



Logique mathématique et logique de sens commun : rupture ou continuité ?

Viviane Durand-Guerrier, IUFM de Lyon et LIRDHIST, Université Claude Bernard Lyon 1,
France

Résumé

Il est habituel, tant dans les travaux de psychologie cognitive que dans les travaux de didactique des mathématiques, de considérer que la logique mathématique s'éloigne irrémédiablement de la logique de sens commun à l'œuvre dans le discours quotidien, et que la première doit donc en quelque sorte se construire contre la seconde. Cette question est également posée par les fondateurs de la logique classique, d'Aristote à Quine, en passant par Frege, Russell, Wittgenstein et Tarski. Je m'attacherai à montrer que la lecture de ces auteurs permet de mettre en évidence la recherche constante d'une juste distance entre la conformité à la logique à l'œuvre dans le discours quotidien et la possibilité de construire des langages formels permettant de traiter scientifiquement de la question de la validité des raisonnements. On verra que cette préoccupation conduit les différents auteurs à marier les aspects syntaxique et sémantique tant en ce qui concerne le calcul des propositions que le calcul des prédicats. Je montrerai sur quelques exemples que le courant de la sémantique logique issu de ces travaux permet de reconsidérer sérieusement l'hypothèse d'une rupture entre logique mathématique et logique de sens commun et renvoie la balle dans le camp des enseignants de mathématiques qui sont invités à s'interroger sur la pertinence des outils logiques qu'ils mettent en œuvre dans leur propre pratique d'enseignant.

1. Introduction

Il est habituel, tant dans les travaux de psychologie cognitive que dans les travaux de didactique des mathématiques, de considérer que la logique mathématique s'éloigne irrémédiablement de la logique de sens commun à l'œuvre dans le discours quotidien, et que la première doit donc en quelque sorte se construire contre la seconde. Ceci s'appuie principalement sur les résultats des travaux conduits en psychologie cognitive sur le raisonnement, travaux qui mettent en évidence le fait que les sujets adultes, même cultivés, échouent massivement à des tâches abstraites, alors qu'ils réussissent des tâches contextualisées considérées comme isomorphes aux précédentes. Une littérature abondante est consacrée en particulier à la tâche de sélection de Wason¹ et à ses variantes. Ce point de vue sous-tend par ailleurs un certain nombre de travaux conduits en didactique des mathématiques sur l'apprentissage du raisonnement déductif. C'est le cas en particulier des travaux de Arzac *et al.* (1992), Duval (1995), Legrand (1993), Hoyles et Kücheman (2003). Cette distance entre logique de sens commun et logique mathématique s'incarne dans deux thématiques emblématiques. La première concerne la «règle du contre-exemple», selon laquelle un énoncé universel est faux dès qu'il a un contre-exemple ; or ceci rentre en conflit avec la logique de sens

1 Voir, par exemple, Richard (1990).

commun, ce qui conduit de nombreux élèves et étudiants à refuser de déclarer faux un énoncé ayant un seul contre-exemple. La deuxième concerne la « définition de l'implication matérielle », qui conduit à déclarer vrai un énoncé conditionnel dont l'antécédent est faux, alors que le sens commun tendrait plutôt à lui dénier une valeur de vérité (Quine, 1950).

Pourtant la logique formelle ne s'est pas construite contre la logique de sens commun ; je dirais qu'elle s'est plutôt construite en appui sur la logique de sens commun. En effet, la question des liens entre logique de sens commun et logique formelle est posée explicitement par les fondateurs de la logique classique, d'Aristote à Quine, en passant par Frege, Russell, Wittgenstein et Tarski ; elle est même constitutive de leurs projets. Je m'attacherai à montrer dans une première partie que la lecture de ces auteurs permet de mettre en évidence la recherche constante d'une juste distance entre la conformité à la logique à l'œuvre dans le discours quotidien et la possibilité de construire des langages formels permettant de traiter scientifiquement de la question de la validité des raisonnements. On verra que cette préoccupation conduit les différents auteurs à marier les aspects syntaxique et sémantique tant en ce qui concerne le calcul des propositions que le calcul des prédicats. Je montrerai ensuite sur deux exemples relevant des deux thématiques mentionnées ci-dessus que le courant de la sémantique logique issu de ces travaux permet de reconsidérer sérieusement l'hypothèse d'une rupture entre logique mathématique et logique de sens commun et renvoie la balle dans le camp des enseignants de mathématiques qui sont invités à s'interroger sur la pertinence des outils logiques qu'ils mettent en œuvre dans leur propre pratique d'enseignant.

