UNE REFLEXION DIDACTIQUE SUR L'ERREUR DANS LE CONTEXTE DE L'EVOLUTION ACTUELLE DE L'ENSEIGNEMENT EN ALGERIE

Claude Comiti[1], Abdelah Djelouah[2]

RESUME

Le travail essentiel du Groupe de Spécialité Disciplinaire (GSD) Algérien de mathématiques consiste en l'élaboration de nouveaux programmes. Mais il ne saurait se limiter à fixer la nouvelle matière mathématique à enseigner, et doit également aboutir à la proposition de manières de l'enseigner. Il est de plus chargé d'actions de formation des inspecteurs et des enseignants. C'est dans ce contexte que le GSD a été conduit à effectuer un travail d'observation de l'enseignement actuel dans les classes et à s'interroger notamment sur l'erreur, son rôle, son interprétation et sa gestion. Nous développerons deux exemples de travail didactique sur l'erreur en classe de 1AM[3]. Dans le cas de la symétrie orthogonale, nous montrerons les régulations en cours d'apprentissage que permet une telle analyse. Dans le cas de l'ordre sur les décimaux, nous montrerons comment une analyse didactique des erreurs des élèves permet de proposer des améliorations de l'organisation mathématique et de l'organisation didactique.

QUELQUES CONSIDÉRATION PRÉLIMINAIRES

Nous résumons ci-dessous le point de vue sur l'erreur, classique en didactique des mathématiques, qui sert de base au travail faisant l'objet de cette communication.

L'élève n'est donc pas un récepteur passif de la connaissance : il agit sur elle. Il la reconstruit, rejetant ou modifiant les conceptions qu'il a déjà formées et dont les situations peuvent manifester le fonctionnement. *L'erreur* n'est pas analysée comme une faute mais comme le symptôme d'une connaissance antérieure et de sa remise en question : toute connaissance est, à tout niveau, locale, on ne peut connaître son domaine de validité tant que l'on en n'a pas établi les limites.

Les manifestations des connaissances construites par les élèves (comportements) et celles de leurs relations aux objets d'enseignement et aux savoirs de référence, sont des indicateurs du bon ou du mauvais fonctionnement du système didactique. Le problème de savoir établir une relation valide entre les comportements des élèves face à une tâche et leurs connaissances est donc fondamental.

Un moyen d'accès privilégié aux connaissances des élèves est leur *observation* lors de la *résolution de tâches* qui donnent du *sens* aux contenus en jeu. Comprendre l'agencement des

[1] IUFM de Grenoble et équipe DDM du laboratoire Leibniz
[2] Inspecteur de l'enseignement moyen (IEEF), membre du GSD de mathématiques
[3] La 1AM est, depuis la rentrée 2003, le nom de la première année d'enseignement moyen (ex 7AF).

descripteurs relevés, actions et productions symboliques, exige que l'on s'intéresse aux *signifiés* [4] véhiculés par ces actions et ces productions, aux *types de tâches* à traiter et donc aux *contenus mathématiques* en jeu. C'est à partir de ces analyses que l'on pourra interpréter les réponses des élèves à partir de l'application de «règles d'action» , ou de «techniques» ayant un fonctionnement cohérent et produisant des résultats exacts dans certaines situations.

DEUX EXEMPLES D'EXPLOITATION DIDACTIQUE DE L'ERREUR

Exemple 1 : L' analyse d'erreurs, aide à la régulation en cours d'apprentissage

Dans l'enseignement algérien, l'enseignement est essentiellement magistral et « collectif » : c'est l'enseignant qui parle et quand il pose une question, c'est la classe qui est interrogée. Les Directives Pédagogiques pour l'Enseignement des Mathématiques dans l'enseignement secondaire[5] préconisent trois moments de l'étude : entrée par « une courte révision des notions précédemment acquises et ayant un lien avec le thème du jour », suivie par la « présentation de la leçon », puis par les « applications ». L'évaluation est restreinte aux contrôles mensuels ou semestriels et aux examens d'entrée dans le cycle supérieur. L'erreur doit avant tout être évitée : aucun moyen n'est donné à l'enseignant de s'en saisir comme outil de compréhension des difficultés d'apprentissage de l'élève et comme moyen de contrôle des organisations mathématique et didactique mises en place.

