L'enseignement des mathématiques
face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Décalage interdisciplinaire dans l'enseignement universitaire en économie

Valérie Henry, *Université de Liège, Belgique*

Résumé

Dans cette note, nous proposons un modèle élémentaire qui met en évidence l'existence possible d'un décalage épistémologique résultant de la transmission d'un même savoir par les deux communautés d'enseignants en mathématiques et en économie. Puis, en guise d'illustrations, nous exhibons deux situations didactiques qui sont immanquablement rencontrées dans la formation universitaire des économistes. Il s'agit de l'étude de la loi de demande pour un bien de consommation, ainsi que de l'exploitation de la notion d'infiniment petit en microéconomie. Nous terminons cet article par quelques réflexions didactiques relatives à l'enseignement de savoirs à mathématiques pour des économistes ; nous proposons notamment, pour les deux exemples traités, des contenus susceptibles d'atténuer les effets négatifs du décalage interdisciplinaire décrit. Nous lançons également quelques pistes relatives à des recherches qui pourraient être menées pour prolonger ce travail.

Introduction

Il est bien connu en didactique des mathématiques que le savoir mathématique enseigné en scolarité obligatoire est, généralement, le résultat d'une transposition didactique qui concerne plusieurs transformations réalisées par divers acteurs. Au départ, les mathématiciens chercheurs découvrent des théories mathématiques nouvelles qui forment le savoir mathématique savant.

De ce savoir savant, la noosphère extrait le savoir mathématique à enseigner qui est ensuite placé dans une situation d'enseignement et habituellement adapté à des fins didactiques : cette transformation du savoir représente une mission essentielle de l'enseignant ; nous dirons simplement que le fruit de ce travail constitue le savoir enseigné par les professeurs de mathématiques.

Dans un enseignement universitaire en économie (Artaud, 1993), les savoirs que doivent acquérir les étudiants sont pluriels, allant des mathématiques à la sociologie, en passant par les statistiques, l'informatique, le droit ou encore les langues étrangères ; ils sont néanmoins tous orientés vers l'économie. Ces savoirs se décomposent en savoirs à mathématiques, c'est-à-dire « des savoirs dont la manipulation suppose, peu ou prou, la manipulation de mathématiques vivantes (Chevallard, 1991, dans Artaud, 1994, p. 298) », et les autres savoirs que, par analogie, nous nommerons savoirs sans mathématiques.

Seuls les savoirs de la première catégorie, c'est-à-dire les savoirs à mathématiques, nous intéresseront dans la suite.

Dans cette note, nous proposons un modèle élémentaire qui met en évidence l'existence possible d'un décalage épistémologique résultant de la transmission d'un même savoir par les deux communautés d'enseignants en mathématiques et en économie. Comme tout modèle, celui-ci ne peut représenter qu'un fragment de la réalité. Dans ce contexte, nous nous verrons contraints à plusieurs hypothèses simplificatrices, implicites ou explicites. Des recherches ultérieures pourraient certainement permettre de se dégager de certaines d'entre elles.

Puis, en guise d'illustrations, nous exhibons deux situations didactiques qui sont immanquablement rencontrées dans la formation universitaire des économistes. Il s'agit de l'étude de la loi de demande pour un bien de consommation, ainsi que de l'exploitation de la notion d'infiniment petit en microéconomie.

Nous terminons cet article par quelques réflexions didactiques relatives à l'enseignement de savoirs à mathématiques pour des économistes ; nous proposons notamment, pour les deux exemples traités, des contenus susceptibles d'atténuer les effets négatifs du décalage interdisciplinaire décrit.

1. Modélisation

1.1. Notion de décalage interdisciplinaire

Lors d'études supérieures en économie, les savoirs à mathématiques transmis aux étudiants sont généralement issus de deux sources différentes qui sont, d'une part, la sphère savante mathématique (Artaud, 1994, p. 299) et, d'autre part, ce que nous appellerons par analogie la sphère savante économique.

Ainsi, un savoir à mathématiques d'un étudiant en économie peut être transmis soit par un professeur de mathématiques, soit par un professeur d'économie, les mathématiciens s'étant généralement initiés, le plus souvent de façon autodidacte, aux théories économiques, tandis que les économistes ont à tout le moins suivi des cours de mathématiques à l'Université.

