L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Prolégomènes « épistémographiques » à l'étude des transitions dans l'enseignement des mathématiques

Jean-Philippe Drouhard, *IUFM et IREM de Nice, UMR « ADEF », Marseille, France*

Résumé

Nous nous proposons d'aborder la question des transitions par l'identification (différentielle) des savoirs, autrement dit, ce que les élèves sont supposés savoir, en mathématiques, à la fin de l'enseignement secondaire et au début de l'université. L'analyse des savoirs de référence sera faite en termes d'un modèle théorique de l'organisation des connaissances appelé « épistémographie », consistant à organiser des savoirs en cinq composantes, réparties en trois ordres. Lors de la présentation à EMF 2006, cette organisation a été illustrée par un certain nombre d'exemples issus des présentations au groupe 6.

Introduction

Dans le document de présentation du groupe 6, il est dit que :

> *L'enseignement universitaire, de par son formalisme, est d'emblée en opposition avec les approches adoptées au secondaire. Selon de nombreux travaux de didactique, un tel formalisme tendrait à déstabiliser les étudiants du premier cycle universitaire et serait à la source de nombreux échecs.*

Nous n'imaginons pas qu'il y ait grand monde qui puisse réfuter le constat que l'enseignement universitaire soit formaliste. Mais pour autant cela ne signifie pas que cette notion de formalisme soit claire et encore moins opératoire. Qu'entend-on exactement par « enseignement formaliste » ? Un type de discours ? Un modus operandi ? C'est-à-dire, une manière de faire les mathématiques ? Ou bien une manière de les exposer ? Ou encore, une manière dont les professeurs exigent que leurs étudiants les exposent ? Ou tout à la fois ? Dans tous les cas, pour pouvoir étudier scientifiquement la question de l'effet de ce formalisme sur la réussite des étudiants, on a intérêt à savoir de quoi on parle et surtout quels sont les composants et les caractéristiques dudit formalisme. Une telle analyse permettra alors d'aborder la question suivante du document de présentation :

> *Comment évolue la conception des mathématiques que se font les étudiants des mathématiques pendant leurs deux premières années à l'université ?*

Là aussi, en effet, on a intérêt à se poser la question : « la conception de quel aspect des mathématiques ? ». S'il s'agit par exemple de leur aspect formel (ou formalisé, ou formaliste) on en revient aux interrogations précédentes. Plus loin, dans le même document, les questions suivantes sont posées :

- Comment sont vécus les sauts conceptuels relatifs à certains concepts mathématiques clefs (fonction, limite, nombre, matrice, équation) chez les nouveaux venus à l'université.

- Quelles sont les difficultés et les obstacles engendrés par le symbolisme mathématique ou plus généralement par le formalisme chez ces étudiants ?

Ces deux questions nous paraissent bien entrer dans le champ d'un programme de recherche que l'auteur de la présente communication mène depuis maintenant plusieurs années intitulé « épistémographie » (Drouhard et Bagni, 2006), dans la continuité des travaux antérieurs sur les ordres de connaissances (Sackur *et al*., 2005 ; Assude et Drouhard ; 2005 ; Drouhard et Panizza, à paraître ; Panizza et Drouhard, 2003) menés au sein de l'équipe CESAME. Les notions de « concepts mathématiques clefs » et de « symbolisme mathématique » sont (moyennant reconceptualisation) au centre des préoccupations de l'épistémographie. Ce néologisme (« épistémographie ») a été choisi pour signifier qu'il s'agit d'étudier l'organisation des savoirs (et non la nature ou l'histoire des savoirs, comme en épistémologie).

