



TITRE: LA PENSÉE FONCTIONNELLE ET SES INTERACTIONS AVEC LA PENSÉE ALGÈBRIQUE

AUTEURS: ROBERT VIRGINIE, SQUALLI HASSANE ET MARCHAND PATRICIA

PUBLICATION: ACTES DU HUITIÈME COLLOQUE DE L'ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE – EMF 2022

DIRECTEUR: ADOLPHE COSSI ADIHOUE, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE (CANADA/BÉNIN) AVEC L'APPUI DES MEMBRES DU COMITÉ SCIENTIFIQUE ET DES RESPONSABLES DES GROUPES DE TRAVAIL ET PROJETS SPÉCIAUX

ÉDITEUR: LES ÉDITIONS DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

ANNÉE: 2023

PAGES: 334 - 348

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

La pensée fonctionnelle et ses interactions avec la pensée algébrique

ROBERT¹ Virginie – SQUALLI² Hassane – MARCHAND³ Patricia

Résumé – Cette communication a pour objectif de discuter de la place de la pensée fonctionnelle dans le portrait des autres formes de la pensée mathématique. À la suite d’une proposition d’une définition opératoire de la pensée fonctionnelle s’inscrivant dans le cadre théorique de la théorie de l’objectivation de Radford (2011), nous discutons des limites des tâches axées sur la pensée algébrique pour le développement de la pensée fonctionnelle. Nous explorons ensuite les bénéfices de l’exploitation d’une tâche spécifiquement choisie pour la pensée fonctionnelle.

Mots-clefs : Pensée fonctionnelle, pensée mathématique, théorie de l’objectivation, activités fonctionnelles, fonctions.

Abstract – This communication aims to discuss the place of functional thinking in the realm of other forms of mathematical thinking. After the proposition of an operational definition of functional thinking within the theoretical framework of Radford’s theory of objectification (2011), we reflect on the limits of tasks that promote algebraic thinking on the development of functional thinking. We also explore a task that shows the importance of engaging in tasks specifically chosen for functional thinking.

Keywords: Functional thinking, mathematical thinking, theory of objectification, functional activities, functions.

1. Université de Sherbrooke, Canada, virginie.robert2@usherbrooke.ca

2. Université de Sherbrooke, Canada, hassane.squalli@usherbrooke.ca

3. Université de Sherbrooke, Canada, patricia.marchand@usherbrooke.ca

L'objectif de cette communication est de montrer la place singulière de la pensée fonctionnelle parmi les autres formes de la pensée mathématique et de regarder comment elle interagit plus spécifiquement avec la pensée algébrique. Ce texte s'inscrit dans les réflexions issues de notre thèse en cours qui vise à décrire l'activité cognitive et affective de la classe au regard de la pensée fonctionnelle. Nous situant dans le cadre théorique de la théorie de l'objectivation de Radford (2011), nous définissons la pensée fonctionnelle comme des manières particulières d'agir et de réfléchir dans des activités mettant en jeu une ou des relations fonctionnelles. Dans les pages qui suivent, nous précisons une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle qui nous permet d'analyser le potentiel d'une tâche pour le déploiement d'une activité faisant intervenir la pensée fonctionnelle. Nous proposons ensuite une analyse critique de tâches de généralisation de suites de motifs géométriques croissants issues des recherches d'Early Algebra qui passent par la pensée fonctionnelle pour développer le raisonnement algébrique. Cette analyse nous amène à montrer la pertinence de proposer des tâches, comme la tâche des bouteilles qui est présentée, qui sont axées spécifiquement sur la pensée fonctionnelle en elle-même.

La pensée fonctionnelle comme forme de la pensée mathématique

Nous situons nos travaux en cours dans la théorie de l'objectivation (TO) qui s'inscrit dans un paradigme socioculturel de l'éducation (Radford, 2011 ; 2015 ; 2019). Du point de vue de la TO, l'apprentissage des mathématiques est un processus à la fois collectif, culturel et historique pendant lequel est visée la formation de citoyens critiques, réflexifs et éthiques à travers le développement d'une pensée mathématique. La pensée mathématique est définie comme une manière d'agir et de réfléchir en accord avec des formes mathématiques de pensées culturellement et historiquement constituées (Radford, 2011).

