisent (2008) que : «Tout comme la pensée récursive est fondamentale pour la pensée et le raisonnement algébrique, ainsi la récurrence et les relations de récurrence font partie du contenu de base fondamental de l'algèbre.» (p.1, traduction libre). De plus, ce qui attire notre attention c'est le fait que Matthieu puisse coordonner différents types de pensée (nombre, opération, qualitatif, et spatial) pour rendre compte de la relation récursive qui relève d'une pensée plus axée sur les relations et donc à portée algébrique (Kieran 2004).

Cette coordination rendue possible grâce à la connaissance numérique de Matthieu, démontre un niveau de raisonnement bien élevé.

Dans le deuxième exemple, Sébastien fut en mesure de trouver une relation de croissance sous forme qualitative: « petit, moyen, grand, plus grand, ben plus grand que ça ». Nous pouvons ainsi percevoir que Sébastien fait référence à une pensée récursive de type qualitatif. Cependant, il est possible que Sébastien ait été en mesure de mettre le bon nombre d'éléments dans les figures, s'il avait porté son attention sur les caractéristiques quantitatives de la suite. De plus, bien que Sébastien ait utilisé une pensée de type algébrique en faisant référence à l'aspect récursif et qualitatif de la suite, nous pensons que sa pensée n'a pas atteint un niveau supérieur, celui associé à la coordination de plusieurs caractéristiques des figures de façon simultanée tel que Matthieu l'a démontré. Il s'agirait donc, chez Sébastien et chez Matthieu, de deux niveaux de pensée de type algébrique. Il est vrai que la question de l'expérimentation «qu'est-ce que tu vois?» est ouverte et n'incite pas nécessairement chez l'élève l'analyse quantitative. Dans l'enseignement, il faut penser comment construire la situation pour que cet objectif soit plus clair chez l'élève.

Dans le troisième exemple, Maryanne utilise une procédure de comptage adéquate mais n'est toujours pas en mesure d'exprimer la variation entre les figures telle que l'avaient fait Sébastien et Matthieu. Elle a toutefois été capable d'exprimer sa pensée en construisant l'élément suivant correctement. Cependant, à notre avis, Maryanne est dans un processus d'acquisition d'outils langagiers pour exprimer une compréhension plus développée des changements et de la récursion au sein des suites à motif croissant sous une forme verbale. En fait, à ce propos, Bodrova et Leong (2012) précisent que le développement cognitif de niveau supérieur est dépendant de l'acquisition d'outils de la pensée qui est favorisée par le langage partagé, soit lorsque l'adulte intervient auprès de l'enfant par le dialogue (interventions verbales) et lui propose des stratégies lui permettant de réaliser de nouveaux apprentissages et d'atteindre un autre niveau de pensée, soit lorsque l'élève est mis dans une situation qui est rendue «nécessaire» ou «optimale».

À cet effet, notre analyse nous a permis de constater que des interventions spécifiques de l'étayage, soient celles de type 4, pourraient amener les élèves à percevoir et à coordonner plusieurs caractéristiques dans les figures et ainsi établir différentes relations au sein de la suite. De plus, nous avons pu remarquer que le type de question posé par l'enseignant pouvait avoir des répercussions sur le genre de pensée élaborée par l'élève. À cet effet, il semble qu'une question ouverte telle que «Que vois-tu?» amènerait l'élève à regarder l'ensemble de la situation et à percevoir et coordonner plusieurs caractéristiques à la fois. Ce genre de question favoriserait chez l'élève un raisonnement plus général basé sur l'observation de la situation dans son ensemble. Toutefois, notre analyse nous amène à être prudent quant aux consignes ou aux phrases qui sont émises par l'enseignant juste avant l'activité. Par exemple, si une question telle que «Peux-tu m'expliquer ce que tu vois devant toi?» est précédée d'une phrase de l'enseignant qui indique ce qu'il y a sur la table telle que :«Regarde ici, tu as une suite», celle-ci peut influencer et orienter différemment la pensée de l'enfant qui pourra dès lors être porté à se référer à certains apprentissages antérieurs sur les suites, ce qui le limitera dans l'expression des relations qu'il pourrait percevoir. Ainsi, à notre avis, il serait préférable de ne pas indiquer à l'enfant ce qu'il y a sur la table et commencer d'emblée par «Que vois-tu?».

En résumé, les trois cas discutés permettent d'alléguer que les suites non-numériques ont le potentiel de susciter chez l'enfant les éléments de la pensée d'ordre algébrique suivants :

- l'appréciation des caractéristiques quantitative et qualitative des figures
- l'appréciation de changement (croissance) au niveau qualitatif et quantitatif

- l'appréciation de rôles différents des composantes des figures : « constante » et « variable »
- la coordination des caractéristiques variées des figures
- l'expression de la régularité par manipulation (construction du prochain élément de la suite)
- l'expression verbale de la règle de la suite.

Toutefois, nous n'avons observé aucun cas où l'enfant ait exprimé la règle d'une suite (fonctionnelle, non récursive) sous une forme explicite. On peut penser que cela est dû au fait que ce type de pensée algébrique n'était pas accessible aux enfants, ou que les enfants n'ont tout simplement jamais porté attention à la relation directe entre la position de la figure dans la suite et la composition de la figure, puisqu'aucun matériel visuel n'était présent pour alimenter la pensée de l'enfant à ce niveau. Toutefois, la généralisation de relation récursive était bien observée dans l'expérimentation ce qui nous donne le droit de parler de raisonnement algébrique.

VIII. CONCLUSION

Cette étude nous a permis de mettre de l'avant le potentiel des suites non-numériques par l'entremise des éléments de la pensée d'ordre algébrique qu'elles suscitent ainsi que l'influence de l'étayage dans le type de pensée qu'elle favorise. Ȧ l'instar de (Bjorkland, 2014, sous presse), nous croyons que les suites représentent un objet d'apprentissage potentiel mais que les enseignants ont besoin de comprendre ce que l'élève doit discerner pour faire les apprentissages spécifiques. Toutefois, le curriculum de l'Ontario n'est pas précis dans la distinction de la compréhension du changement sous forme récursive ou explicite. De plus, le curriculum n'est pas précis sur le potentiel des questions qui peuvent favoriser le développement de la pensée algébrique et du type de soutien à apporter à l'élève en ce sens. Par ailleurs, en donnant l'occasion aux élèves de 4 et 5 ans de vivre une activité sur les suites à motifs croissants, bien que cela ne soit pas favorisé dans le curriculum, il faut se demander s'ils ont les outils nécessaires pour formuler des règles explicites tels que du matériel visuel à l'appui ainsi qu'une connaissance des nombres suffisamment élaborée pour être capable de formuler cette relation explicite. Cette avenue de recherche peut sembler intéressante.

REFERENCES

Beatty R. (2010) Supporting algebraic thinking : Prioritizing visual representations, *OAME Gazette, 49(2)*, 28-33.

Berdonneau C. (2007) Mathématiques. Activités pour les tout-petits. Profession enseignant. Hachette éducation.

Bezuska S., Kenney M. (2008) The three R's : Recursive thinking, Recursion, and Recursive formulas . *NCTM : "Algebra and algebraic thinking in school mathematics".*

Björklund C. (2014 sous presse) Playing with patterns-lessons learned from a learning study with toddlers Communication présentée en Suède dans le cadre du POEM.

Bouchard C. (2009) Le développement global de l'enfant de 0 à 5 ans en contextes éducatifs. Presses de l'Université du Québec : Québec

Blanton M. L., Kaput J.J. (2011) Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades . *In* Cai, J., Knuth, E. (Eds) (p.5-21) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Heidelberg, Germany: Springer.

Bodrova E., Leong D. (2012) *Les outils de la pensée. L'approche vygotskienne dans l'éducation à la petite enfance.* Presses de l'Université du Québec : Québec

Brousseau, G., (1971) *La théorie des situations didactiques*. Bordeaux, France : DAEST-Faculté des Sciences de l'Homme-Université Victor Segalen Bordeaux 2.

Cai J., Knuth, E. (2011) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives.* Heidelberg, Germany: Springer.

Carraher D.W., Schliemann A. (2007) Early algebra and algebraic reasoning. In Lester F. K. (Eds.) (p.669-705) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Kaput J.J. (2008) What Is Algebra? What is Algebraic Reasoning? In Kaput J.J., Carraher D.W., Blanton M.L. (Eds.) (p.xvii-xxi) *Algebra in the early grades.* National Council of teachers of mathematics. New York .

Kaput J.J., Carraher D., Blanton M. (2008) Skeptic's guide to algebra in the early grades. In Kaput J.J., Carraher D.W., Blanton M.L. (Eds.) (p.xvii-xxi) *Algebra in the early grades.* National Council of teachers of mathematics. New York .

Kieran C. (2014) What Does Research Tell Us about Fostering Algebraic Thinking in Arithmetic? National council of teachers mathematics NCTM.

Kieran C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator* 8(1), 139 - 151

Kieran C. (1992) The learning and teaching of school algebra. In Grouws D.A. (Eds.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Masson J. (2008) Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. In Kaput J.J., Carraher D.W., Blanton M.L. (Eds.) *Algebra in the early grades* (pp.57-94). National Council of teachers of mathematics. New York .

Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2008) *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la troisième année. Modélisation et algèbre de la maternelle à la troisième année.* Fascicule 1 régularités et relations. Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Moss J., London McNab S. (2011) An Approach to Geometric and Numeric Patterning that Fosters Second Grade Students' Reasoning and Generalizing about Function and Co-variation . In Cai J, Knuth E. (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp.277-320). Heidelberg, Germany: Springer.

Radford L. (2012) *On the development of early algebraic thinking*. P*NA*, *6*(4), 117-133.

Squalli H. (2002) Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire : un exemple de raisonnement à l'aide de concepts mathématiques. *Instantanés mathématiques*, 39, 4-13.

Warren E., Cooper J. (2008) Generalizing the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking . *Educational Studies in Mathematics* 67, 171–185.

Wood D., Bruner J. S., Ross G. (1976) The tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry* 17, 89-100.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

ÉTUDE D'UNE TRANSPOSITION DIDACTIQUE DE L'ALGORITHMIQUE AU LYCÉE : UNE PENSÉE ALGORITHMIQUE COMME UN VERSANT DE LA PENSÉE MATHÉMATIQUE

Nathalie BRIANT* – Alain BRONNER**

Résumé – Nous nous positionnons sur la place de la *pensée algorithmique* relativement à la *pensée mathématique*, en analysant deux points. Le premier consiste à considérer l'émergence de la pensée algorithmique lors de la résolution d'un problème mathématique en utilisant un environnement informatisé. Nous définissons la *double transposition* qui s'en suit, en caractérisant la démarche algorithmique. Le second consiste à montrer comment le détour par une *pensée algorithmique* a permis de développer une *pensée algébrique* et d'asseoir des concepts algébriques relatifs à la notion d'équation. Nous nous appuyons sur les résultats d'une ingénierie didactique expérimentée sur des élèves de 15 ans du lycée français.

Mots-clefs : pensée algorithmique, pensée algébrique, algorithme, équations, programmation

Abstract – We position ourselves about the place of *algorithmic thinking* in relation to *mathematical thinking*, analysing two points. The first is to consider the emergence of algorithmic thinking when solving a math problem using a computerized environment. We define *double transposition* that follows, featuring algorithmic approach. The second is to show how the detour through an *algorithmic thinking* has helped develop an *algebraic thinking* and sit algebraic concepts relating to the notion of equation. We build on the results of a didactic engineering tested on 15 years students of French high school.

Keywords: algorithmic thinking, algebraic thinking, algorithm, equations, programming

Préambule : Nous apportons ici une contribution au groupe de travail n°3, en nous centrant sur l'axe 2 intitulé « *L'activité du sujet au cœur du développement de la pensée mathématique* », et plus particulièrement sur le développement de la pensée algébrique des élèves, par le biais d'une pensée algorithmique. L'axe 1, « *La pertinence d'une différentiation de différents modes de pensées mathématiques* », est également convoqué puisque des caractéristiques propres à chacun de ces deux modes de pensée sont évoquées.

La réforme des lycées en France de 2009 s'est accompagnée d'un changement de programmes. Relativement à la classe de seconde (secondaire 2, 1ère année, 15–16 ans), une part d'algorithmique a été introduite dans le programme de mathématiques. L'objet de ce texte fait suite à nos travaux de thèse intitulée « *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français* » (Briant 2013). Nous souhaitons développer trois hypothèses sur l'apport de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques :

* LIRDEF. Université de Montpellier – France – nathalie.briant@fde.univ-montp2.fr
** LIRDEF. Université de Montpellier – France – alain.bronner@fde.univ-montp2.fr

Briant N., Bronner A. (2015) Étude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 231-246.

- concernant certains types de problèmes mathématiques, dont nous donnons quelques exemples plus loin, à toute forme de pensée mathématique nécessaire à leur résolution s'adjoint une pensée algorithmique particulière, dès que l'on cherche à les résoudre en utilisant les Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement (TICE), et notamment des langages de programmation ;

- par le choix de certains types de tâches, le développement de la pensée algorithmique chez les élèves peut permettre le développement de leur pensée mathématique en rendant plus visible les objets utilisés et les étapes de la procédure de résolution ;

- le fait de dégager une démarche algorithmique sur le problème à résoudre amène à se situer au niveau d'un type de tâches, et non plus au niveau de la tâche elle-même (au sens de Chevallard 1999). C'est-à-dire qu'un point de vue plus général est abordé, au-delà des cas particulier de certaines variables, permettant ainsi un accès plus important aux concepts en jeu et une meilleure compréhension de ceux-ci.

Pour soutenir ces hypothèses, nous reprenons certains résultats de notre travail de thèse, montrant comment des élèves de seconde du lycée français (15-16 ans) ont lié *pensée algorithmique* et *pensée algébrique* et comment ce travail leur a permis d'asseoir leurs connaissances en algèbre. Le cadre didactique sous-jacent à cette étude est celui de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard (1999).

I. L'AVENEMENT D'UNE PENSEE ALGORITHMIQUE POUR RESOUDRE CERTAINS TYPES DE PROBLEMES MATHEMATIQUES UTILISANT LES TICE

Dans cette première partie, nous nous proposons de développer ce que recouvre pour nous le terme de *pensée algorithmique*, pensée qui se développe au sein d'une *pensée mathématique*, mais sans se fondre complètement dans celle-ci, mais venant la compléter, amenant d'autres points de vue sur le problème à résoudre, d'autres techniques et d'autres technologies.

1. *Un exemple de la nécessité de développer une pensée algorithmique pour résoudre un problème mathématique dans un environnement informatisé*

La plupart des procédures de résolution de problèmes mathématiques ne se présentent pas directement sous la forme d'un algorithme. En général, la structure de cet algorithme reste à déterminer, à partir d'éléments de la résolution mathématique du problème posé dans un dispositif papier-crayon. Nous cherchons à montrer que la recherche d'un algorithme à partir des éléments de cette résolution n'est pas *transparente*[1], au sens de Artigue (1997), pour l'individu qui doit accomplir cette tâche.

[1] Artigue (1997) définit le concept de pseudo-transparence comme un *phénomène qui renvoie à des décalages dans les modes de représentation (interne et à l'interface) des objets*. Ce chercheur souligne que même si les phénomènes peuvent sembler minimes, ils perturbent le fonctionnement didactique. Pour exemplifier ce phénomène, prenons le cas de l'écriture des expressions algébriques sur support informatisé en considérant par exemple la tâche « entrer l'expression $\frac{x+4}{x-7}$ dans un logiciel ou une calculatrice ». Il est nécessaire d'adapter l'expression, de la *transposer* pour qu'elle soit lisible par une calculatrice actuelle de type collège (ou encore un tableur) sous la forme d'une écriture linéaire parenthésée du type $(x+4)/(x-7)$. La confrontation des deux environnements papier-crayon et informatique peut s'avérer bénéfique pour une compréhension approfondie de concepts, en exhibant des techniques ou des technologies différentes. Par exemple ici, la technique consistant à transformer une écriture spatiale en une linéarisation et un parenthésage des expressions permet d'asseoir les règles de priorité des opérations.

Commençons par présenter un exemple d'algorithme portant sur la simplification de la racine carrée d'un entier naturel noté *N*, sous la forme $a\sqrt{b}$ avec *a* et *b* entiers et *b* le plus petit possible.

L'existence de l'écriture $\sqrt{N} = a\sqrt{b}$ étant assurée[2], il reste à trouver une procédure qui permette de déterminer les valeurs de *a* et *b*.

Une première possibilité est de décomposer *N* en facteurs premiers et de considérer la parité des exposants des nombres premiers en présence pour calculer a et b : un premier algorithme peut ainsi être réalisé. Cet algorithme est souvent utilisé en environnement papier-crayon (pour des nombres « pas trop grands ») et se présente sous la forme suivante :

Algorithme n°1

Effectuer la décomposition de *N* en facteurs premiers : $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\propto_k}$

Pour tout entier i compris entre 1 et *k* :

- Si $\propto_i$ est pair, *a* contient le facteur $p_i^{\frac{\propto_i}{2}}$;
- Si $\propto_i$ est impair, *a* contient le facteur $p_i^{\frac{\propto_i - 1}{2}}$ et *b* contient le facteur p_i.

Une seconde possibilité est d'utiliser l'égalité $N = a^2b$ et d'effectuer l'algorithme suivant :

Algorithme n°2

Pour chaque entier *I* compris entre 1 et Ent($\sqrt{N}$) :

- Tester si la division euclidienne de *N* par I^2 donne un reste nul ;
  - Si c'est le cas, affecter à *a* la valeur de *I* ;
  - Si ce n'est pas le cas, *a* garde sa valeur.
- Passer à la valeur suivante de *I*.

Calculer la valeur de $b = N/a^2$

Ce second algorithme donne, en sortie de la structure répétitive, la plus grande valeur possible de *a*, puisque cette valeur est modifiée à chaque nouvelle valeur de *I* qui vérifie $N \equiv 0\ [I^2]$. La valeur de *b* en est alors déduite.

L'un ou l'autre de ces algorithmes répond au problème posé, cependant le second possède l'avantage sur le premier de ne pas nécessiter d'effectuer en préambule la décomposition du nombre *N* en facteurs premiers.

Si l'objectif est de programmer cet algorithme, une machine n'ayant pas -a priori- implanté en son sein un programme de décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier, le second algorithme est, de ce fait, plus facilement transposable en un algorithme *informatisé*,

[2] Si *N* est un carré parfait, il existe *a* entier tel que $N = a^2$ et par suite :$\sqrt{N} = a\sqrt{1}$;
Si *N* n'est pas un carré parfait, il existe un plus grand carré parfait *a* qui divise *N* (au pire *a* = 1). Alors $N = a^2b$ et $\sqrt{N} = a\sqrt{b}$. Si *a* est le plus grand possible, *b* sera le plus petit possible.

qui pourra alors être écrit dans un langage de programmation, compréhensible par une machine, comme celui réalisé ci-dessous sur le logiciel Algobox[3].

Soit N un entier naturel. Pour chaque entier I compris entre 1 et Ent($\sqrt{N}$) : - Tester si la division de N par I^2 donne un reste nul ; - Si c'est le cas, affecter à a la valeur de I ; - Si ce n'est pas le cas, passer à la valeur suivante de I. Calculer la valeur de $b : N/a^2$ Afficher racine(N) = a*racine(b)	VARIABLES N EST_DU_TYPE NOMBRE I EST_DU_TYPE NOMBRE a EST_DU_TYPE NOMBRE b EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE N POUR I ALLANT_DE 1 A floor(sqrt(N)) DEBUT_POUR SI (N%(I*I)==0) ALORS DEBUT_SI a PREND_LA_VALEUR I FIN_SI FIN_POUR b PREND_LA_VALEUR N/(a*a) AFFICHER a AFFICHER "*racine(" AFFICHER b AFFICHER ")" FIN_ALGORITHME	N = 120 ***Algorithme lancé*** 2*racine(30) ***Algorithme terminé*** N = 256 ***Algorithme lancé*** 16*racine(1) ***Algorithme terminé*** N = 1789 ***Algorithme lancé*** 1*racine(1789) ***Algorithme terminé***
Algorithme de simplification de $\sqrt{N}$ sous la forme $a\sqrt{b}$ où (a, b) ∈ N^2 et où b est le plus petit possible.	*Programme correspondant à l'algorithme ci-contre sous Algobox*	*Résultats obtenus par le programme pour trois valeurs particulières de N*

Figure 1 *- Exemple de simplification des racines carrées sur le logiciel Algobox*

Cet exemple montre que la recherche d'un algorithme *informatisé* s'appuie sur la résolution mathématique mais que celle-ci nécessite d'être *transposée* (au sens de Balacheff, 1994) pour tenir compte des actions qui sont élémentaires pour la machine. Ainsi ce premier exemple montre que bien que la résolution de ce type de tâches repose sur un algorithme (n°1) en environnement papier-crayon, mais que la recherche d'un autre algorithme (n°2) est souvent nécessaire afin résoudre le même type de tâches dans un environnement informatisé. Ainsi, une pensée algorithmique vient s'intégrer à la pensée mathématique initiale, non pas en se substituant à elle, mais en la complétant.

2. *De la résolution mathématique au programme informatique : une double transposition*

Le concept de transposition didactique (Chevallard 1985) a été repris par Balacheff (1994) et retravaillé en tenant compte des contraintes liées à l'apprentissage de savoirs en environnement informatique sous le nom de *transposition informatique.* Le savoir enseigné dans une situation classique d'enseignement est différent du savoir enseigné avec un ordinateur, ce qui peut se schématiser comme suit :

[3] Algobox est un logiciel de programmation, libre et gratuit, développé en 2009 par Pascal Brachet, professeur de mathématiques au lycée Bernard Palissy à Agen. L'auteur le définit lui-même comme un *logiciel pédagogique d'aide à la création et à l'exécution d'algorithmes*. Ce logiciel est bien adapté pour des lycéens puisque son principe est que le code de l'algorithme se construit pas à pas grâce à des instructions de base pré-écrites que l'on insère, comme des « briques » dans le corps du programme. L'activité est alors davantage centrée sur la réflexion du choix des instructions et de leurs articulations plutôt que sur la syntaxe de lignes de code.

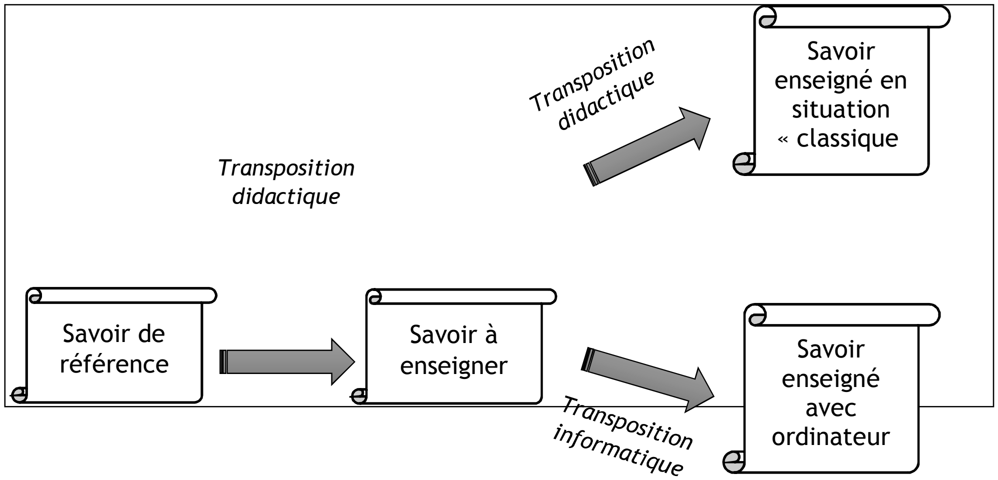
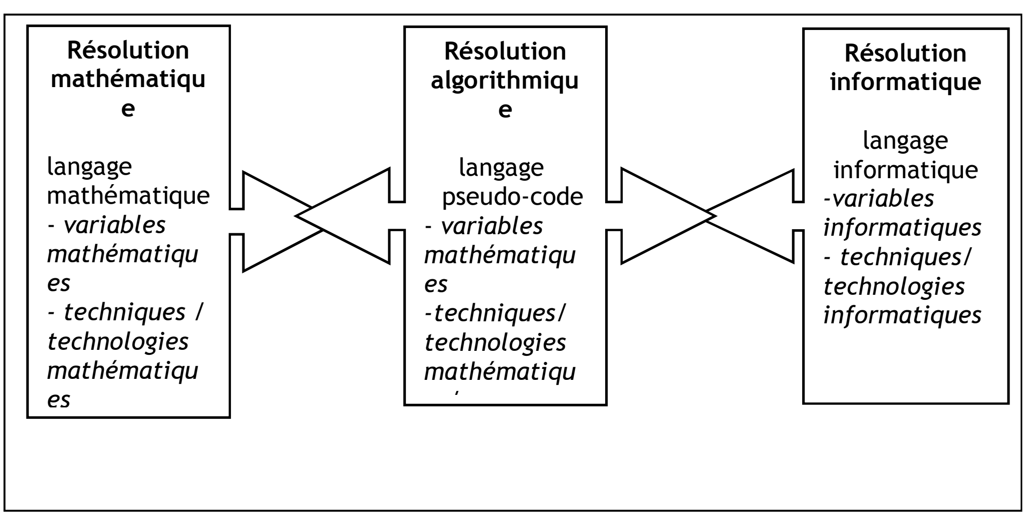


Figure 2 *- Transpositions didactique et informatique (Chevallard 1982, Balacheff 1994)*

Balacheff (1994) explique qu*'aux contraintes de la transposition didactique s'ajoutent, ou plutôt se combinent, celles de modélisation et d'implémentation informatiques*. Ce chercheur définit deux types de contraintes liées à la transposition informatique, les *contraintes de la modélisation computable* et les *contraintes logicielles et matérielles* des supports informatiques. Les premières portent sur la représentation et le traitement interne des savoirs dans la machine et les secondes sur la représentation et le traitement au niveau de l'interface, autrement dit ce qui est « visible » pour le sujet. Balacheff (ibid.) donne l'exemple du logiciel Cabri-Géomètre qui possède une représentation interne des objets géométriques issue de la géométrie analytique sur un modèle des nombres réels et une interface offrant une représentation de ces objets sous forme d'un pavage fini de pixels. Il précise que ces représentations ne sont pas transparentes : « *les systèmes de représentations ayant leurs propres caractéristiques, l'univers interne et l'interface combinent des effets générateurs et des phénomènes non intrinsèques aux entités représentées.* » (ibid., p.16)

Nos recherches sur l'intégration de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques nous amènent à reprendre le concept de transposition informatique de Balacheff mais avec une adaptation, tenant compte de la singularité de l'algorithmique. En effet, lorsqu'une tâche de type « concevoir un programme pour résoudre un problème » est donnée, nous voyons émerger une *double transposition*, associée à des techniques différentes, justifiées par des technologies relevant du domaine mathématique, du domaine informatique, ou des deux conjointement.

Nous schématisons et explicitons ci-dessous cette double transposition.



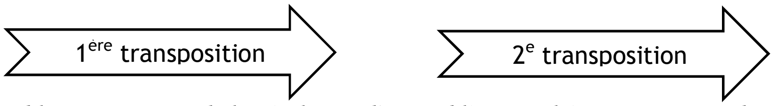


Figure 2 *- Double transposition de la résolution d'un problème mathématique en vue de sa programmation*

- *Premier cadre de la figure 2 : résolution mathématique*

Ce premier cadre symbolise la résolution du problème posé dans le cadre mathématique « habituel », c'est-à-dire en environnement classique papier-crayon. Cette résolution s'appuie sur des techniques et un environnement technologico-théorique mathématique : c'est ainsi que la résolution du problème est dite *mathématique* (par opposition ici à *informatique*).

Cette résolution peut avoir donné lieu à un premier algorithme, que nous nommons *algorithme mathématique*, comme l'algorithme n°1 de l'exemple de la simplification d'une racine carrée, mais notons que toutes les résolutions de problèmes mathématiques ne se présentent pas nécessairement sous la forme d'un algorithme.

- *Deuxième cadre de la figure 2 : résolution algorithmique*

La résolution mathématique achevée, une première transposition a lieu pour déterminer un algorithme *informatisé*, écrit en *pseudo-code*, notions que nous allons définir plus précisément.

Dans l'exemple de la simplification d'une racine carrée, nous avons vu que l'algorithme mathématique n°1, utilisé habituellement dans un environnement papier-crayon, nécessite la connaissance des nombres premiers, ce qui n'est pas généralement pas implanté de base dans un logiciel quelconque de programmation. La recherche d'autres algorithmes intervient alors dans cette phase, comme l'algorithme n°2 présenté plus haut, dont la structure tient compte des actions élémentaires réalisables par une machine et des logiciels de programmation intégrés : nous nommons ainsi *algorithme informatisé* ce type d'algorithme dont la fonction est de faciliter le passage à la deuxième étape qui sera développée plus loin.

Cette première transposition se fait à différents niveaux :

- au niveau du langage : nous passons d'un langage mathématique, c'est-à-dire *le langage utilisé usuellement par les écrits mathématiques* (Modeste 2012, p.62) à un langage en *pseudo-code* ressemblant à un langage de programmation, qui serait débarrassé de ses problèmes de syntaxe. Modeste (2012, p.24) le présente comme *un langage intermédiaire, inspiré des instructions des langages informatiques mais libéré de certaines contraintes et manipulant directement les objets mathématiques* ;

- au niveau des techniques et technologies utilisées toujours en considérant notre exemple, les techniques utilisées pour l'algorithme n°1 reposent sur la décomposition du nombre N en facteurs premiers et la parité des exposants des nombres premiers en présence, alors que pour l'algorithme n°2, elles reposent sur la recherche par divisions successives d'un plus grand élément dont le carré divise le nombre N ; les technologies-théories sous-jacentes s'en trouvent alors modifiées.

La résolution algorithmique du problème donné s'appuie sur la transposition à venir qui permettra de transformer *l'algorithme informatisé* en un programme, dont les contraintes sont propres au logiciel et à la machine choisis pour l'implanter.

- *Troisième cadre de la figure 2 : résolution informatique*

Une seconde transposition aboutit à l'écriture du programme avec un logiciel adéquat.

Elle se fait elle aussi à différents niveaux :

- au niveau du langage : il s'agit de passer du langage en pseudo-code de l'algorithme à un langage informatique, c'est-à-dire un langage de programmation. À titre d'exemple, en reprenant la simplification de la racine carrée (cf. figure 1), la propriété « I^2 divise N », *élémentaire* pour un individu, nécessite une reformulation pour donner un équivalent qui soit compréhensible par une machine, selon sa structure interne et dans son langage. Le test choisi sous la forme « $N \;\%\; I^2 = 0$ »[4] a été choisi mais toute autre formulation utilisant une succession d'opérations élémentaires pour le logiciel et préprogrammées dans celui-ci, conviendrait (comme par exemple « $Ent\,(N/I^2) = N/I^2$ »).

- au niveau des variables : les variables mathématiques utilisées dans les algorithmes vont céder la place aux variables informatiques dans le programme informatique. Remarquons que ces variables font partie de la technologie des praxéologies informatiques mais leur importance dans la programmation nous les fait préciser ici ;

- au niveau des techniques et technologies utilisées : aux techniques et technologies-théories propres à la résolution du problème en environnement papier-crayon viennent s'adjoindre celles liées aux principes de programmation informatique (notion de variables informatiques, affectation de variables, lecture/écriture, structures alternatives, structures répétitives).

Au centre de cette seconde transposition, apparaît la nécessité de comprendre ce qui est élémentaire pour une machine et ce qui ne l'est pas, ce qui va impliquer de comprendre les bases du fonctionnement d'un ordinateur, au niveau des instructions que celui-ci peut exécuter. Nous sommes au cœur de la *transposition informatique* (Balacheff 1994) et d'*instrumentation*[5] (Rabardel 1995) avec des problèmes de *pseudo-transparence*, au sens d'Artigue[6] (2005).

En conclusion de cette première partie, les tâches du type « concevoir un programme pour résoudre un problème mathématique » se décomposent en deux phases :

- la création *d'algorithmes informatisés* ou bien l'adaptation *d'algorithmes mathématiques* à partir de la résolution mathématique du problème en environnement « classique » papier-crayon ;

- l'adaptation de l'algorithme informatisé retenu en un programme, implanté sur un système informatique donné.

Bien entendu, ces phases ne sont pas forcément séquentielles ni chronologiques, de nombreux aller-et-retour pouvant survenir. Avec l'expérience, certains experts peuvent élaborer plus directement un programme mais on peut faire l'hypothèse que, face à des problèmes complexes, ils ont aussi besoin de passer par un algorithme informatisé et du pseudo-code.

Pour résoudre un tel type de tâches, le sujet va devoir apprendre à se décentrer de sa posture d'individu pour se placer dans la position de tenir compte de ce que sait faire la machine, s'il veut que son algorithme soit transférable en un programme. C'est en ce sens qu'émerge une *pensée algorithmique*, non entièrement « superposable » à la *pensée*

[4] La syntaxe « *a % b* » renvoie le reste de la division euclidienne de *a* par *b* sous le logiciel Algobox.
[5] L'*instrument* constitue pour Rabardel (1995) *une entité mixte qui tient à la fois du sujet et de l'artefact* : l'instrument est alors l'unité entre un *artefact* et l'organisation d'actions possibles, appelées les *schèmes d'utilisation*, qui constituent un ensemble structuré d'invariants correspondant à des catégories d'opérations réalisables à l'aide de l'artefact considéré. Tout au long de ce processus de conception, de création, de modification et d'utilisation d'un l'outil, le sujet évolue aussi personnellement en même temps qu'il s'approprie cet outil, et cette évolution concerne à la fois son comportement et sa connaissance. L'*instrumentation* (et l'instrumentalisation) est ce qui consiste à faire d'un artefact un instrument.
[6] Cf. note n°1 de bas de page.

mathématique mais intimement liée à elle. Pour la définir, nous choisissons cette définition de Modeste (2012), lui-même inspiré par Hart[7] :

> La pensée algorithmique serait alors une façon d'aborder un problème en essayant de systématiser sa résolution, de se questionner sur la façon dont des algorithmes pourraient ou non le résoudre. (p.47)

Nous retrouvons ainsi le troisième point indiqué dans l'introduction, sur le fait qu'une pensée algorithmique amène à une *généralisation* d'une tâche donnée, en s'intéressant au type de tâches sous-jacent, c'est-à-dire en ne considérant pas le problème pour des valeurs numériques données, mais en envisagent sa résolution de manière plus générale.

II. LIENS ENTRE PENSEE ALGORITHMIQUE ET PENSEE ALGEBRIQUE DANS LE CADRE D'UNE INGENIERIE DIDACTIQUE EN CLASSE DE SECONDE

Nous présentons ici une partie de l'ingénierie didactique, développée dans le cadre de notre thèse (Briant 2013). L'objectif est double ici. Il s'agit d'une part d'illustrer le modèle développé dans la première partie (Cf. section I.2 et figure 2) et d'autre part de montrer comment le détour par une pensée algorithmique a permis de développer et d'asseoir des concepts algébriques gravitant autour de la notion d'équation.

La situation que nous décrivons ci-après a été expérimentée auprès d'élèves de trois classes de seconde du lycée français (secondaire 2, 1ère année, 15–16 ans) et menée par les enseignants de ces classes. La situation offre un travail sur la *modélisation* des équations, ce qui consiste en la détermination d'une équation *paramétrée* qui couvre tous les cas de figure d'une liste d'équations donnée. Par exemple, pour les deux équations $1{,}5x - 4 = 412x + \frac{2}{3}$ et $x - 4 = 0$, un *modèle* qui convient est $ax + b = cx + d$, alors que $x + a = 0$ ne convient que pour la seconde (*a, b, c, d* nombres réels fixés). Cette modélisation est permise par l'introduction de l'algorithmique et de l'outil informatique, comme Balacheff (1994) l'exprime :

> L'expression computationnelle des objets d'enseignement pour leur inscription dans un dispositif informatique dédié à l'apprentissage n'est pas le résultat d'un simple processus de traduction d'un système de représentation vers un autre, mais celui d'un véritable processus de modélisation et donc de théorisation des objets d'enseignement et de leurs conditions d'existence. (p.10)

Balacheff précise que l'introduction de l'outil informatique va remettre en question l'écologie des savoirs enseignés, dans le sens où elle conduit à l'explicitation de contenus d'enseignement jusque-là non-dits, voire à la création de nouveaux objets d'enseignements (ibid.). C'est bien ce qui se produit dans le cadre de notre expérimentation où le détour par l'algorithmique permet de considérer les équations comme *objet*[8] de l'algèbre au sens de Douady (1986) sur lesquels on amène les élèves à s'interroger.

L'objectif annoncé aux élèves est la création de programmes permettant de résoudre « automatiquement » les équations de la liste ci-dessous (cf. figure 3) :

---

[7] Référence donnée par Modeste (2012) : Hart E. W. (1998) Algorithmic Problem Solving in Discrete Mathematics. In Morrow L. J. & Kenney M. J. (Eds.) *The teaching and learning of Algorithm in school mathematics, 1998 NCTM Yearbook* (pp. 251-267). Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

[8] Citons Douady (1986) afin d'expliciter les concepts d'objet et d'outil : « […] un concept est ***outil*** lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème. Par ***objet***, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir savant à un moment donné, reconnu socialement. »

1. Réaliser un algorithme sur le logiciel Algobox permettant de résoudre les trois premières équations ci-dessous, **sans les transformer au préalable**.

2. Signaler par une * les équations similaires. Faire fonctionner l'algorithme pour ces équations.

3. Comment peut-on résoudre les équations restantes avec un autre algorithme ? Le construire et résoudre les autres équations à l'aide de ce nouvel algorithme.

*Équation 1 : $x + 3 = 0$

*Équation 2 : $2x - 3 = 4$

*Équation 3 : $3 - 2x = -2$

Équation 4 : $2 + x = 5x$

Équation 5 : $2x + 3 = 3x + 1$

Équation 6 : $8 - x = \sqrt{2}$

Équation 7 : $\frac{7}{2}x + 3 = \frac{2}{3}$

Équation 8 : $\frac{7}{2}x + \frac{2}{5} = \frac{8}{3} + \frac{1}{2}x$

Équation 9 : $3 = 2x + 1$

Équation 10 : $3x + 2 = 5 + 3x$

Équation 11 : $1{,}8x - 3 = 2{,}5x + 7{,}4$

Figure 3 *- Fiche élève de la situation expérimentée*

1. Contexte de l'expérimentation menée

Au niveau des programmes institutionnels français, les différentes capacités requises pour résoudre algébriquement les équations présentées en figure 3 se situent en classe de quatrième du collège (secondaire 1, 3e année, 13–14 ans). Le programme de ce niveau de classe stipule de « mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue » ainsi que de « réduire une expression littérale à une variable, du type 3x – (4x – 2) » (MEN 2008). Pour la classe de troisième du collège (secondaire 1, 4e année, 14–15 ans), il est précisé de « *compléter les bases du calcul littéral et d'en conforter le sens, notamment par le recours à des équations ou des inéquations du premier degré pour résoudre des problèmes* » (Ibid.). Pour la classe de seconde du lycée (secondaire 2, 1ère année, 15–16 ans), le programme enjoint de savoir « *résoudre une équation se ramenant au premier degré* » (MEN 2009).

Ainsi le public ciblé pour l'expérimentation menée, constitué d'élèves de classes de seconde, a-t-il déjà reçu un enseignement concernant la résolution algébrique de ce type d'équations. En revanche, le travail de modélisation – explicité précédemment – pour obtenir la forme générique de ces équations, ne fait pas partie expressément des programmes institutionnels français, et les élèves testés ne l'ont pas rencontré au cours de leur scolarité. Il s'agit de retravailler des connaissances déjà rencontrées au collège, mais en alliant *ancien et nouveau,* en proposant ce travail dans le cadre de l'algorithmique. Les élèves sont amenés à manipuler les inconnues, les paramètres et les techniques de résolution des équations du premier degré. Si le but pour l'élève est la réalisation d'un programme qui « tourne » sur une machine, l'objectif d'enseignement est une reprise du concept d'équation et des objets qui gravitent autour de ce concept.

Pour situer plus globalement la situation proposée aux élèves dont la fiche de travail est présentée en figure 3, décrivons brièvement la séquence dans laquelle elle s'inscrit. Celle-ci composée de trois situations[9] déclinées comme suit :

[9] Les situations n°1 et n°3 ne sont pas explicitées davantage dans ce document. Elles sont données ici afin de situer l'expérimentation menée. La situation n°1 a fait l'objet d'un travail de groupes de 4 à 5 élèves qui se sont accordés sur un classement possible des équations données, travail ensuite restitué au groupe classe par un rapporteur puis discuté par l'ensemble de la classe. La situation n°3 a été menée en salle informatique, avec la

- la situation n°1 permet un travail sur la *catégorisation* d'équations de degré 1 et 2, ce qui consiste en un classement par les élèves d'une vingtaine d'équations polynomiales de degré 1 ou 2, selon des critères à déterminer. Le choix de ces équations permet d'identifier les conceptions des élèves relatives à la notion d'équation et de renforcer, ou le cas échéant de faire émerger la connaissance que la forme et la nature d'une équation influent sur sa technique de résolution ;

- les situations n°2 et n°3 sont construites de façon similaire et offrent chacune deux types de tâches : le premier sur la *modélisation* des équations, ce qui consiste en la détermination d'une équation *paramétrée* qui couvre tous les cas de figure d'une liste d'équations donnée ; le second sur la détermination des techniques de résolution de types d'équations reconnues, par le biais de l'algorithmique et de la programmation. La différence entre les deux situations est le degré des équations considérées : pour la situation n°2, les équations sont polynomiales de degré 1 alors que pour la situation n°3, elles sont de degré 2.

C'est la situation n°2 qui est développée dans cet article. Elle a été conduite en février 2011 dans trois classes de seconde d'un même lycée. Les trois professeurs expérimentateurs ont, au moment de l'expérimentation, déjà initié leurs élèves à la structure de base d'un algorithme et à une prise en main du logiciel Algobox, débutant ainsi l'*instrumentation*, au sens de Balacheff (1994), de ce logiciel. Le travail se déroule en binômes, au cours d'une séance d'une heure, les élèves disposant d'un poste informatique pour deux et d'une liste d'équations à résoudre, résolution à effectuer en élaborant un ou des algorithmes qui sont ensuite programmés.

2. *Analyse a priori*

Une analyse a priori de cette situation permet de montrer la double transposition nécessaire pour passer de la résolution mathématique à la conception du programme. Si nous contextualisons les trois étapes de la figure 2 à la situation présentée, nous obtenons le schéma suivant pour la résolution de l'équation $ax + b = cx + d$ $(a \neq c)$:

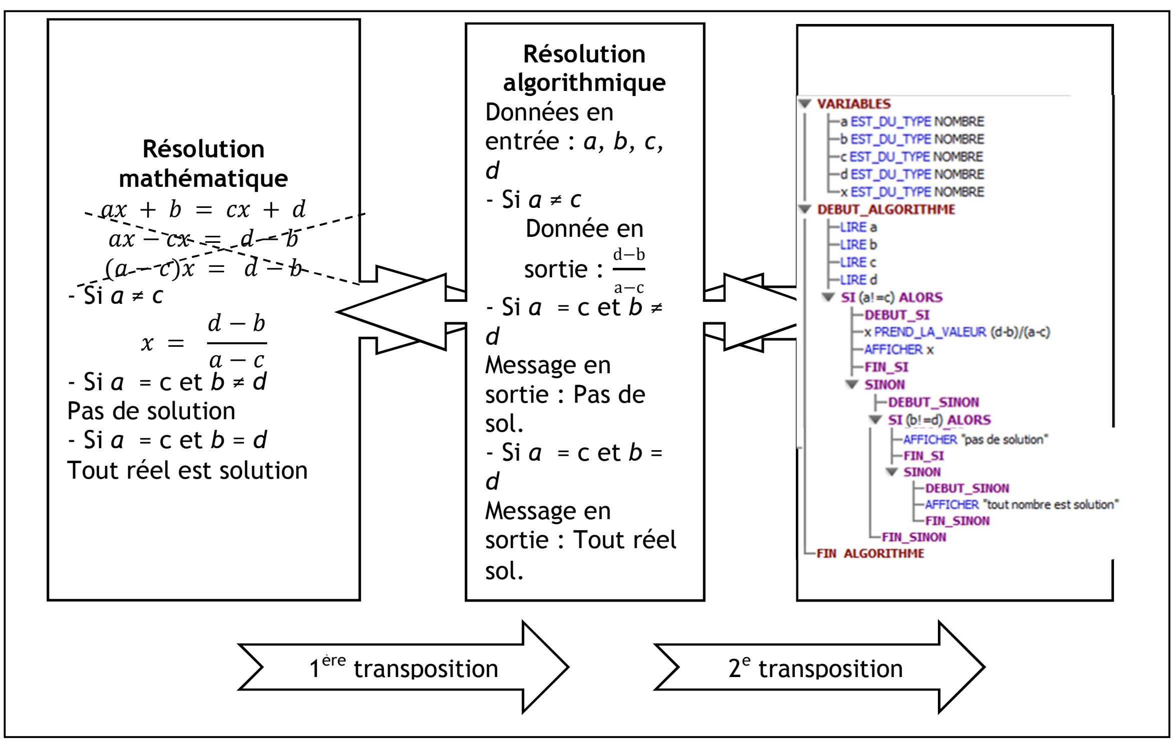


Figure 4 *- Double transposition de la résolution d'une équation du 1[er] degré en vue de sa programmation*

Cette double transposition a les caractéristiques suivantes :

- la *première transposition* nécessaire à la conception d'un algorithme à partir de la résolution « mathématique » de l'équation du premier degré implique la disparition d'étapes intermédiaires de la résolution en environnement papier-crayon (indiquées en pointillés sur la figure 4). Il existe ici une *pseudo-transparence* (Artigue 1997) des environnements papier-crayon et algorithmique et une *non-congruence* de ces deux environnements, au sens de Duval (1995). Il y a un réel travail de transposition à effectuer pour passer du résultat mathématique : « L'équation $ax + b = cx + d$ admet pour solution $\frac{d-b}{a-c}$, si $a \neq c$ » à la formulation algorithmique associée. D'autre part, la condition « si $a \neq c$ » arrive en fin de la résolution « à la main », sous forme d'une discussion selon la nullité ou non de $a - c$, alors qu'elle est nécessaire tout au début de l'algorithme. Il y a toute une *reconstruction* nécessaire à envisager pour concevoir l'algorithme à partir de la résolution de l'équation, une autre pensée dans laquelle il faut entrer, une *pensée algorithmique*.

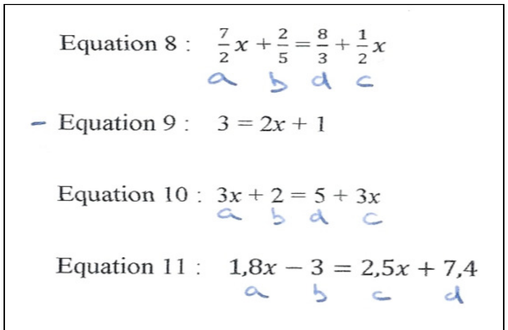
- la *seconde transposition* pour la conception du programme informatique à partir d'un algorithme nécessite non seulement la compréhension d'un nouveau langage, mais également une adaptation de l'algorithme aux contraintes du logiciel utilisé. Par exemple, le logiciel Algobox ne permet pas l'affichage direct d'une expression à calculer. Le logiciel n'accepte pas l'instruction « *afficher (d – b)/(a – c)* », ce qui oblige à passer par une variable intermédiaire. Ceci induit ici encore une non-congruence entre l'algorithme conçu et le programme informatique.

3. *Analyse a posteriori*

Bilan des résultats des élèves

Outre la mise en place elle-même de cette situation conçue pour permettre la prise en compte de l'aspect *objet* des équations au sens de Douady (1986), nous avons relevé des indicateurs montrant l'émergence de cette prise en compte par les élèves et leur entrée dans une *pensée algébrique*. Nous partageons la conception d'une pensée algébrique au sens de Radford (2006 et 2008), non nécessairement liée à l'utilisation de symbolismes algébriques et de règles formelles, mais caractérisée par deux grands principes : la possibilité de nommer des quantités indéterminées ou inconnues (dans des registres variés comme la langue, des schémas ou du symbolisme divers) et de raisonner sur ces quantités comme si elles étaient connues. Les indicateurs renvoient à des aspects différents des pensées algorithmique et algébrique comme le montrent les exemples suivants :

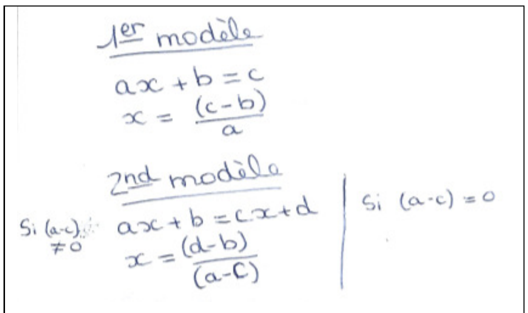
- l'utilisation en actes de *paramètres* nécessaires pour écrire sous une appellation unique différentes équations données dans le cadre d'une démarche algorithmique avec les bons choix des variables informatiques ; ce qui montre qu'une structure générale algébrique est bien dégagée par l'élève (cf. figure 5).



Production de l'élève Pierre

Figure 5 *- Élève considérant des équations du premier degré sous une forme générique*

- l'utilisation du terme *modèle* d'une équation lors de la recherche d'une forme générique d'équation correspondant à une liste donnée, montrant ainsi que l'élève est entré dans une posture spécifique d'une pensée algorithmique où il s'agit de dégager des procédures générales adaptées à des données (cf. figure 6).



Production de l'élève Victorien

Figure 6 *- Production d'élève considérant la modélisation des équations*

C'est clairement le passage par l'algorithmique qui provoque l'évolution du rapport aux objets de l'algèbre, ce mode de pensée invitant les élèves à faire un pas de côté par rapport à leur considération habituelle de ces équations et des techniques qu'ils ont automatisées. Ces exemples montrent que le travail engagé va bien au-delà de la simple résolution d'équations du premier degré : les objets de l'algèbre sont réinterrogés, revisités, allant jusqu'à l'étude *de nouveaux objets* comme souligné par Balacheff, et en particulier l'étude du concept de *paramètre*. Chevallard (1989) précisait déjà l'intérêt didactique de l'introduction du concept de paramètre dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire, en nommant ce concept *la force de l'algèbre*, et en affirmant que s'interroger sur les paramètres d'un système est une façon d'entrer dans la *modélisation algébrique*. Le détour par l'algorithmique permet d'accéder à ce concept de paramètre, en en réalisant une certaine *matérialisation,* au sein d'un programme informatique.

En effet, les élèves se sont questionnés sur la façon de communiquer les équations du type $ax + b = c$ à l'ordinateur. La différentiation du rôle des lettres permet de relier les notions de paramètre et d'inconnue à la structure de l'algorithme à concevoir : les paramètres sont des données d'entrée (les *connues* de Descartes) alors que l'inconnue est une donnée de sortie de l'algorithme. La structure de l'équation aide à comprendre la structure de l'algorithme, et réciproquement. L'exemple de l'élève Aliaume est significatif de ce changement de ces nouvelles connaissances (cf. figure 7).

```
VARIABLES
  Xfacteur EST_DU_TYPE NOMBRE
  egal EST_DU_TYPE NOMBRE
  Sumx EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE Xfacteur
  LIRE Sumx
  LIRE egal
  egal PREND_LA_VALEUR (egal-Sumx)/Xfacteur
  AFFICHER egal
FIN_ALGORITHME
```

Production de l’élève Aliaume

Figure 7 *- Programme de résolution de l’équation ax + b = c*

Pour déterminer une forme générique pour une liste d’équations de la forme $ax + b = c$, l’élève Aliaume utilise des noms pour les paramètres, évocateurs de leur statut. Il nomme l’équation :

(Xfacteur)x + (Sumx) = (egal).

Le coefficient de l’inconnue est nommé « *Xfacteur* », pour rappeler le rôle que joue ce paramètre que l’on multiplie par x. Le second terme du membre de gauche s’appelle « *Sumx* », ce qui lui confère le statut d’un nombre que l’on ajoute au terme en x. Enfin le paramètre de droite est appelé « *egal* », évoquant l’annonce du résultat d’une opération. Ces notations sont plus qu’un simple choix de vocabulaire et dénotent bien le sens attribué à ces objets. Elles permettent à l’élève de retrouver facilement de quel paramètre il s’agit, lorsqu’il manipule une équation avec des coefficients déterminés. C’est bien ici encore le détour par une *pensée algorithmique* qui autorise cette démarche.

Les limites de l’expérimentation

Néanmoins, la cohérence globale de la situation a été perdue de vue par certains élèves qui ne possédaient pas les premiers concepts de base de l’algorithmique, ni n’étaient suffisamment instrumentés pour l’utilisation du logiciel Algobox. Les observations menées dans les différentes classes ont montré que le nombre de manipulations liées à des questions de communication avec l’environnement informatique vient parasiter les rétroactions qui auraient été intéressantes d’un point de vue mathématique. Laborde (2003) indique que l’acquisition d’une genèse instrumentale est lente et complexe et que les premiers schèmes mis en place ne sont pas les plus efficaces. De plus, les schèmes impliquent une certaine connaissance mathématique :

> The use of technology in mathematics by students was analyzed from an instrumental perspective […]. The mentioned research papers provide examples that show that the instrumental genesis takes place over a long period of time and that the first schemes constructed by the learner are not the most effective. What also appears is that the schemes involve some mathematical knowledge. A double question arises from these observations: What are the relevant tasks allowing both the development of instrumentation schemes and of mathematical knowledge? [10]

L’équilibre entre les deux pôles, développer les schèmes et asseoir des connaissances mathématiques, est délicat à trouver, ce qu’a confirmé l’expérimentation conduite.

[10] L'utilisation de la technologie en mathématiques par les élèves a été analysée dans une perspective instrumentale […]. Les travaux de recherche mentionnés sont des exemples qui montrent que la genèse instrumentale se déroule sur une longue période de temps et que les premiers schèmes construits par l'apprenant ne sont pas les plus efficaces. Ce qui apparaît aussi, c'est que les schèmes impliquent une certaine connaissance mathématique. Une double question se pose à partir de ces observations : Quelles sont les tâches pertinentes permettant à la fois le développement de systèmes d'instrumentation et de la connaissance ?

