

UNE ETUDE PRAXEOLOGIQUE MONTRANT LES CHOIX DE TRANSPOSITION D'UN ENSEIGNANT D'ALGÈBRE ABSTRAITE

CANDY*¹ Julie

Résumé – Le passage de l'algèbre à l'algèbre abstraite implique une transition épistémologique interne aux mathématiques due à la nature des concepts en jeu. Nous présentons une étude praxéologique d'une série d'exercices issus d'un manuel afin de mettre en avant les choix de transposition didactique effectués par l'auteur pour prendre en charge cette transition.

Mots-clefs : algèbre abstraite, Théorie Anthropologique du Didactique, praxéologie structuraliste, idéal.

Abstract – The passage from algebra to abstract algebra implies an epistemological transition internal to mathematics due to the nature of the concepts at stake. We present a praxeological analysis of a sequence of exercises from a textbook to show the didactical transposition choices of the author to handle this transition.

Keywords: abstract algebra, anthropological theory of the didactic, structuralist praxeology, ideal.

I. INTRODUCTION

Hausberger (2018) a montré que la pratique mathématique en algèbre abstraite peut être vue comme une application de la méthode axiomatique, dans son usage structuraliste : les structures sont utilisées en tant qu'outil pour prouver des propriétés des objets, grâce aux techniques structuralistes. Ce passage de l'algèbre à l'algèbre abstraite implique pour l'étudiant une transition épistémologique interne à l'algèbre due à la nature de l'algèbre structuraliste. Mon travail de thèse en cours s'inscrit dans cette étude de l'entrée dans la pensée structuraliste en se concentrant sur l'étude d'un concept au cœur de cette pensée : le concept d'idéal. Soit $(A, +, *)$ un anneau et I un sous-ensemble de A . Alors I est un idéal (bilatère) de A si et seulement si $(A, +)$ est un groupe commutatif et pour tout $a \in A$ et pour tout $x \in I$ on a $a * x \in I$ et $x * a \in I$. En France, ce concept est généralement introduit en deuxième année de Licence ou de CPGE², en faisant le lien avec la définition du pgcd en arithmétique et avec pour application la réduction des endomorphismes (notion de polynôme minimal). Son importance en théorie abstraite des anneaux (pour générer des anneaux quotients) ou en lien avec l'arithmétique des anneaux abstraits (avec les grandes classes d'anneaux, dont les anneaux principaux définis à partir d'une condition portant sur les idéaux) n'apparaît qu'en troisième année de Licence, voire en Master 1, lors de cours dédiés aux structures algébriques. Ainsi, les étudiants rencontrent ce concept dans différentes institutions, et à différents niveaux du curriculum.

Pour les raisons évoquées ci-dessus, nous choisissons la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1998) comme cadre théorique afin d'étudier cette transition d'un point de vue institutionnel. La théorie anthropologique du didactique postule que toute activité humaine, et en particulier l'activité mathématique, peut être décrite grâce à l'outil des praxéologies. Une praxéologie est un quadruplet $(T, \tau, \theta, \Theta)$ constitué d'un bloc de la praxis $[T, \tau]$ où τ est la technique permettant de résoudre le type de tâches T , et d'un bloc du logos $[\theta, \Theta]$ où θ est la technologie (discours justifiant la technique) et Θ la théorie (discours

1* Haute Ecole Pédagogique du Valais – Suisse – Institut Montpelliérain Alexandre Grothendieck, Université de Montpellier – France – julie.candy@hepvs.ch

2 Classes préparatoires aux grandes écoles. Ce dispositif de niveau post-bac, spécifique au contexte français, a pour vocation de préparer aux concours donnant accès aux écoles d'ingénieurs les plus prestigieuses.

justifiant la technologie). La pensée structuraliste implique un travail sur des classes d'objets, sur les relations entre ces classes (par exemple entre anneaux factoriels, principaux et euclidiens) et sur la stabilité structurelle des propriétés par opération sur les structures (par exemple, l'addition et le produit d'idéaux, ou encore l'image directe ou réciproque par un homomorphisme, etc.). Cette méthodologie qui implique un rapport dialectique entre objets et structures, fait naître des praxéologies qui comportent, dans le bloc du logos, un théorème sur la structure en jeu. Hausberger (2018) définit ce type de praxéologie comme étant une *praxéologie structuraliste*. De ce fait, un des aspects de cette transition épistémologique interne peut se traduire en termes de construction (et d'évolution) de praxéologies structuralistes à partir de praxéologies antérieures (algébriques et logiques, voire structuralistes ; Jovignot, Hausberger et Durand-Guerrier, 2017). Nous présenterons ici l'évolution des praxéologies proposées dans un manuel de licence (Escofier, 2011) autour du concept d'idéal, dans une progression dédiée à la manipulation des anneaux quotients.

