JUSTIFIER UNE TECHNIQUE OPERATOIRE EN CYCLE 3 :

LE CAS DE LA DIVISION PAR DEUX

CHORLAY[*] Renaud

Résumé – Nous présentons les premiers éléments d'un projet de recherche visant à étudier les capacités d'argumentation des élèves de CM2-6ème (années 5 et 6) dans un contexte numérique impliquant des nombres entiers ou décimaux. Ce projet – mis en œuvre en 2017-2018 – trouve son objet et son point de départ dans une technique opératoire de division par deux présente dans le *Livre du calcul indien* d'Al-Khwārizmī.

Mots-clefs : argumentation, algorithme, principe positionnel, division, histoire des mathématiques.

Abstract – We present the outline of a research project which aims to study the argumentative capacity of year-5 and year-6 students, in a numerical context involving natural and decimal numbers. This project – to be implemented in 2017-2018 – centers on a technique for dividing by two which appears in Al-Khwārizmī's *Kitāb al-ḥisāb al-Hind.*

Keywords: argumentation, algorithm, place value, division, history of mathematics.

I. ORIGINE ET MOTIVATION DU PROJET

1. Point de départ dans un texte historique

Ce projet trouve son origine dans la lecture – au détour d'un autre projet – du *calcul indien* d'Al- Khwārizmī, dans l'édition proposée par André Allard de ses plus anciens manuscrits latins (Al- Khwārizmī 1992). Si le nom de ce mathématicien de langue arabe, actif à Bagdad au début du 9e siècle, est souvent associé à l'algèbre, à la notion d'équation et aux techniques de résolutions d'équations du second degré, le traité d'algèbre (Al- Khwārizmī 2007) n'est pas le seul ouvrage qu'il ait rédigé. On connaît aussi un *livre du calcul indien* (*Kitāb al-ḥisāb al-Hind*) et le *Livre sur l'addition et la soustraction*, dont les originaux arabes sont jusqu'ici introuvables. Comme l'indique le titre, Al-Khwarizmi y introduit dans le monde savant de langue arabe le procédé d'écriture positionnel décimal des entiers et des techniques opératoires chiffre-à-chiffre s'appuyant sur ce codage. Quoiqu'il les trouve chez les « indiens », on notera que ces procédés étaient aussi bien chinois.

Le traité d'algèbre et celui du calcul indien connaissent des traductions latines dans la même période des 12-13e siècles, souvent du fait de savants actifs en Andalousie, parfois dans un contexte de traduction de traités d'astronomie. Ces traducteurs introduisent donc dans l'Occident latin les méthodes de calcul basées sur les 9 chiffres et le zéro, dont la diffusion va concurrencer le calcul sur abaques et le calcul digital sans cependant les supplanter. Aux techniques écrites sur un support où les chiffres s'effacent en cours de calcul (table à poussière), certains comme Fibonacci dans son *Liber Abaci* (1202) préfèrent des techniques où les chiffres s'inscrivent de façon durable. Il semble toutefois que les techniques avec effacement soient les plus diffusées. De ces traités dérive le terme « algorithme » : les *algorismes* ou *argorismes* désignent alors dans le monde latin les techniques opératoires reposant sur l'écriture positionnelle, c'est-à-dire les calculs *à la manière* d'Al-Khwārizmī. Les traités latins anciens traduits par Allard sont le *Dixit Algorizmi* (désigné par ses premiers mots : « Al-Khwārizmī a dit (…) »), le *Liber Alchorismi*, et le *Liber Ysagogarum Algorismi.* Il est possible qu'ils dérivent tous d'une première traduction latine perdue. Ces trois ouvrages

[*] LDAR (Universités de Paris, Artois, Cergy-Pontoise, Paris-Est Créteil, Rouen) –France– Renaud.chorlay@espe-paris.fr

seront d'ailleurs beaucoup moins diffusés que les traités du 13e siècle, tels ceux de Fibonacci, de Jean de Murs, de Jordanus de Némore ; ou ceux, assez médiocres, d'Alexandre de Villedieu (*Carmen de algorismo*) ou de Jean de Sacrobosco (*Algorismus Vulgaris)*.