Dans les recherches en didactique des mathématiques et dans les programmes de formation comme celui du Québec, la pensée mathématique est souvent traitée et observée à travers l'une de ses formes. Or, ces formes se distinguent entre-elles par la nature des activités à travers lesquelles elles sont invoquées. Par exemple, la pensée algébrique entrera en jeu lors d'activités algébriques, c'est-à-dire des activités faisant intervenir des opérations en nombre fini (Squalli, 2000) alors que la pensée statistique se manifestera plutôt dans des activités portant sur la variabilité ou encore sur la compréhension et l'interprétation des différentes mesures de tendance centrales (et non pas seulement sur les nombres et les formules) (Gattuso et Ottaviani, 2011). Dans le cadre de nos travaux, nous nous intéressons plus particulièrement à l'une de ces formes : la pensée fonctionnelle que nous définissons comme des manières d'agir et de réfléchir dans des activités qui mettent en jeu une ou des relations fonctionnelles. L'intérêt pour la pensée fonctionnelle a récemment pris de l'ampleur, apparaissant dans les travaux de plusieurs chercheurs (p. ex. Ben Nejma, 2020; Carraher, Schliemann et Brizuela, 2000; Cooper et Warren, 2011; Moss et al., 2020; Robert, 2018; Robert et al., 2018 ; Stephens et al., 2017) qui ont permis de révéler son importance ainsi que certains enjeux relatifs à son

développement. Contrairement à la pensée fonctionnelle, la plupart des autres formes de la pensée mathématique se rattachent à des domaines de contenus alors que le concept de fonction est un concept central et unificateur du curriculum mathématique scolaire (Gülbagci Dede, Yilmaz, Akkoç et Tall, 2022; Denbel, 2015). Ce potentiel unificateur est aussi vrai pour les relations fonctionnelles, que nous plaçons au cœur de notre définition. La pensée fonctionnelle peut donc se déployer dès les premières années du primaire à travers différents domaines de contenus comme l'arithmétique (étude de suites et de régularité), la géométrie (calcul du périmètre et mesure d'angles) ou encore les statistiques (étude du marché boursier) puisque les relations fonctionnelles sont souvent utilisées pour une contextualisation des contenus riche et intéressante (Robert, 2018).

Cadre conceptuel de la pensée fonctionnelle

Avant de proposer une analyse de tâches, il importe de poser les balises théoriques et conceptuelles qui permettent de rendre compte de ce que nous entendons par pensée, de la manière dont celle-ci peut être opérationnalisée et donc être étudiée, et de la distinction que nous faisons entre l'activité et la tâche. Ces concepts seront rendus explicites à travers la caractérisation que nous faisons de la pensée fonctionnelle.

Distinguer la pensée « idéelle » de la pensée qui se déploie en activité

Dans le cadre de la théorie de l'objectivation (Radford, 2011), nous pouvons distinguer deux types différents de pensée : la pensée anthropologique et la pensée subjective. La pensée anthropologique correspond à une synthèse culturellement et historiquement constituée du travail humain (Radford, 2015). Elle n'est que pure possibilité : une manière toujours latente d'agir ou de réfléchir d'une certaine manière. Cette pensée, que nous pourrions aussi qualifier d'idéelle au sens où elle relève de l'idée et qu'elle est inatteignable, a un caractère général et continue d'évoluer alors que de nouvelles activités humaines l'enrichissent. Dans leur sens anthropologique, les différentes formes de la pensée mathématique coexistent puisqu'elles sont constitutives de la pensée mathématique historico-culturelle.

Le point d'ancrage de la théorie de l'objectivation est la praxis, c'est-à-dire l'activité sensible des individus. En effet, « c'est dans la praxis historico-sociale que la théorie de l'objectivation voit le lien entre l'individu, la pensée et la culture » (Radford 2020, p. 1). Ainsi, l'activité ne correspond pas à une simple série de problèmes à résoudre ou à une liste de tâches à exécuter. C'est un moment durant lequel des tâches (associées à des buts et des actions particulières) sont étudiées, des questions sont posées et dans laquelle des ressources culturelles sont mises à contribution afin d'atteindre l'objectif initial. C'est dans le cadre d'une activité, que s'objective la pensée subjective qui actualise la pensée anthropologique (Radford, 2011, 2015). La pensée subjective est donc ce qui apparaît en activité. La pensée et l'activité sont donc étroitement liées (Radford, 2019) et même indissociables, comme deux faces d'une même médaille (Squalli, 2000 ; Robert et al., 2018). Par ailleurs, une conception non-mentaliste de la pensée est entendue ici (Radford, 2011). Les artefacts, les discours et le corps sont constitutifs

de la pensée et ils exercent un rôle sur celle-ci. Les signifiés culturels qui orientent l'activité affectent également la pensée subjective qui émerge ; la pensée est à la fois sensible et culturelle.

