LA DIMENSION LINGUISTIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

MOULOUD ABDELLI
MOULOUDABDELLI@HOTMAIL.FR

Résumé. La mathématique utilise un langage relativement pauvre. Il en résulte que son enseignement est confronté aux difficultés suivantes: **l'emploi fréquent d'un vocabulaire technique et l'absence de termes qui servent à traduire les observations.** L'intégration de la dimension linguistique dans le cours de mathématiques doit obéir à différents indicateurs à examiner. Le sens des mots utilisés relève de la phrase dans laquelle ils sont insérés et des fonctions sémantiques qui la caractérisent. Nous montrons, ici, que la dimension linguistique occupe une place prépondérante.

Mots clés. mathématiques, enseignement, dimension linguistique, lecture, apprentissage, compréhension, didactique.

I - Introduction :

La dimension linguistique occupe une place privilégiée dans la recherche de la complexité en jeu dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Du point de vue didactique, parmi les seuils les plus répandus dans l'enseignement des mathématiques figure la compréhension de l'énoncé qui ne doit pas être confondue avec la compréhension du problème. E.BLUTEL soulignait : « J'avais remarqué depuis longtemps l'inaptitude de la majorité des élèves du 1er cycle à reproduire exactement les textes des règles d'arithmétique qu'on peut leur donner à appliquer ou à expliquer, le jour d'une composition. Lorsqu'il s'agissait d'une explication, la lecture des copies me permettait d'attribuer cette incapacité, non à l'étourderie naturelle à cet âge, mais le plus souvent à une incompréhension. **Au bout d'un certain temps, la mémoire se refusait à rendre correctement ce que l'esprit ne concevait pas** » (E. BLUTEL, 1956).

Les questions essentielles soulevées, ici, se rapportent principalement à l'étude de l'interaction de la langue naturelle avec le langage mathématique. Les rapports signifiant – signifié ne sont pas toujours « clairs ». Il en résulte des difficultés dans l'usage des symboles et notamment des difficultés dans l'accès à la compréhension. Dans cette contribution, nous tenterons de cerner ces difficultés.

Pour ce faire, il nous paraît utile de revoir quelque peu le passé de l'enseignement des mathématiques pour apprécier à travers le vocabulaire, les raisons qui font que les élèves ne passent pas plus de temps à agir qu'à regarder faire. En effet, si les mathématiques ont développé leur propre langage, c'est jusqu'à aujourd'hui par l'intermédiaire des langues naturelles, de sorte qu'un mathématicien s'exprime en général de façon privilégiée dans la langue qu'il utilise dans sa vie courante.

En fait, le discours mathématique est assez dépouillé :

- il évite les doubles emplois et obéit à des règles strictes,
- il privilégie l'écrit,
- l'écriture des équations ou des schémas de démonstrations se fait à l'aide des symboles universels.

Il n'en est plus de même dès qu'un professeur essaie d'expliquer à ces élèves non pas le résultat lui-même ou sa démonstration, mais l'originalité de celle-ci, l'intérêt de celui-là, les raisons qui l'ont mené à se poser un problème, les pistes qu'il a parcouru pour le résoudre, les

variétés des applications. C'est pourtant ce qui est captivant dans un exposé, mais le vocabulaire utilisé sort alors largement du champ mathématique pour empiéter dans celui de l'épistémologie, de la psychologie, ou de tel ou tel domaine concret.
L'élève rencontre alors des mots spécifiques à la matière, au domaine d'étude en question et des mots non exclusivement mathématiques dont le sens, la signification et la compréhension relèvent de la phrase agissant comme contexte, dans laquelle ces mots sont insérés et des fonctions sémantiques qui les caractérisent.
Par ailleurs, la littérature en didactique des mathématiques et autres domaines se rapportant à l'éducation souligne que les notions mathématiques sont le résultat d'une lente évolution, jamais terminée. « Elles n'étaient à leur début qu'empiriques et approximatives : on a décintré, on a rejeté les représentations grossières qui avaient servi d'appui ; il n'est resté que construction d'elle-même irréprochable aux yeux du logicien » (H. Poincaré). Ainsi les mathématiques sont devenues une science exacte, « un langage bien fait » dont le vocabulaire va toujours en s'enrichissant.

II – Usage de la langue naturelle dans l'expression de notions exactes :

II – 1 Qu'est-ce-que la langue naturelle ?

On pourrait définir la langue naturelle comme l'instrument du langage vocal, dont la fonction est la communication à l'intérieur d'une communauté humaine.
Chaque langue est une manière de décrire, à l'aide de signes que nous appellerons des mots, l'expérience d'une communauté à des fins de communication. Ces signes forment un système conventionnel ; on peut les combiner en respectant certaines règles tout aussi conventionnelles et qu'on apprend par l'éducation.

II – 2 Qu'est-ce-que la lecture ?

