



TITRE: UN SENS INTRINSEQUE ET EXTRINSEQUE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

AUTEUR: LAGUERRE ERIC

PUBLICATION: ACTES DU HUITIÈME COLLOQUE DE L'ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE – EMF 2022

DIRECTEUR: ADOLPHE COSSI ADIHOUE, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE (CANADA/BÉNIN) AVEC L'APPUI DES MEMBRES DU COMITÉ SCIENTIFIQUE ET DES RESPONSABLES DES GROUPES DE TRAVAIL ET PROJETS SPÉCIAUX

ÉDITEUR: LES ÉDITIONS DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

ANNÉE: 2023

PAGES: 303 - 316

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Un sens intrinseque et extrinseque de l'enseignement des mathematiques

LAGUERRE¹ Eric

Résumé – Cet article relève de la quête d'un sens qu'il est possible de donner à un contenu mathématique. Nous proposons, en premier lieu, des éléments de réponses en scrutant ce sens en dehors des mathématiques, grâce à la notion de modélisation de phénomènes de la réalité, mais également à l'intérieur des mathématiques par le biais de l'aspect structurant que peut apporter la notion de relation d'équivalence. Nous prenons appui d'une part sur les éclipses totales de soleil et d'autre part sur les angles et fractions.

Mots-clefs : sens intrinsèque et extrinsèque aux mathématiques, modélisation, organisation mathématique.

Abstract – This article is a search for a meaning that can be given to mathematical content. We propose, in the first place, elements of answers by examining this meaning outside mathematics, thanks to the notion of modelling phenomena of reality, but also within mathematics through the structuring aspect that the notion of equivalence relationship can bring. We build on the total eclipses of the sun and on the angles and fractions.

Keywords: intrinsic and extrinsic sense to mathematics, modelling, mathematical organization.

1. * Maître de Conférences Université Toulouse Jean Jaurès, France, eric.laguerre@univ-tlse2.fr

Introduction

Il est possible de distinguer deux types de mathématiques (Granger, 1988) :

les mathématiques dialectiques qui viseraient à construire une science rigoureusement logique et les mathématiques algorithmiques qui veulent avant tout créer des outils pour résoudre des problèmes. Deux approches des mathématiques à enseigner pourraient alors être mises en relation avec ces conceptions générales de notre rapport au monde. Au sein d'un enseignement fondé sur une approche empirique et contextualisée, Treffers (1987) pense que les connaissances peuvent provenir de l'observation et de l'expérience du monde. Ce type d'enseignement génère un processus de mathématisation « horizontale » de la réalité. Le réel rend légitime l'étude des concepts et leur sens est en partie extrinsèque à la discipline. Dans le cadre d'une approche structuraliste et décontextualisée des mathématiques, Treffers considère également que les axiomes et les théorèmes qui en découlent fondent leur enseignement par une mathématisation « verticale » qui est détachée du monde dit réel. Le sens des objets enseignés est intrinsèquement lié à la matière. Il prend sa source et se développe dans le cadre strict de cette science. Cette double approche nous a séduit mais il restait à chercher une réponse à la question fondamentale : que peut signifier précisément, dans l'enseignement, une mathématisation s'appuyant sur le réel ? Cela a été l'objet d'une première recherche en rapport avec le sens extrinsèque de l'enseignement des mathématiques (Laguerre, 2016). Notre travail a consisté à nous intéresser à la mathématisation de la réalité. En l'occurrence, nous cherchions à étudier la modélisation du réel non pas en science en général, mais dans l'enseignement des mathématiques et plus particulièrement dans le cadre de la trigonométrie au collège. La première partie de cette communication aura pour objet de rappeler succinctement ce travail afin de l'articuler avec la seconde approche, lié au sens intrinsèque de l'enseignement des mathématiques, qui fait l'objet de notre nouvelle recherche que nous développerons dans un second temps.