2. Logique formelle versus logique de sens commun

2.1. La naissance de la logique formelle

La logique formelle naît avec la théorie du syllogisme introduite par Aristote dans les *Premiers Analytiques*², au sens où ce qui relève de la pure logique chez Aristote, c'est la forme, ce qui reste quand on a retiré la matière du syllogisme (Lukasiewicz, 1951, 1972, p. 22). Pour construire son système, Aristote dégage, à partir d'énoncés de la langue vernaculaire, les formes canoniques des énoncés qui entreront dans le système : les universelles affirmatives et négatives que l'on traduit respectivement en français par « A est affirmé de tout B » et « A n'est affirmé de nul B », ainsi que les particulières affirmatives et négatives : « B est affirmé de quelque A » ; « B n'est pas affirmé de quelque A ». Pour produire un syllogisme, trois propositions sont articulées entre elles par un énoncé de type conditionnel reliant deux prémisses coordonnées et une conclusion mettant en jeu trois lettres dont l'une est commune aux deux prémisses et absente de la conclusion, les deux autres se répartissant dans chacune des prémisses et dans la conclusion. Aristote définit trois figures suivant les positions respectives des lettres A, B et C, et décrit ainsi toutes les possibilités d'organisation d'un syllogisme démonstratif. Il se propose ensuite de trier entre les syllogismes concluants pour lesquels « certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données. » (I.1., 24b, 20), et les syllogismes non concluants, pour lesquels il est possible d'avoir les données vraies et la conclusion fausse. Parmi les syllogismes concluants, certains d'entre eux sont parfaits, ce sont ceux qui n'ont « besoin de

2 J'utilise la traduction française due à Jean Tricot, publiée aux éditions Vrin.

rien autre chose que ce qui est posé dans les prémisses pour que la nécessité de la conclusion soit évidente» (I,1, 24b, 20), comme par exemple :

Si A est affirmé de tout B et si B est affirmé de quelque C, nécessairement A est affirmé de quelque C.

Le fait que les syllogismes parfaits soient considérés comme concluants est un principe premier, un lieu commun, et est clairement lié à la signification des marqueurs de quantité «tout» et «quelque» dans la langue naturelle. Ils sont utilisés pour prouver que d'autres syllogismes sont concluants, en utilisant des règles de conversion, elles aussi évidentes : «A est affirmé de quelque B» se convertit en «B est affirmé de quelque A» et «A n'est affirmé de nul B» se convertit en «B n'est affirmé de nul A». Pour prouver qu'un syllogisme n'est pas concluant Aristote propose un contre-exemple.

Ce bref aperçu de la théorie du syllogisme d'Aristote montre que cet auteur construit son système en s'appuyant explicitement sur les raisonnements de sens commun dont la validité est évidente, en déduisant que d'autres raisonnements moins évidents sont également valides en utilisant des règles de conversion en accord avec le sens commun et établit que les autres syllogismes ne sont pas concluants en proposant des contre-exemples pris dans le discours quotidien.

2.2. *Le renouveau de la logique formelle*

Bien que la logique n'ait pratiquement jamais cessé d'être au cœur des préoccupations de nombreux philosophes et savants, c'est véritablement à la toute fin du 19^e siècle et au début du 20^e siècle que cette discipline a connu un essor sans précédent, avec les travaux pionniers de Frege, puis de Russell et de Wittgenstein.

