

# ENTRE DÉMARCHES DES ÉLÈVES ET CONNAISSANCES DES ENSEIGNANTS : QUELLE PROGRESSION DE LA PENSÉE ALGÈBRIQUE ENTRE 10 ET 14 ANS ?

DEMONTY\* Isabelle

**Résumé** – Sur la base de définitions des caractéristiques de la pensée algébrique entre 10 et 14 ans et de recherches empiriques menées auprès des élèves et des enseignants, ce texte propose un modèle visant à éclairer la progression à réaliser dans ce domaine à la transition entre l'école primaire et secondaire.

**Mots-clés** : pensée algébrique, transition primaire et secondaire, développement, démarches des élèves, connaissances des enseignants

**Abstract** – Based on definitions of the characteristics of the algebraic thinking between 10 and 14 years, and on empirical researches with students and their teachers, this article proposes a model that lights the progress to be realized in this domain during the transition from primary to secondary school.

**Keywords** : Algebraic thinking, transition from primary to secondary school, development, students' reasoning, teachers' knowledge.

L'objectif de cet article consiste à développer une réflexion sur le développement de la pensée algébrique [PA], lors de l'articulation entre l'école primaire et secondaire. Il est structuré en trois parties. La première établit, sur la base de définitions de la PA, un premier modèle de développement de cette pensée. La deuxième partie présente des travaux de recherche menés auprès d'élèves et d'enseignants à la fin de l'école primaire et au début de l'école secondaire en Belgique francophone et au Grand-Duché du Luxembourg : ils permettent d'analyser la manière dont la PA semble se développer entre 10 et 14 ans, dans les environnements habituels de classe. Enfin, la troisième partie approfondit le modèle de développement de la PA afin de mettre plus clairement en évidence les éléments clés qui doivent être davantage travaillés dans les classes pour permettre aux élèves au terme du collège, une meilleure maîtrise de la PA.

## I. PREMIERE PARTIE – L'EVOLUTION DE LA PA ENTRE 10 ET 14 ANS

La question de définir en quoi consiste la pensée algébrique [dénommée PA dans la suite du texte] a fait l'objet de nombreux débats ces dernières années : si les premières définitions ont émergé dans les années 90, au moment où l'algèbre était envisagée au travers des notations formelles, l'introduction du courant « Early algebra » a proposé d'autres éclairages permettant de mettre en évidence les caractéristiques d'une forme algébrique de pensée observable dès l'école primaire, avant toute introduction de ce symbolisme formel.

### *1. Indétermination, analyticité et dénotation : trois caractéristiques de la PA avant l'introduction de l'algèbre formelle*

Radford (2014) propose une définition de la PA qui n'est pas liée aux notations formelles. Envisager de la sorte la PA est éclairant pour cibler ses caractéristiques à l' cole primaire, avant tout apprentissage de l'algèbre formelle. Selon lui, la PA présente trois caractéristiques.

- L'indétermination : le problème posé à l'élève doit impliquer des nombres indéterminés (inconnues, variables, paramètres...).