Dans les trois traités anciens le plan est à peu de choses près le même. Après avoir montré comment le système indien permet d'écrire tous les nombres entiers au moyen de neuf « lettres » ou « figures » et d'un petit rond (*circulo*), les auteurs présentent des techniques opératoires portant sur les écritures chiffrées, en supposant que l'on peut effacer en cours de calcul (comme sur une ardoise). Sont présentées des techniques pour l'addition, la soustraction, la médiation (ou division par 2), la duplication (ou multiplication par 2), la multiplication, la division et l'extraction de racine carrée. Pour la division ou l'extraction de racine carrée, l'algorithme ne se termine pas toujours sur un entier (la division euclidienne peut avoir un reste non nul, le nombre peut n'être pas un carré d'entier). Les auteurs expriment alors les parties non entières (exactes ou approchées) par des fractions, souvent converties ensuite en système sexagésimal, comme il était d'usage dans les traités d'astronomie. Les techniques opératoires sont alors étendues aux nombres non-entiers dont le développement sexagésimal est fini, ce qui illustre la puissance unificatrice des systèmes positionnels – même si le choix de la base 10 pour la partie entière et de la base 60 pour la partie dite fractionnaire introduit une complication. L'auteur du *Liber Alchorismi* a aussi régulièrement recours aux fractions décimales, comme le faisait aussi as-Samaw'al (Al-Khwārizmī 1992, xxxiii).

On pourra s'étonner du rôle spécifique accordé à la division par 2 (médiation ou démidiation) et à la multiplication par 2 (duplication). Cela se justifie par le fait que ces algorithmes sont plus simples que les algorithmes généraux de multiplication et de division, et surtout par le fait qu'ils seront des étapes élémentaires dans l'algorithme de calcul de racine carrée (Al-Khwārizmī 1992, 182 et suiv.), de même que les additions et les soustractions interviennent dans les calculs de produits et dans les divisions euclidiennes (respectivement). Nous justifierons plus bas notre choix de proposer en cycle 3 un travail sur la médiation.

2. Enjeux d'enseignement

Nous nous inscrivons dans le mouvement général de réflexion sur les finalités de l'enseignement des techniques opératoires à l'école primaire. Ainsi, en 2003, la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (dite commission Kahane) soulignait :

> (…) dans la période récente, le développement des technologies informatiques a profondément modifié les pratiques associées au calcul, tant les pratiques quotidiennes et sociales que les pratiques scientifiques. La plupart des algorithmes de calcul dont l'apprentissage occupait un temps important de la scolarité, notamment dans l'enseignement obligatoire, sont aujourd'hui implantés dans les calculatrices les plus simples. En revanche, le calcul pose des questions nouvelles liées notamment à la représentation informatique des objets mathématiques sur lesquels il porte (par exemple la représentation informatique des nombres), à la performance des algorithmes utilisés au-delà de leur seule effectivité…, des questions qui n'étaient pas des enjeux de l'enseignement jusqu'ici. La puissance de calcul des nouveaux outils modifie aussi profondément l'économie du calcul et pose, dans des termes renouvelés, celle de la gestion des rapports entre calcul et raisonnement, en favorisant explorations, simulations, expérimentations. (cité dans (Charnay 2007, 204)).

Peu après, Roland Charnay (2007) prolongeait cette réflexion en identifiant comme principal intérêt du travail sur le calcul posé le fait qu'il fournit :

> (…) une occasion de travailler les propriétés des nombres et des opérations en axant une partie importante de l'apprentissage sur un effort de compréhension et de justification des étapes de ces algorithmes. (…) Cela suppose de ne pas se limiter à un apprentissage techniciste (le comment), mais de chercher à justifier les différentes étapes du calcul et leur articulation (le pourquoi), c'est-à-dire à faire des mathématiques ! (Charnay 2007, 206).

Au-delà des intentions, la question des modalités et des conditions de possibilité de la dévolution de questions portant sur le « pourquoi » du mécanisme des algorithmes et favorisant « exploration, simulation, expérimentation » semble avoir fait l'objet de peu des travaux empiriques.

