L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés

Actes du colloque emf 2006

Un enseignement renouvelé du nombre irrationnel

Matthieu Petit, *Université de Sherbrooke, Canada*

Résumé

Le concept de nombre en est un en construction tout au cours du primaire et du secondaire. L'élève débute ses apprentissages scolaires avec une compréhension qui se limite aux nombres naturels pour en arriver à la fin du secondaire avec un concept de nombre plus complet et mature qui devrait comprendre les nombres rationnels et les irrationnels. Contrairement aux nombres rationnels, pour lesquels de nombreuses études ont permis de mettre en lumière les difficultés que représente leur enseignement, peu de recherches nous guident quant à l'enseignement des nombres irrationnels. En outre, les programmes d'études les abordent peu dans leur spécificité et les manuels scolaires n'en donnent que des définitions qui les opposent aux nombres rationnels sans pour autant mettre en valeur leur nature et leurs caractéristiques. Or, la découverte du nombre irrationnel fut un événement de grande importance mathématique et philosophique. S'intéresser à l'évolution du concept permet de saisir le rôle qu'il a joué dans l'histoire des mathématiques. Afin de mieux comprendre les enjeux d'un enseignement du nombre irrationnel pour le secondaire, nous nous sommes intéressés au contexte historique du concept. Les dimensions historiques et culturelles du nombre irrationnel nous ont permis d'élaborer des outils pratiques pour un enseignement de ce concept destiné à des élèves de secondaire 3. Une expérimentation didactique effectuée au cours du printemps 2005 nous a amené à identifier des conceptions d'apprenants et à repérer des obstacles épistémologiques d'un enseignement du nombre irrationnel.

L'importance du concept de nombre réel

Il est important que les élèves se construisent une image cohérente de l'ensemble des nombres réels durant leur secondaire. « The entire structure of school algebra and all of mathematical analysis can be erected on the concept of real number »[1] (Kolmogov dans Davydov, 1975, p. 110). Ainsi, une compréhension de la notion de nombre réel constitue une finalité de l'enseignement des mathématiques au secondaire.

Comprendre ce qu'est l'ensemble des nombres réels sans connaissance de l'ensemble des nombres irrationnels est insensé, car ces derniers avec les nombres rationnels forment l'ensemble même des réels. « The irrational numbers are a part of the system and without them the concept of real numbers is incomplete. It suffices to neglect the irrational numbers and the whole system falls apart. This is what happens today »[2] (Fischbein, Jehiam et Cohen, 1995, p. 30).

1 L'entière structure de l'algèbre et toute l'analyse mathématique s'élaborent à partir du concept de nombre réel (traduction libre).

2 Les nombres irrationnels font partie du système et sans eux, le concept des nombres réels est incomplet. Il suffit de négliger les nombres irrationnels et tout le système s'écroule. C'est ce qui se passe aujourd'hui (traduction libre).

L'enseignement du concept de nombre irrationnel

Actuellement, aucune donnée nous informe de la compréhension des élèves du Québec à l'égard du nombre irrationnel. Toutefois, considérant l'enseignement actuel de cette notion dans les écoles du Québec, il nous est permis de croire que cet enseignement conduit à une vision incomplète et même parfois erronée chez les élèves du concept de nombre et que cela a des conséquences néfastes sur la compréhension mathématique des élèves. Il est grand temps de renouveler l'enseignement du nombre irrationnel au secondaire.

Une étude de Fischbein, Jehiam et Cohen (1995) démontre que parmi tous les ensembles de nombres enseignés au secondaire, c'est celui des nombres irrationnels qui semble le plus confus dans l'esprit des élèves :

> *School mathematics is generally not concerned with the systematic teaching of the hierarchical structure of the various classes of numbers – from which the irrational numbers constitute an integral part. As an effect, most of the high school students and many preservice teachers are not able to define correctly the concepts of rational, irrational and real numbers. […] The concept of irrational numbers especially is totally confused in the minds of many students.*[3] (*Ibid*., p. 43)

Toujours selon cette même étude, plusieurs élèves définissent le nombre irrationnel comme étant un nombre qui n'est pas un entier, un nombre avec une infinité de chiffres après la virgule ou même encore, un nombre négatif. La confusion est donc très grande.