Un sens extrinsèque des mathématiques : une modélisation de la réalité

Notre intention est de définir l'acte de modélisation du réel dans l'enseignement et d'illustrer cet acte en prenant appui sur un problème en situation (Gravemeijer K. & Doorman M., 1999). Nous pouvons dire qu'un tel problème est expérimenté de façon effective par les élèves mais pas nécessairement dans la réalité du monde physique qui nous entoure mais éventuellement au sein d'une représentation de ce dernier. Notre problème en situation est élaboré dans le but, d'une part, de comprendre le phénomène d'éclipse de soleil et, d'autre part, d'introduire la tangente. Dans un premier, nous tentons tout d'abord d'élaborer une première définition de la modélisation du réel dans le cadre de l'enseignement en prenant appui sur la Didactique des Domaines d'Expérience (DDE dans la suite ; Boero, Consogno, Guala & Gazzolo 2009). Dans un second temps, nous élaborons un domaine d'expérience, inspiré de notre thèse (2005), en nous fondant sur les relations qui peuvent être établies au

sein d'une étude des éclipses totales de soleil entre le macro-espace, le méso-espace et le micro-espace². Nous nous appuyons sur cette élaboration pour affiner un peu plus la « modélisation du réel ».

Cadre théorique

Nous fondons notre travail sur la DDE (Boero & al. 2009). Un domaine d'expérience est relatif aux relations complexes qui se développent à l'école entre :

- la composante interne de l'élève qui est caractérisée par ses savoirs, ses pratiques et ses schèmes relatifs au domaine visé, avec leur part de subjectivité et de références culturelles parfois liées aux émotions ; cette composante permet à l'élève de faire un repérage des données qu'il juge pertinentes du monde réel, un choix d'hypothèses supplémentaires sur le monde réel si cela est nécessaire ;
- la composante interne de l'enseignant qui est caractérisée par ses savoirs relatifs au domaine visé, ses pratiques, ses représentations, avec leur part de subjectivité, de références culturelles et bien sûr ses objectifs d'enseignement ;
- et la composante externe qui est liée, par exemple, aux contraintes provenant de la réalité même (comme le fait, dans le cadre des éclipses totales de soleil, que la lune et la terre ont des mouvements réguliers et qu'il est parfois impossible de procéder à certaines mesures de longueurs dans le macro-espace), aux moyens matériels (les instruments avec leurs fonctionnements), aux représentations symboliques (les schémas et les signes par exemple), aux règles et usages sociaux, etc.

L'objectif est de prendre appui sur les représentations des élèves et de les faire évoluer à partir de la composante de l'enseignant et de la composante externe. Le but est alors de repérer chez les élèves ce qu'ils savaient déjà et ce qu'ils ne savaient pas encore et de réfléchir aux conditions culturelles et didactiques de l'acquisition de savoirs. La conception des mathématiques dans un DE dépasse l'unique maîtrise des symboles, des règles et des procédures et sous-tend des compétences de raisonnement et de modélisation. Dans ce cadre, un modèle est construit à partir d'artefacts matériels et d'artefacts liés aux mathématiques ainsi qu'aux registres symboliques. Dans notre recherche, nous travaillons sur la modélisation d'un problème physique posé initialement dans le monde réel. L'idée que nous prenons en considération est liée au fait qu'un modèle apparaissant à un certain niveau de la modélisation constitue une nouvelle réalité, ce qui correspond à la prise en compte de l'existence de différentes interprétations de la réalité. Que pouvons-nous entendre par modélisation du réel dans le cadre de la DDE ? Les modèles sont construits en utilisant des artefacts matériels (supports, matériaux, objets, signes, ordinateur...) et des artefacts tels que les triangles rectangles, les angles etc., au sein des modèles mathématiques. Mais un modèle peut lui-même être employé comme artefact dans le but de construire d'autres modèles. A partir d'une situation tirée de la réalité, un déplacement s'effectue de modèle à modèle pour créer une nouvelle interprétation de la réalité

2. Le méso-espace fera référence dans le texte à l'espace associé à une cour d'établissement scolaire et le micro-espace à une feuille ou un ouvrage.

initiale ou une nouvelle réalité. Ainsi la réalité peut se présenter sous une forme modélisée ou sous une réalité fruit elle-même de la construction de plusieurs modèles. Mais avec Tiberghien et Vince (2000), nous considérons que certains modèles de la réalité physique sont difficiles à construire par les élèves. Nous faisons nôtre l'idée qu'il est parfois nécessaire d'imposer à un moment ou à un autre un modèle d'un phénomène qui ne représente qu'une étape dans le processus de modélisation.