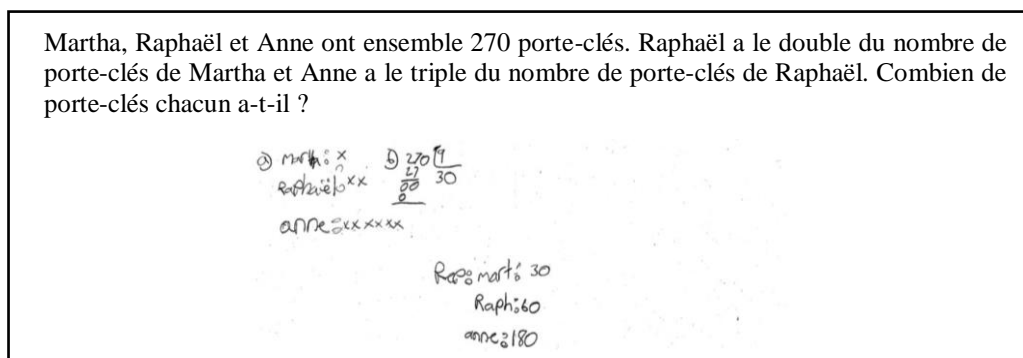
---

\* Université de Li ge – Belgique – isabelle.demonty@uliege.be

- La dénotation : ces nombres indéterminés doivent être pleinement reconnus par la personne qui résout le problème. Cette reconnaissance peut passer par une écriture à l'aide de nombres ou de signes conventionnels (tels que des lettres) ou non conventionnels (par exemple, un point d'interrogation ou un mot). Ces nombres indéterminés peuvent également s'exprimer oralement ou même par des gestes.
- L'analyticité : elle se réfère à une manière particulière de raisonner en intégrant pleinement ces nombres indéterminés dans le raisonnement. Bien que certaines quantités du problème ne soient pas connues, la personne qui résout le problème parvient à réaliser des opérations (addition, soustraction, multiplication ou division) sur ces quantités, exactement de la même façon que si elles étaient connues, en vue d'aboutir au terme du raisonnement à identifier ces quantités indéterminées.

Différents types d'activités peuvent développer ce raisonnement basé sur des quantités indéterminées à l'école primaire.

Les problèmes de partages inégaux constituent un premier environnement porteur pour développer un tel raisonnement. La figure 1 présente un tel problème accompagné d'une démarche mise en place par un élève de 6<sup>e</sup> primaire, avant toute introduction de l'algèbre (Oliveira & Réhaume, 2014, p. 417).



*Figure 1 – Un exemple de problème de type « Partages inégaux » résolu par un élève*

Lorsque l'élève cherche un calcul permettant de résoudre un tel problème, il doit établir des liens entre des quantités de l'énoncé :

- certaines sont connues : le nombre total de porte-clés (270) et les rapports entre le nombre de porte-clés de chaque enfant (Raphaël a deux fois plus de porte-clés que Martha et Anne en a trois fois plus que Raphaël) ;
- et d'autres sont inconnues (ici, il s'agit du nombre de porte-clés qu'a chaque enfant (représentés par des croix dans la production de l'élève).

Pour résoudre ce problème, l'élève aurait pu procéder par essais-erreur, en fixant d'emblée une valeur au nombre de porte-clés de Martha puis en cherchant ce qu'auraient les deux autres enfants et en vérifiant que le total de 270 était respecté. Ce n'est pas cette démarche que cet élève a choisi. En divisant 270 par 9, il a compris que prendre une fois un nombre, puis encore 2 fois ce nombre et enfin 6 fois ce nombre, cela revient au même que prendre 9 fois le nombre. Il a donc élaboré un raisonnement impliquant une quantité indéterminée pour trouver le calcul  $270 : 9$ . Ce raisonnement est de nature algébrique.

Les activités de généralisation basées sur des suites numériques constituent un autre contexte favorable. Dans celles-ci, les élèves sont amenés à dégager une règle permettant de retrouver n'importe quel terme d'une suite de nombres en fonction de son rang :

|           |           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|           |           |           |           |           |
| Motif n°1 | Motif n°2 | Motif n°3 | Motif n°4 | Motif n°5 |

J'ai vu qu'il manquait chaque fois 4 carrés dans les motifs pour faire un rectangle complet :

|           |           |           |           |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
|           |           |           |           |
| Motif n°1 | Motif n°2 | Motif n°3 | Motif n°4 |

Et donc, si tu veux connaître le motif n°7, tu auras besoin de 3 rangées de 9 carrés, mais il faudra que tu en retires 4 (les 4 carrés en haut à droite qui manquent pour tous les motifs). Si tu veux le motif 12, tu auras besoin de 3 rangées de 14, puis tu devras encore retirer 4.

