

Introduction aux situations aléatoires et à leur modélisation

Cileda COUTINHO

Laboratoire Leibniz- IMAG - GRENOBLE

I . Présentation

L'objectif de cet atelier est de présenter un scénario pour un premier contact avec le hasard dans un contexte scolaire dès le Collège. Les activités sont organisées en deux séances : lors de la première, les participants seront invités à travailler sur une démarche de modélisation. L'objectif est d'aboutir à la présentation du modèle d'urne de Bernoulli : observation, description et analyse d'expériences équivalentes. Lors de la deuxième séance, en utilisant le logiciel Cabri II, l'activité portera sur l'exploitation du modèle d'urne dans le cadre de probabilités géométriques.

II . Le jeu de Franc-Carreau

Les activités proposées par cet atelier ont pour but de modéliser le jeu de Franc-Carreau par le modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli.



Ce jeu a été étudié pour la première fois en 1733 par un naturaliste et mathématicien français, George-Louis Leclerc, comte de Buffon. Il consiste à jeter un écu au-dessus d'un carrelage. Les joueurs parient sur la position finale : tombera-t-elle, cette pièce de monnaie, entièrement sur un seul carreau (position " franc-carreau "), sur un joint entre deux carreaux, ou encore sur deux joints, ... ?

On considère qu'on a obtenu un succès dans ce jeu si la pièce est à franc-carreau.

III . Première séance : hors environnement informatique

III.1. Préalables théoriques et terminologiques.

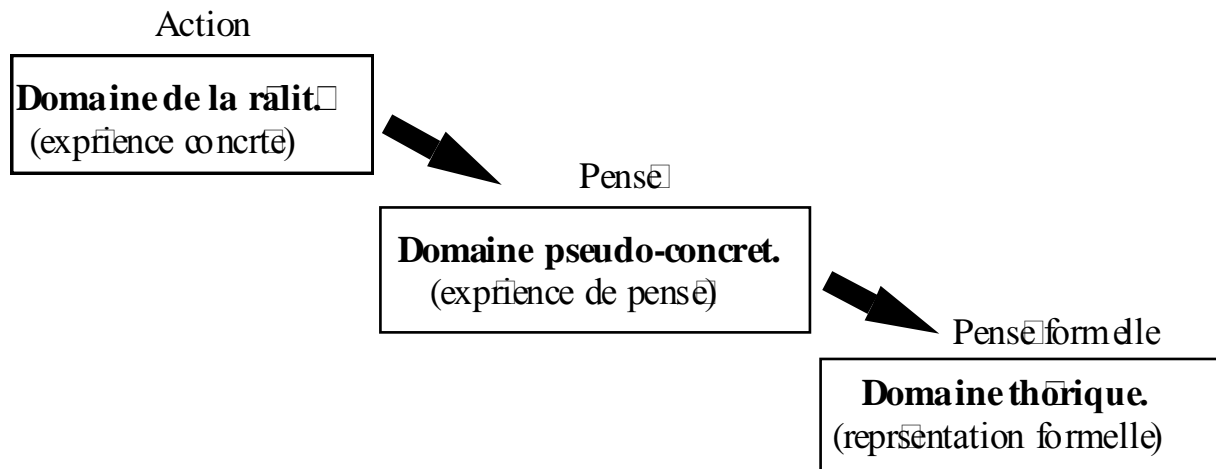
Nous présentons, d'un point de vue didactique, quelques notions probabilistes de base, afin de permettre aux élèves de s'engager dans un travail sur l'aléatoire. Nous rajoutons ainsi à l'idée de hasard et à la notion de probabilité les notions de " domaine pseudo-concret ", de " modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli " et finalement, la notion de " pré-probabilité ". L'enjeu de l'introduction de ces notions est de rendre la démarche de modélisation de quelques phénomènes aléatoires simples accessible aux élèves dès la classe de troisième.

a) Domaine Pseudo-Concret.

Le domaine pseudo-concret est le domaine de transition entre le domaine de la réalité et le domaine théorique, lorsque nous sommes engagé dans un processus de modélisation. Le domaine pseudo-concret est celui dans lequel on utilise les noms des objets de la réalité pour désigner des objets abstraits, idéalisés, théoriques. Sa fonction didactique est d'induire implicitement le modèle théorique en jeu, même si ce modèle n'est pas encore accessible avec les connaissances des élèves au niveau du collège.