La tâche et l'activité

Nous l'avons mentionné précédemment, les formes de la pensée mathématique se distinguent par la nature des activités qui les font émerger. En ce sens, il importe de bien cerner la distinction que nous apportons entre l'activité et la tâche. Dans la TO, c'est dans une activité, souvent déclinée au moyen de tâches configurées de manière progressive dans le contexte scolaire, que les élèves rencontrent le savoir historico-culturel et donc qu'ils peuvent rencontrer une forme de pensée mathématique. L'activité est donc plus large que la tâche et c'est dans l'activité que peut être observée la pensée. Il est possible de planifier une tâche et des questions clés qui feront évoluer l'activité, mais il est impossible de la prévoir de manière précise. Par conséquent, la tâche peut faire l'objet d'une analyse *a priori*, alors que l'activité⁴, peut être uniquement analysée *a posteriori*. Ainsi, pour tenter de définir ou pour mieux comprendre la pensée mathématique ou l'une de ses formes, nous n'avons d'autre choix que de considérer attentivement la tâche, mais surtout l'activité comme un ensemble.

La pensée fonctionnelle

Intégrant toutes les particularités issues du cadre théorique décrites brièvement ici, regardons maintenant comment se concrétisent ces distinctions au regard de la pensée fonctionnelle. La pensée fonctionnelle anthropologique se définit par son aspect idéal, incarnant toutes les manières potentielles d'agir et de réfléchir dans la multitude des activités mathématiques qui l'invoquent, c'est-à-dire des activités qui mettent en leur centre une relation fonctionnelle. La pensée fonctionnelle subjective est celle qui se déploie en une activité. Elle se distingue des autres formes de la pensée mathématique par la nature de cette activité qui rend explicite une relation fonctionnelle que ce soit par une tâche, une situation d'apprentissage ou encore dans une question posée à voix haute. Nous insistons ici sur l'attention explicite qui est portée à la relation fonctionnelle puisque bien qu'une telle relation puisse être invoquée dans une multitude de tâches, il n'est pas dit que la pensée fonctionnelle subjective émergera forcément dans l'activité. Nous dirons donc qu'une tâche qui comporte une relation fonctionnelle a un potentiel pour qu'émerge une pensée fonctionnelle subjective et que seule l'activité qui en découlera pourra révéler ou non ce potentiel.

4. Des précisions supplémentaires pourraient être apportées pour décortiquer encore plus finement l'activité, notamment en distinguant l'activité de la personne enseignante, l'activité de l'élève et l'activité d'enseignement-apprentissage. Toutefois, ces précisions ne sont pas nécessaires dans le cadre de cet article. Nous regroupons ici toutes ces déclinaisons sous l'appellation inclusive d'activité vue comme « un système dynamique qui est mis en mouvement collectivement par l'énergie et les efforts des individus quand ceux-ci se lancent à la recherche de quelque chose de commun » (Radford, 2019, p. 323).

L'élément essentiel de la pensée fonctionnelle : les relations fonctionnelles

Dans nos différents travaux, nous plaçons la relation fonctionnelle comme élément essentiel de notre définition de la pensée fonctionnelle. La place indispensable de la relation fonctionnelle s'explique notamment grâce au concept de fonction en lui-même puisqu'il traduit une relation entre au moins deux quantités variables covariantes et qu'il peut être défini par cette dite *relation* qui à chaque objet y fait correspondre au plus un objet x . Par ailleurs, le fait de définir la pensée fonctionnelle par les activités qui invoquent une relation fonctionnelle plutôt que le concept de fonction en lui-même, nous permet d'insister sur le fait que la pensée fonctionnelle ne se limite pas aux activités qui étudient explicitement le concept de fonction. C'est d'ailleurs ce même constat que nous pouvons faire en analysant le développement historique du concept de fonction puisque déjà, dans l'Antiquité, l'étude de l'interdépendance entre deux quantités variables était bien présente. En effet, alors que les premiers Pythagoriciens tentaient de déterminer les lois de l'acoustique en étudiant l'interdépendance entre la longueur d'une corde et la hauteur d'une note, les astronomes consignaient la position des corps en fonction du temps dans des tables (Hamzaoui et Najar, 2019; Youschkevitch, 1981). C'est ensuite l'étude du mouvement qui a permis une avancée considérable au regard de la variable dépendante alors qu'Oresme (1323-1382) a représenté les variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur et qu'il s'est intéressé aux variations dans les relations fonctionnelles (Hamzaoui et Najar, 2019 ; René de Cotret, 1988). Encore bien loin du concept de fonction tel qu'utilisé par Leibniz en 1692 ou par Bernoulli 1698, c'est en cherchant à comprendre et à documenter les relations fonctionnelles présentes notamment dans la nature ou dans les lois de la physique, qu'il semble possible d'inférer que les mathématiciens de ces époques mobilisaient ce que nous appelons la pensée fonctionnelle.