Des auteurs pensent qu'il faut surmonter plusieurs obstacles épistémologiques afin de bien comprendre le nombre irrationnel. Fischbein, Jehiam et Cohen (1995, p. 30) mentionnent deux grandes difficultés « intuitives » au regard du nombre irrationnel. La première se résume par le fait que les nombres rationnels ne couvrent pas la droite numérique, et ce, malgré le fait qu'il y en ait une infinité. Cette difficulté concerne davantage la droite numérique qui contient par définition, tous les nombres rationnels et les irrationnels.

La deuxième difficulté est étroitement liée au concept de nombre irrationnel. Elle se situe sur le plan de l'incommensurabilité, la notion opposée de la commensurabilité. Deux ou plusieurs grandeurs sont commensurables si elles ont une unité de mesure commune qui permet d'exprimer leur rapport par un nombre rationnel, soit une fraction. En opposition, nous disons que des grandeurs sont incommensurables lorsque nous ne pouvons pas exprimer leur rapport par un nombre rationnel. Ainsi, deux grandeurs sont incommensurables lorsque le rapport des mesures est un nombre irrationnel.

C'est la réalisation de l'existence de grandeurs incommensurables qui a amené le débat concernant l'irrationalité de certains rapports. « If concepts are divorced from their sources, […] they may lose their content »[4] (Davydov, 1975, p. 119). C'est donc la notion d'incommensurabilité qui nous

3 L'enseignement des mathématiques à l'école ne se soucie généralement pas d'un enseignement systématique de la structure hiérarchique des différents ensembles de nombres – pour laquelle les nombres irrationnels constituent une partie importante. Cela a pour effet que la majorité des élèves du secondaire ainsi que plusieurs futures enseignantes et futurs enseignants ne sont pas capables de définir correctement les concepts de nombres rationnels, irrationnels et réels. […] Le concept de nombres irrationnels est particulièrement confus dans l'esprit de plusieurs élèves (traduction libre).

4 Si les concepts sont séparés de leurs sources, […] ils risquent de perdre leur signification (traduction libre).

permet d'en arriver à une définition du nombre irrationnel : rapport entre deux quantités incommensurables. Voilà qui définit correctement ces nombres que certains ont déjà qualifiés de nombres inexprimables, anormaux, spéciaux, bizarres, qui n'arrivent jamais…

Nous pouvons imaginer que se faire à l'idée qu'il existe des nombres exprimant un rapport incommensurable peut être difficile à saisir pour des élèves du secondaire ou même pour toute personne. Nous n'avons qu'à penser à toutes les difficultés que les Pythagoriciens et les autres mathématiciens de l'époque semblent avoir eues. Cependant, faire le lien entre l'incommensurabilité et le nombre irrationnel permet de donner du sens au concept.

Devons-nous craindre qu'il ne soit pas possible pour des élèves du secondaire de comprendre ce qu'est l'incommensurabilité et par le fait même, de donner du sens au concept de nombre irrationnel ? L'étude de Fischbein, Jehiam et Cohen (1995) avait comme hypothèse que l'incommensurabilité constituait une difficulté intuitive à la compréhension de la notion de nombre irrationnel. Toutefois, leur hypothèse s'est avérée fausse, car ils mentionnent en conclusion que les élèves interrogés provenant d'écoles et d'universités de Tel Aviv en Israël, ne sont pas étonnés du fait que des quantités peuvent être incommensurables. « Generally speaking, one may affirm, contrary to our initial assumption, that the concept of irrational numbers does not encounter a particular intuitive difficulty in the students' mind. »[5] (*Ibid*., p. 43) Il est donc possible de croire qu'un enseignement convenable permettrait de surmonter cette difficulté dite intuitive du nombre irrationnel qu'est l'incommensurabilité.