Le document d'accompagnement du nouveau programme de 1AM (entré en vigueur à la rentrée de septembre 2003) précise que la réforme en cours s'accompagne d'un « *changement de point de vue sur l'évaluation* » et met l'accent sur l'importance de « *l'évaluation en cours d'apprentissage, par observation du comportement et des productions de l'élève, pendant le déroulement des activités. Cette évaluation, qui accompagne les apprentissages, est fondamentale car elle permet à l'enseignant de réguler le processus d'enseignement/apprentissage.* ».

Mais il ne suffit pas d'affirmations de ce type pour faire évoluer la pratique enseignante ! C'est dans le but d'élaborer des outils de formation de formateurs que quatre membres du GSD ont souhaité expérimenter une action de formation auprès d'enseignants chevronnés[6] de leurs circonscriptions[7]. Cette action a démarré par la réalisation d'entretiens ou le recueil de questionnaires concernant les pratiques actuelles de récolte d'informations au quotidien

---

[4] C'est à dire aux contenus, propriétés, invariants en jeu dans ces actions et productions.
[5] 1994, paragraphe « Comment gérer la classe »
[6] En tout une centaine d'enseignants ont été concernés, tous titulaires, souvent depuis plus de 7 ans.
[7] Deux dans la willaya d'Alger, une dans celle de Tizi-Ouzou, une dans celle de Msila.

sur la compréhension des élèves et les moyens utilisés pour s'assurer de la fiabilité de leurs pratiques dans les domaines en cours d'apprentissage.

La synthèse des réponses obtenues montre que les enseignants déduisent essentiellement la « bonne » compréhension des élèves de leur degré de participation, celle-ci se traduisant pour eux par le fait qu'ils «répondent juste » aux questions posées ou posent eux-même des questions, et « répondent juste » aux exercices d'application qui terminent la séance. Quant aux difficultés de compréhension, des enseignants disent les percevoir « en regardant les élèves dans les yeux, je le vois, je le sens ». D'autres précisent qu'en fin de cours, après les exercices d'application, ils demandent « Avez-vous compris ? » ou posent des questions « en demandant l'attention des élèves », sur ce qu'ils ont retenu. Très minoritaires sont ceux qui parlent du passage dans les rangs pour observer les productions individuelles des élèves (quand ils le mentionnent, c'est toujours en géométrie, pour « voir s'ils utilisent correctement les instruments ») ou encore de la correction des cahiers des élèves (pour préciser qu'ils n'ont pas le temps de « s'en occuper »). Ils contrôlent la fiabilité des pratiques mises en place par les élèves par leurs réponses orales aux exercices d'application de fin de séance, et par les devoirs de maison. S'ils constatent que les élèves n'ont pas compris, ils font des rappels ou reprennent leurs explications.

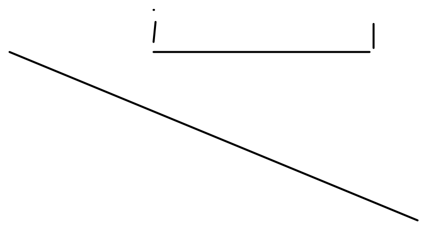
A la suite de cette première étape de recueil des pratiques existantes, il s'agissait d'essayer de construire des outils susceptibles d'éclairer comment au quotidien, l'enseignant peut recueillir des indices pertinents sur le fonctionnement de l'élève face à un type de tâche donné, non seulement pour évaluer le degré de compréhension des élèves, mais surtout pour pouvoir réguler l'enseignement de manière efficace.

Le cas de la symétrie axiale en 1AM.

Pour prendre en compte le fait que beaucoup d'enseignants disaient, lors des entretiens, se déplacer dans la classe pour vérifier la bonne utilisation des instruments géométriques par leurs élèves, nous avons choisi de travailler sur l'enseignement de la symétrie centrale en 1° année de l'enseignement moyen. Sans attendre la fin des séances consacrées à l'enseignement de la symétrie axiale, comment l'enseignant peut-il évaluer les apprentissages en cours des élèves afin de réguler la suite de son enseignement ?