III. CONCLUSION

En conclusion, nous revenons d'une part, sur la question de la pensée algorithmique pour matérialiser des objets de l'algèbre et d'autre part sur celle de l'existence d'une pensée algorithmique, qui s'adjoint à la pensée mathématique.

Pour le premier point, le détour par l'algorithmique, évoqué plus haut lors de la mise en œuvre de la situation exposée, est à rapprocher d'un *micro-monde* dont Capponi et Laborde (1995) donnent la définition suivante :

> Un micro-monde est une création d'un monde de réalités artificielles fournissant un modèle (au sens des logiciens) d'une théorie. Ce monde comporte des objets sur lesquels on peut agir grâce à des actions, on peut aussi créer de nouveaux objets. Une fois créés, les objets ont un comportement régulé par la théorie sous-jacente au modèle. Même si l'utilisateur du micro-monde peut agir sur ces objets, ces derniers présentent donc une certaine autonomie, de la même manière qu'on ne peut faire n'importe quoi avec un objet matériel. (p. 265).

Capponi et Laborde utilisent cette définition du micro-monde pour caractériser le logiciel de géométrie dynamique Cabri-géomètre. Nous effectuons ici le parallèle avec le logiciel de programmation Algobox qui se comporte comme tel, puisqu'il est possible de créer des représentations d'un objet théorique et d'agir sur ses représentations. La comparaison ne peut cependant être totale, la conception de Cabri-géomètre est *dédiée* à la manipulation d'objets géométriques et à l'exploration de leurs propriétés, alors qu'un logiciel quelconque de programmation n'est pas spécialement dédié au domaine algébrique. Néanmoins, ce parallèle permet de comprendre comment s'est créée une nouvelle représentation des objets de l'algèbre, dans le cadre de l'algorithmique et de la programmation. Laborde (2003) utilise le terme de *médiation* de l'outil informatique pour définir le rapport dialectique qui existe entre l'action et la signification mathématique. L'accès aux objets mathématiques abstraits, non *ostensifs*[11], se fait par l'intermédiaire de registres sémiotiques (Duval 1993) où l'utilisation de signes en donne des *ostensifs* (Chevallard & Bosch 1999). Ainsi l'algorithmique et la programmation forment un micro-monde pour le domaine algébrique, où il est possible d'explorer et d'expérimenter sur des objets de l'algèbre, comme s'ils étaient des objets *matériels*. Ceci renforce une entrée dans la pensée algébrique, comme montré dans les résultats précédents.

Pour le second point de cette conclusion, la situation exposée propose un type de problème mathématique dont est recherchée une résolution algorithmique pour toutes les instances du problème posé. La résolution algorithmique et son écriture dans un environnement informatique nécessitent une *transposition*. Nous pensons que la complexité de cette transposition vient non seulement de la *non-congruence* entre les environnements papier-crayon et informatisé, comme nos analyses le montrent, mais également d'une *pensée algorithmique* qui n'est pas contenue entièrement dans la *pensée mathématique*.

Cette idée est développée par Modeste (2012) qui précise qu'une *activité mathématique est centrée sur la résolution de problèmes* et que lorsque la pensée algorithmique est considérée *en tant que pensée mathématique parmi d'autres,* elle est alors *une approche particulière de certains problèmes mathématiques* (p. 47). Cependant, Modeste montre, en s'appuyant sur les travaux de Knuth[12], que l'essor de la science informatique a fait évoluer la pensée

[11] D'après Chevallard et Bosch (1999), les objets *ostensifs* sont ceux qui possèdent une forme matérielle (comme un crayon) ou accessible aux sens humains comme les gestes, les mots, les schémas, les écritures, etc. ; les objets *non ostensifs* sont les idées, les notions, les concepts, reconnus par une institution, *qui ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours).*

[12] Référence citée par Modeste :

algorithmique, et qu'il faut tenir compte de cette évolution pour reconsidérer cette forme de pensée. Pour ce chercheur, la différence essentielle réside dans le fait que la pensée algorithmique, vue comme pensée mathématique, *ne questionne pas l'efficacité des algorithmes qu'elle produit,* et *qu'elle n'utilise pas la notion de variable informatique*, ce qui renvoie à la notion de *complexité* d'un algorithme et à l'opération d'*affectation* (cf. §.4.3). Nous rejoignons Modeste quant à la nécessité de considérer une pensée algorithmique qui ne soit pas complètement incluse dans la pensée mathématique.

> Il nous semble donc que, pour aborder la pensée algorithmique, il soit indispensable d'appréhender simultanément les deux points de vue, intra-mathématique mais aussi extra-mathématique. (Modeste, 2012, p.53)

Il nous apparaît en effet, après avoir mené cette expérimentation, qu'ajouter un point de vue informatique (donc extra-mathématique) permet de prendre en considération une dimension qui n'existe pas en environnement mathématique usuel en papier-crayon, et qui induit un mode de pensée différent. L'existence de cette pensée spécifique nous semble être un élément didactique important qui permet de mieux comprendre la transposition qui se produit lors de la recherche d'algorithmes pour résoudre un problème.

REFERENCES

Artigue M. (1997) Le logiciel Dérive comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathetatics* 33(2), 133-169.

Artigue M. (2005) L'intelligence du calcul. Dans *Actes de l'Université d'été de Saint-Flour, France : le calcul sous toutes ses formes.*

Artigue M., Haspekian M. (2007) L'intégration de technologies professionnelles à l'enseignement dans une perspective instrumentale : le cas des tableurs. In Baron, Guin, Trouche (Eds.) *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage (*pp. 37-63). Paris : Hermès.

Balacheff N. (1994) Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques, 14*(1), 9-42.

Bosch M., Chevallard, Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19(1), 77-123. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf

Briant N. (2013) *Étude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.* (Thèse de doctorat, université Montpellier 2).

Capponi B., Laborde C. (1995) *Cabri-classe, apprendre la géométrie avec un logiciel.* Archimède : Grenoble.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* n°19, 43-75.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives. 5*. 37-65. IREM de Strasbourg

---

Knuth, D. E. (1985) Algorithmic thinking and mathematical thinking. The American Mathematical Monthly, 92 (1), 170-181. (Rééd. avec corrections (1996) Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science. In Selected Papers on Computer Science, 87-114)

Duval R. (1995) S*émiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.* Berne : Peter Lang.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Haspekian M. (2005) *Intégration d'outils informatiques dans l'enseignement des mathématiques. Étude du cas des tableurs.* (Thèse de doctorat, université Paris 7).

Laborde C. (2003) *The design of curriculum with technology : Lessons from projects based on dynamic geometry environments.* Reaction to A. Cuoco & P. Goldenberg's presentation "CAS and curriculum : Real improvement or déjà vu all over again ?" CAME Symposium, Reims.

MEN (2008) Ministère de l'éducation nationale. Programmes du collège. Programmes de l'enseignement de mathématiques. BO spécial n° 6 du 28 août 2008. Paris.

MEN (2009) Ministère de l'Éducation nationale. Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. Bulletin officiel n° 30 du 23 juillet 2009.

Modeste S. (2012) *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* (Thèse de doctorat, Université de Grenoble).

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Radford L. (2006) Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter (*pp. 2-21). Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford L. (2008) Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In *Different Contexts*. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. DOI 10.1007/s11858-007-0061-0.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGEBRIQUE AVANT LA LETTRE APPORT DES PROBLÈMES DE GENERALISATION ET D'UNE ANALYSE PRAXÉOLOGIQUE

Alain BRONNER [*]

Résumé – Nous cherchons les conditions d'une entrée de « l'algèbre avant la lettre » par les problèmes de généralisations. Dans cette perspective nous étudions les potentialités de certaines classes de situations. Comment peuvent-elles favoriser une pensée algébrique dans les classes du primaire et du début du secondaire avant toute introduction du symbolisme algébrique ? Nous proposons un travail exploratoire relativement à la question précédente. Ce travail a consisté à analyser avec diverses approches une situation de généralisation dans une classe de 6^{e} du Québec[1]. Dans cet article nous montrons l'intérêt d'introduire une analyse praxéologique pour ce type de situations.

Mots-clefs : pensée, algébrique, numérique, généralisation, praxéologie

Abstract – In this article we show the advantage of introducing a praxeological analysis to these situations by analyzing a situation of generalization in a 6th grade class in Quebec. We search the conditions for introducing "algebra prior to letter" with generalized problems. In this perspective we study the potential of certain categories of situations. How can they promote algebraic thinking in elementary and junior high school classes before the introduction of algebraic symbolism? We offer exploratory work in relation to the previous question. In this article we show the advantage of introducing a praxeological analysis for this type of situations.

Keywords: thinking, algebraic, numeric, generalization, praxeology

I. INTRODUCTION

La recherche présentée ici s'inscrit dans un projet visant le développement d'un observatoire international de la pensée algébrique (OIPA) dans la continuité de plusieurs actions conjointes, initialisées lors de rencontres des universités de Montpellier et de Sherbrooke en 2008 et 2010. Les missions principales sont de constituer un lieu virtuel international d'archivage, d'échange et de diffusion des connaissances, et de documenter les programmes de formation initiale et continue des enseignants, relativement à la pensée algébrique à l'école primaire et secondaire.

L'entrée dans l'algèbre se résume souvent à un « coup de force » du professeur à partir de problèmes dont il suggèrera aux élèves à un moment plus ou moins opportun qu'il est « utile » voire « nécessaire » d'utiliser une « lettre » pour pouvoir traiter ou démontrer une

[*] Université de Montpellier – France – alain.bronner@fde.univ-montp2.fr

[1] Élèves de 12 ans.

Bronner A., (2015) Développement de la pensée algébrique avant la lettre - Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 247-264.

propriété numérique dans toute sa généralité ou pour chercher un nombre inconnu satisfaisant un système de contraintes numériques. Ce coup de force où la formule ou l'équation avec une lettre « x » jaillissent alors dans la classe pourrait nous faire oublier la longue marche vers le symbolisme algébrique introduit, notamment par Viète, puis prolongé par Descartes, pour développer sa nouvelle algèbre en vue de résoudre des problèmes de la géométrie.

Mais c'est aussi oublier que la pensée algébrique peut se voir à l'œuvre chez de nombreux mathématiciens avant eux et avant la disponibilité de ces outils extra-numériques. Sans vouloir la rejouer, cette scène historique originale nous amène à l'hypothèse que nous pouvons faire entrer les élèves dans une nouvelle pensée algébrique avant « la lettre » les préparant ainsi au calcul littéral et à l'algèbre outil dès la fin de l'école élémentaire et au début du collège en France. Ce travail s'inscrit en fait dans une articulation *numérique – algébrique* où le passage du *numérique* vers *l'algébrique* est posé depuis fort longtemps mais reste encore une question d'enseignement et de recherche (Booth 1984 ; Vergnaud 1987 ; Chevallard 1989 et 1990; Kieran 1990). De nombreux courants institutionnels ont émergé comme celui *d'Early Algebra* qui fut impulsé au travers des « Principles and Standards for School Mathematics » du NCTM (2000). Cette question a été étudiée au Québec (Marchand & Bednarz 1999, Squalli, Mary & Marchand 2011, Squalli, Suurtamm & Freiman 2012). En France, plusieurs travaux de recherche soulignent aussi les difficultés de la construction de la pensée algébrique (rapport sur le calcul de la commission Kahane 2001; numéro spécial de la revue internationale Recherche en Didactique des Mathématiques 2012).

Dans cette perspective, de nombreux chercheurs et enseignants se sont tournés vers les problèmes dits de généralisation. Squalli (2000) souligne que la généralisation est un processus essentiel dans l'activité mathématique et en particulier en algèbre. Il va même plus loin en avançant que cette activité est caractéristique d'une pensée algébrique. Ces recherches conduisent à des expérimentations de situations de généralisation s'appuyant sur divers supports et problèmes. Au Québec, depuis plusieurs années les programmes vont même dans ce sens comme l'indiquent Marchand et Bednarz (1999, p. 31) : « Ce programme, tout au moins dans ses intentions, cherche à faire en sorte que les élèves voient la pertinence de l'algèbre, accordent un sens au symbolisme algébrique, avant de s'engager plus à fond dans sa manipulation. » Ce programme s'inscrirait ainsi dans la perspective de faire apparaître le symbolisme comme un moyen d'exprimer la généralité. De plus, cette perspective serait développée dans des situations numériques pour généraliser des propriétés et des règles (ibid).

En France aussi des chercheurs ont souligné l'intérêt pour des problèmes de généralisation comme Grugeon (1995) dans sa caractérisation de la *compétence algébrique* :

> La compétence algébrique s'évalue aussi à travers la capacité à exprimer des relations numériques générales. En effet, l'algèbre est un outil essentiel pour rendre l'accès possible aux propriétés numériques et pour les généraliser …De façon générale, le langage algébrique permet de formuler des problèmes dans leur généralité puis de les résoudre de façon systématique. L'algèbre peut jouer un rôle essentiel pour engager les élèves dans leur construction de la rationalité mathématique.

Notre travail s'inscrit dans ces perspectives de recherche et cherche à étudier les potentialités de certaines classes de problèmes et situations de généralisation. Nous cherchons notamment à trouver les conditions d'une entrée de « l'algèbre avant la lettre » par les problèmes de généralisations. Quels sont les contextes, supports, cadres, formulations de ces problèmes à privilégier ? Comment peuvent-ils favoriser une pensée algébrique et l'émergence de généralisation dans les classes du primaire et du début du secondaire avant toute introduction du symbolisme algébrique ? Quels rôles jouent les manipulations, actions, formulations, argumentations ? Quelles validations peuvent être mises en place ? Ces situations permettraient-elles d'introduire le formalisme à un moment adéquat et de rentrer dans une pensée analytique pour manipuler ces formalismes ? Plus généralement quelles sont les conditions sur l'élaboration et la gestion des situations didactiques s'appuyant sur ces types de problèmes ?

Nous proposons un travail exploratoire relativement aux questions précédentes dans le cadre de nos collaborations au sein de l'OIPA avec des chercheurs du Québec. Ce travail a consisté à analyser avec diverses approches une situation de généralisation dans une classe de 6e du Québec[2]. Dans cet article nous présentons notre méthodologie, nos analyses et résultats pour cette situation en montrant l'intérêt d'introduire une analyse praxéologique pour ce type de situations.

II. METHODOLOGIE

Nous avons développé depuis une vingtaine d'année une méthodologie d'analyse des pratiques enseignantes et des situations d'enseignement dans le cadre d'un observatoire du numérique que nous étendons ici à l'algébrique dans le cadre de l'OIPA.

Notre cadre théorique est constitué de la Théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1992, 1999) et de la Théorie des situations didactiques (Brousseau 1986) pour l'étude générale des situations et de la transposition didactique des objets mathématiques. La prise en compte des processus langagiers et sémiotiques étant essentielle dans notre approche, elle est complétée par les notions de dénotation empruntée à Frege, de la théorie des registres de représentations sémiotiques (Duval 1993).

Notre méthodologie s'inscrit dans la didactique française de confrontation entre une *analyse a priori* et une *analyse a posteriori*, et est articulée en cinq grandes étapes non indépendantes (Bronner 2006) : l'analyse a priori, la trame de la séance observée, la description et l'analyse des organisations mathématiques selon l'approche anthropologique, l'analyse de l'organisation didactique selon la méthodologie dite des quatre composantes, et le repérage de gestes d'étude d'élèves et de gestes professionnels de l'enseignant, des évènements et des ajustements. Nous présenterons la méthodologie au fur et à mesure de chaque étape avec les analyses correspondantes, mais dans cet article nous nous limiterons aux trois premières étapes.

III. L'ANALYSE A PRIORI

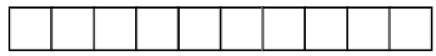
Le professeur a choisi de commencer sa séquence par une première situation basée sur des chaines carrées comme ci-dessous en demandant d'examiner tout d'abord les premiers cas pour 1, 2, 3, 5 et pour 9 mailles. Puis, il propose aux élèves d'étudier le cas de chaines triangulaires. Ensuite les élèves inventeront des formes, en fait pentagonales et hexagonales. Enfin le professeur demande aux élèves de généraliser le travail à n'importe quelle forme de mailles. Dans la fin de la séquence le professeur lance un exercice qu'il appelle « défi » et qui consiste, dans le cas de la maille carrée, à trouver une façon de calculer le nombre de mailles qu'aurait une chaîne formée de 121 tiges.

[2] Élèves de 12 ans.

Les chaines du joaillier

Mise en situation

Laurent, un bijoutier, fabrique des chaines en or à mailles de forme carrée comme celle-ci :



Il fait des chaines de différentes longueurs pour diverses utilisations (au cou, au pied, comme boucles d'oreilles).

L'or coûte cher. Quand il fait une commande, il compte les tiges une par une pour être sûr de ne pas en commander de trop ni en oublier. Mais c'est long. Il voudrait pouvoir trouver le nombre de tiges dont il a besoin sans être obligé de compter les tiges une par une. Vous devez envoyer un message au bijoutier dans lequel vous allez lui expliquer comment il pourrait faire pour trouver combien de tiges il a besoin selon le nombre de mailles.

Nous utilisons ici la modélisation de l'activité mathématique développée par Chevallard (1999) avec la notion de praxéologie constituée de 4 dimensions articulées (*type de tâches, techniques, technologies, théorie*) pour analyser les démarches possibles.

La situation concerne le type de tâches : « Calculer le nombre de constituants élémentaires (Tiges) d'une chaine à mailles carrées (c) connaissant le nombre de mailles ». Certains élèves peuvent ne pas comprendre qu'il s'agit de déterminer une expression ou une méthode permettant de calculer le nombre de tiges pour n'importe quel nombre de mailles ou être bloqués pour le faire et se limiter à donner des quantités de tiges pour quelques nombres déterminés de mailles, pour les premiers cas 2, 3, 4 ou 5 par exemple.

Les types de tâches appellent des techniques de résolution (des manières de faire pour résoudre les tâches particulières) dont nous dégageons les grandes catégories à ce niveau d'étude.

1. *Les techniques σ_1 basées sur des technologies numériques :*

On peut dégager une première catégorie de techniques σ1 associées à ce type de tâches dans le cas d'un petit nombre déterminé de mailles, dont on peut en donner la mise en œuvre générique suivante, de manière plus ou moins complète et dans un ordre divers :

- Identifier les composants élémentaires : triangle, quadrilatère, pentagone, … ;
- Prendre en compte le caractère régulier en dimension 2 : des polygones réguliers ;
- Voir qu'ils sont superposables ;
- Commencer à en assembler 1, 2, puis 3 ensuite ; …
- S'assurer d'avoir un début, une fin, le nombre de mailles qu'il faut ;
- Dénombrer les tiges : Le dénombrement peut de se faire de manière désorganisée ou en suivant une réorganisation spatiale, et dans ce dernier cas plusieurs procédures sont à envisager.
  - Par exemple, on peut d'abord compter toutes les tiges horizontales (soit deux par deux, soit celles toutes celles du haut puis celles du bas, …), puis les tiges verticales.

- Un élève peut aussi voir la répétition des composants et identifier le nombre de tiges ajoutés par composants (3 dans le cas de mailles carrées) puis multiplier ce nombre par le nombre de mailles en n'oubliant pas d'ajouter 1 pour la première maille.
- Une autre procédure est de compter selon un principe de récurrence : on peut compter tout d'abord les tiges de la première maille (4), puis on compte les tiges de la maille suivante soit en énumérant soit en ajoutant 3 d'un coup (7), et ainsi de suite (10) ...

On voit que même dans le cas d'un dénombrement pour un nombre fini déterminé de mailles de nombreuses techniques peuvent être mobilisées et que certaines procédures peuvent se généraliser.

Dans la suite nous nous intéressons aux raisonnements des élèves ayant compris le type de problèmes et entrant dans la tâche de généralisation : « Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles carrées pour n'importe quelle longueur de la chaine ». Les stratégies des élèves par rapport à la généralisation peuvent se répartir en trois grandes catégories de raisonnements.

2. *Les techniques τ_2 basées sur des technologies de généralisation explicite*

Ces techniques commencent en général par la mise en œuvre de techniques τ_1 en examinant le cas d'un petit nombre de mailles 1, 2, 3 et éventuellement un nombre un peu plus grand. Une première étape consiste ainsi tout d'abord à examiner les premiers cas de nombre de mailles n = 2, 3, 4, … puis à comprendre que la manière de dénombrer peut se généraliser en considérant un nombre de mailles quelconque, même si on ne connaît pas ce nombre de mailles ou si on ne sait pas vraiment exprimer ce nombre indéterminé. Ici la généralisation porte sur une procédure de dénombrement mettant en relation la quantité cherchée avec la variable du problème, autrement-dit le nombre de mailles, en se basant comme dans le cas déterminé sur une réorganisation spatiale.

Par exemple, l'élève se base sur une décomposition du motif en distinguant les tiges horizontales et verticales. Ainsi, quand on a une quantité de mailles on prend 2 fois plus de tiges horizontales et on ajoute encore la même quantité de tiges que de mailles et encore une tige pour terminer le motif avec les tiges verticales. Cela conduit à des expressions conformes à M1 = 2n+(n+1). Mais, un élève de sixième année ne produira certainement pas une telle expression dans le registre (Duval, 1993) du langage algébrique. Par contre diverses expérimentations et travaux dans ce domaine suggèrent d'autres réponses dans un langage mixte qui associe langage mathématique et langage naturel. Les élèves peuvent ainsi produire des réponses comme : pour une quantité de mailles le nombre de tiges est 3 × mailles + 1. On peut s'attendre à une dénomination dans le registre verbal (comme « le nombre de tige est 2 fois le nombre de mailles plus le nombre de mailles plus un ») ou un code mixte verbal-numérique (comme « Nombre de tiges = 2xNombre de mailles + Nombre de mailles + 1 ») ou encore avec des abréviations.

Une autre forme de présentation peut être attendue en exposant une méthode générale sur l'exemple générique au sens de Balacheff (1987). Par exemple, pour 143 mailles, il faut 3 fois 143 tiges et une tige de plus ce qui fait en tout : 430 tiges. Même si l'élève fait montre d'une conception procédurale (Sfard 1991 ; Kieran 1992) dans laquelle l'expression décrit un processus de calcul sur un cas déterminé, il est ici pour nous dans une procédure généralisatrice.

D'autres techniques τ_2 sont à envisager en utilisant des décompositions spatiales différentes pour produire des ostensifs équivalents à M1. Par exemple, l'élève peut remarquer que si on a une quantité de mailles, on prend trois fois plus de tiges et on en ajoute une pour obtenir le dénombrement et proposer ainsi une expression M2 = 3n+1. En synthèse, pour n mailles, plusieurs modélisations sont possibles, produites par un dénombrement conforme à une configuration spatiale :

> M1 = 2n+(n+1) en considérant le nombre de tiges horizontales d'une part et celui des tiges verticales d'autre part ;
> M2 = 3n+1 en considérant le nombre de mailles avec 3 tiges et en ajoutant une tige pour commencer ou terminer la chaîne ;
> M3 = 4n-(n-1) en considérant le nombre de mailles à 4 tiges et en retranchant les tiges mises en double ;
> M4 = 4+3(n-1) en considérant une première maille à 4 tiges et les tiges correspondant aux mailles suivantes à 3 tiges.

Les modélisations précédentes portent en elles-mêmes le principe de certaines procédures possibles par une méthode de dénombrement correspondant à une analyse de configurations spatiales. Ces techniques τ_2 portent en elles-mêmes la validation, autrement dit une validation interne, basée sur l'analyse de la configuration spatiale. Une validation partielle sous forme de vérification avec les premiers cas est possible et peut paraître suffisante aux yeux des élèves.

La théorie algébrique élémentaire permet de démontrer que ces diverses expressions algébriques représentent un même nombre que dénote (Drouhard, 1997) l'expression simplifiée 3n+1.

3. *Les techniques σ_3 basées sur des technologies de généralisation implicite*

Ici c'est la méthode générale pour passer d'une quantité de mailles à la suivante qui est mis en avant. Elle est associée aussi sur le principe de récurrence que nous avons vu avec les techniques numériques. Par exemple, les élèves peuvent faire des dessins pour 1 maille, 2 mailles, jusqu'à 5 ou 6 mailles et compter les tiges sur les dessins. La généralisation pourrait se traduire de cette façon : quand on ajoute une maille, on ajoute une tige en largeur et 2 tiges en longueur, on ajoute donc 3 tiges. L'invariant se focalise sur le passage de la quantité de mailles à celle augmentée de une unité (de mailles). Elle pourrait se traduire par un opérateur du type : Pour trouver le nombre de tiges pour n + 1 mailles, j'ajoute 3 au nombre de tiges pour n mailles. Ici aussi un langage mixte devrait être utilisé dans ce type de procédure. Cette généralisation demande de calculer au fur et à mesure les quantités obtenues à partir du premier cas et se trouve rapidement limitée pour un nombre de mailles assez grand. On notera quand même qu'un invariant est avancée mais n'est pas opératoire. Ici aussi le recours spontané à l'usage d'une lettre parait peu probable, mais cela dépendra de la mémoire didactique de la classe.

4. *Les techniques σ_4 basées sur des technologies de généralisation par investigation et induction*

Les élèves déterminent les quantités de tiges des premiers cas en faisant plusieurs dessins pour 1 maille, 2 mailles, jusqu'à 5 ou 6 mailles ou un dessin qu'ils complètent au fur et à mesure. Ils observent les quantités obtenues et conjecturent une relation générale par induction. Par exemple, ils obtiennent des résultats du type :

Mailles	1	2	3	4	5	6	7	8
Tiges	4	7	10	13	16	19	22	25

L'élève généralise les résultats sur les petits nombres en faisant apparaitre une relation numérique liée au nombre de mailles de départ. Ils peuvent ainsi remarquer la récurrence indiquée précédemment T(x+1) = T(x) + 3 mais cette fois-ci en observant les quantités numériques et en faisant une induction numérique et non sur la configuration spatiale comme dans la catégorie précédente.

Ils peuvent aussi remarquer que les résultats obtenus pour la deuxième ligne sont des multiples de 3 augmentés d'une unité. Cela peut conduire à des expressions conforme à M2 = 3n+1 mais encore une fois cette conjecture est obtenue par observation et induction des expressions numériques. Il sera sûrement plus difficile d'induire des expressions conformes à M1 = 2n+(n+1) ou M3 = 4n-(n-1) ou encore M4 = 4+3(n-1).

5. *Extension du type de problème et analyse des variables didactiques*

Même si on peut aussi penser que l'histoire dans laquelle est inséré le problème peut être un facteur intéressant, son influence est difficile à apprécier et demanderait une étude à elle seule. Nous ne regardons pas des macros variables comme le contexte, ici le choix d'un dénombrement d'objets relativement familiers (les bijoux) présentés sous forme schématiques de dessins. Nous nous intéressons aux variables didactiques principales[3] dans le cadre du contexte choisi.

- La variable « nombre de maille » : L'examen des cas particuliers et le nombre N de mailles à étudier au début peuvent jouer un rôle sur la procédure des élèves. Ainsi on peut distinguer plusieurs domaines relativement à cette variable pour une forme donnée :

- N non fixé : L'élève examine les premiers cas de sa propre initiative et rentre dans les catégories suivantes ou essaie de généraliser directement.
- N petit (< 10 en général) : une procédure de dénombrement systématique peut être envisagée. Ensuite là aussi les différentes catégories peuvent être envisagées.
- N grand (43 ou 44) : ici la procédure précédente doit être abandonnée mais les élèves peuvent peut-être mimer les procédure de dénombrement direct et aller vers les procédures de généralisation explicite.
- N très grand (200, 1000, …). L'élève doit déjà se projeter vers la généralité pour pouvoir répondre à la question et entrer dans l'une des procédures proposées.

- La variable « Forme de la maille » : Comme indiqué plus haut, le problème proposé sera étendu à d'autres formes, une variable didactique importante sera donc la forme F de la maille de la chaine ; triangulaire, carré, pentagonale, … Cette variable conduit évidemment à des expressions différentes en lien avec le nombre de tiges de la maille mais peut jouer un rôle sur le raisonnement même d'analyse et de dénombrement d'une formule générale pour un type donné.

Deux grands types de raisonnements peuvent être anticipés. Les élèves recommencent sur chaque forme la procédure sur les premières formes de manière quasi-indépendante même si

[3] D'autres variables peuvent jouer un rôle comme le type de support de présentation et de manipulation (support évoqué, mobile, dessiné, …) en facilitant ou bloquant certaines procédures. Par exemple, des tiges effectives peuvent être distribuées aux élèves.

on peut penser que l’expérience et la familiarisation avec le type de problèmes conduisent à faire évoluer le raisonnement. Ou alors ils peuvent induire une formule ou une expression en la modifiant en prenant en compte les variations sur la forme. Par exemple, pour le facteur 3 qui apparaît pour la forme triangle les élèves pourraient induire qu’ils doivent maintenant considérer un facteur 5 pour des formes pentagonales. Les élèves pourraient se convaincre en testant avec un cas au sens de l’exemple crucial de Balacheff (1987). Il se pose ainsi un problème de validation à étudier dans les réalisations didactiques.

IV. LA TRAME DE LA SEANCE OBSERVEE

Il s’agit ici d’identifier des traces relativement objectives de ce qui est observé de la séance. La trame correspond à un premier découpage en grandes unités intelligibles de la séance et définies par les fonctions habituellement utilisées en classe (recherche ou mise au travail sur des exercices, mises en commun, bilans, cours, …) et les tâches proposées aux élèves. Elle est construite à partir de toutes les données, notamment pour nous, une vidéo et une narration de la séance (sous forme d’un document écrit). Ainsi dans le tableau 1 chaque phase est indiquée par le repérage des instants relativement aux deux données précédentes (sous la forme Instant de la narration/Instant de la vidéo), sa fonction a priori et les tâches repérées des élèves ainsi que la modalité de travail (individuel, en groupe ou collective). Les deux données utilisées n’ont pas été synchronisées, d’autant que nous ne disposons pas de la vidéo complète sur toute la séance. Nous utilisons comme repérage temporel principal les instants de la narration qui semblent plus conforme au déroulement effectif de la séance. Ainsi la séance comporte deux parties avant et après la récréation, et le minutage de la séance est réinitialisé à partir de la phase 8 correspondant à la reprise après la récréation.

Phases	**Instants Narration/ instants Vidéo**	**(Fonctions de la phase et) tâches du professeur et des élèves**	**Modalités de travail**
1	0 à 16min11 / 0 à 2min45 (puis coupure de la vidéo)	Présentation de la situation générale, de la chaine à mailles carrées et calcul du nombre de tiges pour 1, 2, 3, 5 / Calcul pour 9 mailles	Collective / Groupe pour le cas de 9 mailles (2 min environ)
2	16min11 à 40min15/ (pas de vidéo)	Calcul du nombre de tiges pour 45, puis 44, mailles et explicitation du programme de calcul général (cas des chaines à mailles carrées)	Groupe (appelé équipe au Québec)
3	40min15 à 49min43 / 2min45 à 10min	Retour sur la chaîne à mailles carrées : Bilan et débat	Collective
4	49min43 à 57min40 / (pas de vidéo)	Présentation de la chaine à mailles triangulaires, calcul du nombre de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Collective / Groupe
5	57min40 à 1h04min42 /10min à 14min30	Retour sur la chaîne à mailles triangulaires : Bilan des réponses du problème	Collective
6	1h04min42 à	Présentation de la chaine à mailles	Collective /

	1h08min59 / (pas de vidéo)	hexagonales, calcul du nombre de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Groupe
7	1h08min59 à 1h14min05 / 14min40 à 16min40	Retour sur la chaine à mailles hexagonales : Bilan du travail des élèves	Collective
	Récréation		
8	4 min à 11min 23 / (pas de vidéo)	Créer sa propre chaine à mailles différentes, calcul du Nb de tiges pour 44 mailles et explicitation du programme de calcul général	Collective / Groupe
9	11min 23 à 17min04 /16min40 à 19min55	Retour sur les propres chaînes octogonale et pentagonale : Bilan du travail des élèves	Collective
10	17min04 à 25min30 /19min55 à 21 min04	Rechercher une expression commune dans tous les cas de formes de chaîne	Collective / Groupe
11	25min30 à 31min36 / 21min04 à 26min07	Retour sur la généralisation : Bilan	Collective
12	31min36 à 43min15 / (pas de vidéo)	Phase appelée « Défi » : Dans le cas de la maille carrée, trouver une façon de calculer le nombre de mailles qu'aurait une chaîne formée de 121 tiges.	Collective / Groupe
13	43min15 à 49 min / (pas de vidéo)	Retour sur le Défi : Bilan et conclusion	Collective

Tableau 1 *– Trame de la séquence « Bijoutier »*

Nous nous intéressons maintenant aux mathématiques développées dans cette séance à travers la deuxième étape de notre méthodologie.

V. LA DESCRIPTION ET L'ANALYSE DES ORGANISATIONS MATHEMATIQUES SELON L'APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

Nous utilisons ici encore la modélisation de l'activité mathématique par la notion de praxéologie constituée de 4 dimensions articulées (*type de tâches, techniques, technologies, théorie*) et la grille d'organisations mathématiques que nous avons mise en évidence dans l'analyse a priori (partie III).

1. Les types de tâches

Nous allons montrer que plusieurs types de tâches sont enchâssés dans cette séance et que ce choix est important pour le développement des processus de généralisation.

Les élèves sont confrontés dans les 3 premières phases à un premier *type de tâches ponctuel*, puis à une première tâche de généralisation. Ainsi ils doivent tout d'abord dans les phases 1 et 2 travailler sur le type de tâches déjà repéré :

Tcn : Calculer le nombre de constituants élémentaires (Tiges) d'une chaine à mailles carrées (c) connaissant le nombre de mailles.

Pour ce type, le professeur propose aux élèves différents spécimens en jouant sur la variable N du nombre de mailles de la chaine :

- Calcul pour 1, 2, 3, 5 mailles
- Calcul pour 9 mailles
- Calcul pour 45 puis 44 mailles.

La fin de la phase 2 et la phase 3 se concentrent sur la tâche de généralisation évoquée dans l'analyse a priori :

tca : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles carrées pour n'importe quelle longueur de la chaine.

Précisons nos notations : la 1ère lettre est T pour Type ou t pour tâche, la 2^{e} lettre désigne la forme, ici c pour carrée, la 3^{e} lettre donne n pour numérique et a pour algébrique (nous poursuivons dans la suite la même logique de notation dans la suite).

Les phases 4 et 5 amènent à jouer sur la variable forme et le professeur propose maintenant des tâches analogues avec le cas d'une chaine à mailles triangulaires. Les élèves étudient ainsi le type de tâches :

Ttn : Calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles triangulaires connaissant le nombre de mailles ;
et les différents cas suivants pour la variable N nombre de mailles :

- Calcul pour 1, 2, 3, 4, 5 mailles
- Calcul pour 44 mailles.

Puis les élèves travaillent sur la tâche de généralisation :

tta : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles triangulaires pour n'importe quelle longueur de la chaine.

Le scenario se poursuit de manière analogue avec le cas d'une maille hexagonale dans les phases 6 et 7, faisant rencontrer le type de tâches Thn à travers le calcul pour 44 mailles

Thn : Calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles hexagonales connaissant le nombre de mailles.
Puis la tâche de généralisation :

tha : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles hexagonales pour n'importe quelle longueur de la chaine

Dans les phases 8 et 9 le professeur demande aux élèves de choisir leurs propres formes de mailles avec la contrainte suivante : la forme doit être différente des précédentes. En plus de la consigne « trouver une phrase mathématique pour calculer le nombre de tiges pour une chaîne de 44 mailles » (document Narration), il précise aussi à la suite d'une question d'un élève à propos de la longueur des tiges : « les tiges doivent être toutes égales et les mailles, elles sont toutes de la même forme. C'est pourquoi je te demande de dessiner une maille et toutes tes mailles vont être identiques. Et elles vont s'attacher par un côté. 4 minutes. »

Cela amène les élèves, selon les groupes, à deux tâches de généralisation de même type :

toa : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles octogonales pour n'importe quelle longueur de la chaine ;

tpa : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles pentagonales pour n'importe quelle longueur de la chaine.

Le professeur demande ensuite de trouver une phrase mathématique à envoyer au bijoutier qui permettra de calculer le nombre de tiges pour n'importe quelle chaîne. Les différentes tâches tca, tta, tha, toa et tpa vont en fait alimenter le travail des phases 10 et 11, qui les font alors apparaître comme des spécimens d'un nouveau type de tâches :

Ta : Trouver une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles pour n'importe quelle forme et pour n'importe quelle longueur de la chaine.

La séance se termine par un « défi » dans les dernières phases 12 et 13, en considérant un problème inverse des précédents dans le cas de la maille carrée, à travers le type de tâches et le cas de 121 tiges suivant

Tmn : Dans le cas de la maille carrée, trouver le nombre de mailles qu'aurait une chaîne formée d'un certain nombre de tiges ;
et le processus de généralisation s'arrêtera ici à la tâche

tma : Dans le cas de la maille carrée, trouver une façon de calculer le nombre de mailles qu'aurait une chaîne formée d'un certain nombre de tiges.

La succession des tâches et types de tâches fait apparaître la structure d'enseignement de cette séance comme un réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série, pourrait-on dire. Ainsi, après avoir fait travailler les élèves, dans chaque cas de forme de mailles, sur un type de tâches ponctuelles du type Tcn, Ttn Thn à travers différents spécimens le professeur les amène à se placer sur les tâches respectives de généralisation tca, tta tha. Même si la réalisation des différentes tâches est proposée successivement, nous analysons le début de la structure comme parallèle dans la mesure où il y a une répétition en jouant sur la forme de la maille (carrée, triangulaire et hexagonale) avec la même structuration (étude sur les premiers termes au niveau du nombre de mailles 1, 2, 3 et 5, puis 44 et 45, puis cas général) . Ce premier réseau parallèle peut être schématisé ainsi :

- **Tcn → tca**
- **Ttn → tta**
- **Thn → tha**

Nous observons que l'étude commence par des types de tâches Tfn (f comme forme et n comme numérique) que nous qualifions de numérique dans la mesure où il s'agit tout d'abord de considérer un nombre déterminé de mailles et de produire la quantité de tiges correspondante. Mais à chaque fois, le contrat conduit, pour chaque forme f, à terminer l'étude avec une tâche de généralisation tfa (a ici comme algébrique).

La structure parallèle aurait pu se poursuivre strictement sur les phases suivantes, avec un choix de la forme a priori réservé aux élèves, mais pour la suite l'étude se réalise directement sur les tâches de généralisation toa et tpa à propos des formes octogonale (o) et pentagonale (p) comme le précise le professeur à un élève : « il doit faire une phrase mathématique plus générale, pas seulement pour le cas de 44 mailles » (Tour 37, Document Narration, instant 0 :09 :55 d'après récréation). Le nouveau réseau peut être schématisé ainsi avec cet ajout en série laissant en vide les types de tâches numériques :

N → A → A

- **Tcn → tca**
- **Ttn → tta**
- **Thn → tha**

} → … → **toa**
… → **tpa**

Dans les phases 10 et 11, les différentes tâches tca, tta, tha, toa et tpa apparaissent alors comme de simples spécimens d'un nouveau type de tâches de généralisation Ta avec la recherche d'une méthode pour calculer le nombre de constituants élémentaires d'une chaine à mailles pour n'importe quel forme et pour n'importe quelle longueur de la chaine. Le réseau se complexifie ainsi en série en le schéma suivant :

N → A →A → A

Généralisation du 1er degré (1 variable) **Généralisation du 2^{e} degré (2 variables)**

- **Tcn → tca**
- **Ttn → tta**
- **Thn → tha**

… → **toa**
… → **tpa**

} → **Ta**

Il s'agit ainsi d'engager les élèves dans un processus de généralisation de degré encore supérieur en considérant les deux variables forme de la maille (F) et nombre de mailles (N). Cette première analyse montre que les praxéologies ponctuelles s'agrègent en des praxéologies locales, voire régionales, emboitées autour du type de tâches Ta et permet de mettre au jour une structuration mathématique complexes et emboitée. Nous poursuivons la caractérisation de l'organisation mathématique construite en analysant les techniques et technologies associes aux différents types de tâches identifiés.

2. *Les organisations mathématiques produites par les élèves*

Les tâches isolées et les types de tâches sont réalisés par des techniques de résolution souvent au début embryonnaires ou en voie de constitution dans un processus d'enseignement-apprentissage. Nous décrivons les éléments de techniques élaborées par les élèves et repérables dans les données de la séquence « bijoutier ».

- *Techniques associées aux types de tâches Tcn, Ttn Thn*

Dans le cas des calculs sur un petit nombre de mailles carrées (1 à 5, puis 9 parfois) en début de séquence, les élèves utilisent certainement des techniques conformes à σ_1 basées sur des technologies numériques comme nous l'avions indiqué dans l'analyse a priori (section III). Le professeur ne demande pas la procédure des élèves et la classe se met rapidement d'accord sur le nombre de tiges pour 1, 2 et 3, puis 5 : « Il compte avec les élèves, les tiges qui composent une maille, deux mailles et trois mailles. Puis il ajoute deux mailles de plus (5 mailles) sans les afficher sur l'écran. … Il demande à une élève le nombre de tiges obtenues. Elle dit 16 et il vérifie que tous sont d'accord. »Visiblement on n'est pas dans une tâche problématique, comme on peut encore le voir avec la construction d'une chaîne de 9 mailles : « Il suit en particulier l'équipe 4 : ils en comptent 22. Il leur demande de vérifier. Ils recomptent et obtiennent 28. Il fait le tour des équipes, revient ensuite en grand groupe et demande si quelqu'un a autre chose que 28. Aucun. Il leur fait constater que c'est facile si l'on peut les compter. »

Dans le cas d'un calcul pour un grand nombre de mailles carrées (le professeur propose au début 45 mailles), les élèves commencent à expliciter leur technique, comme dans l'équipe 4 « E[4.3] explique que pour 2 mailles, il faut faire 2×3+1, pour 3 mailles 3×3+1, pour 5 mailles… E[4.4] trouve que c'est compliqué alors que E[4.1] suggère que pour 45 mailles, il faut faire 45×3 et que le terme +1 est pour commencer la chaîne, car la première maille comprend 4 tiges. » On est déjà ici sur des techniques τ_2 basées sur des technologies de généralisation explicite, la généralité dans la constitution spéciale de la chaîne est perçue et utilisée pour exprimer la réponse dans le cas d'un grand nombre déterminé de mailles.

L'équipe 3 envisage une autre décomposition : « E[3.1] explique à E[3.3] qu'elle a calculé 1 fois 4, et pour les autres mailles 1 fois 3 et donc … E[3.2] récapitule : 1×4 + 44×3 ». Puis quelques minutes après que le professeur demande de travailler sur 44 au lieu de 45, l'équipe confirme sa procédure : « E[3.1] dit encore 1 fois 4 est égale à 4, et 43 fois 3 …». On note ici encore comment cette équipe évolue d'une technique de dénombrement de type σ_1 basées sur des technologies numériques vers une technique de type τ_2 basées sur des technologies de généralisation explicite consistant à voir la configuration comme un carré avec 4 tiges, puis un nombre (ici 43) de composants de 3 tiges.

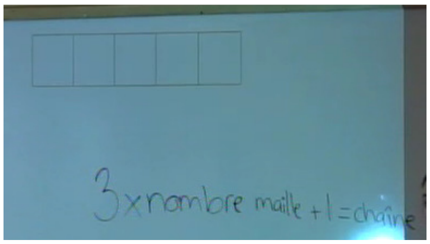
L'équipe 6 explicite une procédure pour 45 mailles, qu'on pourrait qualifier de proportionnalité : « 3 des élèves s'entendent pour dire au bijoutier de faire 5 fois la commande pour 9 mailles, soit 5×28 tiges. E[1.2] fait remarquer que ce ne sont pas tous les nombres de mailles qui sont multiples de 9. » L'erreur ne sera pas relevé lors du travail de groupe.

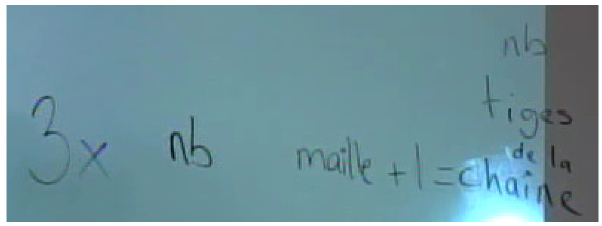
- *Techniques associées aux tâches tca, tta, tha, toa et tpa*

Le professeur précise à plusieurs moments « qu'il veut un message à dire au bijoutier, pour qu'il sache comment trouver le nombre de tiges, et ce, pour n'importe quelle longueur de chaîne à mailles carrées » ou « il ne veut pas seulement le nombre de tiges, mais aussi le message mathématique pour aider le bijoutier à trouver le nombre de tiges à commander pour d'autres longueurs de chaînes » et encore il rappelle qu'après avoir trouvé la réponse pour 44 mailles, ils doivent écrire un message pour tout nombre de mailles. On note ainsi ce geste du professeur, vraisemblablement, pour faire entrer les élèves dans les tâches de généralisation *tca, tta, tha, toa et tpa*.

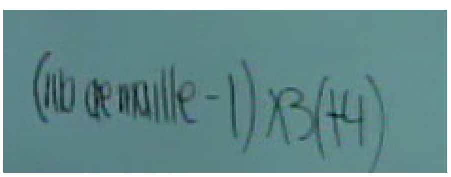
Dans le premier travail de groupes à propos des mailles carrées et d'un nombre, considéré comme déjà grand, 44 ou 45, on a vu que certains élèves avaient compris qu'il fallait décrire la procédure de calcul effective, et non pas se limiter à donner la quantité de tiges nécessaire.

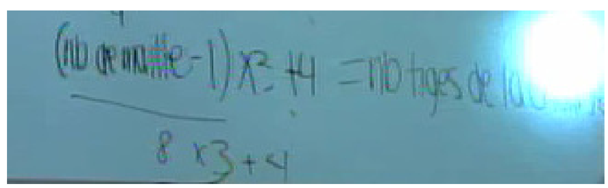
Pour cette tâche, au niveau de l'équipe 4 : « E[4.4] explique qu'il lui dirait qu'à chaque maille il faut 3 tiges, mais qu'il faut en ajouter une pour la première. » Cet élève n'arrive pas à entrer, du moins au début de la phase 2 de la séance, à produire une technique de généralisation explicite. Il associe bien la correspondance sans pouvoir exprimer globalement la quantité nécessaire. Vers la fin de cette phase, l'élève débouche sur cette généralisation explicite en oralisant « multiplier nombre de mailles par trois plus un pour le premier ». La généralisation explicite, signe d'une pensée algébrique, semble en route dans cette équipe. Finalement il va modifier son message sous la demande du professeur de griffonner ce message sur sa feuille pour produire « × nombre de m. par 3 et + 1 pour 1^er^ » puis, après une remarque du professeur à propos du terme « 1er », l'élève finit par formuler : « trois fois nombre de mailles plus un ». Cette généralisation est passée par l'abstraction d'une configuration générale où le « plus un » avait encore la signification de la 1ère tige. Finalement, dans la phase 3 où un bilan est proposé, cette équipe produit au tableau le message « 3xnombre maille + 1 =chaîne » qui sera transformé par le professeur en « 3×nb mailles +1 = nb tiges de la chaîne », qui propose que « nombre dorénavant on va le simplifier nb ».





Dans la phase 2, l'équipe 2 entre aussi dans une généralisation explicite conforme à la modélisation M4 = 4+3(n-1), du moins pour l'élève E[2.4], qui dit à voix haute « 3× nombre de mailles -1 +4 ». Il s'ensuit un échange fourni avec le professeur pour amener l'élève à écrire le message en tenant compte des priorités des opérations. Dans le bilan collectif de la phase 3 l'élève E[2.4] de cette équipe ira écrire son message au tableau sous la forme (nb mailles-1)×3(+4)= nb de tiges de la chaîne qui sera corrigée par le professeur.





Une élève d'un autre groupe n'arrive pas à comprendre le message, elle ne semble pas entrer dans cette pensée algébrique qui demandait de décontextualiser l'écriture et de ne plus se focaliser à interpréter ce « moins une maille » comme elle le répète en exprimant son incompréhension pour ce message.

L'équipe 5 semble voir le processus opératoire général mais bute sur l'expression de cette généralité en se demandant « comment exprimer ce (le nombre de mailles) qui est multiplié par 3 ».

Les deux messages précédents, conformes aux modélisations M2 = 3n+1 et M4 = 4+3(n-1), sont validés par le professeur et la classe par retour aux premiers cas numériques, constituent alors une référence pour la suite.

Ainsi dans la phase 4, à propos des mailles triangulaires, la dévolution sur la tâche de généralisation tta est réussi et les élèves essaient d'élaborer un message général. L'élève E[1.1] explicite l'élaboration de la technique en expliquant qu'elle se base sur l'adéquation numérique avec les premiers cas : « … si tu fais deux fois le nombre de mailles plus un, car 2×2, 4, +1, 5 ». Mais surtout l'idée lui est venue du message de l'équipe 4 à propos des mailles carrées : « L'autre chaîne avait 4 côtés, ils ont enlevé 1 et ils ont mis 3, alors moi, vu qu'il y a 3 côtés, j'ai enlevé 1 et ça m'a fait 2. » On a ici une démarche par analogie validée numériquement. Le professeur l'invite même à expliciter cette démarche dans la phase 5 de bilan à partir du 1er message pour le calcul des mailles carrées (3×nb de mailles+1) : « soustraire 1 au nombre de côtés d'une maille ». Nous reviendrons sur l'attention du professeur à propos de cette élaboration qui conduit au message : « 2×nb de mailles+1=nb de tiges » de même type de modélisation que M2.

Dans ce bilan, nous trouvons aussi une modélisation du type M4 proposée à la classe par l'équipe 3 par l'élève E[3.2]: « (nb mailles -1)×2+3=nb de tiges dans la chaîne ». Ce message est validé par le professeur et les élèves par un essai pour les cas 3 et 5.

Les deux premières tâches de généralisation *tca* et *tta* (mailles carrées et triangulaires) sellent le scenario et les 3 autres tâches *tha, toa* et *tpa* (mailles hexagonales, octogonales et pentagonales) se déroulent de la même manière de la phase 6 à la phase 9 avec des messages du même type que les modélisations M2 et M4 des chaines à mailles carrées. Par exemple pour l'octogone, des groupes donnent le message « (nb de mailles-1)×7+8=nb de tiges », tandis que pour les pentagones des groupes c'est le message « (nb de mailles-1)×4+5=nb de tiges » qui est avancé.

- *Techniques associées au type de tâches Ta*

Comme déjà indiqué, dans les phases 10 et 11 le professeur propose aux élèves de se situer au niveau du type de tâches de généralisation Ta pour lequel les tâches précédentes (*tca, tta, tha, toa et tpa*) ne sont des spécimens. Le professeur présente ainsi le travail demandé :

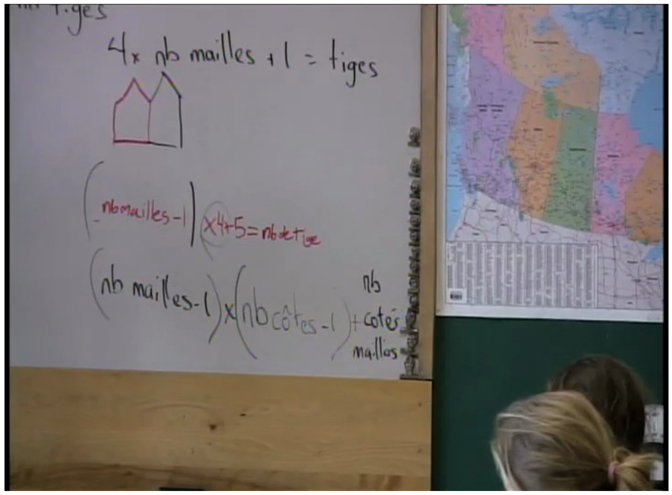
> A chaque coup on a trouvé **une phrase mathématique** qui permettait de trouver le nombre de tiges. Maintenant ce que je veux que vous me trouviez, je veux avoir une phrase mathématique qu'on va pouvoir envoyer au bijoutier et dans cette phrase peu importe la commande du client, c'est-à-dire que le client qu'il décide que sa maille est triangulaire, carrée qu'elle est de forme hexagonale, pentagonale, octogonale, peu importe la forme de sa maille, le bijoutier va pouvoir prendre cette **formule** là et dire ah là parfait j'aurai besoin de tant de tiges.

Après un travail de groupes de huit minutes environ dans la phase 10, les élèves livrent leurs « phrases mathématiques » demandées par le professeur. On retrouve ici deux types de formules généralisant les formes M2 et M4 vues dans les cas particuliers de formes :

- G2 : (nb côtés de la maille - 1) × nb de mailles + 1 = nb de tiges
- G4 : (nb de mailles -1) × (nb côtés – 1) + nb côtés = nb de tiges

Pour la formule G1, une élève explique qu'ils ont observé que, dans la formule « 2×nb de mailles+1=nb de tiges » du cas triangulaire, le « 2 » représente le nombre côtés de la maille moins 1. Le professeur pousse un peu le raisonnement en disant « donc vous avez remplacé votre 2 … d'où il vient ce 2 là … c'est justement le nombre de côté de la maille moins 1 ».

Le professeur poursuit la demande de l'explicitation du raisonnement pour la formule G2 en mettant en parallèle au tableau (voir figure ci-dessous) la formule pour le pentagone pour bien faire ressortir le rôle joué par les différentes variables et explicite lui-même le raisonnement supposé des élèves : « on part de la formule précise pour ce type de mailles là et puis on généralise avec une formule qui va nous permettre de trouver ». Et il compare les deux formules en précisant que la deuxième est un peu moins évidente à voir.



Nous laissons de côté l'analyse du type de tâches Tmn et de la tâche tma (phase 12 et 13) qui amènent à s'intéresser à la dépendance inverse entre le nombre de mailles et le nombre de tiges pour la forme carrée.

- *Technologies associées aux différents types de tâches de généralisation*

Nous rappelons que nous utilisons le concept de technologie au sens de Chevallard (1 999), autrement le discours sur la technique qui permet de la justifier, éclairer, produire, …

En dehors des connaissances liées au choix du contexte géométrique constitué essentiellement des polygones et des méthodes élémentaires de dénombrement, les élèves doivent avoir une idée intuitive des notions de suites et d'algorithmes. Ils doivent aussi maîtriser les connaissances sur le numérique, notamment sur les nombres entiers et les opérations de l'arithmétique avec le vocabulaire et les différents registres sémiotiques permettant de manipuler et traiter les calculs sur ces nombres.