La révolution introduite par Frege consiste à élaborer un langage symbolique enrichi par rapport à celui des mathématiques pour traduire les opérations logiques. Dans un article de 1882 intitulé : «Que la science justifie le recours à une idéographie³», Frege expose son projet de rénover la logique, ceci afin d'atteindre une parfaite rigueur dans les raisonnements mathématiques, ce qui ne pouvait selon lui pas être réalisé lorsque ceux-ci s'expriment dans le langage ordinaire. Frege convient que pour une pratique courante, les moyens de vérification dont nous disposons, grâce à notre expérience des situations rencontrées, nous garde de nombreuses erreurs, mais pose que pour des domaines plus complexes comme les mathématiques, les règles de logique exprimées dans le langage courant se révèlent insuffisantes pour garantir que la chaîne d'inférence ne comporte aucune rupture (Frege, 1970). Son idéographie permet de mettre à jour la structure logique profonde des énoncés mathématiques en fournissant les moyens de distinguer entre énoncé singulier et énoncé général, et de rendre visible la portée de la généralité vis-à-vis des connecteurs logiques comme l'implication ou la négation, ce qui permet de lever certaines ambiguïtés de la langue naturelle. Un autre aspect du travail de Frege en lien avec notre propos concerne les réflexions sur la définition de l'implication entre propositions développées dans *Les recherches logiques*⁴. Frege donne comme définition de «si B, alors A» la pensée composée «non (non A et B)», qui donne lieu à un énoncé faux dans le seul cas où l'antécédent B est vrai et le conséquent A est faux.

3 La traduction française se trouve dans Frege, 1970, 63-69.

4 La traduction française se trouve dans Frege, 1970, 214-234.

Il répond aux objections que cette définition pourrait soulever en affirmant la nécessité pour les besoins de la logique de s'éloigner de l'usage quotidien de la langue, tout en dégageant les formes logiques de cet usage quotidien, après en avoir retiré les scories. L'idéographie apparaît ainsi comme une sorte d'épuration du langage ordinaire et s'inscrit par là dans la continuité d'Aristote. La définition de l'implication adoptée par Frege correspond à ce que Russell (1903, 1989) appelle l'implication matérielle; notons que Russell, contrairement à Frege, ne se satisfait pas facilement d'une définition qui heurte le sens commun, mais dont il assume lui aussi la nécessité.

Élève de Russell et de Frege, Wittgenstein résoudra dans le *Tractatus-logico-philosophicus* la question du lien entre implication et déduction. Il construit dans cet ouvrage un système formel reposant sur le principe de bivalence (il y a exactement deux valeurs de vérité possibles pour les propositions) et dont l'élément de base est la variable propositionnelle. Les connecteurs sont définis de manière combinatoire par leurs tables de vérité, qui ne renvoient à aucun objet de pensée, mais évoquent des systèmes de possibilités pour la vérité et la fausseté des propositions qu'elles connectent (Granger, 1990, p. 42). Les propositions du système sont construites de manière récursive à partir des connecteurs et des lettres de variables propositionnelles; ceci permet d'établir leurs tables de vérité qui indiquent la valeur de vérité d'une proposition complexe pour chaque distribution de valeurs de vérité sur les propositions élémentaires qui la composent. Parmi ces propositions, certaines sont vraies pour toutes les distributions de valeurs de vérité. Ce sont les tautologies qui jouent un rôle essentiel dans le système; elles seules permettent de faire des déductions, tandis que les propositions qui ne sont ni des tautologies, ni des contradictions⁵, permettent de parler des faits du monde, de décrire des états de choses. Pour autant, ce n'est pas à la logique de statuer sur la valeur de vérité de ces propositions, ce que Frege avait déjà explicité. Avec le *Tractatus*, on voit donc l'émergence d'un système formel autonome, dont la finalité est de pouvoir décrire de manière adéquate les faits du monde et les états de choses. Cette tension entre formalisme et adéquation à la description du monde est réalisée de manière magistrale par Wittgenstein dans le *Tractatus* en ce qui concerne le calcul des propositions⁶. Par contre, il ne fait qu'effleurer la question en ce qui concerne le calcul des prédicats, pour lequel Frege et Russell ont proposé des avancées beaucoup plus significatives. C'est Tarski, dans un article célèbre de 1936, qui va réaliser pour le calcul des prédicats ce que Wittgenstein a fait pour le calcul des propositions.

2.3. Une définition de la vérité formellement correcte et matériellement adéquate

Dans l'article intitulé Le concept de vérité dans les langages formalisés, Tarski se propose de «construire une définition de l'expression «proposition vraie»; définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte» (Tarski, 1936-a, 1972, p. 159). Le projet de Tarski s'inscrit clairement dans une perspective d'adéquation entre systèmes formels et réalité, ce qu'il réaffirme dans Tarski (1944, 1974) où il revient sur le sens du terme vrai qu'il utilise, en se référant explicitement aux intuitions de la conception aristotélicienne classique de vérité qui s'exprime sous forme moderne par: «la vérité d'une proposition consiste en son accord (ou sa correspondance) avec la réalité, ou

5 Les contradictions sont les propositions du système qui prennent la valeur faux pour toute distribution de valeur de vérité.