Nous souhaitons montrer l'intérêt de poser les questions de transition entre secondaire et supérieur en mathématiques en termes « épistémographiques ». Cette analyse permettra alors d'aborder, entre autres, les questions de formation des enseignants : là comme ailleurs, l'illusion de la transparence est un obstacle à une bonne perception de la part des enseignants des difficultés des apprenants, illusion renforcée par le fait que le savoir enseigné à l'université paraît plus proche de ce que Chevallard appelle le savoir savant. L'épistémographie, mettant en relief ce qui est effectivement en jeu dans l'enseignement au-delà des évidences, s'attaque directement à ce type d'illusion.

Notre démarche

Objet d'étude

Nous nous proposons d'aborder la question des transitions par l'identification (différentielle) des savoirs, autrement dit, ce que les élèves sont supposés savoir et savoir produire, en mathématiques, à la fin de l'enseignement secondaire et au début de l'université (ce qui rejoint la question posée par Denise Grenier (2006) ici même : « comment transmettre les savoirs et savoir-faire liés à une activité mathématique proche de celle du chercheur ? » L'analyse des savoirs de référence sera faite en termes d'épistémographie (autrement dit en analysant l'organisation des savoirs en différents types et ordres). Une épistémographie est par définition une description de l'organisation des épistèmes ; de manière un peu moins obscure, l'épistémographie a pour objet les descriptions de l'organisation (typologie, structurations), des savoirs correspondant à un domaine (scientifique) donné. Précisons que ce n'est pas une théorie didactique et qu'elle n'est pas limitée aux mathématiques (mais est peu pertinente en dehors des sciences). En outre l'épistémographie ne prend pas en compte les onnaissances transversales (langagières…), les connaissances scolaires (de la composante non mathématique du contrat didactique) ou encore les connaissances (de l'élève) sur (son propre) apprentissage. Mais elle peut apporter à l'étude des transitions de passer d'une étude quelque peu « artisanale » des savoirs en jeu, à une démarche systématique.

Les composantes de l'activité mathématique

Pour faire des mathématiques, il faut pouvoir opérer (dans un certain but) sur des objets mathématiques, accessibles au travers de représentations sémiotiques, avec des instruments, en suivant des principes. Nous proposons une typologie des savoirs nécessaires pour mener une activité mathématique, répartis en trois ordres :

Savoirs d'ordre I

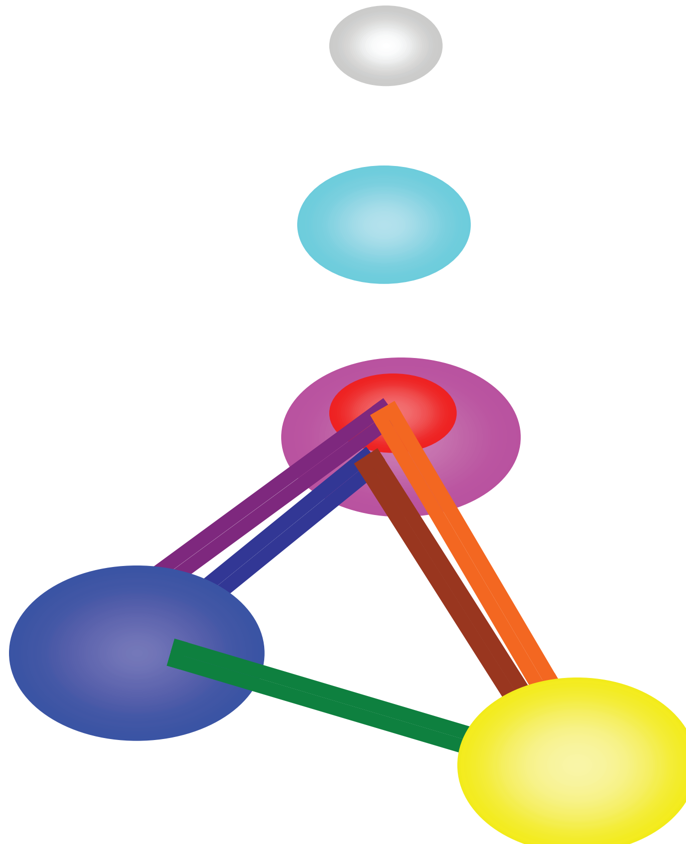
- Savoirs notionnels (des objets et de leurs relations)
- Savoirs sémiolinguistiques (des systèmes sémiotiques de représentation)
- Savoirs instrumentaux (des instruments de travail)

Savoirs d'ordre II

- Les principes du jeu mathématique

Savoirs d'ordre III

- savoirs permettant l'identification du caractère mathématique de l'activité, ou du domaine des mathématiques concerné.