Les dimensions de la pensée fonctionnelle

Dans son sens anthropologique, la pensée fonctionnelle est une entité complexe qui ne peut être approchée dans son entièreté. Pour tenter de la décrire et l'approcher le plus fidèlement possible, nous n'avons d'autre choix que de la décliner sous une forme opératoire pour laquelle nous établissons trois principales manières d'agir et de réfléchir. D'abord, la pensée fonctionnelle fait appel à divers raisonnements qui peuvent être utilisés au cours d'une activité et qui sont issus de l'analyse épistémologique du concept de fonction, notamment le raisonnement covariationnel et le raisonnement par correspondance. Ensuite, la pensée fonctionnelle s'appuie nécessairement sur une manière particulière d'approcher certains concepts dans une activité portant sur les relations fonctionnelles et qui sont teintées d'une couleur particulière notamment les concepts de variable, de covariation, de dépendance et de correspondance. Finalement, penser de manière fonctionnelle nécessite d'invoquer un langage particulier. En plus d'inclure le langage naturel et le langage mathématique au sens large, cette composante réfère à tous les registres de représentations sémiotiques qui sont mobilisés à des fins de représentation, de conversion ou de traitement de relations fonctionnelles (Duval, 1995), notamment le registre tabulaire, le registre algébrique, le registre analytique et le registre graphique.

Ces registres peuvent être institutionnels ou personnels comme le langage naturel ou les représentations spontanées (Hitt et González-Martin, 2015).

Dans son sens subjectif, la pensée fonctionnelle se déploie par la mise en œuvre de ces trois manières d'agir et de réfléchir qui sont intimement liées dans l'activité. Mais en plus de celles-ci, elle est guidée par une dimension affective qui ne peut être négligée. Dans cette communication, comme nous discutons le potentiel de certaines tâches au regard de l'objectivation de la pensée fonctionnelle, nous nous concentrerons sur la pensée fonctionnelle en son sens anthropologique.

Analyse de tâche : entre pensée fonctionnelle et algébrique

Nous arrivons maintenant au second objectif de cette communication, c'est-à-dire de regarder comment la pensée fonctionnelle peut constituer une alliée pour enrichir des tâches axées sur le développement de la pensée algébrique, mais surtout comment elle doit aussi être travaillée pour elle-même en tant que finalité.

La pensée fonctionnelle et la pensée algébrique

Dans les dernières années, la pensée fonctionnelle a fait son entrée majoritairement dans les travaux de recherche et de développement curriculaire relevant du courant Early Algebra avec pour finalité l'approche de l'algèbre par l'introduction des concepts de variable et de fonction (Bednarz et al., 1996) plutôt que le développement de la pensée fonctionnelle en elle-même (Robert, 2018). La pensée algébrique étant définie par Squalli (2020) comme une manière de penser dans des activités dites algébriques qui, entre autres, traitent des quantités indéterminées ou approchent la généralisation de manière analytique, c'est donc la nature des activités qui est déterminante pour distinguer ce qui relève de la pensée algébrique et de la pensée fonctionnelle. Comme un chevauchement existe entre le concept de fonction et le domaine algébrique, ceci entraîne nécessairement un chevauchement entre pensée algébrique et pensée fonctionnelle. En effet, généralement, dans les programmes de formation, l'étude des fonctions est incluse dans le domaine de l'algèbre. C'est notamment le cas du programme québécois (2016), des recommandations du NCTM de 2000 et du programme ontarien (2020). Ce choix pourrait entre autres relever du fait que traditionnellement, les premières fonctions enseignées sont algébriques, c'est-à-dire qu'elles peuvent être définies à l'aide d'une expression algébrique. Précisons que les fonctions polynomiales sont des fonctions algébriques alors que les fonctions sinusoïdales ou exponentielles ne sont pas algébriques dans le domaine des nombres réels (Squalli, 2000). Il existe ainsi une multitude de tâches qui sont à la fois fonctionnelles au sens où elles mettent en jeu une relation fonctionnelle et algébriques quand cette relation fonctionnelle peut être exprimée algébriquement.

Ceci remet en lumière l'importance de nous attarder à l'activité qui découle de la tâche en question. En fonction de l'intention didactique qu'une personne enseignante insufflé à la tâche ou grâce à une question d'un.e élève, l'activité peut évoluer, bifurquer, passant d'une forme de pensée à une autre, selon que l'accent soit placé par exemple tantôt sur l'expression algébrique, tantôt sur la covariation entre les deux quantités variables. C'est donc dire qu'une activité invoquant la pensée fonctionnelle peut être bénéfique pour le développement de la pensée algébrique et vice-versa (Robert, 2018). Ces deux formes de pensée mathématique ne devraient pas être considérées de manière hiérarchique ou mutuellement exclusives ; elles devraient évoluer en concomitance (Robert, 2018).