Les notions de variable et de dépendance entre variables peuvent aussi émerger de ce travail sans qu'une formalisation soit possible. Ces situations font ressortir le besoin d'utiliser un langage intermédiaire entre le langage formalisé de l'algèbre et le langage numérique sur les nombres. Ce langage est parfois introduit par le professeur comme « Nb » pour désigner une variable numérique.

Les connaissances et outils précédemment indiqués vont fournir des ressources aux élèves pour entrer dans un processus de généralisation, favorisé par la situation.

VI. SITUATIONS DE GENERALISATION : PRAXEOLOGIES ET PENSEE ALGEBRIQUE

Nous avons déjà souligné la structure complexe de la situation proposée avec la succession des tâches et types de tâches numériques et de généralisation que nous avons qualifié de réseau de tâches enchâssées en parallèle et en série. Cette structure a permis à une classe et sûrement à de nombreux élèves de cette classe d'entrer dans un processus de généralisation qui est un des aspects spécifiques de la pensée algébrique.

La situation permet une dévolution de ce processus en commençant par des types de tâches numériques (Tcn et Ttn) et en mobilisant des techniques σ_1 basées sur des technologies numériques. Les productions des élèves attestent une articulation numérique-algébrique bien ajustée en jouant sur la taille de la variable nombre de mailles. Ainsi le passage de l'étude des premiers cas du nombre de mails (entre 1 et 9) à celui d'un nombres comme 44 ou 45 force les élèves à faire évoluer leurs procédures vers des techniques de généralisation explicite. Ce saut informationnel fait ainsi fonctionner ces valeurs numériques comme des exemples génériques au sens de Balacheff (1987) et ne plus considérer ce cas comme un cas déterminé mais comme un représentant d'une variable, montrant ainsi un aspect de la compétence et pensée algébrique.

Dès les premières tâches, le langage et divers registres sémiotiques sont sollicités pour dire cette généralisation, l'aspect sémiotique fort de cette situation fait ainsi apparaître une caractéristique du travail algébrique.

Le numérique va encore être un appui dans cette situation comme moyen de validation mais aussi provoque de futurs obstacles didactiques car les élèves peuvent considérer les vérifications de formules avec les premiers cas numériques comme une preuve. Conception qu'il faudra prendre en compte à propos de l'apprentissage de la démonstration au collège en France.

Pour terminer, si la situation a permis à des élèves de traiter une situation de généralisation à deux variables, comme on l'a vu avec le type de tâches *Ta* où les élèves devaient faire un message pour n'importe quelle forme et taille de chaînes, on peut être plus réservé sur la forte mise en évidence du raisonnement analogique par le professeur.

REFERENCES

Balacheff N. (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* 18.12.

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1992) *L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : didactique des mathématiques, formation normale des enseignants.* École normale supérieur Marrakech. p. 21-40.

Bednarz N., Dufour-Janvier, B. (1996) Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Booth L. (1984) Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x, Vol 5.*

Bronner A. (1997) Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée, *Thèse de doctorat*. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Bronner A. (2006) « Installation et régulation par l'enseignant de l'espace parole-pensée-actions-relations. Gestes d'étude, Gestes professionnels, évènements et ajustements ». *Journées d'études IVDA* 2005. Presses Universitaires de Franche-Comté.

Bronner A., (2007) La question du numérique : Le numérique en questions, Habilitation à Diriger les Recherches, Université Montpellier 2.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.2. La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* n°19, 43-75.

Chevallard Y. (1990) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, n°23, 5-38.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, Vol. 5, ULP, IREM de Strasbourg.

Grugeon B. (1995) *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G.* Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Kieran C. (1994) A functional approach to the introduction of algebra: some pros and cons, in Ponte J. P., Matos J. F. (Eds.). *Proceedings of the 18th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 1, 157-175.

Kieran C. (1992) The learning and teaching of school algebra. In Grouws D. A. (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Marchand P., Bednarz N. (1999) L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ* XXXIX(4), 30-42.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematics conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

Squalli H., Suurtamm C., Freiman, V. (2012) *Preparing Teachers to Develop Algebraic Thinking in Primary and Secondary School / Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire.* Canadian Mathematics Education Study Group 2012.

Vergnaud G. (1986) Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*. Éditions La Pensée Sauvage.

Squalli H., Mary C., Marchand P. (2011) Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In *Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique. Technologie - Sciences – Mathématiques*. Editions Deboeck.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE : QUELLES DIFFÉRENCES ENTRE LES RAISONNEMENTS MIS EN PLACE PAR LES ÉLÈVES AVANT ET APRÈS L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE ?

Isabelle DEMONTY[*] – Annick FAGNANT[**] - Joëlle VLASSIS[***]

Résumé – De nombreux curricula préconisent d'enseigner l'algèbre après que les élèves ont acquis une base de connaissance en arithmétique. Cette façon d'organiser les enseignements mathématiques n'est pas en adéquation avec les recherches centrées sur la pensée algébrique : celle-ci se caractérise par une manière particulière de raisonner face à des problèmes, qui peut se développer bien avant les premiers apprentissages du secondaire (Radford, 2014). La communication compare les démarches mises en œuvre par des élèves dans des situations de dénombrement, avant et après l'introduction de l'algèbre. Elle apporte ainsi des informations sur l'évolution de la pensée algébrique des élèves de 11 à 14 ans

Mots-clefs : développement, pensée algébrique, dénombrement, arithmétique, algèbre

Abstract – A lot of curricula recommend to teach algebra after the students have acquired a deep knowledge in arithmetic. This way of organizing the mathematics' teaching is not in adequacy with the researches focused on algebraic thinking: it's more a way of reasoning that can be developed before the first learnings of secondary school (Radford, 2014). The communication compares way of thinking by students in the study of "pattern", before and after the introduction of the algebra. It brings information on the evolution of the algebraic thinking of students from 11 to 14 years old.

Keywords: development, algebraic thinking, pattern, arithmetic, algebra

De nombreux curricula préconisent d'enseigner l'algèbre après que les élèves ont acquis une bonne base de connaissance en arithmétique (Cai & Knuth 2011 ; Radford 2014). Les programmes de mathématiques en Belgique francophone vont dans cette direction, en marquant une distinction entre l'arithmétique d'une part, qui relève de la responsabilité de l'instituteur et l'algèbre d'autre part, qui débute dans l'enseignement secondaire (grades 7 et 8) avec l'introduction du symbolisme algébrique, des procédures associées (calcul algébrique et résolution d'équations).

Cette façon de considérer l'algèbre n'est pas en adéquation avec les recherches centrées sur la pensée algébrique (Kieran 2007) : la définition même de cette pensée n'est pas directement liée à la capacité à utiliser des écritures mathématiques comportant des lettres. Au contraire, celle-ci relève davantage d'une manière particulière de raisonner face à des problèmes, qui

[*] Université du Luxembourg – GD Luxembourg – isabelle.demonty@uni.lu
[**] Université de Liège – Belgique – afagnant@ulg.ac.be
[***] Université du Luxembourg – GD Luxembourg – joelle.vlassis@uni.lu

Demonty I., Fagnant A., Vlassis J., (2015) Le développement de la pensée algébrique : quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre? In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 265-279.

peut se développer dans un cadre numérique, bien avant les premiers apprentissages du secondaire (Kieran 2007 ; Cai & Knuth 2005 & 2011, Radford 2006, 2008 & 2014).

Malgré cette rupture nette entre l'arithmétique et l'algèbre soutenue par les directives officielles, on retrouve une compétence qui autorise le développement de cette pensée algébrique dès les premiers apprentissages mathématiques : il s'agit de la capacité à dénombrer, compétence qui doit être travaillée dès l'école maternelle, approfondie en primaire (en remplaçant le dénombrement par un calcul) et revue à nouveau dans l'enseignement secondaire (où le dénombrement sera exprimé par une formule). L'étude du dénombrement dans le contexte de l'analyse de suites arithmétiques dont chacun terme est représenté par un enchaînement de figures, constitue ainsi un support intéressant pour amener une réflexion sur les caractéristiques de la pensée algébrique des élèves avant et après l'introduction de l'algèbre.

C'est à ce type de situation que notre communication s'intéresse. Elle se centre sur les questions suivantes : comment se caractérise la pensée algébrique dans des situations d'analyse de suite arithmétiques? Les démarches mises en œuvre par les élèves selon qu'ils sont à l'école primaire ou au début de l'enseignement secondaire sont-elles réellement différentes ? Qu'en est-il de l'écriture même de ces démarches ?

Après une analyse de quelques recherches centrées sur les caractéristiques de la pensée algébrique, la communication présente les résultats d'un test soumis à 156 élèves de grades 6 et 8 issus de 8 classes en Belgique francophone, en vue de mieux cibler les différences qui se dégagent dans les démarches de généralisation mises en œuvre avant l'introduction de l'algèbre et après une année complète d'enseignement de l'algèbre.

I. FONDEMENTS THEORIQUES

Cette partie a pour but d'apporter un éclairage théorique à la problématique suivante : comment se caractérise la pensée algébrique dans des situations d'analyse de suites arithmétiques ?

Elle est structurée en 3 parties. La première partie propose une première mise au point sur les caractéristiques principales de la pensée algébrique. La deuxième partie s'intéresse aux situations où l'élève est amené à généraliser un phénomène à travers l'observation de cas particuliers : elle envisage à la fois les démarches que les élèves mettent en œuvre pour généraliser et les symbolisations écrites qui fournissent un support intéressant pour tenter de mettre à jour leur raisonnement, ainsi que la façon dont les élèves le formulent. Enfin, la dernière partie discute des liens entre pensée algébrique et généralisation.

1. Les caractéristiques de la pensée algébrique

L'utilisation de notations symboliques ne constitue pas la meilleure manière de définir l'entrée dans la pensée algébrique ((e.g. Kieran 1989, 1990 ; Filloy & Rojano 1989 ; Cortes, Vergnaud, Kavafian 1990 ; Radford & Puig 2007).

Selon Russel, Schifter et Bastable (2011), une caractéristique majeure de la pensée algébrique est de parvenir à comprendre le comportement des opérations

Selon Radford (2014), la pensée algébrique présente les trois caractéristiques suivantes :

- l'indétermination qui relève de la capacité à exploiter des problèmes qui impliquent des nombres inconnus ;
- la dénotation qui consiste à parvenir à nommer ou symboliser ces nombres inconnus. Cette dénotation peut se faire de différentes manières, à l'aide du code alphanumérique, mais aussi du langage naturel, de gestes ou de signes non conventionnels ;

le raisonnement analytique. Celui-ci amène à traiter les quantités indéterminées comme si elles étaient connues, et à parvenir à réaliser des opérations sur ces nombres inconnus.

Dans cette définition, la pensée algébrique recouvre des aspects liés d'une part à une certaine forme de pensée (le raisonnement analytique) et d'autre part, à la manière de symboliser cette pensée (la dénotation).

2. *Les situations de dénombrement : comment les élèves généralisent-ils des phénomènes et comment expriment-ils par écrit leurs démarches ?*

Radford (2006, 2008) a largement étudié les démarches de généralisation mises en place par les élèves de 10 à 14 ans, dans le cadre de l'étude de suites arithmétiques représentées par des figures, comme l'illustre la figure 1.

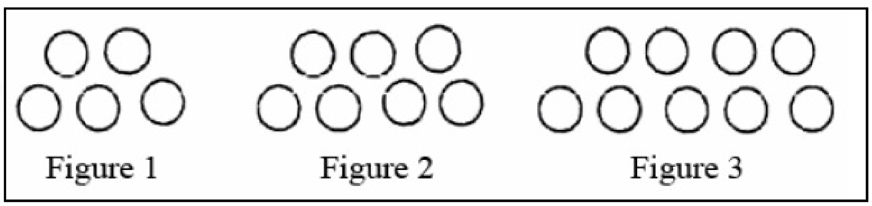


Figure 1 - E*xemple de situation de dénombrement dans le contexte de suites arithmétiques (Radford 2006, p.5)*

Selon cet auteur, la généralisation présente deux caractéristiques : un aspect phénoménologique d'une part, qui correspond à la démarche mise en œuvre pour généraliser une suite arithmétique et un aspect sémiotique d'autre part, qui correspond à l'expression du raisonnement réalisé. Dans la suite de cette partie, nous envisageons quelques caractéristiques de ces deux facettes de la généralisation, qui sont en réalité intimement liées.

a) *L'aspect phénoménologique de la généralisation : comment les élèves raisonnent-ils pour généraliser ?*

Radford (2006 ; 2008) identifie trois types de raisonnements d'élèves face à la généralisation de suites arithmétiques : l'induction naïve, la généralisation arithmétique et la généralisation algébrique.

- L'induction naïve consiste à rechercher un motif inconnu en analysant les caractéristiques d'un seul motif connu. Ces élèves élaborent par exemple des stratégies d'essais-erreurs en tentant d'établir une règle au départ de l'analyse d'un seul terme, sans chercher un point commun entre plusieurs termes de la suite. Une autre stratégie fréquente d'induction naïve relève d'une application erronée du raisonnement proportionnel : bon nombre d'élèves, face à une situation d'agrandissement, font appel à ce raisonnement sans avoir vérifié si ce modèle fonctionnait dans cette situation. Par exemple, pour déterminer le nombre d'objets nécessaires pour réaliser le motif n°6, ces élèves pensent qu'il suffit de multiplier le nombre d'objets constituant le motif 3 par 2.

- Une autre démarche est qualifiée par Radford (2006, 2008) de généralisation arithmétique : dans celle-ci, la personne identifie un point commun à travers l'analyse de plusieurs termes de la suite (il s'agit du fait qu'il y a un accroissement constant entre les termes consécutifs). Cette caractéristique peut être utilisée pour identifier correctement un terme à partir d'un terme proche (par addition successive de la raison). Toutefois, l'élève n'est pas en mesure, dans une telle démarche, de procéder à un raisonnement lui permettant d'utiliser cette caractéristique pour prédire un terme lointain de la suite étudiée.
- Dans la démarche de généralisation algébrique, l'élève identifie une régularité à travers l'analyse de quelques termes de la suite, étend ou généralise cette régularité aux autres termes, et parvient à proposer une expression directe de n'importe quel terme de la suite (Radford, 2006 ; Radford, 2008).

b) L'aspect sémiotique de la généralisation : comment les élèves expriment-ils leur raisonnements de généralisation ?

Dans ses travaux, Radford (2006 ; 2008 et 2014) propose aux élèves d'exploiter en groupes les situations. Il constate que les canaux de symbolisation des élèves dépassent largement les uniques traces écrites : les gestes, les mots et même les intonations données par les élèves dans leurs explications sont très révélateurs de leur façon de penser et d'exprimer leurs démarches.

Notre étude se positionne dans une perspective d'évaluation, en s'intéressant aux traces écrites laissées par les élèves pour exploiter ces situations. Dans cet article, nous nous centrerons donc sur les caractéristiques de ce canal de communication.

Lorsqu'ils proposent une démarche d'induction naïve ou de généralisation arithmétique, les élèves peuvent écrire leur raisonnement à l'aide de calculs, de phrases ou même à l'aide d'un substitut symbolique pour identifier le nombre inconnu. Ils peuvent également soutenir ce raisonnement par des annotations écrites sur les dessins présentant les suites (par exemple, ils identifient la raison de la suite en entourant chaque fois les figures qui ont été ajoutées pour passer d'un motif au motif qui le suit directement).

En ce qui concerne la démarche de généralisation algébrique, Radford (2006) constate que les élèves peuvent proposer 3 types de symbolisations écrites, correspondant à 3 types de généralisation algébriques : factuelle, contextuelle et symbolique. Dans la généralisation algébrique factuelle, l'élève symbolise l'inconnue à partir d'un nombre : il choisit un nombre et applique la formule au départ de celui-ci. Dans la généralisation algébrique contextuelle, l'inconnue est symbolisée par un substitut symbolique (point d'interrogation, cadre vide, lettre, …) mais la symbolisation élaborée garde des traces de la situation qui l'a vue naître : par exemple, l'élève utilise des parenthèses pour indiquer l'ordre des opérations à réaliser, sans que cela ne soit nécessaire selon la règle de priorité des opérations. La généralisation algébrique symbolique se détache quant à elle de la situation, pour proposer une écriture tout à fait correcte sur le plan mathématique, qui n'est plus enracinée dans le contexte de la suite.

Plusieurs recherches, réalisées dans le domaine de la mise en équation de problèmes impliquant des équations apportent des éclairages intéressants concernant la symbolisation algébrique. Deux concepts nous paraissent transposables dans le domaine de la symbolisation d'une généralisation.

Il s'agit d'une part de la nominalisation (Radford, 2002) qui est un processus linguistique à travers lequel un élément est transformé en sujet à partir d'un verbe d'action.

> Ainsi, par exemple lorsqu'il s'agit de symboliser le fait qu'un enfant a 5 billes de plus qu'un autre, l'élève doit transformer l'information « 5 billes de plus » par « le premier enfant a x billes et le second enfant à 5 + x billes »

Le second concept est défini par Duval (2002) et concerne la nécessité, dans la plupart des problèmes impliquant les équations, de choisir une lettre qui permettra de désigner non pas une mais plusieurs quantités exprimées dans l'énoncé. Par exemple, face au problème énoncé ci-dessus, l'élève doit parvenir à utiliser une même lettre pour désigner les parts de deux enfants, la part du second devant être symbolisée en fonction de la part du premier (le premier enfant a x billes et le second a x + 5 billes).

Dans la symbolisation des suites arithmétiques, l'élève est amené à effectuer une démarche de nominalisation : il doit penser à mobiliser dès le départ une quantité inconnue (le n° du motif) et à effectuer des opérations au départ de cette quantité inconnue, celle-ci devant nécessairement apparaitre dans sa formule. En ce qui concerne la nécessité d'exprimer plusieurs inconnues au départ d'une seule, cette démarche ne sera utile que pour formaliser certains raisonnements, faisant intervenir cette particularité, par exemple lorsque l'élève constate qu'il faut additionner deux nombres consécutifs : il va devoir exprimer tant le premier que le deuxième nombre au départ d'une même inconnue.

Ces recherches montrent que l'écriture, à l'aide d'une expression algébrique, de la pensée algébrique est loin d'être simple. Les recherches centrées sur les connaissances des enseignants ont mis en évidence que ceux-ci avaient tendance à sous-estimer ces difficultés de symbolisation. Certains auteurs attribuent ce fait aux connaissances mathématiques des enseignants, qui les ont conduits à automatiser un certain nombre de procédures que les élèves doivent découvrir lors des premiers apprentissages algébriques. A ce propos, Koedinger et Nathan (2004) définissent le concept d'« expert blind spot », pour désigner le fait que les enseignants, de par leur bagage important en mathématiques, évaluent mal la difficulté des tâches de symbolisation algébrique, l'associant même à une simple traduction directe d'un énoncé en symboles mathématiques (Julo 1995 ; Duval 2002).

3. *Quels liens peut-on établir entre pensée algébrique et démarche de généralisation ?*

D'après les trois caractéristiques de la pensée algébrique rappelées ci-avant (Radford 2008 et 2014), ni l'induction naïve, ni la généralisation arithmétique ne relèvent de la pensée algébrique. En effet, dans aucune de ces deux démarches, les élèves ne parviennent à élaborer un raisonnement de nature analytique, puisque leurs démarches ne prennent pas appui sur un nombre inconnu. De plus, les seules dénotations concernent des quantités connues.

A l'inverse, les démarches de généralisation algébriques contextuelles et symboliques présentent les trois caractéristiques de la pensée algébrique. Les élèves sont en effet confrontés à l'indétermination, puisqu'ils doivent élaborer un raisonnement qui permette de déterminer n'importe quel terme de la suite, à partir de son rang dans la suite. Ils parviennent également à symboliser ces nombres inconnus, sans nécessairement utiliser le code alphanumérique et enfin, leur raisonnement est de nature analytique, dans la mesure où il s'agit de réaliser des opérations au départ d'un rang quelconque du terme, qui est inconnu.

La démarche de généralisation algébrique factuelle présente à minima deux des trois caractéristiques de la pensée algébrique : le raisonnement est bien de nature analytique et les élèves montrent qu'ils sont capables d'exploiter pleinement des problèmes qui impliquent des nombres inconnus.

En ce qui concerne la dénotation, Radford (2006) précise que « dans la généralisation algébrique factuelle, l'indéterminée n'est pas nommée : la généralisation repose sur des actions réalisées sur des nombres ; les actions sont composées de mots, de gestes et d'activités de perception » (p. 16) [traduction libre][1]. Selon ce point de vue, on peut penser que la dénotation fait défaut à ces élèves puisqu'ils ne parviennent pas à nommer ou symboliser l'inconnue. Toutefois, cette idée n'est pas partagée par d'autres auteurs. En effet, s'appuyant sur les travaux de Dörfler (1991), Squalli (à paraître) exprime le fait qu'« un moment crucial dans le processus de généralisation se produit quand […] la formulation des protocoles ne sert plus uniquement à décrire les cas spécifiques examinés mais aussi à envisager les cas potentiels » (p.7). En suivant cette idée, on peut considérer que l'exemple sur lequel s'appuient les élèves lorsqu'ils proposent une généralisation algébrique factuelle a la valeur d'un cas général qui permet de décrire un processus de calcul plutôt que la réponse effective trouvée (qui à elle seule ne garde pas la trace de la démarche effectuée). Dans ce cas, la dénotation telle que définie dans la pensée algébrique est réalisée (l'inconnue est désignée par un nombre ayant la valeur d'un exemple prototypique) et la généralisation algébrique factuelle présente bien les trois caractéristiques de la pensée algébrique.

II. PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE ET HYPOTHESES

Selon Radford (2008, 2014), la pensée algébrique peut être rendue accessible aux jeunes élèves, bien avant l'entrée dans l'algèbre. Dans un contexte de suites arithmétiques, lors d'activités savamment orchestrées par l'enseignant, les études menées par Radford et ses collaborateurs montrent que les élèves parviennent à élaborer des raisonnements de nature analytique et à symboliser ceux-ci à l'aide d'un substitut symbolique.

S'il s'avère que les élèves sont capables de développer de tels raisonnements lorsqu'ils sont accompagnés dans leurs démarches par l'enseignant, qu'en est-il de leurs démarches spontanées ? Faut-il vraiment attendre l'entrée dans l'algèbre pour que les élèves parviennent à développer et symboliser un raisonnement de nature algébrique ?

En référence aux travaux de Radford (2006, 2008 et 2014) et de Dörfler (1991), nous émettons la première hypothèse suivante : avant tout enseignement formel de l'algèbre, bon nombre d'élèves sont capables de développer des raisonnements de nature algébrique, même si la manière de symboliser ceux-ci ne relève pas de l'utilisation du code alphanumérique.

Par ailleurs, les enseignants de mathématiques du secondaire ont tendance à surestimer la facilité d'acquérir le langage formel (Koedinger & Nathan, 2004), l'associant souvent à une simple traduction du langage courant en symboles mathématiques (Julo, 1997 ; Duval, 2002).

[1] In factual generality, indeterminacy remains unnamed; generality rests on actions performed on numbers; actions are made up here of words, gestures and perceptual activity".

Nous émettons la seconde hypothèse suivante : même après plus d'une année d'utilisation du symbolisme algébrique, les élèves de 14 ans éprouvent de nombreuses difficultés pour formaliser leur raisonnement par le biais de l'écriture algébrique.

III. METHODOLOGIE

Les résultats que nous présentons dans cette communication ont été recueillis suite à la passation d'un test comprenant deux suites arithmétiques, et soumis à un total de 156 élèves issus de 2 années d'étude : grade 6 (6e primaire) et grade 8 (deuxième secondaire).

La figure 2 reprend le nombre de classes et d'élèves concernés par l'épreuve dans chaque année d'étude.

	Grade 6	Grade 8
Nombre de classes	4	4
Nombre d'élèves	79	77

Figure 2 - *Brève description de l'échantillon*

Identique dans toutes les classes, le test a été soumis en début d'année scolaire (au mois de novembre).

Puisque nous interrogeons dans cet article la nécessité d'attendre l'entrée dans l'algèbre pour que les élèves parviennent à développer et symboliser un raisonnement de nature algébrique, il nous a semblé nécessaire de comparer les résultats de ces deux groupes d'élèves puisque les uns n'avaient aucune expérience algébrique (groupe de grade 6 et que les autres avaient reçu une année complète d'enseignement de cette matière (groupe de grade 8).

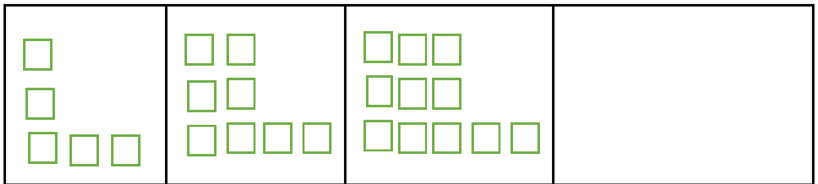
Dans ce test, nous confrontons les élèves à une suite arithmétique symbolisée par des petits carrés.

L'activité soumise aux élèves est présentée dans la figure 3. L'élève dispose au départ d'une représentation visuelle des trois premiers termes de la suite. Sur la base des réflexions de Radford, Miranda, & Demers (2009), nous avons proposé un questionnement en 4 étapes :

- dans un premier temps, l'élève est amené à dessiner le motif n°4 ;
- il lui est ensuite demandé de proposer une description de l'agencement des carrés pour le motif n°7, dans le but de porter son attention sur la disposition spatiale des carrés ;
- l'élève doit ensuite identifier le nombre de carrés nécessaires pour un motif lointain (n°100) ;
- enfin, il s'agit de généraliser en mots une procédure pouvant convenir quel que soit le numéro recherché. Afin d'amener les élèves à donner du sens à la notion de nombre indéterminé dans ce contexte, nous avons formulé la consigne à l'aide d'un petit jeu (voir question 4). Pour les élèves de grade 8, nous demandons d'exprimer ce moyen en utilisant des symboles mathématiques.

Les résultats présentés dans cet article concernent les réponses apportées aux élèves à la quatrième étape du questionnement (question 4). Ce choix s'explique par le fait que, dans cette dernière question, l'élève est réellement amené à généraliser le phénomène sous étude ; les trois autres questions n'impliquent en effet pas de réaliser un raisonnement analytique, mais sont plutôt destinées à aider les élèves, et en particulier les plus jeunes, à entrer progressivement dans l'activité de généralisation évaluée dans cette quatrième question.

Voici une suite de dessins réalisée à l'aide de petits carrés :



Dessin n°1	**Dessin n°2**	**Dessin n°3**	**Dessin n°4**

1) Continue la suite en dessinant le dessin n°4 dans la case vide ci-dessus.

2) Alexandre est un élève d'une autre classe. Il voudrait obtenir le dessin n°7, mais il n'a pas vu les premiers dessins.

   a. Explique-lui comment il doit faire (***attention***, ton explication doit être réalisée uniquement avec des mots).

   b. Finalement, combien de carrés doit-il dessiner ? ……….

3) Alexandre aimerait réaliser le dessin n°**100** sur la fenêtre de sa classe avec des post-it. Combien de post-it devra-t-il utiliser ?

4) Dans la classe d'Alexandre, il y a une boite contenant des papiers sur lesquels est chaque fois indiqué un nombre … Alexandre va choisir un papier au hasard dans la boîte. Le nombre indiqué sur le papier lui donnera le numéro d'un dessin de la suite.

   a) Ecris un message à cet élève pour qu'il sache comment il pourra calculer le nombre de post-it dont il aura besoin pour réaliser le dessin choisi au hasard. ***Attention***, *il doit juste savoir combien il lui faudra de post-it : il ne devra pas faire le dessin.*

   b) **Si tu es en 2e secondaire**, écris ce moyen en langage mathématique (utilise des signes d'opérations,…).

Figure 3 *- La situation proposée aux élèves*

IV. RESULTATS

Les résultats apportent des éléments empiriques permettant d'approcher la deuxième problématique au cœur de cet article : Quelles sont effectivement les démarches mises en œuvre par les élèves selon qu'ils sont à l'école primaire ou au début de l'enseignement secondaire ?

Cette partie est structurée en deux parties. Dans un premier temps, nous nous centrerons sur le message formulé par les élèves pour généraliser la suite. L'ensemble des productions sera analysé en référence à la typologie de Radford (2006, 2008) présentée précédemment. Par la suite, nous analyserons plus précisément la symbolisation mathématique des messages réalisée par les élèves de grade 8.

a) Les démarches de généralisation des élèves de 6^e et 8^e grades.

La figure 4 présente quelques démarches de chaque sorte, permettant d'illustrer le classement réalisé. Etant donné la consigne (rédiger un message), très peu de productions ont pu être classées dans la catégorie « généralisation algébrique symbolique », les élèves n'étant pas incités à symboliser algébriquement leur raisonnement.

	Production de l'élève	**Commentaire**
Induction naïve	Si c'est le dessin 10, il doit prendre 5 fois les carrés qu'il y a sur le dessin 2.	L'élève ici propose d'appliquer le raisonnement proportionnel.
	Tu prends le nombre fois le nombre, puis tu ajoutes 2.	On peut penser ici que l'élève se base sur le motif 3, seul cas pour lequel cette règle fonctionne.
Généralisation arithmétique	Il devra ajouter toujours 3 par rapport au nombre qu'il aura.	Cette production indique que l'élève a repéré l'accroissement constant entre les termes de la suite
	Tu dois regarder le n°1 puis faire une addition de 3 chaque fois jusqu'au numéro que tu as pêché.	Par rapport à la précédente, cette production apporte l'idée supplémentaire du point de départ (5 post-it pour le premier motif).
	Par exemple, il choisit un post-it et que c'est le n°10. Il devra prendre 23 post-it. Si le n°7 contient 14 post-it, il faudra en ajouter 9 (3 par dessin) pour avoir le 10.	On peut penser que cette démarche pourrait évoluer vers une généralisation algébrique, si l'élève identifie que 9, c'est 3 x 3, 3 étant également la différence entre 10 et 7).
Généralisation algébrique	S'il a le 100, il doit faire 5 puis ajouter 99 fois 3, ça fait 302. Si c'est 150, il doit faire 5 puis ajouter 149 fois 3, ça fait 434.	Il s'agit ici de deux exemples de généralisation algébrique factuelle : bien que les deux démarches sont exprimées par des nombres, elles présentent un caractère général qui laisse à penser que la règle pourra être utilisée quel que soit le motif.
	Par exemple ; si le n° est 401, il faudra faire 3 x 401 + 2. C'est la même chose avec tous les autres nombres.	
	On fait le nombre ….. fois 3, plus 2	La généralisation algébrique est, dans ces trois cas, de nature contextuelle : l'ordre des
	Il doit faire le nombre qu'il a péché fois 2 puis rajouter le nombre plus 2.	

	Tu dois faire le nombre que tu as plus 2 pour la ligne horizontale et pour les 2 autres, tu dois faire chaque fois ton nombre. Pour finir, tu additionnes le tout.	opération est chaque fois renforcé par un mot ou un signe de ponctuation. Les deux dernières démarches témoignent d'une visualisation de la suite décomposée en 3 lignes horizontale.
	3n + 2	La généralisation nous parait de nature symbolique : elle utilise de manière correcte le symbolisme algébrique (omission du signe « . » et respect de la priorité des opérations).

Figure 4 - *Quelques exemples de démarches proposées par les élèves*

La figure 5 présente la nature des raisonnements mis en œuvre par les élèves, en fonction de leur niveau d'étude.

	6P (N = 79)	**2S** (N = 77)
Induction naïve • Raisonnement proportionnel	5%	5%
• Démarche valable pour un cas seulement	14%	5%
Généralisation arithmétique	27%	18%
Généralisation algébrique[2] • Factuelle	19%	12%
• Contextuelle ou symbolique	20%	38%
Inclassable[3]	6%	5%
Omission	9%	17%

Figure 5 - *Démarches de généralisation mises en œuvre par les élèves, selon le niveau d'étude*

Les résultats de la figure 5 confirment notre première hypothèse : avant tout enseignement formel de l'algèbre, bon nombre d'élèves sont capables de développer des raisonnements de nature algébrique, même si la manière de symboliser ceux-ci ne relève pas toujours de l'utilisation du code alphanumérique : environ 40% des élèves de grade 6 (39%) écrivent un message révélant une « généralisation algébrique », et la moitié d'entre eux parviennent à exprimer leur raisonnement à l'aide d'un substitut symbolique.

Des différences apparaissent toutefois entre les démarches mises en œuvre par les élèves n'ayant pas encore abordé l'algèbre et celles élaborées par les autres.

- la proportion de raisonnements de type « induction naïve » est plus conséquente en primaire que dans les autres années d'étude, la différence la plus marquée concerne la

[2] Vu la consigne donnée aux élèves (Ecris un message), il ne nous semblait pas pertinent de distinguer les démarches de types généralisation contextuelle ou symbolique.

[3] Certaines démarches témoignaient davantage d'une incompréhension de la consigne que d'une véritable démarche de généralisation.

proportion de raisonnements valables pour un cas seulement, laissant penser que les élèves ont axé leur réflexion sur l'analyse d'un seul terme de la suite (14% en grade 6, contre 6% en grade 8), raisonnement très éloigné d'une démarche de nature algébrique : la recherche d'un point commun à au moins deux termes de la suite n'étant pas un élément sur lequel 14% des élèves de grade 6 ont spontanément porté leur attention. La formulation de la question 4 a été réfléchie en référence aux recommandations de Radford, Miranda, et Demers (2009) qui ont étudié les façons de faire comprendre au mieux l'enjeu de la tâche aux élèves du primaire, sans les orienter sur une démarche particulière de résolution. Toutefois, on peut émettre l'hypothèse que la formulation de la question « Alexandre va choisir un papier au hasard … » a peut-être induit les élèves de primaire, non familiers avec ce genre d'énoncés, à imaginer la situation dans leur tête, à se concentrer sur un cas particulier et à s'engager ainsi dans une démarche d'induction naïve. Ce problème se pose sans doute moins pour les élèves de grade 8 qui sont plus familiers à ce genre de tâche.

- L'autre différence intéressante concerne la proportion d'élèves qui formalisent leur démarche algébrique par le biais d'un substitut symbolique : 20% des élèves de grade 6 et 38% des élèves de grade 8 parviennent à élaborer des généralisations contextuelles ou symboliques. Lorsque les élèves de grade 6 développent une généralisation de type algébrique, la moitié d'entre eux ne pensent pas spontanément à nommer l'inconnue par un substitut symbolique. On peut penser que la nécessité par écrit leur démarche a peut être limité les élèves de grade 6 dans les possibilités de dénotation de l'inconnue. En effet, les travaux de Radford (2007, 2008, 2013) montrent à quel point le langage oral et gestuel occupe une place importante dans ce type d'activité. Par ailleurs, présentés dans une perspective sémiotique, les travaux qu'il a menés montrent que le dialogue entre élèves et avec l'enseignant est aussi une composante essentielle des productions écrites qui peuvent découler de l'exploitation de telles activités.

b) Les symbolisations mathématiques développées par les élèves de 14 ans.

La figure 6 présente les caractéristiques des messages symbolisés mathématiquement par les élèves, après un an d'expérience dans le domaine algébrique

Caractéristique de l'écriture mathématique	Exemples	% de démarches
Symbolisation algébrique correcte respectant les conventions algébriques	3n + 2	4%
Symbolisation algébrique utilisant la lettre, mais comportant des marques du lien à la suite étudiée	(a.3) + 2 n.3 + 2 x-3 < x < x + 3	34%
Symbolisation algébrique correcte n'utilisant pas la lettre, mais un substitut symbolique	….. . 3 + 2 Numéro . 3 + 2	10%
Symbolisation n'impliquant que des nombres et des signes opératoires	. 3 + 2 5 +3 + 3 ...	19%
Symbolisation utilisant deux lettres différentes ou une même lettre pour désigner des nombres différents	n x 2 + n[4] 2a + b	3%
Erreurs de parenthèse	n. 3 (+2)	4%

[4] La mise en mots de cette démarche montre que l'élève a analysé la suite de manière horizontale (deux lignes correspondant au n° du dessin, et la dernière en a 2 de plus que le n° du dessin. La symbolisation mathématique semble indiquer ici que l'élève a éprouvé des difficultés à identifier une inconnue à partir d'une autre (n et n+2).

	(3n) + (2)	
Autres erreurs		1%
Omission[5]		25%

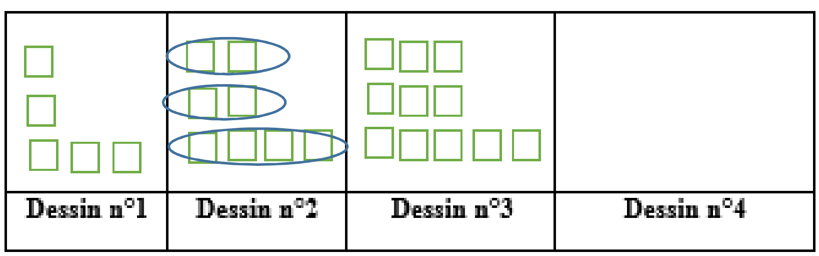
Figure 6 – *Caractéristiques des messages symbolisés mathématiquement par les élèves de grade 8*

La seconde hypothèse formulée se vérifie également : même après plus d'une année d'utilisation du symbolisme algébrique, les élèves de 14 ans éprouvent de nombreuses difficultés pour formaliser, par le biais de l'écriture algébrique, leur raisonnement. Moins de 40% des élèves de grade 8 parviennent à formuler leur raisonnement à l'aide d'une expression algébrique, même encore ancrée dans le contexte de la suite.

Au total, 10% des élèves sont proches d'une écriture correcte, mis à part le fait qu'ils n'ont pas pensé à utiliser une lettre dans ce contexte (ils utilisent alors un point d'interrogation ou un mot pour symboliser le nombre inconnu).

Deux erreurs nous semblent particulièrement importantes à mettre en évidence.

- Près de 20% des élèves ne symbolisent que des opérations à effectuer (fois 3 plus 2) pour trouver un terme quelconque de la suite. On peut penser, en référence aux travaux de Radford (2002), que ces élèves ne parviennent pas à réaliser le processus de nominalisation, consistant à passer d'une expression verbale (multiplier par 3 puis additionner 2) à une expression nominale (x . 3 + 2).
- Une autre erreur concerne surtout les élèves qui ont tenté d'exprimer algébriquement la règle suivante : « on a le numéro du motif sur les deux lignes du haut et le numéro du motif + 2 sur la ligne du bas».



Bon nombre d'élèves ont éprouvé des difficultés pour exprimer cette règle à l'aide d'une seule inconnue. En référence aux travaux de Duval (2002), ces réponses témoignent de la difficulté qu'ont les élèves à désigner plusieurs objets inconnus à partir d'un seul élément inconnu. Pour contourner ce problème, certains élèves ont utilisé 2 inconnues (a.2 + b ; a représentant le nombre de carrés sur chacune des deux lignes du haut et b, désignant le nombre de carrés sur la ligne du bas), d'autres ont utilisé une même inconnue pour désigner deux nombres différents (x. 2 + x ; le « x » présenté en premier lieu désignant le nombre de carrés sur chacune des deux premières lignes et le « x » présenté en deuxième lieu désignant le nombre de carrés sur la dernière ligne) et d'autres ont symbolisé la deuxième quantité par un nombre (ex : a.2 + 202 – on peut penser ici que l'élève a traduit le calcul 200 . 2 + 202 en langage mathématique, en remplaçant a par 200, et en conservant le 202 dans sa formule).

[5] Bon nombre d'élèves qui avaient rédigé en mots une généralisation de type arithmétique ont omis de répondre à cette question.

V. CONCLUSION

Traditionnellement, la plupart des curricula mathématiques séparent l'étude de l'arithmétique et de l'algèbre, l'arithmétique étant de la responsabilité des apprentissages du primaire alors que l'algèbre est réservée aux élèves de début d'enseignement secondaire. Des recherches récentes s'accordent sur le fait qu'une révision des programmes de primaire en vue de laisser place au développement de la pensée algébrique des élèves peut être bénéfique pour l'approfondissement de leurs connaissances des nombres en général (Cai & Knuth 2011). Les travaux menés dans ce sens par Radford et ses collaborateurs (2006, 2008, 2009, 2014) montrent que les situations de dénombrement impliquant des suites arithmétiques sont des environnements propices au développement de cette pensée.

Les programmes de Belgique francophone autorisent l'exploitation de situations de dénombrement, en proposant de les travailler à la fin de l'enseignement primaire (à travers des exploitations numériques) et au début de l'enseignement secondaire (où l'accent sera mis sur l'élaboration d'une formule permettant de généraliser le phénomène à tous les cas possibles).

C'est dans ce contexte que se situe la réflexion présentée ici. Elle présente un certain nombre de limites. Tout d'abord, elle ne concerne 156 élèves de 11 et 14 ans issus 8 classes qui se sont prêté volontairement à l'exploitation, sous la forme d'un test papier-crayon, d'une seule situation impliquant des suites arithmétiques. Ensuite, l'analyse présentée dans cette communication est focalisée sur la manière dont les élèves expriment par écrit un moyen général pour déterminer n'importe quel terme de la suite étudiée. Les travaux menés par les chercheurs en sémiotique ont pourtant montré que les expressions orales et gestuelles des élèves sont également centrales pour exprimer leurs raisonnements (Radford 2014) : dans cette étude, nous n'avons pas eu accès à ces canaux de communication. Il nous semble évident que les résultats auraient pu être différents si nous avions pu observer les élèves lors de la réalisation de la tâche.

Au-delà de ces limites, une série de constats méritent d'être discutés.

Les résultats nous amène à penser que la rupture introduite par les curricula du primaire et du secondaire est artificielle et ne rend pas compte des véritables capacités, même spontanées, des élèves de 11-12 ans dans ce domaine : dès la fin de la scolarité primaire, environ 40% des élèves parviennent sans aide à développer des raisonnements de nature algébrique, qu'ils peuvent exprimer par écrit. Après plus d'une année d'acquis algébriques, cette proportion s'élève à environ 50%.

Un autre constat important concerne les résultats obtenus par les autres élèves. Même après une année d'expérience algébrique et de travail approfondi sur les techniques qui y sont associées (calcul algébrique, résolution d'équations), près de 30% des élèves élaborent un raisonnement relevant soit de l'induction naïve, soit d'une généralisation arithmétique qui est limitée à la découverte de cas proches de ceux qui sont donnés au départ. Les outils cognitifs dont ces élèves font preuve ici ne leur permettent pas encore de répondre de manière satisfaisante à ces problèmes de dénombrement qui visent à les confronter à la notion d'indéterminée. Comme le confirment de nombreuses études (Kieran 2007), un travail soutenu par des discussions entre pairs et avec l'enseignant peut permettre à ces élèves de progresser dans leur raisonnement.

Outre cette difficulté à élaborer un raisonnement de nature algébrique, apparaissent des difficultés importantes des élèves débutant en algèbre pour exprimer, à l'aide du formalisme mathématique, leur raisonnement : à peine 1/3 des élèves de grade 8 parvient à symboliser correctement le raisonnement en utilisant spontanément la lettre. Près de 20% des élèves ne parviennent à développer le processus de nominalisation : ils n'expriment à l'aide de l'écriture mathématique que les opérations à réaliser au départ de l'inconnue, cette dernière n'apparaissant nulle part dans leur formule. D'autres élèves éprouvent des difficultés à exprimer une inconnue au départ d'une autre inconnue. Ces deux démarches sont pourtant essentielles dans d'autres domaines abordés au début de l'enseignement secondaire, en particulier lors de la mise d'un problème en équation (Duval 2002 ; Radford 2002). Il nous semble que ces problèmes d'écriture doivent faire l'objet d'un enseignement beaucoup plus approfondi, qui mériterait sans doute être amorcé dans un contexte arithmétique, dès l'école primaire (Cai & Knuth 2011).

Si de nombreux résultats montrent que les activités de réflexion sur les suites arithmétiques peuvent être porteuses pour aider les élèves à développer leur pensée algébrique, un travail important d'information voire même de formation est nécessaire pour amener les enseignants du primaire et du secondaire à poursuivre, chacun avec leurs objectifs spécifiques, cet ambitieux projet auprès de leurs élèves. Des recherches centrées plus spécifiquement sur cette question nous paraissent essentielles pour permettre d'amener in fine davantage d'élèves à maitriser pleinement tant les concepts et procédures algébriques élémentaires.

REFERENCES

Cai J., Knuth E. (2011) *Early algebraization*. New York: Springer.

Duval R. (2002). *L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets.* Actes du séminaire Franco-italien sur l'enseignement de l'algèbre. Irem de Nice.

Dörfler W. (1991) Forms and means of generalization in mathematics. In Bishop A. J., Mellin-Olsen S., Van Dormolen J. (Eds.) *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Julo J. (1996) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.* Rennes : Presses universitaires.

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In Lester F. K. (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Koedinger K., Nathan M. (2004) The real story behind story problems. Effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences* 13(2), 129-164.

Radford L. (2002) On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 26, Anne D. Cockburn and Elena Nardi (Eds.), Vol. 4, 81-88.

Radford L. (2006) Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In Alatorre S., Cortina J. L., Sáiz M., Méndez A. (Eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 2-21). Mérida: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford L. (2008) Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*. DOI 10.1007/s11858-007-0061-0.

Radford L. (2014) The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal* 26, 257-277.

Radford L., Miranda I., Demers, S. (2009) *Processus d'abstraction en mathématiques. Ottawa: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques.* Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Squalli H. (à paraitre) La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. *Actes de l'Espace Mathématique Francophone*. Alger.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LES PROCESSUS ABSTRAIRE ET GÉNÉRALISER CONCEPTUALISÉS DANS UNE PERSPECTIVE COMMOGNITIVE

Doris JEANNOTTE*

Résumé – Ce texte présente une exploration théorique des termes généralisation et abstraction en tant que processus de pensée mathématique. Après la présentation d'un survol de la littérature en didactique des mathématiques sur généralisation et abstraction, les principales caractéristiques de ces deux processus sont présentées. Basé sur une perspective commognitive, généraliser et abstraire sont défini comme des processus discursifs. Le premier génère des énoncés qui étendent un discours existant. Le second crée un nouveau discours avec ses propres règles et ses nouveaux objets. En conclusion, ces deux processus sont mis en relation avec le raisonnement mathématique et il est proposé que l'abstraction ne soit pas considérée comme un processus de raisonnement mathématique.

Mots-clés : Pensée mathématique, abstraire, généraliser, raisonnement mathématique, commognition

Abstract – This paper presents a theoretical exploration of generalization and abstraction as processes of mathematical thinking. After presenting an overview of the mathematics education literature on generalization and abstraction, we highlight the principal characteristics of these two processes. Based on the commognitive framework, we situate generalization and abstraction as discursive processes. The first generates new utterances that extend an existing discourse. The second creates a new discourse with its own rules and new objects that are not coherent with the old ones. We conclude with how they might be related to mathematical reasoning, and thereby propose that abstraction not be considered a process of mathematical reasoning.

Keywords: Mathematical thinking, abstracting, generalizing, mathematical reasoning, commognition

Favoriser le développement de la pensée mathématique et plus particulièrement du raisonnement mathématique (RM) est un objectif de plusieurs curriculums à travers le monde. La mise de l'avant du RM par les politiques éducationnelles et les recherches sur les RM sont souvent justifiées par sa relation avec la compréhension et le sens (donner du sens au monde qui nous entoure). C'est par l'utilisation de différents RM que les élèves donnent du sens aux contenus mathématiques rencontrés en classe et aux processus mathématiques nécessaires à la résolution de problèmes mathématiques.

Ainsi, ces curriculums sont parfois influencés par des recherches en didactique des mathématiques et :

> The aim of developing mathematical reasoning in classrooms calls on the research community to clarify what is mathematical reasoning and what it looks like in school contexts (Reid 2002, p. 7).

* Université du Québec à Montréal – Canada - jeannotte.doris@uqam.ca

Jeannotte D. (2015) Les processus abstraire et généraliser conceptualisés dans une perspective commognitive. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 280-289.

C'est donc dans le but d'éclairer le champ conceptuel du RM que le présent écrit cherche à définir d'un point de vue théorique deux processus de pensée mathématique liés au RM dans la littérature en didactique des mathématiques.

Lors d'un projet portant sur la conceptualisation du RM pour l'enseignement et l'apprentissage du RM en classe (Jeannotte 2015), l'analyse de la littérature scientifique en didactique des mathématiques a permis de mettre en lumière différents processus liés au RM. Un de ceux-ci est le processus généraliser. Généraliser est lié à conjecturer, prouver et justifier (Mason et al. 1994). L'exploration de la littérature afin de caractériser le terme généraliser de façon cohérente avec le RM a rapidement mené au processus d'abstraction (voir p. ex. Pedemonte 2002 ; Dreyfus 1991 ; ou encore Piaget 1977). Le développement de ces deux processus en classe du primaire et du secondaire est étudié par plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques. Toutefois, malgré la pléthore de recherches en didactique des mathématiques sur la généralisation et l'abstraction, le sens de ces deux processus et leurs liens conceptuels avec le RM restent ambigus. Comme il a été souligné par Davis et Hersh (1981) et White (1993), l'abstraction et la généralisation sont même parfois utilisées comme synonymes. Pour mieux comprendre le sens de ces deux processus et leur relation au RM, une recherche théorique supportée par l'anasynthèse (Legendre 2005) a été entreprise afin de proposer une conceptualisation de ces deux termes.

J'ai structuré ce texte en cinq sections. Dans un premier temps, je présente les assises méthodologiques qui ont guidé cette recherche théorique. Dans un second temps, j'élabore autour des assises théoriques sur lesquelles s'appuit la synthèse pour en aboutir à l'objectif de ce texte qui est d'explorer conceptuellement les processus généraliser et abstraire. Dans un troisième temps, l'analyse de la littérature autour de généraliser et abstraire est exposée. Dans un quatrième temps, je partage la réponse à l'objectif de ce projet, la synthèse théorique qui positionne ces deux termes (généraliser et abstraire) dans une perspective commognitive. Enfin, en conclusion, je discute de certaines implications.

I. L'ANASYNTHESE EN TANT QU'ASSISES METHODOLOGIQUES

La démarche méthodologique qui supporte cette théorisation est l'anasynthèse (Legendre 2005, voir figure 1). L'anasynthèse est un néologisme formé des mots analyse et synthèse.

> [Elle] est un cadre général qui permet de baliser l'analyse et la synthèse d'une pluralité de données conceptuelles ou empiriques pour la conceptualisation de modèles théoriques (Guay 2004, p. 19).

Premièrement, un corpus a été circonscrit à partir de bases de données et de mots-clés liés au RM et plus particulièrement, dans le cas de cette réflexion, liés à la généralisation et à l'abstraction. Des textes d'auteurs majeurs dans le domaine ainsi que des textes cités par des auteurs qui se sont penchés sur la généralisation et l'abstraction ont aussi été ajoutés au corpus s'ils n'étaient pas présents dans la première revue de la littérature. Comme le but de l'analyse est de mettre en lumière les convergences, les divergences et les potentialités entre les différents auteurs dans la littérature, le processus de constitution du corpus s'est arrêté lorsqu'aucune nouvelle information n'émergeait de l'analyse des textes.

Deuxièmement, des informations reliées aux aspects théoriques, axiologiques, praxiques et explicatifs sont extraites du corpus. À partir de ces informations, une synthèse est ensuite écrite. Cette dernière met en évidence les convergences, les différences et les potentialités entre les différents auteurs. Enfin, un modèle est proposé qui met en lumière les différentes caractéristiques des termes généraliser et abstraire dans une perspective commognitive. Des boucles de rétroaction permettent d'éclairer l'élaboration du modèle tout au long de la démarche. Ces boucles sont déclenchées par, entre autres, l'émergence de nouvelles informations, les commentaires lors de la présentation du prototype, une mise à l’épreuve de l’argumentation.

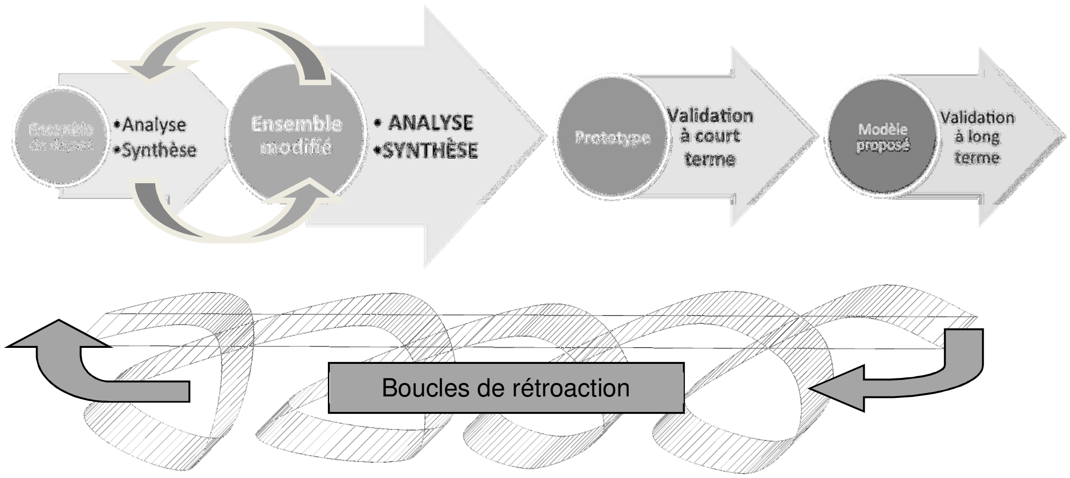


Figure 1 *- la démarche d’anasynthèse (tiré de Jeannotte 2015)*

II. LA COMMOGNITION EN TANT QU’ASSISES THEORIQUES

Le cadre utilisé pour explorer les processus de généralisation et d’abstraction est la commognition développée par Sfard (2008, 2012). Ce choix a deux principales implications. Premièrement, pour un chercheur commognitif, le développement de la recherche est équivalent au développement du discours scientifique. Un chercheur doit construire à partir du travail d’autres chercheurs en visant le développement d’un discours commun. De ce fait, cette étude s’appuie sur la littérature en didactique des mathématiques qui s’intéressent à la généralisation et à l’abstraction. Ce corpus permet de construire à partir du discours scientifique déjà construire par la communauté de didactique des mathématiques. Il ne s’agit donc pas d’un modèle de ce qu’on retrouve comme différents sens dans cette communauté. Ainsi, le modèle proposé a ses propres assises théoriques (la commognition).