Or, pour qu'une notion soit bien expliquée en classe, il faut que le personnel enseignant comprenne bien celle-ci. Est-ce le cas pour le nombre irrationnel et l'incommensurabilité ? Arcavi, Bruckheimer et Ben-Zvi (1987, p. 18) mentionnent que plusieurs enseignants et enseignantes de mathématiques en formation dans diverses écoles secondaires d'Israël, pensent que la découverte des nombres à virgule précède la découverte du concept de nombre irrationnel. C'est incorrect, car l'arrivée de la notion de nombre irrationnel s'est faite beaucoup plus tôt (Ve siècle avant notre ère) et c'est à partir de la géométrie (les segments incommensurables) que le concept s'est élaboré. Cette fausse croyance, fortement répandue, est probablement due à la définition concernant l'écriture du nombre irrationnel sous forme de nombre à virgule : « nombre dont la suite de décimales est illimitée et non périodique » (Guay et Lemay, 1995, p. 390).

Que de futures enseignantes et de futurs enseignants pensent que la découverte des nombres à virgule précède la découverte de la notion de nombre irrationnel ne fait qu'intensifier le problème que représente l'enseignement du nombre irrationnel au secondaire. Nous pouvons imaginer que si plusieurs enseignants et enseignantes en formation ne connaissent pas ce qui est au cœur du concept de nombre irrationnel, il est vraisemblable que leurs élèves soient tous aussi dans le noir. Il est difficile d'enseigner ce que nous ne connaissons pas, ou ce que nous ne comprenons pas.

5 De façon générale, il est possible d'affirmer que contrairement à notre supposition initiale, le concept de nombre irrationnel ne rencontre pas de difficulté intuitive majeure dans l'esprit des élèves (traduction libre).

Le contexte historique du nombre irrationnel

Afin de mieux comprendre les enjeux d'un enseignement du nombre irrationnel pour le secondaire, nous nous sommes intéressés au contexte historique de ce concept.

> *La découverte de l'irrationalité passe pour une contribution de premier ordre des mathématiques grecques du début. Pourtant les historiens n'ont pas encore été capables d'expliquer de façon satisfaisante comment s'est faite cette découverte. Tout ce qui paraît être plus ou moins assuré sur la base des travaux antérieurs, c'est que les grandeurs irrationnelles (ou les rapports incommensurables) étaient connues des mathématiciens grecs depuis le milieu du Ve siècle.* (Szabo, 1977, p. 31)

La découverte de l'incommensurabilité fut un événement de grande importance mathématique et philosophique. « One can see through these elements that this discovery did indeed act as a trauma for Greek mathematicians and that its effects have traversed history, since traces are still perceptible today »[6] (Berdot, Blanchard-Laville et Bronner, 2001, p. 9). Ce sont les Grecs qui auraient été les premiers confrontés à l'incommensurabilité, un phénomène géométrique qu'ils auraient qualifié dès le départ d'irrationnel. Ainsi, cette notion est à l'origine de l'irrationalité, qui devint le concept de nombre irrationnel.

Certains chercheurs, dont Kline (1972), pensent que le premier rapport incommensurable observé fut en lien avec la diagonale d'un carré unité. Le rapport de cette mesure et d'un des côtés du carré donne $\sqrt{2}$. Nous donnons souvent cet exemple lorsque nous abordons le sujet de l'incommensurabilité.

Cependant, comme le mentionne Le Lionnais (1983), d'autres pensent que c'est le nombre d'or ($\phi = (1 + \sqrt{5}) / 2$) qui fut le premier rapport incommensurable observé. Cela s'explique par le fait que nous associons la découverte de l'idée d'irrationalité à Hippase de Métaponte. Or celui-ci aurait travaillé sur le dodécaèdre pentagonal (un solide limité de toutes parts par douze pentagones) à l'intérieur duquel plusieurs rapports de segments donnent le nombre d'or.

Pour les mathématiciens de cette période de l'histoire, il semble qu'il paraissait impossible que des mesures ne puissent pas se représenter sous forme de fractions : «$\sqrt{2}$ exists (as the diagonal of the unit square) ; yet it does not exit (as a fraction) » [7] (Davis et Hersh, 1981, p. 180). Les livres d'histoire des mathématiques décrivent cet épisode comme le « scandale des irrationnelles (sous-entendu : des grandeurs irrationnelles) » (Baruk, 1992, p. 641). Ce que proposait Hippase de Métaponte semble avoir été pour les gens de l'époque privé de raison.