Il advient dès lors quelquefois qu'une même notion soit présentée différemment par ces deux intervenants : cela entraîne ce que nous nommerons un décalage. Bien entendu, il s'agit là d'un cas particulier d'un phénomène qui peut se rencontrer chaque fois que les mathématiques jouent le rôle de savoir fondamental dans l'élaboration d'un savoir à mathématiques au sein d'une discipline quelconque, c'est-à-dire « sont utilisées pour produire et/ou pour mettre en œuvre le savoir disciplinaire en question (Artaud, 1994, p. 299) » ; dans ce contexte général, nous parlerons alors de décalage interdisciplinaire (Henry, 2004).

1.2. Un modèle élémentaire

Le cadre théorique dans lequel nous allons développer notre modèle est celui de l'apprentissage d'un savoir à mathématiques, qui sera noté S ultérieurement, spécifique pour économiste. Ce savoir est transposé d'un savoir savant qui s'est développé au cours du temps, mais uniquement dans la sphère des mathématiciens ou uniquement dans la sphère des économistes. Il s'agit là d'une hypothèse qui n'est évidemment pas toujours vérifiée dans la pratique, notamment à cause des interactions possibles entre les recherches réalisées dans les deux sphères considérées.

Repérons par un indice 1 la discipline dans laquelle se construit le savoir savant considéré, l'autre discipline, indicée par un numéro 2, se limitant, conformément à notre hypothèse, à exploiter ce savoir savant.

Pour tenir compte de l'aspect dynamique du modèle, nous désignerons par S(T) l'état du savoir savant au temps T : pour fixer les idées, T pourra représenter la date de la publication dans laquelle fut exposé pour la première fois le savoir considéré. Nous supposerons que ce savoir est, à cet instant, accepté unanimement par la communauté des mathématiciens ou des économistes et nous nous affranchirons des dissensions possibles qui sont apparues, à un moment donné, entre les différents membres de ces communautés.

De plus, nous désignerons par S*(T) le savoir à enseigner et par S°(T) le savoir enseigné qui correspondent à S(T). L'introduction de la variable temporelle est ici destinée à indiquer que les différents états du savoir ne se sont pas nécessairement développés simultanément dans les deux sphères savantes.

Alors qu'un professeur de la discipline 1 se référera à un certain état $S(T_1)$ du savoir S, son collègue de la discipline 2 considérera l'état $S(T_2)$ de ce même savoir. Or, ces deux états du savoir $S(T_1)$ et $S(T_2)$ ne coïncident pas toujours parce que les deux enseignants n'ont pas forcément la même formation, ni les mêmes objectifs pédagogiques. De fait, la discipline 1 ayant, par hypothèse, été celle dans laquelle s'est développée la matière considérée, ses enseignants ont vraisemblablement une formation plus poussée que leurs collègues sur le sujet, et ont aussi souvent le souci de présenter à leurs étudiants des développements parmi les plus récents de leur branche. Par contre, les professeurs de la discipline 2 ont fréquemment des ambitions moins didactiques, mais plus praxéologiques (Artaud 2003) puisqu'ils se contentent d'utiliser une théorie, construite dans une autre sphère que la leur, généralement pour résoudre un problème concret qu'ils rencontrent dans leur propre sphère. Il en résulte que T_1 ne coïncide d'habitude pas avec T_2, et donc que $S(T_1)$ peut différer de $S(T_2)$. Il peut bien sûr en aller de même avec les savoirs à enseigner $S^*(T_1)$ et $S^*(T_2)$, ainsi qu'avec les savoirs enseignés $S°(T_1)$ et $S°(T_2)$.

Au total, le savoir appris (Antibi et Brousseau, 2002), noté dans la suite SA, par un même apprenant au sujet du savoir S peut provenir de deux enseignements distincts, à savoir $S°(T_1)$ et $S°(T_2)$, ce qui provoque alors un décalage interdisciplinaire.

La figure ci-dessous représente schématiquement ce modèle, avec, en ligne préliminaire, les différents types et états des savoirs relatifs au thème S, ainsi que, près des flèches et dans un encadré, les différents acteurs qui seront notés respectivement S_i pour les membres de la sphère savante, N_i pour la noosphère, P_i pour les enseignants de la discipline i (pour i = 1, 2), et ET pour les étudiants.

