Titre: Analyse des raisonnements d'élèves de sixieme sur des problèmes de comparaison : une étude de cas au Bénin

Auteurs: OKE Sègbégnon Eugène, AFFOGNON Gervais Marc A et DOSSOU DOSSA Pierre

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 322 - 333

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Analyse des raisonnements d'élèves de sixieme sur des problèmes de comparaison : une étude de cas au Bénin

OKE[1] Sègbégnon Eugène – AFFOGNON[2] Gervais Marc A – DOSSOU DOSSA[3] Pierre

Résumé - Notre présentation analyse les raisonnements d'élèves de 6e au Bénin dans leurs productions en réponse à un test sur les problèmes de comparaison. Les résultats de la recherche montrent que différents modes de raisonnements sont mobilisés par les élèves sans qu'ils ne réussissent à résoudre correctement les problèmes de comparaison proposés. Cela questionne la qualité du développement de la pensée algébrique chez les élèves et les stratégies pour son amélioration.

Mots-clefs : Bénin, collège, problème de comparaison, pensée algébrique, raisonnements.

Abstract - Our presentation analyzes the reasoning of 6th grade students in Benin in their productions in response to a test on comparison problems. The results of the research show that different modes of reasoning are mobilized by the students without them succeeding in solving correctly the proposed comparison problems. This raises questions about the quality of the development of algebraic thinking in students and strategies for its improvement.

Key words: Benin, middle school, comparison problem, algebraic thinking, reasoning.

1. Université d'Abomey-Calavi (UAC), Faculté des Sciences et Techniques (FaST) et Institut de Mathématique et de Sciences Physiques (IMSP), Bénin, eugene.oke@imsp-uac.org

2. Université d'Abomey-Calavi (UAC), Institut de Mathématique et de Sciences Physiques (IMSP), Bénin, gervais.affognon@imsp-uac.org

3. Ministère des Enseignements Secondaire Technique et de la Formation Professionnelle (MESTFP), Direction de l'Inspection Pédagogique, de l'Innovation et de la Qualité (DIPIQ)

Problème et public ciblé de la recherche

Cette recherche s'inscrit dans le cadre d'un projet du programme APPRENDRE mis en œuvre par l'Agence universitaire de la Francophonie (AUF) avec l'appui de l'Agence Française de Développement (AFD) dont la thématique est : « Accompagner le développement du cycle fondamental : l'enjeu de la transition école / collège ». (Appel à projet d'avril 2019).

Après l'analyse du manuel de la classe de 6e (cf. Actes ADiMA3 en Tunisie), nous analysons dans cette présentation les raisonnements d'élèves de 6e à propos de la résolution des problèmes de comparaison. L'objectif est d'appréhender la qualité du développement de la pensée algébrique des apprenants en liaison avec le manuel officiel. A terme, nous cherchons à déterminer dans quelle mesure les contenus du manuel officiel utilisé et les pratiques enseignantes influencent le développement de la pensée des apprenants dans la transition arithmétique - algèbre.

Nous avons choisi de collecter des données auprès des apprenants de ce niveau de collège et de la sixième année du primaire à travers deux tests élaborés dans le cadre de la mise en œuvre de l'étude de la transition primaire-secondaire réunissant le Bénin, le Maroc, la Tunisie sous la supervision d'une équipe du Canada. Dans cette présentation, nous analysons les réponses des apprenants de 6è seulement. Nous pensons que les réponses des apprenants à ces deux tests nous renseignent sur leurs raisonnements à propos de leurs manières d'aborder et de résoudre des problèmes de comparaisons. Le tableau ci-après renseigne sur le public cible de la recherche que nous présentons.

Zone urbaine		Zone rurale		Total
5 collèges publics	2 collèges privés	4 collèges publics	1 collège privé	12 collèges
8 classes	2 classes	5 classes	2 classes	17 classes
362 élèves (50,14%)	64 élèves (8,86 %)	208 élèves (28,81 %)	88 élèves (12,19 %)	722 élèves (100%)

Tableau n°1 : Statistique de la collecte des données en classe de 6ème.

Au total, douze (12) collèges et 17 classes ont été impactés par la collecte des données. Nous avons obtenu des réponses de sept cent vingt-deux (722) élèves qui ont répondu aux questionnaires relatifs aux problèmes de comparaison. Ce tableau montre que neuf (9) collèges publics et trois (3) collèges privés ont participé à l'enquête dans les départements de l'Ouémé, du Littoral, de l'Atlantique, du zou, du Mono et du Couffo. Soit six (6) départements du sud et du centre sur les douze que compte le Bénin. 79% des élèves impactés par l'enquête sont dans des collèges publics contre 21% des élèves des collèges privés. La plupart des élèves sont en zone urbaine à raison de 59% contre 41% en zone rurale.