6 Ceci est développé dans Durand-Guerrier (2006).

encore une proposition est vraie si elle désigne un état de choses existant» (op. cit., p. 270-271). On reconnaît là une formulation rencontrée chez Wittgenstein. Il donne comme exemple :

La proposition «la neige est blanche» est vraie si et seulement si la neige est blanche.

Afin de pouvoir élaborer une construction récursive de la vérité pour les propositions, Tarski introduit un concept de nature plus générale : la notion de satisfaction d'une fonction propositionnelle par tels ou tels objets, les propositions complexes n'étant pas des agrégats de propositions, mais obtenues à partir de fonctions propositionnelles (Tarski, 1936-a, 1972, p. 193). Cette définition met en évidence le fait que pour se prononcer sur la satisfaction d'une fonction propositionnelle par tel objet, il est nécessaire de se placer dans un domaine de réalité donné, dans lequel il y a des états de choses existants sur la vérité desquels on peut se prononcer. Pour Tarski, un domaine de réalité peut être naturellement la réalité sensible, mais aussi bien une théorie mathématique, ou une théorie locale élaborée pour les besoins de la cause. On peut alors construire de façon récursive la satisfaction d'une formule complexe du calcul des prédicats du premier ordre dans toute structure comportant un univers du discours non vide et une interprétation pour chacune des lettres de prédicats de la formule, ce qui permet de définir la notion de modèle d'une formule d'un langage formalisé : c'est une structure interprétative dans laquelle la formule est satisfaite par toute suite d'objets. À partir de cette définition, Tarski définit la notion de conséquence logique d'un point de vue sémantique : «La proposition X suit logiquement de la classe de propositions K si tout modèle de K est un modèle de X» (Tarski, 1936-b, 1972).

Une présentation très claire de cette notion de conséquence logique se trouve chez Quine (1950), qui développe des outils logiques permettant de rester au plus près du fonctionnement ordinaire de la langue et des raisonnements de sens commun tout en s'en écartant lorsque ceci est nécessaire, mais toujours pour fournir en retour des outils pertinents pour l'analyse du langage, de la référence et pour la critique de l'inférence.

3. Conséquences didactiques

Les aspects épistémologiques présentés ci-dessus montrent que les auteurs qui adoptent un point de vue sémantique posent explicitement la question de l'adéquation aux raisonnements de sens commun des outils développés pour traiter de la vérité et de la validité et la résolvent de sorte que la distance nécessaire à la construction des systèmes formels ne se fasse en aucun cas au détriment de la possibilité d'appliquer ces outils dans des situations concrètes. D'où vient alors cette impression que la logique à l'œuvre dans la classe de mathématiques doit se construire contre la logique de sens commun ? La thèse⁷ que je défends est que ceci tient pour une large part à une quasi-absence de références explicites à la logique des prédicats dans le travail des enseignants, ce qui conduit à deux types de pratiques dans la classe de mathématique. La première consiste à privilégier les modes de raisonnements de type syntaxique, à travailler essentiellement sur des énoncés clos, au détriment d'un travail sur les objets et leurs propriétés. C'est ce qui conduit Duval (1992-1993) à défendre la rupture cognitive entre argumentation et raisonnement déductif. La seconde consiste à rassembler les différentes notions d'implication⁸ sous une seule et même notion : le conditionnel

7 Cette thèse est illustrée abondamment dans Durand-Guerrier, 2005-a.

8 Sur les différentes notions d'implication, voir Durand-Guerrier, 2003.

généralisé exprimé sans quantificateur universel, pour lequel on applique de manière radicale la règle du contre-exemple. Je présente ci-dessous deux exemples illustrant cette thèse.

3.1. Énoncés clos versus énoncés ouverts

Je me propose dans ce paragraphe d'illustrer sur un exemple ce qu'il faut entendre par travail sur les objets et leurs propriétés, en perspective avec travail sur les énoncés clos⁹.