Les recherches d'Early Algebra qui invoquent la pensée fonctionnelle se distinguent à différents niveaux en fonction des fondements qu'elles mobilisent, mais surtout par les tâches fonctionnelles exploitées. La majorité de ces dernières peuvent être classées en trois types de tâches : les tâches de généralisation de suites de motifs géométriques croissants, les tâches portant sur l'étude de suite non-numérique et à motifs non-géométriques ou encore les tâches qui invoquent une approche fonctionnelle pour la généralisation de situations contextualisées (Robert, 2020). Nous proposons dans les sections qui suivent de regarder deux types de tâches qui peuvent invoquer la pensée fonctionnelle à des niveaux différents.

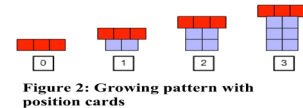
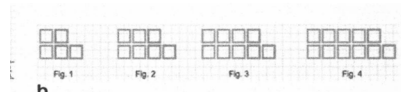
La généralisation d'une suite de motifs géométriques croissants

Le premier exemple de type de tâches que nous proposons de discuter est celui de la généralisation d'une suite de motifs géométriques croissants qui est utilisé dans plusieurs recherches de Early Algebra pour favoriser le développement de la pensée fonctionnelle (p. ex. : Tanışlı, 2011 patterns represented by function tables are the tools which support the early development of functional thinking. In this regard, the aim of this study was to investigate the functional thinking ways in the early grades, particularly those of elementary school fifth grade students through linear function tables. The study data were collected via task-based interviews conducted with a total of four elementary school fifth graders. Consequently, it was found that the four fifth grade students thought on covariation while working with the linear function tables. It was further obtained that the students were able to discover the correspondence relationship and generalize this relationship. The results of the study also revealed information about the reasoning abilities of the students, in other words about their alternative ways of thinking in generalizing the correspondence relationship. [Copyright & Elsevier], »archive»: »eue», »container-title»: »Journal of Mathematical Behavior», »ISSN»: »07323123», »issue»: »3», »journalAbbreviation»: »Journal of Mathematical Behavior», »page»: »206-223», »source»: »EBSCOhost», »title»: »Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students.», »volume»: »30», »author»: [{«family»: »Tanışlı», »given»: »Dilek1», »suffix»: »dtanisl@anadolu.edu.tr}], »issued»: {«date-parts»: [[«2011», 9]]}], »schema»: »https://github.com/citation-style-language/schema/raw/master/csl-citation.json»} ; Warren et Cooper, 2006 »archive»: »eue», »container-title»: »Australian Primary Mathematics Classroom», »ISSN»: »13260286», »issue»: »1», »journalAbbreviation»: »Australian Primary Mathematics Classroom», »page»: »9-14», »source»: »EBSCOhost», »title»: »Using repeating patterns to explore

functional thinking.»,»volume»:»11»,»author»:»[{«family»:»Warren»,»given»:»Elizabeth»},{«family»:»Cooper»,»given»:»Tom»}],»issued»:»[{«date-parts»:»[[«2006»,3]]}],»schema»:»https://github.com/citation-style-language/schema/raw/master/csl-citation.json»} ; Beatty et al., 2013 ; Ferrara et Sinclair, 2016 ; Moss et McNab, 2011 ; Warren et al., 2013self-talk (by students). Dans ces situations, les tâches de suites de motifs géométriques croissants sont présentées comme des tâches puissantes pour comprendre la relation de dépendance entre deux quantités (Tanışlı, 2011).

Look at the numbers of triangle and numbers of square table below.

△	□
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	..
7	15
8	...