Définir la lecture est un exercice délicat. On peut lire des textes, des images, des objets, des visages, des scènes, des paysages….tous ces cas de lecture ont pour point commun : savoir lire c'est comprendre.
Toute activité de lecture de textes, exige du lecteur la connaissance du langage, une connaissance concernant les liaisons qui existent entre les lettres successives dans la langue naturelle et le sens des mots ainsi constitués, et enfin une connaissance de la structure de la langue, ce que les linguistes appellent la compétence (Ph. Perrenoud, 2000). Cette dernière connaissance aide le lecteur dans la recherche des termes logiques ou des mots « outils » du langage qui le renseignent sur les relations logiques ou argumentatives existant entre des énoncés donnés ou non donnés dans le texte. La recherche de ces mots permet au lecteur d'aller au-devant du mode de raisonnement.
Ainsi, la lecture dépend à la fois de la connaissance que l'élève a du lexique et de sa connaissance de la syntaxe qui l'aide à la compréhension des relations exprimées par les mots « outils » mais aussi par les mots de liaisons. Elle dépend aussi de sa capacité à faire des hypothèses. Tout se passe donc, comme s'il fabriquait sa propre phrase, et qu'il comparât son hypothèse à la phrase de l'auteur.

II - 3 Problèmes inhérents à l'évaluation de la compréhension par la lecture :

Comme l'enseignement et l'apprentissage doivent tenir compte du niveau atteint par chaque élève, il est essentiel de procéder régulièrement à l'évaluation et à l'interprétation des résultats.

Les variables mesurables et susceptibles de renseigner sur le degré de performance des élèves dans l'activité de la lecture sont : la vitesse de lecture et/ou de compréhension et la qualité de la lecture. Ces variables peuvent être mesurées aux moyens de différents tests :

- Tests de lecture normalisés : qui fournissent des normes de réalisation correspondant au cycle des années de scolarité,

- Tests d'ensemble : qui sont utilisés essentiellement pour examiner le niveau de performance d'un élève dans des techniques de base, comme la reconnaissance des mots, la compréhension de phrases, la connaissance du vocabulaire et la vitesse de lecture,

- Tests informels : qui ne sont pas étalonnés et qui ont un triple objectif : de montrer ce que les élèves ont retenu sur un point précis récemment étudié, de déterminer le niveau de compétence en lecture, de permettre de savoir si les leçons sont bien apprises.

- Test de closure : Il est défini par W.L.Taylor comme « un outil psychologique permettant de jauger le degré de correspondance totale entre les habitudes d'encodage d'émetteurs et les habitudes de décodage des récepteurs » (A.Gagatsis,1982). Il peut être utilisé à deux fins différentes : mesurer la capacité de compréhension en lecture pour un sujet donné ou mesurer la lisibilité d'un texte.

Nous rapportons, ci-dessous, quelques travaux utilisant des tests applicables à différents niveaux scolaires.

II – 4 Quelques recherches sur l'apprentissage des mathématiques :

A – « Conditions d'apprentissage mathématique par la lecture »

Dans sa thèse de 3ème cycle, l'auteur examine certaines des conditions qui favorisent un apprentissage mathématique par la lecture. Pour cela, elle a proposé à des élèves de 1ère un texte sur une notion qu'ils ne connaissent pas encore (« congruence modulo m »). Des versions différentes ont été proposées. Dans ces versions, l'auteur a fait varier quelques uns des facteurs susceptibles de faciliter la compréhension : proposition d'un problème introductif, paraphrase en langue naturelle, adjonction d'une feuille d'exercices partiellement résolus … Après la lecture, l'auteur demande un rappel libre par écrit de ce qui avait été lu et propose une batterie d'exercices à résoudre. Le principal résultat observé a été que les informations les mieux assimilées par le lecteur sont celles qui satisfont aux deux conditions :

- avoir été explicitement présentées
- avoir été réutilisées. (A.I. Rasolofoniaina , 1984)

B – « Articles pédagogiques » :

Les situations rapportées par E. BLUTEL rendent compte des différentes difficultés rencontrées par les élèves. Certaines sont dues, à la polysémie des mots utilisés dans des textes mathématiques, d'autres à la mauvaise interprétation par les élèves des mots non exclusivement mathématiques et d'autres encore, tiennent au fait que le référent (et sa représentation mentale) n'est pas une unité simple mais une structure complexe multidimensionnelle :

Les formes, les usages… des objets géométriques sont des propriétés distinctes. En mathématique, la forme d'un objet géométrique peut varier selon la nature des situations, des contextes et des tâches (E. Blutel, 1956).