La situation est extraite de Arsac *et al.* (1992). Elle a été proposée à des élèves de cinquième suivant le dispositif du problème ouvert (Arsac *et al.*, 1988) sous la rubrique : « Plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver ». L'énoncé est le suivant :

Dans l'expression $n \times n - n + 11$, si on remplace n par n 'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs ?

Les élèves doivent donc se prononcer sur la valeur de vérité d'un énoncé clos, universel, pour lequel le domaine de quantification est infini. Cette situation vise l'institutionnalisation de deux règles : « un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé mathématique est faux » ; « des exemples mêmes nombreux, ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé mathématique est vrai ». À l'issue de leur recherche, les élèves ont rédigé des affiches, qui sont mises en débat. Les auteurs ont transcrit le débat portant sur l'une des affiches sur laquelle la réponse des élèves est OUI ; l'affiche contient deux exemples et un début d'explication qui laisse apparaître une confusion entre impair et premier. Au cours des échanges, le contre exemple 11 est rapidement produit et un débat s'engage entre certains élèves qui en concluent que l'énoncé est faux et d'autres élèves comme Marie, qui ne veulent pas renoncer à l'énoncé et propose d'éliminer 11 et ses multiples :

(40) Élève : *Y a une exception, donc c'est pas toujours !*

(41) Marie : *Ça a été reconnu. À part ça, c'est toujours un nombre premier. Si on éliminait 11 ben...*

(63) Marie : *Oui mais 22, c'est le double de 11, on peut peut-être essayer 33, à mon avis ce sera aussi une exception.*

Dans cette situation, l'énoncé avec lequel les élèves travaillent n'est pas l'énoncé clos ; c'est l'énoncé ouvert « $n^2 - n + 11$ », dans lequel ils substituent à la lettre n des valeurs numériques. Un certain nombre d'entre elles donnent un énoncé vrai, tandis que les multiples de 11 donnent un énoncé faux. Suivant Grize et Pierault (1983), on pourrait considérer que Marie privilégie « l'efficacité » sur la recherche de la vérité ; mais ceci ne s'oppose en aucun cas ici à la rationalité mathématique, bien au contraire. En effet, la proposition de Marie d'éliminer les multiples de 11 est pertinente ; ceci revient à restreindre l'univers du discours, afin de pouvoir s'interroger à nouveau sur la valeur de vérité de l'énoncé.

Au cours du débat, une autre élève, Géraldine, exprime l'idée que l'énoncé est parfois vrai, parfois faux :

(87) Géraldine : *Une seule exception, s'il n'y a que ça, c'est vrai que c'est pas entièrement faux ni pas entièrement vrai.*

9 Cet exemple est développé dans Durand-Guerrier, 2005-a, p. 128-139.

Dans l'ensemble des échanges, les élèves qui sont convaincus que l'énoncé est faux insistent sur le fait que, puisqu'il y a un contre-exemple, l'énoncé n'est pas toujours vrai, tandis que les élèves qui résistent comme Marie ou Géraldine à déclarer l'énoncé faux semblent s'intéresser plutôt au cas de l'énoncé ouvert. On pourrait donc considérer que Géraldine exprime simplement le fait que l'énoncé ouvert a des exemples et des contre-exemples, ce qui n'a évidemment rien d'incohérent. Or le professeur, lors de l'institutionnalisation, ne reprend pas le fait que l'énoncé est universellement quantifié; comme si cela allait de soi que, en mathématiques, on ne travaille qu'avec des énoncés généraux.

3.2. Énoncé singulier versus énoncé universel

L'exemple proposé dans ce paragraphe illustre une pratique mathématique ordinaire qui vise à assimiler dans la classe de mathématique tous les énoncés conditionnels à des énoncés généraux implicitement quantifiés auxquels s'applique donc la règle du contre-exemple, pratique qui rentre en conflit avec la logique de sens commun, mais aussi dans ce cas avec la logique formelle. Cette tâche a été proposée dans le cadre d'EVAPM2 91; il s'agit d'une évaluation proposée par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public à des enseignants volontaires en fin de seconde, dont les résultats sont publiés dans APMEP (1992). Le labyrinthe est le premier exercice d'une série de six portant sur le thème Argumentation – Raisonnement – Expression. L'exercice se présentait ainsi :

Exercice 1

| | |
|--|--|
| | <p>Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.</p> <p>Une personne que nous appellerons X a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte.</p> <p>Les pièces sont nommées A, B, C... comme il est indiqué sur la figure</p> |
|--|--|

Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).