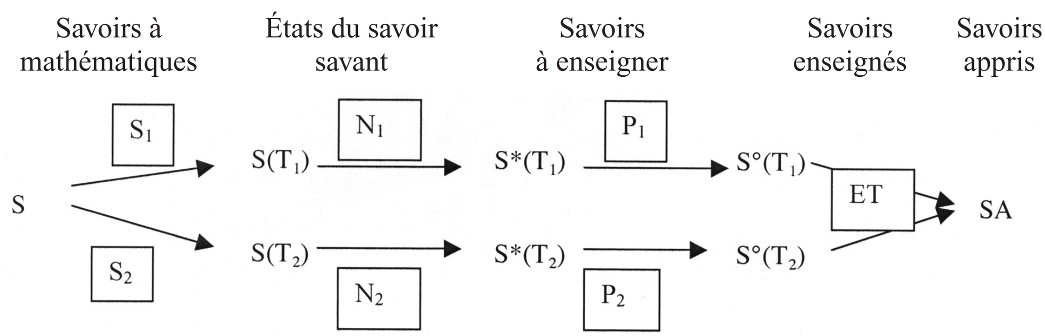


Figure 1 – Schéma relatif au modèle

2. Premier exemple : la loi de demande

2.1. *Évolution historique du savoir savant*

Parmi les multiples questions qu'ils abordent, les économistes ont toujours accordé une grande importance à l'étude des liens pouvant exister entre « le prix d'un bien et la quantité de ce bien qui est demandée, et toutes choses égales par ailleurs (Samuelson et Nordhaus, 2000, p. 44) » ; il s'agit du savoir savant S considéré dans cette section.

La première relation mathématique de ce type fut vraisemblablement l'œuvre de l'économiste H. Lloyd ; celui-ci proposa, en 1771 dans son ouvrage *On the Theory of the Money*, la formule suivante : $P = \frac{M}{Q}$, où P, M et Q désignent respectivement le prix, la masse monétaire et la quantité des marchandises (Als, 1961, p. 50).

Cette égalité fut contestée par A. Cournot, mathématicien, économiste et philosophe français, qui est aujourd'hui considéré comme le fondateur de l'économie mathématique. Dans son ouvrage *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* paru en 1838, il rejeta l'idée de pouvoir exprimer la relation entre prix et quantité d'un bien par une formule algébrique semblable à celle de Lloyd, par manque d'observations statistiques et parce que la demande se modifie au cours du temps. Toutefois, il proposa une loi de la demande ou du débit de la forme $D = F(p)$, où D représente le débit ou la demande annuelle, tandis que p désigne le prix moyen annuel. De plus, il supposait que la fonction F, dont la forme exacte n'est en principe pas connue, est notamment décroissante et continue (Artaud, 2002, p. 38) ; en effet, d'une part, le débit augmente quand le prix diminue (sauf pour des exceptions, comme le diamant), et, d'autre part, F est « une fonction qui ne passe pas soudainement d'une valeur à une autre, mais qui prend dans l'intervalle toutes les valeurs intermédiaires (Cournot, 1980, p. 38) ». En exploitant ensuite la puissance de l'analyse mathématique, Cournot résolut le problème de la maximisation de la valeur totale de la quantité débitée annuellement en annulant la dérivée de la fonction $p \mapsto p\,F(p)$.

C'est en 1961 qu'une synthèse et un approfondissement des travaux des marginalistes conduisit Marshall à déterminer une courbe de demande en agrégeant les demandes individuelles, celles-ci pouvant être construites à partir de la fonction d'utilité de chaque consommateur. De fait, si un individu achète deux biens X et Y, en quantités respectives x et y, aux prix unitaires p_X et p_Y et en disposant d'un revenu total R, il cherche à maximiser sa fonction d'utilité définie par $U(x, y)$, tout en respectant la contrainte budgétaire donnée par l'égalité $p_X x + p_Y y = R$.

L'on sait que le choix optimal se produit lorsqu'une courbe d'indifférence, d'équation implicite U(x, y) = k, vient toucher tangentiellement la contrainte budgétaire dans le plan des quantités ; cette condition géométrique se traduit par l'égalité, en valeur absolue, entre le taux marginal de substitution et le rapport des prix, où le taux marginal de substitution TmS n'est rien d'autre que le rapport des utilités marginales. En appliquant cette théorie au cas d'un consommateur qui commande une quantité q_X du bien X, les autres produits étant agrégés dans le bien Y, son choix optimal permet de déterminer le prix p_X correspondant ; en supposant unitaire le prix du bien agrégé Y, on peut écrire $p_X = |\, TmS \,|$: ce prix mesure donc la quantité du bien Y que le consommateur est prêt à sacrifier suite à une petite augmentation du bien X pour conserver le même niveau de satisfaction (Varian 1992, p. 122).