Ordre I – Savoirs notionnels

La composante notionnelle de l'épistémographie mathématique regroupe les savoirs portant sur les objets mathématiques et leurs relations (c'est-à-dire les propriétés, ou les énoncés des états de fait mathématiques), munis de leur valeur épistémique théorique, ainsi que les métasavoirs correspondants (« méta » au sens strict, c'est-à-dire savoirs sur ces savoirs-là). Concernant la valeur épistémique, on ne peut mener une activité mathématique sans connaître à la fois les relations entre les objets et le caractère certain ou seulement hypothétique de ces relations.

Ordre I – Savoirs sémiolinguistiques

Nous n'avons pas d'accès direct, sensoriel par exemple, aux objets mathématiques, qui sont abstraits par nature. Nous n'y avons accès qu'au travers de signes (des chiffres, des lettres, des tableaux, des tracés de segments, de graphes de fonctions…) qui les représentent. Nous paraphraserons la formule fameuse de Duval (1995, p. 5)[1] comme suit : Il n'y a pas de noésis possible sans savoirs sémiolinguistiques.

1 « Si on appelle sémiosis l'appréhension ou la production d'une représentation sémiotique, et noésis les actes cognitifs comme l'appréhension conceptuelle d'un objet, la discrimination d'une différence ou la compréhension d'une inférence […] l'analyse des problèmes d'apprentissage des mathématiques et des obstacles auxquels les élèves se heurtent régulièrement conduit à reconnaître […] une loi fondamentale du fonctionnement cognitif de la pensée : il n'y a pas de noésis sans sémiosis, c'est-à-dire sans le recours à une pluralité au moins potentielle de systèmes sémiotiques, recours qui implique leur coordination pour le sujet lui-même. »

La composante sémiolinguistique de l'épistémographie regroupe précisément ces savoirs sémiotiques (et leurs métasavoirs). Il importe d'avoir sans cesse présent à l'esprit trois distinctions fondamentales.

La distinction signe/objet

La première distinction, que nous venons de mettre en œuvre plus haut par le fait même d'introduire une composante sémiolinguistique, est celle qui consiste à distinguer l'objet représenté (par exemple le nombre deux) du signe (le chiffre « 2 ») qui le représente. Cette distinction (voir Duval, 1998a, 1998b), apparaît même dans le vocabulaire des mathématiciens (dans le cas de la distinction nombre/chiffre par exemple). Ce qui est parfois plus difficile, c'est de percevoir à la fois sa portée, universelle – toute représentation, écrite, dessinée, voire mentale, est un signe qui se réfère (de manière plus ou moins complexe) à un objet – et son importance didactique, primordiale[2]. Le discours mathématique fonctionne constamment sous le régime de la métonymie sémiotique (prendre le signe pour l'objet) comme dans l'expression « soit n un entier ».

La distinction signe/réalisation matérielle

Un signe n'est et ne doit en aucun cas être assimilé à sa réalisation matérielle. « x » n'est un signe qu'en tant qu'il s'oppose, par exemple à « y » et, en tant qu'ensemble de traits différentiels, ce n'est pas un objet matériel, contrairement à sa réalisation matérielle (la surface encrée ou bien les pixels qui forment le « x » noir sur fond blanc)[3].