L'exercice suivant a été proposé aux élèves en cours de séance afin de déterminer les techniques que ces derniers avaient à leur disposition, pour effectuer leurs constructions, à ce moment de l'enseignement où ils étaient censés savoir construire les symétriques de figures simples. Cette partie de la séance a été conduite, en présence de l'enseignant, par l'un des membres du GSD.

Question : Construire le symétrique du segment par rapport à la droite ( ). Laisser les traces de la construction.

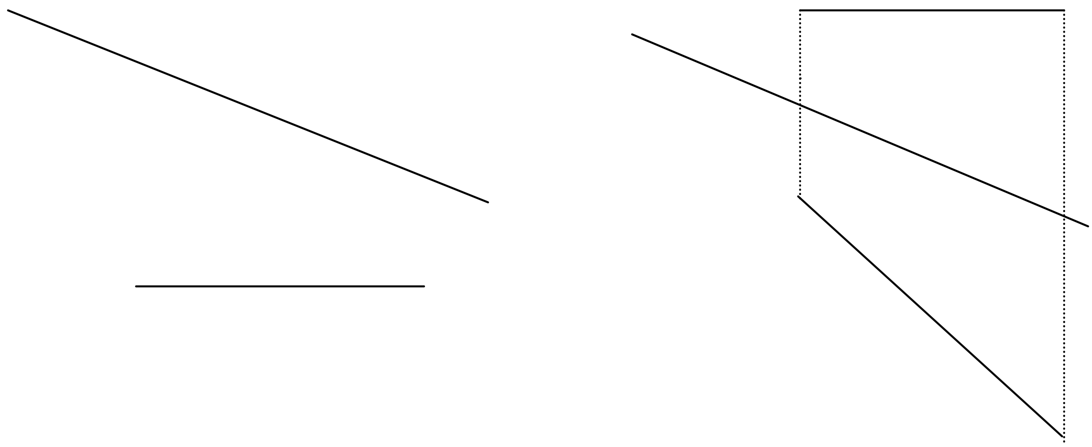


Le travail sur papier blanc oblige l'utilisation de constructions avec instruments. L'axe oblique permet de savoir si l'élève qui réussit précédemment à construire dans son cahier (à carreaux) le symétrique d'un segment dans le cas d'un axe horizontal le fait en utilisant une technique correcte (perpendiculaire à l'axe et report de longueurs égales) ou non (ligne de rappel verticale et report de longueurs égales), techniques donnant toutes les deux le même résultat dans ce cas.

Déroulement

L'expérimentateur et l'enseignant passent dans les rangs pour observer les différentes procédures de construction ainsi que les éventuelles erreurs commises. Il n'interviennent pas auprès des élèves. Ils observent que :

1- très peu d'élèves utilisent le compas ;
2- certains élèves qui utilisent l'équerre construisent d'abord les projections orthogonales des points avant de passer aux symétriques (par prolongement) ;
3- la grande majorité des élèves n'utilisent pas l'équerre (même quand ils en ont une) mais le bord de leur règle comme équerre ;
4- seulement une minorité d'élèves (8) produisent un segment symétrique acceptable ;
5- certains élèves (6) construisent des lignes de rappel verticales, le segment image étant obtenu par déplacement vertical
6- d'autres (5) construisent des lignes de rappel verticales avec report correct des longueurs .



7- Enfin, pour un grand nombre (16), la construction semble ne prendre en compte qu'un critère, l'égalité des longueurs (l'orthogonalité n'est pas respectée bien que l'angle droit soit pourtant parfois « marqué ») ;

Au bout de 10 min, le Professeur demande quelle est la tâche proposée, puis envoie au tableau un élève ayant utilisé les lignes de rappel verticales et le report des longueurs

Es- c'est faux.

P.- Pourquoi ?

E1 - C'est ni symétrique ni isométrique

E2- L' « autre côté » n'est pas symétrique

E3- Il n'y a pas d'angle droit

P.envoie E3 au tableau et lui demande de corriger (sans effacer la réponse précédente).