S'appuyant sur ce raisonnement, Marshall construisit graphiquement la courbe de demande du bien X considéré en portant, dans le plan muni d'un repère orthogonal, chaque quantité q_X sur l'axe horizontal et le prix p_X correspondant sur l'axe vertical. Depuis lors, les économistes ont pris l'habitude de représenter les prix en ordonnées dans la représentation graphique de la fonction de demande. Cette disposition leur permet de présenter aisément d'autres notions, comme la recette marginale, l'élasticité de la demande ou encore les surplus du consommateur et du producteur.

2.2. *Application du modèle*

La recherche de liens entre le prix et la quantité d'un produit est une question avant tout économique. Cette théorie, notée S dans le modèle, s'est donc développée essentiellement dans la sphère savante économique, de sorte que l'indice 1 du modèle est réservé à l'économie, et le 2 aux mathématiques.

Les enseignants-économistes utilisent une courbe de demande notamment pour expliquer la formation de prix ; ils adoptent ainsi la convention marshalienne qui consiste à placer les prix en ordonnées et les quantités en abscisses ; ils font alors appel à un savoir savant exposé dans les *Principles of Economics* de Marshall (Als, 1961, p. 140), de sorte que l'on peut écrire $T_1 = 1\,890$.

De leur côté, les enseignants-mathématiciens évoquent généralement la loi de demande comme un exemple de fonction utilisée en économie. Ils représentent alors graphiquement la fonction $p \mapsto q = F(p)$ de la même manière qu'ils tracent le graphe d'une fonction $x \mapsto y = f(x)$, c'est-à-dire en portant les valeurs de la variable « indépendante » (p ou x selon les cas) sur l'axe horizontal du repère et celles de la variable « dépendante » (q ou y) sur l'axe vertical. Ils sont ainsi fidèles à la démarche suivie par Cournot dans son ouvrage *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* ; en conséquence, on peut écrire $T_2 = 1\,838$. Notons encore que les mathématiciens ne prennent habituellement pas autant de précautions que Cournot pour introduire une fonction de débit : par exemple, souvent, ils ne s'intéressent ni à l'interprétation économique ni à la détermination pratique des grandeurs comme le faisait lui-même Cournot (1980, p. 35-40) ; de la sorte, le savoir à enseigner $S^*(T_2)$ est fréquemment plus pauvre que le savoir savant original $S(T_2)$.

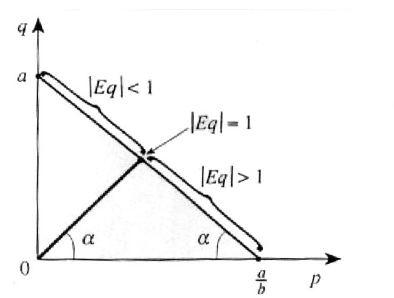
Il en résulte que le savoir appris SA des étudiants provient de deux versions différentes relatives à la représentation graphique d'une fonction de demande ; celles-ci se présentent souvent sous la forme de courbe ayant la même allure, la seule différence résidant dans la mention des variables sur les axes de coordonnées : pour $S°(T_1)$, les prix sont en ordonnées, tandis que pour $S°(T_2)$, ce sont les quantités qui sont en ordonnées.

Ce décalage représente évidemment un obstacle potentiel et peut provoquer des confusions ou des erreurs, ainsi qu'en témoigne notamment cet exemple relatif à une demande linéaire [1] définie par l'égalité $q = a - b\,p$, avec, en général $a > 0$ *et* $b > 0$.

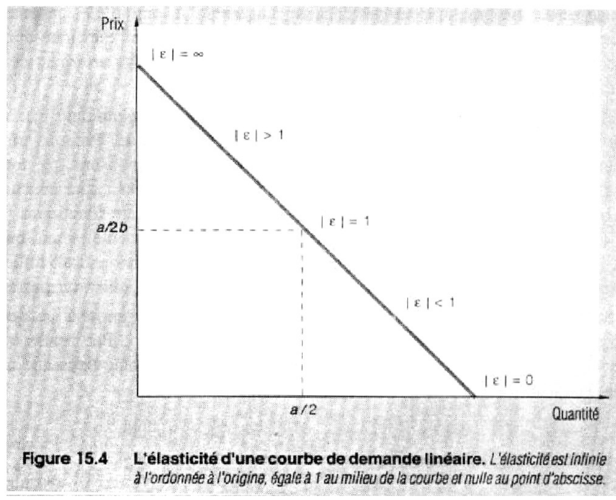
Considérons l'élasticité de la demande d'un bien par rapport au prix : dans ce cas, elle est égale à $\varepsilon = Eq = \dfrac{-b\,p}{a - b\,p}$; ce bien est déclaré posséder une demande élastique ou inélastique selon que l'élasticité correspondante est, en valeur absolue, respectivement supérieure ou inférieure à l'unité.