II. ANALYSE DES PRAXEOLOGIES ET DE LEUR EVOLUTION

Nous allons étudier un ensemble de 9 exercices indépendants intitulés « Exercices sur les quotients » (Escofier, 2011, p488-490). Les principales praxéologies rencontrées sont :

Ex.	Type de tâches	Technique	Technologie
1, 7	T_A : Simplifier un anneau quotient $K[X]/(P)$ donné, où P est irréductible	τ_A : Construire un morphisme f tel que $(P) = \text{Ker} f$ et utiliser le 1 ^{er} théorème d'isomorphisme	θ_A : 1 ^{er} théorème d'isomorphisme
2, 3, 8c	T_B : Simplifier un anneau quotient $A[X]/(P)$ donné	τ_B : Décomposer P de façon à obtenir des idéaux étrangers et appliquer le théorème chinois	θ_B : Théorème chinois
4	T_C : Démontrer que $A[X]/(P)$ et $A[X]/(Q)$ donnés sont isomorphes	τ_C : Trouver un isomorphisme ϕ tel que $\phi(P) = \phi(Q)$ puis utiliser le corollaire 1 (soient $\phi: A \rightarrow A'$ un isomorphisme d'anneaux, I un idéal de A . Alors $\phi(I)$ est un idéal de A' et A/I est isomorphe à $A'/\phi(I)$)	θ_C : Corollaire 1
5, 6, 7, 8a, 8b	T_D : Déterminer si deux quotients $A[X]/(P)$ et $A[X]/(Q)$ donnés sont isomorphes ou pas	τ_C ou, dans la négative, τ_D : Interpréter les quotients en terme d'ajout de nouvelles relations et montrer qu'une relation ne peut exister.	θ_D : Relations conservées par isomorphisme

Figure 1 – Résumé des principales praxéologies présentes au sein de ces exercices

L'analyse praxéologique nous permet de relever plusieurs points saillants :

- les praxéologies A, B et C sont centrées autour de l'utilisation d'un théorème d'isomorphisme ou du théorème Chinois, qui apparaissent au niveau de la technologie : ce sont les connaissances visées. La raison d'être de ces technologies structuralistes mise en avant par l'auteur est la « simplification » des anneaux quotients (motivation épistémologique), qui requiert également des procédures pour décider de l'identité (à isomorphisme près) de deux quotients.

- Dans les exercices 4, 5 et 8a mobilisant la technique τ_C , les variables didactiques A , P et Q ont été choisies afin qu'il soit aisé de trouver l'isomorphisme ϕ .
- On remarque pour C et D un degré croissant de la généralité des objets au fur et à mesure des exercices : on travaille d'abord dans des quotients d'anneaux explicites (par exemple $K[X]/(X^2 + 1)$) puis sur des familles d'anneaux (par exemple les $A_k = Z[X]/(3X - k)$ où $k \in Z$).
- Enfin, dans le dernier exercice de la série (exercice 9) les structures abstraites mobilisées jusqu'alors au niveau du logos figurent au sein du bloc de la praxis sans mention d'objets concrets, dans une nouvelle tâche d'un type qui généralise T_C : soit I et J deux idéaux de A , montrer que $I/(I \cap J)$ et $(I + J)/J$ sont isomorphes. Cette série d'exercices aboutit donc sur une transition de type 2 (cf. ci-dessous) au sens de Hausberger (2018).

La notion de transition de type 1 et de type 2, introduit dans le contexte de l'algèbre abstraite par Hausberger (2018), s'appuie sur les travaux antérieurs de Winslow (2006). Ce dernier explique que, dans le cas de l'enseignement de l'analyse à l'Université, l'étudiant rencontre un premier type de transition lorsqu'il passe d'une activité centrée autour du bloc de la praxis à un travail sur des praxéologies plus complètes. Puis l'étudiant fait face à un nouveau type de transition :

les démonstrations ne sont plus seulement à connaître mais aussi à construire. Pour ces tâches, portant donc sur des objets plus généraux ou même « abstraits », l'étudiant n'a plus d'appui sûr dans des exemples familiers, « semblables » ou génériques. [...] les objets de ces tâches nouvelles prennent leurs objets dans les blocs théoriques de praxéologies (en principe) familiers. (loc. cit. p. 4)