La distinction entre systèmes sémiotiques analogiques et digitaux

Une première distinction sépare les signes qui sont soit présents soit absents de ceux qui, insérés dans un système, sont définis par un ensemble de différences (avec les autres signes). Ces différenciations caractéristiques sont ses traits pertinents (ou traits caractéristiques) (Ducrot et Schaeffer, 1995, article « Signe »). Nous proposons de raffiner cette différence en introduisant une nouvelle caractérisation qui nous sera fort utile pour les systèmes sémiolinguistiques mathématiques : analogiques/digitaux.

Les systèmes de représentation sémiotiques digitaux sont caractérisés par le fait que les traits s'y opposent de manière discrète. « a^b » s'oppose à « ab » par le fait que le « ^{b} » en exposant est plus petit et situé plus haut (que le « a »), contrairement au « b » en facteur. Mais « a^b » ne s'oppose pas à « a^b » par exemple[4] : la signification du décalage vertical est discrète[5], elle ne varie pas continûment

2 Indiquons rapidement que son importance ne se limite pas aux cas bien connus de la différence entre chiffre et nombre des dizaines, ou dessin et figure par exemple, mais qu'elle est au cœur de bon nombre des difficultés que les élèves vont rencontrer dans l'apprentissage de l'algèbre, difficultés qui, si elles ne sont pas surmontées, vont enrayer tout ce qui a trait au sens dans les écritures mathématiques ensuite, autrement dit la plupart des apprentissages mathématiques ultérieurs.

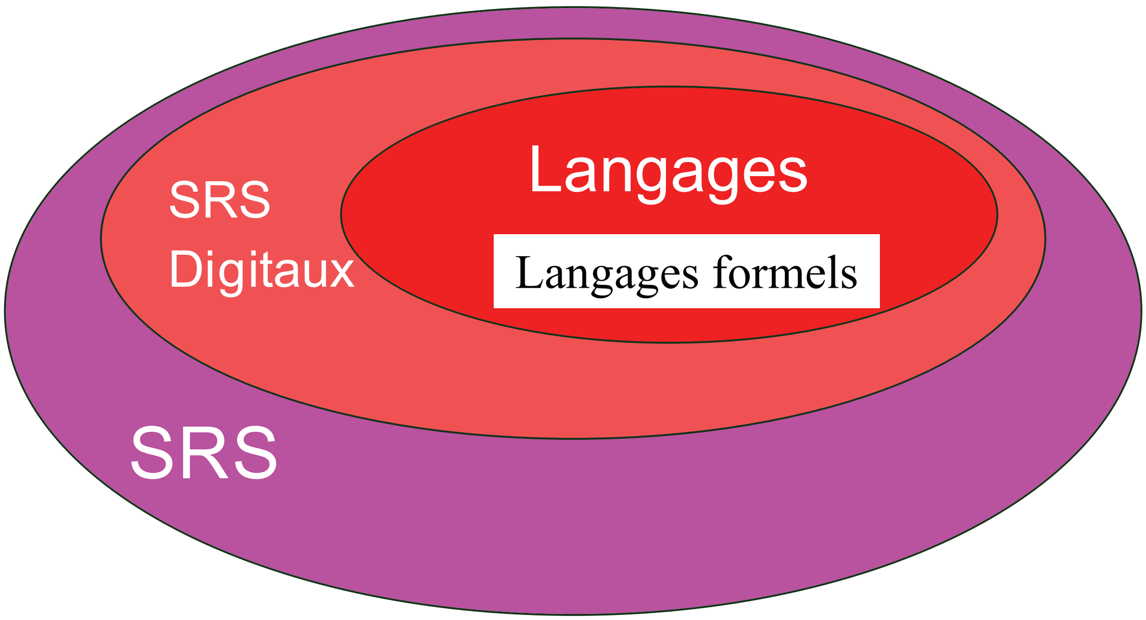
3 Sur ce point nous divergeons totalement de l'analyse proposée par M. Bosch (1994, 1999, dans un cadre théorique certes différent) en termes de distinction ostensif / non ostensif.