Figure 2 – Un exemple d'activité de généralisation résolue par un élève

Lorsque l'élève établit une règle dans ces activités de généralisation, il est amené à réaliser des opérations impliquant une quantité indéterminée (Radford, 2014), car cette règle doit convenir quel que soit le motif choisi. Dans l'exemple présenté ci-dessus, l'élève parvient à généraliser une règle : au travers des deux exemples, il montre qu'il a bien compris le lien entre le numéro du motif (7 ou 12) et les opérations à effectuer.

## 2. Analyticité, conversion et traitement : trois caractéristiques de la PA après l'introduction de l'algèbre formelle

Bednarz et Janvier (1993) ont analysé finement les démarches mises en œuvre par les élèves pour résoudre des problèmes pouvant se modéliser sous la forme d'une équation. Selon ces auteurs, lorsqu'ils résolvent le problème par l'algèbre, les élèves développent un raisonnement analytique dans la mesure où il s'agit de mobiliser dès le départ, des quantités dont certaines sont connues et d'autres ne le sont pas. C'est donc une approche globale du problème qui est ici attendue pour modéliser le problème avant de chercher directement le calcul permettant de le résoudre (Oliveira & Réhaume, 2014). Cette approche globale est représentée par une équation (Bednarz et Janvier, 1993). Par la suite, le contexte du problème n'est plus pris en compte : des opérations algébriques formelles, dont la pertinence se justifie en référence à des propriétés mathématiques, sont effectuées en vue de résoudre l'équation. Duval (2002) approfondit cette idée de prise de distance vis-à-vis du contexte qu'il est nécessaire de réaliser dans le cadre d'une résolution algébrique d'un problème, lorsque le langage algébrique formel a été appris. Selon lui, deux étapes sont impliquées dans une telle résolution : la conversion des données de l'énoncé à travers l'écriture d'une équation et le traitement, c'est-à-dire la résolution proprement dite de l'équation. Dans la phase de conversion, l'énoncé est central : les élèves sont notamment amenés à identifier les quantités indéterminées du problème et, dans le cas où il y en a plusieurs, à désigner toutes ces quantités indéterminées à l'aide d'une seule d'entre elles, dans le but de produire une équation. Par la suite, dans la phase de traitement, l'élève doit prendre de la distance par

rapport à l'énoncé ; il va manipuler les expressions algébriques impliquées dans cette équation en fonction de propriétés des opérations et de l'égalité.

Radford (2008) a envisagé les caractéristiques de la PA face aux activités de généralisation, une fois l'algèbre formelle introduite. En fonction de leur niveau dans les apprentissages, les élèves peuvent symboliser les moyens de généralisation produits de différentes manières (Radford, 2008).

- La variable est symbolisée par un nombre.
- La variable est symbolisée par un substitut symbolique.
- Une expression algébrique formelle

### 3. Premier modèle présentant le développement de la PA entre 10 et 14 ans

| Caractéristiques de la pensée algébrique |   |   |
|--|---|---|
|  | A l'école primaire  | Au premier degré de l'enseignement secondaire   |
| Indétermination                          | Problèmes impliquant des nombres indéterminés   |   |
| Analyticité                              | <p><u>Première facette</u><br/>Importance du contexte de l'activité<br/>Penser globalement le problème en réalisant des opérations impliquant des données dont certaines sont connues et d'autres pas</p> | <p><u>Première facette</u><br/>Importance du contexte de l'activité<br/>Penser globalement le problème en réalisant des opérations impliquant des données dont certaines sont connues et d'autres pas (phase de conversion)<br/><u>Deuxième facette</u><br/>Distanciation par rapport au contexte de l'activité<br/>Effectuer des opérations algébriques basées sur les propriétés des opérations et de l'égalité (phase de traitement)</p> |
| Dénotation                               | Symbolisations informelles  | Symbolisations formelles  |