1 Les économistes qualifient de demande linéaire une fonction de demande qui est en fait affine en la variable prix.

Cette distinction entre les biens peut être visualisée au moyen de la représentation graphique de la fonction de demande, qui est une droite généralement restreinte au premier quadrant pour des raisons économiques évidentes. Les biens à demande inélastique pour les économistes (responsable pour les mathématiciens) sont situés, sur la figure, là on se retrouvent les biens à demande élastique pour les mathématiciens (responsable pour les économistes). Ainsi en attestent les deux graphiques ci-dessous qui figurent dans des livres de référence destinés aux mêmes étudiants.



(a)



(b)

Figure 2 – L'élasticité d'une courbe de demande linéaire

(a) Par un mathématicien (Bair, 1993, p. 231) (b) Par un économiste (Varian, 1992, p. 281)

Ce genre d'obstacle potentiel chez un apprenant peut se retrouver dans d'autres circonstances fréquemment rencontrées par des étudiants en économie, par exemple dans la détermination du surplus d'un consommateur ou du surplus d'un producteur.

3. Deuxième exemple : la notion d'infiniment petit

3.1. Évolution historique du savoir savant

L'évolution historique du concept d'infiniment petit peut être présentée conformément à la dialectique hégélienne selon laquelle la connaissance se développe par « triade » à savoir selon les trois stades appelés thèse, antithèse et synthèse [2].

a) Thèse. L'existence des infiniment petits, latente depuis l'Antiquité et pressentie notamment par Fermat, Pascal et Barrow, fut admise par Newton et surtout Leibniz. Ce dernier concevait un infiniment petit, encore appelé infinitésimal, comme une entité métaphysique « évanouissante » qui est « plus petite que toute quantité donnée, puisqu'il est en notre pouvoir de diminuer l'incomparablement petit, que l'on peut toujours supposer aussi petit que l'on veut » (Leibniz, 1702, dans Mawhin, 1997, p. 37). Les infinitésimaux ont alors essentiellement une vocation heuristique : ils peuvent servir à bâtir les fondements de l'analyse classique.

2 Le terme synthèse est quelquefois remplacé par le terme « dépassement » (Châtelet 1992, p. 174), ce qui est probablement plus adéquat… mais moins attractif.

Les bases de l'analyse mathématique furent effectivement développées par des successeurs de Newton et de Leibniz qui exploitèrent les infinitésimaux au sujet desquels ils adoptèrent une position « a-ontologique », c'est-à-dire dans laquelle l'existence des objets mathématiques ne se pose pas (Bouleau, 1999, p. 112) ; ainsi en atteste cette prise de position, caractéristique de l'époque, exprimée au début du 19e siècle par Bossut dans son *Essai sur l'histoire générale des mathématiques* (Paris, t. III, 1802, p. 141 – 142) : « Admettez les infiniment petits comme une hypothèse, étudiez la pratique du calcul, et la foi vous viendra (dans Cournot, 1984, p. 530) ».

b) Antithèse. Au dix-neuvième siècle, il y eut, surtout en France et en Allemagne, des débats passionnés sur l'usage en analyse mathématique des infinitésimaux. On vit alors naître deux sortes de critiques :

- Des critiques émanant du courant philosophique de l'empirisme et relatives à l'existence même des infiniment petits. Par exemple, D'Alembert dans son *Essai sur les éléments de la philosophie ou sur les principes des connaissances*, rejetait l'idée que des quantités peuvent « s'évanouir », car il estimait qu'« une quantité est quelque chose ou rien. Si elle est quelque chose, elle n'est pas encore évanouie ; si elle n'est rien, elle est évanouie tout à fait. C'est une chimère que la supposition d'un état moyen entre ces deux-là (D'Alembert, 1759, dans Gaud *et al*., 1998, p. 127) ».
- Des critiques de logique. Ainsi G. Berkeley, dans *L'Analyste*, s'opposa violemment aux théories de Leibniz ; il formula notamment cet avis : « Je ne discute en rien vos conclusions, mais seulement votre logique et votre méthode (Berkeley, 1734, dans Gaud *et al*., 1998, p. 17) ».

