

La verbalisation comme médiation entre figural et théorique

Elisabetta ROBOTTI

Laboratoire Leibniz – IMAG – GRENOBLE

I. INTRODUCTION

Le travail que nous aimerions proposer dans cet atelier porte sur l'analyse des processus de résolution de deux problèmes de géométrie plane en classe de Seconde.

L'expérimentation de ces trois problèmes auprès des élèves s'est faite dans le cadre d'une recherche en didactique des mathématiques qui vise à étudier la dialectique entre le registre figuratif et le registre du langage naturel (Duval, 1994) dans la résolution de problèmes de géométrie. Il s'agit d'analyser dans quelle mesure et comment la verbalisation en langue naturelle joue un rôle de médiateur dans les allers et retours entre l'appréhension opératoire de la figure et le référent théorique (dans notre cas, la théorie euclidienne). Nous utiliserons ici le terme d'appréhension au sens de Duval (1994).

L'atelier consistera à présenter brièvement les objectifs et le cadre théorique de la recherche, puis les problèmes qui ont été posés aux élèves. Il sera ensuite distribué un extrait d'un protocole de deux élèves, que les participants auront à analyser selon les objectifs exposés au début de l'atelier.

En fin auront lieu un débat et une mise en commun du travail de groupe.

II. PREALABLES THEORIQUES ET TERMINOLOGIQUES

Le travail de recherche que nous présentons dans l'atelier vise tout d'abord à étudier la dialectique entre le registre figuratif et le registre du langage naturel dans la résolution de problèmes de géométrie plane en classe de Seconde. Nous utiliserons ici la notion de "registre sémiotique" issue de la théorie de Duval¹.

Or, comme la géométrie fait appel à la fois les objets théoriques et à leurs représentations spatiales, il faut d'abord préciser ce que nous entendons par "dessin", "figure" et objet géométrique. En nous appuyant sur la définition proposée par Laborde et Capponi (1994), nous appelons "objet géométrique" l'objet de la théorie, dont une définition rend compte, et "dessins" ses différentes représentations graphiques. La "figure" (F) relie l'aspect théorique avec l'aspect graphique, car elle représente l'ensemble des couples constitués par l'objet théorique (O) et un des dessins (d_i) qui lui représente :

$$F : \{(O, d_1), (O, d_2), (O, d_3) \dots (O, d_i)\}$$

Lors de la résolution d'un problème de géométrie, la différenciation entre dessin, figure et objet géométrique joue un rôle important dans l'appréhension de la figure. Pour cela nous utiliserons la notion d' "appréhension opératoire de la figure" issus de la théorie de Duval (1995).

L' "appréhension opératoire" du dessin s'exerce en différentes modifications (partage d'un dessin, ajout de traits, déplacement...).

L'objectif de notre recherche consiste donc en analyser dans quelle mesure et comment la verbalisation en langue naturelle jouait un rôle de médiateur dans les allers et retours entre l'appréhension opératoire du dessin (c'est-à-dire la manipulation du dessin) et les référents théoriques qui lui sont associés (explicitations des propriétés, des théorèmes, des définitions

¹ " La géométrie est un domaine des mathématiques dans lequel on fait en permanence appel à trois registres:

Ô le registre figuratif, lié au système perceptif visuel, avec les lois d'organisation propres à ce système;

Ô le registre de langage naturel, avec ses possibilités de description et d'explication du statut des énoncés;

Ô le registre de langage symbolique, avec ses possibilités propres d'écriture et de recours à des formules "

A. Mesquita, 1986

mathématiques liées à la figure). On peut faire l'hypothèse que la reconnaissance de sous configurations pertinentes ou de propriétés géométriques peut provenir, outre d'une reconnaissance perceptive, de l'explicitation verbale par le sujet des données du problème qui orientent sa façon de considérer et d'analyser le dessin sous ses yeux. Le travail à deux renforce cette influence du verbal, chacun formulant sa démarche à voix haute à l'intention de l'autre.