Figure 3 - Modèle présentant les caractéristiques de la PA

Même si, comme le souligne Radford (2014), des tendances communes apparaissent en matière de PA à la fin de l'école primaire et au début de l'enseignement secondaire, l'intégration du langage algébrique formel et des techniques algébriques qui lui sont associées va ouvrir de nouvelles perspectives en matière de résolution de problèmes ou de généralisation au secondaire (Bednarz & Janvier, 1993 ; Duval, 2002 ; Radford, 2008), en autorisant un détachement complet du contexte même évoqué dans l'énoncé. Ce détachement ne va pas être sans conséquence sur la manière de réaliser l'analyticité. En effet, tant en primaire qu'en secondaire, l'analyticité va intervenir une première fois, lors de l'approche globale de la situation représentée en primaire à l'aide de symbolisations informelles et en secondaire, sous la forme d'une équation ou d'une expression algébrique. En secondaire, cette analyticité sera également impliquée une seconde fois pour résoudre l'équation ou pour réduire l'expression algébrique dégagée de l'activité de généralisation car l'élève va à ce moment également être amené à réaliser des opérations sur des expressions algébriques qui, par définition, impliquent des nombres indéterminés. Le modèle précédent synthétise la manière dont la PA entre 10 et 14 ans devrait évoluer entre 10 et 14 ans.

## II. DEUXIEME PARTIE : RECHERCHES EMPIRIQUES SUR LE DEVELOPPEMENT DE LA PA ENTRE 10 ET 14 ANS.

Cette seconde partie vise à mettre en perspective les résultats de recherche que nous avons menés concernant à la fois les raisonnements des élèves en matière de PA et les connaissances dont disposent les enseignants pour soutenir une telle pensée. Cette mise en perspective vise à

analyser comment les besoins d'apprentissage des élèves sont actuellement pris en charge par les enseignants.

Pour porter un tel regard, nous avons mené trois recherches en Belgique francophone et au Grand-Duché du Luxembourg. La première s'intéresse à l'évaluation des acquis des élèves de 15 ans, en matière de résolution de problèmes pouvant se modéliser sous la forme d'une équation du premier degré à une inconnue. Dans cette recherche, nous avons eu l'occasion d'interroger plus spécifiquement la question de la capacité des élèves à intégrer les techniques algébriques dans le cadre de la résolution d'un problème (Demonty, Fagnant & Dupont, 2015). La deuxième recherche s'intéresse au développement de l'abstraction lors de la transition entre l'enseignement primaire et secondaire. Dans le cadre de cette recherche, nous avons pu recueillir des informations relatives aux élèves et aux enseignants face à une situation particulièrement propice au développement de la PA : l'analyse d'une suite de nombres présentée de manière picturale (Demonty, Fagnant & Vlassis, 2015 ; Demonty, Fagnant & Vlassis, 2018). La troisième recherche s'intéresse aux connaissances des enseignants des trois premières années de l'enseignement secondaire pour enseigner l'algèbre, dans le but de concevoir et d'implanter un programme de développement professionnel. Cette recherche nous a amenée à approfondir la question de la mobilisation des connaissances pour enseigner dans le cadre de l'ensemble des activités à mener à ce niveau de la scolarité (Demonty & Vlassis, 2016 & 2017).

Ce regard croisé sur les démarches des élèves et les connaissances des enseignants aborde deux thématiques. La première thématique - analyticité, symbolisations formelles et informelles - s'intéresse aux activités de généralisation d'une suite de nombres présentées de manière picturale. La seconde thématique - Analyticité, symbolisation formelles et techniques algébriques - approfondit la réflexion auprès des apprentissages et des enseignements algébriques formels du secondaire.