C – « ont-ils compris ? » :

Les professeurs de mathématiques se plaignent que les élèves qui savent additionner, soustraire, multiplier et diviser sont incapables de résoudre les problèmes impliquant ces opérations. On admet parfois que cette incapacité est due au fait qu'ils ne savent pas lire

correctement les énoncés en ce domaine. Les mathématiques ont non seulement une symbolisation qui leur est propre mais aussi une syntaxe bien particulière.
Or, il est possible pour les professeurs de construire en quelques minutes un test fiable concernant la compréhension de la lecture, sans recours aux analyses subjectives ni aux manipulations statistiques : le test de closure.
Cet article est destiné à montrer que ce test est applicable aux textes mathématiques et qu'il permet d'en mesurer la compréhension de la part des élèves, ou d'évaluer son degré de difficulté. (A.Gagatsis, 1983)

D – « Oralisation et apprentissage arithmétique par les déficients auditifs »

Le handicap que constitue la déficience auditive altère le développement d'un ensemble de capacités et d'habitudes en rapport avec l'acquisition et le maniement de la langue maternelle.
Nous montrons que la mise en œuvre systématique, dans des situations d'apprentissage, de l'oralisation (dont il ne faut pas nier l'utilité pour les contacts avec les entendants), constitue un détour coûteux pour les enfants déficients auditifs. Nous avons examiné les performances d'élèves déficients auditifs à deux types d'épreuves :

- épreuves mathématiques, correspondant à des activités numériques,
- épreuves de lecture, au moyen de la technique de closure.

Habituellement, on regarde les enfants déficients auditifs comme présentant un retard cognitif. En fait, il apparaît, à l'analyse des résultats, des particularités et non de simples décalages par rapport aux entendants. Nous avons principalement relevé :

- Une tendance à appliquer un traitement d'image plane à un texte présenté, plutôt que de le voir comme une chaîne à une dimension (la ligne d'écriture).
- La nécessité du recours à un code visuel secondaire pour entrer dans la compréhension des textes.

En exploitant ces dispositions, délaissées dans la pratique de l'oralisation systématique, on observe une amélioration importante des performances.
La mise en œuvre des codes visuels secondaires apparaît ainsi comme une voie indispensable pour que les enfants déficients auditifs puissent obtenir, au niveau de l'enseignement primaire, des résultats comparables à ceux des enfants entendants. (M. Abdelli, 1985).

E – « l'enseignement des mathématiques auprès des élèves inuit »

« En 2000, la communauté inuit s'interrogeait sur les difficultés qu'éprouvent les élèves en mathématiques et sur les actions à prendre pour les aider. Un élément pouvant expliquer ces difficultés tient au fait que les élèves inuit apprennent les mathématiques dans leur langue pendant les trois premières années de leur scolarité puis poursuivent leurs études en français ou en anglais. Il semblerait alors que pour ces élèves deux univers séparés et distincts co-habitent. Face à ce double phénomène, la situation éducative devient très complexe : comment rallier ces deux cultures ? En effet, l'écart se creusant entre ces deux mondes, les difficultés des élèves en mathématiques deviennent de plus en plus importantes. Ce constat n'est pas unique à la communauté inuit. Une situation similaire a été relevée chez les aborigènes d'Australie » (E. Moukannas, L. Poirier, 2003).

II – 5 Que peut – on en déduire ?

Les travaux cités ci-dessus et bien d'autres relatifs à la psychologie cognitive indiquent qu'il n'y a pas unanimité à dire que la lecture (la dimension linguistique) est un facteur favorisant toujours l'accès à la compréhension des textes mathématiques. Des conditions spécifiques sont nécessaires pour le processus de compréhension. Or, il y a lieu de relever, ici, (Fayol in R. Duval, 1991) quelques préoccupations importantes centrées sur le lecteur :

1. Ce qu'on entend par compréhension est imprécis et cela ne permet pas de déterminer des critères stricts d'évaluation,
2. Il est difficile de distinguer la compréhension lors de la lecture et la compréhension en général,
3. Il semble que les travaux de didactique sur l'apprentissage de la compréhension des textes n'ont pas encore donné des résultats probants.

D'autres problèmes peuvent surgir quand on prend véritablement en compte les caractéristiques propres du texte qui peuvent modifier la situation de lecture et la nature de la tâche de compréhension. Un exemple de mot utilisé constamment par le professeur de mathématiques et / ou le manuel scolaire est ce mot français « tout » et ses variantes « tous » et « toute (s) ».

Ainsi dans la définition **« une bijection est une application de l'ensemble A sur l'ensemble B si *tout* élément de A admet une et une seule image dans B et *tout* élément de B est l'image d'un et seul élément de A »,** le mot « tout » prête à des confusions. En effet, il ne s'agit pas d'une incorrection grammaticale ni d'une structure syntaxique anormale, mais l'erreur peut se situer au niveau de l'interprétation de l'énoncé c'est – à dire au niveau de la compréhension du concept lui – même en ce sens que le mot en question peut ne pas recouvrir exactement les même réalités que dans la langue courante. Il peut désigner une totalité ou avoir le sens distributif de « chaque, n'importe quel… ». L'ignorance de cette dernière acception peut déclencher un processus de décryptage de la définition qui aboutit à une formulation où apparaît un concept comportant une aberration.