Deuxièmement, pour un chercheur commognitif, les mathématiques (ou la pensée mathématique) sont un discours, c’est-à-dire, un type particulier de communication. Cette communication ne se limite pas non plus aux interactions langagières. En fait, tout acte de communication est une composante du discours mathématique : langage corporel, indices contextuels, histoire des interlocuteurs. Il y a deux niveaux de discours, le niveau objet et le niveau méta. Le niveau objet est un discours qui porte sur les objets de ce discours. Le second type de discours est celui de niveau méta. Le discours dit « de niveau méta » est un discours qui porte sur un autre déjà existant. Par exemple, Sfard (2008) considère l’algèbre élémentaire comme un discours qui subsume l’arithmétique. L’algèbre élémentaire est alors vue comme un méta discours. Comme le discours est récursif, l’algèbre élémentaire devient ensuite un discours en soi sur lequel on peut de nouveau porter un regard méta, et ainsi de suite. Ce type de discours met en lumière le deuxième élément caractéristique du discours mathématique que Sfard (2002) souligne, c’est-à-dire, les règles métadiscursives qui le régissent. Ces règles métadiscursives sont ce qui permet qu’il y ait communication effective, et sont, selon Sfard (2002), le véhicule premier de la culture mathématique. Ces règles sont rarement explicitées. Sfard donne comme exemple, de ces règles métadiscursives, les façons dont on définit et prouve en mathématique.

Le développement d’un discours mathématique (donc des mathématiques) correspond à un changement de ce discours. Deux sortes de développement de discours sont possibles : le développement de niveau objet et le développement de niveau méta. D'un côté, le développement de niveau objet réfère à une extension du discours existant[1] à propos d'objets mathématiques déjà construit. De l'autre, le développement méta du discours réfère à la construction d'un nouveau discours en changeant les règles du jeu mathématique, construisant ainsi de nouveaux objets mathématiques. Cette distinction entre le développement de niveau objet et de niveau méta sera cruciale pour la distinction entre les processus généraliser et abstraire. Ceci demande un petit détour quant à ce qui est entendu par objet mathématique. Sfard définit l'objet discursif comme suit :

> The (discursive) objet signified by S (or simply object S) in a given discourse on S is the realization tree of S within this discourse » (Sfard, 2008, p.166).

Elle précise cette définition en 2012:

> a mathematical object can be defined as a mathematical signifier together with its realization tree, where the realization tree is a hierarchically organized set of all the realizations of the given signifier, together with the realizations of these realizations, as well as the realizations of these latter realizations, and so forth (Sfard 2012, p. 4).

Une autre distinction importante concerne ce qui est entendu ici par RM et par pensée mathématique. D'un point de vue commognitif, le RM est un processus métadiscursif qui dérive des énoncés à propos d'objets ou de relations mathématiques en explorant les relations qui les unissent (Jeannotte 2014, 2015). Ce processus est organisé en une certaine structure qui est contingentée par des règles discursives partagées et est porteur d'une valeur épistémique. Le RM peut alors avoir une fonction de systématisation. Ainsi, le RM étend un discours à propos d'objets mathématiques déjà existant. Il permet donc un développement de niveau objet. Pour sa part, tel que stipulé précédemment, la pensée mathématique est synonyme de discours mathématique. La pensée mathématique est composée d'un vocabulaire particulier, de médiateurs, d'énoncés généralement acceptés, de routines. La pensée mathématique est davantage que le RM. Le RM est un type de processus de pensée mathématique contribuant au développement des mathématiques par l'inférence de nouveaux énoncés.

L'objectif est donc ici d'explorer les concepts de généralisation et d'abstraction dans la littérature en didactique des mathématiques et de les caractériser d'un point de vue commognitif ainsi qu'à la lumière de la définition de RM précédemment exposée afin d'éclairer les différents liens qu'ils entretiennent avec le RM.

III. GENERALISATION ET ABSTRACTION DANS LA LITTERATURE

Malgré que ces deux processus sont souvent considérés comme interreliés, chacun est présenté séparément afin de souligner les caractéristiques de chacun.

1. La généralisation

Pour G. J. Stylianides (2005) et Artzt (1999), raisonner mathématiquement, c'est généraliser et construire des conclusions valides. Généraliser est donc, pour ces deux auteurs, un processus central de RM et complémentaire à celui de construire des conclusions valides. Pour Mason (1996), la généralisation est « the heartbeat of mathematics, and appears in many forms » (p. 65). Elle peut mener à ce qui est plausible, pourquoi cela semble plausible et là où cela est plausible (Mason et al. 1994). Cette idée de plausibilité nous mène à Pólya (1968) et

[1] On peut ici distinguer développement de niveau objet (ou méta) de discours de niveau objet (ou méta). Par exemple, un discours de niveau méta peut permettre un développement de niveau objet. C'est le cas du raisonnement mathématique (voir Jeannotte 2015).

son livre sur le raisonnement plausible. Repris par plusieurs auteurs tels Pedemonte (2002) et Stylianides (2005), Pólya définit le processus généraliser comme « passing from the consideration of a given set of objects to that of a smaller set, contained in the given one » (1968 p. 13). Un élément qui apparait important dans cette définition est le terme passage. La définition de Pólya est similaire à celle de Dreyfus (1991) qui caractérise la généralisation comme un processus qui va plus loin que le particulier, qui identifie des similitudes et qui étend le domaine de validité d'un énoncé. White (1993) réfère à la recherche d'invariant, applicable à un ensemble d'objets. Similairement, Ellis (2007) définit la généralisation comme

> an activity in which people in specific socio-mathematical contexts engage in at least one of three actions: (a) identifying commonality across cases, (b) extending one's reasoning beyond the range in which it originated, or (c) deriving broader results from particular cases (p. 311).

Ellis élargit l'idée d'ensemble d'objets en incluant n'importe quelle extension d'une idée à un phénomène. Ellis (2011) considère que l'observation des interactions entre élèves, ou entre élèves et enseignants, permet d'étudier le développement du processus de généralisation puisque ce dernier se construit, selon elle, par le biais des interactions. Celui-ci, qui a un aspect dynamique et statique, serait fortement dépendant du contexte, de l'histoire des élèves, de leurs interactions et des artéfacts disponibles.

Pour Kaput (1999),

> generalization involves deliberately extending the range of reasoning or communication beyond the case or cases considered, explicitly identifying and exposing commonality across cases, or lifting the reasoning or communication to a level where the focus is no longer on the cases or situations themselves but rather on the patterns, procedures, structures, and the relations across and among them (which, in turn, become new, higher-level objects of reasoning or communication) (Op. cite, p. 136).

La première partie de la définition de Kaput fait référence à un processus qui étend les énoncés précédemment inférés à un plus grand domaine de validité, tout comme souligné par les autres auteurs cités, et ne nécessitent donc pas de construire de nouveaux objets au sens où cette structure, qui est mise au jour, table sur des objets mathématiques qui font déjà partie du discours. On pourra dès la prochaine section lier la seconde partie de la définition de Kaput à un processus d'abstraction.

Pour Cañadas et al. (2007),

> generalizing the conjecture involves a change in what Duval (1990) calls its 'epistemic value', from a possible conjecture to an accepted general rule. This is a change in what is believed about the statement (Op. cite, p. 64).

De l'analyse des textes portant sur la généralisation en didactique des mathématiques, plusieurs éléments peuvent être retenus pour caractériser « généraliser » en tant que processus de RM. Dans le corpus analysé[2], le processus de généralisation est parfois lié à l'expansion du domaine de validité d'un énoncé, parfois à la construction d'un énoncé de nature générale à partir d'un ou deux cas. De même, cette analyse illustre comment l'idée de transformation apparait sous différentes formes dans la littérature sur la généralisation à travers les expressions *passage, extension, going further, change*. Mais, on peut se demander en quoi une telle transformation est-elle liée à l'abstraction en particulier et au RM en général d'un point de vue commognitif.

[2] Il ne faut pas oublier que le corpus original est composé de textes intéressés au RM.

2. *L'abstraction*

Dans les textes sur le RM, des auteurs spécifient que le processus de RM se fait sur des objets abstraits, ou encore sur des concepts abstraits : « [M]athematical reasoning requires that young children recognize how a given term (or object or symbol) represents some abstract concept that is not directly conveyed » (English 2004, p. 16). Soulignons ici que le terme abstrait est associé à l'objet et non au processus en soi. Cet élément a une importance dans la définition de l'abstraction et, à certains moments, il est difficile de comprendre, comme dans la définition d'English (2004), si l'abstraction est un processus ou une qualité d'un objet mathématique. Le glissement entre ces deux sens de l'abstraction pourrait nuire à l'interprétation de certains résultats. Pour Duquesne (2003), les raisonnements se construisent à partir d'éléments familiers, mais ces éléments deviennent de plus en plus indépendants de la réalité, de *plus en plus abstraits*. Encore ici, l'abstraction est associée aux objets mathématiques. Toutefois, l'idée de processus (déroulement dans le temps) est présente. Pour Peressini et Webb (1999), l'abstraction est un mode de RM tout comme l'induction, la déduction, le raisonnement proportionnel et le raisonnement spatial. English (2004), pour sa part, mentionne que

> despite the definitional variations in the literature, there appear to be basic processes that underlie mathematical reasoning, as Dreyfus and Eisenberg (1996) posited. Those basics include quantification, patterning, abstraction and generalisation, and representation and translation (Op. cite, p. 35).

Ces différents auteurs associent clairement « abstraction » et « processus ». Mentionnons toutefois qu'English utilise, pour parler du RM, des propos qui sont plutôt liés à la pensée mathématique par Dreyfus et Eisenberg (1996). Même si certains auteurs associent RM et abstraction, très peu d'éléments théoriques sont fournis quant aux sens qui sont accordés à ce concept. Ceci a nécessité l'ouverture du corpus à une littérature plus large et hétéroclite. Dans ce nouveau corpus, l'abstraction est mise en relation, entre autres, avec les mathématiques ou la pensée mathématique.

L'abstraction est fréquemment associée à la création de concepts qui ne fait référence à aucun objet concret ou tangible (Sfard 2008). C'est aussi associé avec l'isolation d'attributs spécifiques dans le sens d'être en mesure de les considérer indépendamment d'autres attributs. Pour Mason (1989), l'abstraction est un « delicate shift of attention from seeing an expression as an expression of generality, to seeing the expression as an object or property » (p. 2). Mais ce déplacement n'est pas le passage dont fait mention Pólya (1968) dans le processus de généralisation. Mason situe l'abstraction dans la transition de l'action d'exprimer une généralisation à l'action d'utiliser et manipuler cette généralité pour construire un argument mathématique. Mason souligne l'importance d'ignorer certains éléments pour permettre de mettre la structure au jour et pouvoir la manipuler. Dans un même ordre d'idées, Dreyfus (1991) considère l'abstraction comme un processus mental qui permet d'isoler des relations entre les objets et les propriétés d'objets. D'un point de vue cognitiviste, Gray et Tall (2007) définissent l'abstraction comme un processus de création d'images mentales et mène à la création de concepts mathématiques. L'approche qui a été privilégiée ici est plutôt l'approche commognitive (Sfard 2008) et nécessite donc une nouvelle conceptualisation du concept d'abstraction se rapportant au RM qui prend en compte la nature commognitive de ce processus.

En fait, Noss et Hoyles (1996) qualifient ces visions de l'abstraction de classique,

> one of decontextualisation, a process of extricating the mathematics from the problem, removing it from action to cognition (op. cité, p. 19).

Ces derniers remettent cette vision en question.

> Where can meaning reside in a decontextualised world? If meanings reside only within the world of real objects, then mathematical abstraction involves mapping from one world to another, meaningless, world (Noss & Hoyles 1996, p. 21).

Ils proposent alors une vision où le processus d'abstraction est défini comme un processus de connexions plutôt que d'isolation et d'ascension. Le processus d'abstraction est un processus qui demande à l'élève de construire une multitude de liens entre différentes expériences similaires (Noss & Hoyles 1996). Enfin, tout processus d'abstraction est situé : « We intend by the term situated abstraction to describe how learners construct mathematical ideas by drawing on the webbing of a particular setting which in turn, shapes the way the ideas are expressed » (p. 122). Déjà, la vision de Noss et Hoyles (1996) est plus compatible avec l'approche commognitive en prenant en compte l'aspect socioculturel du processus.

Même si le processus d'abstraction n'est pas encore compris selon eux, Ohlsson et Lehtinen (1997) soutiennent que ce n'est pas un processus qui classifie le monde selon des similitudes comme le fait le processus de généralisation. C'est un processus qui rend les connaissances davantage complexes. Dans le même sens, Schwarz, Dreyfus et Hershkowitz (2009) ont développé le cadre *nested epistemic actions model of abstraction in context* pour étudier le développement du processus d'abstraction. Ils ont défini l'abstraction

> as an activity of vertically reorganizing previous mathematical constructs within mathematics and by mathematical means so as to lead to a construct that is new to the learner » (p. 24).

Dans ce cadre, l'abstraction amène une nouvelle cohérence dans l'organisation des connaissances. De même, le contexte (social, historique, ontologique) est un important aspect de leur cadre.

IV. UNE PERSPECTIVE COMMOGNITIVE

1. La généralisation d'un point de vue commognitif

Que peut-on tirer de cette synthèse ? L'idée de transformation apparait sous différentes formes dans la littérature sur la généralisation et ne semble pas nécessiter la création de nouveaux objets mathématiques. Les aspects « inférence » et « expansion » apparaissent comme importants dans la littérature. L'expansion du domaine de validité d'un énoncé et la construction d'un énoncé de nature générale à partir d'un ou deux cas sont souvent posées comme un résultat de ce processus. D'un point de vue commognitif, on peut lier le processus de généralisation au RM puisqu'il est clairement associé à l'inférence et au discours, sans qu'il y ait nécessairement création d'un nouveau discours incommensurable avec le premier. Étendre le domaine de validité d'un énoncé n'amène pas un changement au niveau des règles du discours. Les objets en jeu lors du processus de généralisation existent déjà, d'un point de vue commognitif. La généralisation est alors, d'un point de vue commognitif, un processus qui infère un énoncé à propos d'un ensemble d'objets mathématiques ou d'une relation entre différents objets de cet ensemble à partir d'un ensemble plus restreint d'objets contenus dans ce premier. La généralisation est un processus discursif qui étend un discours mathématique sans en changer les règles. Il s'agit donc d'un discours de niveau méta qui permet un développement discursif de niveau objet. De même, contrairement à ce que soulignent Cañadas et al. (2007), il n'y a pas de changement de valeur épistémique associé au processus de généralisation. D'étendre une relation d'un cas à un ensemble plus large ne change pas la valeur épistémique de cette relation. Ce processus peut donc mener à un énoncé vraisemblable, mais aussi certain. La valeur épistémique de l'énoncé n'a pas à être nécessairement vraie. Enfin, soulignons que le terme « généraliser », lorsqu'utilisé en tant que processus de RM, n'est pas ce qui est entendu par Piaget (1977, "Fondation Jean Piaget",

2014) par généralisation constructive. On peut donc dire qu'un processus de généralisation est un processus de RM lorsqu'il n'y a pas construction d'un nouvel objet mathématique, puisqu'un processus de RM est posé ainsi.

2. *L'abstraction d'un point de vue commognitif*

L'idée de rendre les connaissances plus complexes, qui a émergé de l'analyse de la littérature en didactique des mathématiques, peut être liée à un développement de niveau méta du discours mathématique. Mais alors, comment parler d'abstraction dans une approche commognitive et comment situer ce processus dans un modèle de RM? Sfard (2008) circonscrit ces deux processus, raisonnement et abstraction, en les reliant à des objets commognitifs, c'est-à-dire l'ensemble des réalisations de cet objet dans un discours donné. En d'autres mots, l'abstraction est un processus commognitif de création de concepts. D'un point de vue commognitif, ceci demande de déritualiser et d'objectiver un discours qui existe déjà afin d'en créer un nouveau.

> L'objectivation est a discursive process of double elimination, which results in freeing the evolving narratives from the extension in time and from human agency (Sfard 2008, pp.51-52),

à savoir réifier et aliéner, éléments précédemment soulignés par Mason (1989). Ceci demande donc un va-et-vient entre le discours sur les objets et le discours sur le discours (métadiscours). On retrouve ici cette idée de changement, de passage présent chez d'autres auteurs. Comme Ohlsson et Lehtinen (1997) prétendent, le processus d'abstraction d'un point de vue commognitif mène au développement d'une structure de connaissances qui est plus complexe que l'ensemble de ses composantes, qui est donc incommensurable avec l'ancien discours. Ceci peut être traduit en terme commognitif comme un changement dans les règles du jeu et la construction de nouveaux objets mathématiques. Ceci demande des aller-retour entre des discours de niveau objet et des discours de niveau méta. L'objectification est

> a discursive process of double elimination, which results in freeing the evolving narratives from the extension in time and from human agency (Sfard 2008, pp. 51-52),

c'est-à-dire par réification et aliénation. Il y a donc ici une distinction importante entre le RM (et plus particulièrement, la généralisation) et l'abstraction en tant que processus qui pourrait permettre de mieux comprendre l'apprentissage des élèves.

V. CONCLUSION

D'un point de vue commognitif, la principale différence entre le processus de généralisation et le processus d'abstraction en est une discursive. La généralisation mène à une extension du discours. Il y a une cohérence entre le discours existant et les énoncés développés par le processus de généralisation. Aucune règle du jeu n'est changée, uniquement de nouvelles informations à propos d'objets déjà construits sont inférées. Par exemple, on retrouve dans Kaput (1999) un exemple du processus (de RM) « généraliser ». Dans cet exemple, des élèves d'une classe du primaire ont observé que 3x12 = 12x3. Ils se demandent si 4x9 = 9x4 puis si cette relation est toujours vraie. Après avoir exploré d'autres cas et observé que cette relation est vraie pour plusieurs, ils étendent cette relation à tous les nombres. Si l'on se concentre sur le processus « généraliser » ici, c'est en inférant à partir de l'observation de cette relation sur plusieurs cas qu'ils sont en mesure d'étendre la relation à tous les nombres.

Le processus d'abstraction mène pour sa part à un nouveau discours, à de nouvelles règles du jeu. L'ancien discours semble limité, même désuet à partir de ce nouveau point de vue. Au cœur du questionnement, on peut se demander quel rôle est joué par le RM dans le processus d'abstraction. Évidemment, le processus d'abstraction peut impliquer à certains moments des processus de raisonnements, mais celui-ci sera local et ne pourrait à lui seul permettre de comprendre l'ensemble du processus d'abstraction, ce passage à un nouveau discours, avec de nouvelles règles et de nouveaux objets. L'abstraction peut être décrite comme un processus qui se développe par plusieurs cycles d'individualisation de discours interpersonnel et de (re)communication.

Parce que généralisation et abstraction sont liées au RM dans la littérature en didactique des mathématiques, la perspective commognitive adoptée pour cette théorisation peut avoir un impact sur le discours scientifique en lien avec le RM et la pensée mathématique. En effet, cette perspective mène à concevoir généraliser comme un processus de RM mais à rejeter abstraire comme processus deRM, l'abstraction menant à un développement de niveau méta. Bien que généraliser et abstraire puissent être considérés comme des processus de pensée mathématique et qu'un peut influencer l'autre, on ne peut subsumer l'un et l'autre.

REFERENCES

Artzt A. F. (1999) Mathematical reasoning during small-group problem solving. In Stiff L. V., Curcio F. R. (Eds.) *Developing mathematical reasoning in grades K-12. 1999 Yearbook* (p. 115–127). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cañadas M. C., Deulofeu J., Figueiras L., Reid D. A., Yevdokimov O. (2007) The conjecturing process: Perspectives in theory and implications in practice. *Journal of Teaching and Learning* 5(1), 55-72.

Davis P., Hersh R. (1981) *The mathematical experience.* Boston. MS: Birkhäuser

Dreyfus T. (1991) Advanced mathematical thinking processes. In Tall D. (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus T., Eisenberg T. (1996) On different facets of mathematical thinking. In Sternberg R. J., Ben Zeev T. (Eds.) *The nature of mathematical thinking* (pp. 253–284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Duquesne F. (2003) *Apprendre à raisonner en mathématiques à l'école et au collège* (2e éd.). Suresnes, France: Éditions du Centre national d'études et de formation pour l'enfance inadaptée.

Ellis A. B. (2007) Connections between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear relationships. *Journal for Research in Mathematics Education* 38(3), 194-229.

English L. D. (2004) *Mathematical and analogical reasoning of young learners*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Gray E., Tall D. (2007) Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal* 19(2), 23-40.

Jeannotte D. (2014) Processes of mathematical reasoning : Framing from math educator discourses. In Liljedahl P., Nicol C., Oesterle S., Allan D. (Eds.) *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (vol. 6, p. 117). Vancouver, BC.

Jeannotte D. (2015) Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire. (Thèse de doctorat non publié). Université du Québec à Montréal.

Legendre R. (2005) *Dictionnaire actuel de l'éducation* (3d éd.). Montréal, QC: Guérin.

Mason J. (1989) Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention. *For the Learning of Mathematics* 9(2), 2-8.

Mason J. (1996) Expressing generality and roots of algebra. In Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.), *Approches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). The Netherland: Kluwer.

Mason J., Burton L., Stacey K. (1994) *Thinking mathematically.* Essex, UK: Addison-Wesley.

Ohlsson S., Lehtinen E. (1997) Abstraction and the acquisition of complex ideas. *International Journal of Educational Research* 27(1), 37-48.

Piaget J. (1977) Recherches sur l'abstraction réfléchissante: L'abstraction des relations logico-arithmétiques. *Études d'Épistémologie Génétique* 34, 5-147.

Pólya G. (1968) *Mathematics and plausible reasoning* (2 ed. Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Noss R., Hoyles C. (1996) *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*. The Netherland: Kluwer Academic.

Pedemonte B. (2002). *Étude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. (Thèse de doctorat non publiée). Université Joseph Fourier, Grenoble.

Peressini D., Webb N. (1999) Analyzing mathematical reasoning in students' responses across multiple performance assessment tasks. In Stiff L. V., Curcio F. R. (Eds.) *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 156–174). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reid D. A. (2002) Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 33(1), 5–29.

Schwarz B., Dreyfus T., Hershkowitz R. (2009) The nested epistemic actions model for abstraction in context. In Schwarz B., Dreyfus T., Hershkowitz R. (Eds.) *Transformation of knowledge through classroom interaction* (pp. 11-41). New York: Routledge.

Sfard A. (2002) There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics* 46(1-3), 13–57.

Sfard A. (2008) *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Sfard A. (2012) Introduction: Developing mathematical discourse - Some insights from communicational research*.* *International Journal of Educational Research*, 51-52, 1-9.

Stylianides G. J. (2005) *Investigating students' opportunities to develop proficiency in reasoning and proving: A curricular perspective*. (Thèse de doctorat non publiée) University of Michigan.

White H. (1993) *Étude exploratoire relative à la "pensée mathématique" chez de futurs enseignants et enseignantes*.(Thèse de doctorat non publiée). Québec : Université Laval.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE DANS LE CURRICULUM TUNISIEN : ANALYSE ÉPISTEMOLOGIQUE ET INSTITUTIONNELLE

Rahim KOUKI* – Slimane HASSAYOUNE**

Résumé : Ce texte vise à présenter les résultats d'une étude didactique sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire au début du cycle secondaire tunisien.
Deux analyses didactiques y sont menées : l'une, historique et épistémologique, porte sur l'évolution diachronique des praxéologies algébriques dans les trois champs conceptuel, syntaxique et sémiotique ; et l'autre, institutionnelle, est consacrée à l'exploration des programmes et des manuels scolaires pour en décrypter les visées et les caractéristiques didactiques.
Les principaux enseignements didactiques dégagés de cette étude nous invitent à privilégier les approches de modélisation *in situ*, la construction des concepts algébriques en étroite relation avec leur fonctionnalité procédurale et la mobilisation des techniques opératoires en contexte.

Mots-clés : Praxéologie algébrique, rapport institutionnel, champ conceptuel, champ syntaxique, champ sémiotique

Abstract: This text aims to present the results of a didactics study in algebra at the beginning of the secondary Tunisian school.
Two training analyzes carried out there: one, historical and epistemological concerns the diachronic evolution of algebraic praxeologies in the three conceptual, syntactic and semiotics fields; and the other institutional, is dedicated to the exploration of the programs and textbooks to decipher the aims and didactics characteristics.
The main didactic lessons learned from this study invite to focus on the *in situ* modeling approaches, building a close relationship with their algebraic functionality, procedural concept and the mobilization of operative techniques. This opens up new research perspectives oriented towards deepening established facts and operation through a didactic and curricular engineering.

Keywords: Algebraic praxeology, institutional relationship, conceptual field, syntactic field, semiotic field.

I. OBJET ET CADRE DE LA RECHERCHE

De nombreux travaux didactiques tunisiens se sont intéressés à l'enseignement / apprentissage de l'algèbre ainsi qu'à ses aspects épistémologiques et didactiques très particuliers qui font de lui un important domaine unificateur des mathématiques. En effet, les aspects sémiotiques et syntaxiques, la modélisation des situations et les interactions entre les cadres algébrique, numérique et graphique, ont été sujets à des travaux d'investigation multiples parmi lesquels nous pouvons citer ceux de Kouki (2006), Ben Nejma (2006) et Achour (2005). Ce travail

Kouki R., Hassayoune S. (2015) Développement de la pensée algébrique dans le curriculum tunisien : analyse épistémologique et institutionnelle. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 290-312.

s'inscrit dans la lignée de ces recherches et aspire à fournir d'autres éclairages sur la nature des praxéologies algébriques visées par les programmes de la première année secondaire en Tunisie (15-16 ans). Pour ce faire, nous envisageons de rapporter les résultats d'une analyse épistémologique portant sur les principales phases historiques de l'émergence de l'algèbre d'une part, et d'une investigation institutionnelle réalisée par l'étude des programmes et des manuels scolaires ayant eu cours depuis les années soixante-dix (époque des mathématiques modernes) de ce même domaine de savoir, d'autre part.

L'algèbre élémentaire telle qu'elle est enseignée au deuxième cycle de l'enseignement de base (13-15 ans) et au début de l'enseignement secondaire tunisien (15-16 ans) se manifeste à travers deux champs praxéologiques principaux :

- Le calcul algébrique : développement, réduction, factorisation d'expressions numériques et littérales.
- La résolution de problèmes : analyse, modélisation (mise en équation, en inéquation, en système, en fonction), résolution, validation des solutions.

Son enseignement pose des problèmes cruciaux notamment aux niveaux :

- des compétences à développer chez les élèves.
- des choix didactiques à adopter dans les activités d'enseignement/apprentissage et
- de la complexité de son système sémiotique.

Dans un premier temps, nous délimitons les contours du domaine de l'algèbre élémentaire par une analyse épistémologique et historique de sa genèse. Ensuite, nous explorons les pratiques antérieures et actuelles de son enseignement, en vue de déterminer les compétences attendues des différents projets didactiques et les éventuelles difficultés rencontrées au cours des apprentissages.

Le cadre théorique dans lequel nous nous plaçons est celui de *la théorie anthropologique du didactique* initiée par Chevallard (1992). Ce cadre, assez général et opérationnel, nous semble convenir parfaitement à ce que nous comptons entreprendre et, *a priori*, s'adapte bien à nos outils et méthodes d'investigation. Ceci a l'avantage de nous aider dans notre entreprise diagnostique et favorise la production d'alternatives de remédiation aux difficultés rencontrées par les élèves dans le processus enseignement/apprentissage de l'algèbre élémentaire.

II. GENÈSE DU SAVOIR-SAVANT : *AL-JABR*.

Qu'est-ce que l'algèbre ? Quelle est son origine ? Quel est son rapport avec l'arithmétique ? Quels problèmes permet-elle de résoudre ? La réponse à ces questions doit tenir compte des phénomènes accompagnant l'évolution et le développement des théories mathématiques sous-jacentes ou mises en jeu et des obstacles rencontrés et de la manière dont ils ont été franchis.

Au cours de la haute antiquité, l'algèbre paléo-babylonienne (XVIII^{e} av. J.C) était caractérisée par des algorithmes de calcul généralisables hors contexte métrologique et par l'apparition des premières techniques algébriques fondées sur une bonne maîtrise du sens des nombres, de leurs notations métrologique et positionnelle et de leurs usages dans la résolution des problèmes scolaires (au profit des apprentis-scribes) et de la vie courante (Proust 2006). Ainsi, les praxéologies mobilisées au cours de cette période sont essentiellement algorithmiques sous-tendues par des types de tâches calculatoires stéréotypés appelant la mobilisation de techniques mécaniques calquées sur des exemples génériques. Tout se fait par imitation et application à la lettre des procédures arrêtées sans aucune démonstration ni justification apparentes, preuve d'une vraisemblable absence de technologie ou de théorie algébrique sous-jacente, du moins dans ce qui nous est parvenu à travers les traces archéologiques déjà étudiées[1].

Les Grecs (III^{e} Av. J.C) ont eu ensuite une influence spécifique sur le développement des premières procédures algébriques initiées par leurs ancêtres les mésopotamiens grâce à la rigueur du raisonnement qu'ils ont instaurée et par l'étayage géométrique des propriétés numériques accompagnant l'essor de la géométrie euclidienne (Abgrall 2011-2012). Ainsi, les praxéologies développées sont donc essentiellement fondées sur des types de tâches de calcul de grandeurs géométriques nécessitant la mobilisation de techniques de transformations d'aires justifiées par des blocs technologico-théoriques relatifs aux grandeurs et aux mesures. Le champ conceptuel et cognitif, déjà bien installé en géométrie grâce aux apports théoriques des *Éléments d'Euclide*, contient implicitement les concepts algébriques qui ne seront découverts que douze siècles plus tard par les mathématiciens arabes par un changement de cadre, amorcé par Al-Khwârizmî. Le champ syntaxique évolue parallèlement aux progrès réalisés dans le domaine du langage courant. Dans cette *algèbre rhétorique*, ni les opérations ni les inconnues ne sont représentées par des symboles, tout est écrit et communiqué verbalement en langue naturelle.

Plus tard, l'introduction de l'inconnue opérationnelle (*arithme*) - notée ς et signifiant la quantité indéterminée d'unités- par Diophante d'Alexandrie (III^{e}), a permis d'insuffler un nouvel élan au processus de résolution des problèmes en les modélisant par des écritures symboliques. Cette façon de procéder favorise un changement conceptuel dans les activités de résolution de problèmes. Le langage construit par la symbolisation de *l'arithme* et des diverses catégories de nombres[2], conjuguée à une syntaxe convenable, a permis à Diophante de traduire les problèmes posés à l'aide d'expressions algébriques se prêtant au calcul formel sur les *espèces (monômes)* et qui aboutissent à des équations réduites donnant la valeur de l'inconnue opérationnelle et, par suite, celles des inconnues cherchées (Radford 1991, pp. 2-4). Les praxéologies algébriques ainsi mobilisées sont articulées autour des types de tâches de résolution de problèmes nécessitant pour leur réalisation des techniques de modélisation à l'aide des inconnues opérationnelles et de manipulations d'écritures formelles sur les *arithme* . Des éléments technologiques transparaissent implicitement dans la démarche pré-algébrique diophantienne mais sans aucun support théorique notable. Les deux champs syntaxique et sémiotique se trouvent donc sensiblement enrichis, permettant ainsi une évolution importante des processus algébriques déployés.

Mais en fait et de l'avis d'éminents historiens des mathématiques (Rached 1984, Djebbar 2005), le mot *algèbre* provient du terme arabe *al-jabr* qui signifie en médecine réparation ou restauration d'une fracture. Il a été utilisé, dans *Al-kitâb al-mukhtasar f'il jabr w'al-muqâbala* (Le livre abrégé sur le calcul par la restauration et la comparaison), un important ouvrage écrit au début du IX^{e} siècle par Mûhammad Ibn Mûssa Al-Khwârizmî (780-850). Dans ce traité, l'expression arabe *al-jabr* (la restauration) désigne l'opération qu'on fait subir à l'équation du second degré pour en supprimer les termes précédés d'un signe *moins*, alors qu'*al-muqâbala* signifiait la réduction de termes de même degré dans une équation quadratique. C'est à partir du IX^{e} siècle que l'algèbre devient progressivement, l'art de réduire et de résoudre les équations, puis la science des expressions algébriques et enfin la résolution de tous types

[1] Høyrup (2002) considère qu'en fait, ces praxéologies ne sont pas de pures recettes découvertes par hasard et qu'elles sont guidées par des raisonnements géométriques, développés plus tard par les mathématiciens grecs et arabes.

[2] Diophante introduit et symbolise une nouvelle catégorisation des nombres en notant : Δ^{γ} (carré), K^{γ} (cube), $\Delta^{\gamma}\Delta$ (carré-carré ou bicarré), ΔK^{γ} (carré-cube), $K^{\gamma}K$ (cubo-cube).

d'équations. Cette nouvelle science simplifie et unifie les techniques anciennes de résolution des problèmes posés par la vie quotidienne des gens sédentarisés et vivant en société. Il apparaît donc que les problèmes de la vie courante comme ceux d'héritage, d'arpentage, de construction en briques etc. sont les vraies origines de ces équations et des manipulations dont celles-ci sont l'objet. Étayées par les savoirs géométriques de l'époque, les procédures utilisées par Al-khwârizmî ont ainsi permis à la pensée algébrique de progresser en matière de modélisation et de manipulation de modèles.

Après avoir pris connaissance de la traduction arabe du traité d'arithmétique de Diophante, Al-Karâjî (953-1029) utilise les concepts et lexiques algébriques *shay* (chose), *mâl* (carré) et *kaab* (cube) créés par AL-Khwârizmî pour appliquer l'arithmétique aux expressions algébriques et résoudre les problèmes à l'aide de l'algèbre de Diophante. Al-Karâjî et son disciple Al-Samaw'al (1130-1175) introduisent les polynômes sous la forme de tableaux et explicitent les opérations usuelles sur ces tableaux.

Abdeljaouad (2002) précise que :

> La multiplication d'indices attestant la présence de symboles algébriques dans les traités maghrébins d'arithmétique indienne, nous confirme dans l'hypothèse d'une origine maghrébine des symboles algébriques, apparus comme conséquence logique de l'inclusion de l'algèbre comme chapitre complémentaire aux traités de hisâb al-ghubâr. (Op. cité, p.22)

Ce symbolisme algébrique permet de représenter le nombre connu *'adad* noté : ع, l'inconnue *shay* notée : ش, son carré *mâl* noté : م, son cube *kaab* noté : ك, la quatrième puissance de l'inconnue (c'est-à-dire le carré du carré) notée : مم et les termes : égal *ya'dilû* noté : ل, soustraction *illa* noté : لا comme le montrent les fac-similés suivants illustrant le lexique sémiotique utilisé par les algébristes maghrébins du XIV[e] :

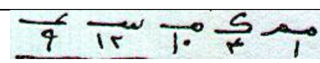
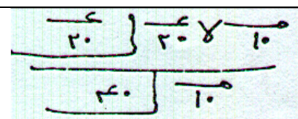
(26b)[3]		$x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 9$
(63b)[4]		$10x^2 - 20 = 20$ $\longrightarrow 10x^2 = 40.$

Tableau1 *- Fac-similés (Abdeljaoued 2002, p.26)*

Ce symbolisme se retrouve adopté par un certain nombre de mathématiciens européens, comme dans le manuscrit anonyme du XV[e] siècle, intitulé *Liber Restaurationis*. Son auteur consacre un paragraphe à la présentation d'un symbolisme algébrique en l'adaptant à l'écriture et à la langue latine (Moyon 2005). Il donne un exemple où le nombre (dragme) est représenté par *d*, l'inconnu (radicis) par *r* et le carré de l'inconnu (census) par *c*.

Dans son traité *Art analytique ou Algèbre nouvelle*, François Viète (1540-1603) introduit une véritable algèbre littérale, avec ses symboles, ses procédés calculatoires, ses transformations particulières et sa pensée spécifique (Boyé 2003, Guichard 2000). Un des principaux avantages de la méthodologie analytique de Viète est l'obtention de formules générales et applicables à plusieurs situations, caractérisées par l'usage des paramètres littéraux, ce qui permet de conserver la trace de toutes les étapes du raisonnement et de se retrouver facilement lorsque l'on procède à un changement quelconque de ces paramètres. L'activité entreprise ne se réduit donc pas à la résolution d'un problème particulier, c'est plutôt une famille entière de situations qui se trouvent résolues par ce procédé. De plus, cette avancée dans l'évolution des praxéologies algébriques est illustrée par un processus tout à fait

---

[3] Folio du manuscrit de Jerba (Abdeljaoued 2002, p.26)
[4] Ibid.

nouveau et efficace de résolution de problèmes dans différents domaines des mathématiques (arithmétiques, géométriques, trigonométriques, fonctionnels, combinatoires etc.)

Viète a le mérite de développer l'algèbre en tant qu'outil au service de la résolution des problèmes, mais il montre par la même occasion qu'algèbre et résolution de problèmes (*analyse ou art analytique*) sont imbriquées au point de se confondre. En effet le développement de l'une favorise celui de l'autre, voire nécessite celui de l'autre, c'est la signification du titre donné à son œuvre *Introduction à l'art analytique ou algèbre nouvelle*.

Poursuivant l'élan donné par Viète, Descartes propose une méthode d'algébrisation de la géométrie, dans l'ouvrage intitulé *La Géométrie* et publié en 1637, il annonce :

> Par la méthode dont je me sers, tout ce qui tombe sous la considération des géomètres se réduit à un même genre de problèmes qui est de rechercher la valeur des racines de quelque équation. (Cité in (Guichard 2000, p. 48)

Et précise plus loin qu'il veut que sa méthode soit universelle pour :

> Résoudre généralement toutes les questions qui peuvent se présenter en n'importe quel genre de quantité aussi bien continue que discrète. (Ibid.)

Le véritable essor de l'algèbre n'est amorcé que lorsque la substitution des écritures formelles aux écritures verbales est devenue possible. Mais pour arriver à cette étape décisive de son évolution, l'algèbre s'est plusieurs fois métamorphosée par une lente abstraction de ses objets d'étude : mesure de grandeurs, calcul sur des nombres abstraits et finalement manipulation d'écritures formelles avec des lettres désignant d'abord des nombres et ultérieurement toutes sortes d'objets. En tant qu'outil et processus de résolution de problèmes, l'algèbre a parallèlement évolué vers une forme de pensée analytique offrant ainsi une alternative concise et efficace à la méthode synthétique de *l'arithmétique*.

Après ce bref passage en revue des principales étapes historiques de la genèse de l'algèbre, nous pouvons, à présent, résumer l'évolution historico-épistémologique des praxéologies algébriques en nous arrêtant sur ses moments forts. Le tableau 2 en synthétise les principales caractéristiques :

La période paléo-babylonienne	XVIII^{e} Av. J.C.	**Pré-algèbre algorithmique :** Usage des tables numériques et métrologiques, algorithmes de calcul**, procédures de résolution d'équations sur des exemples génériques.**
La Grèce antique : Les Éléments d'Euclide, livre II	III^{e} Av. J.C	**Pré-algèbre géométrique :** -**Calcul de grandeurs géométriques** (susceptible d'illustrer géométriquement des propriétés numériques et des algorithmes de résolution d'équations). -**Rigueur** dans les processus d'argumentation.
Diophante d'Alexandrie	III^{e} siècle	**Arithmétique présymbolique :** -Méthode de l'inconnue opérationnelle (*l'arithme*). -Calcul sur les *arithme et les espèces*.
Al-Khwârizmî	780-850	**Algèbre des équations :** -Procédés d'*al-jabr* w'*al-muqâbala*. -Justifications géométriques.
Al-Karâjî	953- 1029	**Arithmétisation de l'algèbre** Généralisation des opérations arithmétiques aux expressions monômes et aux polynômes.
Viète	1540-1603	**Algèbre littérale (spécieuse) :** -Calcul algébrique abstrait. -Méthode analytique. -Résolution de problèmes via une modélisation et un langage algébrique.
Descartes	1596-1650	**Algébrisation de la Géométrie**

Tableau 2 *- Étapes historiques de l'évolution des praxéologies algébriques*

Suite à cette analyse historique, il apparait que, lors de sa genèse, l'algèbre s'est progressivement constituée, au fil du temps, comme un outil et une démarche de résolution de problèmes. De façon plus précise, en suivant le parcours de la conceptualisation, de la syntaxe et de la sémiotique algébriques, des Babyloniens à Descartes, en passant par Euclide, Diophante et Al-Khwârizmî, nous nous rendons compte que l'algèbre a lentement évolué vers une pensée spécifique et un langage formel permettant de modéliser des problèmes et de les résoudre via un calcul littéral approprié ; l'étude de ses concepts, en tant qu'objets de savoir, n'est venue que plus tard.

En jalonnant ainsi le cours de l'histoire, nous avons voulu tirer des enseignements didactiques en revenant aux sources, convaincus de l'intérêt que peut présenter l'exploration des réussites et des échecs encourus par nos ancêtres en matière de diffusion de l'algèbre. Il y apparaît donc primordial de privilégier le travail de modélisation et les dialectiques Outil/Objet au sens de Douady (1992, p. 133) et Opératoire/Prédicatif au sens de Vergnaud (2001, p. 9) tout au long du curriculum, si l'on veut gagner le pari de donner sens aux activités algébriques et de favoriser une interaction intégrative des différents domaines des mathématiques. Mais ceci présuppose une autre façon d'envisager l'enseignement/apprentissage de l'algèbre et nécessite un plus grand effort en ingénierie didactique génératrice de situations ajustées à cette fin ; c'est ce qui constitue une véritable perspective de recherche en didactique de l'algèbre.

Procédons maintenant à une analyse écologique et praxéologique des programmes d'algèbre et des manuels scolaires[5] de la première année secondaire, analyse qui nous permettra de saisir l'évolution du double[6] rapport institutionnel à l'algèbre en Tunisie et son impact sur les conditions et les contraintes de la diffusion de ce domaine du savoir mathématique à ce niveau de l'échelle de codétermination didactique[7] qu'est *l'école*.

III. ÉVOLUTION DES PROGRAMMES ET DES MANUELS SCOLAIRES D'ALGÈBRE

Nous avons procédé à une analyse des programmes d'algèbre et de leur mise en œuvre appliquée depuis 1976 dans le cycle secondaire tunisien, afin de saisir les évolutions de l'enseignement, les causes des changements éventuels opérés, ainsi que les rapports personnels et institutionnels à cet objet de savoir.

En Tunisie, au cours du demi-siècle précédent, trois réformes du système éducatif se sont succédées respectivement en 1958, 1991 et 2002 et ont largement influencé les contenus des programmes et des manuels scolaires.

1. Le programme d'algèbre et le manuel scolaire de 1976

Ce programme est une copie conforme du programme français de la classe de Troisième applicable à la rentrée scolaire de 1972 (Arrêté du 22/7/1971 B.O.E.N français du 29/7/1971). La partie de ce programme consacrée au domaine algébrique est intitulée *Nombres réels, calculs algébriques, fonctions numériques*.

Le programme de mathématiques de la classe de quatrième année secondaire sections : math-sciences, math-techniques et lettres (actuelle première année de l'enseignement secondaire) est, à ce moment, composé de trois grandes parties articulées entre elles via une

[5] En Tunisie, le manuel scolaire est unique. Il est édité et diffusé par le centre national pédagogique, institution publique placée sous la tutelle du ministère de l'éducation.

[6] Deux institutions sont ici concernées : l'institution productrice des programmes officiels et celle du curriculum réel.

[7] Selon Chevallard cette échelle comprend cinq niveaux supérieurs : *la civilisation, la société, l'école, la pédagogie* et *la discipline*.

méthode analytique à support algébrique et basée sur des activités dans un repère orthonormé du plan :

1. Nombres réels, calculs algébriques, fonctions numériques.
2. Plan euclidien (orthogonalité, distance, repère orthonormé)
3. Géométrie plane euclidienne (médiatrice d'un segment, distance d'un point à une droite, cercle, isométries planes, trigonométrie)

Ainsi le calcul algébrique annoncé dans le libellé de ce programme est mis en œuvre essentiellement lors des calculs sur les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles et au cours d'éventuelles réductions des équations et inéquations modélisant des problèmes du premier degré.

Le bloc technologico-théorique justifiant les différentes techniques du calcul algébrique est globalement constitué des définitions, propriétés et théorèmes découlant de la structure de corps totalement ordonné dont est muni l'ensemble IR des nombres réels.

Les organisations mathématiques préconisées sont caractérisées par les types de tâches, les techniques, les technologies et les théories les justifiant. Elles sont précisées dans le tableau 3:

Contenus	Types de tâches	Techniques	Technologies	Théories
Propriétés de l'addition, de la multiplication et de l'ordre dans IR	**T** : Calculs dans IR	**τ** : Somme, produit, quotient de nombres réels exprimés sous la forme $\frac{b}{a}$ où a et b sont des nombres réels avec a non nul ou sous les formes : $\sqrt{a}$ ou $a^{\frac{1}{2}}$	**θ** : Définitions et propriétés des opérations sur les nombres.	**Θ** : Structures algébriques : (IR, +, x, $\leq$) est un corps totalement ordonné
Fonctions polynômes-Fonctions rationnelles	**T_1** : Calculs sur les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles **T_2** : Représentation graphique des fonctions affines et des fonctions affines par intervalles	**τ_1** : Somme, produit, quotient de fonctions polynômes et rationnelles. **τ_2 :** Construction à l'aide de points dont les couples de coordonnées appartiennent aux graphes de ces fonctions	**θ_1** : Définitions et propriétés des opérations sur les fonctions polynômes et rationnelles **θ_2** : Théorèmes sur la représentation graphique des fonctions affines	**Θ_1** : Structures algébriques de IR[x] et IR(x) **Θ_2** : Géométrie analytique
Problèmes du premier degré	**T** : Résolution de problèmes du premier degré	**τ_1 :** Modélisation de situations à l'aide d'équations, inéquations ou systèmes linéaires du premier degré à une ou deux inconnues **τ_2 :** Résolution d'équations, d'inéquations ou de systèmes	**θ_1** : Non définie par les programmes en vigueur **θ_2** : Théorèmes justifiant les techniques de résolution	**Θ_1** : Non définie **Θ_2** : (IR, +, x, $\leq$) est un corps totalement ordonné.

Tableau 3 *-Les organisations mathématiques visées par le programme de 1976*

Selon cette visée, l'enseignement de l'algèbre est articulé au premier abord, sur l'étude des modèles des structures algébriques, ensuite sur l'acquisition d'outils permettant de manipuler des expressions polynômiales et rationnelles et, partant, à résoudre des problèmes se ramenant à des équations et inéquations du premier degré à une ou deux inconnues.

Malgré l'apparence d'une certaine logique dans la conception du programme, des anomalies didactiques ont éclaté au grand jour au fur et à mesure de son application sur le terrain. En effet :

- Le caractère abstrait des concepts relatifs aux structures algébriques préalablement abordés n'a pas manqué d'entrainer le rejet des élèves et de leur ôter toute motivation.
- Les praxéologies algébriques, qui doivent être développées, dépassent le cadre de leurs applications et ne sont pas ajustées à leurs fins (par exemple, les compétences exigées dans les manipulations des fonctions polynômes et rationnelles, parfois entachées de grande virtuosité, ne sont que rarement sollicitées et exploitées au cours de l'application du curriculum)
- Le problème de l'apprentissage de la modélisation des situations reste entier et aucun éclairage à son sujet n'est abordé.

Dans le manuel couramment utilisé à cette époque (Monge & al. 1976), le contenu disciplinaire est présenté conformément aux principes de l'enseignement traditionnel, c'est-à-dire sous forme de cours magistraux. Ceci a eu pour effet que lors des pratiques enseignantes le *topos* du professeur y apparait extrêmement large ; celui-ci se charge de la quasi-totalité des responsabilités dévolues à la classe, ce qui lui permet de piloter l'apprentissage, en exerçant le plein contrôle sur les connaissances à faire acquérir aux élèves, usant ainsi de son statut d'unique détenteur des savoirs dans l'institution-classe. Le contrat didactique d'ostension est activé sous ses deux formes assumée et déguisée (Berthelot, Salin 1993-1994, pp. 48-50), jouant le rôle du facilitateur et légitimant les interventions forcées de l'instance enseignante.

Afin de décrire l'approche didactique adoptée par les auteurs du manuel, nous présentons, dans le tableau 4, l'organisation mathématique relative au thème *équations à une inconnue* proposée en guise d'analyse *a priori* des praxéologies mathématiques et didactiques à développer:

Types de tâches T	Techniques τ	Technologies θ	Théories Θ
Résoudre une équation du premier degré à une inconnue réelle donnée sous forme réduite.	Application de l'algorithme de résolution.	Définitions, propriétés et théorèmes sous-tendant les algorithmes de résolution.	Structures algébriques : (IR,+, x) est un corps commutatif.
Résoudre une équation du premier degré à une inconnue réelle donnée sous la forme *f(x)=g(x)* où *f* et *g* sont deux fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1.	-Transformer l'équation en la mettant sous la forme réduite -Appliquer l'algorithme de résolution	-Équations équivalentes -Tout réel non nul admet un inverse.	
Résoudre une équation se ramenant à des équations du premier degré.	-Transformer l'équation en la mettant sous la forme *h(x)=0* -Factoriser *h(x)* en produit de facteurs de premier degré -Appliquer l'intégrité de (IR, +, x) -Résoudre chaque équation obtenue. -Donner l'ensemble des solutions.	-Équations équivalentes -Distributivité de x sur + -Tout réel non nul admet un inverse -Un produit de réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.	

Tableau 4 *- Organisation mathématique du thème équations à une inconnue telle que proposée par le manuel de 1976*

Les documents officiels (programmes et manuels), censés présenter et prescrire[8] le texte du savoir et la méthodologie de sa mise en œuvre, passent sous silence les éléments technologiques et théoriques sous-tendant le raisonnement mathématique mis en jeu et n'apportent aucune réponse à des questions cruciales telles que : pourquoi aborde-t-on l'étude des équations ? À quelles questions ces équations permettent-elles de répondre ?

Ceci n'aurait pu être accompli qu'au prix d'efforts consentis par les enseignants pour concevoir des situations didactiques significatives et des activités motivantes susceptibles de faire interagir les élèves avec le savoir visé, faute de quoi, seul un habitus de réflexes et de pratiques d'algorithmes dépourvus de sens se construit au sein de l'institution scolaire.

2. *Le programme d'algèbre et le manuel scolaire de 1986*

Pendant cette période de la contre-réforme, des ajustements ont été nécessaires pour corriger les effets pervers de la réforme précédente.

Conformément à cette nouvelle orientation, le programme d'algèbre a été épuré de toutes structures algébriques, seules quelques notions sur les applications subsistent encore et le ton a été donné pour rendre les mathématiques plus vivantes, plus attrayantes et proches de la vie quotidienne des élèves. La partie *algèbre* est constituée de six rubriques, parfois brièvement commentées :

1. Application, image d'une partie d'un ensemble, restriction d'une application.

Composition de deux bijections, bijection réciproque d'une bijection.

2. Racine carrée d'un réel positif ; racine carrée d'un produit, d'un quotient de réels. Calculs approchés de racines carrées par encadrement.

On admettra que a étant un réel positif, il existe au moins un réel positif x dont le carré est égal à a.

3. Applications linéaires et applications affines de IR dans IR ; applications affines par intervalles. Représentations graphiques.

On étudiera des restrictions de telles relations à des sous-ensembles quelconques de IR en se limitant à quelques exemples puisés particulièrement dans la vie courante.

4. Équations et inéquations du premier degré à une inconnue. Équations et inéquations du premier degré à deux inconnues à coefficients numériques.

5. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues.

Résolution graphique d'un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues.

6. Exemples variés de problèmes du premier degré.

On étudiera des problèmes formulés dans un langage courant et liés aux préoccupations quotidiennes des élèves.
On montrera par ailleurs sur quelques exemples comment utiliser l'algèbre pour résoudre des problèmes de géométrie.

Les notions de structure de groupe, de structure de corps, de fonction, de surjection, de fonction polynôme, de fonction rationnelle disparaissent. Les concepts d'application et de bijection sont encore retenus, en raison de leur utilité en géométrie lors de l'étude des translations et des symétries et, en plus, de leur rôle fondateur pour le concept d'application affine, encore une fois, retenu pour aborder les thèmes d'équation et d'inéquation du premier degré. En conséquence, le programme s'articule autour de la résolution de problèmes du premier degré en intégrant dans un tout structuré les applications affines, les équations et les systèmes du premier degré.

[8] En Tunisie, les programmes scolaires sont officiellement prescrits et les manuels scolaires sont uniques pour chacun des niveaux d'enseignement.

Le manuel scolaire (Kachoukh & al. 1986) permettant la mise en œuvre de ce programme répond à un triple objectif : atténuer les effets pervers des mathématiques modernes, réconcilier l'enseignement des mathématiques avec son environnement et accroître *le topos* des élèves en leur permettant de participer d'une manière active et efficace à l'élaboration des leçons.

Conformément aux directives officielles, l'exclusivité est donnée au premier degré ; on ne parle plus de fonctions polynômes ou de fonctions rationnelles. Suite à la mise en place des préalables numériques, les auteurs abordent directement l'étude des applications affines. Suivant cette orientation, le domaine algébrique comporte plusieurs habitats imbriqués entre eux (applications linéaires, applications affines, équations et inéquations du premier degré, systèmes d'équations ou d'inéquations du premier degré). Ainsi, les praxéologies algébriques à développer sont maintenant ajustées à leur fin -la résolution des problèmes du premier degré- et il n'est plus question de faire du calcul algébrique pour lui-même, sauf pour ce qui est proposé en guise de rappels au chapitre introductif du manuel.

La structure du chapitre 4, portant sur les équations et inéquations du premier degré à une inconnue, reflète une organisation didactique privilégiant particulièrement deux moments de l'étude : le moment de la première rencontre avec les types de tâches constituant l'organisation mathématique (à travers l'étude d'un exemple préliminaire) et celui du travail et de la mise à l'épreuve de la technique correspondante (par le biais d'exercisation a posteriori)[9].

Les analyses écologiques et praxéologiques, ci-dessus réalisées, montrent une attitude réaliste et modérée de la noosphère à la sortie de la crise des mathématiques modernes. Les praxéologies à développer dans l'enseignement/apprentissage de l'algèbre en première année secondaire sont maintenant réduites à l'essentiel, mieux articulées entre elles et visent la résolution des problèmes du premier degré. Toutefois, ce dernier objectif a été relégué par les auteurs du manuel et du coup par les enseignants, en fin d'apprentissage (sûrement dans l'intention de mieux outiller les élèves de techniques algébriques suffisantes). Le problème du sens des activités mathématiques reste entier, tant qu'on n'ose pas évoquer à temps les questions auxquelles l'algèbre peut répondre ainsi que leur raison d'être.