“ On peut présenter un modèle par une analogie, en y introduisant des objets idéalisés de la réalité. Cela veut dire que dans un vocabulaire courant, les objets du modèle sont doués de propriétés caractéristiques bien définies. Nous parlerons alors de **modèles pseudo-concrets**. ” (Henry, 1997, p. 79).

Illustrons le changement de domaines, nécessaire lors d'un processus de modélisation, par le schéma ci-dessous :



Ainsi, dans un tel processus de modélisation, l'observation et l'analyse d'une *série d'expériences reproductibles au moyen d'un même protocole expérimental* permettant de *dégager les invariants pour leur modélisation*, conduisent à idéaliser ces expériences et à aboutir à leur description dans le domaine pseudo-concret : **l'expérience aléatoire**.

b) Modèle pseudo-concret d'urne de Bernoulli.

Le modèle d'urne de Bernoulli modélise les situations aléatoires de la réalité qui présentent la configuration d'une expérience de Bernoulli : une expérience aléatoire qui résume les issues possibles par deux événements, “ succès ” ou “ échec ”.

Une urne de Bernoulli est alors une urne qui contient des boules supposées parfaites, identiques, qui ont toutes la même chance d'être tirées dans un prélèvement *au hasard* d'une de ces boules. Dans cette urne, les boules sont de deux couleurs différentes, blanches et noires, et les blanches sont en proportion “*p*”. Une urne de Bernoulli nous servira pour représenter abstraitement une expérience aléatoire à deux issues possibles : succès (boule blanche) ou échec (boule noire).

Le caractère pseudo-concret d'une urne de Bernoulli est mis en évidence par le processus de construction de ce modèle : les élèves peuvent se construire un modèle d'urne de Bernoulli à partir

de l'abstraction d'un pot réel rempli de perles colorées, et dans lequel ils peuvent faire des tirages concrets.

c) Pré-probabilité.

La pré-probabilité est une connaissance-en-acte de l'élève qui associe les "chances" d'obtenir un succès lors de la réalisation d'une expérience aléatoire (expérience de pensée) au rapport entre le nombre de boules blanches et le nombre total de boules dans l'urne de Bernoulli qui modélise cette expérience. La distinction entre la notion de pré-probabilité et celle de proportion dans l'urne de Bernoulli est due à la prise en compte de l'intervention du hasard.

On passe alors, dans le processus de modélisation, d'une perception intuitive des chances d'obtenir un certain résultat d'une expérience aléatoire concrète (domaine de la réalité), à l'évaluation de la pré-probabilité de l'issue représentative lors de la réalisation en pensée de l'expérience aléatoire (domaine pseudo-concret).

Cette association entre la notion de pré-probabilité et la proportion de boules blanches dans une urne de Bernoulli peut être facilitée par la réalisation (effective ou idéalisée) d'un grand nombre de répétitions de l'expérience. C'est l'approche expérimentale de cette notion qui, comme pour celle de probabilité, va se situer dans deux appréhensions : celle des "chances de tirer une boule blanche" et celle d'indiquer approximativement la fréquence de succès en n expérimentations.

III.2. Les activités

Activité 1.

Après distribution du matériel aux participants (une feuille quadrillée A3 et une pièce de monnaie), nous leur proposons de jouer quelques coups. Les questions posées sont :

- a) Quelle liste de consignes (protocole expérimental) pouvez-vous donner pour qu'une tierce personne puisse reproduire ce jeu ?
- b) Quelles sont les stratégies possibles (et disponibles) pour que les élèves en Collège puissent estimer les chances d'obtenir un succès lorsque l'on joue ce jeu ?

Activité 2.

Distribution du matériel aux participants : un sac rempli de perles bleues et rouges, dans une proportion pré-établie, non explicite pour les participants, mais disponible par le comptage des perles dans le sac. Après cette distribution, nous proposons l'expérience suivante : " tirez *au hasard* une perle dans le sac et notez sa couleur ". On considère qu'on a obtenu un succès si la perle obtenue est rouge. Les questions posées sont :

- a) Quelle liste de consignes (protocole expérimental) pouvez-vous donner pour qu'une tierce personne puisse reproduire ce jeu ?
- b) Quelles sont les stratégies possibles (et disponibles) pour que les élèves en Collège puissent estimer les chances d'obtenir un succès lorsque l'on joue ce jeu ?

Activité 3.