III – Fonctionnement de la langue naturelle dans l'expression de notions exactes :

III -1 Qu'est- ce- que le langage mathématique ?

On pourrait définir le langage mathématique par rapport à la langue courante comme étant un langage qui utilise plusieurs langages imbriqués : **E, L_1, L_2**

E : désignant l'écriture symbolique mathématique d'une expression,

L_1 : désignant la langue ayant pour support la langue naturelle utilisée en mathématique pour communiquer. Elle est différente de la langue courante par son lexique et par l'insertion des symboles mathématiques et certains phonèmes de syntaxe non courants.

L_2 : désignant le prononcé d'une expression

Une partie non moins importante dans l'enseignement des mathématiques est consacrée aux langages **E** et **L_2** notamment dans l'apprentissage des notions nouvelles.

Mais la communication n'est effective et n'acquiert toute sa signification que s'il existe un code commun compris et interprété dans le même sens par les participants à l'échange : le message émis par l'enseignant n'est significatif pour l'élève que lorsque ce dernier a pu élaborer dans **L_1** une structure mentale intégrant la représentation de l'événement et la représentation des éléments verbaux correspondants. Si, en revanche, l'élaboration de cette structure dans **L_1** n'est pas réalisée, il en résulte des difficultés que les spécialistes du langage regroupent sous le terme d'inférence (G. Glaeser, 1973).

III – 2 Le symbolisme logico - mathématique :

Le symbolisme logico – mathématique apparaît comme la forme la plus achevée de langage scientifique, dans la mesure où il tend à expliciter la séparation des fonctions d'expression et de communication. En effet, dans l'attitude qui ne concerne que la communication et qui se présente au cours de la mise en forme rigoureuse d'un exposé, quelle portée le mathématicien attribue – t – il à son langage ? quels sont ces objets signifiés que les symboles mathématiques sont censés représenter ?

L'attitude la plus satisfaisante du point de vue de l'exposition théorique dérive de la conception normaliste des mathématiques. Celle – ci est basée sur l'édification préalable d'un langage formalisé. La signification que l'on attribuera à chaque symbole mathématique sera sa traduction dans ce langage.

III – 2 – 1 Rôle du symbolisme logico – mathématique :

Ci – dessus, les questions relatives à la portée du langage mathématique et aux objets signifiés que les symboles mathématiques sont censés représenter interpellent la question relative aux fonctions sémantique et syntaxique d'un message mathématique.

D'emblée, on peut souligner que :

a. Chaque signe mathématique a la capacité de véhiculer une certaine quantité d'informations,

b. Certains signes sont plus insolites que d'autres (ils apportent plus d'informations),

c. La juxtaposition de ces signes obéit à des exigences propres au discours mathématique.

Dans les langues naturelles, cette distinction est effective, et paraît bien marquée. Appliquée au symbolisme logico – mathématique, elle nous conduit à remarquer que la charge sémantique pose d'emblée un problème sérieux : à quoi renvoient les signes utilisés ? D'autre part, la charge syntaxique des règles de l'enchaînement logique des idées peut-elle être comme un encadrement auxiliaire de l'expression ? Ne représente-t-elle pas au contraire l'essentiel de l'information véhiculée ? Toutes ces questions nous ramènent donc à la question fondamentale du statut des objets du symbolisme mathématique.

Avant d'aborder cette question, il convient de présenter quelques observations, dans le cas particulier de ce symbolisme, sur la distinction d'une syntaxe et d'une sémantique.

Il semble que l'opposition d'une fonction syntaxique et d'une fonction sémantique des signes est essentiellement relative aux niveaux d'articulation d'un système symbolique. Ce qui nous intéresse ici est l'aspect fonctionnel et concerne la nature des renvois effectués par les unités symboliques découvertes à chaque niveau. Tous les renvois des signes se font à l'intérieur d'une même articulation.

On peut découper dans une séquence mathématique des unités qui diffèrent par leur volume mais non par leur nature. Il n'y a pas dans ce symbolisme, d'unités qui correspondraient aux phonèmes, pour s'opposer à des unités qui correspondraient aux monèmes. Il y a donc en mathématiques des unités de différents ordres, mais toutes sont signifiantes et appartiennent au même niveau d'articulation. Dans la séquence **« π = 3,1415927 »,** il est évident que le signe **« π »** ne prend tout son sens qu'associé à une structure syntaxique déterminée ; il ne fonctionne sémantiquement sans ambiguïté que s'il est pris comme nombre irrationnel (G. Glaeser, 1973).

III – 2 – 2 Les objets du symbolisme mathématique :

Les considérations précédentes conduisent à s'interroger sur le bien fondé d'une distinction entre renvois sémantiques et renvois syntaxiques des signes mathématiques.