Par exemple, la phrase «X est passée par C» est une phrase VRAIE.

En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe, et C'est la seule pièce d'entrée.

Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est vraie, si elle est fausse ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

Phrase n° 1 : « X est passé par P ».

Phrase n° 2 : « X est passé par N ».

Phrase n° 3 : « X est passé par M ».

Phrase n° 4 : « Si X est passé par O, alors X est passé par F ».

Phrase n° 5 : « Si X est passé par K, alors X est passé par L ».

Phrase n° 6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K ».

Je m'intéresse ici à la phrase n° 6, considérée comme fausse par les enseignants, alors que la majorité des élèves et particulièrement ceux qui réussissent bien les épreuves répondent « on ne peut pas savoir ». De fait, certains trajets rendent la phrase vraie, d'autres la rendent fausse.

Les auteurs de la brochure expriment ainsi la divergence entre la réponse qu'ils considèrent comme correcte et celle qui est donnée par la majorité des élèves :

« S'agit-il d'énoncés mathématiques, qu'il s'agirait d'appréhender de façon globale ? Dans ce cas, ce qui importe c'est la qualité d'un lien entre les deux assertions et non la véracité particulière de chacune des assertions. »

Ainsi les auteurs considèrent que la phrase n° 6 est un énoncé général, implicitement quantifié et que donc la lettre X joue ici le rôle d'une variable liée (muette), tandis que les réponses des élèves montrent qu'ils la considèrent comme une implication entre deux propositions, vraie dans certains cas et fausse dans d'autres :

« La phrase n° 6 n'est ni vraie, ni fausse. On ne peut pas savoir. Car X a pu passer par K, mais X a aussi pu passer par I, pièce communiquant directement avec I, évitant le passage par K. »

Ici X a plutôt le statut de ce que l'on appelle en logique un nom propre (on aurait pu l'appeler Pierre ou Paul), autrement dit un terme singulier, ce qui fait de la phrase n° 6 un énoncé singulier. Comme celui qui doit répondre à la question ne connaît pas le trajet emprunté par la personne appelée X, il ne peut pas se prononcer sur la valeur de vérité de cet énoncé singulier. Ceci est différent de ce qui se passe avec l'énoncé 5, pour lequel on peut se prononcer sans connaître le trajet, précisément parce que l'énoncé général associé est vrai dans cette situation, ou pour l'énoncé 1, que l'on peut déclarer faux sans connaître le trajet, puisque la pièce P ne comportant pas de porte, aucun trajet permettant de sortir ne peut emprunter cette porte. Le cas de la phrase n° 6 est par contre analogue au cas de la phrase n° 3, la phrase ouverte associée ayant également des exemples et des contre-exemples. Il faut noter que pour la phrase n° 3, les auteurs répondent comme les élèves « on ne peut pas savoir » ; ce qui signifie qu'il y a pour eux un changement de statut logique pour la lettre X entre la phrase n° 3 et la phrase n° 6, ce dont on ne peut pas rendre compte par une analyse logique, toutes les interprétations possibles de la lettre X conduisant à donner la même réponse pour les deux phrases (faux pour les deux, ou on ne peut pas savoir pour les deux). Ceci montre qu'une analyse dans le cadre de la sémantique logique de Tarski conduit à considérer que

la réponse des élèves pour la phrase n° 6 est non seulement cohérente, mais en outre tout à fait pertinente dans cette situation.¹⁰

4. Conclusion

J'espère avoir montré dans ce texte que les tensions entre logique de sens commun et logique formelle trouvent un point d'équilibre dans les systèmes développés par les auteurs s'inscrivant dans le courant de la sémantique logique, et que ceci plaide pour une continuité relative plutôt que pour une rupture radicale. Les deux exemples traités montrent que l'adoption de cette perspective permet de reconsidérer de manière positive la question de la rationalité des élèves entre réduisant de manière significative la distance entre raisonnement de sens commun et raisonnement mathématique. Ceci permet d'apporter des éléments de réponse à la question de savoir si la construction d'une rationalité mathématique est possible pour tous les élèves. On peut en effet faire l'hypothèse que l'on accompagnera mieux le développement de cette rationalité en considérant qu'elle s'applique tout autant au travail sur les objets et leurs propriétés qu'à la manipulation d'énoncés généraux intemporels, qui ne sont en fait que l'aboutissement de ce travail avec les objets et qui sont susceptibles d'être soumis à révision. Ceci est une invitation à reconsidérer la place des questions de logique, en particulier en ce qui concerne le point de vue sémantique développé dans le calcul des prédicats du premier ordre, dans l'enseignement des mathématiques et par conséquent dans la formation des professeurs¹¹.