III . OBJECTIFS DE L'ATELIER

ans ce contexte de travail, l'objectif de l'atelier est déclencher une réflexion sur le rôle du langage naturel lors de la résolution d'un problème géométrique plane. Pour cela nous allons présenter dans ce qui suit, un problème de géométrie plane proposé aux élèves sous forme de deux énoncés différents. Nous allons demander aussi aux participants une analyse a priori et une analyse guidée d'un extrait d'un protocole.

IV . DISTRIBUTION D'UNE PARTIE DU MATERIEL

Les problèmes de géométrie plane proposés au sein d'une expérimentation en classe de Seconde, sont distribués aux participants.

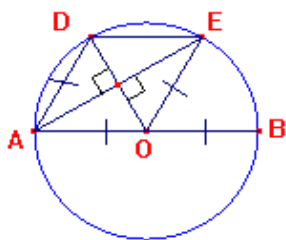
Fiches distribuées

Problèmes

énoncé a

Soit (C) un cercle de centre O et de diamètre [AB],
D un point de ce cercle tel que
 $AD = AO$. La perpendiculaire à (OD) passant par A
recoupe le cercle (C) au point E.
Démontrer que OADE est un losange.

énoncé b



[AB] diamètre du cercle
A, D et E sont des points
du cercle
(AE) est perpendiculaire
à (OD)
 $AO = AD$

V . LE TRAVAIL DES PARTICIPANTS

Le travail des participants est prévu en deux parties :

* une première partie d'analyse individuelle des énoncés proposés, suite à la question :

1. " Quelle solution attendriez-vous des élèves? "

* une deuxième partie de travail en groupe autour d'un extrait d'un protocole (Annexe). Le travail d'analyse est guidé par les questions suivantes :

2. Pouvez vous identifier des phases dans lesquelles les élèves travaillent sur le dessin et en tirent des informations ? Des phases dans lesquelles les élèves partent de l'énoncé (données et questions du problème) pour avancer dans la résolution ?

3. Quel sont les indices qui vous permettent d'identifier ces phases ?

On demande d'identifier les moments de passage du dessin au théorique et vice-versa.

4. Quelle est la fonction du langage dans ces passages ?

VI. CONCLUSION : DEBAT ET MISE EN COMMUN DES CONJECTURES

Les questions proposées visent à dégager quelques réflexions sur les objectifs de l'atelier.

Tout d'abord, l'analyse du protocole permettra de mettre en évidence les phases dans lesquelles les élèves s'appuient plutôt sur le dessin et des phases dans lesquelles ils s'appuient plutôt sur leurs connaissances théoriques pour résoudre le problème proposé. Du point de vue méthodologique, on arrive alors à mettre en évidence les *critères* permettant d'avoir accès aux processus de résolution des élèves et de distinguer deux *démarches* de résolution utilisées par les élèves.

On peut définir une "*démarche dessin*" comme un processus de résolution qui se développe à partir d'une manipulation du dessin et une "*démarche discursive*" comme un processus de résolution qui se développe à partir de la question du problème ou à partir de "mots clés" de l'énoncé.

Des *critères* permettant de distinguer les deux démarches, peuvent être trouvés dans le registre du langage naturel (par exemple, la présence des mots déictiques relève d'une démarche dessin, tandis que la présence des mots dits "étiquettes", relève d'une démarche discursive).

Le langage est donc dans cette étude à la fois révélateur d'une démarche, en tant qu'outil de travail pour le chercheur, et objet d'étude en tant qu'outil pour l'élève résolvant le problème.