Tanışlı, 2011, p. 210

Ferrara et Sinclair, 2016, p. 6

Beatty et al., 2013, p. 103

Figure 1 - Tâches de généralisation de suites de motifs géométriques croissants

Dans la figure 1, trois tâches différentes sont présentées. D'abord, la tâche de Tanışlı (2011) se concentre sur l'observation et la recherche d'une régularité à partir de couples de données préalablement placées dans une table de valeurs. Le motif n'est pas présenté explicitement comme dans les autres exemples. Selon cette auteure, la pensée fonctionnelle entre en jeu dans cette tâche pour rendre explicite la relation fonctionnelle qui existe entre le nombre de triangles et le nombre de carrées. Ici, les quantités varient, mais ne réfèrent pas à des quantités variables habituellement rencontrées dans des phénomènes comme la distance, la hauteur, le temps, le prix, etc. Par ailleurs, il n'existe pas de lien de dépendance entre les quantités variables. Est-ce le nombre de carrés qui dépend du nombre de triangles ou plutôt le contraire ? L'accent qui est placée sur la relation fonctionnelle nous apparaît forcé et artificiel. Dans la deuxième tâche, celle de Ferrara et Sinclair (2016), une suite de motifs croissants est représentée de manière schématique par ses quatre premiers termes. Dans la recherche réalisée, l'intention de la tâche diffère selon le niveau scolaire : en deuxième année les élèves peuvent s'attarder seulement à la récursivité alors qu'en troisième année, la personne enseignante doit rendre explicite la relation entre le motif et le numéro de la figure. Encore une fois ici, le lien de dépendance est établi par défaut, le numéro de la figure agit en tant que variable indépendante. Le raisonnement par correspondance est mis de l'avant pour trouver l'expression algébrique qui exprime la régularité observée. De la même manière, Beatty et al., 2013 ont utilisé une suite de motifs croissants dans la troisième tâche présentée. En ajoutant des cartes de position sous les différents motifs, les auteurs cherchaient à vérifier si le passage vers le raisonnement par correspondance était plus intuitif pour les élèves.

Dans les trois exemples présentés, la finalité est de procéder à la généralisation de la suite en invoquant ou non le symbolisme algébrique. Or, il est vrai que la pensée fonctionnelle peut être invoquée puisqu'une relation fonctionnelle est bel et bien présente dans les tâches. Nous sommes aussi en accord avec le fait qu'en rendant explicite cette relation entre des quantités variables, un passage du

raisonnement récursif vers un raisonnement par correspondance peut être facilité. Toutefois, peut-on réellement dire que ces tâches sont optimales pour développer la pensée fonctionnelle? Cette dernière est-elle mise de l'avant ou plutôt subordonnée au développement de la pensée algébrique?

Selon nous, différentes limites peuvent être soulevées par rapport à la place donnée à la pensée fonctionnelle dans ces tâches. D'abord, les premiers termes d'une suite ne garantissent pas que la tendance se maintienne au-delà des termes présentés. Les couples choisis pourraient en effet être générés par une infinité de fonctions. Ensuite, nous l'avons mentionné, l'idée de fonction est née de questionnements sur des phénomènes de changements. Or, dans ces tâches, la variation n'est pas mise de l'avant. On cherche à exprimer une régularité en observant des instanciations d'une suite croissante. La croissance du motif est axée sur un ajout de quantité plutôt que sur la variation de la quantité. Il en est de même pour le rang (la position de la figure) qui n'est pas réellement une quantité variable. Une troisième critique revient aussi à un concept central de la pensée fonctionnelle : le lien de dépendance entre les quantités variables. Dans l'étude de suites à motifs croissants, il n'y a pas de choix à faire entre la variable dépendante et la variable indépendante. C'est une relation de dépendance qui est prédéterminée. Finalement, une dernière chose que nous voulons ajouter concerne le fait que les quantités ne peuvent qu'être discrètes. Le motif contient un nombre entier de pièces et le numéro de la figure est aussi entier. La modélisation de ces suites par une relation fonctionnelle se limite ainsi à des données discrètes. Évidemment, des phénomènes de changement ou des situations contextualisées pourraient ne présenter que des données discrètes aussi, pensons notamment à une relation telle que celle utilisée dans l'étude de Blanton et ses collaboratrices (2015) où les élèves devaient généraliser cette situation : déterminer le nombre pattes de chiens dans la pièce en fonction du nombre de chien dans la pièce. Puisqu'il ne peut y avoir 1,5 chien dans la pièce, la modélisation ne peut s'appliquer qu'à des données discrètes. Toutefois, une discussion peut être enclenchée par rapport au caractère continu de la fonction, enrichissant par le fait même l'activité fonctionnelle qui découle de la tâche. Les tâches présentées ici ont donc un potentiel pour le développement de la pensée fonctionnelle, mais celui-ci est plutôt faible. Elles nous apparaissent davantage bénéfiques pour le développement de la pensée algébrique.

La tâche des bouteilles : la pensée fonctionnelle mise à l'avant plan

Voici maintenant une tâche qui peut être utilisée pour mener une activité sur la pensée fonctionnelle en elle-même. Inspirée des travaux de Carlson (1998), regardons la tâche :

Observons le phénomène de remplissage de différentes bouteilles avec de l'eau qui s'écoule à débit constant. Tracer approximativement, sur un même repère graphique, les représentations de la hauteur de l'eau en fonction du volume d'eau dans les quatre bouteilles de même hauteur et de même diamètre de la base suivantes.