> *Un Grec en particulier croyait que la suite des nombres rationnels représentait un modèle idéal de continuité, non seulement en mathématiques, mais également sur le plan religieux : Pythagore de Samos. Il avait fondé une communauté religieuse […] qui voyait la divinité dans l'image de la continuité, et plus particulièrement dans les nombres employés pour la déterminer.* (Guillen, 1983, p. 40-41)

6 Nous constatons que cette découverte fut traumatisante pour les mathématiciens Grecs et que les effets de celle-ci ont traversé l'histoire pour être perceptibles encore aujourd'hui (traduction libre).

7 $\sqrt{2}$ existe (c'est la mesure de la diagonale du carré unité), mais elle n'existe pas (ce n'est pas une fraction) (traduction libre).

Ainsi, pour les Pythagoriciens, cette idée d'irrationalité amenée par Hippase de Métaponte, un disciple immédiat de Pythagore (569- 475 avant notre ère), semble avoir été scandaleuse, car leur « vision du monde où tous les rapports étaient rationnels se trouvait en effet mise en défaut » (Baruk, 1992, p. 641). « The Pythagoreans were startled and disturbed by the discovery that some ratios cannot be expressed by whole number »[8] (Kline, 1972, p. 32). Certains écrits parlent même d'une « trahison criminelle envers la doctrine de Pythagore » (Szabo, 1977, p. 32).

> *Selon l'historien Diogène Laërce, Hippase de Métaponte, le membre de l'école pythagoricienne à l'origine de cette découverte, fut emmené en mer par ses collègues et jeté par-dessus bord pour avoir mis fin à leur croyance en la réduction de toute chose à des nombres entiers et des rapports de nombres entiers. Vraie ou non, cette anecdote montre que la relation entre grandeurs commensurables et incommensurables, et entre nombres rationnels et irrationnels, a joué un rôle très important en mathématiques.* (Mankiewicz, 2000, p. 26)

Ainsi, comme le rapporte Mankiewicz (2000), il est possible de douter que la découverte des irrationnels ait fait scandale. Ce doute vient, entre autres, du fait que Platon (427-347 avant notre ère) et Aristote (384-322 avant notre ère) n'ont jamais mentionné tout cet émoi dans les différents documents qu'ils nous ont laissés alors que ces derniers furent écrits peu d'années après. Nous serions donc peut-être en présence d'une légende tardive :

> *Légende selon laquelle le pythagoricien qui avait, le premier, divulgué l'irrationalité de $\sqrt{2}$ aurait péri dans un naufrage. Les auteurs de la légende ont voulu parler par allégorie. Ils ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de forme doit demeurer caché. Que si quelque âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants. La découverte de $\sqrt{2}$ avait donc paru livrer accès à l'univers redoutable de la démesure, à un domaine difficile à penser, irréductible aux normes habituelles du calcul et du discours bien réglé.* (Desanti, 1967, p. 441)

Davis et Hersh (1981, p. 180) mentionnent que les Babyloniens avaient trouvé, vers le 17e siècle avant notre ère, une excellente approximation de $\sqrt{2}$, équivalent à 1,414232963. Il fallut cependant attendre quelques siècles avant d'en arriver à la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

> *La seule façon d'affirmer qu'une chose n'existe pas, c'est de prouver qu'elle ne peut pas exister. C'est à dire qu'il faut passer de l'impuissance à trouver la chose en question à l'assurance que cette chose n'existe pas. Ce passage a un prix fort, il exige une démonstration.* […] *C'est ce qu'ont fait les pythagoriciens. Ils ont démontré qu'un nombre rationnel dont le carré est 2 ne peut pas exister.* (Guedj, 1998, p. 132)

Baruk (1992, p. 641) mentionne que nous retrouvons la démonstration de l'irrationalité de la racine carrée de 2 dite « par le pair et l'impair » dans un des livres des Éléments d'Euclide (325-265 avant notre ère), mais que cette démonstration était courante à l'époque d'Aristote (384-322 avant notre ère). Mankiewicz (2000, p. 26) quant à lui, écrit que Aristote attribuait aux disciples de Pythagore cette première démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Papert (1980, p. 197) mentionne que celle-ci