Pour chaque démarche on a cherché à associer un "modèle d'action" de l'élève. Le modèle d'action caractérisant la démarche dessin est la constitution d'une sorte de liste d'informations traitée ensuite de diverses façons. Le modèle d'action caractérisant la démarche discursive est la production de formulations sous forme "finale" du type "pour avoir... il faut" ou encore formulations renvoyant à des connaissances théoriques déclenchées par les mots clés. Lorsque la liste est traitée, un passage à une démarche discursive peut se produire et, vice-versa, lorsqu'on a défini une démarche discursive, peut se produire un passage à une démarche dessin. Un processus de résolution d'un problème de géométrie plane peut donc être décrit comme un aller et retour entre la démarche dessin et la démarche discursive.

Comme le but principal de l'atelier est celui de mettre en évidence le rôle de médiation joué par le langage lors de la résolution du problème, on propose aux participants le schéma suivant :

	Démarche dessin	Démarche discursive
Langage comme révélateur	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Référence au dessin <input type="checkbox"/> Présence de mots et adverbes déictiques (domaine spatio-graphique) <input type="checkbox"/> Absence de connecteurs reliant les informations de la liste <input type="checkbox"/> Usage des verbes (présence de modalités) <input type="checkbox"/> Absence de justifications <input type="checkbox"/> Traitements de la liste : <ol style="list-style-type: none"> 1 Inférences pour ajouter des informations à la liste (donc, forcément, ...) 2 Inférences pour enlever des informations de la liste 	<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Référence aux objets théoriques <ol style="list-style-type: none"> 1 à la question du problème 2 aux mots clé Mots étiquettes <input type="checkbox"/> Structure finale du discours <input type="checkbox"/> Mot déictique

Rôle du langage	<input type="checkbox"/> Fonction d'ordre <input type="checkbox"/> Fonction de rassemblement des informations de la liste <input type="checkbox"/> Fonction de mémoire sélective	<input type="checkbox"/> Fonction d'association (mots étiquettes) <input type="checkbox"/> Fonction de planification (se donner un but) <input type="checkbox"/> Prise de distance par rapport à l'élaboration de la solution <input type="checkbox"/> Fonction d'inférence pour relier deux informations
------------------------	--	--

Il permet de considérer à la fois le rôle du langage et le langage comme révélateur dans les deux démarches, démarche dessin et démarche discursive.

Au cours de l'atelier, nous chercherons à mettre en évidence le rôle joué par le langage dans l'extrait du protocole analysé. Décrivons ainsi quelques unes des fonctions repérées du langage:

1. *Fonction d'ordre* du langage, nécessaire pour mettre en ordre les informations tirées du dessin, données de façon globale et en deux dimensions. Le langage impose un ordre linéaire et séquentiel.
2. *Fonction de mémoire sélective* du langage, nécessaire car la figure renvoie à une mémoire d'ensemble. Le dessin fournit plusieurs informations, y compris celles qui ne sont pas pertinentes pour la résolution du problème. Le langage impose une prise en charge sélective des informations.
3. *Fonction de rassemblement des informations* de la liste. Le processus caractérisant la liste est celui d'accumulation des informations, mais lorsque la liste devient trop grande pour être gérée, le langage permet tout d'abord un rassemblement des informations et, en un deuxième temps un leur traitement.

REFERENCES

- DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *REPERES-IREM* n°17, octobre 1994, 121-138
- DUVAL R. (1995) Sémiosis et pensée humaine. *Berne : Peter Lang.*
- LABORDE C. & CAPPONI B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherche en didactiques des mathématiques.* Vol 14 n° 12, 165-210
- MESQUITA A. (1989) L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie. *Thèse de doctorat de l'Université Louis Pasteur.*

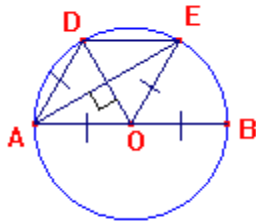
ANNEXES

Extrait d'un protocole d'expérimentation issue en classe de Seconde.