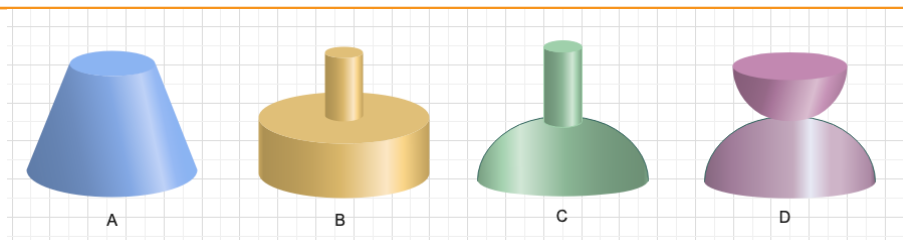


Figure 2 - La tâche des bouteilles

Dans une tâche comme celle-ci, plusieurs choses sont intéressantes pour le développement de la pensée fonctionnelle. D'abord, c'est le raisonnement covariationnel et la représentation graphique qui sont à l'honneur. Il faut nécessairement considérer la variation concomitante des deux grandeurs soient la hauteur de l'eau et le volume d'eau. Tout au long de la construction de la représentation graphique, les deux variables restent explicitement liées. D'ailleurs, puisque le volume d'eau dépend du temps écoulé, un second taux de variation est aussi travaillé de manière implicite. Or, non seulement un tel travail sur la covariation est-il nécessaire pour le développement du concept de fonction en soi, mais il devient très important pour préparer les élèves au calcul différentiel (Passaro, 2015). En plaçant les quatre représentations dans le même repère graphique, il est aussi possible et même essentiel de se questionner sur les points de croisements des courbes. Dans l'activité, faire l'approximation graphique de la covariation peut amener à diverses représentations graphiques et une confrontation de celles-ci peut être faite afin d'en arriver aux modélisations les plus adéquates possibles.

Un deuxième aspect intéressant de cette tâche est relatif au lien de dépendance entre les variables. Ici, la hauteur de l'eau doit être représentée en fonction du volume de l'eau. La variable indépendante est ainsi fixée et c'est la hauteur qui agit comme variable dépendante. Mais pourrait-on inverser les variables ? Quels seraient les impacts d'une telle inversion ? La dépendance étant essentielle dans la composante conceptuelle de la pensée fonctionnelle, il importe de développer à la fois la capacité des élèves à identifier les variables indépendante et dépendante, mais aussi à vérifier la possibilité de les inverser, c'est-à-dire de s'intéresser à la relation fonctionnelle réciproque.

Un troisième élément qu'il importe de discuter concerne la richesse de l'utilisation de la représentation graphique approximative. Puisqu'il faut représenter la variation de la hauteur en fonction de la variation du volume de l'eau dans la bouteille, il faut réfléchir à représenter adéquatement la covariation pour chaque différente partie de la bouteille. La représentation graphique est utilisée ici à des fins qui dépassent la simple visualisation. Il n'est pas question de placer des points d'abord et de tracer la courbe qui se rapproche le plus de la tendance observée, mais plutôt de raisonner directement avec et dans la représentation graphique. La graduation des axes, les points repères dégagés, les courbures peuvent notamment servir d'éléments de questionnement ou de relance pour enrichir l'activité à plusieurs niveaux.

Conclusion

En somme, nous avons d'abord voulu proposer ici une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle qui s'ancre dans la théorie de l'objectivation de Radford (2011). En la définissant comme des manières d'agir et de réfléchir dans des activités qui mettent en jeu une relation fonctionnelle, nous plaçons l'accent sur cette dernière, mais aussi sur la pensée et son lien indissociable avec l'activité. Au-delà d'un simple argumentaire pour situer la pensée fonctionnelle et défendre son importance pour le développement de la pensée mathématique, nous souhaitons aussi explorer comment elle dépasse les frontières des tâches axées sur la pensée algébrique dans lesquelles elle est souvent restreinte. En discutant de la place de la pensée fonctionnelle dans les tâches de généralisation de suites de motifs géométriques croissants qui peuvent être considérées comme étant à la fois algébriques et fonctionnelles nous avons pu dégager les limites de ces tâches pour le développement de la pensée fonctionnelle. En effet, bien souvent à partir de telles tâches, la pensée fonctionnelle est subordonnée à la pensée algébrique et elle ne peut être déployée dans son plein potentiel. Selon nous, la pensée fonctionnelle peut servir à enrichir les tâches algébriques, mais elle ne devrait pas s'y limiter.