3. Le programme d'algèbre et le manuel scolaire de 1991

La deuxième réforme du système éducatif tunisien est consacrée par la nouvelle loi d'orientation de l'éducation (Loi du 19 juillet 1991). Elle est conçue pour adapter l'école aux changements culturels et économiques qui ont affecté la société tunisienne après plus de trois décennies d'indépendance. Suite à l'application du principe de *l'éducation pour tous* porté par la réforme de 1958, cette nouvelle réforme a redéfini les finalités et la mission de l'éducation en misant sur la qualification des jeunes pour les préparer à s'intégrer dans une vie citoyenne accomplie.

Sur le plan pédagogique, les années quatre-vingt-dix sont essentiellement caractérisées par le paradigme de la pédagogie par objectifs (*PPO*). Tout a été alors mis en œuvre pour rationaliser les activités d'enseignement/apprentissage. Des finalités, des objectifs généraux, des objectifs spécifiques, des objectifs opérationnels, des critères d'évaluation et des indicateurs de réussite sont ainsi précisés et parfaitement délimités pour guider la conception, le développement et l'évaluation des apprentissages. Cela n'a pas manqué d'influencer la transposition didactique et l'ingénierie des outils didactiques dans un environnement éducatif fortement positiviste, pragmatique et behavioriste.

---

[9] Voir annexe 1.

Le programme[10] de 1991 est conçu pour répondre aux exigences de la deuxième réforme du système éducatif tunisien, survenue en juillet 1991, qui vise essentiellement : l'utilisation des nombres réels, un apprentissage de base concernant les fonctions numériques à variable réelle, le développement de l'aptitude à représenter graphiquement des fonctions et à exploiter les représentations graphiques et la pratique d'une démarche scientifique.

La noosphère constate que les difficultés des élèves en algèbre élémentaire sont dues essentiellement

- sur le plan sémiotique et syntaxique, à l'incompréhension de la signification des lettres et de leurs assemblages dans les expressions littérales.
- sur le plan conceptuel et sémantique, à l'influence de la pensée arithmétique acquise aux deux cycles de l'enseignement de base.

Pour lever ces obstacles, sont réintroduits des apprentissages des manipulations d'expressions algébriques, en particulier les règles de calcul dans IR (utilisation des parenthèses et priorité des opérations, puissances entières, racines carrées de réels positifs, identités remarquables, factorisation, développement, réduction d'expressions numériques ou littérales, etc.). En même temps, des calculs numériques en situation sont ajoutés au calcul formel, à l'occasion des tâches de détermination des valeurs des expressions dépendant d'une ou de plusieurs variables lorsque celles-ci sont données.

> Mettre en œuvre les règles opératoires dans IR et les règles sur les puissances pour :
>
> Calculer la valeur d'une expression numérique ou une expression littérale pour des valeurs données des variables. (Premier objectif spécifique)

Inversement, des calculs numériques proposés en activités préliminaires débouchent, via le procédé d'induction et de généralisation, sur des expressions littérales. Ainsi des connexions sont établies entre calcul algébrique et calcul numérique dans une optique assimilant en quelque sorte l'algèbre à une arithmétique généralisée (Gascon 1993).

> -Le calcul numérique et le calcul littéral seront menés de pair. (Recommandations)

Quatre aspects caractérisent le programme de 1991 :

- Comme dans les programmes précédents, l'apprentissage de l'algèbre, initié par le programme de 1991, est motivé par le développement de la compétence de résolution des problèmes du premier degré.
- La modélisation des situations est mise en avant dans les rubriques des objectifs.

> Mettre en équation ou en inéquation un problème donné. (Objectifs spécifiques, p. 9)
>
> Exemples d'étude de problèmes conduisant à […] (Contenus, p. 9)

- Les problèmes seront puisés dans le domaine mathématique ou des domaines des autres disciplines scolaires ou de l'environnement socioculturel.

> Les problèmes seront puisés dans le domaine mathématique ou dans le domaine des autres disciplines (Physique par exemple) ou encore dans l'environnement social et économique de l'élève. (Recommandations, p. 9)

- Les recommandations officielles prêtent cette fois-ci une attention particulière au processus de résolution des problèmes en indiquant explicitement les différentes phases.

> […] on dégagera nettement les différentes phases : Choix de l'inconnue ou des inconnues ; mise en équation ; résolution de l'équation ou de l'inéquation ou du système obtenus ; vérification et interprétation des résultats. (Recommandations, pp. 9-10)

[10] Voir annexe 2

Quatre articles, sur six, concernent ainsi l'installation des pré-requis algébriques nécessaires à l'étude des deux thèmes-clés du programme à savoir les applications affines et les problèmes du premier degré.

Le manuel scolaire de la première année secondaire (Tarifa & al. 1991), apparu suite à la réforme de 1991, est intitulé *Mathématiques, 4ème année secondaire*. L'intention des auteurs, précisée dans la préface, est de proposer *un manuel essentiellement conçu pour une formation de base adressée à des élèves, de profils divers, d'une première année secondaire désormais non spécialisée du tronc commun*. L'activité et l'engagement des élèves y sont fortement encouragés en vue de leur faire acquérir *des méthodes de travail et des capacités à résoudre des problèmes*.

Une organisation commune et uniforme des chapitres est adoptée. Des activités, des exercices d'application, des exercices à caractère intégratif et des exercices résolus sont proposés et constituent les principaux supports des apprentissages projetés. Les auteurs proposent des activités à réaliser sur le manuel, comme compléter des tableaux, des phrases, ou des expressions numériques ou algébriques et des ébauches de démonstrations. Les rappels et les résultats les plus importants du cours sont présentés sous des intitulés *définitions, théorèmes, propriétés, retenons* pour mettre en évidence les contenus à mémoriser.

Nous présentons dans l'annexe 3, en guise d'illustration de ce qui précède, un corpus des types de tâches algébriques préconisés ainsi que les techniques susceptibles de les réaliser et les blocs technologico-théoriques servant à les justifier.

Le manuel de 1991 apparaît donc comme un outil didactique innovant en introduisant

- des activités de nature mathématique, ludique ou récréative.
- des informations culturelles et historiques.

Toutefois l'imprécision concernant le statut des contenus mathématiques (définition, propriété, théorème, démonstration, exemple d'application) présentés a engendré plusieurs difficultés lors de son utilisation par les enseignants qui ont demandé, en vain, une formation de proximité à l'utilisation du manuel et un accompagnement didactique sur le terrain. De plus, ce qui a été annoncé en matière de capacité de résolution des problèmes n'a pas été traduit dans les faits. L'absence de technique suffisamment claire et intelligible de modélisation des situations (mise en équation, en inéquation ou en système), qui ne s'acquiert pas naturellement, nécessite un apprentissage spécifique et parfaitement ajusté à ce type de tâches comme l'indiquent clairement Duval et al. (1996).

4. Le programme d'algèbre et le manuel scolaire de 2003

La loi d'orientation de l'éducation et de l'enseignement scolaire de juillet 2002 trace les principaux objectifs visés :

> À côté de ses missions d'éducation et d'instruction, l'école est aussi appelée à qualifier les jeunes en les dotant de compétences susceptibles de favoriser leur insertion économique et sociale. Ainsi, il serait urgent de développer, dès le cycle primaire, conjointement quatre types d'habiletés :
>
> - Des savoir-faire pratiques qui s'acquièrent par l'initiation à la résolution de problèmes.
> - Des savoir-faire méthodologiques de traitement de l'information et de son exploitation dans la recherche des solutions alternatives et innovantes.
> - Des compétences entrepreneuriales à travers la conception, le développement et l'évaluation de projets collectifs et interdisciplinaires.
> - Des compétences comportementales mobilisables par des savoir-être comme l'autonomie, la coopération, le vivre-ensemble et la critique constructive. (Loi d'orientation n°2002-80 du 23 juillet 2002)

Deux nouvelles orientations pédagogiques sont annoncées:

- Mettre en œuvre des démarches d'apprentissage différenciées prenant en compte la diversité des profils et des rythmes des élèves et leur permettre d'avoir des chances égales de réussite.

- Privilégier les dispositifs didactiques et pédagogiques favorisant le développement des compétences de résolution de problèmes et de réalisation de projets.

Le programme de mathématiques de 2003, issu de cette réforme s'inscrit dans l'optique éducative illustrée par l'article 10 de la nouvelle loi d'orientation de l'éducation et de l'enseignement scolaire qui stipule que :

> L'école veille dans le cadre de sa fonction de qualification à développer des compétences et des savoir-faire chez les élèves. … À cette fin l'école est appelée à faire acquérir aux apprenants l'aptitude à :
>
> - Utiliser les savoirs et les savoir-faire acquis pour la recherche des solutions alternatives dans la résolution des problèmes auxquels ils peuvent être confrontés ;
> - S'adapter aux changements ;
> - Prendre des initiatives et innover ;
> - Travailler en groupe ;
> - Apprendre tout au long de la vie. (Loi d'orientation de l'éducation, article 10)

La nouvelle orientation pédagogique institutionnalisée est celle de « l'approche par les compétences ». Fondée sur le paradigme socioconstructiviste de l'apprentissage, cette approche a fortement influencé les programmes scolaires et les outils didactiques qui restent en usage jusqu'à nos jours.

Le savoir algébrique à enseigner dans le programme officiel en vigueur a pour habitat institutionnel une rubrique intitulée *Activités algébriques*. Cette rubrique spécifie les contenus disciplinaires suivants :

1. Identités remarquables.
2. Fonctions linéaires – Fonctions affines.
3. Équations et inéquations linéaires du premier degré à une inconnue réelle.
4. Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues réelles.

Les aptitudes à développer sont ensuite précisées de façon exhaustive, en guise de *niches fonctionnelles* de ces objets de savoir:

1. Les élèves mobilisent les règles et les techniques de calcul algébrique pour :

- additionner, soustraire et multiplier des expressions algébriques ;
- calculer la valeur numérique d'une expression littérale ;
- développer, factoriser et simplifier des expressions algébriques en utilisant les produits remarquables ;
- résoudre des équations et des inéquations linéaires du premier degré à une inconnue ;
- résoudre des systèmes linéaires de deux équations du premier degré à deux inconnues.

2. Les élèves mobilisent un algorithme ou une procédure de calcul algébrique pour :

- déterminer le signe d'un binôme du premier degré ;
- résoudre des équations et des inéquations se ramenant à des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue ;
- déterminer l'expression d'une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel ;
- déterminer l'expression d'une fonction affine connaissant les images de deux réels distincts.

3. Les élèves résolvent des problèmes algébriques dans des situations mathématiques ou en rapport avec leur environnement dans des contextes familiers ou non familiers.
En particulier,

- les élèves modélisent des situations réelles menant à des équations, des inéquations ou des fonctions linéaires ou affines ;
- les élèves résolvent des problèmes d'optimisation ou de point de rencontre de deux mobiles.

Nous constatons que les objets d'enseignement de l'algèbre et leur contexte de fonctionnement marquent une réelle continuité avec les anciens programmes. En effet, l'enseignement de l'algèbre a toujours pour objet l'étude des équations, inéquations et applications affines ; toutefois, on dénote une avancée importante sur le plan méthodologique. Les pratiques algébriques ne sont plus considérées comme un objectif intermédiaire d'apprentissage, mais comme une compétence à part entière à développer.

Se voulant conforme aux nouveaux programmes, le manuel scolaire (Mcharek & al. 2003) vise le développement des sept compétences disciplinaires qui y sont prescrites. Dans sa préface, les auteurs rappellent le rôle des mathématiques dans la formation de l'esprit critique et de l'imagination créatrice et leur place de choix dans l'éducation citoyenne de chacun. Pour eux, le manuel doit être un outil de promotion scientifique, intellectuelle, culturelle et sociale s'adressant à tous les élèves dans leur diversité et quelle que soit leur vocation et indépendamment de leur niveau de maîtrise des savoirs acquis au terme de l'enseignement de base.

Le manuel se compose de seize chapitres, huit en *Travaux géométriques* et huit en *Travaux numériques*. Parmi ces derniers, le chapitre 11 traite des *Activités algébriques*. L'annexe 4 présente les compétences visées dans la partie *Activités algébriques* et le dispositif permettant leur développement chez les apprenants.

Dans sa majeure partie, le manuel est constitué exclusivement d'activités. Aucune organisation didactique ou mathématique n'est proposée. Seules des situations d'apprentissage et d'évaluation, accompagnées parfois d'indications et de rappels sont fournies en guise de supports de cours. La conception du cours, étant entièrement laissée à la charge des enseignants, ceux-ci se sentent la plupart du temps démunis et reprennent leurs anciens cours qu'ils enrichissent par des activités puisées dans le nouveau manuel. Paradoxalement, les élèves, quant à eux, ne peuvent utiliser ce manuel qui leur est en principe adressé sans l'aide de l'enseignant, en l'absence d'un cours clairement conçu et suffisamment adapté à leur profil cognitif.

À la fin de la première année d'utilisation de ce manuel, l'Inspection générale rapporte :

> […] ce manuel propose un ensemble de ressources, certes précieuses mais non structurées, pour la conception et l'élaboration des situations d'apprentissage. De ce fait, il constitue beaucoup plus un document d'accompagnement du programme qu'un manuel scolaire susceptible d'être exploité par des élèves de différents niveaux et confrontés à des difficultés linguistiques, cognitives et méthodologiques… Les enseignants et les élèves trouvent des difficultés à l'utiliser (choix et gestion des activités proposées). (Rapport de Synthèse de l'Inspection Générale de l'Éducation relatif aux visites d'inspection pédagogique, Ministère de l'Éducation, TUNISIE, 2003-2004, pp. 6-7)

IV. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Ce survol historique des programmes d'algèbre et des contenus des manuels scolaires de la première année secondaire en Tunisie, depuis les années soixante-dix jusqu'à nos jours, nous a permis d'apprécier l'évolution du rapport institutionnel à l'algèbre dans le système éducatif tunisien. Nous avons vu comment ce rapport a sensiblement évolué d'une relation institution-objet de savoir à l'époque des mathématiques modernes vers une relation plus pragmatique et utilitaire considérant l'algèbre comme un outil et un langage formel au service de la résolution des problèmes, en passant par des étapes intermédiaires (1986-1991) où l'algèbre a joué le rôle d'outil-objet, appris pour lui-même en tant que savoir mathématique exigible par l'institution en premier lieu, et utilisé plus tard dans des contextes d'application et de transfert.

L'analyse épistémologique appuyée par l'étude de l'évolution des praxéologies algébriques a montré qu'au cours des quatre précédents millénaires, trois champs épistémologiques s'y sont progressivement développés : le champ conceptuel, le champ syntaxique et le champ sémiotique.

Elle a mis en évidence la difficile genèse du formalisme algébrique en tant qu'outil de la pensée algébrique et a permis d'explorer les obstacles et les ruptures qui l'ont caractérisée.

Les principales caractéristiques épistémologiques, mises en lumière, montrent que :

- L'algèbre est structurellement et fonctionnellement attachée aux activités de résolution de problèmes mathématiques et extra-mathématiques qui constituent sa véritable raison d'être et son ultime champ d'application.
- Le développement des compétences algébriques nécessite la levée de l'obstacle du raisonnement numérique en assumant une rupture épistémologique arithmétique-algébrique. Les activités de résolution des problèmes déconnectés[11] (Marchand, Bednarz 2000) peuvent y contribuer efficacement.
- Sur le plan syntaxique, prenant naissance dans le champ numérique, l'algèbre n'a pu s'en détacher qu'au prix d'une double transition : procédural-structural (Kieran & al. 1980, pp. 6-7) et calcul numérique-manipulation littérale.
- Sur le plan conceptuel, une avancée importante a été réalisée avec le recours à la dialectique analyse-synthèse qui a eu l'avantage de favoriser une pensée algébrique efficace dans la résolution des problèmes.

L'analyse institutionnelle a mis en exergue la particularité évolutive du rapport institutionnel à l'algèbre dans le système éducatif tunisien. Ainsi, d'un rapport à un objet de savoir conceptuel (à l'époque des mathématiques modernes) on est passé à un rapport à un objet-outil (objet d'étude ensuite outil méthodologique) pour aboutir désormais à un rapport à un outil au service de la résolution des problèmes.

Cette analyse débouche sur les conclusions suivantes :

- Les praxéologies algébriques visées par l'institution scolaire sont, la plupart du temps, artificielles et dépassent le cadre de leurs applications. Ceci est notamment illustré par une virtuosité et des automatismes excessifs constatés lors des apprentissages du calcul algébrique.
- Le problème de l'apprentissage de la modélisation des situations reste entier et aucun éclairage institutionnel à son sujet n'est abordé. L'absence de technique suffisamment claire et intelligible de modélisation (mise en équation, en inéquation ou en système, usage de fonctions linéaires ou affines) est manifeste.
- Les manuels scolaires passent sous silence les éléments technologiques et théoriques sous-tendant les démarches et les raisonnements mathématiques mis en jeu dans les activités algébriques et n'apportent aucune réponse à des questions cruciales telles que: Pourquoi aborde-t-on l'étude des concepts étudiés ? À quelles questions ces concepts permettent-ils de répondre ?

[11] Un problème est dit déconnecté si aucun pont ne peut être établi *a priori* directement entre ses données.

- Toutefois, les praxéologies à développer dans l'enseignement/apprentissage de l'algèbre se sont réduites, au fil des années, à l'essentiel et deviennent progressivement mieux articulées entre elles. Elles visent désormais la résolution des problèmes du premier degré à ce niveau scolaire. Mais ce dernier objectif est souvent occulté et n'a pas été atteint faute d'interaction continue avec les problèmes dans l'avancée du cursus.

- Les nouveaux matériels didactiques proposent des activités diverses qui contribuent à illustrer les techniques algébriques mobilisées dans la réalisation des différentes tâches et à faciliter leur appropriation par les élèves. Toutefois, ces activités se ramènent, la plupart du temps, à des problèmes faiblement déconnectées encourageant souvent l'adoption d'une démarche arithmétique aux dépens des processus algébriques de résolution.

Eu égard à toutes ces considérations et ces faits historiques, il est légitime de se demander si l'institution prend effectivement en compte les obstacles épistémologiques ainsi dévoilés dans les processus de la transposition didactique. Plus précisément, nous nous demandons s'il est possible d'envisager une autre alternative didactique permettant de conjuguer les deux aspects conceptuel et opérationnel de l'algèbre dans une même et seule dynamique. Pouvons-nous faire en sorte que l'apprentissage de l'algèbre soit une réponse pertinente à un besoin éprouvé par les apprenants lorsqu'ils sont confrontés à un problème? Et quel est alors le degré d'efficacité et de pertinence d'un tel modèle ? Les réponses à ces questions pourront faire l'objet de recherches futures.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2002) Le manuscrit mathématique de Jerba : Une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité, *Actes du 7e Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes*, Marrakech, 30-31 Mai et 1er Juin 2002.

Abgrall Ph. (2011-2012) *Histoire des mathématiques*, Cours de Mastère M1, ISEFC, Tunis.

Achour S. (2005) *L'introduction des fonctions linéaires et affines dans l'enseignement secondaire, d'une problématique de modélisation physique à l'ostension algébrique : Quelles alternatives possibles ?*, mémoire de DEA, Tunis : ISEFC.

Ben Nejma S. (2006) *Étude des rapports institutionnel et personnel aux équations via la mise en équation de problèmes en première année secondaire tunisien (3è en France) : Évolution de ces rapports dans la transition collège/lycée*, mémoire de DEA, Tunis : ISEFC.

Berthelot R., Salin M-H. (1993-1994) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N* 53, 39-56, 48-50.

Boyé A. (2003) *François Viète, inventeur de l'algèbre ?*[en ligne], IREM, Pays de la Loire.
http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/usrn/fundoro/archivos%20adjuntos/publicaciones/otros_idiomas/frances/Seminario11-12/AnneBoye_FrancoisViete.pdf

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des Mathématiques* 12, 73-112.

Djebbar A. (2005) *L'algèbre arabe : genèse d'un art*. Paris, Vuibert-Adapt.

Gascon J. (1993) Un nouveau modèle de l'Algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée. *Petit x* n° 37 ,43-63.

Douady R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères-Irem* n°6, 133-134.

Duval R. & al. (1996) à propos de charades dont la solution est un système d'équations à deux inconnues. *Petit x* n° 44, 35 à 48.

Guichard J. P. (2000) Qu'est-ce que l'algèbre ? Un domaine ou un langage ?, L'algèbre au lycée et au collège. *Publication de l'IREM de Montpellier*, 40-57.

Høyrup J. (2002) *Lengths, widths, surfaces: A portrait of old Babylonian algebra and its kin, studies and sources in the history of mathematics and physical sciences*. Berlin et londres : Spinger.

Kieran C., Herscovics N. (1980) Donner de la signification au concept d'équation, *L'initiation à l'algèbre, Collection « Documents du CREM* (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Be.) » n°3, 46-58.

Kouki R. (2006) Équations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique. *Petit x* n° 71, 7-28.

Marchand P., Bednarz N. (2000) Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes, *Bulletin AMQ* XL(4), 15-25.

Ministère de l'éducation de la Tunisie (2002) *Loi d'orientation n°2002-80 du 23 juillet 2002 relative à l'éducation et à l'enseignement scolaire*.

Ministère de l'éducation de la Tunisie, Inspection Générale de l'éducation (2003-2004), *Rapport de synthèses des inspections pédagogiques des Collèges et des Lycées*, Discipline : Mathématiques, multi-gr.

Moyon M. (2005) *Matériaux pour l'Histoire des Mathématiques en Europe du XII*^e^ au *XV*^e^ *siècles* : *Exemple du « Liber Restaurationis »*. Mémoire de Master en histoire des sciences, Universités de Lille 1 - Lille 3.

Proust C. (2006) Mathématiques en Mésopotamie, REHSEIS, en ligne sur *CultureMath*, <http://culturemath.ens.fr/nodeimages/images/chrono_mesopotamie.pdf>

Radford L. (1991) Diophante et l'Algèbre présymbolique. *Bulletin AMQ*, Décembre 1991-Mars 1992.

Rashed R. (1984) *Entre arithmétique et algèbre : recherche sur l'histoire des mathématiques arabes*. Paris : les belles lettres.

Vergnaud G. (2001) Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. Conférence publiée dans les *Actes du colloque GDM-2001*.

MANUELS SCOLAIRES TUNISIENS DE LA 1ÈRE ANNÉE SECONDAIRE

Manuel scolaire de 1976 : M. MONGE, M. GUINCHAN, J-P. PELLE, *Mathématiques Classe de troisième*, édition Belin, 1972.

Manuel scolaire de 1986 : Kachoukh B, Hachfi A, Bel Haj Salem M, Tangour M, *Mathématiques 4ème Math-Sciences et Math-Technique*, CNP Tunis.

Manuel scolaire de 1991 : Tarifa S, SMIDA H, Klila S, Mhamdi N, *Mathématiques 4ème année secondaire*, CNP Tunis, édition 1991.

Manuel scolaire de 2003 : Mcherek R, Mhamdi N, Klila S, Ben Youssef L, *Mathématiques 1ère année secondaire*, CNP Tunis.

ANNEXES

Annexe 1 : Exemples d'organisations didactiques préconisées par le manuel de 1986 (commentées)

Chapitres	Leçons	Paragraphes	Contenus	Commentaires
4- Équations et inéquations du premier degré à une inconnue	4.1-Équations	4.1.1-Notion d'équation	4.1.1.1-Exemple : Considérons les applications f et g définies par $f(x)=x^2+3x+2$ et $g(x)=4(x+1)$ 1.Monter que f et g ne sont pas égales. 2.Montrer que $f(-1)=g(-1)$ et $f(2)=g(2)$. Les réels -1 et 2 sont appelés solutions dans IR de l'équation $f(x)=g(x)$.	C'est le premier moment de l'étude. Les élèves sont confrontés à des égalités du type $f(x)=g(x)$ où f et g sont des applications de IR dans IR et x un réel quelconque. Les types de tâches qu'ils ont à réaliser sont successivement T_1 : Montrer que deux applications ne sont pas égales, dont une technique possible est : τ_1 : Trouver un réel a tel que $f(a)\neq g(a)$.

				T_2 : Vérifier l'égalité de deux applications pour une valeur donnée de la variable. La technique correspondante est : τ_2: Calculer les images de cette valeur de la variable par les deux applications et constater leur égalité. La technologie justifiant ces techniques est constituée de la définition de l'égalité de deux applications et de toutes les règles de calcul dans IR.
			4.1.1.2-Définitions : Soient deux applications numériques à variable réelle *f* et *g*. S'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0)=g(x_0)$, on dit que x_0 est *solution* dans IR de *l'équation* $f(x)=g(x)$ où *x* représente *l'inconnue*. *Résoudre* dans IR l'équation $f(x)=g(x)$, c'est trouver l'ensemble S des solutions de cette équation.	Selon cette organisation didactique, l'enseignant fait fonctionner le *contrat d'ostension*, sous sa forme *déguisée* pour montrer le savoir. L'étude de l'exemple préliminaire aurait servi d'illustration concrète des définitions et de masquer cette ostension magistrale.
			4.1.1.3-Remarque : Soient *f* et *g* deux applications d'une partie E de IR dans IR, résoudre dans E l'équation $f(x)=g(x)$ c'est trouver l'ensemble S, inclus dans E, des solutions de cette équation.	Il s'agit d'une autre définition concernant la résolution, dans une partie de IR, d'une équation. Le savoir est, là, montré par un procédé *d'ostension assumée*.
		4.1.2- Équations équivalentes	4.1.2.1-Exemple : Soient les équations $3+x=5$ et $10+x=12$, l'ensemble des solutions de chacune de ces équations est S={2}. On dit que ces deux équations sont équivalentes.	Aucune activité n'est demandée. Juste une illustration magistrale et prématurée de la définition est visée.
			4.1.2.2-Définition : Deux équations sont dites équivalentes dans IR si et seulement si elles ont le même ensemble de définition dans IR.	Rien n'est dit sur la raison d'être de cette définition ni de son utilité potentielle ou future.
			4.1.2.3- Exercice : Soient les équations $x+2=5$ et $x-1=7$. Ces deux équations sont-elles équivalentes dans IR ?	Le type de tâches proposé est « T : Montrer que deux équations ne sont pas équivalentes ». L'objet de la technique τ est tout indiqué : Montrer que les équations proposées n'ont pas le même ensemble de solutions, conformément à la définition qui joue le rôle de la technologie θ justifiant τ: τ_1: On résout les deux équations et on montre qu'elles n'ont pas le même ensemble de solutions. τ_2: On montre qu'un nombre (par exemple 3) est solution de l'une sans être solution de l'autre.
			4.1.2.4- Théorème : Soient *f*, *g* et *h* trois applications de IR dans IR. Les équations $f(x)=g(x)$ et $f(x)+h(x)=g(x)+h(x)$ sont équivalentes dans IR. - Démonstration : On montre que $\{x\epsilon IR, f(x)=g(x)\} = \{x\epsilon IR, f(x)+h(x)=g(x)+h(x)\}$	Ces deux théorèmes constituent les deux principaux éléments technologiques servant à justifier les techniques de réduction des équations.
			4.1.2.5- Théorème : Soient *f* et *g* deux applications de IR dans IR et λ un réel non nul. Les équations	

			$f(x)=g(x)$ et $\lambda f(x)=\lambda g(x)$ sont équivalentes dans IR. Démonstration : On montre que $\{x \in IR,\ f(x)=g(x)\}=\{x \in IR,\ \lambda f(x)=\lambda g(x)\}$	
			4.1.2.6- Définition : On appelle équation du premier degré à une inconnue *x*, toute équation se ramenant à la forme $ax+b=0$, où *a* et *b* sont des réels donnés.	Cette définition ne pourrait avoir du sens qu'à travers des activités de transformation d'équations les ramenant à la forme canonique indiquée. Par ailleurs, un flou subsiste quant à la nature de la transformation utilisée à cette fin. Les équations $\sqrt{x-1}=2$ et $\frac{1}{x+3}=5$ se ramènent toutes les deux, à la forme $ax+b=0$, est-ce qu'elles sont pour autant des équations du premier degré ?
		4.1.3- Résolution de l'équation	4.1.3.1- Résolution : $ax+b=0$ équivaut à $ax=-b$ 1er cas $a \neq 0$ on a : $x=-\frac{b}{a}$ 2ème cas : $a=0$ Si $b\neq 0$ alors S=Ø Si $b=0$ alors S=IR	Aucune justification n'est donnée. C'est comme si on veut outiller les élèves d'un algorithme applicable à toute circonstance. Ceci est confirmé par la batterie d'exercices proposés en guise de travail de la technique ainsi donnée.
			4.1.3.2-Exercices : Résoudre dans IR : $3(2x+1)-2(1-x)=1-4x$, ….. Résoudre et discuter dans IR : $(m-1)x+(3m-1)=0$, …..	C'est le moment de l'étude consacré à travailler et consolider les techniques acquises. Les équations avec paramètre refont surface comme dans les années soixante après une longue absence due à l'avènement des mathématiques modernes. Mais cette apparition n'est justifiée ni conceptuellement ni fonctionnellement.
		4.1.4- Équations se ramenant au premier degré	Exercices : Résoudre dans IR $x^3-4x=0$, $(x-3)(x-5)=7(x-3)$, …. $\frac{x^2-4}{(x-2)^2}=0$, …	Les techniques de résolution sont laissées au choix des enseignants. Aucune indication n'est suggérée.
		4.1.5- Exercices résolus	-Résoudre dans IR l'équation : $\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-1)^2}=1$ -Déterminer le réel *a* de façon que l'équation $4(x+2)-x/5=7+ax$ n'ait pas de solution.	La première équation se ramène à $\|x\|+\|x-1\|=1$ et nécessite des études séparées dans trois intervalles de IR. Le deuxième exercice pose un problème redoutable en algèbre : La distinction des inconnues des paramètres. La prise de conscience de cette distinction ne peut se faire qu'en situation significative. N'oublions pas que DIOPHANTE distinguait déjà au 3ème Siècle le statut des paramètres (nombres donnés) et des inconnues, mais il ne symbolise pas les premières ; il a fallu attendre 13 siècles pour assumer cette symbolisation permettant de résoudre des problèmes en toute généralité, ce qui a été réalisé dans l'œuvre de VIÈTE.

Annexe 2 : Le programme d'algèbre de 1991

Thèmes	Objectifs spécifiques L'élève sera capable de :	Contenus	Recommandations
Opérations dans IR	Mettre en œuvre les règles opératoires dans IR et les règles sur les puissances pour : -Calculer la valeur d'une expression numérique ou une expression littérale pour des valeurs données des variables -Simplifier l'écriture d'une expression littérale	-Propriétés des opérations dans IR -Puissances d'exposants entiers relatifs -Propriétés -Valeur absolue d'un réel -Propriétés	-Les acquis antérieurs seront exploités et consolidés -Le calcul numérique et le calcul littéral seront menés de pair. -Les élèves utiliseront la calculatrice pour effectuer des calculs numériques.
Produits remarquables	Développer et factoriser une expression algébrique en utilisant des produits remarquables.	Produits remarquables: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$, $(a + b)^3$, $(a - b)^3$, $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$	-Aucune virtuosité n'est demandée dans les exercices de factorisation -On donnera aux élèves l'occasion de factoriser tout le long de l'année.
Racines carrées	-Trouver les réels x tels que $x^2 = a$ où $a \in IR^+$ -Mettre en œuvre les règles de calcul sur les radicaux pour simplifier l'écriture d'une expression ou pour en trouver la valeur exacte ou une valeur approchée.	-Racine carrée d'un réel positif -Racine carrée d'un produit -Racine carrée d'un quotient	-On consolidera les acquis antérieurs -Les opérations sur les radicaux superposés sont hors programme -Les élèves utiliseront la touche de la calculatrice pour trouver une valeur approchée ou exacte d'expressions numériques contenant des radicaux.
Ordre dans IR	-Comparer des réels -Encadrer une somme ou un produit de réels -Représenter un encadrement sur une droite graduée.	-Ordre dans IR -Intervalles de IR -Addition et ordre -Multiplication et ordre.	Les acquis antérieurs seront consolidés et complétés au niveau du vocabulaire et de l'expression mathématique.
Applications linéaires et affines	-Représenter graphiquement une application linéaire ou affine -Lire et interpréter des représentations graphiques de telles applications -Restriction d'une application linéaire ou affine. -Représenter graphiquement la restriction d'une application linéaire ou affine sur un intervalle donné de IR.	-Applications linéaires -Applications affines	-Les notions d'application d'un ensemble vers un autre et de restriction d'une application sur un intervalle de IR seront introduites au cours des activités et on évitera de s'attarder sur leurs aspects théoriques. -Les applications linéaires et affines seront appréhendées sous les trois aspects suivants : numérique, graphique et relationnel entre deux variables - On mettra en évidence la relation entre les fonctions linéaires et la proportionnalité.
Équations et problèmes	-Mettre en équation ou en inéquation un problème donné -Résoudre une équation ou une inéquation du premier degré à une inconnue réelle. -Représenter graphiquement les solutions d'une équation à deux inconnues réelles. -Résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues réelles -Représenter graphiquement les solutions d'une inéquation du 1er degré à deux inconnues.	Exemples d'étude de problèmes conduisant à : -Une équation ou une inéquation du premier degré à une inconnue réelle. -Une équation du premier degré à deux inconnues réelles -Un système de deux équations du premier degré à deux inconnues réelles. -Des inéquations du 1er degré à deux inconnues	-Les problèmes seront puisés dans le domaine mathématique ou dans le domaine des autres disciplines (Physique par exemple) ou encore dans l'environnement social et économique de l'élève. -Pour la résolution de tout problème, on dégagera nettement les différentes phases : Choix de l'inconnue ou des inconnues ; mise en équation ; résolution de l'équation ou de l'inéquation ou du système obtenus ; vérification et interprétation des résultats. -On pourra s'aider d'interprétations graphiques.

		réelles.	

Annexe 3 : Exemples d'organisations algébriques préconisées par le manuel de 1991

Chapitres	Types de tâches (T)	Techniques (τ)	Blocs technologico-théoriques [θ,Θ]
-Équations et inéquations à une inconnue	T_{11}-Vérifier qu'un réel donné est solution d'une équation ou inéquation. T_{12}-Résoudre une équation ou une inéquation du premier degré à une inconnue. T_{13}-Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré. T_{14}-Représenter graphiquement les solutions d'une équation ou inéquation. T_{15}-Mettre un problème en équation ou en inéquation et le résoudre.	τ_{11}-Remplacer l'inconnue par ce réel et vérifier l'égalité ou l'inégalité des deux membres. τ_{121}-Ramener l'équation ou l'inéquation à la forme réduite et appliquer l'algorithme de résolution. τ_{122}-Dresser le tableau du signe de binômes. τ_{13}-Transformer l'équation ou l'inéquation sous la forme *F(x)=0* (resp *F(x)<0, F(x)≤0*), factoriser *F(x)* et appliquer l'intégrité de (IR,+,x) ou les règles de signes dans IR. τ_{14}-Utiliser un axe représentant la droite réelle. τ_{15}-*Technique non indiquée dans le manuel.*	-Règles concernant l'ordre et les opérations dans IR. -Algorithme et procédure de résolution d'une équation du 1er degré. -Identités remarquables. -Définition, réunion, intersection des Intervalles de IR.
-Applications linéaires	T_{16}-Déterminer une application linéaire à partir de la donnée d'un réel non nul et de son image. T_{17}-Représenter graphiquement une application linéaire *f* donnée par : *f(x)=ax*. T_{18}-Résoudre un problème en utilisant une application linéaire.	τ_{16}-Résoudre l'équation $ax_0=y_0$ où *a* est l'inconnue et x_0 et y_0 sont donnés. τ_{171}-Tracer la droite (OM_0) où $M_0(x_0, y_0)$ et $y_0=ax_0$. τ_{172}-Tracer (OA) où A(*1*,*a*). τ_{18}-*Aucune technique n'est indiquée.*	-Définition d'une application linéaire et sa notation : $x \mapsto ax$ -Repères cartésiens du plan. -Théorème donnant la représentation graphique d'une application linéaire.
-Applications affines	T_{19}-Déterminer une application affine donnée par deux réels et leurs images. T_{20}-Déterminer une application affine $x \mapsto ax+b$ donnée par l'un des coefficients *a ou b* et la donnée d'un réel non nul et son image. T_{21}-Représenter graphiquement une application affine. T_{22}-Interpréter la représentation graphique d'une application affine. T_{23}-Résoudre des problèmes en utilisant des applications affines.	τ_{19}-Appliquer le résultat : $b = f(0) \quad et \quad a = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ τ_{20}-Appliquer l'un des résultats : $a=a_0$ *et* $b= y_0-a_0x_0$ ou $b=b_0$ et $a = \frac{y_0-b_0}{x_0}\ ,\ x_0 \neq 0$ τ_{211}-Tracer la droite (AB) où A et B sont deux points de la représentation graphique. τ_{212}-Tracer la droite passant par B(*0*,*b*) et parallèle à OA où A(*1*,*a*). τ_{22}-*Aucune technique n'est précisée.* τ_{23}-*Aucune technique n'est précisée.*	-Définition d'une application affine et sa notation : $x \mapsto ax+b$ -Propriétés d'une application affine. -Repère cartésien du plan. -Théorème (admis) du régionnement du plan.
-Systèmes d'équations et d'inéquations à deux inconnues.	T_{24}-Résoudre un système de deux équations à deux inconnues. T_{25}-Représenter graphiquement les solutions d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues.	τ_{241}-Utiliser la méthode de substitution. τ_{242}-Utiliser la méthode d'élimination. τ_{25}-Utiliser les représentations graphiques de deux applications affines convenables. τ_{26}-Utiliser le théorème du	-Définitions, propriétés et théorèmes concernant les équations et les inéquations du premier degré à une ou deux inconnues. -Repère cartésien du plan

	T_{26}-Résoudre graphiquement un système d'équations ou d'inéquations du premier degré à deux inconnues. T_{27}-Mettre un problème en équation ou en inéquation et le résoudre.	régionnement du plan. *τ_{27}-Aucune technique d'ordre général n'est indiquée.*	-Théorème du régionnement du plan.

Annexe 4 : Les compétences algébriques visées par le manuel de 2003 et leurs composantes

Chapitres	Compétences mathématiques Exigibles :	Composantes de la compétence			Contextes de réalisation
		Capacités	**Habiletés**	**Contenus mobilisés**	
Activités algébriques	**1-Pratiquer une démarche mathématique. 2-Communiquer dans un langage mathématique. 3-Mobiliser des algorithmes et des procédures. 4-Résoudre des problèmes. 5-Organiser et analyser l'information. 6-Utiliser les technologies de l'information et de la communication. 7-Apprécier la contribution des mathématiques au développement de l'individu et de la société.**	Mobiliser des règles, des algorithmes, des procédures et des techniques algébriques en contexte de résolution de problèmes.	-Concevoir une expression littérale modélisant une situation. -Interpréter une expression littérale. -Trouver une valeur numérique d'une expression littérale pour des valeurs données des variables. -Factoriser une expression à l'aide des identités remarquables. -Transformer l'égalité de deux expressions en une égalité équivalente.	-Propriétés de + et x dans IR. -Identités remarquables.	-Situations familières ou non familières en contextes intra- ou extra-mathématiques. -Situations faisant intervenir : L'égalité de deux expressions, la mesure de grandeurs et/ou une lecture graphique.
Fonctions linéaires		Mobiliser le concept de fonction linéaire pour analyser, modéliser et résoudre une situation-problème.	-Reconnaître une situation de linéarité. -Déterminer une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel. -Représenter graphiquement une fonction linéaire. -Lire et interpréter le graphique d'une fonction linéaire.	-Fonction linéaire. -Représentation graphique d'une fonction linéaire.	-Détermination graphique du coefficient d'une fonction linéaire. -Problèmes de pourcentage. -Construction de segments de longueur *a.b* ou *1/b* où *a* et *b* sont deux nombres non nuls donnés.
Équations et inéquations du premier degré à une inconnue		Résoudre des problèmes du premier degré.	-Résoudre des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue. -Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue.	-Équation et inéquations du 1er degré à une inconnue. -Équation $x^2=a$. -Signe d'un binôme du premier degré.	-Mise en équation d'un problème. -Mobilisation du signe d'un binôme pour résoudre un problème d'optimisation de coût. -Recherche d'une quatrième proportionnelle.
Fonctions affines		Mobiliser le concept de fonction affine pour analyser, modéliser et résoudre une situation-	-Déterminer une fonction affine connaissant les images de deux nombres. -Reconnaître une situation modélisable par une fonction	-Fonction affine. -Représentation graphique d'une fonction affine.	-Détermination de taux d'accroissement. -Conversion des températures (degré Celsius/degré Fahrenheit) -Vitesse du son. -Résolution

		problème.	affine. -Représenter graphiquement une fonction affine. -Lire et Interpréter le graphique d'une fonction affine.		graphique d'une équation ou d'une inéquation.
Systèmes de deux équations à deux inconnues		Résoudre des problèmes modélisables par des systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.	-Résoudre graphiquement une équation du premier degré à deux inconnues. -Résoudre un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues. -Résoudre graphiquement un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues.	-Équation du premier degré à deux inconnues. -Systèmes de deux équations du 1er degré à deux inconnues. -Résolution par substitution ou par élimination -Résolution graphique.	-Modélisation d'un problème par une équation du premier degré à deux inconnues. -Modélisation d'un problème par un système de deux équations du 1er degré à deux inconnues. -Résolution de problèmes d'optimisation.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

PREMIÈRE RENCONTRE AVEC L'ALGÈBRE

Mirène LARGUIER*

Résumé – Une comparaison entre les programmes du Québec et de la France pour des élèves entre 10 et 12 ans, a mis en lumière l'intérêt des problèmes de généralisation mis en œuvre dans des classes au Québec. Ce type de problème semble permettre une entrée vers l'algèbre et le développement d'une pensée algébrique en comparaison avec une pensée arithmétique. Les analyses a priori et a posteriori de quelques problèmes de généralisation typiques testés en France ont pour objectif de tester la solidité de l'hypothèse concernant l'intérêt des problèmes de généralisation.

Mots-clefs : algèbre – pensée algébrique – problèmes de généralisation

Abstract – A comparison between programs of Quebec and France for pupils between 10 and 12 years, revealed the interest for problems of generalization implemented in classes in Quebec. This type of problem seems to allow an entrance towards the algebra and the development of an algebraic thinking to comparison with an arithmetical thinking. Analyses of some typical problems of generalization tested in France have for objective to test the solidity of the hypothesis concerning the interest of the problems of generalization.

Keywords: Algebra - algebraic thinking - problems of generalization

I. UNE ÉTUDE DANS LE CADRE DE L'OBSERVATOIRE INTERNATIONAL DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE

Cet article est une contribution dans le cadre d'un projet de grande envergure qui est le développement de l'OIPA : Observatoire International de la Pensée Algébrique. Ce projet est coordonné par Alain Bronner en France et Hassane Squalli au Québec. Il s'appuie sur de nombreux résultats de la recherche résumés ci-dessous.

L'enseignement de l'algèbre, plus particulièrement lors de l'entrée dans l'algèbre, est un *problème de la profession*, au sens de Chevallard (2006). Pour répondre en partie à ce problème, dans les recherches menées par Squalli et al. au Québec, l'accent est mis sur le développement de la pensée algébrique dès le primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre (Squalli, Mary & Marchand 2011). En France, plusieurs travaux de recherche ont souligné les difficultés de la construction de la pensée algébrique (rapport sur le calcul de la commission Kahane 2002 ; numéro spécial de la revue Recherche en Didactique des Mathématiques 2012). Quant à Bronner (2007), il a montré la difficulté de circonscrire la frontière entre numérique et algébrique. Il est à l'origine de l'idée d'un observatoire du numérique et de l'algébrique et plusieurs travaux de doctorat qu'il a encadrés portent

* Université de Montpellier – France – mirene.larguier@fde.univ-montp2.fr

Larguier M. (2015) Première rencontre avec l'algèbre. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 313-333.

directement sur des thématiques de ce futur observatoire (Larguier 2009 ; Marcio Santos Farias 2010 ; Andwandter 2012 ; Briant 2013).

Au Québec comme en France, l'articulation entre les domaines numérique et algébrique constitue l'un des aspects du *problème de la profession* cité précédemment. Toutefois cette question ne se pose pas de la même façon dans les deux pays comme l'a souligné Artigue (2012) lors d'une Conférence Nationale sur l'Enseignement des Mathématiques à l'IFÉ. Elle distingue trois voies d'entrée[1] suivant les pays et les cultures :

- la voie classique pour nous [en France] des équations,
- la voie de la reconnaissance de structures (patterns) et de la généralisation [voie choisie par les pays anglo-saxons].
- la voie de la modélisation et des fonctions.

[…] ces différentes routes ne posent pas dans les mêmes termes la question des discontinuités entre arithmétique et algèbre.

Cet article présente des éléments d'une recherche en lien avec l'une des questions vives travaillées dans l'OIPA à savoir : quelle entrée dans l'algèbre privilégier et quelles situations proposer aux élèves pour développer une pensée algébrique ? Une hypothèse retenue par l'équipe au Québec et soutenue également par l'équipe française, est de proposer des situations de généralisation comme porte d'entrée vers l'algèbre. Dans cet article il s'agit d'analyser une situation de généralisation avec la perspective de repérer la qualification de la pensée des élèves comme étant de nature arithmétique ou bien de nature algébrique. Il s'agit donc de délimiter d'une part la frontière entre les domaines numériques et algébriques considérés comme cadres mathématiques (au sens de Douady 1984), et d'autre part la frontière entre la pensée arithmétique et la pensée algébrique, deux frontières qui ne se recouvrent pas toujours.

Après avoir comparé le *savoir à enseigner* (au sens de la transposition didactique définie par Chevallard 1985) dans les programmes du Québec et de la France relativement au début de l'algèbre, l'article présentera trois exemples de situations de généralisation et s'attachera à faire l'analyse de productions d'élèves concernant l'un de ces problèmes : les maisons en allumettes. Cette situation testée en France en classe de 5^{e} sera utilisée pour dégager une série de critères afin de décrire la genèse de la pensée algébrique chez les élèves. La question essentielle est : quels sont les indicateurs qui permettent de diagnostiquer chez un élève une pensée algébrique naissante ? Cette question va de pair avec cette autre question qui ne sera pas traitée dans cet article : ces problèmes de généralisation sont-ils véritablement une réponse pertinente pour signifier l'entrée dans l'algèbre ?

II. COMPARAISON DES PROGRAMMES DU QUÉBEC ET DE LA FRANCE

La comparaison des institutions scolaires québécoises et françaises n'est pas facile, car l'enseignement secondaire commence en classe de 6^{e} en France pour des élèves qui ont normalement 11 à 12 ans, alors qu'au même âge au Québec ces élèves sont en sixième année de l'enseignement primaire (Cf. tableau 1). Aussi l'analyse comparée des programmes de fin de primaire et du début du secondaire dans les deux pays, montre des différences notoires relatives à l'entrée dans l'algèbre et plus spécifiquement l'entrée dans la pensée algébrique.

[1] Citation extraite du diaporama, consulté sur Internet le 20 février 2015 : http://www.canal-u.tv/video/ecole_normale_superieure_de_lyon/12_bull_le_calcul_de_l_ecole_au_college_vers_le_calcul_algebrique.8596

Concernant le domaine numérique, le programme du Québec le dénomme *arithmétique* alors qu'en France il apparait sous la dénomination *nombres et calcul*. Par ailleurs le programme du Québec comporte des expressions inconnues en France comme *nombre composé* et *nombre carré*[2] avec les définitions suivantes[3] :

- « Un **nombre composé** est un nombre qui a 3 facteurs ou plus. »
- « Un **nombre carré** est un nombre pouvant s'exprimer sous la forme de n^2, où *n* est un nombre naturel. »

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Enseignement pré-scolaire</td><td colspan="6">Enseignement primaire au Québec</td><td colspan="2">Enseignement secondaire au Québec</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Maternelle</td><td>1e</td><td>2e</td><td></td><td>Maternelle</td><td>1e</td><td>2e</td><td></td><td>Maternelle</td></tr>
<tr><td>3ans – 4 ans</td><td>4 - 5</td><td>5 - 6</td><td>6 - 7</td><td>3ans – 4 ans</td><td>4 - 5</td><td>5 - 6</td><td>6 - 7</td><td>3ans – 4 ans</td><td>4 - 5</td><td>5 - 6</td></tr>
<tr><td>PS</td><td>MS</td><td>GS</td><td>CP</td><td>PS</td><td>MS</td><td>GS</td><td>CP</td><td>PS</td><td>MS</td><td>GS</td></tr>
<tr><td colspan="3">Maternelle</td><td colspan="5">Enseignement élémentaire</td><td colspan="3">Collège</td></tr>
<tr><td colspan="8">Enseignement primaire en France</td><td colspan="3">Enseignement secondaire en France</td></tr>
</table>

Tableau 1 - *comparaison des institutions scolaires au Québec et en France*

Concernant les contenus en terme d'objets mathématiques numériques, les programmes des deux pays se ressemblent, si ce n'est que dans les programmes du Québec les nombres décimaux - ainsi que les nombres carrés, premiers ou composés - sont abordés dès la 4e du primaire (correspondant au CM1 en France), et les puissances sont abordées en 5e du primaire (correspondant au CM2 en France). Le tableau 2 précise cette comparaison et révèle qu'en France l'étude des entiers naturels est plus succincte qu'au Québec. Un exemple illustre bien cette comparaison : il faut arriver en classe de terminale scientifique (17-18 ans) pour que soit abordée la notion de nombre premier dans le cadre d'une partie optionnelle de ce programme (enseignement de spécialité, partie dénommée *arithmétique*).

Première apparition dans les programmes	Au Québec	En France	Remarque
Nombre premier	4e primaire (9-10 ans)	Terminale S enseignement de spécialité	Nombres premiers entre eux : abordé en classe de 3e du collège (14-15 ans)
Nombre composé	4e primaire	N'apparait pas	
Nombre carré	4e primaire	N'apparait pas	
Puissance	5e primaire	4e (13-14 ans)	
Nombre décimal	4e primaire	CM1 (9-10 ans)	

Tableau 2 - *étude comparée du numérique dans les programmes du Québec et de la France*

Concernant l'entrée dans la pensée algébrique et les problèmes de généralisation, on trouve au Québec cette préconisation[4] qui concerne tout le primaire :

[2] En France cela correspond à la dénomination suivante : nombre carré parfait

[3] Définitions issues de ce site : http://bv.alloprof.qc.ca

[4] La référence de la citation se trouve dans la « progression des apprentissages au primaire » consulté sur le site : http://www1.mels.gouv.qc.ca/progressionPrimaire/mathematique/. Sauf avis contraire, toutes les citations de l'article relatives au Québec sont extraites de ce document qui fixe le *savoir à enseigner*.

> Décrire dans ses mots et avec un vocabulaire mathématique approprié des régularités numériques (ex. : nombres pairs, nombres impairs, nombres carrés, nombres triangulaires, nombres premiers, nombres composés).

Les élèves sont donc invités à repérer et à décrire des structures à travers des *régularités numériques*, ce qui peut constituer un pas vers l'expression d'une généralisation inductive (Piaget & Henriques 1978). Ce type de compétence n'est pas du tout signalé dans le programme français. Par ailleurs, au Québec, le travail sur les nombres carrés ou triangulaires favorise une conception géométrique des nombres entiers et l'émergence de concepts et de théorèmes en acte favorisant la généralisation. Par exemple : pour passer du nombre carré n^2 au nombre carré $(n+1)^2$, il suffit d'ajouter $2n+1$ à n^2 en visualisant les éléments à ajouter au bord du premier carré pour obtenir le second (Cf. figure 1).

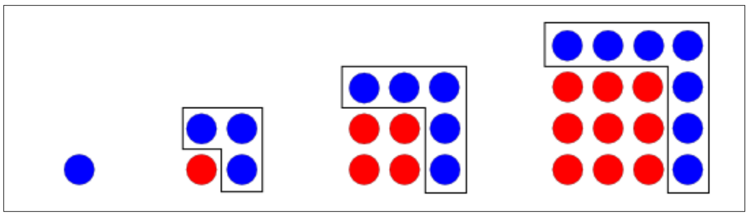


Figure 3 *- les nombres carrés (http://images.math.cnrs.fr)*

Le terme équation apparait une fois dès le primaire dans le programme québécois. Voici ce qui est demandé au Québec pour tout le primaire concernant le travail en arithmétique :

> Traduire une situation à l'aide de matériel concret, de schémas ou d'équations et vice versa (exploitation des différents sens de l'addition et de la soustraction).

Ce travail relatif aux équations est précisé en lien avec des situations additives :

> Déterminer un terme manquant dans une équation (relations entre les opérations) : $a + b = \square$, $a + \square = c$, $\square + b = c$, $a - b = \square$, $a - \square = c$, $\square - b = c$

Il est également précisé dans des situations multiplicatives :

> Déterminer un terme manquant dans une équation (relations entre les opérations) : $a \times b = \square$, $a \times \square = c$, $\square \times b = c$, $a \div b = \square$, $a \div \square = c$, $\square \div b = c$

Ce travail sur ces équations qui peuvent se résoudre arithmétiquement vise leur résolution mais aussi vise à faire émerger les liens entre d'une part addition et soustraction et d'autre part entre multiplication et division ce qui peut être vu comme une initiation à l'algèbre en tant qu'étude des structures des ensembles de nombres.

Dans les termes à retenir, se trouvent : « Égalité, inégalité, équation », égalité et équation ne sont donc pas des synonymes malgré leurs signifiants identiques, et les élèves doivent connaitre ces termes dès la 3^e (correspondant au CE2 en France).

Toujours au Québec, un autre élément qui prépare les élèves à l'entrée dans l'algèbre est la préconisation suivante dès le début du primaire : « Établir la relation d'égalité entre des expressions numériques (ex. : 3 + 2 = 6 – 1). » Effectivement, ce type de tâches permet de mieux construire le concept d'égalité ; cela contribue au dépassement de l'obstacle qui consiste à connaitre l'égalité comme une relation qui n'est pas symétrique et qui remplace l'expression « ça fait ». Cette nouvelle conception de l'égalité permet de concevoir deux noms propres d'un même objet qui dénotent le même nombre (Frege 1892). Dès le début du primaire il est demandé également dans le programme québécois de « Déterminer des équivalences numériques à l'aide de relations entre les opérations » en utilisant en acte la commutativité et l'associativité (ces termes utilisés dans le texte du programme n'ont pas à être connus par les élèves). Cette demande renforce encore la solidité du concept d'égalité dans son acception d'équivalence.

