

Pourquoi ce sujet ?

Le modèle « analytique » des conditions nécessaires et suffisantes, selon lequel un objet est défini par un ensemble de propriétés, lequel ensemble caractérise à son tour une catégorie, est pertinent du point de vue mathématique mais ne permet pas de comprendre les processus cognitifs au moyen desquels sont établies les catégories.

Une conception de la catégorie fondée sur la notion de prototype explique à notre avis beaucoup mieux quelques processus de catégorisation des étudiants dans le domaine de l'algèbre.

Conception de catégorie et catégorisation par prototypes

Nous avons trouvé spécialement pertinents les points suivants de cette conception (Rosch, 1973, 1976 ; Kleiber, 1990) :

- La notion de prototype y est considérée comme « le meilleur représentant », ou l'« instance centrale » d'une catégorie. Ce représentant n'est pas un exemplaire particulier mais une sous-catégorie (comme « moineau » pour « oiseau » ou « racines carrés » pour les irrationnels) ;
- L'appartenance à une catégorie est fondée sur un principe d'appariement : les exemplaires sont comparés avec le prototype ;
- Les membres d'une catégorie ne présentent pas des propriétés communes à tous (comme entre autres dans le modèle de conditions nécessaires et suffisantes). C'est plutôt une *ressemblance de famille* (Wittgenstein, 1953) qui permet de les regrouper :

Ce qui les réunit, ce sont des similarités, des ressemblances qui s'entrecroisent, se recouvrent partiellement... (Kleiber, Ibid.)

A propos de la reconnaissance, description et dénomination d'objets mathématiques

Vu la nature des objets mathématiques, les opérations d'observation des objets, d'identification de leurs traits caractéristiques et de description de ces traits sont toujours faites sur des représentations sémiotiques particulières (Duval, 1993 ; 1995).

La connaissance des objets de référence des énoncés se fait donc au travers de données fournies par l'activité mathématique, et par instanciations de l'énoncé fourni par la définition mathématique, représentées dans différents registres.

Les opérations d'observation, d'identification de traits caractéristiques et de description de ces traits sont alors faites sur ces représentations sémiotiques particulières, ce qui nous donne trois axes :

- celui des donnés ;
- celui des instanciations des objets ; et
- celui de leurs représentations possibles (dans différents registres).

La compréhension d'une formulation en algèbre va jouer sur la capacité de concevoir les objets dans leur plus grande généralité (ce qui est lié aux substitutions de type instanciation) et de soumettre les différents instanciations au critère de conditions nécessaires et suffisantes.

Les mathématiciens sont capables de concevoir virtuellement les possibles objets de référence des énoncés et de les catégoriser en accord avec les propriétés caractéristiques correspondantes.

En revanche, le plus souvent, les données fournies par l'activité mathématique sont peu représentatives, et/ou les élèves pensent plutôt en termes d'instanciation typique.

Les traits à identifier sont alors certains **caractères typiques de représentations particulières d'instanciations particulières** de l'objet.

Dans ces cas là, il faut s'attendre de la part des élèves à une catégorisation qui répond au modèle de catégorisation par prototypes, basé sur des caractéristiques observées à partir des (rares) représentations des (rares) exemples analysés.

Donc, la définition par compréhension qu'ils donnent est formée d'une proposition qui répond à ces caractères -définition caractéristique- (Duval, 1995) mais qui le plus souvent n'est pas représentative de toutes les propriétés de l'objet.

Phénomènes observés- I -

La reconnaissance des objets et le principe d'appariement

Tâche et réponse	Interprétation
<p>Consigne I: Trouver une valeur de a telle que la droite L d'équation: $X = k(a,1) + (2,5)$ passe par l'origine</p>	
<p>Réponse : « La droite L ne peut pas passer par l'origine »</p>	L'expression typique d'une droite qui passe par l'origine n'a pas de terme constant
<p>Consigne II: À quel type de fonction correspond l'expression $f(x) = 3x$?</p>	
<p>Réponse : « il s'agit d'une fonction affine bien qu'il n'y ait pas de terme constant »</p>	L'expression typique d'une fonction affine est: « $f(x) = ax + b$ », avec un terme b non nul.
<p>Consigne III: À quel type de fonction correspond l'expression : $f(x) = 3x^2 + 2x + 1/x$?</p>	
<p>Réponse : « il s'agit d'une fonction quadratique »</p>	La notion d'« air de famille » due à Wittgenstein (1953) explique à notre avis que cette expression soit assimilée à une fonction quadratique (« des ressemblances qui s'entrecroisent, se recouvrent partiellement... »)