### *1. Analyticité, symbolisations informelles et formelles*

En matière d'analyticité, il apparait que les acquis des élèves de 10-12 ans sont importants mais qu'ils évoluent finalement peu entre 10 et 14 ans (Demonty, Fagnant & Vlassis, 2015). De plus, les élèves de 14 ans éprouvent des difficultés considérables pour symboliser, par l'algèbre, leurs raisonnements (Demonty, Fagnant & Dupont, 2015). Par ailleurs, un nombre important d'enseignants ne proposent pas d'aides dans ces domaines spécifiques (Demonty, Fagnant & Vlassis, 2018). En effet, nos résultats montrent que de nombreux instituteurs ne parviennent pas à reconnaître comme telles des démarches algébriques correctes s'éloignant de la leur, risquant ainsi d'inhiber un nombre non négligeable de démarches pourtant tout à fait porteuses en matière de PA. Si les enseignants du secondaire semblent mieux armés pour reconnaître le caractère correct de telles démarches, plus de la moitié d'entre eux ont simplement tendance à les tolérer, sans les considérer comme autant d'opportunités pour travailler la symbolisation algébrique, la vision structurale des expressions algébriques ou les liens possibles avec les techniques algébriques. Ces multiples bénéfices sont pourtant largement reconnus dans la littérature de recherche ayant étudié les environnements d'apprentissage porteurs en matière de PA (Imre & Akkoc, 2012 ; Lannin, 2005).

### *2. Analyticité, symbolisations formelles et techniques algébriques*

Si plus de 60% des enseignants du secondaire sont conscients des difficultés des élèves à donner du sens à la lettre dans les techniques algébriques, la moitié d'entre eux proposent, en cas d'erreur dans l'application de ces techniques (une réduction de termes non semblables), un soutien tel que « en mathématique, on n'additionne pas des pommes et des poires ». Ce

type d'« aide » dénature non seulement le sens de la lettre (en l'associant à un objet), mais compromet en plus l'analyticité (il ne focalise absolument pas l'attention sur le fait que c'est parce qu'on opère sur des quantités indéterminées qu'on ne peut réduire des termes non semblables). De telles aides limitent les opportunités offertes aux élèves pour comprendre en profondeur le sens de la lettre en algèbre. Ce constat peut être mis en parallèle avec quelques résultats marquants obtenus auprès des élèves : effectivement, à 15 ans, même les élèves qui disposent d'un bagage important de techniques algébriques ne parviennent pas à le mobiliser en résolution de problèmes (Demonty, Fagnant & Dupont, 2015). Une des explications de ce phénomène relève de la difficulté, pour ces élèves, de symboliser algébriquement leur raisonnement impliquant pourtant une quantité indéterminée : en proposant des aides qui ont tendance tantôt à clarifier le sens de la lettre, tantôt à le galvauder au profit sans doute d'autres priorités, les enseignants ne traitent pas en profondeur ces difficultés éprouvées par les élèves lors de la mobilisation des techniques algébriques dans des situations variées.

Promouvoir davantage de cohérence au niveau de l'enseignement actuel de l'algèbre est également un point de vue défendu par Grugeon et ses collègues. Dans leurs écrits, elles critiquent la façon dont les acquis algébriques des élèves sont en général évalués. Selon ces auteurs, dans la plupart des évaluations dont disposent les enseignants, « l'enjeu est principalement l'étude locale de conceptions erronées en vue de les déstabiliser. L'enjeu n'est pas d'étudier de façon globale des cohérences de fonctionnement des élèves dans un domaine donné » (Grugeon, Pilet, Chenevot-Quentin & Delozanne, 2012, p.5). Cette vision globale de l'activité algébrique des élèves est pourtant cruciale étant donné la complexité des connaissances à acquérir par les élèves dans un domaine comme l'algèbre. Une telle vision est en effet essentielle pour envisager les types d'aides particulièrement utiles pour répondre pleinement aux besoins d'apprentissage des élèves.

### III. TROISIEME PARTIE : MODELE DE PROGRESSION DE LA PA ENTRE 10 ET 14 ANS.

Suite au regard croisé que nous avons porté sur la PA, nous pensons qu'il serait utile d'affiner encore la progression nécessaire dans le développement de cette pensée. Si celle-ci peut s'amorcer dès l'école primaire au travers d'activités d'indétermination, la prise de distance qu'impose une pleine utilisation de cette pensée au terme des deux premières années de l'école secondaire doit se préparer progressivement dès le primaire. Deux éléments devraient, à notre sens, être clarifiés pour atteindre cet objectif.