On sait que pour des systèmes comprenant l'arithmétique, la dissociation est effective, puisque les démonstrations fondées sur des règles syntaxiques ne sauraient sans contradiction embrasser toutes les propriétés assignées aux objets en vertu des règles sémantiques. Ainsi, si du point de vue de la syntaxe

10 enfants + 5 enfants = 15 enfants, du point de vue de la sémantique, si le 1er signe « enfants » représente des filles et le second représente des garçons on aura : **10 enfants + 5 enfants = 10 enfants + 5 enfants**.

Ainsi le trait le plus caractéristique de la sémantique mathématique paraît être que ces objets ne sont pas généralement introduits par des conventions les associant aux symboles qui les désignent, mais par le moyen de processus d'objectivation. « En ce qui concerne les mathématiques, le symbolisme fonctionne conformément à une syntaxe assez rigide et assez claire pour que ses conditions d'application soient patentes, et que soient vivement perçues les incompatibilités entre la nature des objets originaires et les manipulations délibérément opérées sur leurs signes » (G. G. Granger, 1979). Il cite comme exemple l'extension de la notion de nombre naturel : « la libre application de la syntaxe arithmétique des quatre opérations – l'extension de la structure de monoïde en structure d'anneau, puis de corps topologique complet, puis de corps algébriquement clos – viole les interdits implicites ou explicites découlant de la nature de l'objet primitif, que l'on réintégrera alors dans le nouveau système comme un nouvel objet non plus désigné mais construit » (G. G. Granger, 1979).

Un exemple, moins classique, peut être également évoqué. C'est celui de la refonte, due à Laurent SCHWARTZ, de l'objet de « fonction » par la théorie des distributions.

Nous avons dit plus haut que le symbolisme logico - mathématique a presque abandonné la fonction de communication aux langues naturelles. Pour étayer cette hypothèse, nous considérons l'exemple du langage machine dans le langage de programmation. Alors que les mots du langage machine désignent explicitement chaque opération et les noms de ses opérandes, le langage de programmation exprime plutôt la structure des suites d'opération et désigne directement les opérations et les objets opérés soit comme variables, soit comme constantes. Puisqu'il doit désigner aussi des propriétés de symboles (entier-réel)
et des manipulations les concernant, son organisation sémantique est hétérogène, entrecroisant langue et métalangue. Il s'y trouve combinés des symboles d'objets et deux espèces de méta-symboles, les uns renvoyant à des manipulations de symboles, les autres à des descriptions de symboles. Ainsi, les caractères spécifiques des deux langages se précisent comme suit :

- Le langage de programmation permet de dire ce qu'il faut faire pour exécuter un algorithme. Il se rapproche donc sur ce point des langues naturelles.
- Le langage machine, qui réalise le codage intégral d'un programme en termes métalinguistiques uniformes, ne comporte plus aucun signe du 1er ordre :
tout symbole y renvoie à une adresse. Il se rapproche donc sur ce point du symbolisme logico - mathématique.

Ainsi, nous pouvons dire que le symbolisme logico – mathématique ne constitue pas un moyen effectif de communication et de ce fait, il soulève le problème relatif au fonctionnement de la langue naturelle dans l'expression de notions exactes.

III – 3 Comment fonctionne la langue naturelle dans l'expression de notions exactes ? :

Avant d'aborder cette question, notons deux définitions relatives aux propriétés de certains signes. Dans un symbolisme, on distingue les signes qui renvoient à des objets et les signes qui renvoient à une mise en situation du message lui-même dans un acte de communication effective. Ceux-ci constituent **la partie illocutoire du symbolisme**.

Les autres signes, qu'ils appartiennent au système symbolique proprement dit ou à l'une de ses parties fonctionnant comme méta - système et lui permettant de se référer à ses propres éléments et non pas à ses énonciations dans des actes de communication circonstanciée constituent **la partie locutoire du symbolisme**.

Ces deux définitions vont nous permettre de regarder un texte mathématique en langue naturelle : « TRAITE DES TRILIGNES RECTANGLES ET DE LEURS ONGLETS, Lemme général de Pascal » (PASCAL, 1954), ci -dessous. (G.G.GRANGER 1979) rapporte, pour ce texte, que les mots de la langue naturelle qui servent au jeu d'inférence expriment à la fois ce que le symbolisme codifie (relations entre concepts) et les mouvements que le locuteur doit communiquer à son auditeur pour faire progresser le jeu. Ce double rôle de la langue naturelle constitue à la fois un avantage et une difficulté : « il y a avantage dans la mesure où les mots de la langue naturelle peuvent exprimer des démonstrations, ce qui facilite l'appréhension de celles-ci. Il y a difficulté dans la mesure où ces mots sont chargés d'un sens locutoire et d'une signification illocutoire et ils associent presque toujours à la présentation du mouvement démonstratif des surcharges qui sont, par rapport à lui, rhétoriques ».

C'est dans cette optique que des questions de style peuvent être soulevées. On distingue dans les figures de rhétorique, les figures de mots qui consistent à détourner le sens des mots (allégorie, ellipse….) ; les figures de pensée, qui consistent en certains tours de pensée indépendants de l'expression.