Dans les lignes qui suivent, nous présentons les questionnaires auxquels les élèves ont répondu puis une analyse a priori.

Présentation et analyse a priori du test proposé pour le recueil des données

Brève présentation du test avec les problèmes de comparaison

Le questionnaire relatif aux problèmes de comparaison ou de partage inégal vise à enquêter sur les raisonnements algébriques des élèves dans la résolution de ces problèmes. L'analyse des réponses des élèves permet de décrire les raisonnements de ces élèves en l'algèbre et l'évolution de ces raisonnements au cours de la transition primaire-collège. Nous cherchons particulièrement à étudier les stratégies adoptées par les élèves dans la réalisation des tâches qui leur sont proposées et à comprendre les difficultés et obstacles rencontrés.

Dans les problèmes de comparaison qui sont proposés, nous distinguons deux types de problèmes : les problèmes connectés et les problèmes déconnectés. Un problème est dit «connecté » s'il est possible de trouver la valeur de l'inconnue en opérant uniquement sur des données et des relations connues. Un problème est dit déconnecté, s'il n'est pas connecté, c'est à dire que pour trouver la valeur de l'inconnue il est nécessaire d'opérer sur l'inconnue (Vergnaud, 1997; 2001). Dans le questionnaire des problèmes de « comparaison », le problème 1 est connecté, les problèmes 2, 3, 4 et 5 sont déconnectés. Selon la typologie de Bednarz et Janvier (1996), les 5 problèmes se présentent par ordre croissant de complexité.

Analyse a priori du test de comparaison proposé

Le raisonnement algébrique est caractérisé, entre autres, par la capacité à se détacher des grandeurs et du contexte (habillage du problème) soit pour opérer sur l'inconnue, soit pour modéliser des relations, soit pour généraliser un phénomène (Adihou, 2020). Il conduit à un travail sur les données connues et inconnues pour modéliser le problème et en faire un traitement formel en vue de le résoudre (Squalli, 2020).

Le raisonnement arithmétique consiste à déterminer les données inconnues en partant des éléments connus du contexte.

L'analyse a priori est essentiellement basée sur le cadre d'analyse présenté dans le texte Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. & Adihou, A. (2020) intitulé : Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable.

L'analyse des raisonnements mobilisés par des élèves dans la résolution de problèmes de comparaison porte sur deux dimensions : le degré d'analycité du raisonnement et la nature du registre de représentation.

D'abord, la première dimension : le degré d'analycité :

Le raisonnement analytique (An) est le premier type de raisonnement sans cette première dimension. Dans ce type de raisonnement, nous voyons l'élève qui considère ou désigne l'inconnue, la représente par un symbole, utilise cette représentation pour exprimer les relations entre les données connues et les autres inconnues du problème et opère sur ces représentations pour former l'équation et trouver les valeurs des inconnues.

Le raisonnement à tendance analytique est le deuxième type de raisonnement dans la première dimension considérée. Nous décrivons dans cette catégorie de raisonnement trois classes de raisonnements :

> (a)-La première classe regroupe les raisonnements hypothético-déductifs où nous incluons l'élève qui affecte une valeur déterminée à une inconnue sachant qu'elle est fausse, fait comme si cette inconnue possédait cette valeur, opère sur les relations et génère les valeurs des autres inconnues. Puis, il raisonne ensuite sur les relations et les valeurs produites pour trouver la valeur exacte de l'inconnue de départ. Il s'agit par exemple des raisonnements de type «fausse position». Dans ce type de raisonnement, l'élève fait comme si la valeur de l'inconnue était connue, mais au lieu d'opérer sur une représentation de cette inconnue, il opère sur une valeur fausse mais déterminée. Pour cette raison, nous considérons que ce type de raisonnement est à tendance analytique mais n'est pas analytique.
>
> (b)- La seconde classe regroupe les raisonnements où l'élève considère les inconnues momentanément comme des variables. Pour trouver les valeurs de ces variables qui respectent les conditions du problème, il n'opère pas sur elles (comme dans le cas d'un raisonnement analytique) mais sur leurs instanciations numériques. C'est le cas des raisonnements fonctionnels.
>
> (c)- La troisième classe regroupe les raisonnements où l'élève considère l'inconnue, la représente explicitement, utilise cette représentation pour traduire les relations entre les inconnues et les connues mais n'opère pas sur ces représentations pour trouver les valeurs des inconnues. Il est parfois admis pour cette dernière raison que le degré d'analyticité du raisonnement n'est pas jugé optimal.