4 Le second exposant est situé légèrement moins haut que le premier.

5 Ce qui ne signifie pas qu'elle est binaire puisqu'il y a des exposants d'exposant.

avec ledit décalage. Typiquement, les écritures symboliques sont des systèmes de représentation sémiotiques digitaux – il n'y a pas de transition entre secondaire et université par rapport à ces systèmes qui ont été installés bien plus tôt dans les études. Une caractéristique importante (et essentielle pour les mathématiques) des systèmes de représentation sémiotiques digitaux est la possibilité d'y opérer des réécritures. Il faut noter qu'il n'y a pas que les écritures symboliques (qui sont un langage au sens strict) sur lesquels on peut opérer des réécritures : les tracés de graphes[6] sont également des systèmes digitaux, où les réécritures, quoi que peu connues, sont possibles[7].

Par contre, les dessins de figures géométriques sont analogiques dans le sens où par exemple, la signification (en termes de longueur) du tracé d'un segment varie continûment en fonction de la longueur de ce tracé – il n'en irait d'ailleurs pas de même avec un schéma.



Un système de représentations sémiotique analogique peut contenir des éléments digitaux (comme l'épaisseur des traits dans un dessin de figure géométrique) mais la réciproque n'est pas vraie. La langue naturelle est soit analogique soit digitale suivant le niveau d'analyse linguistique auquel on se situe : les graphèmes, ou les phonèmes s'opposent de manière discrète, mais au niveau du texte et plus encore du discours l'aspect digital et la possibilité d'opérer des réécritures s'estompent fortement.

Les Langages formels sont des langages qui sont des systèmes de représentations sémiotiques digitaux et donc des systèmes de représentations sémiotiques. La linguistique étudie les langages, la sémiotique les systèmes de représentations sémiotique et la logique étudie les rapports entre mathématiques et langages.

6 Au sens de la théorie des graphes.

7 Voir à ce sujet les travaux de Clerici, Universitat Politecnica de Barcelona.

Ordre I – Savoirs instrumentaux

Les savoirs instrumentaux sont les savoirs d'ordre pratique et leurs métasavoirs. Il s'agit des savoirs directement liés au caractère téléologique (c'est-à-dire orientées vers la réalisation d'un but) des activités où ces savoirs sont mis en œuvre.

Ce caractère téléologique de l'activité permet de différencier les savoirs instrumentaux des deux autres types de savoirs que nous venons de voir. Par exemple, savoir[8] que x(x+1) est un produit de facteurs (et identifier lesquels) est nécessaire pour résoudre l'équation x(x+1) = 0. Mais ce savoir est indépendant des buts poursuivis. On connaît ou on ne connaît pas la structure d'une expression algébrique, quoi qu'on ait l'intention de faire avec cette expression. Les savoirs instrumentaux, au contraire, sont directement liés aux activités téléologiques : il ne sont pas liés à un but particulier mais au fait que les activités qui les nécessitent ont un but. Les savoirs instrumentaux sont les savoirs des instruments et de leur « mode d'emploi ».

Il faut distinguer les savoirs instrumentaux suivant la nature des instruments ; en particulier on devra distinguer les instruments matériels (qui opèrent, ou prennent des informations, directement sur la réalisation matérielle des signes, par exemple une règle graduée ou un compas), des instruments sémiotiques (qui opèrent, ou prennent des informations, sur la structure des signes, par exemple la factorisation) et des méta-instruments (qui opèrent, ou prennent des informations, sur les instruments, par exemple les stratégies de résolution de problème).