Nous proposons alors une réflexion à propos des deux expériences présentées (et réalisées) lors des activités précédentes, en posant les questions :

- a) Quelles sont les différences et similitudes entre ces deux jeux ?
- b) Peut-on utiliser le pot pour simuler le jeu de Franc-Carreau ? Justifiez votre réponse.

Après présentation des notions de “ domaine pseudo-concret ”, “ modèle d’urne de Bernoulli ” et “ pré-probabilité ”, nous proposons la question :

“ Est-il possible de représenter le jeu de Franc-Carreau par une urne de Bernoulli ? Quelle composition doit avoir cette urne ? ”

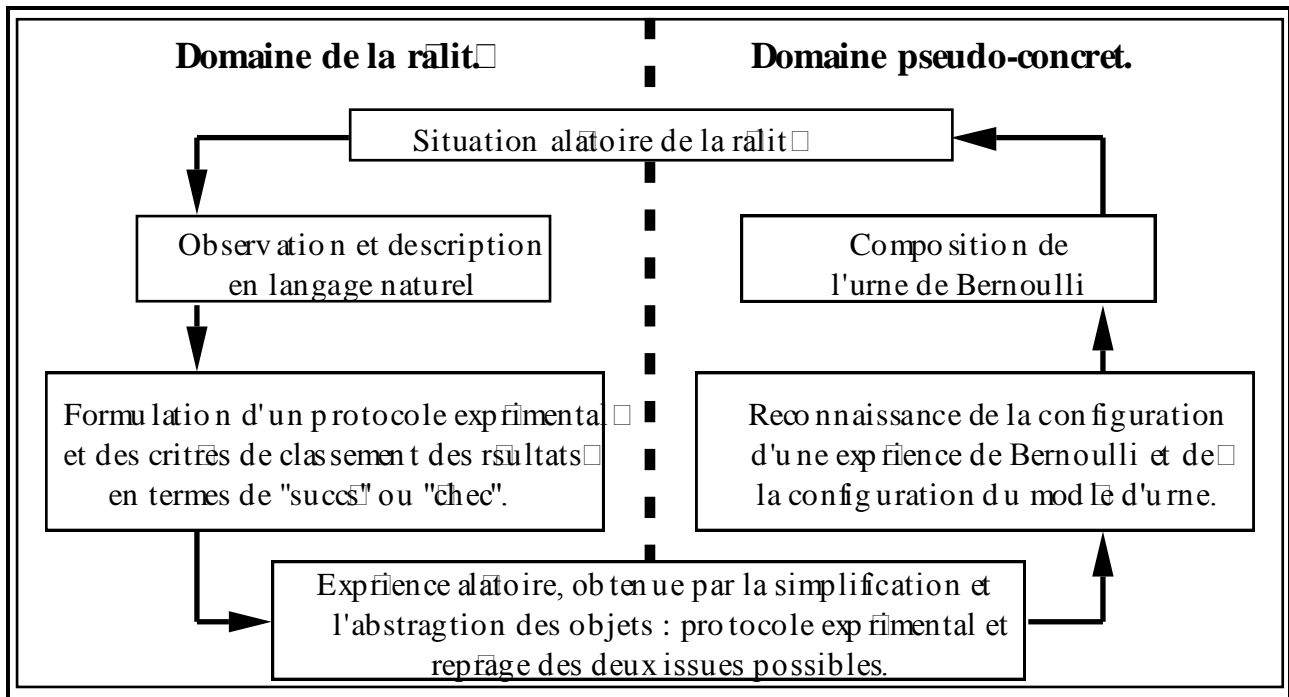
Conclusion de la séance.

Les activités menées conduisent à une réflexion sur le premier contact des élèves avec des situations aléatoires dans un contexte scolaire. Cette réflexion a été guidée par les questions :

- a) Quelles connaissances les élèves mobilisent-ils lors de la résolution des trois activités que nous vous avons proposée ?
- b) Quelles sont les stratégies que les élèves peuvent utiliser pour comparer le jeu de Franc-Carreau avec l’expérience de référence (le tirage au hasard dans le pot de perles) et ensuite, décider l’existence ou pas d’une seule urne de Bernoulli pour représenter, à la fois, les deux expérimentations ?

Le débat doit conduire à une explicitation du sens du terme “ simulation ”, ainsi que celui du terme “ un grand nombre de fois ” lorsque nous parlons de la répétition d’une expérience aléatoire dont le but est la modélisation.