Phénomènes observés- II

Les effets de la catégorisation prototypique sur des descriptions de propriétés numériques

L'inéquation $x^2 \geq x$ peut être considérée comme la **description** d'un ensemble de nombres: ici, $\mathbb{R} -]0;1[$.

Une description peut être adéquate (c'est le cas ici) ou non à l'ensemble que l'on souhaite décrire.

Nous avons étudié la relation entre les énoncés descriptifs de ce type et les ensembles qu'ils sont supposés décrire, au travers des jugements des étudiants sur la vérité d'un énoncé pour différents ensembles de nombres.

La consigne pour les étudiants était la suivante:

Déterminez si l'énoncé

$\forall x: x^2 \geq x$

est vérifié pour x appartenant aux ensembles suivants:

- o \mathbb{R}
- o \mathbb{Q}
- o \mathbb{Z}
- o \mathbb{N}

Dans un cours de 60 étudiants de première année de l'Université de Buenos Aires, 40% des étudiants ont donné une réponse correcte.

Parmi les réponses incorrectes, deux types de réponse sont plus particulièrement intéressantes:

- les étudiants qui répondent que, vu que l'énoncé est vrai dans \mathbb{R} (parce que le carré de tout nombre réel est plus grand que lui-même), alors il va être vrai dans \mathbb{Q} , \mathbb{Z} et \mathbb{N} .
- les étudiants qui répondent que l'énoncé est vrai dans \mathbb{R} (parce que le carré de tout nombre réel est plus grand que lui-même), dans \mathbb{Z} et dans \mathbb{N} , mais en même temps il est faux dans \mathbb{Q} parce que, par exemple, $0,5^2 < 0,5$

Notons les effets de la typicité sur le dernier type de réponse :

Ces étudiants semblent concevoir 0,5 comme un nombre rationnel mais pas comme un nombre réel.

Ils choisissent d'attribuer à la catégorie \mathbb{Q} l'objet 0,5 en éliminant (même implicitement) une autre catégorie pertinente, \mathbb{R} (cf. ce que Rosch (1976) et Kleiber (1990) appellent les « dimensions horizontale » et « verticale » de la catégorisation)

Les étudiants ne perçoivent pas la contradiction qu'il y a à affirmer que la propriété (quantifiée universellement) $\forall x, x^2 \geq x$ est vraie dans \mathbb{R} et pas dans \mathbb{Q} .

Phénomènes observés- III -

Relations entre les processus de catégorisation et dénomination (définition) des objets

Analyse d'un exemple: le cas de Brenda (Panizza, 2010)

Le problème:

Déterminer si l'implication suivante est vraie ou fausse:

$\forall x \in \mathbb{R}: 2x^2 > x(x+1) \Rightarrow x > 1$

a été donné en classe afin d'analyser la capacité des étudiants à déterminer la relation entre les ensembles de solutions de deux inégalités, dans le contexte d'une inéquation.