La prise en compte de la nature analogique ou digitale des systèmes de représentation sémiotique peut permettre de repenser l'opposition calcul/raisonnement (dans la mesure où les calculs sont plutôt du côté de la réécriture, donc du digital). C'est particulièrement important pour les transitions, avec des raisonnements qui s'algorithmisent peu à peu à la faveur de l'introduction d'un système symbolique adéquat (pensons au calcul de probabilités) ou inversement avec des calculs (tels que le « calculus » analytique de dérivation et d'intégration) qui cèdent progressivement la place à des raisonnements où l'étudiant doit « couper les ε en 4 » – transition souvent vécue douloureusement.

Savoirs sur les relations entre les trois composantes de l'ordre I

Si on peut considérer que les trois types de savoirs d'ordre I portent respectivement sur les objets, les représentations et les instruments de l'activité mathématique (que l'on pourrait représenter comme les sommets d'un triangle), alors nous devons encore considérer savoirs correspondant aux côtés de ce triangle, autrement dit :

· Les savoirs qui mettent en relation les objets avec leurs représentations (ce qui correspond à la distinction signe/objet signalée plus haut).

· Les savoirs qui mettent en relation les représentations avec les instruments (c'est la question des instruments sémiotiques signalée plus haut).

· Les savoirs qui mettent en relation les objets avec les instruments (on retrouve ici la problématique de la dialectique outil/objet mise en évidence par Douady (1984).

8 Au moins en acte.

Savoirs d'ordre II – les principes du jeu mathématique

En règle générale, les principes du jeu mathématique sont ce qui fait que les parties du discours mathématique fonctionnent comme elles sont censées fonctionner. Ils font que les définitions définissent comme elles sont censées définir, et servent à ce à quoi elles sont censées servir, que les théorèmes établissent comme ils sont censés établir etc. Ils font ce qui fait que les mathématiques sont ce qu'elles sont censées être.

Quelques exemples :

- Principes qui régissent le fonctionnement des axiomes, des définitions ou des théorèmes et les relations entre ces différents objets mathématiques. Exemple : définitions et propriétés caractéristiques sont interchangeables sous certaines conditions.
- Une définition (par exemple, celle de f+g, ou de a-b comme a+(-b)) ne sert pas seulement à nommer ou à identifier, mais aussi à calculer et donc à démontrer, par exemple que a - (b + c) = a- b – c.
- L'élève qui ne sait pas que, en mathématiques, à partir d'un certain niveau, certaines propriétés doivent être démontrées pour être considérées comme établie, ne démontrera rien et donc ne sera pas considéré par ses professeurs comme faisant des mathématiques.

En ce qui concerne les transitions, nous faisons l'hypothèse que les changements – assez souvent implicites – de principes du jeu constituent des obstacles (dans tous les sens, y compris positifs, du terme) bien plus importants que les simples extensions du domaine des objets mathématiques.

Le cas des définitions, étudiés par S. Bridoux dans ce même groupe de travail, illustre de manière remarquable l'importance de distinguer les principes du jeu des connaissances notionelles ou instrumentales : utiliser (en tant qu'outil) une définition peut être en effet assez simple, la définition peut être conceptuellement aisée à comprendre et ne pas présenter de difficulté particulière de formulation (sémiolinguistique) ; mais la réelle difficulté se retrouve dans les principes qui régissent l'usage à bon escient de la définition comme définition.

Savoirs d'ordre III

C'est ce qui permet l'identification, par exemple la reconnaissance comme étant mathématique (ou analytique, ou algébrique…) des situations. Ces savoirs vont se manifester lorsque les étudiants ne « reconnaissent plus » « leurs » mathématiques (apprises dans le secondaire) dans les mathématiques qu'on leur enseigne à l'université. Et bien plus tard, ceux d'entre eux qui s'apprêtent à devenir professeurs, risque de ne plus reconnaître dans ce que les programmes ou instructions officielles leur demandent d'enseigner, « les mathématiques » qu'ils ont appris à l'université…

Les savoirs d'ordre III jouent en outre en rôle important pour pouvoir identifier le domaine de travail. Par exemple le commentaire d'un texte d'exercice par Bridoux (*Ibid.*) :

Exercice 1 – Montrez, en utilisant la définition en terme d'intérieur, que]a, b[est un ensemble ouvert.