Tout d'abord, des aménagements doivent être apportés à la dénotation : en référence aux nombreux problèmes qu'implique l'introduction des symbolisations formelles en début d'enseignement secondaire, nous pensons qu'une progression en matière de symbolisation devrait être plus clairement exprimée, en vue de préparer les élèves du primaire à appréhender les symbolisations formelles lorsqu'elles seront introduites dans leurs apprentissages du secondaire. Ensuite, il nous semble que devrait être davantage mis en évidence l'importance des activités visant à travailler le sens des opérations et de l'égalité dans le soutien qu'elles peuvent apporter à l'intégration, à l'école secondaire, des techniques algébriques dans la mise en œuvre de la PA. Cette prise de recul nécessaire par rapport au contexte même de la situation ne pourrait-elle pas être déjà amorcée par les élèves dans le cadre d'activités numériques à l'école primaire, dévolues notamment aux techniques de calculs mentaux ? Cette nécessité que ressentent les enseignants du secondaire, parfois même ceux qui ont un bagage de connaissances pour enseigner très approfondi, à « rendre l'algèbre concrète » aux yeux des élèves en associant les lettres à des pommes et des poires nous questionne. S'il nous semble indispensable de sensibiliser les dangers de telles aides auprès des enseignants du

secondaire, nous pensons également que la démarche de validation des techniques de calculs en référence aux propriétés des opérations gagnerait à être travaillée dès l'école primaire, en ancrant la réflexion dans le calcul numérique.

| Progression dans le développement de la pensée algébrique |  |   |
|---|--|---|
|   | A l'école primaire   | Au premier degré de l'enseignement secondaire   |
| Indétermination   | Problèmes impliquant des nombres indéterminés  |   |
| Analyticité   | <p><u>Première facette</u><br/>Importance du contexte de l'activité:<br/>Penser globalement le problème en réalisant des opérations impliquant des données dont certaines sont connues et d'autres pas</p> | <p><u>Première facette</u><br/>Importance du contexte de l'activité:<br/>Penser globalement le problème en réalisant des opérations impliquant des données dont certaines sont connues et d'autres pas</p>  |
|   |  | <p><u>Deuxième facette</u><br/>Effectuer des opérations algébriques basées sur les propriétés des opérations et de l'égalité</p>  |
| Dénotation  | <p>Symbolisations informelles</p>  |   |
|   | <p>Symbolisations variées (gestes, mots, ...)</p>  | <p>Symbolisations gardant trace des activités qui les ont fait naître (parenthèses inutiles, ...)</p>   |
| Sens des opérations et de l'égalité                       | <p>Utilisation en acte des propriétés des opérations et de l'égalité dans les techniques de calculs</p> <p>=&gt; Clarification de ces propriétés</p>   | <p>Symbolisations détachées de l'activité qui les ont fait naître</p> <p>Introduction des techniques algébriques (basée sur les propriétés des opérations et de l'égalité)</p> <p>=&gt; Automatisation de ces techniques (pour faciliter leur utilisation dans une variété de contexte)</p> |

Figure 4 - Modèle de progression dans le développement de la PA entre 10 et 15 ans

### 1. La dénotation : l'évolution des symbolisations informelles vers les symbolisations formelles dans le cadre de l'exploitation d'activités impliquant l'indétermination