Ensuite, la deuxième dimension : elle est relative à la nature du registre de représentation.

Les registres de représentations sémiotiques sont les trois types de registres au sens de Duval (1995) et de Hitt et Passaro (2007) ont été retenus à savoir, le registre numérique, le registre algébrique conventionnel et le registre intermédiaire.

Le registre de représentation est dit « numérique » quand les traces de la résolution de l'élève ne comportent que des nombres déterminés et des opérations sur ces nombres, « algébrique conventionnel » si l'élève recourt au langage algébrique littéral et « intermédiaire » si l'élève recourt à un, ou à plusieurs, mode de représentation non purement numérique ou algébrique conventionnel. Ainsi nous considérons par exemple que l'élève peut représenter une inconnue par un mot, par le dessin d'une ligne, ou par un carré vide, les relations par un dessin, utiliser une table de valeurs numériques, etc.

Problème 1
Ousmane a partagé la somme de 133 000 francs entre ses deux filles, Maria et Aicha. Il a donné à Maria 33 000 francs. Combien Aicha a-t-elle reçu ?

Ainsi nos analyses des problèmes de comparaison se présentent comme suit :

Ce problème est un problème connecté et additif du genre composition d'états (Vergnaud, 1997, 2001). Sa résolution ne nécessite pas obligatoirement l'usage d'un raisonnement algébrique.

Étant donné qu'il est un problème connecté, il peut être résolu par un calcul direct : Aicha va recevoir 133 000 francs – 33 000 francs = 100 000 francs. Le registre est purement numérique.

Pour ce problème, il est aussi possible de développer les raisonnements de type essais-erreurs avec ajustement simple. Dans ce cas, l'élève donne une valeur spécifique à une des inconnues, génère les valeurs des autres inconnues à l'aide des relations connues. En se basant sur l'écart obtenu entre le nombre total désiré et le nombre total obtenu, il ajuste en conséquence la valeur du nombre de départ sans prendre en compte les relations entre les inconnues.

Il est également possible de développer un raisonnement "Algébrique // Registre numérique // correct " notée ALn(c): A + 33 000 = 133 000. Donc, A = 133 000 - 33 000. Le raisonnement est algébrique à cause de l'utilisation d'une équation. Le registre est numérique parce que les traces de résolution comportent l'utilisation des nombres.

Problème 2
Ahmed achète deux voitures pour ces filles, Maria et Aicha. La voiture de Maria coûte 17 600 francs de plus que celle de Aicha. Si la somme totale consacrée à l'achat des deux voitures est de 181 000 francs, combien coûtera chacune des deux voitures

Par des essais, l'élève peut tenter de « deviner » la valeur juste de l'inconnue en utilisant en actes le théorème des valeurs intermédiaires. Les calculs sont réalisés pour vérifier la justesse de la valeur initiale. Le registre est numérique. La table de valeurs peut servir ici comme moyen d'organisation des essais numériques. Ce n'est pas un raisonnement de type hypothético-déductif. C'est un raisonnement de type essais-erreurs avec ajustement raisonné. Nous conjecturons que les élèves ne sont pas entraînés à faire des essais-erreurs pour l'apprentissage, nous ne rencontrerons pas ce type de raisonnement. Ce n'est pas exclu que d'autres raisonnements soient mobilisés.

Problème 3

Sami fait l'inventaire de deux produits de sa boutique. Il compte 3 fois plus de produits de conserve que de produits de nettoyage. S'il y a 132000 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type ?

Si le nombre de produits de nettoyage représente une part (partie) de l'inventaire; le nombre de produits de conserve représenterait alors 3 parts. Nous aurons en tout 4 parts qui valent 132 000 produits en tout. Chaque part représente alors 132 000 /4 = 33 000 produits.

Sami possède donc 33 000 produits de nettoyage et 3 * 33 000 = 99 000 produits de conserve. Il s'agit d'un raisonnement analytique, inconnue intermédiaire, registre numérique. Ce raisonnement nous semble prégnant chez les élèves et nous pensons que les élèves vont l'utiliser dans la résolution de ce problème.