Les difficultés d'une telle dévolution semblent nombreuses et assez évidentes ; mentionnons-en deux, corrélées mais de nature sensiblement différentes. La première semble tomber sous le sens – quoiqu'elle mériterait sans doute des études empiriques sur la réception par les élèves des séances d'introduction des techniques opératoires – et tient à l'écart entre, d'une part, la maturité mathématique des élèves (en particulier les capacités de décontextualisation et d'argumentation) et, d'autre part, la programmation institutionnelle de l'enseignement du calcul posé. Ainsi, dans les programmes français de 2016, les techniques opératoires sont à introduire en CP (année 1 de l'enseignement élémentaire français) pour l'addition sans ou avec retenue, en CE1 (année 2) pour la soustraction, en CE2 (année 3) pour la multiplication, et en CM1 (année 4) pour la division euclidienne ; en CM1-CM2 (années 4-5), la plupart des techniques opératoires sont à étendre aux nombres décimaux. Une deuxième difficulté – sinon pour la conception du moins pour la généralisation – d'un enseignement *réflexif* sur les techniques opératoires tient à la difficulté de nombreux enseignants du premier degré à concevoir un enseignement intégrant des éléments de justification dans les contextes numériques, en partie du fait d'une insuffisance des connaissances mathématiques spécifiques sous jacentes à cette démarche (Clivaz 2016) (Constantin 2017).

Le travail dont nous présentons ici le projet s'inscrit dans le cadre théorique général esquissé dans (Chorlay 2016), et prolonge une première expérimentation en classe, menée en CM1-CM2 en 2015-2016 (Chorlay, Masselin & Mailloux, 2017). Nous faisions alors travailler les élèves sur la technique de multiplication *per gelosia*, dont Guy Brousseau a depuis longtemps proposé une analyse mathématique et ergonomique approfondie (Brousseau 2010). Notre objectif n'était pas d'enseigner aux élèves une nouvelle technique de multiplication posée, mais de tester la dévoluabilité aux élèves de cet âge de questions *méta* au sens où elles portent *sur* la technique opératoire : conjecture de la fonction qu'elle réalise ; demande de formulation écrite d'un texte d'algorithme intégrant une contrainte de généralité (dépasser l'exemple ou la liste d'exemples) ; demande de comparaison entre deux techniques opératoires de la multiplication, sur des critères qu'il revenait aux élèves eux-mêmes de déterminer. L'analyse *a postériori* a porté principalement sur les ressources sémiotiques et argumentatives mobilisées par les élèves, et a montré, en particulier, une bonne capacité à formuler de manière décontextualisée – à partir de l'expérience vécue du calculateur – les critères de comparaisons.

Lors de ce premier travail, cependant, l'analyse *a priori* nous avait dissuadé de chercher à dévoluer la tâche de justification de l'algorithme. Les tâches réflexives confiées alors aux élèves n'ont donc pas – ou marginalement – nécessité de s'appuyer sur des connaissances relatives au système positionnel décimal. C'est au contraire la capacité à comprendre et à justifier une technique opératoire en mobilisant les deux principes fondamentaux de notre numération chiffrée – la valeur positionnelle des chiffres, l'échange 1 $\leftrightarrow$ 10 entre deux rangs successifs – que nous cherchons à explorer dans le présent projet.

II. ÉLÉMENTS D'ANALYSE *A PRIORI*

1. *Le texte historique*

Les trois textes édités par André Allard donnent des versions plus ou moins laconiques du même algorithme de médiation des entiers. Le plus laconique est le *Liber Ysagogarum Alchorismi* :

> **La médiation des entiers**. Quand on doit diviser par deux, on commence par la première position. Si le nombre est impair, on divise par deux son contenu pair et au lieu de l'unité on pose sous la même position 30 tirés de 60. Dans la seconde et les autres positions, on divise par deux les nombres pairs et au lieu de l'unité restante on reporte 5 dans la position précédente. (Allard 1992, 33)

Le *Liber algorismi* est un peu plus disert :

> Lorsque tu veux diviser un nombre quelconque par deux, commence par la première position et divise-la par deux. S'il s'y trouve un nombre impair, divise par deux les pairs, et il restera un que tu diviseras par deux, c'est-à-dire que tu diviseras en deux moitiés, et tu établiras une moitié qui est fraction trente de soixante qui font un, et pose 30 sous la même position. Ensuite, tu diviseras par deux la position suivante, si son nombre est pair. S'il est impair, prends une moitié du pair et pose-la à sa place ; établis cinq comme moitié du un restant et pose-les dans la position qui est avant celle-ci. S'il n'y a que un dans la position que tu veux diviser par deux, pose à sa place un zéro, et pose cinq dans la position qui est avant celle-ci. Opère de même dans toutes les positions. (Allard 1992, 9).