PASCAL : TRAITE DES TRILIGNES RECTANGLES ET DE LEURS ONGLETS

Lemme Général

Soit un triligne rectangle quelconque tel qu'il a été défini dans la lettre précédente(5) ABC, dont les ordonnées à l'axe soient DF, et les ordonnées à la base soient EG, coupant la courbe en G ; d'où soient réamenées des perpendiculaires GR à l'axe, prolongées infiniment, et lesquelles j'appelle les contre-ordonnées. Soient aussi prolongées indéfiniment les ordonnées à l'axe. Et soit, sur l'axe AB, et de l'autre côté du triligne, une figure quelconque BKOA, dans le même plan, comprise entre les parallèles extrêmes CA, BK (cette figure s'appellera l'adjointe du triligne). Que cette figure adjointe soit coupée par les ordonnées FD aux points O, et par les contre-ordonnées GR, aux points I.

Je dis que la somme des rectangles FD en DO, compris de chaque ordonnée du triligne et de chaque ordonnée de la figure adjointe, est égale à la somme des espaces ARI, qui sont les portions de l'adjointe, comprises depuis chacune des contre-ordonnées jusqu'à l'extrémité de l'adjointe du côté de A.

Car soit entendu le triligne BAC être multiplié par la figure BAOK, et former par ce moyen un certain solide, c'est-à-dire, soient de tous les points du triligne ABC élevées des perpendiculaires au plan, qui forment un solide prismatique infini, ayant le triligne ABC pour base. Soit aussi entendue la figure BAOK, tournant sur l'axe BA, relevée perpendiculairement au plan du triligne ABC ; et soit enfin entendue la base AC s'élever toujours parallèlement à soi-même, le point A parcourant toujours le bord de la figure relevée AOIKB, jusqu'à ce qu'elle retombe au point B : la portion du solide prismatique infini, retranchée par la surface décrite par la ligne CA dans son mouvement, sera le solide que l'on considère ici, laquelle sera comprise de quatre surfaces, entre lesquelles le triligne tiendra lieu de base.

Soient maintenant entendus deux ordres de plans perpendiculaires à celui du triligne ; les uns passant par les ordonnées DF à l'axe (lesquels, coupant le solide, donneront pour sections les rectangles FD en DO, compris de chaque ordonnée DF et de chaque ordonnée DO de la figure adjointe) ; et les autres plans passant par les ordonnées GE, lesquels seront parallèles à l'adjointe BAOK (relevée comme il a été dit) et coupant le même solide, formeront pour sections des figures égales et toutes semblables aux portions RIA, comprises depuis chaque contre-ordonnée RI, jusqu'à l'extrémité de la ligne du côté de A (ce qui paraît par les parallélismes, tant de chacun de ces plans avec l'adjointe relevée, que de la ligne AC avec soi-même dans tout son mouvement). Or, il est visible que les sommes des sections faites par chacun de ces ordres de plans sont égales chacune au solide, et par conséquent entre elles (puisque les portions indéfinies AE, EE, etc., de la base, sont égales, tant entre elles qu'aux portions égales et indéfinies AD, DD, etc., de l'axe) ; c'est-à-dire que la somme de tous les rectangles FD en DO est égale à la somme de toutes les portions RIA.

C.q.f.d.

La figure plane de Pascal

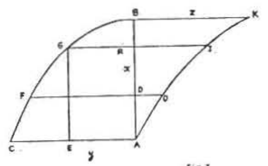

Fig. I

Le solide prismatique

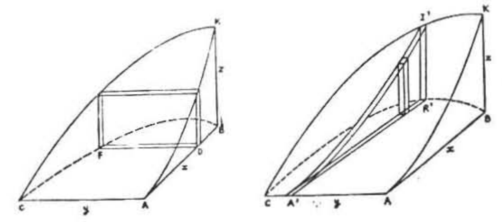

Fig. II

(5) Le passage qui suit est la définition de Pascal, définissant le tri ligne rectangle (PASCAL)

DÉFINITION

Soit un triligne rectangle ABC (fig. 7), composé des deux droites AB, AC, dont celle qu'on voudra, comme AB, sera l'axe, et l'autre la base, faisant angle droit, et de la courbe quelconque BC. Soient divisées en un nombre indéfini de parties égales, tant AB aux points D, que AC aux points E, et encore la courbe même BC aux points L ; et que chacune des parties de AB soit égale à chacune des parties de AC, et encore à chacune des parties de la courbe BC (car il ne faut pas craindre l'incommensurabilité, puisqu'en ôtant d'une de deux grandeurs incommensurables une quantité moindre qu'aucune donnée, on les rend commensurables). Soient maintenant des points D menées des perpendiculaires à l'axe jusqu'à la courbe ; elles s'appelleront *les ordonnées à l'axe*. Soient menées des points E des perpendiculaires à la base jusqu'à la courbe ; elles s'appelleront *les ordonnées à la base*. Soient maintenant menées des points L des perpendiculaires à la base ; elles s'appelleront *les sinus sur la base*. Soient enfin menées des mêmes points L des perpendiculaires à l'axe ; elles s'appelleront *les sinus sur l'axe*.