Dans le cas de l'algèbre abstraite, Hausberger (2018) explique que :

although Algebra and Analysis involve quite different modes of reasoning, the transition from concrete to abstract thus presents similar challenges. But the following distinction should be pointed out: the type 1-transition in Winslow's case is a process of completion of praxeologies, with praxis block unchanged, whereas in our context, Π is replaced by Π_S since structuralist techniques, oriented by the choice of a theoretical framework (a theory of structures), are developed. (loc. cit. p. 19)

Afin de compléter cette étude des choix de transposition didactique effectués par l'auteur, et en particulier de confronter le résultat de nos analyses aux perceptions de l'auteur de ses propres intentions didactique relatives à ses organisations mathématiques, nous avons conçu un protocole d'interview. Une première série de questions concerne le rapport personnel de l'auteur à l'algèbre comme par exemple « comment définiriez-vous l'algèbre en tant que champ mathématique ? ». Suivent des questions sur la transposition didactique externe (Bosch et Winslow, 2016), puis des questions sur la transposition didactique interne portant sur le manuel en entier comme « comment avez-vous choisi vos séries d'exercices sur les idéaux dans le livre ? ». Enfin, des questions portent sur la série d'exercices étudiée ci-dessus :

- Quel est pour vous l'apprentissage visé à travers cet exercice ?
- Pouvez-vous expliquer les choix qui ont été faits dans cette série d'exercices (ordre des questions, formulation des questions, choix des techniques utilisées, choix des anneaux en jeu pour chaque sous-question) ?
- La question 9 se distingue des autres ; qu'est-ce que vous en pensez ?

Ces dernières questions devraient permettre de mettre en lumière les intentions de l'auteur lors de la rédaction de l'exercice. La première question devrait nous permettre de circonscrire l'apprentissage visé : retrouve-t-on l'aspect simplificateur que l'analyse praxéologique met en valeur ? La deuxième question devrait nous permettre de décrire les praxéologies didactiques

de l'auteur lors de la création de l'exercice. En particulier, nous pourrions observer si ces praxéologies sont guidées par des choix conscients ou bien si le bloc du logos demeure implicite, l'enseignant s'appuyant essentiellement sur son intuition, aiguisée par une longue expérience d'enseignement. Enfin, la dernière question devrait permettre de décrire les intentions de l'auteur lors du choix de l'exercice 9. Ainsi, les réponses à cette interview devraient permettre d'enrichir et de compléter l'analyse précédemment menée. Ce travail est actuellement en cours et fera l'objet d'une publication ultérieure.

III. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

On peut qualifier la transposition effectuée par Escofier (2011) de « bottom-up » : l'auteur commence par des tâches au niveau d'anneaux spécifiés et généralise progressivement les tâches jusqu'à travailler au niveau des structures avec des anneaux abstraits uniquement. Cependant, dans le cas de l'exercice 9, l'auteur a choisi de spécifier l'homomorphisme qui doit être utilisé réduisant ainsi considérablement le topos de l'étudiant lors du passage à l'abstrait. L'analyse croisée de l'interview et de l'analyse praxéologique nous permettra d'enrichir nos conclusions. De telles études praxéologiques menées sur un corpus large de cours et travaux dirigés permettront de mettre en évidence les choix didactiques effectués par les enseignants pour prendre en charge les transitions intrinsèques à la nature de l'algèbre abstraite, de relever les leviers qu'ils mettent en place pour favoriser les apprentissages ou bien les obstacles didactiques qu'ils contribuent à créer. Pour cela, nous allons à la fois interviewer des professeurs qui enseignent le concept d'idéal (enseignants-chercheurs ou professeurs de CPGE en France et en Suisse) et croiser les résultats de l'analyse praxéologique de leurs cours et travaux dirigés à leurs réponses au questionnaire.

REFERENCES

- Bosch M., Winsløw C. (2016) Linking problem solving and learning content: the challenges of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 35(3), 357-401.
- Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirfalise (Éd.), *Actes de l'Université d'été de la Rochelle : analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp.91-120). La Rochelle : IREM de Clermont-Ferrand.
- Escofier J.P. (2011) *Toute l'algèbre de la licence. Cours et exercices corrigés*. Paris : Dunod.
- Hausberger T. (2018). Structuralist Praxeologies as a Research Program on the Teaching and Learning of Abstract Algebra. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* 4(1), 74-93.
- Jovignot J., Hausberger T., & Durand-Guerrier V. (2017) Praxeological analysis: the case of ideals in Ring Theory. In T. Dooley et G. Gueudet (Éd.), *Proceedings of CERME10 conference* (pp.2113-2120). Dublin : DCU Institute of Education and ERME.
- Winsløw C. (2006) Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In R. Rouchier et al. (Éd.), *Actes de la XIIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp.1-12). Cédérom. Grenoble : La pensée Sauvage.