Le *Liber Alchorismi* propose en outre un exemple. Les auteurs des trois textes semblent considérer la justification de l'algorithme comme allant de soi et ne l'explicitent pas, alors qu'ils donnent des éléments de justification pour la plupart des autres.

Suivons l'algorithme explicité dans le *Liber algorismi* en montrant comment les caractéristiques du nombre traité permettent d'en éprouver les ressorts. Nous nous autoriseront l'abus de langage consistant à parler de chiffre pair ou impair.

2. *Analyse a priori : variables mathématiques*

Si l'on part d'un nombre dont tous les chiffres sont pairs, disons 682, on divise chacun par deux. Commencer de la droite ou de la gauche n'a pas d'influence sur le résultat final. On peut représenter les états successifs de l'ardoise (le texte parle bien de poser « à la place ») ; nous codons ici par des encadrés les états de l'ardoise, et par des crochets les traitements algorithmiques « dans la tête » :

en partant de la droite $\boxed{682}$ $[2 \to 1]$ $\boxed{381}$ $[8 \to 4]$ $\boxed{641}$ $[6 \to 3]$ $\boxed{341}$

ou

en partant de la gauche $\boxed{682}$ $[6 \to 3]$ $\boxed{382}$ $[8 \to 4]$ $\boxed{342}$ $[3 \to 1]$ $\boxed{341}$

La validité de la procédure repose, en dernier ressort, sur la distributivité[1] de la multiplication (par ½) ou de la division (par 2) sur l'addition, et sur la décomposition canonique des entiers. Une telle formulation de la justification ne peut pas être attendue

[1] À strictement parler, c'est le caractère linéaire de l'opérateur de « médiation » qui justifie la technique. Si nous notions m cet opérateur, alors, en l'appliquant au nombre 682 :

$m(682) = m(600 + 80 + 2) = m(600) + m(80) + m(2)$ par linéarité additive de m (i.e. distributivité de $\times$ sur $+$)
$= m(6\times100)+m(8\times10)+m(2)$
$= m(6) \times 100 + m(8) \times 10 + m(2)$ par linéarité multiplicative de m
$= 3 \times 100 + 4 \times 10 + 1 = 341.$

Il est vrai que, les facteurs 10, 100 etc. étant entiers, la linéarité multiplicative découle directement de la linéarité additive, la multiplication par un entier pouvant être vue comme une addition itérée.

d'élèves du CM2 ou de 6ème, en particulier parce que la propriété de distributivité de × sur + n'est institutionnalisée qu'en classe de 5ème. Un niveau bien plus superficiel de justification semble, lui, accessible : vérifier, sur plusieurs cas particuliers traités, que la sortie est bien la moitié de l'entrée. Cela peut se faire soit en effectuant par un autre moyen – division euclidienne posée ou calculatrice – la division par deux de l'entrée, soit en effectuant – par calcul posé ou à la calculatrice – la multiplication par 2 de la sortie. Entre ces deux niveaux de justification, l'un savant et décontextualisé, l'autre pragmatique et reposant sur le contrôle sur une petite série d'exemples, nous indiquerons plus bas une piste pour chercher à promouvoir une explicitation par les élèves de la distributivité de la médiation sur l'addition.

Si l'on part d'un nombre entier pair dont tous les chiffres ne sont pas pairs, par exemple 92, de nouveaux aspects de l'algorithme se dévoilent. Ainsi, en partant de la droite, apparaît la nécessité de décomposer 9 en 8+1 (8 étant le plus – dans le texte – grand pair « contenu » dans 9 ; il pourrait aussi être vu comme 10-1, ou comme le prédécesseur de 10) ; pour ensuite démidier 8, et ajouter 5 de retenue à droite :

$\boxed{92}$ [2 → 1] $\boxed{91}$ [9 = 8+1→ 4 et 5 de retenue] $\boxed{41}$ [1 et 5 de retenue → 6] $\boxed{46}$