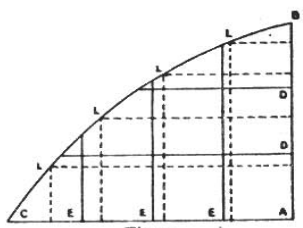

Fig. 7.

Avertissement :

« Soient maintenant entendues des perpendiculaires élevées sur le plan de tous les points du tri ligne, qui forment un solide prismatique infini, qui aura le tri ligne pour base, lequel soit coupé par un plan incliné passant par l'axe ou par la base du tri ligne. La portion de ce solide retranchée par le plan s'appellera onglet ».

Le texte de Pascal ci – dessus se compose de trois parties :

Première partie :
Hypothèse (énoncé) : « Soit un tri ligne rectangle………………aux points I ».
Cette première partie est illustrée par la figure plane de Pascal (fig1)
Deuxième partie :
Conclusion : « Je dis que la somme des rectangles FD en DO…….l'adjointe du côté de A ».
Troisième partie :
Démonstration (Traitement) : « Car soit entendu le tri ligne BAC……jusqu' à C.Q.F.D. ».
La troisième partie est illustrée par la figure II : Le solide prismatique.

Dans ce texte, Pascal construit deux découpages différents d'un même volume prismatique droit, dont la base est un tri ligne (fig.II). Un premier découpage en tranches verticales est effectué parallèlement au côté CA de la base (figII, gauche), un second parallèlement au côté droit (figII, droite).
Il se propose ainsi de démontrer que « la somme des rectangles FD en DO est égale à la somme de toutes les portions RIA ».
Dans sa démonstration, il n'utilise que la langue naturelle et quand il parle de la « somme des espaces ARI », il se réfère à la lettre de DETTONVILLE dans laquelle il dit : « quand on parle de la somme d'une multitude indéfinie de lignes, on a toujours égard à une certaine droite, par les portions égales et indéfinies de laquelle elles sont multipliées ». De ce point de vue, le mot somme échappe à la langue naturelle : **il joue le rôle d'un signe nouveau, opératoire dans un système dont les autres éléments n'ont pas été codifiés.** Cette somme est donc ici une intégrale prise sur une ligne ou plus généralement sur une variété.
L'équivalence de ces deux découpages du même volume s'écrit en langage mathématique : x, y, z étant les coordonnées d'un point du solide prismatique relativement aux axes AB, AC et BK.

Le 1er découpage du solide (fig.II, gauche) permet d'écrire : $\int_0^a yzdx$, si $\left|\overline{AB}\right| = a$.

Le 2ème découpage du solide (fig.II, droite) permet d'écrire : $\int_b^0 dy\int_0^x zdx$,

si $\left|\overline{AC}\right| = b$. Et pour Pascal : $\int_0^a yzdx = \int_b^0 dy \int_0^x zdx$.

Cette formule se démontre comme cas particulier de l'intégration par parties. En effet,

$$\int_0^a yzdx = y\int_0^x zdx - \int_0^b [\int_0^x zdx]\,dy = y\int_0^x zdx - \int_b^0 dy\int_0^x zdx ,$$

et si $y\int_0^x zdx = 0$ on aura $\int_0^a yzdx = \int_b^0 dy\int_0^x zdx$.

Dans sa démonstration Pascal dit : « … et soit enfin entendue la base AC s'élever toujours parallèlement à soi-même, la point A parcourant toujours le bord de la figure AOIKB, jusqu'à ce qu'elle retombe au point B ».

Cette phrase de Pascal pourrait se traduire par ce qui suit :
Quand $A \rightarrow B$; $C \rightarrow B$ autrement dit quand $x \rightarrow a$; $y \rightarrow 0$ d'où

$$y \int_0^x zdx = 0 \text{ quand } x = a.$$

Les mots qui servent au jeu d'inférence et qui expriment à la fois ce que le symbolisme codifie et les mouvements que le locuteur doit communiquer à son auditeur pour faire progresser le jeu sont soulignés dans le texte :