Brenda, dans sa recherche d'une solution, envisage différents exemples: $x = 0, x = 1, x = 2, x = 3, x = -1, x = -2, x = -3, x = -4$, en considérant dans chaque cas les valeurs de vérité de l'antécédent et de la conséquence. Elle en tire la conclusion, correcte, que l'énoncé est faux, parce qu'« on peut trouver des valeurs de x plus petites que 1 qui vérifient $2x^2 > x(x+1)$. »

L'enseignant lui demande d'expliquer comment elle est arrivée à cette réponse. Brenda dit que « -2, -3, -4 sont des contre-exemples, parce que pour ces valeurs l'antécédent est vrai et la conséquence est fausse. »

Au vu de la consigne Brenda aurait pu s'arrêter là; mais elle ajoute immédiatement: « Ah, c'est $|x|$ qu'il aurait fallu mettre! Ce qui est vrai c'est: »

$\forall x \in \mathbb{R}: 2x^2 > x(x+1) \Rightarrow |x| > 1$

Quand le professeur lui propose un contre-exemple, en disant :

« Regarde, c'est vrai pour -0,5 ? »

Brenda répond très vite : « Ah non, vous avez raison, c'est faux pour les rationnels ! »

Éléments de dialogue	Interprétation
« -2, -3, -4 sont des contre-exemples, parce que pour ces valeurs l'antécédent est vrai et la conséquence est fausse. »	Quand Brenda argumente elle rassemble tous les contre-exemples et les identifie comme étant d'un certain type ($x < -1$)
	- Par conséquent les caractères identifiés vont rester comme définition du type (« définition caractéristique », Duval, 1995) ; et
	- le caractère représentatif au niveau d'un individu va être représentatif de la population.
« Ah, c'est $ x $ qu'il aurait fallu mettre! ... »	L'expression symbolique ($x < -1$) dénote un ensemble d'objets plus grand que celui que Brenda veut décrire (« -2, -3, -4... ») (Panizza, 2008)
«...ce qui est vrai c'est: $\forall x \in \mathbb{R}: 2x^2 > x(x+1) \Rightarrow x > 1$ »	Ensuite, Brenda substitue à l'écriture « x », l'écriture « $ x $ » et considère que l'énoncé obtenu est vrai. Cela veut dire que, pour elle : - la substitution corrige l'énoncé original, en éliminant les contre-exemples - conformément à la caractérisation de la définition typique, ce qui est valable pour l'exemplaire typique est valable pour tous (phénomène d'héritage: il s'agit ici de la propriété d'être contre-exemple de la conjecture).
« Regarde, c'est vrai pour -0,5 ? »	Elle fait de nouveau une « généralisation spontanée » (Panizza, 2010) en reconnaissant « -0,5 » comme représentatif des nombres rationnels (Tversky & Kahneman, 1974 ; Rosch, 1976).
Brenda répond très vite : « Ah non, vous avez raison, c'est faux pour les rationnels ! »	

Conclusions

La mise en œuvre des processus de catégorisation et de dénomination (définition) des objets est liée aux **démarches descriptives** (en langues naturelle et symbolique) et est conditionnée par la **disponibilité immédiate** d'un champ d'objets de référence.

Nos travaux nous ont amené à proposer que l'acquisition progressive par les élèves des modes de catégorisation et de définition propres aux mathématiques se fasse dans deux directions:

- favoriser les activités
 - d'observation,
 - de description et
 - de dénomination

d'objets individuels représentés dans différents registres de représentation.

- développer la capacité des élèves à formuler des descriptions (en langage symbolique) qui soient en adéquation avec les objets individuels visés;

en d'autres termes, favoriser la coordination entre extension et compréhension de leurs descriptions symboliques.

Références bibliographiques

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 5. Strasbourg: IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Kleiber, G. (1990). *La sémantique du prototype*. Paris: Presses Universitaires de France.

Panizza, M. (2008). Verbal and symbolic descriptions of properties of mathematical objects. *Proceedings the of PME 32* (the Psychology of Mathematics Education), México.

Panizza, M. (2010). Generalization and Control in Algebra. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Comp.): *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. January 28th - February 1st 2009, Lyon (France).

Rosch, E. (1973). Natural Categories. *Cognitive Psychology*, 4, 328-350.

Rosch, E. (1976). Structural Bases of Typicality Effects. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 2, 4, 491-502.

Tversky, A. & Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainty: heuristics and biases. *Science*, n° 125. 1124-1131.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical Investigations*. Trad. F. Dastur & M. Elie: *Recherches Philosophiques*. 2004. Paris: NRF Gallimard.