Outre la distributivité de la médiation sur l'addition, le principe de groupement et d'échange à pas de 10 justifie ici la règle sur la retenue : la moitié de 1 dizaine c'est bien la moitié de 10 unités, c'est-à-dire 5 unités ; de même, la moitié de 1 centaine c'est la moitié de 10 dizaines, donc 5 dizaines etc. C'est là, à nos yeux, l'un des intérêts de cet algorithme pour l'étude de la capacité des élèves de CM2 ou 6ème à mobiliser des connaissances sur le système positionnel pour rendre compte – au moyen de ressources sémiotiques qui restent à préciser – de la validité de la technique. Ici, le principe positionnel est utilisé de manière élémentaire : le niveau de complexité nous semble ici semblable à celui de l'addition avec retenue ou de la soustraction « par emprunt » et bien inférieur à ce qu'il dans les techniques de multiplication[2] et de division. Avec sa retenue de « 5 vers la droite », la technique diffère sensiblement des cas familiers des élèves : la retenue de « 1 vers la gauche » dans l'addition ; la retenue, vers la gauche, du chiffre des dizaines, dans la multiplication. Nous gageons que le caractère inhabituel de la retenue « 5 vers la droite » va déstabiliser les élèves, et susciter un questionnement auquel il ne peut pas être répondu par un simple appel infra-mathématique à la mémoire scolaire (le « c'est comme d'habitude », « c'est comme dans l'addition »).

Sous ces conditions – nombre entier pair dont tous les chiffres ne sont pas pairs – le nombre total de chiffre et le nombre de chiffres impairs n'a pas d'impact sur la validité de l'algorithme. Ainsi obtient-on (en partant de la droite), pour 346 et 6752 :

$\boxed{346}$ $\boxed{343}$ $\boxed{323}$ $\boxed{123}$ $\boxed{173}$

$\boxed{6752}$ $\boxed{6751}$ $\boxed{6721}$ $\boxed{6726}$ $\boxed{6326}$ $\boxed{6376}$ $\boxed{3376}$

Cependant, dès que l'un des chiffres est impair, la technique est invalide si l'on part de la gauche :

[2] L'article de Céline Constantin (2017) analyse en détail les nombreux écueils à la justification de calculs reposant sur la distributivité de × sur + par des étudiants de M1 MEEF premier degré disposant d'une maturité générale supérieure à celle d'élèves de cycle 3 et maîtrisant raisonnablement l'usage de la distributivité dans un cadre littéral ; et ce aussi bien dans la technique opératoire de la multiplication, qu'en calcul réfléchi (mental ou écrit). Une difficulté fondamentale résulte de la dualité entre le registre de la technique posée – dans lequel les produits par des puissances de 10 sont implicites, codés par des positions et des « décalages » – et le registre du calcul en ligne ; ou, pour le dire autrement, entre d'une part des algorithmes portant sur des suites de chiffres *pouvant* être lues comme des nombres, et, d'autre part, des égalités entre expressions de calcul portant sur des nombres. La plupart de ces difficultés spécifiques ne se rencontre pas dans la technique de médiation, en particulier de fait de l'unicité de l'entrée de l'algorithme.

$\boxed{92}$ [9 = 8+1 → 4 et 5 de retenue] $\boxed{42}$ [2 et les 5 de retenue → 7] $\boxed{47}$

[7 = 6+1 → 3 et 5 de retenue] $\boxed{43}$ $\boxed{43{,}5}$

L'erreur vient de ce que le 7 de 47 était composé des 2 unités du nombre initial (qu'on veut diviser par deux) et de 5 unités résultant déjà de la division par 2 d'une dizaine du nombre initial. En redivisant par deux ces 5 unités, on divise par 4 l'une des 9 dizaines initiales.

Nous n'avons jusqu'ici travaillé que sur des entiers pairs. Dans le cas impair, les textes réservent un traitement particulier à la médiation du chiffre des unités, décomposant – par exemple – 5 en 4+1, dont la moitié est désignée par « 2 et un demi », ou « 2 et 30 soixantièmes », ou « 2 et 30/60 ». Aujourd'hui, les élèves de CM2 et de 6ème disposent en outre de systèmes de notations positionnels décimaux pour représenter ce nombre, soit dans l'écriture à virgule « 2,5 », soit en disposant les chiffres dans un tableau de numération avec, à droite de la colonne des unités, la colonne des dixièmes. Dans ces systèmes de notations adaptés aux décimaux, la technique exposée sur les entiers s'applique sans adaptation particulière :