- « **soit** » utilisé en plusieurs points du texte, est un terme illocutoire. Il introduit une proposition portant sur des objets qui est posée comme point de départ.
- « **tel qu'il a été défini** » est une expression d'ancrage. C'est un moyen de renvoyer à un point bien repéré du texte.
- « **j'appelle** » est une expression d'ancrage dont la fonction efficace est illocutoire. Elle introduit une synonymie entre deux signes. La première personne est rhétorique.
- « **je dis** » est une expression d'ancrage. C'est un illocutoire de proposition avant démonstration. La première personne est rhétorique.
- « **car** » a une double fonction. En tant qu'il introduit une démonstration, c'est un illocutoire qui effectue la règle de ce qui le précède. En tant qu'il donne le fondement implicatif de cette règle, c'est un locutoire désignant une relation entre deux objets propositionnels, équivalent au signe de l'implication inverse :
  « A car B ($A \Leftarrow B$) ».
- « **donneront** » est une forme locutoire de l'implication.
- « **or** », comme « car », il a une double détermination : illocutoire, il commande au lecteur de se tourner vers un nouveau fait ; locutoire, il équivaut à la conjonction « et ».
- « **il est visible** » est une expression illocutoire.
- « **et par conséquent** » est une expression parallèle à « car » avec inversion des propositions de l'inférence.
- « **c'est-à-dire** », dans son aspect locutoire, l'expression équivaut à une équivalence logique. Dans son aspect illocutoire, elle introduit une synonymie du sens de deux formules distinctes.
- « **puisque** » comme illocutoire, introduit une démonstration à l'instar de « car ». Mais comme locutoire, il désigne comme « car » l'implication inverse.

Tel est le fonctionnement de certains mots de la langue naturelle dans l'expression de notions.

Conclusion

La dimension linguistique dans la compréhension d'un texte mathématique comporte deux aspects importants : le contenu cognitif et l'organisation rédactionnelle.

- Il est nécessaire de prendre en compte la position du lecteur par rapport au contenu cognitif du texte à lire,
- Il est nécessaire, aussi, de prendre en compte l'adéquation entre l'organisation du texte et les démarches d'accès à ce contenu cognitif.

D'un texte à un autre, sur un même sujet, la correspondance entre le contenu cognitif et l'organisation rédactionnelle peut considérablement varier. De même, d'un sujet à un autre, pour un même lecteur, l'écart entre la base de connaissance et le contenu cognitif peut aussi beaucoup varier.

Ces variations modifient la situation de lecture et il est connu que pour une même situation de lecture, il y a plusieurs façons d'interpréter le sens d'un texte.
La situation triviale de lecture correspond à la situation où la base de connaissances du lecteur recouvre le contenu cognitif du texte à lire et il y a congruence entre l'organisation rédactionnelle et le contenu cognitif.
Dans ce cas, les traitements requis pour la compréhension du texte ne diffèrent pas ou presque de ceux qui interviennent dans la compréhension du langage parlé sur des sujets déjà connus et présentés de façon standard.

Le problème de compréhension des textes étant d'un point de vue didactique « comment développer la possibilité pour un élève d'acquérir des connaissances nouvelles par la lecture, c'est-à-dire comment développer sa capacité de comprendre des textes sur des thèmes et sur des sujets qui ne lui sont pas déjà familiers ? ».
Ainsi, le processus de compréhension doit être analysé de façon spécifique dans chacune des situations de lecture possibles.
La plupart des textes auxquels les élèves sont confrontés et à propos desquels les enseignants constatent des difficultés de compréhension lors de la lecture relèvent de l'une de ces situations de lecture.

Quelques références bibliographiques :

M. Abdelli : « Oralisation et apprentissage arithmétique par les déficients auditifs », Thèse de 3ème cycle, IREM de Strasbourg, 1985

E. Blutel : « Articles pédagogiques », Ministère de l'instruction publique et des beaux arts du protectorat du Maroc. Rabat , Ecole du livre , 1956

R. Duval : « Contribution à l'étude de la lecture », ULP, Strasbourg, 1981

R. Duval : « Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des Textes », Annales de Didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg , Vol 4, 1991, pp 162-196

A. Gagatsis : « Thèse de 3ème cycle, IREM de Strasbourg, 1982

A. Gagatsis : « ont-ils compris ? » in l'ouvert n° 30, IREM de Strasbourg, 1983 p.17

G. Glaeser : « Mathématiques pour l'élève professeur », Hermann, Paris, 1973

G. Glaeser : « Racines historiques de la didactique des mathématiques », cours de 3ème cycle, ULP, Strasbourg, 1979

G. G. Granger : « Langages et épistémologie », Klincksieck, Paris,1979

B. Pascal : « Œuvres complètes » Bibliothèque de la Pléade , Paris 1954

L. Poirier : « l'enseignement des mathématiques auprès des élèves inuit »,in colloque EMF 2006 Tozeur – Tunisie

Ph. Perrenoud : « Compétences, langage et communication » in colloque : « Le développement des compétences en didactique des langues romanes » Louvain-la Neuve, 27-23 janvier 2000.

A.I. Rasolofoniaina : « Conditions d'apprentissage mathématique par la lecture », in RDM, la Pensée sauvage , Vol 5.1 Grenoble, 1984, pp5-42

C. Russel : « Mathématiques ou Mathématique », in Dictionnaire des Mathématiques, PUF, Paris, 1983, p.460

MOULOUD ABDELLI
mouloudabdelli@hotmail.fr