Méthodologie et résultats

Nous cherchons à savoir comment une dynamique de modélisation menée au sein de la DDE peut aboutir une analyse cohérente d'une situation d'enseignement. Cette dernière a pour objectif d'aborder avec des élèves une méthode de modélisation d'un phénomène du réel et de légitimer l'introduction d'une nouvelle notion mathématique telle que la tangente. Nous nous appuyons sur les composantes internes élève/enseignant et sur la composante externe. Pour compléter ce cadre, nous ressentons le besoin de mieux cerner le vocable « réalité » que nous envisageons, avec Clément Rosset (2000), en termes de situation et d'événement. La situation se décompose selon le binôme matériel/action. Au départ, la situation est détachée de tout constat de fait. Par événement, nous comprenons la donnée d'un lieu, d'un instant et d'interprétations de faits en rapport avec une situation initiale. La modélisation du réel concerne tous les différents mouvements établis entre, d'une part, une situation et un événement qui lui est rattachée, perçu et constaté dans le langage courant et, d'autre part, leurs diverses représentations. Ces représentations engendrent de nouvelles interprétations ou génèrent de nouveaux binômes situation/événement. A partir de là, nous pouvons dire que la modélisation s'établit par un certain nombre d'allers et retours entre différents méta-niveaux d'interprétation de la réalité et par une dialectique mise en place entre divers outils et objets.

En ce qui concerne un développement cohérent d'un tel processus, nous pouvons juger de la pertinence des analyses des contraintes locales et des connaissances initiales des élèves que nous pouvons mettre en évidence. Au début de la situation, les élèves doivent savoir qu'il y a une éclipse totale de soleil lorsque les trois astres terre, lune et soleil sont alignés, ce qui est confirmé tant par leurs productions initiales que par les programmes antérieurs. Aucune condition sur les distances entre les objets célestes n'apparaît dans les écrits des élèves. Tout notre travail consiste à faire émerger cette condition. Le choix de transposer le phénomène dans le micro-espace grâce aux lorgnettes, qui sont des boîtes parallélépipédiques, se produit au vu des programmes et des connaissances initiales des élèves.

L'analyse épistémologique tant mathématique que physique nous a amené à faire le choix d'une approche trigonométrique du phénomène d'éclipse qui prolonge le programme de mathématique de la classe antérieure. Même si ce phénomène fait partie des programmes de collège et de la culture des élèves de ces âges, il s'agit d'un exemple où les représentations préexistantes sont peu nombreuses. Aussi, l'expérimentateur prend largement part à la mise en place du processus de modélisation permettant de passer du macro-espace au méso-espace. Par contre, le modèle plan des

lorgnettes du micro-espace est construit par les élèves. Deux choix didactiques à long terme semblent déterminants en ce qui concerne la mise en œuvre de la modélisation. D'une part, il faut s'assurer que le modèle choisi est pertinent. D'autre part, au vu du temps qu'il faut consacrer à la mise en place d'une telle situation, un choix judicieux de la notion mathématique à travailler à un niveau scolaire donné doit être fait. Finalement, quel intérêt trouvons-nous à proposer un tel enseignement fondé sur la modélisation de problèmes tirés de la réalité même si toutes les étapes ne sont pas à la charge des apprenants ? La modélisation permet d'interpréter autrement les événements de la réalité ou d'en faire émerger de nouveaux pour mieux l'appréhender. Elle permet également d'anticiper dans le modèle des actions du réel. La modélisation mathématique peut favoriser l'émergence de nouveaux objets pour finalement anticiper des réponses liées au réel mais construites dans l'abstraction des mathématiques.