Les termes *régularité* et *suite* doivent être connus par les élèves dès le début du primaire (ils figurent explicitement dans le vocabulaire à institutionnaliser), soit dès 6 ans, et voici encore ce qui est dicté par le programme québécois :

> Les situations qui lui sont proposées doivent comporter des régularités numériques ou non numériques (couleurs, formes, sons, etc.). Elles lui permettront d'observer et de décrire diverses régularités, des suites de nombres et d'opérations telles que la suite des nombres pairs, la suite des multiples de 5, la suite des nombres triangulaires. Elles le conduiront ainsi à ajouter des termes à une suite, à énoncer des règles générales ou à construire des modèles. Il pourra alors énoncer ou déduire des définitions, des propriétés et des règles. (Progression des apprentissages au primaire).

Concernant l'entrée dans l'algèbre, il y a incontestablement une grande différence avec les programmes français du primaire, ces derniers n'invitant pas explicitement les professeurs des écoles à faire découvrir à leurs élèves des régularités. D'autre part, en France, le terme d'équation n'intervient pas dans les programmes de primaire et le terme d'égalité n'apparait que dans l'expression « égalité de longueurs ». Dans les programmes français apparait une insistance pour le calcul sous toutes ses formes et pour la résolution de problèmes. Dans ce cadre, il s'agit de travailler les objets des différents domaines et de développer le raisonnement logique, mais sans préciser ce que recouvre le raisonnement en mathématiques : « La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages. ». Ainsi le programme en France est davantage axé sur des activités numériques alors que pour le Québec, outre les aspects calculatoires et la résolution de problèmes qui sont également au cœur de l'activité mathématique, le programme ouvre explicitement une fenêtre vers le développement d'une pensée algébrique qui se traduit par des problèmes de généralisation et des études de suites.

Concernant le collège en France, dont la première année correspond à la dernière année du primaire au Québec, les termes égalité et équation apparaissent et le préambule du programme de collège précise que les élèves doivent « assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes (en particulier distinguer égalité, identité et équation). » (BO spécial n° 6 du 28 août 2008, p.10). L'algèbre est donc présentée comme un langage avec des objets particuliers qui doivent être distingués, mais aucune autre précision n'est donnée.

Dans le programme français de la classe de sixième, dans le domaine dénommé « nombres et calculs » la préoccupation essentielle est le développement de techniques de calcul. Le terme « égalité » n'apparait même pas. Aucune proposition du programme ne permet de l'interpréter comme un pas vers l'algèbre si ce n'est le travail relatif aux formules : « À travers les activités sur les longueurs, les aires et les volumes, les élèves peuvent se construire et utiliser un premier répertoire de formules » (ibid., p.17).

Le premier contact avec la lettre est donc permis par l'usage des formules, ce qui confère à la lettre un statut de marque place, et pour les élèves la lettre apparait comme l'initiale d'un mot (r pour rayon, l pour largeur, etc.) ce qui peut constituer un obstacle didactique au sens de Brousseau (1998). C'est également en cinquième qu'apparait le terme d'équation. « L'initiation à la notion d'équation » apparait à travers ce type de tâches : « Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques » (Ibid.) et c'est assorti de ce commentaire :

> Une attention particulière est apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique.

> Les programmes du collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens.
>
> La classe de cinquième correspond à une étape importante avec le travail sur des égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner. (ibid., p. 23).

Ainsi les programmes alertent les professeurs sur la difficulté de l'entrée dans l'algèbre qui se traduit tout d'abord par l'usage de la lettre et aussi par un changement conceptuel concernant l'objet égalité. Un type de tâches motivant l'entrée dans l'algèbre est implicitement préconisé, à savoir proposer « des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique ». Une raison d'être de l'algèbre apparait donc là comme étant un raisonnement nécessité par des situations dans lesquelles le raisonnement arithmétique n'est plus efficace. L'opposition entre arithmétique et algébrique est donc implicitement exprimée.

Pour trouver une allusion aux problèmes de généralisation – problèmes qui apparaissent dès l'âge de 6 ans au Québec à travers l'étude de régularités – il faut regarder le programme français de la classe de quatrième (élèves de 13 à 14 ans). Effectivement on trouve une indication discrète sur des situations de généralisation, mais ce n'est vraiment pas mis en relief. C'est en lien avec le thème « calcul littéral » assorti du commentaire suivant :

> Le travail proposé [avec le calcul littéral] s'articule autour de trois axes :
>
> - utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ;
>
> - utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ;
>
> - utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général (en particulier en arithmétique). (Ibid, p. 29)

En conclusion, les instructions officielles au Québec et en France décrivent deux curricula officiels très différents en ce qui concerne l'entrée dans l'algèbre. Cependant des recherches en didactique au Québec comme en France postulent que les problèmes de généralisation sont de bons candidats pour permettre le développement d'une pensée algébrique. Dans la suite de cet article, l'analyse de productions d'élèves à propos de l'un de ces problèmes en France montrera comment peut s'opérer l'articulation entre le numérique et l'algébrique.

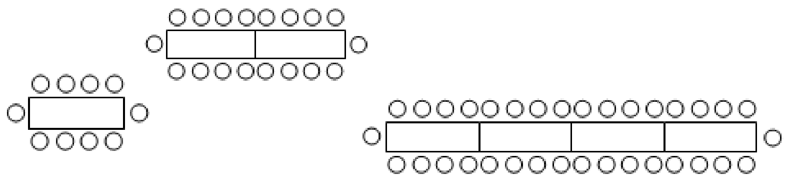
III. PRESENTATION D'EXEMPLES DE PROBLÈMES DE GENERALISATION

Dans cette partie je présente en tant qu'exemples trois problèmes de généralisation. Il s'agit en fait dans ces trois cas de problèmes dont le modèle mathématique est une suite arithmétique. L'analyse a posteriori permet de mettre au jour les réponses possibles de la part d'élèves ainsi que les indicateurs d'une pensée algébrique émergente. Dans le cadre de cet article, cette analyse ne sera réalisée que pour le problème des maisons en allumettes.

1. Les tables de la cafeteria

<u>Les tables de la cafétéria</u>

Dans une cafétéria d'école, le cuisinier dispose de petites tables rectangulaires qu'il faut mettre bout à bout pour former de plus grandes tables. Voici quelques dispositions possibles.



a) Donne une manière de trouver rapidement le nombre de chaises placées autour d'une grande table, peu importe la longueur de celle-ci.

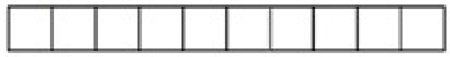
b) Si une grande table est entourée de 234 chaises, combien de petites tables ont été nécessaires à sa formation ?

Figure 4 - *énoncé donné aux élèves du problème « les tables de la cafeteria »*

Un problème similaire a été proposé par Vlassis et Demonty (2002). Le problème tel qu'il est présenté dans la figure 2 a été testé et analysé au Québec. Il a été repris en France dans le cadre de la recherche OIPA au début du collège, en 6^{e} et en 5^{e}. Contrairement aux élèves du même âge au Québec, en France les élèves ont été totalement déconcertés par ce type de problème en rupture avec les problèmes donnés habituellement et ont en général rendu feuille blanche ou alors ils ont donné le nombre de chaises pour le dessin représentant les quatre tables.

2. *Les chaînes du bijoutier*

Laurent, un bijoutier, fabrique des chaines en or à mailles de forme carrée comme celle-ci :



Il fait des chaines de différentes longueurs pour diverses utilisations (au cou, au pied, comme boucles d'oreilles).

L'or coûte cher. Quand il fait une commande, il compte les tiges une par une pour être sûr de ne pas en commander de trop ni en oublier. Mais c'est long. Il voudrait pouvoir trouver le nombre de tiges dont il a besoin sans être obligé de compter les tiges une par une. Vous devez envoyer un message au bijoutier dans lequel vous allez lui expliquer comment il pourrait faire pour trouver combien de tiges il a besoin selon le nombre de mailles.

Figure 5 *- énoncé du problème du bijoutier*

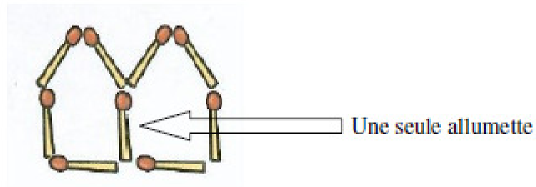
Ce problème a été travaillé au Québec dans le cadre de recherches collaboratives :

> Dans le cadre d'une rencontre sur le sujet [du passage de l'arithmétique vers l'algèbre] tenue à l'université de Sherbrooke au printemps 2013, une collaboration entre des didacticiens et des didacticiennes d'universités québécoises, le MELS (Directions des programmes pour la mathématique) et des conseillers pédagogiques permit l'émergence d'un groupe. Ce dernier se donne comme objectif de soutenir le développement de la pensée algébrique dans une trajectoire continue entre les ordres d'enseignement primaire et secondaire. Le moyen choisi par le groupe est la mise en œuvre d'un dispositif de formation-action permettant à des conseillers pédagogiques ainsi qu'à des enseignants du primaire et du secondaire des commissions scolaires de la province, de perfectionner leurs compétences professionnelles à intégrer dans leur pratique d'enseignement des mathématiques des moyens, reconnus par la recherche, pour favoriser le développement de la pensée algébrique. (http://mathematiqueps.blogspot.fr/)

Ce problème n'a pas encore été testé en France, mais en revanche une vidéo prise dans une classe de 6^{e} québécoise et issue de la recherche citée précédemment, a été analysée par les chercheurs français dans le cadre de l'OIPA (Cf. article de Bronner pour EMF 2015). Un problème similaire a également été proposé par Krysinska et al. (2009) sans le contexte de la bijouterie mais uniquement dans le cadre géométrique dans lequel on cherche le nombre de côtés de carrés accolés.

3. *Les maisons en allumettes*

Avec des allumettes, on veut construire une succession de maisons comme ci-dessous:



Arthur dit qu'il est capable de trouver la quantité d'allumettes nécessaires à la construction de n'importe quel nombre de maisons. Trouver comment fait Arthur.

***Figure 6 -** énoncé du problème « les maisons en allumettes »*

L'énoncé tel qu'il est proposé dans la figure 4 a été donné en France à des élèves de 5e par une étudiante de master 2 lors de son stage en responsabilité[5] (Massare 2011). Les productions d'élèves étudiées dans la section suivante proviennent de ce mémoire de master. Ce problème figure également dans l'article de Krysinska et al. (2009) comme étant un bon candidat pour introduire une pensée fonctionnelle mais aussi pour permettre l'entrée dans l'algèbre et le développement d'une pensée algébrique.

IV. ANALYSE DU PROBLÈME DES ALLUMETTES

1. *Pensée arithmétique et pensée algébrique*

La pensée arithmétique correspond à un raisonnement qui ne s'appuie que sur des données numériques connues présentes dans l'énoncé ainsi que sur les opérateurs numériques usuels pour obtenir le résultat recherché. Ce résultat *r* peut donc s'écrire comme une expression numérique mobilisant les données de l'énoncé et des opérateurs. Cette expression numérique qui modélise le problème peut être écrite dans le registre (Duval 1995) des écritures mathématiques ou dans le registre du langage naturel, cela ne modifie pas la nature du raisonnement. Si *r* est le résultat recherché et $a_1, a_2 \dots a_n$ les données numériques connues de l'énoncé alors il existe une fonction définie dans R formulée dans le registre du langage naturel ou du langage mathématique telle que :

$$f\,(a_1, a_2 \dots a_n) = r$$

La pensée algébrique a contrario, s'exprime par un raisonnement qui mobilise au moins une donnée inconnue en opérant sur elle comme si elle était connue. Ce type de raisonnement nécessite une fiction : *faire comme si* ce nombre était connu et calculer avec lui comme avec les nombres connus. En supposant qu'il n'y ait qu'un seul nombre inconnu *x* dans le problème, si $a_1, a_2 \dots a_n$ sont les nombres donnés dans l'énoncé, la modélisation de ce nouveau problème peut être exprimée par :

il existe une fonction f définie dans R telle que $f\,(a_1, a_2 \dots a_n, r, x) = 0$

[5] Les fonctionnaires stagiaires, futurs enseignants de mathématiques de collège et de lycée, ont un stage en responsabilité dans un établissement qui fait partie intégrante de la deuxième année de master.

Dans le cas du problème des allumettes, la modélisation du problème sous sa forme réduite conduit à cette réponse avec n qui est le nombre d'allumettes pour un nombre entier m de maisons :

$$n = 4m+1$$

Dans cette égalité, qui est la modélisation d'une suite arithmétique, le nombre m peut être vu comme une variable si on adopte un point de vue dans le cadre des fonctions, ou n et m peuvent être vus comme des nombres indéterminés si on regarde cette égalité dans le cadre numérique comme étant une identité c'est à dire l'équivalence entre deux signes qui dénotent le même nombre (Frege 1892). Comme précédemment cette modélisation peut tout aussi bien être exprimée dans le registre du langage naturel : « le nombre total d'allumettes est égal au nombre de maisons multiplié par 4 auquel on ajoute 1 » (d'autres expressions sont possibles).

2. *Un axe et des critères pour identifier un type de pensée*

J'utilise un axe qui relie à gauche la pensée arithmétique et à droite la pensée algébrique telles qu'elles peuvent être définies comme précédemment dans le savoir de référence. Le raisonnement mis en œuvre par un élève pour résoudre le problème peut être interprété comme étant représenté par un point sur cet axe.

pensée arithmétique pensée algébrique

Pour interpréter le raisonnement d'un élève pour le positionner sur cet axe, la typologie des preuves décrite par Balacheff (1987) est un outil utile. En effet pour exprimer la généralité et en conséquence le modèle algébrique correspondant à la situation des maisons en allumettes, l'élève doit convoquer d'une part l'objet « nombre total d'allumettes » et d'autre part l'objet « nombre de maisons » (ou l'objet « nombre d'étapes » ou encore « numéro de l'étape ») à travers des ostensifs. Ces derniers peuvent être le langage naturel, ou des abréviations ou encore des lettres sans rapport avec les mots du langage courant, mais aussi des dessins comme celui d'une maison ou d'une allumette. La convocation de ces objets est alors un marqueur de cette pensée algébrique naissante. Dans le cas d'une suite arithmétique comme dans celui d'une suite géométrique, Krysinska et al. (2009) précisent ce qui suit :

> les modèles fonctionnels a+bn et ab^n jouissent de propriétés intéressantes dont ils ont le monopole : non seulement, ils se prêtent à une double lecture [itérative et fonctionnelle], mais ils constituent aussi des modèles dont l'expression rend compte et valide à la fois la régularité itérative et le principe de la construction du tableau numérique. Nous en tirerons l'hypothèse qu'ils constituent des modèles fonctionnels sans doute plus accessibles que d'autres lors d'une première approche des problèmes de dénombrement. (Op. cité, p. 13)

Ainsi l'expression du modèle constitue le processus de généralisation. La preuve mathématique dans le savoir de référence, à savoir la démonstration, n'est pas à la portée des élèves car elle suppose une démonstration par récurrence de la validité de l'énoncé : quel que soit l'entier m, le nombre d'allumettes n est donné par n = 4m+1. Evidemment des élèves de début de collège ne se posent pas la question de la démonstration, cependant il leur est possible :

- de tester la validité du modèle produit à l'aide de quelques exemples vérifiables grâce à des dessins ;
- de justifier le modèle produit en montrant son adéquation avec le processus permettant de construire la suite des maisons.

Ainsi l'analyse des productions d'élèves selon la typologie de Balacheff pour caractériser le type de preuve permet de mettre au jour des indicateurs de la genèse d'une pensée algébrique.

3. *Preuves pragmatiques mais des pensées différentes*

La typologie de Balacheff permet de différencier des élèves qui n'utilisent que des nombres connus mais avec des fonctions différentes. Ainsi dans la catégorie des *preuves pragmatiques* :

- ✓ des élèves peuvent utiliser uniquement des cas particuliers en appui sur les dessins correspondants des maisons et traduire ainsi une pensée strictement arithmétique, il s'agit de l'*empirisme naïf*. Dans ce cas de figure, l'élève ne pourra pas exprimer la généralité ;
- ✓ des élèves peuvent utiliser un cas particulier comme *exemple générique*, c'est-à-dire que le nombre de maisons est supposé pouvoir être remplacé par n'importe quel autre. Bien que les objets utilisés soient des objets du domaine numérique, la pensée exprime un raisonnement générique reproductible avec n'importe quel nombre et elle dit la généralisation. Ce type de raisonnement signe une entrée dans la pensée algébrique avec en implicite le concept en acte de quantification universelle de l'énoncé produit. C'est comme si l'élève disait : « quel que soit le nombre pris à la place de l'exemple présenté pour indiquer le nombre de maisons, cela conduira à cette procédure de calcul pour donner le nombre d'allumettes ».

4. *Preuves intellectuelles*

L'expression de la généralité peut être exprimée dans le registre du langage naturel sans aucun appui sur des données numériques. Cela correspond alors à l'*expérience mentale* qui est une forme de *preuve intellectuelle* et qui exprime une pensée algébrique. L'élève peut fonder ce raisonnement :

- ✓ en exprimant le nombre d'allumettes en fonction du nombre de maisons à partir de l'observation des dessins des maisons ce qui l'amène à s'appuyer sur le contexte. La modélisation est alors complètement dépendante du milieu matériel ;
- ✓ en observant un invariant dans le cadre numérique qui est la relation qui lie le nombre de maisons et le nombre d'allumettes ce qui le conduit à faire abstraction du contexte. La relation exprimée est alors sous la forme d'un opérateur dans un tableau de nombres. Il y a un détachement du milieu matériel pour faire confiance aux nombres.

La généralité itérative peut exprimer également la relation entre le nombre d'allumettes pour un certain nombre de maisons et le nombre d'allumettes pour une maison supplémentaire. Autrement dit l'élève a compris que pour une maison de plus il faut ajouter 4 allumettes. Ce raisonnement général n'est pas suffisant pour exprimer le nombre d'allumettes pour m maisons, il dénote cependant que l'élève est capable d'exprimer une généralité, ce qui est un pas vers la pensée algébrique. Si la suite u_n exprime le nombre d'allumettes pour n maisons, l'élève a identifié en actes un invariant opératoire qui est : $u_{n+1} = u_n + 4$ (Dans ce cas Krysinska et al. (2009) parlent de régularité itérative qu'ils opposent à une régularité fonctionnelle).

L'*expérience mentale* peut conduire l'élève à modéliser la situation dans un registre proche de celui du langage algébrique dans le savoir de référence. L'élève produit alors un calcul qui fait intervenir des nombres connus, des opérateurs arithmétiques et aussi des signes qui désignent les variables. Voici des variantes pour les signifiants non langagiers qui expriment ces variables :

- ✓ des dessins, par exemple celui d'une allumette ;
- ✓ des mots du langage naturel ;
- ✓ des abréviations de mots ;
- ✓ des pointillés ;
- ✓ des lettres comme dans le registre algébrique.

5. Synthèse

Ces différentes réponses sont résumées dans le schéma ci-dessous.

Pensée arithmétique ⟷ Pensée algébrique

A	B	C	D	E	F	G
Cas particuliers pris comme exemples	Expression de la relation entre u_n et u_{n+1}	Exemple générique	Expression de la généralité en langage naturel	Justification juste de la généralité	Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	Modélisation en langage algébrique avec usage des lettres

Il faut remarquer que ce qui est attendu de la part d'élèves de cinquième, c'est essentiellement une conjecture qui est l'expression du nombre d'allumettes pour un nombre de maisons donné et la justification de cette conjecture en appui sur la situation concrète.

V. ANALYSE DE PRODUCTIONS D'ELEVES

Je rappelle que ces productions ont été recueillies dans une classe de 5^e (12- 13 ans) en France (Massare 2011). Les élèves ont travaillé individuellement avant d'être mis en groupe de 4 à 5 élèves qui ont travaillé de façon autonome. Les écrits que je vais analyser sont ceux qui émanent de ce travail de groupe.

En synthèse, chaque production sera caractérisée en reprenant les 7 niveaux (de A à G) représentés sur le schéma de la partie IV – 5.

1. Groupe 1

Les élèves de ce groupe s'appuient sur la relation numérique repérée dans le cadre numérique « avec ces chiffres » entre les nombres des couples (1 ; 5), (2 ; 9), (3 ; 13) pour établir la conjecture générale (appelée hypothèse finale) sur le nombre d'allumettes (Cf. figure 5). La généralité, qui est ici une généralité fonctionnelle, est exprimée dans le registre du langage naturel. Où repérer ces élèves sur l'axe pensée arithmétique/pensée algébrique ? Ils ne sont pas loin de l'*empirisme naïf* avec leur appui sur 3 exemples, mais ils sont capables d'inférer à partir de là une conjecture relative à une règle générale exprimant la relation entre le nombre de maisons et le nombre d'allumettes.

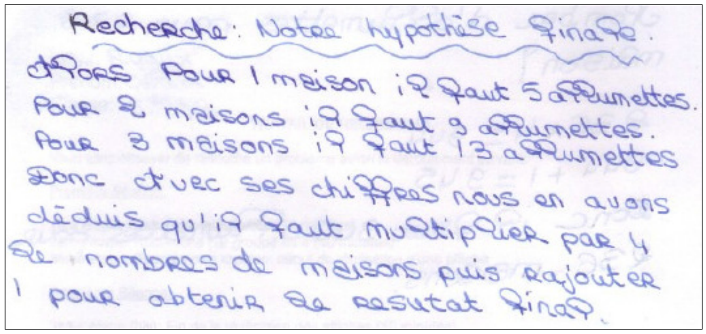

Recherche : Notre hypothèse finale.
Alors pour 1 maison il faut 5 allumettes.
Pour 2 maisons il faut 9 allumettes.
Pour 3 maisons il faut 13 allumettes
Donc avec ses chiffres nous en avons
déduis qu'il faut multiplier par 4
le nombres de maisons puis rajouter
1 pour obtenir le resutat final.

Figure 7 **-** *groupe 1*

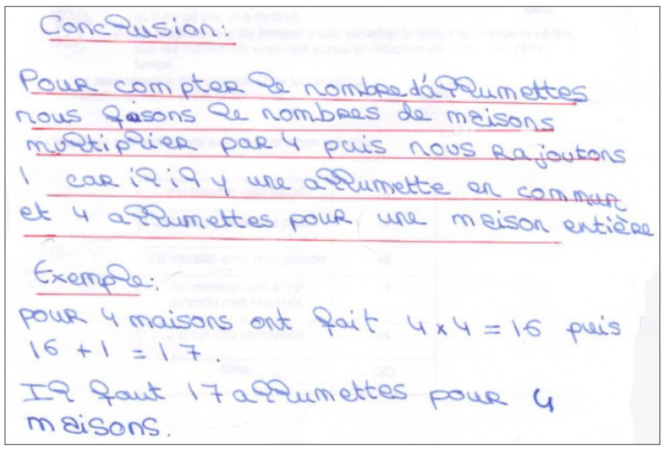

Conclusion :
Pour compter le nombre d'allumettes
nous faisons le nombres de maisons
multiplier par 4 puis nous rajoutons
1 car il il y une allumette en commun
et 4 allumettes pour une maison entière
Exemple :
pour 4 maisons ont fait 4 x 4 = 16 puis
16 + 1 = 17.
Il faut 17 allumettes pour 4
maisons.

Figure 8 **-** *groupe 1 : fin de leur rédaction*

Sur la figure 6, nous voyons que les élèves tentent de justifier leur règle générale, leur hypothèse finale, et nous pouvons qualifier cela d'expérience mentale. Les élèves expriment qu'en général une maison entière ne comprend que 4 allumettes (et en sous-entendu : non pas 5 allumettes par maison entière car il y a une allumette en commun). La justification de l'ajout de 1 est toutefois erronée. La tentative de validation et de mise en cohérence de la règle obtenue dans le cadre numérique avec le milieu matériel échoue. Les élèves finissent par un travail par ostension en utilisant un exemple générique en montrant comment fonctionne leur formule à laquelle ils font confiance dans le cadre numérique.

2. *Groupe 2*

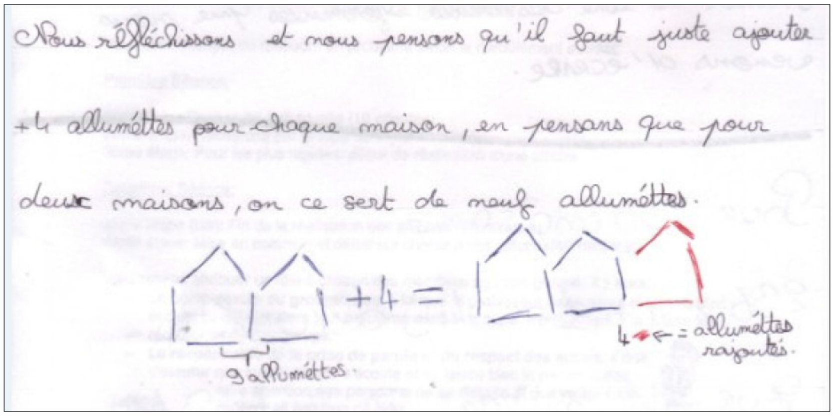

Nous réfléchissons et nous pensons qu'il faut juste ajouter +4 allumèttes pour chaque maison, en pensans que pour deux maisons, on ce sert de neuf allumèttes.

Figure 9 - *groupe 2*

Ce groupe explicite la relation entre u_n et u_{n+1} de manière générale et en particulier dans le cas où n est égal à 2. La généralité itérative est exprimée par les 4 allumettes dessinées en rouge avec la mention explicite « allumettes rajoutées ».

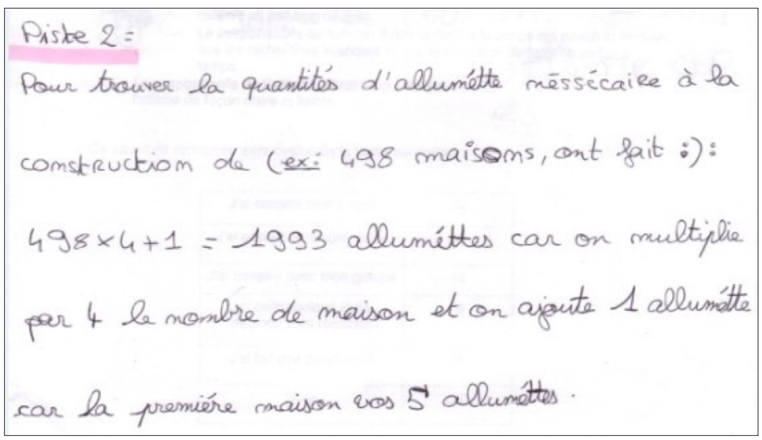

Piste 2 :
Pour trouver la quantités d'allumètte néssécaire à la construction de (ex: 498 maisons, ont fait :) :
498×4+1 = 1993 allumèttes car on multiplie par 4 le nombre de maison et on ajoute 1 allumètte car la première maison vas 5 allumèttes.

Figure 10 - *groupe 2 : fin de leur rédaction*

Dans cette deuxième partie, le groupe propose un prototype d'*exemple générique*. Le grand nombre de maisons, 498, est pris pour montrer qu'il s'agit de n'importe quel nombre, et même un grand nombre ! La généralisation s'exprime donc à travers cet exemple, elle est même justifiée car il faut compléter les 4 allumettes de la première maison par une allumette. L'exemple générique est donc justifié par l'énoncé en langage naturel qui correspond à l'*expérience mentale*.

3. Groupe 3

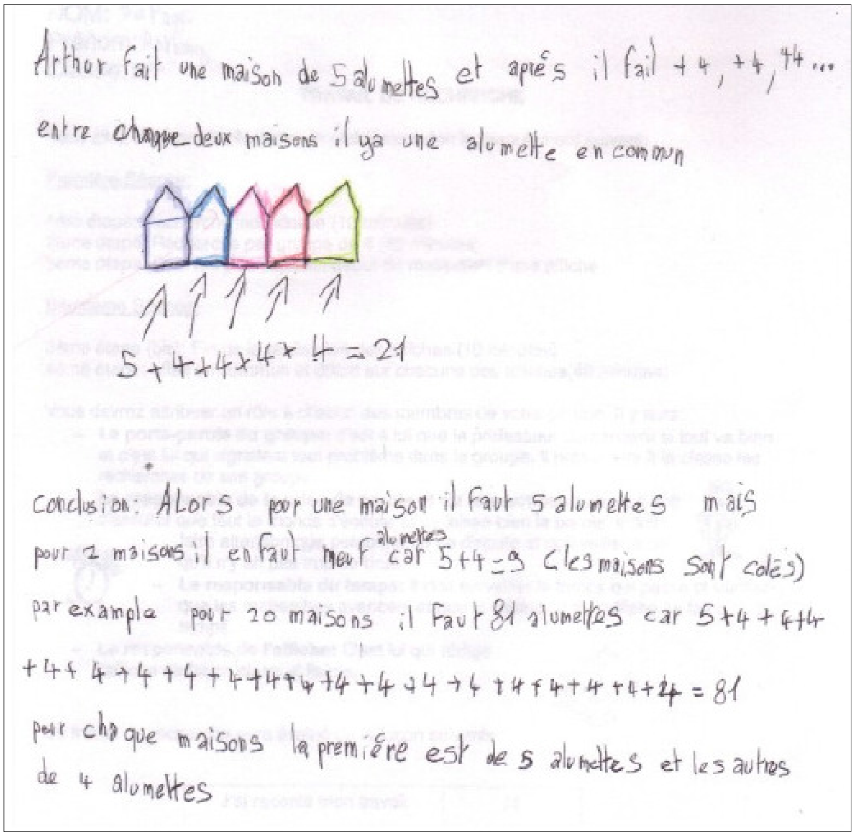


Figure 11 - *groupe 3*

Ce groupe exprime la généralité avec l'*exemple générique* relatif à 20 maisons étayé sur l'exemple dessiné de 5 maisons. Les registres du dessin graphique et des écritures mathématiques restent congruents (au sens de Duval) : chaque maison correspond soit au nombre 5 pour la première, soit au nombre 4 pour les suivantes. Les élèves n'ont pas transformé la somme réitérée en produit ce qui ne leur permet pas d'avoir une formule générale pour exprimer le nombre total d'allumettes en fonction du nombre de maisons. Dans l'expression de l'exemple générique un sous-entendu est qu'il faut écrire dans la somme autant de termes que le nombre total de maisons. Les élèves de ce groupe parviennent à exprimer la généralité en restant étroitement liés au contexte et en donnant une méthode pour calculer le nombre d'allumettes. Cependant un début de pensée algébrique est présent par le fait qu'ils ont compris des éléments invariants de la situation : la première maison a 5 allumettes et les suivantes uniquement 4. En revanche ils n'ont pas su exprimer le modèle mathématique correspondant dans sa forme de généralité fonctionnelle. Est-ce qu'ils ne se sont pas autorisés à s'éloigner du milieu matériel en transformant la somme réitérée en produit dans le cadre numérique ? Est-ce qu'une interprétation dynamique des ajouts des maisons les unes après les autres a empêché les élèves de percevoir la grandeur « nombre de maisons » ?

4. *Groupe 4*

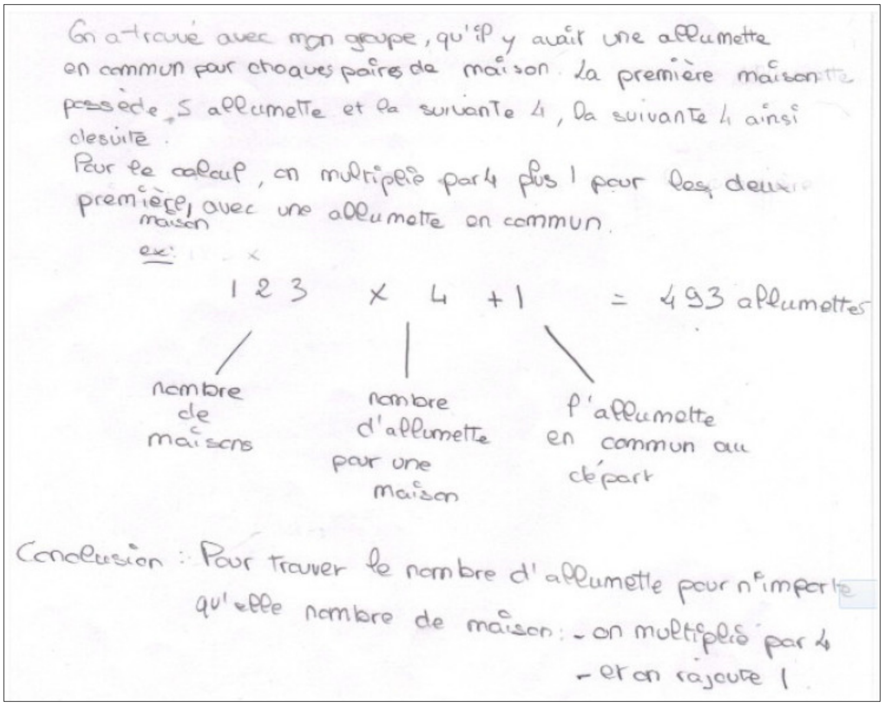

On a trouvé avec mon groupe, qu'il y avait une allumette en commun pour chaques paires de maison. La première maison possède 5 allumette et la suivante 4, la suivante 4 ainsi desuite.
Pour le calcul, on multiplie par 4 plus 1 pour les deux première maison avec une allumette en commun.
ex :
123 × 4 + 1 = 493 allumettes
nombre de maisons
nombre d'allumette pour une maison
l'allumette en commun au départ
Conclusion : Pour trouver le nombre d'allumette pour n'importe qu'elle nombre de maison : - on multiplie par 4 - et on rajoute 1

Figure 12 - *groupe 4*

On retrouve dans ce groupe, comme pour le groupe précédent, la description du processus itératif : une première maison de 5 allumettes, et 4 allumettes pour chacune des suivantes. La difficulté relative à l'explication du 1 qui correspondrait « pour les deux premières maisons avec une allumette en commun » se repère également. Il semblerait que cette expression conserve le souvenir de la génération de la suite des maisons et des différentes étapes comme le tableau 3 en rend compte.

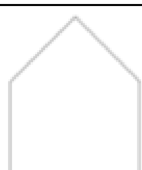
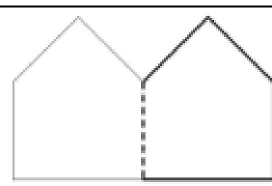
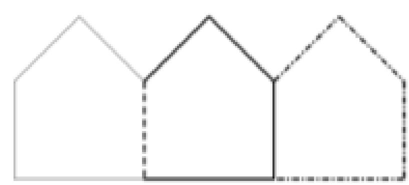
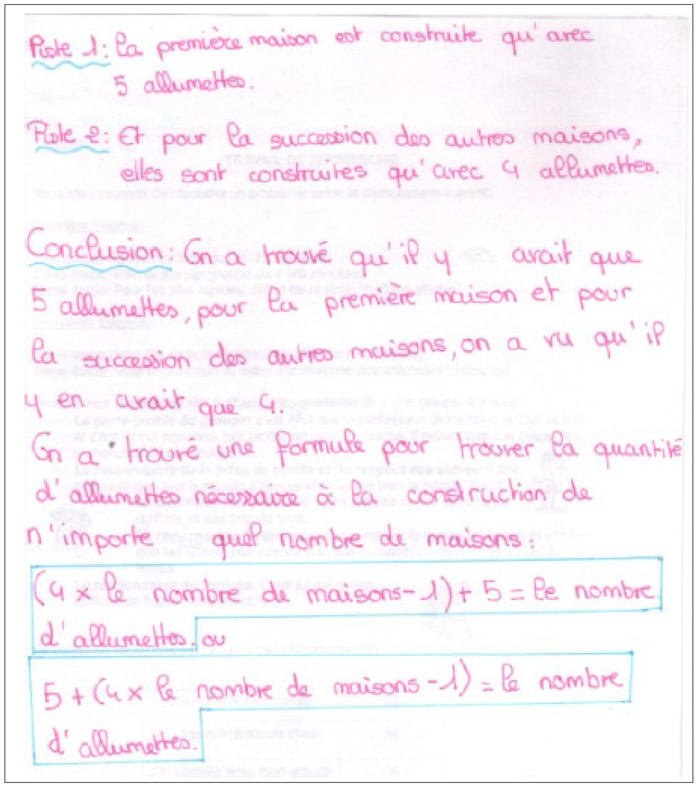
Première étape	**Deuxième étape**	**Troisième étape**
		
Première maison : 5 allumettes	Deuxième maison : 4 allumettes (et 1 allumette déjà présente) En tout : 5 + 4 ou 4 + 4 + 1 (cette unité représente l'allumette en pointillé commune aux deux premières maisons)	Troisième maison : 4 allumettes En tout : 5 + 4 + 4 Ou 4 + 4 + 4 + 1 (cette unité représente l'allumette en pointillé commune aux deux premières maisons)

Tableau 3 : méthode pour générer la suite des maisons étape par étape

Cependant ce groupe réussit à exprimer la généralité fonctionnelle, il utilise lui aussi l'*exemple générique* en faisant un pas supplémentaire vers la pensée algébrique car chaque nombre donné comme exemple est utilisé comme signe pour désigner en fait une variable ou une constante. Ainsi là où est écrit « 123 » il faut voir que c'est le « nombre de maisons » et que c'est donc une variable, en revanche 4 et 1 sont des invariants dans l'expression numérique. La conclusion ne laisse pas de doute sur le fait que les élèves ont réussi à exprimer la généralisation et même la quantification universelle avec « pour n'importe quel nombre de maisons ». La décontextualisation est alors aboutie dans cette expression dans le registre du langage naturel.

5. *Groupe 5*



Piste 1 : La première maison est construite qu'avec 5 allumettes.

Piste 2 : Et pour la succession des autres maisons, elles sont construites qu'avec 4 allumettes.

Conclusion : On a trouvé qu'il y avait que 5 allumettes, pour la première maison et pour la succession des autres maisons, on a vu qu'il y en avait que 4.
On a trouvé une formule pour trouver la quantité d'allumettes nécessaire à la construction de n'importe quel nombre de maisons :

(4 × le nombre de maisons − 1) + 5 = le nombre d'allumettes. ou

5 + (4 × le nombre de maisons − 1) = le nombre d'allumettes.

Figure 13 - *groupe 5*

Ce groupe résout le problème de l'allumette en commun en mettant à part la première maison avec ses 5 allumettes et « pour la succession des autres maisons » seulement 4 allumettes. Ils expriment directement la généralité par une « formule », ce qui est en accord complet avec le programme français qui relie l'entrée dans l'algèbre avec le travail relatif aux formules. Le registre algébrique encore personnalisé, est un amalgame d'éléments du registre algébrique conventionnel et du registre du langage naturel. Il est à noter une erreur concernant l'absence de parenthèses pourtant nécessaires dans l'usage des règles de formation. Mais ce groupe donne la preuve qu'ils sont capables de se passer d'exemples numériques pour exprimer directement la généralisation dans un registre très proche du registre algébrique.

Une question demeure : pourquoi le groupe a-t-il écrit deux formules différentes en inversant l'ordre des facteurs du produit ? Est-ce que cela correspond à deux façons différentes d'appréhender le dénombrement en mettant la maison avec 5 allumettes soit au début soit à la fin ? Est-ce que les élèves savent que ces deux expressions différentes ont la même dénotation ?

6. Groupe 6

Le groupe 6 est le seul qui ait utilisé une lettre, cependant ce groupe produit une réponse erronée. Le raisonnement prend en compte l'assemblage de deux maisons qui ont une allumette en commun et qui comptabilise au total 5×2-1 allumettes. Il faut donc enlever l'allumette dessinée en rouge, ce qui se traduit dans l'expression numérique par la partie « - 1 ». Cela amène les élèves à produire une expression qui exprime la généralité fonctionnelle mais qui n'est vraie que pour y égal à 2.

Les élèves de ce groupe ont été capables de produire un signe, la lettre y, qui rend compte de la variable « nombre de maisons », mais ils n'ont pas su mettre leur formule à l'épreuve en la testant sur des exemples différents du nombre 2, cas où il n'y a que 2 maisons et pour lequel le dessin sert de preuve. La pensée algébrique est présente dans le sens où les élèves ont compris qu'il fallait une généralisation et une entrée dans le langage algébrique a été amorcée, mais ce langage produit un énoncé qui reste obscur pour les élèves qui ne perçoivent pas qu'il ne modélise pas le problème posé même dans des cas simples (une maison ou trois maisons par exemple).

Les élèves auraient pu mettre à l'épreuve leur formule grâce au cas dessiné de 3 maisons. Mais il semble que ce dessin ait un autre but : mettre en évidence qu'à chaque fois qu'on ajoute une maison réalisée avec 5 allumettes il est nécessaire **d'enlever 1 allumette** correspondant au trait rouge. « Enlever une allumette » est donc un invariant qui est exprimé dans la formule par la partie « - 1 ».

Il est possible de faire l'hypothèse que dans le cas des allumettes ajoutés les élèves sont capables de les traduire par y×5 mais dans le cas des allumettes enlevées « il faut en enlever une » résume toutes les allumettes enlevées et les élèves ne perçoivent pas qu'il faut faire cela y-1 fois. Les élèves terminent par un exemple générique en prenant un grand nombre de maisons, soit 150, et font confiance à leur formule. Nous pouvons noter une erreur très classique dans le maniement des égalités où le signe égal est un signe d'effectuation signifiant « ça fait ».

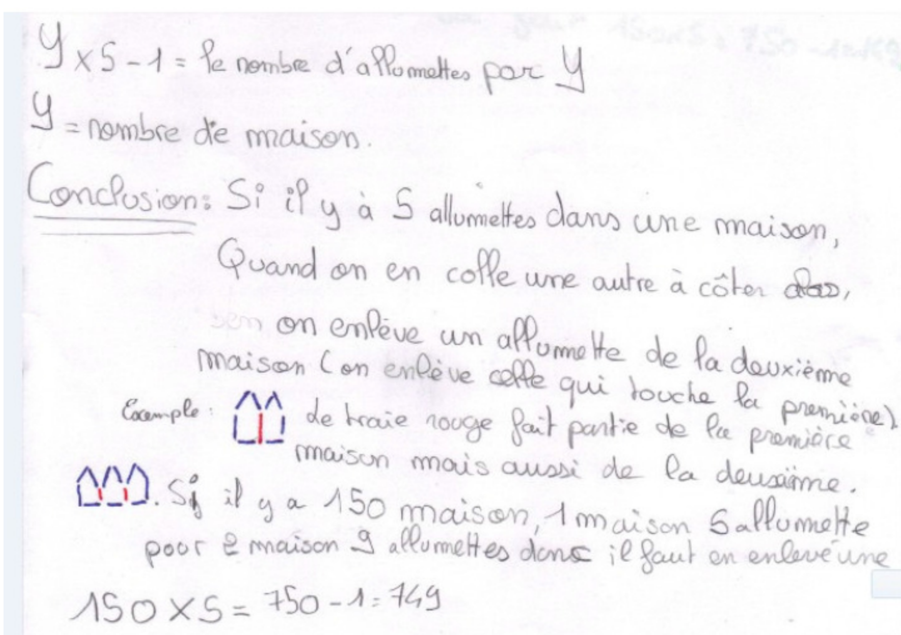

y x 5 - 1 = le nombre d'allumettes par y
y = nombre de maison.
Conclusion: Si il y à 5 allumettes dans une maison,
Quand on en colle une autre à côter ~~des~~,
on enlève un allumette de la deuxième
maison (on enlève celle qui touche la première)
Exemple : de traie rouge fait partie de la première
maison mais aussi de la deuxième.
. Si il y a 150 maison, 1 maison 5 allumette
pour 2 maison 9 allumettes donc il faut en enlevé une
150 x 5 = 750 - 1 = 749

Figure 14 - *groupe 6*

7. *Reprise des analyses précédentes*

Le tableau 4 reprend les critères établis dans le schéma donné en conclusion de la section IV. Il montre que la généralité itérative est exprimée par 4 groupes sur les 6. La généralité fonctionnelle est exprimée par tous les groupes de différentes façons :

- Le groupe 6 dans un langage algébrique mais de façon erronée ;
- Les groupes 1 et 4 en langage naturel ;
- Le groupe 5 en produisant une formule contenant du langage naturel.

L'exemple générique est utilisé par 4 groupes sur les 6. Pour deux de ces groupes, groupes 4 et 6, cet exemple vient en complément de l'expression de la généralité fonctionnelle.

A Cas particuliers pris comme exemples	B Expression de la relation entre u_n et u_{n+1}	C Exemple générique	D Expression de la généralité en langage naturel	E Justification juste de la généralité	F Modélisation sous la forme d'une expression mathématique sans usage des lettres	G Modélisation en langage algébrique avec usage des lettres
1 – 2	2 – 3 – 4 – 5	2 – 3 (sans recours au produit) – 4 – 6 (avec erreur)	1 – 4	2 – 4 – 5	5	6 (avec erreur)

Tableau 3 - *synthèse des analyses des productions d'élèves*

VI. CONCLUSION

L'analyse des productions de ces élèves de collège confirme l'intérêt de ce type de problèmes :

- Les élèves produisent tous des réponses et la dévolution du problème est réussie ;
- Tous les groupes expriment à travers leurs réponses un déplacement d'une pensée arithmétique vers une pensée algébrique.

Ces élèves montrent aussi que ce n'est pas nécessairement l'usage de la lettre qui signe le développement d'une pensée algébrique. Á ce propos la typologie des preuves de Balacheff permet de repérer des preuves de type *exemple générique* ou encore *expérience mentale* qui signent une entrée dans l'algèbre avant la lettre en permettant l'expression implicite d'un énoncé universellement quantifié.

En France ce type de situation de généralisation pour développer la pensée algébrique et permettre une entrée dans le domaine algébrique, est méconnu par les enseignants en général et n'est pas souligné comme étant pertinent dans les programmes. Ainsi une modification du curriculum en fin de primaire et en collège apparait souhaitable.

Pour conclure cet article et reprendre la question posée au début : « quels sont les indicateurs qui permettent de diagnostiquer chez un élève une pensée algébrique naissante ? », voici une liste de ces indicateurs révélés par cette étude.

Pensée strictement arithmétique

- Le résultat est uniquement fonction des données connues.
    - Le nombre d'allumettes ne peut être obtenu que grâce au dessin correspondant au nombre de maisons (aucun des 6 groupes n'en est resté qu'à ce stade).

Indicateurs d'une pensée algébrique

- Repérage de régularités
    - Chaque fois que l'on ajoute une maison on ajoute 4 allumettes ce qui exprime la généralité itérative ;
    - Chaque fois que 2 maisons de 5 allumettes chacune se touchent il y a une allumette en trop pour la cloison commune.
- Utilisation d'un exemple générique pour exprimer la généralité.
- Le résultat utilise des grandeurs non données : comme si elles l'étaient, il y a une fiction
    - Le nombre d'allumettes est exprimé en fonction du nombre de maisons qui apparait ainsi comme une variable
    - Utilisation de l'objet nombre de maison
        - avec le langage naturel ;
        - avec une abréviation ;
        - avec un dessin ;
        - avec une lettre sans lien direct avec le contexte du problème.
- Écart avec le contexte, voire oubli du contexte pour transformer l'expression de la généralité grâce aux règles du calcul algébrique
    - Par exemple transformer une somme réitérée en produit (à ce propos le groupe 3 ne fait pas cette transformation).
- Validation de l'expression exprimant la généralité
    - Test de la validité de la formule trouvée avec des valeurs numériques connues grâce à des dessins ce qui suppose de revenir au cadre numérique et de savoir articuler les domaines numérique et algébrique (le groupe 6 n'a pas su mettre à l'épreuve sa formule par un test numérique).

REFERENCES

Andwandter N. (2012) *Place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques numérique, fonctionnel et géométrique et de leurs interrelations dans l'enseignement au collège en France.* Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Balacheff N., (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18, 147-176.

Briant N. (2013) *Etude didactique de la reprise de l'algèbre par l'introduction de l'algorithmique au niveau de la classe de seconde du lycée français.* Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Bronner A. (2007) La question du numérique : le numérique en question ? Habilitation à diriger des recherches, Université Montpellier 2.

Brousseau G. (1998) *Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique.* In Théorie des situations didactiques 115-160. Grenoble, la pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique - Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée sauvage, Grenoble (126 p.). Deuxième édition augmentée 1991.

Chevallard Y. (2006) Journées scientifiques sur la formation des enseignants du secondaire. Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation – Section des sciences de l'éducation 17 mai 2006 http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Former_des_professeurs_construire_la_profession.pdf

Coulange L., Drouhard J-P. et al. (2012) *Enseignement de l'algèbre élémentaire, bilan et perspectives*. Recherches en didactique des mathématiques, numéro spécial hors-série. La pensée sauvage.

Douady R. (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* 17/2, 5-31.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine , Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Peter Lang SA

Frege G. (1892) *Sens et dénotation, in Écrits logiques et philosophiques*, trad., Seuil, 1971, pp. 102-126.

Kahane J.P., (2002) L'enseignement des sciences mathématiques, Paris, Odile Jacob.

Krysinska M., Mercier A., Schneider M. (2009) Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 29(3), 247 – 304.

Larguier M. (2009) *La construction de l'espace numérique et le rôle des reprises en classe de seconde : un problème de la profession.* Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Luiz Marcio Santos Farias. (2010) *Etude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire : Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde*. Thèse de doctorat. Université Montpellier 2.

Massare C. (2011) Les problèmes de recherche à la conquête des apprentissages du collège. Master 2 Enseignement et Diffusion des Mathématiques. Université Montpellier 2.

Piaget P., Henriques G. (1978) *Recherches sur la généralisation*. Paris : Presses Universitaires de France.

Squalli H., MarY C., Marchand P. (2011) Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In Lebeaume J., Hasni A., Isabelle Harlé I. (Eds.) *Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie. Bruxelles : De Boeke*. (14 pages).

Vlassis J., Demonty I. (2002) *L'algèbre par des situations-problèmes : au début du secondaire*. Bruxelles : De Boeck.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LA PENSÉE MATHÉMATIQUE DU POINT DE VUE DE LA THÉORIE DE L'OBJECTIVATION[1]

Luis RADFORD[*]

Résumé – On aborde ici le thème de la pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. On distingue en particulier la pensée mathématique dans son sens anthropologique et dans son sens subjectif. Un exemple tiré d'une classe de 2e année portant sur la pensée algébrique sert à illustrer les idées présentées dans l'article.

Mots-clefs : pensée algébrique, médiation, objectivation, pure possibilité, activité d'enseignement-apprentissage.

Abstract – This article deals with mathematical thinking as understood in the theory of objectification. A distinction is made between two senses of mathematical thinking: an anthropological sense and a subjective one. This distinction is illustrated through a Grade 2 classroom episode dealing with algebraic thinking.

Keywords: Algebraic thinking, mediation, objectification, pure possibility, teaching-learning activity.

I. INTRODUCTION

Dans ce texte, je voudrais aborder le thème de la pensée mathématique dans le cadre d'une théorie dialectico-matérialiste d'inspiration vygotskienne : la théorie de l'objectivation (Radford 2011, 2013)[2]. Cette théorie, dont le but est de comprendre l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques comme un processus conjoint historico-culturel de productions de savoirs et des subjectivités, part de la prémisse selon laquelle l'étude didactique de la pensée mathématique exige la prise en compte de la pensée du sujet pensant et de la pensée en tant qu'entité historico-culturelle. C'est à la pensée du sujet pensant que se livre la psychologie expérimentale depuis son invention au XIXe siècle. La pensée en tant qu'entité historico-culturelle est ce à quoi on fait référence quand on parle, par exemple, de la

[1] Cet article provient d'un programme de recherche subventionné par le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada.
[*] Université Laurentienne – Canada – Lradford@laurentian.ca
[2] La matérialisme dialectique pose le problème de l'être et du savoir d'une manière tout à fait différente de celle qu'on trouve dans le rationalisme et l'idéalisme qui ont servi de base (directement ou indirectement) à élaboration de plusieurs théories en didactique des mathématiques (Kant, Descartes, etc.). Un exposé du matérialisme dialectique n'est pas possible à l'intérieur de cet article. Le lecteur intéressé à plonger dans une lecture sur le matérialisme dialectique pourra consulter les livres d'Ilyenkov (1977) et de Fedoseyev et al. (1977).

Radford L. (2015) Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 334-345.

pensée mathématique grecque ancienne ou de la pensée mathématique babylonienne ou de la pensée mathématique moderne. C'est une forme de pensée qui ne peut pas se réduire à la pensée d'un individu : elle transcende celui-ci. Pour accentuer la différence, nous suggérons d'appeler *pensée subjective* la pensée du sujet pensant et pensée culturelle la pensée qui transcende le sujet en tant qu'individu.

Cette façon de poser le problème didactique de l'étude de la pensée (mathématique ou autre) demande de fournir une caractérisation de ces deux types de pensée. Qu'entend-on précisément par pensée subjective? Qu'entend-on par pensée culturelle? La première question consiste à demander une caractérisation de ce que les Grecs anciens appelaient ψυχή (*psyché*), l'esprit, le souffle qui anime le sujet. C'est dans ce sens que nous pouvons dire qu'il nous faut une caractérisation *psychique* de la pensée. La deuxième question consiste à demander une caractérisation *anthropologique* de la pensée.

La caractérisation psychique de la pensée qu'offre la psychologie traditionnelle ne nous semble pas ouvrir une avenue prometteuse à notre recherche[3]. Elle souffre d'au moins trois problèmes importants :

- *primo*, la psychologie traditionnelle conçoit la pensée du sujet comme une activité *mentale*, c'est-à-dire comme quelque chose *en nous*, une activité qui *émane purement du sujet* et qui a lieu à l'intérieur de la boîte crânienne;
- *secundo,* dans la psychologie traditionnelle, le ψυχή ou souffle qui anime le sujet est confiné à la résolution de problèmes. Le sujet est réduit à un sujet purement rationnel, dépouillé de toute la dimension affective, émotionnelle et motivationnelle.
- *tertio,* la psychologie traditionnelle ne tient pas compte de la dimension anthropologique et se penche sur la pensée subjective comme si celle-ci fonctionnait indépendamment de l'autre.