De plus, la théorie leibnizienne des infinitésimaux viole ce qui est aujourd'hui appelé le principe archimédien selon lequel, pour deux nombres positifs a et b, on peut trouver un entier n tel que $n\,a > b$.

Petit à petit, les mathématiciens, à partir du 19e siècle, s'efforcèrent d'abandonner l'idée qu'un infiniment petit est une grandeur assignable. Par exemple, Lagrange essaya d'éviter le recours aux infinitésimaux dans ses cours d'analyse, ainsi qu'en atteste le titre d'un de ses ouvrages : « Théorie analytique des fonctions – contenant les principes du calcul différentiel dégagé de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants (Lagrange, 1797, dans Gaud *et al*., 1998, p. 77) ». En d'autres termes, l'idée d'un infiniment petit actuel fut progressivement abandonnée, et remplacée par celle d'un infiniment petit potentiel. À cet effet, les mathématiciens promurent l'idée qu'un infiniment petit n'est plus une « quantité assignable », mais une variable : d'après Cauchy, « lorsque les valeurs successives d'une même variable décroissent indéfiniment, de manière à s'abaisser en dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce que l'on nomme un infiniment petit ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite (dans Artigue *et al*., 1985, p. 3) ». Ainsi, petit à petit, la théorie des infinitésimaux se développa essentiellement dans un cadre fonctionnel, au départ du concept de limite dont une définition rigoureuse se dégagea progressivement des travaux de savants tels que Bernhard Bolzano (1781-1848), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) et Karl Theodor Wilhem Weierstrass (1815-1897). Il est à noter que la présentation de ce dernier, appelée « définition en ε–η" » dans les programmes officiels de l'enseignement secondaire non confessionnel en Communauté française de Belgique, est encore souvent enseignée dans les cours de mathématiques dispensés dans les universités à des économistes.

c) Synthèse. Abraham Robinson, profitant des progrès récents de la logique mathématique, notamment de la théorie des modèles, reprit les théories leibniziennes mais dans un cadre nouveau et tout à fait indiscutable ; dans son ouvrage intitulé *Non-standard Analysis* (Robinson 1961), il formalisa avec rigueur l'intuition et les techniques efficaces du calcul infinitésimal des siècles précédents. A cet effet, il convint d'étendre l'ensemble des réels et de définir de nouveaux nombres, qualifiés de non standards, qui sont infiniment petits, infiniment grands ou infiniment proches d'un réel. Une présentation succincte de la construction robinsonienne peut être trouvée, par exemple, dans Deledicq et Diener (1989, p. 182-185).

L'ensemble de tous les nombres hyperréels, c'est-à-dire des réels standards et des nombres non standards, constitue un cadre numérique au sein duquel peut se développer l'analyse mathématique ; en effet, il jouit des mêmes « propriétés » que l'ensemble des réels.

Par la suite, une approche axiomatique de l'analyse non standard fut proposée par Nelson (1977).

Ces dernières années, ces savoirs savants ont été transposés de diverses manières pour pouvoir être enseignés à des apprenants novices en analyse (voir, notamment, Artigue *et al*., 1985 ; Bair, 2004 ; Henry, 2003 ; Henry, 2004).

3.2. Application du modèle

La théorie S des infiniment petits a été initialement développée par des mathématiciens ; de sorte que l'indice 1 de notre modèle se rapporte aux mathématiques. Les économistes font fréquemment appel aux concept d'infinitésimal, notamment dans toute étude marginaliste ; l'indice 2 se réfère donc à l'économie.

De nombreux mathématiciens conçoivent intuitivement les infiniment petits à la manière de Cauchy dans son cours d'Analyse à l'École Polytechnique ; en conséquence, T_1 vaut approximativement 1821 : pour $S(T_1)$, un infiniment petit est une variable tendant vers zéro. Toutefois, le savoir $S°(T_1)$ enseigné par certains mathématiciens à des économistes présente un infiniment petit comme une fonction tendant vers zéro (voir, par exemple, Esch, 1992, p. 161).

Les économistes ont une conception plus positiviste de cette théorie et se réfèrent ainsi à la présentation leibnizienne des infinitésimaux ; partant, T_2 peut être pris égal à 1675 qui est l'année de l'invention du calcul infinitésimal par Leibniz. Selon $S(T_2)$, un infiniment petit désigne une quantité assignable évanouissante. Mais, par pragmatisme, les économistes abandonnent souvent l'idée abstraite d'évanouissance d'une quantité, de sorte qu'ils évoquent alors un savoir $S^*(T_2)$ selon lequel un infiniment petit représente une variation très petite (par exemple, Varian, 1992, p. 653) ; il n'est même pas rare que les enseignants d'économie qualifient d'infinitésimale une variation petite quelconque, et même assez souvent une variation unitaire, d'une grandeur économique (par exemple, Schlacther, 1994, p. 99), cette dernière acception d'un infiniment petit constitue le savoir $S°(T_2)$.