Les activités ci-dessus sont liées par la proposition d’un processus de modélisation, illustré par le schéma ci-dessous.



Ces réflexions seront reprises lors de la deuxième séance de l'atelier, celle-ci proposée dans un environnement informatique de géométrie dynamique : le micromonde Cabri.

IV . Deuxième séance : en environnement informatique

IV.1. Préalables théoriques et terminologiques.

La deuxième séance de cet atelier commence par la présentation de quelques notions nécessaires à la mise en place de l'environnement informatique dans lequel seront proposées les activités qui suivent.

a) Pixel : **à des fins didactiques**, un pixel □, composant minimal d'une image électronique, sera présenté aux élèves comme un petit carré à l'écran qui, du point de vue géométrique, apparaît comme la représentation d'un point P, élément de ce carré. *Les pixels tapissent ainsi l'écran en un carrelage extrêmement fin et, en conséquence, discrétisent la surface de n'importe quel domaine déterminé sur cet écran.*

b) Pixel au hasard : le logiciel Cabri-géomètre II permet de calculer les coordonnées d'un pixel □, à l'intérieur d'une surface à l'écran. Cela suppose savoir caractériser, au sens du logiciel, cette surface en question. Pour bien comprendre la démarche d'utilisation de l'environnement Cabri et de son

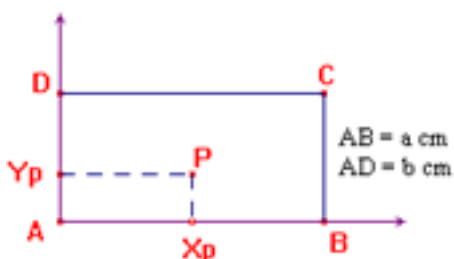
générateur de hasard ⁽¹⁾, nous partons de la figure plus simple pour cet usage : un rectangle ABCD, que nous positionnons à l'écran conformément la figure ci-contre (base horizontale). Nous pouvons mesurer les longueurs de ses côtés [AB] et [AD], en obtenant les dimensions “ a cm ” et “ b cm ”, respectivement.



La possibilité de choisir un pixel au hasard dans un cabri-dessin existe par l'usage de la fonction “RAND”, accessible au moyen de l'outil “calculatrice”. Pour bien nous assurer que nous obtenons un et un seul pixel à chaque tirage, il nous faut introduire quelques précisions. Tout d'abord, il nous faut regarder les conséquences didactiques de l'interprétation de pixel que nous avons retenu pour présenter aux élèves, ainsi que son fonctionnement dans l'environnement Cabri.

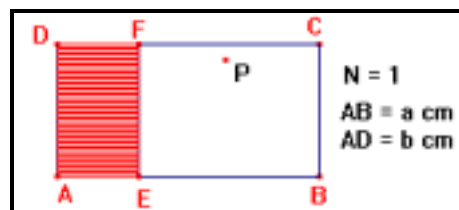
La fenêtre de dessin active dans Cabri II comporte, par défaut, 30 pixels par centimètre. L'écran est ainsi tapissé par un carrelage de 30 pixels x 30 pixels par centimètre carré. Chacun de ces petits carrés élémentaires est bien identifié par un couple de coordonnées entières, si l'on prend le côté d'un pixel pour unité. Ces coordonnées seront associés à un système d'axes, d'origine A et les points B et D définissant, respectivement, les axes des abscisses et des ordonnées.

Ainsi, si “ a ” et “ b ” sont exprimés en cm, ce rectangle comprend approximativement $30a \times 30b$ pixels, en prenant les entiers les plus proches de $30a$ et de $30b$, selon l'arrondi choisi. Choisir un pixel *au hasard* dans ABCD signifie alors, dans cette configuration, que la probabilité d'obtenir un pixel \square donné est *équirépartie* et vaut quasiment .



Cela suppose que le traitement subit par le couple de nombres aléatoires X_p et Y_p , donné par la fonction “rand” pour construire P, conserve l'équiprobabilité des pixels qui tapissent la figure. C'est en effet réalisé du fait de l'indépendance des variables uniformes X_p et Y_p .

c) Urne à Pixels : soit le rectangle ABCD, soit un point P de ce rectangle représentant un pixel \square créé de façon pseudo-aléatoire² dans ABCD, et soit un segment [EF], perpendiculaire au segment [AB] tel que le point E soit un point libre mobile sur [AB], cf. la figure ci-contre.