On sait très bien l'antipsychologisme qu'a entouré la théorie des situations dès ses débuts (Brousseau 2006). La théorie des situations ne fait pas que s'opposer aux caractérisations psychologiques de la pensée. En fait, elle n'a pas besoin d'une caractérisation *psychique* quelconque de la pensée, car le sujet sur lequel cette théorie se penche est considéré comme un sujet *épistémique* (Brousseau 2005). Il s'agit, en effet, d'un être connaisseur formel. Le sujet sur lequel porte la théorie de l'objectivation, par contre, est un sujet concret, réel, qui souffre, jouit, sent, rêve. D'où le besoin, en ce qui nous concerne, de nous tourner vers une caractérisation psychique de la pensée. Or, en réduisant la pensée subjective à une activité mentale, la piste qu'offre la psychologie traditionnelle ne nous semble pas satisfaisante. Comme suggérait l'épistémologue dialecticien Evald Ilyenkov (1977), on pourrait décortiquer n'importe quelle boîte crânienne en morceaux chaque fois plus petits sans pour autant y trouver une seule pensée. On pourrait remarquer, en passant, que la conception selon laquelle les idées sont *en nous*, n'a été possible, historiquement parlant, que grâce à l'élaboration d'une métaphore d'origine religieuse. Celle-ci permet d'imaginer le sujet comme constitué d'une sorte de cavité où se déroule une vie intérieure. C'est ainsi qu'avec Saint Augustin à la fin du IVe siècle, on ne trouve pas Dieu à l'extérieur, mais à l'intérieur de soi. L'idée du « sujet creux » aurait été impensable pour les Grecs.

Il nous faut donc, pour commencer, une définition plus large ou différente de la pensée du sujet (une définition subjective de la pensée), ainsi qu'une définition anthropologique de la

[3] La psychologie traditionnelle, comme celle qui s'inspire du traitement de l'information ou de la résolution de problèmes (Andler 2004 ; de Vega 1986; Kotovsky et Simon 1990) décortiquent analytiquement le fonctionnement mentale en sous-fonctions qui opèrent sans égard au contexte. Elles font appel à un sujet *a*historique et *a*culturel. Pour une critique de cette conception de la pensée qu'offre la psychologie traditionnelle voir (Martin 2004).

pensée, pour pouvoir ensuite aborder le problème de l'*articulation* de la pensée dans son sens anthropologique et de la pensée dans son sens subjectif.

II. LA CARACTERISATION ANTHROPOLOGIQUE DE LA PENSEE

La caractérisation anthropologique de la pensée que nous suggérons dans cet article est directement liée à l'agir des individus et aux pratiques sociales à l'intérieur desquelles ces individus agissent. C'est ce sens contextualisé de *l'action* d'un *sujet concret* à l'égard de la *pratique sociale et culturelle* que traduit l'adjectif *anthropologique* ici. Elle est aussi ancrée dans un concept très particulier de synthèse. Le concept de synthèse est un concept qui a une longue histoire en philosophie. Kant l'utilise comme le processus qu'effectue la raison permettant de subsumer des singularités sous un même concept, qu'il prend comme déjà donné. C'est la question de l'apriorisme kantien. Dans la perspective esquissée ici, le point crucial est l'absence de concept *a priori*. Il y a plutôt un monde concret et des sujets concrets qui, à l'intérieur des pratiques sociales, mènent certaines actions en vue de satisfaire leurs besoins de subsistance et d'autres besoins (intellectuels, par exemple).

Dans ce contexte, le concept de pensée que nous suggérons apparaît en tant que *synthèse* culturellement codifiée du travail ou labeur humain. Par exemple, les méthodes anciennes de résolution d'équations qu'on trouve chez Diophante sont le résultat d'une synthèse de manières de résoudre certaines équations. On a résolu une équation disons e_1, puis une équation différente e_2, etc. C'est la synthèse culturellement codifiée de ces manières de résoudre ces équations qui constitue une pensée mathématique.

Comme synthèse, la pensée ne porte pas sur la résolution de l'équation e_1 ou sur la résolution de n'importe laquelle des équations e_j à la base de la synthèse. La pensée les dépasse toutes et ne coïncide avec aucune des manières de résoudre ces équations. De par la synthèse dont elle est issue, la pensée se constitue en ce que dans le matérialisme dialectique on appelle *pure possibilité* : celle de résoudre d'autres équations *similaires* et de s'attaquer à des équations *différentes*.

La synthèse mentionnée ici est une synthèse de *non-identité*. Elle est synthèse non-identitaire au sens suivant. La résolution d'une équation e_i est toujours *différente* de celle d'une autre équation e_j. Mais, en même temps, ces résolutions différentes sont considérées comme la *même*. C'est une synthèse de différentes singularités et, comme tel, elle n'est pas une abstraction, mais une synthèse qui contient les divergences et les contradictions des singularités (résolution des équations e_i, e_j, etc.) qu'elle s'efforce de tenir ensemble. Il s'agit d'une synthèse non-identitaire qu'injecte des contradictions internes dans la pensée. Au lieu d'être une faille ou une imperfection, la synthèse non-identitaire confère à la pensée une nature inconciliable vis-à-vis les éléments synthétisés. Les inévitables contradictions internes de la pensée sont précisément ce qui permet son développement dans la pratique sociale. En tant que porteuse de contradictions, la pensée ouvre un espace pour l'émergence de nouvelles actions et de nouvelles interprétations et créations.

Pour résumer, dans le mouvement de synthèse, les singularités des actions, toujours concrètes et déterminées spatialement et temporellement, toujours différentes les unes des autres, se voient *reflétées* dans ce qui devient reconnu comme une même manière d'agir et de réfléchir, se constituant ainsi en un *prototype* d'action et de réflexion. C'est ce que nous appelons ici *pensée*. Puisque cette synthèse est ancrée et résulte d'actions situées dans la pratique sociale, on peut aussi dire que la pensée est une *pratique réflexive*. La pensée mathématique babylonienne, par exemple, est un ensemble de synthèses de formes d'agir et de réfléchir issues de problèmes pratiques générés par un besoin de répondre à des problèmes administratifs, beaucoup d'entre eux portant sur la comptabilité, la répartition de rations, la mesure et le poids des choses, etc.

Quand un scribe dit dans un texte remontant probablement au 18e siècle av. J-C: « Un champ. Les quatre fronts et le champ j'ai accumulés: 41´40´´» (Høyrup 1995, p. 1), il nous renvoie à une pratique d'arpentage promue par des besoins de contrôle administratif et décrite abondamment par Høyrup (2002), Nissen, Damerow et Englund (1993) et Robson (2008), entre autres. Dans ce champ, il faut lire un champ quadratique. Le scribe nous dit avoir trouvé 41´40´´ comme résultat de la somme des nombres mesurant les quatre côtés et l'aire. En notations modernes, si la longueur du côté est désignée par s, on aurait alors: $4s + s^2 = 41´40´´$. Høyrup dit :

> Il faut savoir que les Babyloniens concevaient un carré comme «étant» son côté et «possédant» une aire (tandis que pour nous, comme on le sait, il [le carré] «est» de 4 m^2 et «possède» un côté de 2 m) (Høyrup 1995, p. 3).

C'est dans le contexte de cette pratique d'arpentage qui autorise cette conception du carré, que le scribe peut additionner côtés et aires et peut imaginer et effectuer des opérations (additionner, arracher, etc.) sur le champ auquel fait référence l'énoncé du problème, problème qui consiste à trouver le côté s. Cette synthèse de solutions de problèmes — solutions similaires, mais toujours différentes les unes des autres — qui se constitue en façon archétypale d'agir, de dire, d'imaginer, d'effectuer des calculs, etc. se constitue aussi, *en même temps*, en pensée mathématique.

À ce sensualisme pratique, dans lequel les objets mathématiques babyloniens restent sans définitions précises et où les calculs se succèdent en même temps qu'ils montrent ce qui est à montrer, on pourrait opposer la pensée mathématique ancienne grecque issue, elle, plutôt d'une pratique aristocratique athénienne soutenue par la distinction entre travail intellectuel et manuel et une organisation sociale à la base de laquelle nous trouvons la distinction entre individu libre et esclave. Il s'agit ici d'une pensée où le calcul n'est le paradigme du faire, car l'aristocratie ne calcule pas; le calcul est laissé plutôt aux marchands et aux esclaves. Cette pensée est plutôt celle du λόγος (*logos*) — une raison qui vise à raisonner de manière juste et vraie pour s'élever à des niveaux supérieurs de la connaissance. C'est dans cette société discursive, tiraillée par la distinction entre apparence (δόξα, *doxa*) et vérité, que la parole et son usage social prennent une dimension épistémologique inconnue des Babyloniens. Ce n'est donc pas le champ issu de la pratique kinesthésique de l'arpentage et les problèmes et procédures concomitantes de résolution qui sont à la base de la pensée ici, mais ces formes géométriques inchangeables dépouillées d'activité manuelle et corporelle.

III. LA CARACTERISATION SUBJECTIVE DE LA PENSEE

La définition anthropologique de la pensée en tant que *pratique culturelle réflexive* doit maintenant être complétée par une caractérisation subjective de la pensée.

Dans son sens anthropologique, nous l'avons dit, la pensée est *pure possibilité*. Cela revient à dire que la pensée est une capacité toujours latente d'agir ou de réfléchir d'une certaine manière. C'est pourquoi on peut dire que la pensée d'une culture apparaît aux différents sujets imprégnés de cette culture comme *potentialité* ou *virtualité*, ce que Hegel appelait un *général.*[4]

[4] Insistons ici sur le fait que la *potentialité* est une catégorie ontologique fondamentale du matérialisme dialectique. Elle implique l'idée qu'un événement puisse se produire. Un poisson naît avec la potentialité de nager. Mais cette potentialité ne s'actualise qu'à travers un mouvement précis : aller d'un point A à un point B. D'autres potentialités ne sont pas innées, mais développées culturellement, comme, par exemple, résoudre une

Revenons à notre exemple de la résolution d'équations et considérons en particulier la résolution de l'équation 4xn + 2 = 27 – n. La Figure 1 montre les traces laissées par des élèves d'une 6^{e} année (11-12 ans).

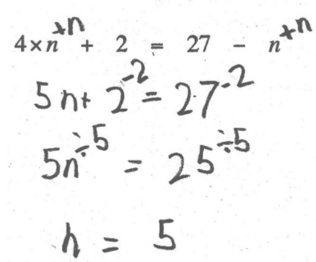


Figure 1- *Les traces de la résolution d'une équation par un groupe d'élèves de 6^{e} année*

La pensée algébrique des élèves ne doit pas être confondue avec les signes montrés dans la Figure 1. On ne peut pas confondre signes et pensée. Ce que la Figure 1 nous livre, ce sont les traces de la pensée des élèves, une sorte d'écho de celle-ci. En termes sémiotiques, on pourrait dire que la Figure 1 est un texte indexical : un texte qui pointe vers quelque chose qui n'est plus là, comme les empreintes que laisse un promeneur sur le sable après son passage. Confondre pensée et signes reviendrait à confondre le promeneur avec ses empreintes.

Qu'est donc la pensée des élèves? La pensée des élèves est l'*actualisation* ou *concrétisation* ou *matérialisation* de l'archétype culturel de résolutions d'équations.[5] Au sens phénoménologique strict, la pensée des élèves est ce qui *apparaît*. C'est-à-dire, l'agi, le parlé, le perçu, le gesticulé, le symbolisé, le raisonné qui se donnent à voir au cours de l'activité de la résolution de l'équation en question. Comme telle, la pensée subjective n'est pas une série de choses qui ont lieu à l'intérieur d'une boîte crânienne, mais ce qui se déploie devant soi. Ce n'est pas une série d'actions ayant lieu dans une chambre mystérieuse et inaccessible, mais un *événement* qu'on appelle un *singulier*.

Ce qui se déploie devant soi n'est donc pas quelque chose dont l'origine serait à trouver dans le vide interne du sujet (de l'élève), mais dans la matérialisation d'une potentialité culturelle. Mais dans sa matérialisation, cette potentialité (dans notre exemple, la pensée algébrique au sens anthropologique) devient un *existant* qui ne peut jamais livrer la potentialité toute entière. La matérialisation ou actualisation de celle-ci est toujours un *singulier* : ici, une matérialisation qui mobilise un savoir sur les équations à coefficients entiers; la manière d'isoler l'inconnue quand elle apparaît comme soustraction dans l'un des côtés de l'équation, etc.

IV. L'ACTIVITE HUMAINE COMME MEDIATION ENTRE SUJET ET PENSEE

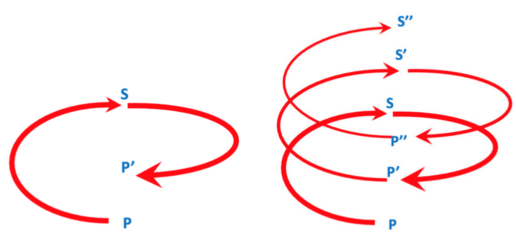
Or, parce que la pensée d'une culture est plutôt prototype d'action et de réflexion, une forme vide de différences et de similarités, elle ne se donne pas à voir au sujet qui apprend. C'est

équation d'une certaine manière. Si nous étions nés à l'époque de Diophante, cette potentialité existerait en termes d'arithmes et de certaines façons d'opérer sur les nombres connus et non connus. L'opération réelle sur les nombres connus et inconnus à la Diophante serait *l'actualisation* ou *matérialisation* de cette potentialité. Pour une discussion plus détaillée sur la potentialité, voir (Radford 2015).

[5] Il ne faut surtout pas concevoir l'actualisation comme une simple marque ou comme copie de la potentialité : actualisation et potentialité ne sont pas de catégories ontologiques du même ordre. La potentialité n'a pas de forme. Aucune actualisation ne peut lui ressembler. Elle n'est que possibilité. Et, comme nous verrons dans un moment (Figure 2, ci-bas), il n'y a pas de déterminisme entre la potentialité et l'actualisation : leur relation est plus complexe. Elle est dialectique.

seulement dans l'épistémologie rationaliste que sujet et pensée sont *déjà* ensemble, car pour le rationalisme et ses variantes individualistes (comme le constructivisme), la relation entre sujet et pensée est une relation d'identité. L'Autre est le Même. C'est pourquoi, les Rationalistes du XVIIe siècle, comme Descartes et Leibniz, considéraient que les mathématiques pouvaient se pratiquer même les yeux fermés; pour eux, les principes dont nous avons besoin en mathématiques sont des « principes internes » au sujet, c'est-à-dire qu'ils sont à l'intérieur de nous (Leibniz 1966, pp.34-37; pour plus de détails, voir Radford 2011). Dans la perspective matérialiste esquissée ici, par contre, la pensée (au sens anthropologique) est là, devant nous. Mais pour se *révéler*, pour devenir objet de conscience, elle doit passer de potentialité à actualité; elle doit acquérir des déterminations sensibles. La pensée doit être mise en *mouvement,* s'*actualiser* et apparaître comme *singulier*. Elle ne peut apparaître qu'à travers une *médiation*.

Quelle est donc cette médiation qui met la pensée en mouvement et lui permet de se révéler dans un singulier ? La réponse est : l'activité humaine. Ce n'est qu'à travers l'activité que la pensée se singularise et peut être saisie, sentie et devenir ainsi objet de conscience. La Figure 2a illustre cette idée du point de vue phylogénétique : à un certain moment du développement d'une culture, la pensée culturelle, P, est mise en mouvement par l'activité humaine (symbolisée par les flèches en bas) et se révèle à la conscience des sujets concrets dans le singulier S. C'est à l'intérieur de cette activité (ou d'une autre activité), qui est toujours mouvement et qui est déjà affectée par P et S, que les sujets concrets peuvent maintenant étendre, raffiner, ou transformer cette pensée ou potentiel P, donnant comme résultat une nouvelle pensée culturelle ou potentiel P'. La nouvelle potentialité ainsi créée peut, par la médiation d'autres activités, se révéler ou s'actualiser dans un autre singulier S', etc. (voir Figure 2b).



Figures 2a (à gauche) et 2b (à droite) *- L'activité effectue la médiation qui permet à la pensée de passer du potentiel à l'actuel.*

Le singulier est la pensée dans son apparition phénoménologique telle qu'elle est médiatisée par l'activité, devenant ainsi pensée subjective. Dans sa singularité, la pensée s'expose et devient susceptible d'être examinée, généralisée, réfutée, transformée, subvertie.

La conceptualisation de la pensée mathématique qu'offre la théorie de l'objectivation, conceptualisation esquissée brièvement ci-dessus, permet de poser le problème du travail didactique autour d'un nouveau concept : le concept d'enseignement-apprentissage. Ce concept, de nature éthico-dialectique, est élaboré dans la section suivante.

V. LE CONCEPT D'ENSEIGNEMENT-APPRENTISSAGE

Nous avons dit que la Figure 1 comporte les traces de la pensée d'un groupe d'élèves de 6e année (élèves de 11-12 ans).[6] Il s'agit d'une classe d'élèves que nous avons suivi pendant 5

[6] On peut poser la question : s'agit-il de la pensée *collective* ou de la pensée d'*un* élève ? Il nous faut revenir à la définition proposée plus haut pour répondre. On a dit que la pensée subjective est ce qui *apparaît* comme résultat

ans. Nous avons commencé à suivre cette classe quand les élèves étaient en 2e année (ils avaient alors 7-8 ans). Les traces de la pensée des élèves que nous livre la Figure 1 sont donc les traces d'une pensée subjective développée. C'est-à-dire, une pensée subjective qui a connu une transformation d'une année d'instruction à l'année suivante. Ce développement n'est pas naturel; au contraire, il s'agit d'un développement culturel, soutenu par un travail didactique continu.

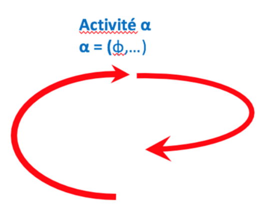
Pour que la pensée algébrique (au sens anthropologique) — pensée constituée historiquement — commence à se révéler à la conscience des élèves, il a fallu mettre sur pied une série d'activités depuis la deuxième année. Ces activités acquièrent un sens didactique précis dans la théorie de l'objectivation qu'il convient de spécifier maintenant.

Pour la théorie de l'objectivation, toute activité de salle de classe comporte deux *moments* :

(1) un moment *a priori* ou premier moment où l'activité est *configurée*. C'est à ce moment que nous préparons avec les professeurs les problèmes qui seront présentés aux élèves : nous décidons du type, de l'ordre et de l'enchainement des questions; des ressources matérielles qui seront mises à la disposition des élèves, etc.

(2) le deuxième moment est l'implémentation de ce premier moment : c'est l'activité *stricto sensu*. C'est-à-dire, ce qui se passe en salle de classe (mais peut aussi aller au-delà).

Remarquons que, normalement, les théories éducatives traditionnelles distinguent plusieurs types d'activité à l'intérieur de ce qui se passe en salle de classe : on distingue ainsi l'activité de l'élève de celle du professeur. Nous prenons une autre orientation : l'activité qui est implémentée est considérée comme *une seule* activité. Nous parlons alors de l'*activité enseignement-apprentissage*. Cette activité est caractérisée par son objet (Leontiev 1984), dans notre cas, un objet didactique. Le fait que pour l'élève cet objet didactique ne soit pas apparent au début n'enlève pas à l'activité son propre objet. Comme nous l'illustrerons dans un moment, la transparence relative de l'objet de l'activité aura des répercussions dans la manière dont le professeur et les élèves s'engagent dans l'activité. Dans le cas présenté ici, l'objet des activités était la prise de conscience chez les élèves de formes de pensée algébriques historiquement et culturellement constituées. La Figure 3 montre l'activité de salle de classe, désignée par la lettre **α**: ce qui est en train de se produire en salle de classe réellement (les flèches rouges) ; l'activité y apparaît comme un *flux*, lui même changeant, affecté continuellement, entre autres, par le premier moment, désigné par **ϕ** (celui du projet didactique).[7]



de l'actualisation du potentiel (c'est-à-dire, la pensée au sens anthropologique). *Ce qui apparaît,* apparaît dans la classe et se révèle ainsi *aux élèves*. Bien que cette apparition se réfracte différemment dans la conscience de chaque élève, elle est à la fois individuelle et collective (elle est individuelle-collective), comme la musique que fait apparaître un orchestra qui joue une symphonie.

[7] Le fait que, placés maintenant du point de vue *ontogénétique*, nous utilisons un diagramme similaire à celui utilisé à la Figure 2 (qui portait sur le point de vue *phylogénétique*) ne veut pas dire que nous adoptons l'idée selon laquelle l'ontogénèse récapitule la phylogénèse (voir Furinghetti & Radford 2008). L'activité dans la Figure 2 n'a pas de moment didactique ϕ. C'est, entre autres, dans le moment ϕ qu'on voit un des effets de la culture dans l'apprentissage des élèves. C'est pourquoi Vygotsky (1997, p.88) disait que l'éducation peut être définie comme le développement artificiel de l'enfant.

Figure 3 *- L'activité « enseignement-apprentissage » α comme un flux affecté par ϕ, entre autres.*

En ce qui a trait au premier moment, le moment ϕ, celui de la configuration de l'activité, nos choix didactiques tiennent compte de la densité épistémologique de la pensée ciblée (ici la pensée algébrique) et du développement actuel de l'enfant (Vygotsky 1985). Par rapport à la densité épistémologique de la pensée algébrique, nous nous écartons de l'idée très répandue selon laquelle l'algèbre commence avec l'utilisation des lettres. L'idée, bien sûr, est fausse. Ni les anciens mathématiciens chinois, ni les scribes babyloniens n'ont eu recours à des lettres dans la pensée algébrique qu'ils ont développée. Ni l'écriture à base de sinogramme des premiers ni l'écriture cunéiforme des deuxièmes ne sont faites à partir de « lettres »! Il nous a fallu donc commencer par caractériser la pensée algébrique. En nous inspirant des discussions souvent tendues tenues durant les années 1980 et suivantes — consulter, par exemple, Bednarz, Kieran et Lee (1996); Filloy et Rojano (1989); Kieran (1989) — nous avons suggéré (Radford 2014) que la pensée algébrique élémentaire comprend trois éléments:

(1) *indéterminés*: la situation mathématique considérée contient de nombres non-connus (inconnues, variables, paramètres, etc.); c'est-à-dire, elle contient des indeétérminés.

(2) *dénotation*: les nombres indéterminés impliqués dans la situation doivent être *nommés* ou *signifiés* d'une certaine manière. La signification peut être accomplie de diverses manières. On peut utiliser des signes alphanumériques, mais pas nécessairement. La dénotation de nombres indéterminés peut également être signifiée par le langage naturel, les gestes, les signes non conventionnels (diagrammes, par exemple), ou même une combinaison de ceux-ci.

(3) *analyticité*: les nombres indéterminés sont traités comme s'ils étaient des nombres connus. C'est-à-dire, bien qu'ils ne soient pas connus, les nombres indéterminés sont traités de la même manière que les nombres connus : on les additionne, les soustrait, les multiplie, les divise, etc.

Cette caractérisation épistémologique de la pensée algébrique nous a guidés dans l'élaboration des tâches données aux élèves (temps 1 de l'activité) et dans l'implémentation de l'activité (temps 2). Voici un exemple de 2^{e} année.

La leçon commence avec la lecture d'une histoire que l'enseignante (E) fait aux élèves.

> Sylvain et Chantal ont des cartes de hockey. Chantal a trois cartes et Sylvain a deux cartes. Sa mère met certaines cartes dans trois enveloppes en veillant à mettre le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe. Elle donne une enveloppe à Chantal et 2 à Sylvain. Maintenant, les deux enfants ont la même quantité de cartes de hockey. Combien de cartes de hockey sont dans une enveloppe?

L'équation est illustrée au tableau, à partir d'enveloppes et de cartes en carton, comme le montre la Figure 4.

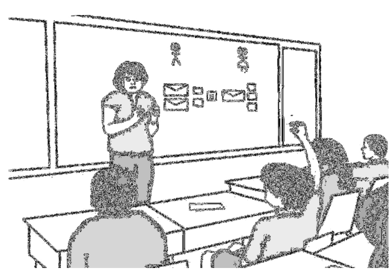


Figure 4 *- L'histoire de Chantal et de Sylvain.*

Au début, les étudiants ont abordé le problème par des procédures arithmétiques d'essai-erreur. Par exemple, au début de la leçon, Willy (W) suggère qu'il y a une carte dans chaque enveloppe :

W : Um, moi je pense qu'il y a … qu'il y a 1, umm… une carte de hockey.

E : Ok.

W : dans chaque carte [il veut dire enveloppe] parce que, euh, y'en a 3 cartes juste là (*en faisant référence au côté droit de l'équation au tableau; voir Figure 3*) et s'il y a juste 1 dans la carte [il veut dire enveloppe], ça, ça veut dire qu'il y a 4, et (*en faisant référence maintenant au côté gauche de l'équation*) y'en a 2 cartes juste là et 2, et c'est y'en a 2 dans les 2 enveloppes.

E : uhhuh, alors si je comprends bien Willy, tu as essayé la stratégie essai-erreur?

W : uhhuh…

E : C'est ça, tu as dit : ah! Je vais faire semblant qu'il y a une carte ici (*elle pointe une enveloppe*), une carte ici (*elle pointe une autre enveloppe*), une carte ici (*elle pointe une autre enveloppe*). C'est ça ce que t'as fait?

W : uhhuh…

E : puis, là, t'as calculé, s'il y a une carte ici, une carte ici, une carte ici, puis là tu as calculé 1, 2, 3, 4. C'est ça ce que t'as fait?

L'objet de l'activité est loin d'être transparent pour les élèves. L'enseignante pourrait tout simplement laisser les élèves faire tout le travail et se contenter de ce que les élèves pourraient produire par eux-mêmes. Elle pourrait aussi montrer comment résoudre l'équation (et par là montrer de manière ostensible l'objet de l'activité) et demander ensuite aux élèves de reproduire la solution à d'autres équations. Ces activités sont toujours possibles. Dans le premier cas, cependant, celui où l'activité est centrée sur l'élève, il n'y a aucune assurance que les élèves arrivent à actualiser ou matérialiser la pensée algébrique ciblée. C'est ce que nous observons en général. Dans le deuxième cas, où l'activité est centrée sur le professeur, l'activité de salle de classe pourrait finir par médiatiser la pensée visée, mais cette médiation serait très faible, car il lui manque l'engagement *cognitif* et *affectif* des élèves. Ceux-ci sont réduits au rôle de reproducteurs de comportements. Malgré ces différences, remarquons que, dans un cas comme dans l'autre, on différencie le travail du professeur de celui de l'élève. Le concept d'activité *d'enseignement-apprentissage* demande, par contre, un travail *conjoint* élèves-professeur, très souvent fort émotionnel. Il s'agit de faire émerger de ce travail conjoint, où vont se confondre dires, gestes, actions, symbolisations, l'actualisation ou la matérialisation d'une pensée algébrique ciblée. Cette actualisation ou matérialisation, souvent le résultat d'un processus progressif et pénible, est la *pensée subjective*. Malgré donc la non-transparence de l'objet de l'activité pour les élèves, l'enseignante doit garder l'activité d'enseignement-apprentissage en mouvement. Elle remercie Willy pour sa contribution et demande à la classe s'il y a d'autres idées. Joe (J) suggère d'enlever une enveloppe de Chantal et une enveloppe de Sylvain :

J : Um, moi je pense qu'il y a une [carte] dans chaque [enveloppe], parce que je voudrais enlever l'enveloppe là de Chantal.…

E : Ok

J : Et l'enveloppe de Sylvain et…

E : Pourquoi est-ce que tu enlèves une enveloppe ici, et une enveloppe ici?

J : Um, parce que si, parce que Chantal a 3 [cartes], et Sylvain a 2 [cartes], et si, et si y'a un carte dans ce … (*il pointe vers l'enveloppe qui reste à Sylvain*), ça va faire égale…

E : […] Alors, t'as trouvé ta solution comme ca? Toi, tu as isolé un petit peu, mais tu n'as pas isolé complètement, hen? Ça, c'était ta solution; tu as enlevé les enveloppes, hen?

J : Ouien…

La stratégie de Joe semble revenir sur la discussion que la classe a eue la veille au sujet de l'action d'enlever des enveloppes en vue de simplifier une équation, action qui a été illustrée à l'aide d'une balance. Aux lignes 1 et 3 du deuxième dialogue, Joe suggère, en effet, d'enlever une enveloppe de chaque côté de l'équation. Puisque cette étape est cruciale à la pensée algébrique (Filloy, Rojano & Puig 2007), l'enseignante intervient à la ligne 4. Elle est très tendue : elle sait que c'est un moment important de l'activité enseignement-apprentissage. L'enseignante invite donc Joe à articuler l'idée de manière explicite. Toutefois, comme le montre la ligne 5, l'action d'enlever une enveloppe du montant de Chantal et une enveloppe du montant de Sylvain est faite en vue de *simplifier* l'équation, et non pas pour *déduire* la valeur de l'inconnue. Nous voyons, en effet, qu'à sa troisième intervention, Joe *suppose* que l'enveloppe contient une carte. Il commence sa phrase avec la conjonction de subordination hypothétique « si ». Il dit : « si y'a une carte dans ce[tte]… [enveloppe]». Le reste de ses actions sert à vérifier qu'il y a égalité. La solution n'a pas été déduite, mais devinée. On n'opère pas sur l'indéterminé de manière analytique. Ce qui apparaît conceptuellement à la conscience des élèves n'est pas encore l'actualisation ou la matérialisation de la pensée algébrique.

Au cours de la discussion, l'enseignante revient sur l'idée d'enlever et, en s'adressant à Joe et à toute la classe, dit :

E : Tu dis, tu enlèves une [enveloppe] ici et tu enlèves une [enveloppe] ici. Alors… si j'enlève quelque chose d' un coté, est-ce que je dois enlever la même chose de l'autre coté?

Joe et élèves : Oui

L'enseignante invite à nouveau la classe à présenter d'autres idées et suggère de penser à la stratégie d'isolement dont la classe avait discuté la veille. L'équation est montrée au tableau (voir Figure 5, dessin 1). Cette fois-ci, c'est Cali (C) qui répond :

C : Um tu enlèves une enveloppe de Sylvain, et une enveloppe de Chantal (L'enseignante enlève une enveloppe du montant de Chantal et du montant de Sylvain; l'équation reste telle que montrée dans la Figure 5, dessin 2).

E: est-ce que c'est important d'enlever la même chose de chaque coté du [signe] égal?

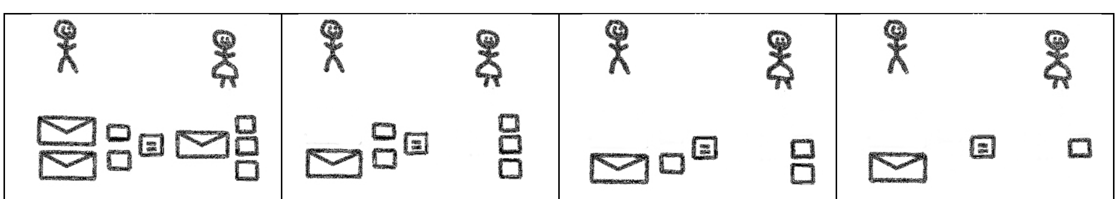
C : Oui. Et tu peux enlever l'autre enveloppe… Oh non! Une carte de Sylvain, et une carte de Chantal (Cali pointe vers les cartes de Chantal. L'enseignante fait au tableau ce que Cali dit. L'équation apparaît maintenant comme montré sur la Figure 4, dessin 3).

E: Aw! (En s'adressant à toute la classe, pour s'assurer que les élèves suivent, elle dit) Encore une fois (elle prend une enveloppe de chaque côté de l'équation, puis une carte de chaque côté de l'équation), une enveloppe, on enlève une enveloppe, une carte, une carte.

C : Tu enlèves une carte de Sylvain et tu enlèves une autre carte de Chantal.

E : (En répétant la dernière partie de la phrase de Cali) Enlève une autre carte de Chantal (elle exécute les actions en même temps qu'elle parle; L'équation apparaît maintenant comme illustrée dans la Figure 4, dessin 4. Puis, ça nous donne…

Cali : La réponse!



Dessin 1	Dessin 2	Dessin 3	Dessin 4

Figure 5 *- Les traces de la solution proposée par Cali.*

À travers la médiation d'un travail conjoint professeur-élèves se révèle maintenant un prototype général de résolution d'équations. La pensée algébrique dans son sens anthropologique se dévoile dans un singulier et devient ainsi objet de conscience. C'est ce processus de prise de conscience que nous avons appelé *objectivation* (Radford 2011). Après l'intervention de Cali, les élèves abordent d'autres équations similaires avec succès. Ils tombent par la suite sur une équation qui, après isolation, donne : 2 enveloppes d'un côté de l'équation et 6 enveloppes de l'autre côté. Les élèves reconnaissent qu'ils ont devant eux quelque chose d'autre. L'activité conjointe professeur-élèves se poursuit, rendant progressivement possible l'apparition ou la matérialisation d'autres aspects de la pensée algébrique et, par là, le développement de la pensée des élèves, c'est-à-dire la pensée subjective. Puisque l'apparition ou la matérialisation de la pensée algébrique est toujours unique, neuve, il est impossible de tomber exactement sur le même singulier, car la pensée subjective est toujours un même différent : la différence d'un même. Elle enferme le même et ne se réduit pas à celui-ci. Elle est à la fois l'achèvement de l'archétype et sa négation. Elle est toujours non-identité, déficit et surplus.

REFERENCES

Andler D. (2004) *Introduction aux sciences cognitives.* Paris: Gallimard.

Bednarz N, Kieran C, Lee L (1996) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau G. (2005) Réponses orales à Régis Gras. In Salin M, Clanché P, Sarrazy B. (Eds.) *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 43-47). Grenoble: La pensée sauvage.

de Vega M. (1986) Introducción a la psicología cognitiva. Mexico: Alianza Editorial Mexicana.

Brousseau G. (2006) Mathematics, didactical engineering and observation. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, N. Stehlíková (Eds.) *Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 1, pp. 3-18). Prague: PME.

Fedoseyev P. N. (1977) *Philosophy in the USSR - dialectical materialism.* Moscow: Progress Publishers.

Filloy E, Rojano T. (1989) Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics* 9(2), 19-25.

Filloy E, Rojano T, Puig L (2007) *Educational algebra*. New York: Springer Verlag.

Furinghetti F., Radford, L. (2008) Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In English L. (Ed.) *Handbook of international research in mathematics education (2nd edition)* (pp. 626 - 655). New York: Taylor and Francis.

Høyrup J. (1995) *Les quatre côtés et l'aire*. Téléchargé du site: http://www.academia.edu/3131730/Torino_Associazione_Subalpina_Mathesis

Høyrup J (2002) Lengths, widths, surfaces. A portrait of old Babylonian algebra and its kin. New York: Springer.

Ilyenkov E. V. (1977) *Dialectical logic*. Moscow: Progress Publishers.

Kieran C. (1989) A perspective on algebraic thinking. In Vernand G, Rogalski J, Artigue M. (Eds). *Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* 2, 163-171.

Kotovsky K, Simon H. A. (1990) What makes some problems really hard: Explorations in the problem space of difficulty. *Cognitive Psychology* 22, 143-183.

Leibniz G. W. (1966) *Nouveaux essais sur l'entendement humain*. Paris: Flammarion.

Leontiev A. N. (1984) *Activité, conscience, personnalité*. Moscou: Éditions du Progrès.

Martin J. (2004) The educational inadequacy of conceptions of self in educational psychology. *Interchange: A Quarterly Review of Education* 35, 185-208.

Nissen H, Damerow P, Englund R. (1993) *Archaic bookkeeping.* Chicago: The University of Chicago Press.

Radford L. (2011) Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: La théorie de l'objectivation. *Éléments* 1, 1-27.

Radford L. (2013) Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education* 2(1), 7-44.

Radford L. (2014) The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal* 26(2), 257-277.

Radford L. (2015) Rhythm as an integral part of mathematical thinking. In Bockarova M., Danesi M., Martinovic D., Núñez R. (Eds.) *Mind in mathematics: Essays on mathematical cognition and mathematical method* (pp. 68-85). Munich: LINCOM GmbH.

Robson E. (2008) *Mathematics in ancient Iraq*. Princeton: Princeton University Press.

Vygotski L. (1985) *Pensée et langage*. Paris: Messidor.

Vygotsky L. (1997) *Collected works* (Vol. 3). New York: Plenum Press.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LA GÉNÉRALISATION ALGÉBRIQUE COMME ABSTRACTION D'INVARIANTS ESSENTIELS

Hassane SQUALLI*

Résumé - Cette étude s'inscrit dans les travaux de recherche portant sur le développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. Nous proposons dans ce texte un modèle d'analyse du processus de généralisation algébrique chez les élèves. Nous présentons ensuite quelques résultats d'une recherche ayant porté sur le rôle de la validation dans la construction de généralisations et leurs justifications.

Mots-clefs : (Pensée algébrique, généralisation, algèbre, early algebra)

Abstract - This study is part of a research on the development of algebraic thinking in elementary and middle school. In this paper, a framework for analysing the algebraic generalization's process is presented, along with a few results of a research examining the role of validation in the construction of generalizations and their justifications.

Keywords: (algebraic thinking, early algebra, generalization)

I. INTRODUCTION

Cette étude s'inscrit dans les travaux actuels menés par un groupe de chercheurs visant le développement d'un observatoire international de la pensée algébrique, dont les missions sont les suivantes :

- Favoriser la mise en réseau des chercheurs sur le thème de l'entrée dans l'algèbre et former de nouveaux chercheurs ;
- Constituer un lieu virtuel international d'archivage, d'échange et de diffusion des connaissances dans le domaine concerné, des données sur les pratiques enseignantes, et un lieu de mise en réseau en matière de développement de la pensée algébrique ;
- Être un lieu de veille à l'affut des questions vives intéressant l'OIPA ;
- Documenter les programmes de formation initiale et continue des enseignants, les pratiques professionnelles en enseignement, les ressources en lien avec le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et secondaire.

Par ailleurs, ces travaux s'inscrivent dans le courant Early Algebra, courant qui réfère à la fois à un domaine de recherche, une approche curriculaire et un domaine de formation des

* Université de Sherbrooke – QC, Canada – Hassane.Squalli@USherbrooke.ca

Squalli H. (2015) La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 346-356.

enseignants. Ce courant met l'accent sur le développement de la pensée algébrique dès le primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre. Cette stratégie a été implantée dans divers pays anglophones (Squalli, Suurtamm et Freiman, 2012; Squalli, Mary et Marchand, 2011). Au Québec, bien que le programme de formation n'intègre pas cette stratégie de manière explicite, différentes communautés de pratique travaillent dans ce sens, notamment dans le cadre de formations continues financées par le ministère d'éducation québécois (Squalli, Mary, Morin, 2010-2012; Mary, Squalli, Marchand, 2010-2012; Tremblay, Squalli, Adihou, Saboya, 2013-2015).

II. LE COURANT EARLY ALGEBRA

Early Algebra ne doit pas être perçue comme une version précoce de l'algèbre actuellement enseignée au secondaire ni comme une préparation à celle-ci, une préalgèbre. Elle est plutôt une stratégie pour enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire, en offrant aux élèves des opportunités pour développer la pensée algébrique et approfondir davantage certains notions et concepts mathématiques (le concept d'opération, d'égalité, d'équation, de régularité, de formule, de propriété, de variable et de variation, entre autres). Cette stratégie nécessite une vision renouvelée de l'algèbre scolaire.
Bien qu'il n'y ait pas de consensus sur la signification de l'algèbre, il ressort des discussions plusieurs aspects partagés par une grande majorité de chercheurs et éducateurs de ce mouvement :

- L'algèbre peut être approchée selon deux points de vue complémentaires et indissociables : comme un ensemble d'activités mathématiques (résolution de problèmes, étude de structures, modélisation, étude de relations fonctionnelles, etc.) et comme une manière de penser (pensée algébrique), soit un ensemble de processus de pensée utiles dans ce type d'activités.

- l'algèbre possède de multiples aspects. Plusieurs approches didactiques de l'algèbre sont alors possibles : une approche généralisation, une approche résolution de problèmes, une approche fonction et modélisation, une approche langage[1]. Dans l'enseignement de l'algèbre, toutes ces approches doivent être considérées.

- l'enseignement de l'algèbre doit insister sur le développement de la pensée algébrique chez les élèves. Deux composantes de la pensée algébrique sont particulièrement soulignées : 1) la tendance à généraliser; 2) la tendance à raisonner de manière analytique.

- Le développement de la pensée algébrique peut se faire sans l'utilisation du langage littéral de l'algèbre, il peut donc commencer dès le primaire.

Précisons que pour nous, une activité mathématique est algébrique si elle fait intervenir des opérations (lois de composition internes, externes, binaires ou n-aires) pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, rotation, translation, etc.), mais répétées un nombre fini de fois. La pensée algébrique est une manière de penser que l'on peut mobiliser dans ce type d'activités. Sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen d'un ensemble de raisonnements particuliers et de manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (par exemple, une tendance à voir l'égalité comme une relation d'équivalence, une tendance à laisser les opérations en suspens; une tendance à symboliser et

[1] Pour une discussion de ces approches, voir par exemple (Bednarz, Kieran et Lee, 1996), (Squalli, 2000)

à opérer sur des symboles; une tendance à avoir une vision structurale[2] (voir par exemple une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaîne de calcul)

Cette signification de l'algèbre inclut une grande part de l'arithmétique et intègre des éléments de l'analyse et de la géométrie. Pour sa part, van Reeuwijk (1998) adopte un point de vue proche du nôtre :

> From a mathematical point of view, algebra deals with systems in which operations play a role: addition (of numbers or other ''thing''), multiplication (numbers, other ''thing''), and the relations with the inverses. In others words, algebra deals with structure. Algebra is the study of operation structures. Following this point of view, arithmetic is a subdomain of algebra.
>
> (…)
>
> Calculus deals with change of magnitude and continuous and discrete changes. Very large and very small are important in calculus; grasping the infinite small and infinite large is a way to draw conclusions about the finite space in between.
>
> (…)
>
> When talking about school algebra, I mean something other than mathematical algebra. Algebra in the context of school algebra is a coherent integration of elements from the three domains: arithmetic, algebra, and calculus. (pp. 83-84)

Dans ce texte, nous présentons les deux composantes essentielles de la pensée algébrique : la tendance à généraliser et la tendance à raisonner de manière analytique.

III. LA GENERALISATION ALGEBRIQUE

1. Introduction

La généralisation peut être vue à la fois comme processus et comme produit. Pour faire une distinction entre ces deux aspects, nous parlerons de généralisation quand il s'agit du processus et de généralité quand il s'agit du produit.

Une généralisation est algébrique quand la généralité produite peut être représentée dans le registre algébrique, par exemple par une expression faisant intervenir un nombre fini de fois, des opérations, des nombres, des lettres, des mots, des symboles. La présence d'opérations (lois de composition interne ou externe, binaire ou n-aires) en nombre fini est indispensable et assure le caractère algébrique de l'activité. Par contre, la présence des lettres n'y est pas indispensable. Nous rappelons qu'historiquement, l'algèbre, comme domaine scientifique bien définie, existe bien avant l'apparition du langage littérale de l'algèbre.

La généralisation est un processus essentiel dans l'activité mathématique et tout particulièrement en algèbre. Mason (1996) y voit même le cœur des mathématiques. En effet, la plupart des faits mathématiques sont de nature générale, comme :

- Le périmètre d'un carré est quatre fois la mesure de son côté.
- Un nombre est pair si et seulement si son chiffre des unités est pair.
- La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est 180 degrés.
- Si G est un groupe d'ordre n, l'ordre de tout sous-groupe de G est un diviseur de n.
- …

Pour sa part, Lee va jusqu'à penser qu'en algèbre les activités de généralisation sont les plus importantes et constituent les seuls moyens d'initier les élèves dans la culture algébrique. Elle

[2] Voir par exemple une expression numérique comme un objet en soi et non uniquement comme une chaine de calcul

ajoute : «Nor is it much of a challenge to demonstrate that functions, modeling, and problem solving are all types of generalizing activities, that algebra and indeed all of mathematics is about generalizing patterns.» (Lee, 1996, pp. 102-103).

2. Quelques modèles du processus de généralisation

Plusieurs auteurs proposent des modèles pour décrire le processus de généralisation en mathématiques. A l'image de celui de Dörfler, ces modèles s'inspirent souvent du modèle proposé par Piaget et Henriques.

1. La généralisation selon Piaget et Henriques

Comme pour l'abstraction, Piaget et Henriques distinguent deux formes de généralisation : la généralisation inductive et la généralisation constructive.

> [La généralisation inductive] part des observables attachés aux objets, donc d'abstractions empiriques, et s'en tient à eux pour vérifier la validité des relations observées, pour établir leur degré de généralité et en tirer des prévisions ultérieures (mais sans encore chercher d'explication ou de "raison" ce qui conduirait à dépasser les observables), est alors de nature essentiellement extensionnelle et consiste à procéder du «quelque» au «tous» ou du «jusqu'ici» au «toujours» (…).
>
> [La généralisation constructive] s'appuie ou porte sur les opérations du sujet ou leurs produits, elle est en ce cas de nature simultanément compréhensive et extensionnelle et aboutit donc à la production de nouvelles formes et parfois à de nouveaux contenus (…). Ces contenus sont alors engendrés par ces formes et non pas donnés dans des observables empiriques (…). (Piaget et Henriques, 1978b. p.6)

Pour illustrer ces deux processus, utilisons l'exemple de la commutativité de l'addition.

L'affirmation «l'addition de deux nombres naturels ne dépend pas de l'ordre des termes» est une proposition générale donc le produit d'une généralisation.

Cette proposition peut être induite à partir de l'examen de quelques cas spécifiques de couples d'entiers naturels (n , m) et du constat : les résultats des chaînes de calcul n + m et m + n sont identiques. Cette observation (la constance du résultat des comparaisons) peut alors être étendue à toutes les valeurs des variables m et n. Dans cette généralisation, l'extension se base sur les observables uniquement et non sur des arguments pouvant justifier la validité de la propriété. C'est donc une généralisation inductive.

La commutativité de l'addition peut être aussi le résultat d'une généralisation constructive. Par exemple, étant données deux collections d'objets A et B de cardinal n et m, respectivement. Calculer n + m revient à ajouter m objets de la collection B aux n objets de la collection A et à dénombrer le tout. Calculer n + m revient à ajouter les n objets de la collection A aux m objets de la collection B et à dénombrer le tout. On s'aperçoit que les deux opérations de réunion des deux collections forment le même tout. Une réflexion sur ces opérations - sans effectuation des dénombrements - conduirait à comprendre que ces opérations ne dépendent pas des cardinaux des deux collections. Le cas de ces deux collections devient alors *prototypique* de toutes les paires de collections possibles. La généralisation s'appuie alors sur les opérations du sujet et non uniquement sur les observables. Remarquons que le domaine de cette généralité est restreint au domaine des entiers naturels. Son extension au domaine d'une autre catégorie de nombres nécessite une généralisation constructive différente s'appuyant sur des arguments différents.

2. La généralisation selon Dörfler

Selon cet auteur, la généralisation est à la fois un objet et un moyen de la pensée et de la communication (1991). Selon lui, généraliser est un processus socio-cognitif qui conduit à quelque chose de général (ou de plus général) et dont le produit réfère à une multiplicité potentielle ou actuelle. Généraliser peut être vu comme un processus psychologique dans la cognition des individus, dont les produits sont alors les construits cognitifs correspondants (schèmes, formes). Cependant, les processus individuels sont toujours conditionnés et médiatisés socialement, puisqu'ils exploitent et dépendent des moyens préparés et mis en place par la société, comme le langage. On peut difficilement avoir accès directement à ces processus sauf ce qu'on peut observer au cours d'une communication sociale.

Dörfler distingue deux types de généralisation : la généralisation empirique et la généralisation théorique.

La généralisation empirique s'apparente à la généralisation inductive de Piaget et Henriques.

La généralisation théorique, quant à elle, réfère à un système d'actions dans lequel des invariants essentiels sont identifiés et remplacés par des prototypes. La généralité est construite à travers l'abstraction des invariants essentiels. Les qualités abstraites sont des relations entre les objets, plutôt que d'être elles-mêmes des objets. Attardons-nous à présenter de manière détaillée le modèle de la généralisation théorique de Dörfler. Ce modèle possède plusieurs ressemblances avec l'abstraction réfléchissante de Piaget. Un des points communs est de considérer les actions du sujet comme le point de départ de la genèse des conceptualisations mathématiques.

La figure 1, schématise une version simplifiée du modèle de généralisation théorique de Dörfler, qui est adaptée aux situations de généralisations algébriques mettant en jeu des concepts de l'algèbre élémentaire.

Détachement des invariants de leur véhicule original

↑

Les invariants comme prototypes- Extension du domaine de référence

↑

Formulation d'invariants - Description symbolique des invariants

↑

Réflexion sur le système d'actions

↑

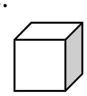
Système d'actions à partir d'une situation

Figure 1 *– Modèle simplifié de généralisation théorique de Dörfler (1991*

Pour rendre claire la présentation de ce modèle, nous l'illustrons au moyen de la résolution du problème suivant.

<u>Le problème des chaînes de cubes peints</u>

> *On crée une chaîne de cubes collés bout à bout et on se propose de les peindre. Trouver un moyen pour prédire le nombre de surfaces peintes en fonction du nombre de cubes de la chaîne.*



Le point de départ est une action ou un système d'actions. Les actions peuvent être physiques, imaginées ou symboliques, ce sont toujours des actions concrètes. Les buts des actions, les moyens utilisés ainsi que le cours des actions orientent l'attention du sujet vers certaines relations et connexions entre les objets sur lesquels portent ces actions.

Dans la situation des cubes peints, les objets sur lesquels portent les actions sont les chaînes de cubes, les faces des cubes, le nombre de ces cubes, la forme de la configuration géométrique formant la chaîne de cubes. Le but du système d'actions est décrit par la consigne du problème. Les actions sont ici imaginées, puisque les cubes sont dessinés.

Un système initial d'actions peut être le suivant : calculer combien de faces peuvent être peintes pour un cube, ensuite pour une chaîne formée de deux cubes, de trois cubes et ainsi de suite.

La répétition de ces actions conduit le sujet à une certaine constance dans les actions. Dörfler parle dans ce cas des invariants des actions. Dans notre exemple, les invariants des actions sont par exemple, « pour chacun des cubes du centre, deux faces ne peuvent être peintes» alors que «pour les deux cubes extrêmes, une seule face ne peut être peinte» ou encore, « quand on rallonge une chaîne de cubes d'un cube on augmente le nombre de faces qui peuvent être peintes de 4 (6 – 2).

Ces systèmes d'actions s'articulent alors autour de schémas d'actions, ou protocoles, qui sont ici la suite organisée d'actions que réalise le sujet pour calculer le nombre de surfaces peintes d'une chaîne donnée de cubes. Par exemple, un premier protocole consiste à déterminer le nombre de faces peintes d'une chaîne en calculant successivement le nombre de faces peintes des chaines de longueur 1, 2, 3 et ainsi de suite. Ce protocole bien qu'il puisse résoudre le problème pour une chaîne de n'importe quelle longueur, n'est pas pratique dans le cas des chaînes très longues, et nécessite une reconfiguration pour aboutir à une règle générale. Un autre protocole est de considérer que dans les chaînes de cubes expérimentés, il faut compter «2 fois 5 faces» pour les deux cubes extrêmes et «le nombre de cubes du centre fois 4 faces».

Comme nous venons de le faire, la formulation des invariants et des schémas d'actions nécessite une description symbolique, parce qu'il est nécessaire d'utiliser des symboles pour décrire les objets sur lesquels portent les actions (les cubes, les faces des cubes) ou pour décrire les transformations subies par le nombre de faces visibles lorsqu'on fait varier le nombre de cubes. Ces symboles peuvent être de nature verbale, iconique, géométrique ou algébrique. Les invariants sont potentiellement plus généraux que les actions elles-mêmes, ils peuvent être appliqués à n'importe quelle chaîne de cubes.

Un moment crucial dans le processus de généralisation se produit quand ces invariants sont remplacés par des *prototypes*. C'est-à-dire quand la formulation des protocoles ne sert plus uniquement à décrire les cas spécifiques examinés, mais aussi à envisager les cas potentiels. Ainsi, le schéma d'actions précédent, compter 2 fois 5 faces pour les deux cubes extrêmes et le nombre de cubes du centre fois 4 faces s'applique au cas de la chaîne de cubes sur laquelle a porté le système d'actions initial, mais aussi à n'importe quelle autre chaine de cubes (ayant plus de 3 cubes). Le fait que les invariants soient devenus prototypes, ou que le cas spécifique objet de l'activité du sujet soit devenue prototypique, est un changement qui s'effectue chez le sujet et non dans les objets. Le mouvement de pensée du sujet n'est plus *rétrospectif*, servant à décrire les actions et les invariants à partir des constances des actions, mais *prospectif*, les invariants ne couvrent plus seulement les cas examinés, mais aussi les cas potentiels. Ce changement est le fruit de l'expérience qu'a eu le sujet avec les différents cas spécifiques. Dörfler précise qu'un objet matériel, incluant les symboles n'est pas un *prototype* en soi. Il acquiert cette qualité en vertu d'une vision particulière qu'en a un sujet, vision qui est construite au cours d'une activité du sujet avec cet objet. En conséquence, un *prototype* ne peut pas être «passivement» perçu ou montré. En outre, les termes «cubes extrêmes» «cubes du centre» sont vus comme des variables qui varient. Notons que ce qu'on appelle exemple générique est un cas spécifique qui devient prototype pour un sujet. La généricité d'un exemple est une caractéristique émergente chez le sujet, non une propriété de l'exemple, elle ne se transmet pas, elle se construit.

Les invariants et leurs formulations symboliques sont alors détachés des actions originales. Dans notre exemple, le schéma d'actions peut dès lors être formulé de la manière suivante : le nombre de faces peintes d'une chaîne de cubes est : «2 fois 5 plus le nombre de cubes de la chaîne moins 2, fois 4», ou encore en langage numéro-littéral, $2 \times 5 + (n-2) \times 4$ où n est le nombre de cubes dans la chaîne».

Dès le départ, les symboles possèdent un certain domaine de référence et ce domaine est étendu graduellement. Ce domaine se limitait d'abord aux cas spécifiques examinés. Il a été ensuite étendu aux cas potentiels générés par les prototypes; autrement dit, les cas pour lesquels on peut appliquer le même schéma d'actions tout en gardant stables les mêmes invariants. Dans notre exemple, la description symbolique de notre schéma d'actions s'applique à toute chaîne de cubes possédant deux cubes extrêmes et des cubes centraux, soit aux chaînes qui ont 3 cubes et plus.