Analyse de l'exercice.

La question est fermée et la méthode est indiquée.

Il s'agit de prouver une égalité entre deux ensembles. Nous sommes donc dans le cadre de la théorie des ensembles[9]. On commence par traduire cette égalité en les deux inclusions]a,b[int]a,b[et int]a,b[ ]a,b[.

Conclusion

L'épistémographie permet d'interpréter le passage d'une analyse plutôt « empirique » au niveau du secondaire (avec connaissance de fonctions de références et de leurs propriétés) à une analyse hypothético-déductive à l'université. Les Instruments changent, donc les Objets (les fonctions, leurs définitions et leurs propriétés) changent également. Les raisonnements ne sont plus vraiment les mêmes, parce que les principes du jeu ont subtilement changé (tant au niveau du statut épistémique des parties du raisonnement qu'au niveau du genre du discours démonstratif). Les systèmes sémiotiques, quoi que superficiellement semblables, sont en fait différents (dans la mesure où les systèmes d'écritures symboliques doivent permettre maintenant le discours hypothético-déductif) ; parallèlement, les tracés de courbes glissent vers un statut de schémas illustratifs, et partant sont plus digitaux et moins analogiques.

Références

Assude, T., Drouhard, J.-Ph. (2005). L'institutionnalisation et l'expérience de la nécessité mathématique. *In* M.-H. Salin, P. Clanché, B. Sarrazy : *Sur la Théorie des Situations Didactiques, Questions, réponses, ouvertures, Hommage à Guy Brousseau*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bosch I Casabò, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática*. Thèse de doctorat, Barcelona : Universitat Autònoma de Barcelona.

Bosch, M., Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs – objet d'étude et problématique, *RDM*, *19*-1, 77-124.

Bridoux, S. (2006). Utiliser une définition, une tâche simple a priori : Le cas de la topologie de IRN. Actes de EMF 2006.Drouhard J.-Ph., Bagni G.T. (2006). *Quali saperi sono acquisiti da chi fa matematica ? La matematica e la sua didattica*, *20*(3), p. 443-455.

Drouhard, J-Ph., Panizza, M. Perspective Paradigmatique et Ordres de Connaissances. (À paraître). *In* A. Mercier (dir.), *Actes de la 12e école d'été de Didactiques des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*.2, 5-32.

Ducrot, O., Schaeffer, J.-M. (1995). *Nouveau dictionnaire encyclopédique des sciences du langage*. Paris : Le Seuil.

9 C'est nous qui soulignons.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 16, no. 3.

Duval, R. (1998) Signe et Objet (I) Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*. IREM de Strasbourg.

Duva, R. (1998) Signe et Objet (II) Questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*. IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1998). *Écriture et compréhension. Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ?* Colloque : Produire et lire des textes de démonstration, Univ. Rennes.

Grenier, D., Payan, Ch. (2006).*Des « situations recherche » pour l'apprentissage des savoirs transversaux »*. Actes de EMF 2006.

Panizza, M., Drouhard, J-Ph. (2003). Los órdenes de conocimiento como marco para significar las prácticas evaluativas. *In* C. Palou de Maté (Comp.), La *Enseñanza y la evaluación : una propuesta para matemática y lengua*. p. 51-73. Buenos Aires : GEEMA (Grupo Editor Multimedial S.R.L.). Colección : Estudios Universitarios.

Sackur, C., Assude, T., Maurel, M., Drouhard, J-Ph., Paquelier, Y. (2005). L'expérience de la nécessité épistémique. *RDM*, *25*/1, p. 57-90.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *RDM*, *25*/1, p. 91-138.

Pour joindre l'auteur

Jean-Philippe Drouhard
IUFM de Nice
89 avenue George V
06046 Nice
France
Jean-Philippe.Drouhard@unice.fr