8 Les Pythagoriciens étaient ébranlés par la découverte que certaines mesures ne peuvent pas se représenter par un rapport de deux entiers (traduction libre).

fut identifiée par le mathématicien anglais G. H. Hardy (1877-1947) comme un exemple important de la beauté des mathématiques. Il s'agit d'une démonstration par l'absurde. Cette démonstration est particulièrement célèbre, car plusieurs l'identifient comme étant la toute première démonstration mathématique. Il s'agit donc d'un grand moment de l'histoire des mathématiques. La valeur de l'enseignement de la notion de nombre irrationnel n'en est que plus grande, d'autant plus que son évolution se poursuit.

Que ce soit le nombre d'or ou la racine carrée de 2 qui soit à l'origine de la découverte de l'incommensurabilité, certains écrits nous permettent de croire que l'irrationalité de $\sqrt{2}$ était connue au IV^e siècle avant notre ère. En effet, Platon cite dans un de ses livres un dialogue qui se serait déroulé 399 années avant notre ère et dans lequel le mathématicien Theodorus de Cyrene démontre à un groupe de jeunes hommes l'irrationalité des racines carrées de 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 et 17. Pourquoi n'a-t-il pas commencé avec la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$? L'hypothèse est que cela avait déjà été fait comme le souligne Fritz (1945).

> *This in itself then would be quite sufficient to show that the discovery of incommensurability must have been made in the earlier part of the last quarter of the 5th century at the very latest, and since mathematical knowledge at that time traveled very slowly, may very well have been made earlier.* (p. 244)

Cette démonstration de l'irrationalité des racines carrées de 3 à 17, illustre bien l'importance des écrits mathématiques qui nous permettent de garder certaines traces de l'évolution mathématique de cette époque. Or les Éléments d'Euclide, qui constituent l'un des écrits mathématiques les plus importants, ne contenaient pas uniquement la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Ces écrits comportaient plusieurs définitions importantes : segments commensurables et incommensurables, longueur irrationnelle, etc. Cela a grandement aidé à légitimer l'incommensurabilité en géométrie.

Par la suite, nous avons l'impression qu'il a fallu attendre plusieurs années pour que la notion de nombre irrationnel subisse une certaine évolution. Peut-être est-ce dû à l'absence d'écrits mathématiques. Tout de même, certains livres hébreux datant du 12^e siècle nous rapportent que leurs mathématiciens s'intéressaient au rapport entre la circonférence du cercle et son diamètre. Comme nous le savons à présent, ce rapport donne un nombre irrationnel, à savoir π. Or les mathématiciens hébreux en étaient arrivés à une approximation : 22/7.

> *Cette catégorie numérique [les nombres irrationnels] resta* […] *mal précisée pendant des siècles à cause des numérations imparfaites d'autrefois qui ne permirent pas de représenter ces nombres d'une manière cohérente : ceux-ci étaient en effet désignés par des mots ou des valeurs approchés n'ayant apparemment aucun rapport les uns avec les autres. Ne pouvant les définir correctement, on se borna par conséquent à en constater l'existence sans pouvoir les impliquer dans un raisonnement général.* (Ifrah, 1994, p. 383)

De nos jours, nous associons le nombre irrationnel au nombre à virgule. Pourtant, l'arrivée des nombres à virgule se situe beaucoup plus tard au cours de l'histoire, soit en 1585, et c'est grâce à Simon Stevin (1548-1620) qui a réussi à imposer sa Disme, qui veut dire « dixième ». Pourquoi a-t-il fallu attendre si longtemps avant que les nombres à virgule soient utilisés par les mathématiciens ? Baruk (1992, p. 300) donne comme raison que l'écriture des entiers en base 10, appelé système décimal (système que nous utilisons aujourd'hui et duquel découlent les nombres à virgule), n'était pas encore répandue à la fin du XVe siècle. À cette période, nous écrivions encore en chiffres romains et nous calculions avec l'abaque, une sorte de boulier. Cependant, le système décimal devint rapidement connu, car il permet d'effectuer des calculs avec une étonnante facilité en plus de coder efficacement des nombres de plus en plus grands. Difficile d'effectuer la multiplication de 73 par 57 en chiffres romains ou sur un abaque. Les nombres à virgule nous viennent du besoin d'effectuer des calculs avec des fractions.