L'élève construit, avec l'équerre et la règle graduée, le symétrique d'une des extrémités du segment.

P.- Comment doit-on faire pour construire le symétrique d'un point ?

Il conduit les élèves à reformuler la technique en deux étapes :

1) il faut construire une droite perpendiculaire à l'axe, et donc un angle droit ;
2) il faut reporter, sur cette perpendiculaire des longueurs égales

P.- On continue la construction

Es - on doit chercher le symétrique de l'autre extrémité du segment

E3 termine, la construction du symétrique du segment.

E4- : la figure obtenue n'est pas symétrique du segment donné.

Le P. envoie E4 au tableau et lui demande d'expliquer pourquoi.

L'élève mesure les longueurs du segment et de son image (qui diffèrent effectivement de quelques centimètres) et dit :

E4- la « figure » n'est pas isométrique

P- Comment peut-on expliquer l'erreur ?

Les élèves pensent que c'est à cause de l'approximation dans l'utilisation des instruments.

P en profite pour rappeler l'intérêt de l'utilisation du compas et demande à E3 de rectifier sa construction en utilisant le compas.

L'exercice et la régulation ont duré 20 minutes. La discussion qui a suivi avec l'enseignant a mis l'accent sur l'intérêt qu'il a trouvé à pouvoir identifier les erreurs des élèves au cours de leurs recherches et de leurs réalisations, et sur la nouveauté consistant, lors de la « remédiation », à faire interagir les élèves (plutôt que de leur répéter la règle soi-même), en les amenant à justifier les techniques mises en œuvre.

Il a été décidé qu'un document d'accompagnement serait élaboré à partir de cette séance.

Exemple 2 – Une exploitation didactique de l'erreur conduisant à une proposition d'amélioration de l'organisation mathématique et didactique de l'enseignement sur les décimaux (en 1AM)

Lors du travail sur le chapitre 1- Nombres entiers, nombres décimaux: écriture, ordre, calculs, les membres du GSD et les experts français avaient des avis divergents sur les connaissances acquises par les élèves sur les décimaux en fin d'école primaire. Il a été alors décidé de proposer à des élèves entrant dans l'enseignement moyen quelques items adaptés de travaux antérieurs conduits en didactique en France. Les enseignants d'un collège de la banlieue d'Alger ont accepté de faire passer ce test en 7AF, puis, à la vue des résultats obtenus l'ont proposé aux élèves de 8AF. La stupéfaction des enseignants et des membres du GSD devant les réponses obtenues nous a conduits à un travail montrant, sur cet exemple, comment les outils de didactique permettaient non seulement d'analyser les erreurs commises, mais aussi de modifier l'organisation mathématique de l'enseignement de manière à la rendre plus efficace pour les élèves.

Les questions[8] posées et les résultats obtenus

1) *Souligne, à chaque fois, le plus petit des 3 nombres encadrés*

3,7 7,1 5,1	5,21 5,15 5,12	7,3 7,28 7,401	6,04 6,4 6,44

Aucune difficulté pour souligner 3,7 et 5,12, dans les deux autres cas :

Nombres soulignés	Effectifs en 7AF	% en 7AF	Effectifs en 8 AF	% en 8 AF
7,28- 6,04	8	10%	16	26%
7,3 - 6,04	33	40%	32	52%
7,3 – 6,4	33	40%	12	20%
Non réponse	8	10%	1	1,6%
Total	82		61	

[8] questions évidemment écrites en arabe, avec la symbolique habituelle dans l'enseignement algérien.

2) Existe-t-il un nombre compris entre 5,23 et 5,24 ? si oui, écris le
Seuls 2 élèves en 7AF et 5 en 8AF répondent « il en existe un » ou « il en existe plein » ; pour tous les autres : « il n'en existe aucun »
3) Ordonne les nombres ci-dessous du plus petit au plus grand
11,98 ; 12,4 ; 11,898 ; 11,09 ; 12,04 ; 12,1 ; 12,113 ; 11,8 ; 12,001
Sériation exacte : 8, soit 10% en 7AF ; 21, soit 34% en 8AF.