$\boxed{7{,}543}$ $\boxed{7{,}541}$ $\boxed{7{,}5415}$ $\boxed{7{,}5215}$ $\boxed{7{,}2215}$ $\boxed{7{,}2715}$ $\boxed{3{,}2715}$ $\boxed{3{,}7715}$

La justification de la technique ne demande ici pas d'élément fondamentalement nouveau. Encore faut-il pouvoir adapter les formulations valables dans les entiers – telle « 1 dizaine c'est 10 unités, donc la moitié de 1 dizaine c'est 5 unités » – aux décimaux : « 1 dixième c'est 10 centièmes, donc la moitié de 1 dixième c'est 5 centièmes ».

En bilan de cette première phase d'analyse *a priori*, rappelons que nous avons étudié le rôle de deux variables didactiques :

- La nature arithmétique de l'entrée de l'algorithme : nombre entier ou nombre décimal non entier ; entier dont tous les chiffres sont pairs ; entier pair dont au moins un chiffre est impair ; entier impair. Par contre, la mise en œuvre de l'algorithme est indifférente à la longueur de l'écriture décimale du nombre.
- Le sens de traitement des chiffres de l'entrée, de gauche à droite ou de droite à gauche. Seul le traitement partant de la droite (des unités) est correct pour toute entrée. C'est d'ailleurs le sens prescrit dans les textes anciens, la « première position » étant celle des unités.

Les propriétés mathématiques justifiant la validité de cet algorithme chiffre-à-chiffre sont :

- La linéarité de l'opérateur de médiation, qu'on peut déduire de la distributivité de la multiplication (par un entier) sur l'addition.
- Les propriétés fondamentales du système d'écriture positionnel décimal des entiers et, plus généralement, des décimaux. En particulier les échanges « vers le bas » : 1 centaine c'est 10 dizaines, 1 dizaine c'est 10 unités, 1 unité c'est 10 dixièmes etc.

Pour ce qui est de la linéarité de l'opérateur, nous ne chercherons pas à la faire expliciter par les élèves, nous appuyant soit sur des théorèmes en acte, soit sur une justification s'appuyant sur un raisonnement générique dans le registre des collections (voir plus bas le matériel dit « multibase »). En revanche, notre objectif est de voir si – et comment – les connaissances sur le système de numération peuvent être mobilisées pour rendre compte de la technique opératoire. Trois aspects de la technique invitent à mobiliser ces connaissances : le report d'une retenue « 5 vers la droite », l'invalidité de la technique appliquée de gauche à droite, et la sortie du domaine des entiers occasionnée par le traitement d'une entrée entière impaire.

Cette exploration des capacités des élèves dans les contextes numériques au cycle 3 est, en un sens complémentaire de celle des travaux de C. Allard, C. Chambris et F. Tempier (2017) sur la numération. Dans tous les cas (hors certains travaux sur les fractions) il s'agit d'étudier les productions des élèves face à des tâches légèrement inhabituelles (recompositions « non canoniques » au sens de Tempier, technique opératoire inédite ici), dans des cas où la technique est entièrement justifiable par les principes fondamentaux de notre système d'écriture chiffré. Dans les deux cas, le niveau de difficulté est contrôlé par des paramètres différents : F. Tempier (2016) ne demande pas aux élèves de produire un discours technologique relatif à une technique, alors que ce discours est au centre de notre projet ; en revanche, il déstabilise les élèves en utilisant des décompositions non-canoniques ou des conversions demandant de parcourir plusieurs ordres en une seule étape (par exemple : 23 millions = … milliers), ce qui ne se présente jamais dans la division par 2.

3. Analyse a priori : ressources sémiotiques

Les ressources mises à disposition des élèves pour représenter les nombres n'offrent pas toutes les mêmes possibilités d'action ; elles suggèrent plus ou moins certains éléments de justification ; elles rendent parfois nécessaires des justifications qui ne le sont pas dans d'autres contextes. Nous nous pouvons ici – faute de place – indiquer que quelques éléments.

Ainsi, un travail s'appuyant entre autre sur du matériel multibase (à pas de 10) suggère-t-il le principe de groupement et invite à expliciter la valeur positionnelle des chiffres.