> *C'est Simon Stevin (1548-1620), caissier, comptable et professeur de mathématiques, qui parviendra à convaincre ses contemporains du bénéfice qu'il y a à rompre systématiquement les unités en 10, remplaçant les calculs, conversions et réductions aux mêmes dénominateurs par des calculs sur les entiers ordinaires.* (Baruk, 1992, p. 301)

Cette façon d'écrire les nombres permet de représenter tous les nombres réels. «This number concept included natural numbers as well as rational and irrational ones». (Stevin dans Crone, 1955, p. 460) Stevin a proposé cette écriture des nombres à la suite d'études en arithmétique et en géométrie. L'écriture en base 10 tient compte de la notion d'incommensurabilité.

> *In his arithmetical and geometrical studies, Stevin pointed out that the analogy between numbers and line-segments was closer than was generally recognized. He showed that the principal arithmetical operations, as well as the theory of proportions and the rule of three had their counterpart in geometry. Incommensurability existed between line-segments as well as numbers, and since the nature of line-segments was independent of the number that indicated their length, all numbers, including unity, also were of the same nature. All numbers were squares, all numbers were square roots. Not only was $\sqrt{2}$ incommensurable with 2 and $\sqrt{3}$, but so was 2 with $\sqrt{2}$ and $\sqrt{3}$; incommensurability was a relative property, and there was no sense in calling numbers « irrational », «irregular» or any other name which connoted inferiority.*[9] (Crone, 1955, p. 4-5)

Comme le mentionnent Arcavi, Bruckheimer et Ben-Zvi (1987), «the concern about the nature of irrational numbers became more widespread after decimal fractions were developed in the 16th century by Simon Stevin (1548-1620) and others».[10] (p. 20) Malgré tout, nous retrouvons également, à cette époque, des mathématiciens qui banalisaient l'utilité des irrationnels. Ceux-ci hésitaient même à les considérer comme des nombres. Pourtant les liens entre les rationnels et les irrationnels étaient de plus en plus nombreux dû à l'utilisation du nombre à virgule.

C'est Richard Dedekind (1831-1916) qui viendra légitimer les nombres irrationnels en proposant des définitions et des règles pour leur utilisation. Son raisonnement se réfère à la droite numérique et se base, entre autres, sur le fait que des segments de droites peuvent avoir un rapport incommensurable. Sans les nombres irrationnels, la droite numérique est pleine de «trous» :

9 L'intérêt pour la nature des nombres irrationnels est devenu beaucoup plus répandu après que les nombres à virgule ont été développés durant le 16
siècle par Simon Stevin (1548-1620) et les autres (traduction libre).

10 [La] comparaison du domaine […] des nombres rationnels avec celui d'une ligne droite a mené à réaliser qu'il existe des trous, une certaine imperfection ou discontinuité sur celle-ci alors que nous considérons que la ligne droite est complète, sans trou, ou continue (traduction libre).

[the] comparison of the domain […] *of rational numbers with a straight line has led to the recognition of the existence of gaps, of a certain incompleteness or discontinuity of the former while we ascribe to the straight line completeness, absence of gaps, or continuity.* (Dedekind, 1963, p. 6)

C'est à partir de cette époque que les nombres irrationnels sont devenus de plus en plus répandus.

La science a un réel besoin des nombres irrationnels. Et cela fait déjà bien plus d'un siècle que les scientifiques ont noté qu'un nombre croissant de quantités assez particulières faisaient leur entrée dans presque chaque théorie scientifique, signifiant par là leur importance dans les descriptions modernes de l'espace-temps. (Guillen, 1983, p. 48)

Les concepts « clés » pour un enseignement du nombre irrationnel

De par les différentes dimensions historiques et culturelles du concept de nombre irrationnel, nous en sommes venu à identifier différents concepts mathématiques sur lesquels pourrait reposer une série d'activités permettant un enseignement renouvelé du nombre irrationnel. Parmi ces concepts, on retrouve celui de rapport, de commensurabilité, d'incommensurabilité, de périodicité, de mesure et de droite numérique. De plus, nous avons opté pour le concept d'enseignement stratégique qui est ancré dans une perspective cognitiviste, afin d'encadrer tous les concepts mathématiques mentionnés ci-dessus et de guider nos choix didactiques lors d'un enseignement du nombre irrationnel.