L' analyse
Au delà des pourcentages de réponses erronées, l'analyse des erreurs montre que la technique la plus utilisée semble être la suivante , déjà pointée, en 1982, par Léonard et Grisvard.
t **:** *on compare les nombres avant la virgule : le nombre le plus petit est celui qui a le nombre avant la virgule le plus petit ; si les nombres avant la virgule sont égaux, le nombre le plus petit est celui qui a le plus petit nombre (sous-entendu « entier ») après la virgule.*
Tout se passe comme si l'élève considérait un nombre décimal comme un « nombre composé de 2 entiers séparés par une virgule ». Ce qui explique également qu'il n'existe pour lui aucun nombre entre 5,23 et 5,24, puisqu'il n'existe pas d'entier entre 23 et 24.
Les études de τ montrent qu'elle est valide quand les décimaux à comparer sont écrits avec le même nombre de décimales, qu'elle est cohérente avec les opérations et l'ordre sur les entiers et qu'elle donne des réponses justes dans 91% des cas quand il s'agit de comparer des nombres à au plus 3 décimales, ce qui montre son efficacité. Il n'est donc pas étonnant que les élèves l'utilisent sans pour autant se tromper suffisamment souvent pour la remettre en question et que les enseignants non outillés didactiquement ne repèrent pas son fonctionnement chez ces derniers, d'autant que la majorité des exercices proposés concernent souvent le rangement de deux ou au maximum trois décimaux de même partie entière et appartenant à un même Di.
Quelles techniques pourraient-elles être explicitées et quels éléments technico-technologiques pourrait-on introduire pour améliorer la fiabilité des pratiques des élèves concernant l'ordre sur les décimaux ?
Les élèves savent ranger des nombres d'un même Di. La première technique peut donc consister à se ramener au même Di.
on compare les parties entières : le nombre le plus grand est celui qui a la partie entière la plus grande ; si les parties entières sont égales, on s'intéresse alors aux parties décimales : si nécessaire, on complète la partie décimale qui a le moins de chiffres avec des zéros de façon à avoir des parties décimales avec le même nombre de chiffres ; le nombre le plus grand est alors celui qui a la partie décimale la plus grande.
Cette technique présente certains avantages :
- elle est en accord avec la technique de comparaison mise en place dans la vie courante pour les mesures des grandeurs ainsi qu'avec **t** permettant ainsi, partiellement sans doute, de la contrôler et de diminuer sensiblement le risque d'erreurs qu'elle suscite.
- elle est « facilement » justifiable . Ainsi pour comparer 5,6 et 5,82. On peut écrire que :
$5{,}82 = 5 + \frac{82}{100}$ et $5{,}6 = 5 + \frac{6}{10} = 5 + \frac{60}{100}$
et conclure que $\frac{60}{100} < \frac{82}{100}$ puisque 60 < 82, et donc 5,6 < 5,82.
On se ramène ainsi à la comparaison des entiers, tout décimal pouvant s'écrire sous la forme $d= m\ 10^{-n}$ avec n entier.
L'intérêt pratique de **t** réside pour l'essentiel dans ce qu'elle utilise le fait que la comparaison des entiers est une tâche routinière : pour comparer 5,65 et 5, 73, il faut comparer 65 et 73 ce

que l'on sait faire sans travail apparent supplémentaire. Mais dès que le nombre de chiffres de la partie décimale s'accroît, qu'il devient supérieur à quatre, il faut mettre en œuvre le travail de comparaison des entiers. Ce qui justifie alors l'introduction d'une deuxième technique, celle usuellement utilisée par le mathématicien, la technique **t'** de comparaison lexicographique des nombres décimaux.

Ce travail a été présenté lors d'un stage de formation réunissant, en novembre 2002, 42 inspecteurs de l'enseignement moyen et secondaire. Il a conduit les participants du stage à la recherche d'autres cas d'erreurs pouvant s'expliquer par un processus similaire, afin d epouvair le sutiliser lors des séances de formation d'enseignants dans leurs circonscriptions.