⁽¹⁾ Nous le considérons comme tel, même si l'on peut contester l'existence d'un processus purement aléatoire issu d'un calcul effectué par un logiciel.

² Pour calculer les coordonnées d'un pixel choisit *au hasard* dans un rectangle ABCD nous pouvons utiliser soit une macro-construction, soit une formule activée par l'outil “calculatrice” dans Cabri.

Choisissons un pixel au hasard dans le rectangle ABCD. Nous considérons comme succès l'événement “ *le pixel est dans le rectangle AEFD* ”. **Nous appellerons le dispositif ainsi constitué une “ Urne à Pixels ”.**

Cette urne à pixels peut être considérée comme une représentation à l'écran d'une urne de Bernoulli modélisant une expérience de Bernoulli donnée. *Le dispositif “ urne à pixels ” est l'outil de simulation de l'expérience de référence “ tirage au hasard d'une perle dans un pot rempli de perles rouges et bleues ”.*

Regardons alors le lien entre la définition laplacienne de la probabilité d'obtenir un succès lors de la réalisation d'une expérience aléatoire et la définition de probabilité géométrique comme le rapport des aires, par le biais de la discrétisation de surfaces faite pour la mise en fonctionnement de l'urne à pixels.

D'après Laplace, dans le deuxième principe qu'il propose dans son œuvre *Essai Philosophique sur la probabilité*, la probabilité d'un événement issu d'une expérience aléatoire est exprimée par le rapport entre le nombre de cas favorables à cet événement et celui de tous les cas possibles. Cette probabilité est ainsi une mesure qui peut être exprimée de manière raccourcie par la fraction :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de tous les cas possibles}}$$

La discrétisation des surfaces des rectangles ABCD et AEFD renvoie alors à la notion primitive de mesure d'aire : le comptage des pixels qui remplissent chacune de ces figures. Nous pouvons alors associer les “ cas favorables à l'événement ” aux pixels qui tapissent AEFD, ainsi que “ tous les cas possibles ” aux pixels qui tapissent ABCD.

Cette association nous permet de reformuler la fraction ci-dessus, qui exprime la probabilité d'obtenir un succès :

$$P(\text{succès}) = \frac{\text{nombre de pixels dans AEFD}}{\text{nombre de pixels dans ABCD}}$$

Finalement, en renvoyant encore une fois à la notion primitive d'aire, nous remarquons que le nombre de pixels dans AEFD mesure l'aire de ce rectangle, ainsi que le nombre de pixels dans ABCD mesure son aire. L'expression pour le calcul de la probabilité d'obtenir un succès pour l'expérience aléatoire “ choisir *au hasard* un pixel dans le rectangle ABCD ” devient alors l'expression de la probabilité géométrique :

$$P(\text{succès}) = \frac{\text{aire du rectangle AEFD}}{\text{aire du rectangle ABCD}}$$

Nous utiliserons alors cette probabilité géométrique associée à une urne à pixels comme un moyen pour aborder des problèmes de détermination et d'estimation d'une probabilité.

Sur le plan didactique, cette discrétisation de la surface de chacun des rectangles AEFD et ABCD par l'usage des pixels, donne un sens au calcul que les élèves doivent effectuer pour résoudre le problème : “ *déterminer la probabilité d'obtenir un pixel dans le rectangle AEFD* ”. Cet usage peut

être généralisée à n'importe quelle figure géométrique dans laquelle nous pouvons bien définir un sous-domaine " succès " : il suffit de bien déterminer le nombre de pixels qui recouvrent chacune de ces figures. Autrement dit, il suffit de connaître les aires de chacune entre eux. Dans ce cas, les élèves peuvent toujours associer l'aire au nombre de pixels, et ensuite, associer le nombre de pixels au nombre de boules qui remplissent l'urne de Bernoulli modélisant l'expérience aléatoire en jeu. Ce faisant, ils associent " en acte " le rapport des aires à la pré-probabilité.

IV.2. Les activités

Activité 1 : l'urne à Pixels.

(familiarisation avec le logiciel et avec le dispositif " urne à pixels ".)