Les objectifs de recherche

Compte tenu du peu d'information sur la compréhension du concept de nombre irrationnel, nous avons opté pour un objectif de départ qui est de décrire et d'analyser les connaissances du nombre irrationnel chez des élèves de secondaire 3. Cet objectif avait pour but de combler le vide d'information à l'égard de l'enseignement du nombre irrationnel au Québec. Le secondaire 3 fut choisi puisque la notion de nombre irrationnel est légèrement abordée à ce niveau.

Lorsque notre objectif de départ fut atteint, nous avons pu passer à notre objectif principal de recherche, soit une élaboration et une expérimentation d'un enseignement stratégique du nombre irrationnel destiné à des élèves de secondaire 3.

Le dispositif expérimental

À partir des dimensions historiques et culturelles du nombre irrationnel, nous avons élaboré une première version d'un test et d'une séquence d'activités pour un enseignement de ce concept destiné à des élèves de secondaire 3. L'élaboration de ces documents s'est faite selon les trois phases de l'enseignement stratégique : la préparation à l'apprentissage, la présentation du contenu, et l'application et le transfert des connaissances. (Jones *et al*., 1987 ; Tardif, 1992) Nous avons utilisé le guide de planification pour l'enseignement stratégique des mathématiques proposé par Lindquist (1987). Le test et la séquence d'activités furent modifiés et validés par un comité d'experts composé d'un praticien, d'un mathématicien et d'un didacticien. Le test couvrait les différents ensembles et représentations de nombres (fractions, nombres à virgule, nombres naturels, entiers, rationnels, irrationnels et réels). Quant aux activités, elles étaient variées et faisaient appel à plusieurs concepts « clés » issus du contexte historique du nombre irrationnel. Par exemples, des activités faisaient appel au concept de mesure et d'autres au concept de rapport. Les élèves avaient à effectuer plusieurs représentations (droite numérique, illustration, diagramme de Venn…).

Notre collecte de données consistait en une expérimentation didactique effectuée au cours du printemps 2005 auprès de trois groupes de trois élèves de secondaire 3 d'une école secondaire du Québec. Selon Steffe et Thompson (2000), l'expérimentation didactique considère l'enseignement comme un facteur déterminant du développement intellectuel de l'élève. Cet aspect fut important quant à notre choix d'opter pour l'expérimentation didactique.

L'analyse qui a suivi nous a amené à identifier des conceptions d'apprenants et à repérer des obstacles épistémologiques d'un enseignement du nombre irrationnel qui prend racine dans des dimensions historique et culturelle. Cette analyse comportait plusieurs documents (les tests, les activités, le verbatim, le journal de bord et les documents visuels). Nous avons utilisé le modèle de Miles et Huberman (1991) afin de structurer l'analyse qualitative de nos données. Un codage fut effectué à l'aide du logiciel NVivo. Un procédé interjuge a permis de valider le codage.

Les résultats de la recherche

Les résultats nous indiquent que les élèves peuvent être introduits à différents concepts issus de dimensions historique et culturelle du nombre irrationnel. Entre autres, les élèves semblent utiliser convenablement le concept de mesure (unité de mesure) en lien avec les concepts de commensurabilité et d'incommensurabilité. De plus, les élèves semblent faire le lien entre rationnel et commensurable, ainsi qu'entre irrationnel et incommensurable. Certaines tendances s'observent : les élèves semblent expliquer que des quantités sont incommensurables entre elles lorsqu'il y a un nombre irrationnel d'impliqué dans le rapport ; les élèves semblent expliquer le positionnement de nombres irrationnels sur la droite numérique de façon procédurale en utilisant le concept de mesure ou celui de rapport en fonction du type de droite utilisé.