Ce problème est un problème déconnecté et additif du genre comparaison d'états (Vergnaud, 1997 et 2001). Sa résolution passe par un raisonnement algébrique. Les possibilités de résolution peuvent être :

Soit, le raisonnement "Algébrique // Registre intermédiaire" notée (ALi). Le registre est intermédiaire parce que les traces écrites dans la production comportent l'utilisation de segments pour représenter les parts comme celles-ci :

Nourriture ------

Habillement ------ + 5 000

Scolarité ------ + 15 000

Cela se traduit par les égalités suivantes :

Pour la nourriture: (131 000 - 5 000 - 15 000) / 3 = 37 000

Pour la scolarité: 37 000 + 15 000 = 52 000

Pour l'habillement: 37 000 + 5 000 = 42 000

Le raisonnement n'est pas arithmétique parce qu'il faut plusieurs transformations avant de trouver les différentes dépenses.

Soit, le raisonnement "Algébrique // Registre numérique " notée (ALn). Le registre est numérique parce que les traces écrites dans la production comportent l'utilisation des nombres uniquement. La production est la suivante:

Pour la nourriture: (131 000 - 5 000 - 15 000) / 3 = 37 000

Pour la scolarité: 37 000 + 15 000 = 52 000

Pour l'habillement: 37 000 + 5 000 = 42 000

Le raisonnement "algébrique // Registre algébrique " notée (ALa). Le registre est algébrique parce que les traces écrites dans la production comportent l'utilisation de symboles ou de lettres désignant les inconnues. La situation peut être traduite comme suit:

S = N + 15 000

H = N + 5 000

N + S + H = 131 000

Ce problème est un problème déconnecté et multiplicatif du genre comparaison d'états (Vergnaud, 1997; 2001). Sa résolution passe par un raisonnement algébrique dans un registre intermédiaire ou un raisonnement algébrique dans un registre algébrique. Les possibilités de résolution peuvent être:

Le raisonnement "Algébrique // Registre numérique" notée (ALn). Le registre est à numérique parce que les traces écrites dans la production comportent l'utilisation des nombres uniquement.

La situation peut se traduire comme suit :

Nombre de capsules de Aïcha : (208 + 16) / 7 = 32

Nombre de capsules de Maria : 32 * 3 = 96

Nombre de capsules de Sophia : 96 - 16 = 80

Le raisonnement "Algébrique // Registre intermédiaire" notée (ALi). Le registre est intermédiaire parce que les traces écrites dans la production comportent l'utilisation de de segments pour représenter les parts et aussi des nombres.

Aïcha ------

Maria ------ ------ ------

Sophie ------ ------ ------ (-16)

Ce qui se traduit par les égalités :

Pour Aicha: (208 + 16) / 7 = 32

Pour Maria: 32 * 3 = 96

Pour Sophie: 96 - 16 = 80

Le raisonnement "algébrique // Registre numérique // correct" notée (ALn(c)). Le registre est algébrique parce que les traces écrites dans la production comportent l'utilisation explicite des lettres.

La situation peut être traduite par un système d'équations linéaires à trois équations suivant:

M = 3A

S = M - 16

M + S + A = 208

Cette analyse est celle sur laquelle repose le dépouillement, la catégorisation et l'analyse des productions obtenues.

Nous présentons dans les lignes qui suivent une synthèse des résultats.

Synthèse des résultats et conclusion

Synthèse des résultats

Nous avons dénombré au total 4309 productions en réponse aux cinq problèmes de comparaison proposés dans le questionnaire. Les raisonnements arithmétique dans le registre numérique sont prépondérant à raison de 14,25 + 0,46 + 82,82 = 97,53% contre 2,09 + 0,07 + 0,30 = 2,47% (voir tableau n° 2) pour les raisonnements algébriques dans le registre numérique. Le tableau ci-après décrit les proportions des différents raisonnements retrouvés dans les productions des élèves. Le problème 4 comporte trois questions et est subdivisé en P4.1, P4.2 et P4.3 afin de faciliter sa compréhension aux élèves ainsi que notre dépouillement des productions.

Problèmes	ARn(c)	ARn(i)	ARn(e)	ALn(c)	ALn(i)	ALn(e)	Total
P1	543	01	168	00	00	00	712
P2	24	17	639	15	03	03	701
P3	24	02	602	21	00	01	650
P41	08	00	629	21	00	00	658
P42	07	00	499	18	00	03	527
P43	07	00	486	15	00	05	513
P5	01	00	545	00	00	01	547
Total	614 (14,25%)	20 (00,46%)	3569 (82,83 %)	90 (02,09%)	03 (00,08 %)	13 (00,30 %)	4309 (100 %)

Tableau n°2 : Proportions des différents raisonnements recensés pour le test de comparaison

Nous avons préféré parler de raisonnement algébrique au lieu de raisonnement analytique dans le tableau parce que le raisonnement à tendance analytique n'apparaît pas dans les productions des élèves.