Camille-Gaëlle,

30 Mars 2000

Problème



[AB]diamètre du cercle

A, D et E sont des points du cercle

(AE) est perpendiculaire à (OD)

AO = AD

Montrer que AOED c'est un losange

12 C: ouais, ouais, pour un losange il faut dire que les diagonales se coupent dans leur milieu et ils sont perpendiculaires

13 C: le losange... les diagonales se coupent dans leurs milieu

14 G: et perpendiculaires

15 C: Attend, perpendiculaires c'est bon là, en fait, il faut dire que....

16 G: En fait ce coté c'est le même que celui là, hein, il faut dire qu'elles sont parallèles aussi ...t'as jamais utilisé le triangle rectangle dans le cercle? Je ne sais plus (*elle trace le segment BE*)

17 C: ouais, mais.....

18 G: nonmais.....

19 C: mais oui, mais..... en fin ...ce n'est pas la peine de dire qu'elles sont parallèles à partir du moment qu'on sait que c'est un quadrilatère où les diagonales se coupent en leur milieu et perpendiculairement, dans ce cas là c'est évident qu'elles sont parallèles, non?

20 G: ouais, et ... si on fait comme ça.....

21 C: ouais, mais dans ce cas là se coupent dans leur milieu

22 G: et comment tu peux savoir qu'y se coupent dans leur milieu?

23 C: ben justement, c'est ce qu'on veut démontrer, non?

Silencechuchotement.....

24 G: *chuchote* A, D,O, attend,ça .A, OD, A.

25 C: c'est trop chiant

26 G: regarde ce qu'on peut dire: que AEB c'est rectangle

.....

28 C: oui, oui, mais ça sera bon?

30 G: on sait jamais je peut toujours servir

31 C: mais ouais, ça c'est , tout ça c'est des données et tout... *elle se réfère aux données à coté du dessin*

32 G: Attend, "A, D, E points du cercle AE perpendiculaire et AO égal AD

33 C: ah, ouais, ce que tu veut dire c'est que.....

34 G: je ne sais pas si ça sert à quelque chose, mais on sait jamais

35 C: je ne sais pas.....

36 G: peut être on peut démontrer,tien regarde ça c'est symétrique par rapport à ça (AO et DE) donc en fait c'est le même

37 C: et alors?

38 G: et après il faut qu'on puisse démontrer qu'il est parallèle à celui là

39 C: ouais, mais ce qu'il nous faut ce de dire que c'est le milieu là, ce truc, non?

40 G: ouais,

41 C: c'est le milieu de ça et de ça (*de DO et de AE*). Bon, super!

42 C: Attend, AO égal AD (*elle revient aux données codées sur le dessin*) et si on prouve que le triangle DAO est isocèle,... parce que ça fait quelque chose, tu sais, par rapport à ça (DO)

43 G: ouais, parce que c'est la hauteur

44 C: ouais, c'est la hauteur

45 G: ouais, c'est aussi la médianeAH OUIII

46 C: ça veut dire, comme ça c'est la hauteur dans un triangle isocèle est aussi médiane donc..... on peut donner un lettre? (*ou point du milieu, H*)

47 G: on compare le triangles en fait

48 C: on dit que c'est quoi? C'estH

49 C: ADO isocèle HA est la hauteur car , attend...AE est perpendiculaire à OD

50 G: regarde les données

51 C: et aussi E est perpendiculaire à OD alors AH perpendiculaire OD . Marque-le là dessus! On met (*elle écrit sur la feuille*)... Si ...il faut dire que TH, H est un point de la droite AE et AE perpendiculaire à OD donc ça veut dire que AH perpendiculaire DO

.....

55 C: AH hauteur du triangle ADO, et si AD égal DO... ah! t'as mit +(Gaëlle avait déjà écrit que ADO isocèle) ADO isocèle car...

56 G: tu fais une flèche

57 C: oui, attends je met : car AO égal AD, et dans un triangle isocèle la hauteur est aussi médiane (*le disent les deux élèves ensemble*)

.....