Ainsi, un étudiant en économie peut s'entendre dire qu'un infiniment petit est une fonction tendant vers zéro ($S°(T_1)$) ou encore désigne une petite variation d'une grandeur économique ($S°(T_2)$). La différence de ces deux présentations donne naissance à un décalage interdisciplinaire.

A la polysémie du qualificatif « infinitésimal » s'ajoute un obstacle provenant de la présence concomitante de deux cadres de travail. En effet, les économistes raisonnent volontiers en termes d'ordre de grandeur de variables économiques, certaines grandeurs étant pour eux négligeables vis-à-vis d'autres ; ils travaillent alors essentiellement dans le cadre numérique. Or, pour traduire une telle démarche conformément au savoir savant enseigné $S°(T_1)$, ils doivent passer dans le cadre fonctionnel, ce qui peut provoquer des erreurs de raisonnement.

4. Épilogue

En théorie, il semble aisé de combler un décalage interdisciplinaire : il « suffit » que les deux communautés d'enseignants travaillent dans la même direction et au même rythme. Pourquoi ne pas rêver d'un enseignement interdisciplinaire dans lequel un mathématicien et un économiste présenteraient, simultanément et de façon concertée, une même matière ? Dans la pratique, ce n'est évidemment pas aussi simple qu'il y paraît à première vue. En ce qui concerne de tels décalages interdisciplinaires, les didacticiens nous semblent pouvoir agir sur plusieurs fronts :

- repérer les sujets de décalage possible ;
- prévoir une séquence de dé-transposition (Antibi et Brousseau, 2000 et 2002) quand un tel décalage a été décelé ;
- anticiper de tels décalages ;
- chercher des présentations adéquates qui pourraient d'emblée convenir aux deux communautés enseignantes et être adaptées aux étudiants.

Un tel travail demande évidemment une bonne formation de l'enseignant tant en mathématiques qu'en économie. En plus de compétences disciplinaires adéquates, le professeur devra également faire preuve de compétences transversales afin d'adapter son enseignement et de relier entre eux les différents points de vue.

Nous tenons à montrer la faisabilité de ce programme en proposant des suggestions qui sont issues de notre expérience personnelle et sont susceptibles de traiter les décalages exposés dans nos deux exemples.

1) Pour la loi de demande, on pourrait introduire, en conservant les notations antérieures, deux notions différentes, à savoir une demande directe définie par une égalité de la forme $q = f(p)$.

et une demande inverse qui répondrait à l'égalité suivante $p = F(q)$ [3] ; bien entendu, lorsque la fonction de demande est injective, les fonctions f et F sont réciproques l'une de l'autre.

Dans le cas particulier d'une demande linéaire, il serait alors bon d'utiliser des lettres différentes pour désigner les paramètres intervenant dans les fonctions affines considérées, à savoir
$q = a - b\,p$ *et* $p = c - d\,q$; pour un même bien, on a évidemment $c = \frac{a}{b}$ et $d = \frac{1}{b}$.

En représentant graphiquement ces deux demandes de la manière habituelle, c'est-à-dire en portant en abscisses les valeurs de la variable du deuxième membre et en ordonnées celles de la variable

3 Nous nous devons de signaler que certains économistes distinguent ces deux types de demande, mais de façon fort timide et en les confondant quelquefois.

du premier membre, on retrouverait le graphique du mathématicien (responsable de l'économiste) pour la demande directe (responsable pour la demande inverse).

2) Il est possible de présenter l'analyse non standard par des versions pédagogiques qui évitent les difficultés techniques liées à la construction robinsonienne des infiniment petits. Par exemple, les travaux originaux de Keisler (1976) nous paraissent bien adaptés pour des étudiants en économie, ainsi que le laissent entrevoir les résultats récents obtenus dans le cadre de nos recherches doctorales (Henry, 2004).

Références

Als M.G. (1961), *Histoire de l'économie mathématiques*. Bruxelles : Presses Universitaires de Bruxelles.

Antibi A., Brousseau G. (2000), La dé-transposition de connaissances scolaires. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *20*(1) 7-40.