Ce tableau indique qu'il n'y a aucun raisonnement arithmétique dans le registre intermédiaire, ni dans le registre algébrique. Nous constatons que la plupart des élèves de 6^{e} au collège utilise le raisonnement arithmétique dans le registre numérique avec des réponses erronées dans 82,82% des cas. Cela amène à croire que l'apprentissage de la résolution des problèmes de comparaison n'est pas acquis et que les élèves de collège de notre échantillon ont des difficultés. De même, il apparaît clairement dans le tableau que la totalité des raisonnements arithmétiques ou algébriques sont dans le registre numérique. Le registre algébrique est totalement absent ou n'est pas du tout utilisé.

Le tableau n°3 nous renseigne sur la justesse des productions élaborées par nos sujets.

	Réponses correctes	Réponses erronées	Réponses incomplètes	Pas de réponse
Problème 1	543	168	01	10
Problème 2	39	642	20	21
Problème 3	45	603	02	65
Problème 4	76	1619	00	481
Problème 5	01	546	00	169
Total	704 (16,34%)	3582 (83,13%)	23 (00,53 %)	745

Tableau n°3 : Justesse des productions élaborées par les élèves

Cette synthèse des résultats va laisser place à la conclusion et des perspectives envisagées pour cette recherche.

Conclusions et perspectives

Nous avons analysé les raisonnements d'élèves de 6^{e} à propos de la résolution des problèmes de comparaison en vue d'étudier plus tard son influence sur la pensée algébrique au cours de la transition primaire – secondaire. Cette influence pourrait dépendre des acquis des élèves. C'est pour cette raison que nous avons exploré les manières utilisées par les élèves pour aborder et résoudre les problèmes de comparaison. Les résultats obtenus montrent que la justesse des réponses au niveau du test de comparaison utilisé est de 16,34 %. Le raisonnement arithmétique est prépondérant à 97,54 % chez les sujets de notre échantillon et le registre développé est le numérique pour la totalité des productions obtenues.

La tendance des résultats serait-elle la même pour les mêmes élèves qui ont répondu à un test sur les problèmes de généralisation ? En effet, le raisonnement susceptible de faciliter la résolution des problèmes de généralisation serait le raisonnement algébrique. Ce raisonnement algébrique porte plus vers les praxéologies régionales modéliser et généraliser. Les résultats obtenus en analysant les raisonnements des élèves pour le test de comparaison et celui de généralisation feront l'objet d'une analyse au regard du contenu des manuels officiels et des pratiques déclarées des enseignants.

Références bibliographiques

Abouhanifa, S. et Squalli, H. (2019). *Les stratégies exprimées par les élèves dans la résolution d'un problème de généralisation algébrique*. Communication présentée au 4e Colloque de l'OIPA, L'enseignement et l'apprentissage de la pensée algébrique entre 5 et 14 ans. Les 6 et 7 mars 2019, Université de Liège, Belgique.

Adihou, A., Squalli, H., Saboya, M. et Tremblay, M. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves en lien avec différentes structures des problèmes de comparaison. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes EMF2015 - GT3.*

Adihou, A. (2020). Nature analytique des raisonnements d'élèves au début du secondaire : qu'en est-il lors de la résolution de problèmes visant le développement de la pensée algébrique? Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22 (1), 63–98. https://doi.org/10.7202/1070025ar

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1996). Emergence and development of Algebra as a problem solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz N., Kieran C. et Lee L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 115- 136). Dordrecht: Kluwer.

Hitt, F. et Passaro, V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées. *Actes de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM-59)* (p. 117-123). Dobogókő, Hongrie, juillet.

Jeannotte, D., Squalli, H., Robert, V. (2020). Mise à l'épreuve d'un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique par l'entremise d'une analyse du Programme de Formation de l'École Québécoise au primaire. *Actes du colloque GDM 2019 - À quoi ressemble aujourd'hui la recherche en didactique des mathématiques au Québec?*

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Peter Lang SA.

Squalli, H., Jeannotte, D., Koudogbo, J., et Robert, V. (2019). Analyse du potentiel du développement de la pensée algébrique dans le programme de formation de l'école québécoise. Communication présentée dans *Working group 3: Teaching for connections and understanding*. CIEAEM-71, Braga, 22 - 26 juillet.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. & Adihou, A. (2020) intitulé : Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36–62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. *Recherches et perspectives curriculaires. Québec : Livres en ligne du CRIRES*. En ligne : https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Vergnaud G. (1989) *La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.10 n°2-3*, pp.133-170, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.