Le concept de dénotation aide à comprendre que la symbolisation s'ancr dans la situation d'indétermination et peut dès lors se présenter sous des formes très variées, qu'elles soient conventionnelles ou non (Radford, 2014). Du point de vue des élèves, il y a cependant tout un traitement des informations présentées dans l'énoncé pour pouvoir passer d'une symbolisation bien ancrée dans le contexte de la situation (qui pourra se présenter sous des formes variées, écrites ou non) à une symbolisation formelle qui permettra de prendre de la distance par rapport à cette situation. Plusieurs recherches mettent en évidence à quel point cette prise de distance par rapport au contexte du problème est complexe pour les élèves débutant en algèbre (Duval, 2002 ; Nathan & Koedinger, 2000 ; Radford, 2002 & 2008 ; Demonty, Vlassis & Fagnant, 2015). Or la difficulté de produire une telle symbolisation est sous-estimée par les enseignants (Nathan & Koedinger, 2000 ; Demonty & Vlassis, 2018), et ils ne fournissent que peu d'aides aux élèves dans ce domaine. Ces réflexions nous amènent à considérer que la nécessaire prise de distance par rapport au problème posé, à travers des symbolisations de plus en plus formelles, doit se développer progressivement du primaire vers le secondaire, notamment pour faciliter l'intégration, dans la démarche, des techniques algébriques. Plusieurs recherches menées dans le courant de l'« early algebra » confirment que cette prise de distance peut s'amorcer dès l'école primaire (Britt & Irwin, 2011 ; Radford & Puig, 2007) : des liens entre les gestes, les explications orales et les symbolisations qui se détachent progressivement des contextes qui les ont fait naître sont essentiels pour atteindre cet objectif.

## 2. *Le développement du sens des opérations et de l'égalité dans le cadre des autres activités numériques et algébriques*

En référence aux difficultés des élèves du début de l'enseignement secondaire dans l'application des techniques algébriques et aux problèmes qui se posent aux enseignants pour leur proposer une aide qui ne dénature pas le sens de la lettre, les autres activités numériques, c'est-à-dire celles qui n'impliquent pas nécessairement l'indétermination, peuvent contribuer à aider les élèves à mieux comprendre ces techniques algébriques, et ce, dès l'école primaire. En effet, les procédures de calculs mentaux, tout comme les règles de transformations algébriques, s'appuient sur les propriétés des opérations et de l'égalité. Une étude menée en Nouvelle-Zélande auprès d'élèves de 12 à 14 ans (Britt & Irwin, 2011) a montré que ceux qui ont développé, dès l'école primaire, des stratégies raisonnées en matière de calculs mentaux (c'est-à-dire ceux qui ont été entraînés à expliquer, au départ d'une réflexion bien ancrée dans le numérique, le bien-fondé mathématique de ces stratégies) parviennent beaucoup mieux que les autres, à comprendre les transformations algébriques lorsque l'algèbre formelle est introduite au début de l'enseignement secondaire. Par ailleurs, Britt et Irwin (2011) ont constaté que ces élèves continuent à progresser au fur et à mesure des deux premières années de l'enseignement secondaire, y compris dans la mobilisation de ces techniques dans des activités contextualisées.

## IV. CONCLUSION : UN MODELE DE LA PA AU SERVICE DU DEVELOPPEMENT PROFESSIONNEL DES ENSEIGNANTS

Cet article avait pour but de développer une réflexion sur la progression de l'enseignement et l'apprentissage de la PA entre 10 et 14 ans. Du point de vue de la recherche, si l'intégration du courant de l'« early algebra » est essentielle pour mettre en évidence le potentiel des élèves de l'école primaire en matière de PA, les constats émis dans les recherches antérieures concernant plus spécifiquement les difficultés des élèves débutant en algèbre formelle restent bien d'actualité. Même s'il doit sans aucun doute encore s'affiner, notamment au travers de recherches empiriques, le modèle de développement de la PA que nous proposons met en évidence les complémentarités entre ces deux courants de recherche en vue, in fine, d'améliorer la maîtrise qu'ont les élèves de 15 ans en algèbre. Pour cela, le développement professionnel des enseignants est essentiel et dans ce domaine, deux éléments nous paraissent prioritaires.