Un sens intrinsèque des mathématiques

Idées générales

Dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, une partie du sens des notions qu'il serait possible de construire avec des élèves pourrait correspondre à l'approche structuraliste telle que celle évoquée par Treffers, sachant que l'enseignant pourrait déblayer en quelque sorte une partie du terrain à la place des élèves. Dans notre nouvelle recherche, un concept mathématique particulier pourrait permettre, au moins partiellement, cette structuration grâce à un lien tissé entre différents savoirs à enseigner : le concept de relation d'équivalence. Dès la maternelle, un tri consiste à retenir des éléments d'une collection en fonction d'un seul critère de sélection : il y a les objets d'une collection qui conviennent et il y a les « autres ». Nous parlons de classement lorsqu'il y a au moins deux critères qui permettent d'aboutir à au moins trois sous-ensembles de la collection. Le tri et le classement sont liés au concept de relation d'équivalence. A partir de cet exemple, nous pouvons penser que cette notion est familière et correspond de manière intuitive à tout ce qui « est pareil ». D'autre part, cette notion semble utile pour introduire de nouveaux objets mathématiques. Un travail sur les relations d'équivalence permettrait de clarifier un peu les concepts d'égalité et de relation d'équivalence. Le sens intrinsèque peut être également construit à partir de problèmes ou de questions non plus posés au départ à l'extérieur des mathématiques mais à l'inverse à l'intérieur de ces dernières. La notion de PER serait alors intéressante à réinvestir.

Relation d'équivalence

Soit un ensemble E . On dit qu'une relation est définie sur l'ensemble E si nous avons un ensemble $G \subset E \times E$ appelé graphe de la relation. On note $(x, y) \in G$ ou alors xRy .

Une relation R définie sur un ensemble E est une relation d'équivalence, si elle est :

Réflexive, $\forall x \in E, xRx$.

Symétrique, $\forall (x, y) \in E^2, xRy \Rightarrow yRx$.

Transitive, $\forall (x, y, z) \in E^3, xRy \text{ et } yRz \Rightarrow xRz$.

Soit x un élément de E , on appelle classe d'équivalence, notée C_x , de x selon la relation R

l'ensemble des éléments y de E qui sont en relation avec x :

$$y \in C_x \Leftrightarrow xRy \quad C_x = \{y \in E, xRy\}$$

L'ensemble des classes d'équivalence de E selon R est appelé l'ensemble quotient de E par R .

Comme nous l'avons déjà dit, le concept de relation d'équivalence est intuitif. Il correspond à la notion exprimée quand on dit : «C'est pareil» pour une caractéristique choisie. Encore faut-il s'entendre sur ce qui est pareil. Deux pièces de monnaie peuvent être équivalentes du point de vue de leur valeur faciale mais pas de celui de l'année d'émission ou de la masse. Deux terrains à bâtir peuvent être équivalents du point de vue de leurs aires mais pas du point de vue de l'éloignement du centre-ville ou des possibilités d'implantation d'une construction. Pour les cas d'égalité des triangles qui sont au programme du collège depuis 2016 en France, il y a une confusion entre les deux concepts d'égalité et de relation d'équivalence.

L'égalité est une relation d'équivalence mais la réciproque n'est pas vraie.

Cela peut avoir des répercussions s'il y a confusion entre les deux concepts.

La longueur : nous choisissons un ensemble X non vide de baguettes dont les extrémités sont considérées comme des points. Soit $\sqcup$ la relation « peut être juxtaposé à » dans le sens où si deux extrémités de deux baguettes coïncident alors les deux autres extrémités coïncident également. Il s'agit d'une relation entre des bipoints. Les classes d'équivalence sont ici les sous-ensembles de baguettes ayant la même longueur.

La grandeur aire : nous choisissons un ensemble non vide de surfaces planes. Soit la relation « peut être superposé à » dans le sens où si on superpose une surface à une autre, elles coïncident. Les classes d'équivalence sont les surfaces isométriques.

La masse : par rapport aux objets, nous pouvons instaurer la relation « pèse autant que ».

Les angles : $O^+(E)$ est l'ensemble des applications orthogonales positives du plan vectoriel E . Sur l'ensemble $\mathcal{U}$ des vecteurs unitaires du plan on définit la relation suivante : sur $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$: $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) R (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \Leftrightarrow \exists \rho \in O^+(E), \rho(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 \text{ et } \rho(\vec{u}_2) = \vec{v}_2$. $C_{(\vec{u}, \vec{v})} = \text{angl}(\vec{u}, \vec{v})$.

En France, on compare des angles au Cours Moyen et on ne les mesure qu'en 6ème.