En réfléchissant sur la description symbolique des invariants, les symboles utilisés commencent à se substituer graduellement aux éléments des actions et de leurs transformations. Cette réflexion peut permettre une autre extension du domaine de validité de la généralité. Dans notre exemple, par construction, notre formule $2 \times 5 + (n-2) \times 4$ n'est valide que pour, $n \geq 3$. Mais on peut vérifier que cette formule marche aussi pour les cas $n=1$ et $n=2$. Bien que le système d'actions initial ne peut s'appliquer aux chaînes formées d'un ou de deux cubes.

Les symboles acquièrent les caractéristiques d'objets; ils deviennent eux-mêmes les objets des actions et, en tant que tels, ils deviennent les véhicules de différentes relations entre les invariants. Ces symboles sont alors de nouveaux objets de la pensée, des objets mathématiques, dont les significations résident dans les invariants. Le détachement total des actions originales permet d'écrire notre règle comme $4n+6$, où n est un entier naturel non nul représentant le nombre de cubes dans la chaîne.

Cet objet mental est une généralité, parce qu'il a le potentiel d'un domaine de référence non limité. La réification des variables et des symboles complète le processus d'abstraction qui a commencé par fixer les invariants. Dans ce sens les invariants sont détachés de leur véhicule original, ils acquièrent une indépendance et forment la généralité abstraite.

3. *Quelques échos d'expérimentations auprès d'élèves*

Le modèle de Dörfler que nous venons de présenter s'est avéré fécond dans l'analyse fine du processus de généralisation chez les élèves. Voici quelques résultats tirés d'une recherche rapportée dans (Mary, Squalli, Schmidt, 2008). L'expérimentation didactique de la situation *Pentamino*[3] a eu lieu dans une école secondaire dite spéciale recevant des élèves en difficulté grave d'apprentissage puisqu'ils avaient au moins deux ans de retard sur le plan académique.

[3] Le matériel des *pentaminos* est tiré d'une activité présentée par Ralph Mason (2000) lors d'un Colloque du groupe canadien d'études en didactique des mathématiques.

Leur niveau scolaire en mathématique est variable, mais ne dépasse pas le niveau de secondaire 1 (grade 7).

Pour l'activité elle-même, on utilise une grille numérique formée de 7 lignes et 10 colonnes, contenant la suite des nombres de 1 à 80 (figure 2); sur laquelle on place une forme (constituée de cinq rectangles opaques sauf deux, voir figure 3) selon une orientation fixée. Le but de l'activité est de construire une stratégie gagnante pour une forme donnée, c'est-à-dire permettant de prédire, sans le support de la grille numérique, le nombre apparaissant dans la case nommée sortie ou case Arrivée (case bleu) étant donné un nombre initial connu dans la case nommée entrée ou case Entrée (case rouge).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33				37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

***Figure 2** – Grille numérique*

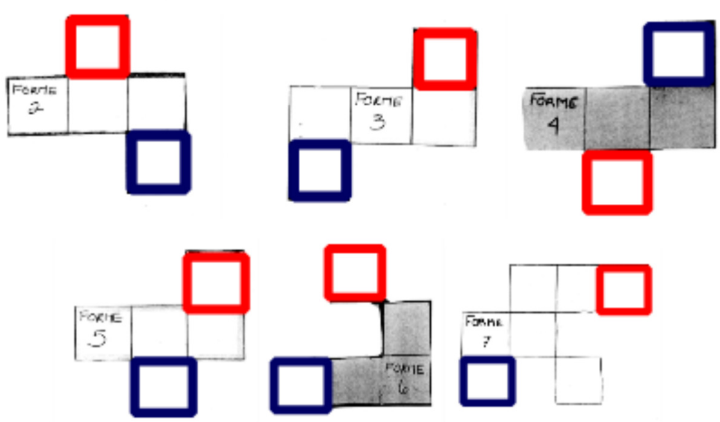


***Figure 3** – Différentes formes utilisées*

D'un point de vue mathématique, chaque forme est reliée à la règle d'une relation fonctionnelle affine qu'il s'agit de trouver. Une telle règle peut s'écrire en notation conventionnelle: $y = x + k$ où x représente le nombre de la case de départ, y celui de la case d'arrivée et k une constante. La régularité réside dans la constance des écarts $y - x$. La situation présentée aux élèves comporte trois tâches : 1) pour une forme donnée et sans la grille, prédire le nombre qui va apparaître dans la case d'arrivée (carré bleu) connaissant le nombre de la case de départ (carré rouge) ; 2) comparer des formes proposées par l'enseignant pour déterminer celle qui est la plus difficile pour réaliser la tâche de prédiction ; 3) construire la forme la plus difficile. La première tâche consiste en un jeu où les élèves doivent prédire le résultat sans la grille. Ceci vise la formulation d'une règle générale pour une forme donnée. Les deuxième et troisième tâches ont comme objectif d'amener les élèves à se détacher de la répétition des expériences puis à envisager une règle générale pour l'ensemble des formes présentées.

Les élèves ont utilisé différents systèmes d'actions qui peuvent être configurés en 3 grandes familles. Une famille étant une classe constituée des systèmes d'actions portants sur les mêmes objets des actions. Voici les familles identifiées dans la situation *Pentamino*.

F1: Cette famille regroupe les systèmes d'actions basées sur des déplacements horizontaux et verticaux sur la grille au voisinage de la forme. Les stratégies des élèves sont alors décrites sous forme d'une chaîne d'opérateurs: - 2, + 10, + 10, comme le cas d'Ulysse[4] par exemple pour la forme 3. Dans cette famille, le véhicule des actions est constitué par la forme du *pentamino*. Les invariants sont liés à la structure de la grille numérique et à la forme du *pentamino*.

F2: Cette famille repose sur le calcul du nombre de cases entre la case de départ et la case d'arrivée, une fois la forme posée sur la grille numérique. L'invariant mathématique est décrit sous forme d'un seul opérateur + 21, par exemple pour la forme 2, comme dans le cas de Cléopâtre :

> Quand elle me le donne, moi je regarde bien la forme. Là j'imagine, j'imagine le chiffre dans l'arrivée. Et là je compte les nombres qui sont dans l'autre et là, quand j'arrive dans ma case de départ, je le sais.

Dans cette famille, le véhicule des actions n'est pas la forme du *pentamino,* mais les positions relatives des nombres des cases de départ et d'arrivée dans la grille. Les invariants mathématiques sont liés à la constance de l'écart entre ces deux nombres quelle que soit la position de la forme sur la grille.

F3: Cette famille contient les systèmes d'actions reposant sur la comparaison des chiffres des unités et des chiffres des dizaines du nombre de départ et du nombre d'arrivée. L'invariant mathématique est décrit comme un couple d'opérateurs (- n, + m) que l'on applique respectivement au chiffre des unités et au chiffre des dizaines du nombre de la case d'entrée. Voici comment David détermine le nombre de la case de sortie quand on applique la forme 2 au nombre 25 :

> Moi j'ai trouvé de faire (inaudible). Tu as deux [le chiffre des dizaines de 25], tu rajoutes deux : 3, 4. OK. Pis ici [chiffre des unités de 25] tu en rajoutes juste un, ça va faire 6. Alors 4 et là 6 : 46.

Le tableau suivant présente la distribution des systèmes d'actions initiaux des élèves selon les familles.

Famille 1	Famille 2	Famille 3	Total
8 **73 %**	**2** **18 %**	**1** **9 %**	**11** **100%**

Figure 4 *- Répartition des systèmes d'actions initiaux sur les 3 familles*

[4] Tous les noms d'élèves sont des noms fictifs.

Comme attendu par l'équipe de recherche, la majorité des élèves ont utilisé les systèmes d'action de la famille 1. Compte tenu de la nature des médiations potentielles que permet la situation, les formes se prêtaient naturellement à être le véhicule des actions des élèves. Les invariants construits sont justifiés par la structure de la grille numérique. Les systèmes d'actions de cette famille ont permis des généralisations de nature théorique. Nous y reviendrons plus loin.

En revanche, les généralisations des familles 2 et 3 sont des généralisations empiriques. En effet, la régularité est dégagée à partir de la constance des résultats de quelques cas. C'est le schéma classique d'une généralisation empirique. Le domaine de validité du résultat est étendu sans une réflexion sur les raisons de la validité du résultat. Un des enjeux du développement de la généralisation algébrique chez les élèves consiste justement à les amener à s'éloigner d'une généralisation empirique et de tendre vers l'utilisation de généralisations théoriques.

Cette étude confirme le rôle essentiel que jouent les systèmes d'actions initiaux dans le processus de généralisation. Les généralités construites par les élèves sont empreintes des actions qui ont mené à leur formulation. Le système d'actions initial détermine d'une certaine façon la direction et le contenu de la généralisation (les invariants) dont la pertinence relève de l'activité du sujet. De plus, il détermine le registre sémiotique pour décrire les actions, les opérations sur ces actions, les invariants ainsi que les explications. Au début de l'activité, Ulysse décrit sa stratégie pour la forme 2 ainsi «Augmente de un, puis descend de un, puis descend encore de un parce que chaque ligne c'est dix». Cette description, porte sur trois objets : les actions réelles (par exemple, «descends de un»), les invariants mathématiques («augmente de 1») ainsi que la justification d'un invariant («parce que chaque ligne c'est dix» à propos de l'invariant implicite : «quand tu descends de 1 ajoute 10»). Plus tard, Ulysse décrit sa stratégie pour la forme 3 en une chaîne d'opérateurs «-2, +10, +10». Bien que cette description soit symbolique, elle tire son sens et son caractère opératoire du système d'actions initial («avancer de deux cases à droite, descendre d'une case, descendre encore d'une case»).

En outre, les systèmes d'actions initiaux sont déterminants dans la négociation de sens au cours des interactions. En effet, pour comprendre la stratégie d'un autre, il faut être capable de lier sa formulation au système d'actions qui lui donne sens ou de pouvoir l'interpréter dans son propre schème des actions. Cela paraît relativement facile quand les systèmes d'actions sont de la même famille. En effet, en utilisant des systèmes d'actions de la même famille, les élèves exploitent les mêmes véhicules des actions, arrivent aux mêmes invariants, partagent le même registre sémiotique pour décrire les invariants et leurs justifications. En revanche, l'adoption de la stratégie d'un élève qui se base sur un système d'actions d'une autre famille est plus difficile cognitivement. Elle nécessite un détachement de son propre système des actions. Un tel détachement est difficile quand le processus de généralisation n'a pas encore atteint ce niveau. Dans ce cas, l'élève doit changer de point de vue, abandonner son propre système d'actions et orienter l'attention vers un système d'actions d'une famille différente.

Finalement, l'analyse des processus de généralisation des élèves a mis en évidence le rôle de la validation dans la construction des généralités et de leur justification. Balacheff (1988) définit le processus de validation comme une activité de raisonnement dont la finalité est de s'assurer de la validité d'une proposition et éventuellement de produire une explication, une argumentation ou une démonstration. Cela suppose que le sujet a émis une telle proposition, ou que celle-ci est portée à sa connaissance par une tierce personne. Quand l'enjeu de la validation est le caractère général de la proposition, la généralité est donnée ou a déjà été produite. Nous sommes donc à la fin du processus de généralisation. La validation porte ainsi sur le produit de la généralisation. Elle ne peut donc être concomitante à la construction de la généralisation, car elle vient en aval de celle-ci. Au cours d'une activité de généralisation, les deux processus peuvent se chevaucher sans avoir lieu en même temps. En effet, le processus de généralisation passe par une série d'abstractions d'invariants essentiels; une fois que ces invariants sont formulés, un processus de validation peut s'enclencher pour en éprouver la validité. Mais dans une telle activité, c'est la généralisation qui conduirait l'élan de pensée du sujet. La généralisation est de nature prospective (ou extensionnelle selon Piaget), puisqu'elle est orientée vers le dépassement du spécifique, en anticipant le général. La validation, quant à elle, est rétroactive, puisqu'elle opère sur le produit de la généralisation.

REFERENCES

Balacheff N. (1988) *Une étude épistémologique du processus de preuve en mathématiques au collège*. Thèse présentée à l'Université National Polytechnique, Grenoble.

Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.) (1996) *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Boston: Kluwer Academic Publishers

Dörfler W. (1991) Forms and means of generalization in mathematics. In Bishop A. J., Mellin-Olsen S., Van Dormolen J. (Eds.) *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp.63-85). Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Lee L. (1996) An initiation into algebraic culture trough generalization activities. In *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Piaget P., Henriques G. (1978) *Recherches sur la généralisation*. Paris : Presses Universitaires de France.

Mary C., Squalli H., Schmidt, S. (2008) Mathématiques et élèves en difficulté grave d'apprentissage : contexte favorable à l'interaction et au raisonnement mathématique. In Bisaillon J.-M., Rousseau N. (Eds.) *Les contextes d'intervention favorables aux jeunes en grandes difficultés* (pp.167-192). Montréal : Presses de l'université du Québec.

Mason J. (1996). Expressions of generality and roots of algebra. In Bednarz N., Kieran C., Lee L. (Eds.), *Approches to algebra* (pp. 65-86). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Reeuwijk V.M. (1998) Structure in school algebra. In the *Proceedings of a National Symposium, may 27 and 28, 1997. The nature and role of algebra in the K-14 curriculum* (pp. 83-85). Washington, D.C.: National Academy Press.

Squalli H., Suurtaam C., Freiman V. (2012) Rapport du groupe de travail F : Préparer les enseignants au développement de la pensée algébrique au primaire et au secondaire. Actes de la 36e rencontre annuelle groupe canadien d'études en didactique des mathématiques. Université Laval, Québec : 25 -29 mai 2012.

Squalli H., Mary C., Marchand, P. (2011) Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. In Lebeaume J., Hasni A., Isabelle Harlé I. (Eds). *Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie*. Bruxelles : DeBoeke.

Squalli, H. (2000) Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat. Québec, Université Laval.

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

SYMBOLISER ET CONCEPTUALISER, DEUX FACETTES INDISSOCIABLES DE LA PENSEE MATHEMATIQUE : L'EXEMPLE DE L'ALGEBRE

Joëlle VLASSIS[*] – Annick FAGNANT[**] – Isabelle DEMONTY[***]

Résumé – Dès les premiers instants de leur histoire, les mathématiques se sont développées en étroite relation avec les symboles qu'elles utilisent. Au départ d'une analyse épistémico-historique de l'évolution de la notation algébrique, cet article propose une réflexion sur la dialectique conceptualisation/symbolisation propre à la pensée mathématique. Il vise en particulier à mettre en lumière, dans la foulée des approches socioculturelles, le rôle et l'importance des activités de symbolisation dans les apprentissages mathématiques. Il vient également concrétiser ces perspectives par des pratiques de classe illustrant les propos théoriques. Une activité sur l'apprentissage de la résolution des équations est développée dans cet objectif.

Mots-clefs : symbolisation, conceptualisation, chaîne de signification, approches socioculturelles, histoire de l'algèbre

Abstract – From the very beginning of their history, mathematics were developed in close relationship with the symbols they use. Starting from an epistemico-historical analysis of the development of algebraic notation, this article proposes a reflection on the dialectic conceptualization/symbolization specific to the mathematical thinking. In particular, it aims to develop, on the basis of sociocultural approaches, the role and importance of symbolization activities in mathematics learning. It also proposes some classroom practices illustrating the theoretical principles. An activity on the learning of solving equations is developed in that objective.

Keywords: symbolization, conceptualization, semiotic chain, sociocultural approaches, history of algebra

I. INTRODUCTION

En mathématiques, les objets n'ont pas d'existence tangible et ne sont pas directement accessibles par la perception. Les notations symboliques sont donc cruciales puisqu'elles seules permettent de rendre compte des objets en question et d'y accéder. Leur utilisation autorise la communication, la réflexion et les échanges mathématiques. Toutes ces actions, impossibles sans ces notations, permettent ainsi le développement et le progrès de cette discipline.

[*] Université du Luxembourg – GD Luxembourg – joelle.vlassis@uni.lu
[**] Université de Liège – Belgique – afagnant@ulg.ac.be
[***] Université du Luxembourg – GD Luxembourg – isabelle.demonty@uni.lu

Vlassis J., Fagnant A., Demonty, I. (2015) Symboliser et conceptualiser, deux facettes indissociables de la pensée mathématique : l'exemple de l'algèbre. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 357-369.

Dans les pratiques d'enseignement, les symboles[1] mathématiques sont traditionnellement présentés comme des entités destinées à représenter une réalité mathématique externe, et dont il convient d'enseigner la grammaire et le vocabulaire. Ils sont donnés d'emblée aux élèves sous leur forme définitive. Le point de vue implicite sous-jacent à cette approche consiste à considérer les symboles de manière indépendante des concepts et opérations qu'ils représentent. Avec la redécouverte et la diffusion des travaux de Vygotsky, cette conception du rôle des symboles dans les apprentissages s'est profondément modifiée. Désormais, ceux-ci sont considérés comme constitutifs de la conceptualisation mathématique. Cette conception rejoint le développement même des mathématiques au fil des siècles où chaque avancée conceptuelle fut accompagnée, précédée ou suivie d'une avancée dans la symbolisation.

Dans la foulée des approches inspirées de Vygotsky, l'objectif de cet article consiste à développer une réflexion sur la dialectique conceptualisation/symbolisation propre à la pensée mathématique. Il vise en particulier à mettre en lumière le rôle et l'importance des activités de symbolisation dans les apprentissages mathématiques. Il se propose également de concrétiser ces perspectives par des pratiques de classe illustrant les propos théoriques.

Cet article est composé de trois parties. La première consiste à évoquer le rôle de la symbolisation dans le développement de l'algèbre au fil de l'histoire. La deuxième section discute, dans la foulée des thèses vygotskiennes, du processus de symbolisation en tant qu'élément incontournable des apprentissages mathématiques. Enfin, la dernière partie vient illustrer les principes évoqués en présentant des pratiques de classe basées sur des activités de symbolisation.

II. L'HISTOIRE DE L'ALGEBRE, UNE (R)EVOLUTION CONCEPTUELLE GRACE A UNE DECOUVERTE SYMBOLIQUE MAJEURE

L'histoire de la notation algébrique en Occident constitue un exemple éclairant de la dialectique entre symbolisation et conceptualisation dans le développement de l'histoire des mathématiques. Les analyses historiques montrent combien ces symbolisations ont été constitutives de l'émergence des objets mathématiques eux-mêmes.

Selon Ifrah (1994), c'est tout d'abord la découverte de la numération de position et du zéro par les savants indiens qui a ouvert la voix à l'élaboration d'une science algébrique. Car,

> « avec ce type de notations, les valeurs numériques, cessant d'être connotées par des symboles propres à chacune d'elles, perdent du coup de leur individualité qualitative […] la régularité cyclique de leur construction fournit une loi qui permet de les engendrer toutes à l'infini d'une manière toujours identique, et sans jamais que se perde la connaissances exact de leur rapport » (Massignon & Arnaldez, in Ifrah 1994, p. 454).

Cependant, toujours selon Ifrah, l'algèbre indienne n'aura pas su accomplir le pas décisif pour évoluer vers l'algèbre que nous connaissons. En effet, il lui manquait une notation générale, en l'occurrence la notation littérale, pour désigner des variables, inconnues ou constantes indéterminées. C'est la découverte de cette notation symbolique par Viète en 1591 qui a rendu possible la naissance de l'algèbre moderne. Ifrah souligne que c'est bien la notation littérale algébrique qui permit de passer du particulier au général, élevant la science algébrique à un niveau bien supérieur à celui de l'arithmétique ordinaire.

1 Dans cet article, nous utiliserons le terme « symbole » au sens large en référence à la définition de Cobb (2000) selon lequel les symboles sont des entités concrètes devant être interprétées comme signifiant quelque chose d'autre. Ainsi, les symboles ne se réduisent pas aux signes mathématiques conventionnels mais incluent aussi bien des graphiques, des tableaux, des diagrammes que des notations non standards comme de simples marques sur un papier voire un arrangement physique d'objets.

Plusieurs auteurs (Harper 1987 ; Kieran 1992 ; Ifrah 1994) s'accordent pour affirmer que l'évolution de la notation algébrique s'est réalisée en trois grandes phases.

La première phase est celle du *langage « rhétorique »* (Harper 1987) *ou terminologique* (Ifrah, 1994). Au cours de cette période, seul, le langage naturel est utilisé pour résoudre les problèmes. Aucun signe, ni symbole mathématique n'est utilisé. Les processus de calcul sont décrits verbalement.

La deuxième phase voit le développement d'un *langage syncopé.* C'est Diophante qui au III^{e} siècle après J.C. introduit des symboles pour désigner certains nombres. Radford (1992), rappelle toutefois que l'innovation majeure apportée par Diophante est l'idée d'*arithme* : une quantité indéterminée d'unités qu'il symbolisera sous la forme ζ (dzèta). Cet *arithme* correspond à la notion d'inconnue en algèbre moderne. Le changement conceptuel introduit par Dipohante avec l'*arithme*, c'est que cette quantité inconnue va être prise en compte dans les calculs. On va opérer avec elle ! Selon Radford (1992), l'objectif de Diophante n'était pas de résoudre des problèmes de la vie réelle appliqués au commerce, à l'agriculture ou à tout autre situation concrète mais des problèmes qui reflètent la structure de l'arithmétique. Diophante s'intéresse en effet au groupement des nombres (cubes, carrés, …) et les problèmes qu'il entreprend de résoudre concerne les nombres, leur différence, … Ses innovations symboliques ont consisté à abréger les mots. Celles-ci se sont imposées en raison des limites de l'écriture propre à l'époque, en tant que techniques efficaces pour copier plus rapidement les manuscrits mathématiques.

Ses innovations tant symboliques que conceptuelle conduisirent à des avancées importantes dans la résolution de problèmes et donnèrent lieu à une théorie arithmétique ouvrant de nouvelles perspectives (Radford 1992). La principale préoccupation des mathématiciens au cours de cette période consiste à découvrir l'identité des lettres et non d'essayer d'exprimer une généralisation. Le but de l'algèbre est donc de rechercher la valeur d'une inconnue (solution numérique d'un problème). Au cours de cette période se développe une utilisation de plus en plus extensive du symbolisme mathématique (symboles opératoires et littéraux) qui autorisa le développement d'opérations de plus en plus sophistiquées impossibles à réaliser avec les mots.

Enfin, dans la troisième phase, avec le *langage symbolique*, un changement radical se produit grâce à François Viète (à la fin du XVI^{e} siècle), lorsque les lettres vont également être utilisées comme paramètres, c'est-à-dire comme quantités données (Harper 1987). Cette simple mais brillante avancée conceptuelle allait changer la face de l'algèbre. Cette utilisation des lettres introduit un nouveau concept numérique en mathématiques : le concept de « nombre algébrique ». Les nombres représentés par ces lettres n'ont ni dimension spécifique, ni classement d'ordre particulier. Par exemple, dans $x + y = a$, a peut-être considéré comme une quantité donnée. Elle peut représenter tout nombre; x et y sont maintenant des variables corrélées. Kieran (1992) précise qu'avec ce langage symbolique, il devient possible d'exprimer des solutions générales et d'utiliser l'algèbre comme un outil pour démontrer les règles régissant les relations numériques. L'invention de Viète d'une notation condensée permit, selon Ifrah (1994), de passer d'un raisonnement individuel, portant sur des propriétés spécifiques, à un raisonnement global sur les propriétés communes à tous les cas d'une même espèce.

Ce dernier précise que :

> « L'usage de la lettre alphabétique pour désigner un paramètre ou une inconnue a défintivement libéré l'algèbre de l'esclavage du verbe, permettant dès lors de créer une sorte de « langue internationale » comprises sans équivoque possible par les mathématiciens du monde entier » (Ifrah 1994, p. 387).

Et c'est ce qui rendit possible, rappelle Ifrah, l'émergence d'autres concepts mathématiques, comme celui des fonctions, discipline qui constitue aujourd'hui l'un des fondements des mathématiques appliquées, mais également l'algébrisation de l'analyse et l'essor de la géométrie analytique.

Ce détour historique n'a pas pour but de montrer les différents cheminements « maladroits » entrepris par les savants au fil des siècles avant d'arriver aux mathématiques modernes abstraites, qui seraient considérées comme les seules « bonnes » mathématiques. Au contraire, nous pensons, à l'instar de Radford (1997), que les analyses historiques ont pour but de mieux comprendre la façon dont le savoir mathématique s'est développé dans une culture donnée, ainsi que la façon dont les significations ont émergé et se sont modifiées au fil des siècles. C'est davantage le processus d'émergence des idées mathématiques qui importe plutôt que la connaissance de la succession des événements et des faits historiques pour eux-mêmes. En l'occurrence, l'histoire de l'algèbre que nous venons d'évoquer brièvement, consiste à mettre en évidence le processus selon lequel les avancées symboliques se sont développées en étroite relation avec les avancées conceptuelles dans un contexte socio-culturel donné. Ces avancées symboliques permirent de poser de nouveaux problèmes et d'ouvrir à de nouveaux domaines requérant de nouvelles symbolisations plus adéquates dans un processus cyclique et récursif d'une société et d'une science en constante progression. Dans cette perspective, ainsi que le souligne Radford (1997), l'algèbre syncopée ne doit pas être considérée comme une étape intermédiaire entre une époque « primitive » et les mathématiques formelles, et qui serait caractérisée par des manques, notamment un manque de méthode générale. Au contraire, la découverte de l'*arithme* permit à Diophante de développer une méthode très sophistiquée de résolution de problèmes. En outre, le développement de la symbolisation syncopée fut façonné tant par les découvertes conceptuelles que par le contexte socio-culturel de l'époque. Les limites de l'écriture participèrent à son développement en rendant nécessaire l'abréviation des mots.

III. L'IMPORTANCE DE LA SYMBOLISATION DANS LES APPRENTISSAGES MATHEMATIQUES

Ce développement des notations algébriques au cours des derniers siècles, s'il a permis des avancées conceptuelles déterminantes, a souvent dû être poursuivi au détriment de l'évidence de sens pour les non-initiés. En effet, dans les phases rhétoriques et syncopées, le langage utilisé en mathématique correspondait ou restait encore proche du langage naturel. Mais depuis Viète et l'algèbre symbolique, les relations entre symboles et objets mathématiques se sont complexifiées de telle sorte que le lien entre de nombreuses expressions symboliques et ce qu'elles signifient n'est plus du tout direct. La plupart des symboles présentent plusieurs significations qui varient parfois au sein d'une même situation. Cette polysémie des symboles nécessite une formation aux conventions et aux règles qui régissent leur utilisation. Cela ne va pas sans difficulté pour les élèves du début du secondaire qui commettent un grand nombre d'erreurs en raison d'un manque de sens attribué à des symboles comme la lettre (Küchemann 1978 ; Booth 1984), le signe d'égalité (Kieran 1981 ; Theis 2005) ou encore le signe « moins » (Vlassis 2004, 2008, 2010). Une des raisons principales des difficultés observées chez les élèves trouve son origine dans un manque d'enseignement explicite et significatif du changement de sens de signes déjà connus tels que le signe d'égalité, la lettre ou le signe « moins ». En effet, la plupart du temps, ces changements pourtant majeurs sont de l'ordre de l'implicite et véhiculés dans des pratiques d'enseignement basées essentiellement sur l'application de règles et techniques dépourvues de sens aux yeux des élèves (Kieran 1992 ; Radford 2008).

L'objectif de cette section consiste à proposer une démarche d'enseignement alternative basée sur les approches socioculturelles issues des principes de Vygotsky (1997). Ces perspectives envisagent le développement conceptuel en étroite interaction avec le développement des symboles. Pour Vygostsky (1997) en effet, la communication et les interactions sociales sont considérées comme consusbstantielles à l'apprentissage et à la pensée. Le développement cognitif trouve son origine dans les interactions sociales médiatisées, c'est-à-dire instrumentées ou outillées, par des « signes » tels que le langage, l'écriture, les symboles, le dessin ou encore les schémas. En ce sens, les symboles mathématiques constituent des signes en tant qu'outils de la communication mathématique. C'est l'appropriation des signes qui, dans la pensée de Vygotsky (1997), marque de façon essentielle le passage des activités élémentaires aux activités supérieures. Dans les sections qui suivent, nous proposons tout d'abord une réflexion sur les signes, puis présentons un modèle d'apprentissage inspiré de Gravemeijer et Stephan (2002) basé sur les chaînes de signification et dans lequel concepts et symboles interagissent étroitement.

1. Signes et communication

Si la formation de la connaissance est considérée d'un point de vue social, l'utilisation des signes (et donc, notamment, des symboles mathématiques) devient un élément culturel central de la cognition (Radford 1998). Dans la perspective vygotskienne, si les signes ont d'abord une fonction générale communicative pour réguler l'interaction et le déroulement de l'activité, celle-ci précède et est à l'origine de la fonction intellectuelle. C'est parce qu'il est d'abord conduit à utiliser les signes pour agir sur l'autre (fonction sociale) que l'enfant devient capable de les utiliser pour agir sur lui-même (fonction individuelle cognitive). En ce sens, les théories sémiotiques de l'activité mathématique peuvent contribuer à affiner notre compréhension des principes qui viennent d'être évoqués. Sur la base des travaux des sémioticiens (Lacan/Saussure, cité par Gravemejer 2002), nous présentons une définition du signe schématisée dans la figure 1 ci-dessous.

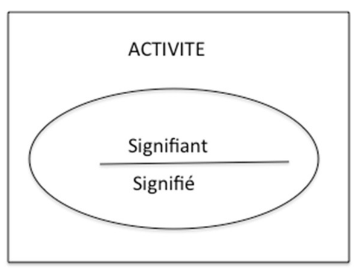


Figure 1 *– Proposition de définition du « signe » incluant la notion d'activité*

En sémiotique, un signe est généralement considéré comme étant constitué d'un « signifiant », l'expression matérielle perceptuellement accessible du signe, et d'un « signifié », renvoyant au contenu, au sens de cette expression. Les approches socioculturelles nous amènent à considérer le signe dans la foulée de sémioticiens, comme exprimant une relation étroite et sémantique entre signifiant et signifié. Un signe est ainsi représenté comme un ensemble composé de deux facettes inséparables (voir figure 1). Cependant, de notre point de vue, cette conception du signe ne peut suffire. Dans les approches socioculturelles, un signe n'est jamais une entité pour elle-même, il prend place et fait sens dans un contexte d'activité précis et est produit pour atteindre un objectif donné (Radford 1998). L'activité est envisagée comme l'environnement dans lequel s'insèrent les actions mathématiques des individus et qui les rendent nécessaires. Selon Radford (1998), l'activité présente deux caractéristiques importantes. La première c'est qu'elle est médiatisée par les signes et est donc enracinée dans la culture, la seconde c'est qu'elle est orientée vers un but. L'histoire de la notation algébrique, évoquée sans la section I, témoigne du même processus. Ainsi, de notre point de vue, un signe se définit par un signifiant et un signifié en étroite relation, médiatisant une activité donnée orientée vers un but. C'est pourquoi, nous suggérons de compléter la représentation du signe proposée par la sémiotique, en l'intégrant au cœur même de l'activité dans laquelle il est produit (voir figure 1).

2. Signes et chaîne de significations

À travers leurs analyses, Gravemeijer et al. (2000) ont mis en évidence le rôle crucial des activités de symbolisation qui se développent en relation avec l'évolution de pratiques mathématiques de la classe afin de faire émerger une réalité mathématique abstraite. Selon ces auteurs, les différentes étapes de symbolisation constituent une chaîne de significations dont la composante de base est le signe tel que nous venons de le définir. La chaîne de signification développée par Gravemeijer et al. (2000) et Gravemeijer (2002) présente une vision dynamique du signe selon laquelle une combinaison précédente du signe devient le signifié de la combinaison suivante (voir figure 2). Nous proposons dans la section IV un exemple de chaîne de significations modélisant une activité sur les équations (voir figure 5).

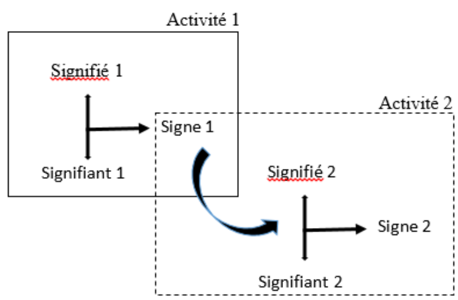


Figure 2 *– Chaîne de significations inspirée de Gravemeijer (2002) et adaptée à la définition du signe incluant la notion d'activité*

L'évolution des signes dans une chaîne de significations présentée dans la figure 2, implique que le nouveau signifié englobe le signe original, tandis que la signification du signe original change dans une mathématisation progressive de plus en plus abstraite. Ainsi, celle-ci s'installe de manière « *bottom up* » au départ des activités informelles des élèves (Gravemeijer et al. 2000). La signification initiale du signe précédent étant en relation avec des intérêts particuliers, elle est remplacée par une signification différente quand le signe suivant est utilisé dans des pratiques motivées par de nouvelles préoccupations. Cette évolution du signe est ainsi rendue nécessaire par des activités de complexité croissante. Il est à noter que Gravemeijer et al. (2000) insistent sur l'idée que l'évolution des signes émerge avec l'évolution des pratiques de classe. Cependant, leur schéma initial de chaîne de significations ne rend curieusement pas compte de cette dimension. C'est pourquoi nous l'avons adapté à notre définition du signe incluant les signes dans le contexte des activités qui évoluent au fil du temps (voir figure 2).

L'avantage de ce processus, selon Presmeg (2006), c'est qu'à chaque point de la chaîne existe la possibilité pour les élèves de revenir en arrière y compris aux actions initiales. Dans une perspective socioculturelle, cette production de symboles va entraîner des débats sur la pertinence de telle ou telle symbolisation en fonction de l'activité donnée. Ce va et vient entre le langage verbal, les symboles non conventionnels et les symboles mathématiques pour résoudre une tâche donnée contribue pleinement à la production de sens et à la compréhension des objets mathématiques étudiés. Rappelons à cet égard que les objets mathématiques appartiennent à une réalité intangible et qu'ils ne peuvent être appréhendés qu'à travers leurs différentes représentions. En ce sens, cette évolution à travers les différents types signes au cours des activités mathématiques contribue également puissamment à la conceptualisation des objets mathématiques.

IV. UN EXEMPLE D'ACTIVITE DE SYMBOLISATION EN ALGEBRE ELEMENTAIRE

La séquence d'enseignement de trois leçons sur la résolution d'équations que nous présentons ici a été mise au point par Radford (2002) et retravaillée par Radford, Miranda et Demers (2009) dans le but d'illustrer les caractéristiques d'une activité permettant un passage progressif à l'abstraction. Selon ces auteurs, abstraction et symbolisation sont intimement liées :

> « Les abstractions mathématiques partent d'une expérience sensorielle concrète […] Mais les abstractions mathématiques vont vite porter non pas sur des objets, mais sur des symboles les représentant » (p. 11).

1. Brève description de la séquence

La séquence, menée dans une classe de 2^{e} secondaire (grade 7 ; enfants de 13-14ans), s'organise au départ de problèmes de cartes de hockey dont certaines sont placées dans des enveloppes. La figure 3 présente un exemple de problèmes exploités.

Paulette et Richard

« La mère de Paulette et de Richard décide de donner un cadeau à ses enfants. Elle leur donne des enveloppes contenant des cartes de hockey. Pour que les enveloppes soient identiques, elle met le même nombre de cartes de hockey dans chaque enveloppe. Paulette avait déjà 7 cartes et sa mère lui donne 1 enveloppe. Richard avait déjà 2 cartes et sa mère lui donne 2 enveloppes. Maintenant, les deux enfants ont le même nombre de cartes de hockey.

Combien y a-t-il de cartes de hockey dans chaque enveloppe ?

Figure 3 *– Un exemple de problèmes exploités dans la séquence (Radford et al. 2009, p. 31)*

Tous les problèmes travaillés peuvent se modéliser sous la forme d'une équation du premier degré à une inconnue où l'inconnue apparaît dans les deux membres de l'équation.

Les élèves de 2^{e} année du secondaire pourraient résoudre ces problèmes par une démarche arithmétique, par tâtonnements par exemple, mais la séquence a pour objectif de les amener à entrer progressivement dans une démarche de résolution algébrique. Cette démarche algébrique se distingue des démarches arithmétiques notamment par la nécessité de s'appuyer sur une propriété de l'égalité, qui autorise à ajouter ou à soustraire un même nombre aux deux membres d'une égalité. Dans ses interventions, l'enseignant guide donc les élèves vers une appropriation progressive de cette démarche algébrique, au départ de manipulation d'objets concrets, puis de symboles de plus en plus conventionnels. Trois activités avec des énoncés similaires sont proposées aux élèves pour exploiter les problèmes. Le sens de l'activité dans le contexte d'apprentissage répond aux mêmes critères que ceux évoqués précédemment. L'enseignant définit des « activités » en relation avec les contenus mathématiques visés qui seront médiatisées par des signes et rendront nécessaires les actions et les symbolisations des élèves en relation avec les apprentissages visés.

Lors de la première activité, les élèves disposent de cartes et d'enveloppes pour résoudre la situation. Le discours des élèves est principalement oral : il s'agit de construire et d'exprimer oralement une démarche permettant de retrouver le nombre de cartes présentes dans une enveloppe. Sur le plan de la conceptualisation, l’objectif de cette première activité est de mettre en évidence la propriété de l’égalité sur laquelle s’appuie la démarche algébrique de résolution d’équations, ancrée ici dans la situation concrète travaillée : « on peut ajouter ou enlever le même nombre de cartes à chaque enfant, tout en conservant l’égalité du nombre de cartes que possède chaque enfant ». Un exemple de production est présenté dans la figure 4 (première colonne).

Dans la deuxième activité, les élèves ne disposent plus du matériel concret : il s’agit de trouver une manière de résoudre le problème sous forme uniquement écrite. Les élèves sont ici amenés à exprimer sous la forme d’un schéma une stratégie de résolution du problème traité. Un exemple de production d’un groupe d’élèves figure dans la colonne centrale de la figure 4.

Lors de la troisième activité, les élèves sont invités à utiliser le symbolisme algébrique pour résoudre les situations. Les discussions sont d’abord axées sur la manière de symboliser le problème avec des nombres, des lettres et des signes opératoires. Une fois l’équation élaborée, le discours portera sur la symbolisation algébrique de la démarche de résolution. La troisième colonne de la figure 4 présente une production élaborée dans une classe.

La suite de la séquence amènera les élèves à résoudre des équations sans contexte, données directement sous une forme symbolique.

Activité 1 **Problème « Paulette et Richard »**[2]	**Activité 2** **Problème « Mat et Matik »**[3]	**Activité 3** **Problème « Mario et Chantal »**[4]
« On enlève 2 cartes à chaque enfant. Ensuite on enlève une enveloppe à chaque enfant. Finalement, on voit qu’une enveloppe comporte 5 cartes. »		$7+1n=3+3n$ $7^{-3}+1n=3^{-3}+3n$ $4+1n=3n$ $4+1n^{-1n}=3n^{-1n}$ $4= 2n_{\div 2}$ $4\div 2=2n\div 2$ $2= 1n$

Figure 4 *- Illustration des symbolisations des problèmes (Radford et al. 2009, p. 35 et p.40).*

2. *Une vision sociale des apprentissages où les signes sont au cœur du débat mathématique.*

Le développement cognitif des élèves s’appuie, dans cette séquence, sur les interactions sociales, elles-mêmes instrumentées par des signes (objets concrets, dessins, symboles conventionnels et non conventionnels). Si les situations à résoudre sont finalement très semblables dans les trois activités (problèmes de partage de cartes), les signes utilisés pour les exploiter évoluent : au départ d’une résolution en actes, s’appuyant sur le langage courant et des objets concrets, les élèves sont amenés à enrichir ce discours oral par un système de

2 Cet exemple n’est pas repris tel quel de l’article de Radford et al. (2009) : il s’agit d’une reformulation d’un débat mené dans la classe lors de l’exploitation du problème « Paulette et Richard » (voir figure 8).

3 Ce problème, similaire au problème « Paulette et Richard », propose une répartition de cartes entre deux enfants : Mat et Matik. Il correspond à l’équation : x + 7 = 3x + 3. La symbolisation proposée a été élaborée progressivement lors d’échanges verbaux entre l’enseignante et les élèves (Radford et al. 2009, p. 35).

4 Ce problème est à nouveau très similaire au problème « Paulette et Richard ». Il correspond à l’équation 7 + n = 3 + 3n. La symbolisation du problème a à nouveau été réalisée de manière collective, à l’aide d’un débat entre l’enseignante et les élèves. (Radford et al. 2009, p. 40).

signes non conventionnels dans la deuxième activité avec un système composé de mots, de carrés, de rectangles et de barres pour modéliser les actions réalisées sur les deux membres de l'équation, puis conventionnels dans la troisième activité. Dans cette dernière activité, un signe particulier - une lettre - est donné au nombre inconnu du problème et aux opérations réalisées qui, dans les activités précédentes, consistaient en manipulations directes ou simulées d'objets.

Ce passage d'un système de signes à un autre a fait l'objet de nombreux débats au sein de la classe, débats orientés vers une meilleure compréhension du symbolisme algébrique et de la démarche algébrique de résolution des équations.

3. *Développement d'une chaîne de significations*

Nous proposons d'analyser la séquence présentée par Radford et al. (2009) à l'aide d'une chaîne de significations. La figure 5 ci-dessous présente cette analyse. Elle montre la manière dont les activités de symbolisations successives des problèmes soumis aux élèves permettent d'exprimer, à l'aide de trois types de signes, la démarche algébrique de résolution en passant d'une activité de manipulation de cartes et d'enveloppes à un système d'écritures symboliques.

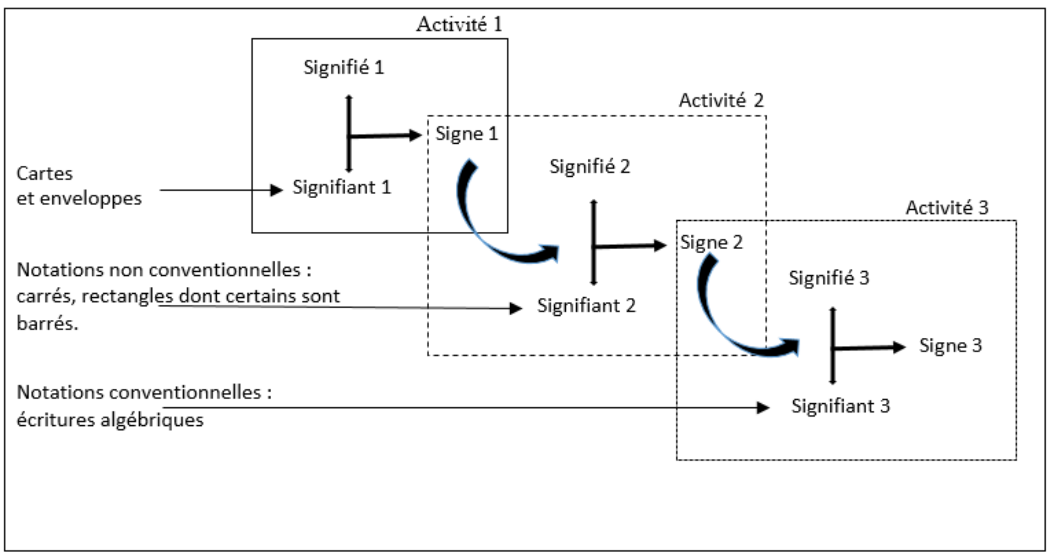


Figure 5 *– La chaîne de signification élaborée pour la séquence de Radford et al. (2009)*

Dans la figure 5, l'activité 1 confronte les élèves à du matériel concret (signe 1) : il s'agit de réaliser des opérations qui modifient le nombre de cartes de chaque enfant, mais pas le fait qu'ils en ont le même nombre de cartes[5]. Ces diverses manipulations sont orientées vers un même but : retrouver le nombre de cartes cachées dans une enveloppe. Les objets, ainsi que les opérations concrètes réalisées sur ces objets vont ensuite servir de point de départ à l'activité 2 : il s'agira cette fois de symboliser la situation à l'aide de notations non conventionnelles (signe 2), choisies par les élèves et qui rendent explicites les manipulations réalisées dans l'activité précédente. Au début de cette deuxième activité, le sens est

5 Illustrons cette idée au départ de la résolution du problème « Paulette et Richard » : selon l'exemple de résolution proposée dans la première colonne de la figure 3, on retire d'abord 2 cartes à chaque enfant : Paulette a donc des cartes en moins, de même que Richard. Toutefois, ce qui ne se modifie pas, c'est le fait qu'après cette suppression de cartes, les deux enfants conservent le même nombre de cartes (c'est-à-dire 2 de moins qu'au départ).

directement lié aux objets manipulés dans l'activité 1. Par la suite, au cours de l'activité 2, les élèves vont se détacher progressivement du contexte concret de la situation (partage de cartes entre deux enfants), pour se rapprocher d'un discours plus mathématique : on dispose au départ d'une répartition d'une même quantité de cartes en deux parts égales, certaines cartes étant cachées dans des enveloppes. Il s'agit d'effectuer des opérations de suppression (on barre des cartes ou des enveloppes des deux côtés de l'égalité) afin d'identifier, en fin de processus, le nombre de cartes correspondant à une enveloppe. Les élèves sont alors confrontés à l'activité 3 qui, bien qu'ancrée dans le même contexte, va les amener à modéliser le problème à l'aide de symbolisations algébriques conventionnelles (signe 3) et à revisiter, dans un contexte cette fois algébrique, les opérations de suppressions réalisées dans les deux activités précédentes, en vue de parvenir à résoudre une équation. Ainsi, le signifié évolue au fil de l'évolution des symbolisations. Au départ, les élèves parlent du nombre de cartes et du nombre d'enveloppes et des actions posées sur ce matériel, puis se détachant progressivement du contexte concret, ils focalisent leur attention sur les nombres de manière générale, en tant qu'objets mathématiques sur lesquels il s'agit d'opérer des opérations d'addition et de soustraction afin de retrouver un nombre inconnu. Le contexte concret est toujours présent en arrière fond mais ne se situe plus au cœur des réflexions. Il reste disponible dans la pensée des élèves si des problèmes de compréhension surviennent afin de rendre du sens aux différentes opérations formelles nécessaires pour résoudre le problème.

L'ancrage des trois activités dans un même contexte de partage équitable de cartes facilite la possibilité de revenir aux symbolisations réalisées à une étape antérieure pour donner sens à l'activité en cours.

La symbolisation présentée dans la figure 6 ci-dessous lors de l'activité 3 illustre la nécessité qu'ont ressentie certains élèves de proposer une écriture particulière pour identifier l'opération effectuée dans les deux membres de l'égalité. Cette opération est proposée en « exposant » pour la distinguer des autres opérations.

Le symbolisme garde trace de l'action de soustraction de 3 unités (-3) placée en exposant, effectuée dans chacun des deux membres de l'équation :

$$7 + 1n = 3 + 3n$$

$$7^{-3} + 1n = 3^{-3} + 3n$$

Figure 6 - *Symbolisation comportant des traces de transformations effectuées lors de la résolution d'une équation (Radford et al. 2009)*

Il semble encore important, à ce stade de l'apprentissage des élèves, de continuer à visualiser le fait que la résolution d'une équation implique des opérations (une soustraction dans l'exemple de la figure 6) qui doivent être effectuées simultanément dans les deux membres de l'équation pour conserver l'égalité de ceux-ci. Dans la suite des apprentissages, cette référence n'apparaîtra plus dans la symbolisation pour permettre de résoudre des équations de plus en plus complexes et abstraites.

V. EN GUISE DE CONCLUSION …

Les mathématiques sont bien connues pour présenter d'importantes difficultés aux élèves. La nature intangible et abstraite des objets mathématiques ne rend ceux-ci accessibles qu'à travers leurs diverses représentations. L'utilisation et la compréhension des symboles mathématiques jouent donc un rôle crucial dans les apprentissages. Or depuis longtemps, les recherches ont pointé de nombreux problèmes chez les élèves à ce sujet, notamment en algèbre où la compréhension des symboles tels que la lettre, le signe d'égalité, les expressions ou encore le signe « moins » représentent encore et toujours des obstacles régulièrement évoqués dans la littérature scientifique (Kieran 1992, 2007 ; Sfard & Linchevski 1994 ; Vlassis 2004, 2008, 2010).

Ces constats mettent plus que jamais en évidence la nécessité de développer des pratiques de classe centrées sur le symbolisme mathématique et envisageant la possibilité pour l'élève d'en construire le sens en étroite interaction avec les concepts. L'activité en algèbre qui vient d'être analysée, issue des approches socioculturelles, envisage une progression qui permet à l'élève d'ancrer les symbolisations formelles dans des activités utilisant dans un premier temps des notations informelles. Ces dernières évolueront selon une chaîne de significations, vers les symboles mathématiques usuels.

Cependant, nous tenons à souligner que ce type d'activités ne signifie pas que les symboles et les concepts émergeront « naturellement » des actions de symbolisations et des interactions sociales. Ainsi, le rôle de l'enseignant est déterminant et ne se limitera pas à planifier des activités adéquates et à faciliter les interactions entre élèves. Gravemeijer et al. (2000), et Radford (2008) partagent ce point de vue.

Les premiers (Gravemeijer et al. 2000) définissent en effet un rôle « proactif » pour l'enseignant. Cela signifie que celui-ci doit pouvoir tirer parti des contributions des élèves pour réaliser les finalités du curriculum. Il guide l'évolution de la classe tout en ne perdant pas de vue les objectifs mathématiques. Ce processus s'effectue à travers des négociations continuelles entre l'enseignant et les élèves, selon un processus de mathématisation progressive dans lequel le symbolisme et le raisonnement des élèves font l'objet d'une négociation explicite. Dans cette approche, l'enseignant est considéré comme le représentant de la culture mathématique et à ce titre, doit prendre part au discours de la classe, non seulement comme un guide lorsque le processus s'éloigne des intentions originales, mais aussi comme un véritable participant, suggérant des solutions possibles, des stratégies, des concepts, des questions et des objections. Il est en effet de la responsabilité de l'enseignant d'introduire dans le discours de nouveaux éléments mathématiques qui n'auraient jamais pu être découverts par les élèves eux-mêmes. Cela peut également se traduire par le fait de reformuler une idée ou de souligner davantage certaines contributions d'élèves indiquant par là que l'enseignant valorise certaines solutions plutôt que d'autres.

Pour Radford (2008), l'émergence, au cours des interactions enseignant-élèves, des connaissances mathématiques formelles, comme par exemple la méthode algébrique de résolution d'équations, représente plus qu'un échange de point de vue. Ce type de relation présente une profonde valeur épistémique. Il s'agit en effet d'un processus complexe et dialectique dans lequel le processus d'apprentissage est étroitement imbriqué dans celui d'enseignement. Pour Radford (2008), de la même manière que pour Gravemeijer et al. (2000), cela implique des interventions de l'enseignant comme reformuler, noter, interpréter, souligner, suggérer de nouveaux éléments, etc. Ces interventions permettent de « Parler les mathématiques » (Bednarz 2005) en utilisant divers types de signes, comme les représentations, les symboles conventionnels, les notations informelles, le langage verbal, les dessins, les gestes, les objets, etc.

En autorisant les élèves à mobiliser une large palette d'outils sémiotiques structurés en chaînes de significations, ces approches leur permettent d'attribuer du sens aux objets mathématiques mais aussi d'en élargir leur compréhension dans des contextes d'utilisation variés, favorisant ainsi la transition vers un usage formel détaché des environnements initiaux. En aucun cas, il ne s'agit de cantonner les élèves dans leurs démarches et symbolisations informelles. Au contraire, il s'agit bien d'utiliser celles-ci comme levier dans un processus progressif de conceptualisation-symbolisation en étroite interaction, semblable à celui qui s'est imposé dans l'histoire de la notation algébrique évoquée au début de ce chapitre.

REFERENCES

Bednarz N. (2005) Parler les mathématiques. *Vie pédagogique* 136, 20-23.

Booth L. R. (1984) *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor, UK: NFER-Nelson.

Gravemeijer K. (2002) Preamble: from models to modeling. In Gravemeijer K., Lehrer R., van Oers B., Verschaffel L. (Eds.) *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 7-22). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer K., Stephan M. (2002) Emergent models as an instructional design heuristic. In Gravemeijer K., Lehrer R., van Oers B., Verschaffel L. (Eds.) *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 145-169). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer K., Cobb P., Bowers J., Whitenack J. (2000) Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education. In Cobb P., Yackel E., McClain K. (Eds.) *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design* (pp. 225-274). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Harper E. (1987) Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics* 18(1), 75-90.

Ifrah G. (1994) *Histoire universelle des chiffres: l'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul.* Paris : Robert Laffont.

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra in the middle school through college levels. In Lester F. K. Jr (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). USA: National council of teachers of mathematics.

Kieran C. (1992) The learning and the teaching of school algebra. In Grouws D. (Ed.) *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Mac Millan.

Kieran C. (1981) Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics* 12(3), 317-326.

Küchemann D. (1978) Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in school* 7(4), 23-26.

Presmeg N. (2006) Semiotics and the "connections" standard: Significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 61(1-2), 163-182.

Radford L., Miranda I., Demers S. (2009) *Processus d'abstraction en mathématiques.* Ottawa: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Radford L. (2008) Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education* 40(1), 83-96.

Radford L. (2002) Algebra as tekhne. Artefacts, symbols and equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* 1(1), 31-56.

Radford L. (1998) On signs and representations, a cultural account. *Scientia Paedagogica Experimentalis* 1, 277-302.

Radford L. (1997) On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics* 17(1), 26-33

Radford L. (1992) Diophante et l'algèbre pré-symbolique. *Bulletin de l'Association des Mathématiques du Québec* 6(1), 73-80.

Sfard A., Linchevski L. (1994) The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* 26, 191-228.

Theis L. (2005) L'apprentissage du signe = : un obstacle cognitif important. *For the Learning of Mathematics* 25(3), 7-12.

Vlassis J. (2010) *Sens et symboles en mathématiques : étude de l'utilisation du signe" moins" dans les réductions polynomiales et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue.* Berne : Peter Lang.

Vlassis J. (2008) The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology* 21(4), 555-570.

Vlassis J. (2004) *Making sense of the minus sign or becoming flexible in 'negativity'*. *Learning and Instruction* 14(5), 469-484.

Vygostsky L. (1997) *Pensée et langage.* Paris : La Dispute.