En ouvrant la figure " choix d'un pixel.fig " dans Cabri, les participants auront accès aux consignes suivantes :

- Construisez un rectangle ABCD. Ensuite, construisez un segment [EF] perpendiculaire au segment [AB] tel que le point E appartienne au segment [AB] et le point F appartienne au segment [CD]. Activez l'outil " distance et longueur " pour mesurer [AB], [AD] et [AE].
- Manipulez les dimensions du rectangle, ainsi que la position du point E sur le segment [AB]. Quelles conclusions pourriez-vous en tirer à propos du rapport entre les aires des rectangles ABCD et AEFD et le rapport entre le nombre de pixels qui recouvrent ces deux rectangles ?

Remarque : une fenêtre active dans Cabri II comporte, par défaut, 30 pixels par centimètre.

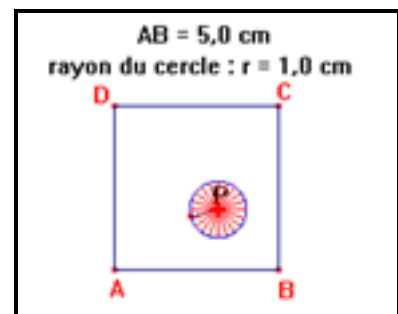
Activité 2 : le jeu de Franc-Carreau – une représentation informatique.

(manipulation des paramètres : les dimensions du cercle et du carré représentés à l'écran).

En ouvrant la figure " franc-carreau-1 ", les participants auront accès à la figure ci-contre. Les dimensions du carré et du cercle sont les mêmes que les carrés dessinés sur la feuille A3 et de la pièce de monnaie, utilisées lors de la séance précédente.

Les consignes pour la manipulation de la figure sont présentées ci-dessous :

- Déplacez le point B pour modifier les dimensions du carré ABCD.



Revenez à la version précédente (article " version précédente " dans le menu " Fichier ").

- Saisissez le cercle pour modifier ses dimensions. Revenez à la version précédente de la figure.
- Activez l'outil " trace " dans le menu Cabri et sélectionnez le point P (il doit clignoter). Ensuite, activez l'outil " pointeur " et déplacez le point P. Revenez à la version précédente de la figure.

La question posée aux participants : " **Est-il possible de représenter ce jeu par une urne de Bernoulli ? Si vous répondez oui, quelle composition doit avoir cette urne ? Si votre réponse est non, justifiez votre réponse.** "

Activité 3 : le jeu de Franc-Carreau – une représentation informatique.

(simulation informatique du jeu représenté à l'écran).

En ouvrant la figure “ franc-carreau-2 ”, les participants auront accès à l’écran ci-dessous :

compteur N : 1 succès (franc-carreau) : 1
échec : cellule vide

		succès (franc-carreau):	
1	1	1	
2			
3			

Nous présentons aux participants le “ mode d’emploi ” du compteur (le nombre N, à l’écran), qui permet la reproduction de l’expérience un très grand nombre de fois dans un intervalle de temps assez réduit et en obtenant des résultats indépendants. Cela est dû au fait que son animation relance la fonction “ rand ” et en conséquence, elle relance les calculs des coordonnées du pixel □ à chaque incrémentation de la valeur de N.

Ensuite, nous fournissons aux participants les consignes pour cette manipulation :

- sélectionnez la table (il suffit de “ cliquer ” sur la table : elle doit clignoter).
- activez l’outil “ animation ” dans le menu.
- désignez le nombre N (le pointeur indique “ ce nombre ”) et tirez le ressort qui apparaît vers le bas de l’écran.
- Après un moment de manipulation du logiciel selon les consignes proposées aux activités 2 et 3, la question suivante est posée : “ **Est-il possible de représenter ce jeu par une urne de Bernoulli ? Si vous répondez oui, quelle composition doit avoir cette urne ? Si votre réponse est non, donnez une justification.** ”

Activité 4 : le jeu du triangle.

(confrontation de stratégies : calcul géométrique du rapport des aires ou démarche expérimentale par l’animation du compteur N).

En ouvrant la figure “ triangle.fig ” dans Cabri, les participants auront l’écran ci-contre.

AB = 4,5 cm
côté du triangle : 1,4 cm

succès (franc-carreau) : 1
échec : cellule vide
compteur N : 1

		franc-carreau :	
1	1	1	
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

La question posée : “ **dans ce jeu, on remplace le cercle par un triangle équilatéral. Quel jeu choisiriez-vous pour avoir plus de chances de faire “ franc-carreau ” : celui-ci ou celui avec le cercle, présenté à l’activité précédente ? Justifiez votre réponse.** ”

Nous faisons remarquer aux participants que le positionnement du triangle est aléatoire dans le carré ABCD, ainsi que sa rotation autour du centre P. Les questions qui servent à nourrir le débat sont alors :

- a) Quelles stratégies possibles les élèves peuvent-ils utiliser pour composer l'urne de Bernoulli demandée dans chacune des activités ?
- b) Quelles sont les connaissances requises pour que les élèves puissent s'engager dans le processus de modélisation induit par les activités présentées ?