Antibi A., Brousseau G. (2002), *Vers l'ingénierie de la dé-transposition, Les Dossiers des sciences de l'éducation*. n° 8 45-57. Toulouse : Université du Mirail.

Artaud M. (1993), *Les mathématiques en économie comme problème didactique. Une étude exploratoire*. Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université d'Aix-Marseille II, Marseille.

Artaud M. (1994), Un nouveau terrain pour la didactique des mathématiques : les mathématiques en économie. *In* Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (p. 298-304). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Artaud M. (2002), À propos du rapport aux mathématiques en économie ? *In* IREM, CIFORD, Département de Mathématiques (Luminy), Département de Sciences Humaines (Luminy), IUFM (dir.) Séminaire Mathématiques et sciences humaines 2000-2001 (p. 27-47). *Publication de l'IREM de l'académie d'Aix-Marseille*, n° 25.

Artaud M. (2003), Diffuser des praxéologies mathématiques mixtes. *Actes du Colloques EMF 2003*. Tozeur.

Artigue M., Gautheron V., Isambert E. (1985), Analyse non standard et enseignement, *Cahier de didactique des mathématiques*, n° 15. Paris : I.R.E.M. – Université Paris VII.

Bair J. (1993), *Mathématiques générales à l'usage des Sciences économiques, de gestion et A.E.S*. Bruxelles : De Boeck Université.

Bair J. (2004), Introduction du concept de limite à l'aide des nombres hyperréels. *In* IREM de Strasbourg (dir.) *Regards et perspectives sur l'enseignement de l'analyse* (p. 77-85), Actes du colloque de Mulhouse 8-9 mars 2002. Strasbourg.

Bair J. – Haesbroeck G. (2000), La formation quantitative des économistes à la lumière de l'évolution des rapports entre les mathématiques et l'économie. *In* Proceeding I *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*. Troisième université d'été européenne. UCL-KUL : Louvain-la-Neuve – Leuven.

Bair J. – Henry V. (2003), De l'Analyse Classique à l'Analyse Non Standard. *Les cahiers de la mathématique appliquée*, 1 51-74, Bruxelles : F. Ferrer, Liège : Céfal

Bouleau N. (1999), *Philosophies des mathématiques et de la modélisation, du chercheur à l'ingénieur*. Paris : L'Harmattan.

Châtelet F. (1992), *Une histoire de la raison*. Paris : Seuil.

Chevallard Y. (1991), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cournot A.A. (1980), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie de la richesse*. Édité par G. Jorland. Paris : J. Vrin.

Cournot A.A. (1984), *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*. Édité par P. Dugac. Paris : J. Vrin.

Deledicq A., Diener M. (1989), *Leçons de calcul infinitésimal*. Paris : Armand Colin.

Esch L. (1992), *Mathématique pour économistes et gestionnaires*. Bruxelles : De Boeck Université.

Gaud D., Guichard J., Sicre J.P., Chrétien C. (1998), *Des tangentes aux infiniment petits.* Poitiers : Irem de Poitiers.

Henry V. (2003), Les hyperréels en analyse. *Mathématique et Pédagogie*, *141*, 47-58.

Henry V. (2004), *Questions de didactique soulevées par un enseignement de l'analyse non standard à de futures économistes*. Thèse pour obtenir le grade de Docteur en didactique des disciplines scientifiques de l'Université Paul Sabatier, Toulouse.

Keisler H.J. (1976), *Elementary Calculus*. Boston : Weber et Schmidt Inc.

Marshall A. (1961), *Principles of Economics. An introductory volume*. Eight Edition. London : Macmillan et Co Ltd.

Mawhin J. (1997), *Analyse : fondements – techniques – évolution.* 2e édition. Bruxelles : De Boeck Université.

Nelson E. (1977), Internal Set Theory. *Bulletin American Mathematical Society*, *83*, 1165-1198.

Robinson A. (1961), Non-standard Analysis. *Koninkl. Ned. Wetensch*. Proc. A64 432-440.

Schlacther D. (1994), *Comprendre la formulation mathématique en économie*. Paris : Hachette Supérieur.

Samuelson P.A., Nordhaus W.D. (2000), *Économie*. Seizième édition. Paris : Economica.

Varian H.R. (1992), *Introduction à la microéconomie*. Bruxelles : De Boeck Université.

Pour joindre l'autrice

Valérie Henry
HEC – École de Gestion de l'Université de Liège
Boul. du Rectorat, 7
4000 Liège (Sart-Tilman)
Belgique
Courriel : V.Henry@ulg.ac.be