Références

- A.P.M.E.P. (1992). Publication n° 88 : EVAPM91/2. *Évaluation des programmes de mathématiques Seconde 1991*
- Aristote. *Organon : III. Premiers Analytiques*, Traduction nouvelle et notes par Jean Tricot, Paris : Librairie philosophique J. Vrin, 1983.
- Arsac, G. , Germain, G. et Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation problème*, Lyon : IREM de Lyon
- Arsac, G. ; Chapiron G. ; Colonna A. ; Germain G. ; Guichard Y. ; et Mante M., (1992). *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Lyon : Presses Universitaires de Lyon ; I.R.E.M. de Lyon
- Durand-Guerrier, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit X*, 50, 57-79.
- Durand-Guerrier, V. (2003). Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 53(1), 5-34.
- Durand-Guerrier, V. (2005-a). *Recherches sur l'Articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Lyon : IREM de Lyon.
- Durand-Guerrier, V. (2005-b). *Questions de logique dans l'enseignement supérieur. Quelques pistes pour faire évoluer les pratiques enseignantes*, in Actes du troisième colloque Troisième colloque Ques-

¹⁰ Des analyses détaillées de cette situation, ainsi que l'analyse d'une situation mathématique dans laquelle on retrouve un phénomène analogue, se trouvent dans Durand-Guerrier, 1999, 2005-a.

¹¹ Ceci est développé, pour l'enseignement supérieur, dans Durand-Guerrier, 2005-b.

tions de pédagogie dans l'enseignement supérieur: Nouveaux contextes, nouvelles compétences?
École centrale de Lille, Lille 1-2-3 juin 2005

Durand-Guerrier, V. (2006). Lire le *Tractatus* dans une perspective didactique. In M. Ouelbani (dir.), *Thèmes de philosophie analytique*. Tunis: Université de Tunis.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer: Continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, 31, 37-61

Frege, G. (1970). *Écrits logiques et philosophiques*. Paris: Seuil

Granger, G.G. (1990). *Invitation à la lecture de Wittgenstein*. Aix-en-Provence: Alinea

Grize, J-B. et Pierault, G. (1993). *La contradiction. Essai sur les opérations de la pensée*. Paris: PUF.

Hoyles, C. et Küchemann, D. (2003). Students' understandings of logical implication. *Educational Studies in Mathematics*, 51(3/2),193-223.

Legrand, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématique et spécificité de l'analyse. *Repères* n° 10 123-158

Lukasiewicz, J. (1951). *La syllogistique d'Aristote*. Traduction française, Paris: Armand Colin, 1972.

Quine, W.V.O. (1950) *Méthodes de logique*. Traduction française, Paris: Armand Colin, 1972

Richard, J.F. (1990). *Les activités mentales: comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Paris: Armand Colin.

Russell, B. (1903). *Les principes de la mathématique*. Traduction française in RUSSEL, *Écrits de logique philosophique*. Paris: PUF, 1989.

Tarski, A. (1936-a). Le concept de vérité dans les langages formalisés. Traduction française in *Logique, sémantique et métamathématique*, volume 1: 157-269. Paris: Armand Colin, 1972.

Tarski, A. (1936-b). Sur le concept de conséquence. Traduction française in *Logique, sémantique et métamathématique*, volume 1: 141-152. Paris: Armand Colin, 1972.

Tarski, A. (1944). La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique. Traduction française in *Logique, sémantique et métamathématique*, volume 2: 265-305. Paris: Armand Colin, 1974.

Wittgenstein, L.(1921). *Tractatus logico-philosophicus*. Traduction française, Paris: Gallimard, 1961.

Pour joindre l'autrice

Viviane Durand-Guerrier
IUFM de Lyon
5 rue Anselme
F-69004 Lyon
vdurand@univ-lyon1.fr