Conclusion de la séance.

Les activités qui constituent cette séance en environnement informatique servent à introduire la discretisation de surfaces par l'usage des pixels comme unité d'aire. Cette interprétation didactique de pixel que nous présentons fait le lien entre la probabilité géométrique, conçue comme un rapport d'aires (mesure continue), et la probabilité définie au sens de Laplace, " rapport entre le nombre de cas favorables à l'événement et le nombre de tous les cas possibles " (mesure discrète). Ainsi, l'expression de mesure d'aires en nombre de pixels qui recouvrent chaque figure permet de représenter une situation de probabilité continue par le modèle discret d'urne de Bernoulli.

Nous présentons ainsi aux participants une association en acte faite par les élèves : les pixels qui composent une figure à l'écran et les boules qui remplissent une urne de Bernoulli. La mobilisation de la pré-probabilité est alors possible au moyen de deux stratégies, rendues disponibles par Cabri : le calcul géométrique des aires (probabilité géométrique) ou l'approche expérimentale. Le logiciel permet aux élèves de contrôler les résultats obtenus lors qu'ils utilisent une de ces stratégies par l'usage de la deuxième stratégie. Les élèves ne sont pas alors des spectateurs passifs devant une activité de simulation informatique, mais des acteurs qui peuvent manipuler eux-mêmes les paramètres de cette simulation.

V. Conclusion.

Cet atelier a présenté des activités, accessibles aux élèves en Collège, qui servent à introduire les situations aléatoires par une double démarche expérimentale et de modélisation. Nous souhaitons montrer que les connaissances et les savoir-faire nécessaires à leur mise en fonctionnement sont des connaissances déjà acquises lors que nous travaillons avec des élèves en classe de troisième : proportionnalité, fréquences, et le travail avec toutes ses écritures (fractions, pourcentages, etc.).

Le travail dans le domaine pseudo-concret est alors une étape fondamentale dans le processus de modélisation que nous voulons installer : les élèves doivent distinguer entre une observation faite dans le domaine de la réalité et sa représentation, qui appartient au domaine théorique. Du fait que ces élèves n'ont pas encore les connaissances probabilistes nécessaires pour exprimer ces représentations théoriques, l'utilisation des modèles pseudo-concrets devient leur seul moyen d'explicitation de la représentation construite.

Ainsi, dans un premier temps, l'urne de Bernoulli se présente comme le modèle pseudo-concret qui permet d'exprimer le processus de modélisation, tout en restant dans ce domaine pseudo-concret. En plus, le travail d'abstraction nécessaire pour la construction de ce modèle n'est pas

problématique pour les élèves, car ils peuvent le faire à partir de l'abstraction du pot de perles qu'ils ont manipulé lors des premières activités (dans cet atelier, l'activité 2 de la première séance).

L'utilisation d'un environnement informatique de géométrie dynamique tel que Cabri II permet aux élèves d'agir sur les paramètres de la simulation du jeu de Franc-Carreau, contrairement à la plupart des logiciels ou applets de simulation probabiliste. Dans ces logiciels, il ne reste à la charge de l'élève que l'action d'appuyer sur le bouton " Start ". Dans le micromonde Cabri, les élèves peuvent prendre des décisions sur les stratégies adéquates à la résolution du problème posé, décisions fondées sur des connaissances théoriques et non sur une appréhension perceptive d'une image à l'écran.

Bibliographie

Badizé M., Jacques A., Petitpas M. et Pichard J.-F. (1996). *Le jeu de franc-carreau : une activité probabiliste au Collège*. Rouen : IREM de Rouen.

Henry M. (1997). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. In Chaput & Henry (coords.) *Enseigner les probabilités au Lycée*, pp. 77-84. Reims : IREM de Reims.

Laplace P.-S. (1814). *Essai Philosophique sur les Probabilités*. (5^e édition en 1825 ; réimprimée en 1985). Paris : Christian Bourgois éditeur.