Bon nombre d'instituteurs ne reconnaissent pas le potentiel de certaines activités numériques pour développer la PA : ils ne parviennent que difficilement à interpréter la variété des démarches des élèves et les aides qu'ils proposent en cas de difficulté ne sont que peu souvent propices au développement de la PA. Les instituteurs gagneraient à mieux percevoir le rôle déterminant qu'ils ont à jouer dans les premiers contacts de l'élève avec la PA (Carraher & Schliemman, 2007 ; Cai & Knuth, 2011 ; Radford, 2014).

Dans ce même type d'activités suscitant spécifiquement la PA, une majorité des enseignants du secondaire pourraient améliorer encore les réponses qu'ils apportent aux besoins des élèves, surtout en matière de symbolisation progressive de cette pensée. D'autres analyses, envisageant de manière plus globale les enseignements algébriques de l'école secondaire, mettent en évidence le problème de la variabilité dans l'utilisation des connaissances, selon les contextes dans lesquelles elles sont sollicitées. Prendre du recul par rapport à une maîtrise approfondie de l'algèbre, réduire la complexité pour rendre l'algèbre accessible aux élèves ou faire des ponts avec des connaissances dont disposent les élèves contribue à amener les enseignants à prendre, dans certaines situations, des décisions qui



risquent d'amplifier des problèmes de compréhension des élèves. Ce manque de soutien apporté à leur activité algébrique doit faire l'objet d'une attention particulière.

#### REFERENCES

- Bednarz, N., & Janvier, B. (1993). The arithmetic-algebra transition in problem solving: continuities and discontinuities. In J.R. Becker & B.J. Pence (Eds.), *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education North American chapter*. Vol. II, (pp. 19-25). California : Asilomar.
- Britt, M. S., & Irwin, K. C. (2011). Algebraic thinking with and without algebraic representation: A pathway for learning. In *Early Algebraization. A dialogue for multiple perspective*. (pp. 277-301). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg
- Cai, J., & Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A dialogue for multiple perspective*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 669-705.
- Demonty, I., Fagnant, A., & Dupont, V. (2015). Analyse d'un outil d'évaluation en mathématiques: entre une logique de compétences et une logique de contenu. *Mesure et évaluation en éducation*, 38(2), 1-29.
- Demonty, I., Fagnant, A., & Vlassis, J. (2015). Le développement de la pensée algébrique: quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre?. Actes du congrès EMF 2015. Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage.
- Demonty, I., Fagnant, A., & Vlassis, J. (2018). Algebraic thinking, pattern activities and knowledge for teaching at the transition between primary and secondary school. *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9820-9>
- Demonty, I., & Vlassis, J. (2016). Developing a tool for assessing elementary algebraic knowledge for teaching: a twofold perspective for understanding teachers' decision-making. Actes du colloque ICME. Hambourg.
- Demonty, I., & Vlassis, J. (2017). Evaluer les connaissances pour enseigner l'algèbre élémentaire: élaboration d'un outil diagnostique. *e-JIREF*, 2(2), 45-62.
- Demonty, I., & Vlassis, J. (2018). Développer l'articulation arithmétique-algèbre entre le primaire et le secondaire. Van in : Bruxelles.
- Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets. *Actes du séminaire Franco-italien sur l'enseignement de l'algèbre*. Irem de Nice.
- Grugeon, B., Pilet, J., Chenevotot-Quentin, F., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique de mathématiques, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives, hors série*, 137-162
- İmre, S. Y., & Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalizing number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(3), 207-226.
- Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning*, 7(3), 231-258.
- Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction*, 18 (2), 209-237.
- Oliveira, I., & Rhéaume, S. (2014) Comment s'y prennent-ils? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l'algèbre, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 14:4, 404-423.

- Radford, L. (2002). On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. *Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 26*, Anne D. Cockburn and Elena Nardi (eds.), Vol. 4, pp. 81-88.
- Radford, L. (2008). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40, 83-96.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.
- Radford, L., & Puig, L. (2007). Syntax and meaning as sensuous, visual, historical forms of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 145-164.