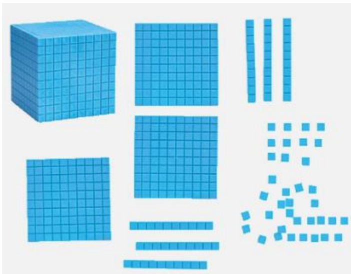

Figure 1 *– Matériel multibase, ici utilisé avec un pas de 10*

Son utilisation permet en outre de justifier – sur des exemples acquérant une valeur générique – la linéarité additive de l'opérateur de médiation : le partage en deux parts égales d'une collection formée de 4 plaques, 2 barres et 8 cubes donne bien deux collections de 2 plaques, 1 barre et 4 cubes chacune. Le passage par ce matériel, ou par son évocation graphique, peut aussi suggérer les conversions « vers la bas » (1 centaine → 10 dizaines, 1 dizaine → 10 unités) et permettre à certains élèves de ne pas rester bloqués devant un chiffre des dizaines impair (« on ne peut pas diviser 5 par 2 ») ou devant des « restes » dont on ne saurait que faire (« 5 divisé par 2, ça fait 2, reste 1 … »).

L'usage de ce matériel ou de ses représentations graphiques ne supprime complètement la diversité des procédures, et ne rend pas la tâche de recherche de l'écriture chiffrée du résultat entièrement transparente. Ainsi, pour la médiation de 34 peut-on imaginer deux procédures ; seule celle de droite est directement congrue à la technique opératoire historique :

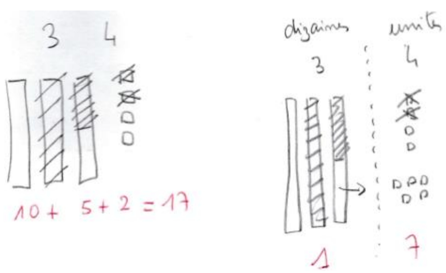

Figure 2 *– Deux variantes dans la division par 2 de 34.*

Même en n'utilisant que des représentations chiffrées, on peut travailler dans des dispositions avec ou sans effacement. Par exemple, on peut opter pour une disposition sans aucun effacement des calculs intermédiaires (à gauche : état initial ; à droite : état final) :

	c	d	u				c	d	u
Retenues					Retenue			5	5
Entrée	3	1	2		Entrée		3	1	2
							1	0	1
Sortie					Sortie		1	5	6

Figure 3 *– Disposition sans effacement, dans un tableau de numération.*

Dans cette disposition, il est même indifférent de mettre en œuvre l'algorithme en partant de la droite ou de la gauche, alors que la deuxième solution peut conduire à des résultats erronés si l'on travaille sur l'ardoise.

Sur la base de ces réflexions, le projet sera affiné et mis en œuvre en 2017-2018 dans aux moins deux classes, l'une de CM2, l'autre de 6$^{\text{ème}}$.

REFERENCES

Allard C., Chambris C., & Tempier F. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collège. *Repères IREM* 108, 63-91.

Al-Khwārizmī (1992). *Le calcul indien (algorismus)*. Edition critique, traduction et commentaires de André Allard. Paris : Librairie A. Blanchard, et Namur : Société des Etudes Classiques.

Al-Khwārizmī (2007). *Al-Khwarizmi : le commencement de l'algèbre.* Texte établi, traduit et commenté par Roshdi Rashed. Paris : Librairie A. Blanchard.

Brousseau G. (2010). Le calcul humain des multiplications et des divisions de nombres naturels. *Grand N* 85, 13-41.

Charnay R. (2007). La division, le plus tôt possible ? La division, le mieux possible ! *Bulletin de l'APMEP* 469, 202-212.

Chorlay (2016). *Historical sources in the classroom and their educational effects*. In L. Radford, F. Furinghetti & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM 2016, 18-22 July 2016). Montpellier, France: IREM de Montpellier, 5-23.

Chorlay R., Masselin B., & Mailloux F. (2017). Tâches algorithmiques en cycle 3 : trois séances sur la multiplication par jalousie. *Grand N* 100, 33-57.

Clivaz S. (2016). Connaissance mathématique des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication. *Recherche en didactique des mathématiques* 36/2, 231-261.

Constantin C. (2017). La distributivité : quelles connaissances pour enseigner la multiplication à l'école primaire ? *Grand N* 100, 105-130.

Tempier (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N* 98, 67-90.