Dans la tâche des bouteilles, c'est la pensée fonctionnelle qui est mise à l'avant plan. Par la courte analyse présentée, nous avons pu mettre en valeur la pertinence de chercher des tâches qui ne relèvent pas nécessairement du domaine algébrique pour axer l'activité sur le lien de dépendance, la variation ou encore le raisonnement covariationnel. C'est donc dire qu'en ayant en tête à la fois le développement de la pensée algébrique et celui de la pensée fonctionnelle, il importe de chercher des tâches qui mettent réellement l'accent sur ces deux formes de pensée mathématique et de favoriser leur développement concomitant.

Références

- Beatty, R., Day-Mauro, M. et Morris, K. (2013). Young Students' Explorations of Growing Patterns: Developing Early Functional Thinking and Awareness of Structure. In M. Martinez et A. Castro Superfine (Éds.), *Actes du colloque North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 103-110). Chicago.
- Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. In N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Éds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (Kluwer Academic Publishers). Dordrecht: The Netherlands.
- Ben Nejma, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1, 38-69.
- Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K. et Newman-Owens, A. (2015). A Learning Trajectory in 6-Year-Olds' Thinking About Generalizing Functional Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558.
- Carraher, D., Schliemann, A. et Brizuela, B. (2000). *Early Algebra, Early Arithmetic: Treating Operations as Functions*. In M. Fernandez (Éd.), *Actes du colloque PME-NA XXII* (p. 1-26). Tucson, AZ.
- Cooper, T. et Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise: Models, Representations and Theory for Teaching and Learning. In J. Cai et E. Knuth (Éds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. Verlag Berlin Heidelberg : Springer.
- Denbel, D. (2015). Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum. *Journal of Education and Practice*, 6(1), 77-81.
- Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine: sémiotiques registres et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.
- Ferrara, F. et Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics*, 92(1), 1-19.
- Gattuso, L. et Ottaviani, M. G. (2011) Complementing mathematical thinking and statistical thinking in school mathematics. In C. Batanero, G. Burrill, et C. Reading (Éds), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*. New ICMI Study Series, vol 14, Springer, Dordrecht.
- Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise : éducation préscolaire, enseignement primaire* [avec mises à jour]. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.
- Gouvernement de l'Ontario. (2020). *Le curriculum de l'Ontario de la première à la huitième année: Mathématiques*. Toronto : ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

- Gülbagci Dede, H. Yilmaz, Z., Akkoç, H. et Tall, D. (2022). Enhancing pre-service mathematics teachers' understanding of function ideas. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, doi : 10.1080/0020739X.2021.2022226
- Hamzaoui, H. et Najar, R. (2019). Étude historique de la notion de fonction et caractérisation de la pensée fonctionnelle. In C. Corriveau, V. Martin, M. Thibault et A. Savard (Éds.), *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 138-145) Québec : Université Laval.
- Hitt, F. et González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, 88(2), 201-219.
- Moss, D. L., Boyce, S. et Lamberg, T. (2020). Representations and Conceptions of Variables in Students' Early Understandings of Functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(2). <http://ezproxy.usherbrooke.ca/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=EJ1235427&site=ehost-live>
- Moss, J. et McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. Dans J. Cai et E. Knuth (Éds.), *Early Algebraization: A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. Verlag Berlin Heidelberg : Springer.
- National Council of Teachers of Mathematics (dir.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.
- Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, Québec.
- Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments*, 1, 53-87.
- Radford, L. (2015). *La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation : actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF) sur les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum*. Alger, Algérie : Université d'Alger.
- Radford, L. (2019). Une théorie vygotkienne de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. In J. Pilet et C. Vendeira (Éds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM 2018* (p. 314-332). France : Université Diderot
- Radford, L. (2020). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. *Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz* (p. 1-19). Paris : IREM de Paris.
- René De Cotret, S. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, 17, 5-27.
- Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3^e cycle du primaire québécois: une analyse praxéologique*. (Mémoire de maîtrise). Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada.

- Robert, V., Squalli, H. et Bronner, A. (2018). La pensée fonctionnelle : une analyse praxéologique de son développement précoce : *actes du colloque Espace Mathématique Francophone*. Paris, France : Éditions de l'IREM de Paris.
- Robert, V. (2020) Examen de synthèse [document inédit]. Université de Sherbrooke.
- Squalli, H. (2000). Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec.
- Stephens, A., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. et Murphy Gardiner, A. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal*, 19(3), 143-166.
- Tanişlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(3), 206-223.
- Warren, E. et Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 11(1), 9-14.
- Warren, E., Miller, J. et Cooper, T. J. (2013). Exploring Young Students' Functional Thinking. *PNA*, 7(2), 75-84.
- Youschekevitch, A. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19^{ème} siècle. Fragments d'histoire des mathématiques. *Brochure APMEP*, (41), 7-68.