Au départ, les élèves interrogés semblent avoir une conception du nombre irrationnel fortement liée au concept d'infinité. Par la séquence d'activités, leur conception comprend désormais davantage de notions issues de l'évolution du concept de nombre irrationnel depuis la découverte de l'incommensurabilité. Leur conception du nombre irrationnel, et par le fait même du nombre réel, en est donc plus solide. Notre recherche semble valider un renouvellement de l'enseignement du nombre irrationnel et propose des pistes à suivre, ainsi que des obstacles à éviter.

Nous ferons état de nos résultats plus en détails lors de notre présentation au colloque de l'EMF 2006. Nous présenterons également les différents outils pratiques que nous avons élaborés et validés.

Références

Arcavi, A., Bruckheimer, M. et Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers : the case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics*, *7*(2), 18-23.

Baruk, S. (1992). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires : pédagogie, langue, méthode, exemples, étymologie, histoire, curiosités*. Paris : Éditions du Seuil.

Berdot, P., Blanchard-Laville, C. et Bronner, A. (2001). Mathematical knowledge and its relation to the knowledge of mathematics teachers : linked traumas and resonances of identity. *For the Learning of Mathematics*, *21*(1), 2-11.

Crone, E. (dir.) (1955). *Simon Stevin : Principal works*. Amsterdam : C.V. Swets & Zeitlinger.

Davis, P. J. et Hersh, R. (1982). *The mathematical experience*. Boston : Houghton Mifflin Company.

Davydov, V.V. (1975). The psychological characteristics of the prenumerical period of mathematics instruction. *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, *7*, 109-206.

Dedekind, R. (1963). *Essays on the theory of numbers*. New York, NY : Dover publications.

Desanti, J.T. (1967). Une crise de développement exemplaire : La « découverte » des nombres irrationnels. *In* J. Piaget (dir.), *Logique et connaissance scientifique* (p. 439-464). Dijon : Gallimard.

Fishbein, E., Jehiam, R. et Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational studies in mathematics*, *29*(1), 29-45.

Fritz, K. von (1945). The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of Mathematics*, *46*(2), 242-264.

Ifrah, G. (1994). *Histoire universelle des chiffres : l'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul*. Paris : Robert Laffont.

Guay, S. et Lemay, S. (1995). *Scénarios : Mathématique 3e secondaire* (Tome 2). Éditions HRW.

Guedj, D. (1998). *Le théorème du perroquet*. Éditions du Seuil.

Guillen, M. (1983). *Invitation aux mathématiques : des ponts vers l'infini*. Paris : Albin Michel.

Jones, B.F., Palincsar, A.S., Ogle, D.S. et Carr, E.G. (1987). *Strategic teaching and learning : Cognitive instruction in the content areas*. Alexandria : ASCD.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times* (volume 1). Oxford University Press.

Le Lionnais, F. (1983). *Les nombres remarquables*. Paris : Hermann.

Lindquist, M.M. (1987). Strategic Teaching in Mathematics. *In* B.F. Jones, A.S. Palincsar, D.S. Ogle et E.G. Carr (dir.), *Strategic teaching and learning : Cognitive instruction in the content areas* (p. 111-134). Alexandria : ASCD.

Mankiewicz, R. (2000). *L'histoire des mathématiques*. Londres : Éditions du Seuil.

Miles, M. B. et Huberman, A. M. (1984). *Qualitative data analysis : A sourcebook of new methods*. Beverly Hills : Sage Publications.

Papert, S. (1980). *Mindstorms : children, computers, and powerful ideas*. New York, NY : Basic Books.

Tardif, J. (1992). *Pour un enseignement stratégique : l'apport de la psychologie cognitive*. Montréal : Les Éditions Logiques.

Steffe, L. P. et Thompson, P. (2000) Teaching experiment methodology : underlying principles and essential elements. *In* A.E. Kelly et R.A. Lesh (dir.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (p. 267-306). Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum.

Szabo, A. (1977). *Les débuts des mathématiques Grecques*. Paris : VRIN.

Pour joindre l'auteur

Matthieu Petit
Université Bishop et Université de Sherbrooke
Adresse postale : 325 rue Dufferin, app. #3, Sherbrooke (QC), Canada, J1H 4M6
Courriel : matthieu_petit@hotmail.com