Egalité : l'égalité (arithmétique $2 + 3 = 5$, algébrique $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, fonctionnelle $f(x) = \exp(x)$) est une relation d'équivalence. D'une manière générale, sur tout ensemble E , l'égalité de deux éléments est une relation d'équivalence. On a alors : $\forall x \in E, C_x = \{x\}$.

Le parallélisme : la relation « est parallèle ou confondue à », sur l'ensemble des droites d'un espace affine, est une relation d'équivalence, dont les classes sont les directions. Au primaire, les droites parallèles sont abordées avec une approche de pentes pareil, ou d'écart constant, ou encore perpendiculaires à une troisième. Au collège, ce sont des droites qui font le même angle avec une troisième dont l'angle droit. Au Lycée : l'approche est plutôt vectorielle, avec également aussi les nombres complexes.

Les fractions : dans $E = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$, $(p, q)R(p', q') \Leftrightarrow pq' = p'q$. $C_{(p, q)} = \frac{p}{q}$. En France, trois approches différentes des fractions : au Cours Moyen, une première liée au partage de l'unité, et en 6ème une seconde où la fraction a/b et le nombre qui multiplié par b donne a . En classe de 4ème, il serait possible d'aborder les fractions en termes de classe d'équivalence.

Le cardinal d'un ensemble : sur l'ensemble des ensembles finis donc dénombrables, nous en choisissons deux. Nous posons alors la relation suivante : à chaque élément du premier ensemble correspond un et un seul élément du second.

Les classes d'équivalences sont les nombres entiers sur leur aspect cardinal.

Vecteurs : la notion de bipoints équipolents. Sur l'ensemble des bipoints du plan (ou de l'espace), $(A, B)R(C, D) \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme. $C_{(A, B)} = \overrightarrow{AB}$.

Congruence modulo n : dans $\mathbb{Z}$, la relation $x \equiv y[n]$ si n divise $x - y$. Les classes d'équivalences sont représentées par : $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}$ où $\overline{i} = \{x / \exists k \in \mathbb{Z}, x - i = kn\}$: $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$.

Relation d'équipotence : dès l'école maternelle, ce qui relève des tâches de tri et de classement est en rapport avec le concept de relation d'équivalence.

Entiers relatifs : dans $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$. $C_{(a, b)} = a - b$.

Il s'agit de la différence de deux entiers relatifs. $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) / R$.

Matrices semblables, matrices équivalentes : deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice P telle que : $A = PBP^{-1}$. Deux matrices A et B sont équivalentes s'il existe deux matrices P et Q telle que : $A = QBP^{-1}$.

Triangles isométriques : deux triangles sont isométriques si l'un est l'image de l'autre par une isométrie. La composée de deux isométries est une isométrie et la réciproque d'une isométrie est encore une isométrie.

Triangles semblables : sur l'espace affine, deux triangles sont semblables s'il existe une similitude qui transforme l'un en l'autre. Un triangle est semblable à lui-même (Id), si un triangle est semblable à un second, ce dernier est semblable au premier (similitude de même centre, d'angle opposé et de rapport $1/k$). Pour la transitivité : $k+k'$ et somme des angles pour les similitudes directes. La composée de deux similitudes (quelles soient directes ou indirectes) et une similitude.

Equivalence des suites : c'est une relation d'équivalence.

Nous ferons plus loin le choix de concepts parmi les exemples précédent que nous étudierons plus en profondeur.

Cadre théorique

Les cadres théoriques généraux retenus pour cette recherche concernent trois domaines principaux. Un cadre **épistémologique** : le concept d'obstacle qui est utile dans notre première partie mais également dans la partie consacrée aux variables didactiques et aux obstacles. Un cadre **institutionnel** : (Chevallard) l'organisation mathématique au regard des quatre T .

Partant d'un type de tâches T , une œuvre O^3 permet d'apporter un type de réponse R qui est une organisation formée de :

- un type de tâches T associé au type de questions Q ;
- une technique τ relative au type de tâche T ;
- une technologie θ relative à cette technique τ ;
- une théorie Θ relative à la technologie θ .

Une technique τ est justifiée par une technologie θ qui, de plus, la rend intelligible. Une technologie θ est elle-même produite, justifiée et rendue intelligible par une autre technologie supérieure Θ , plus vaste, qui est appelée théorie. Une théorie Θ se distingue d'une technologie θ par le fait qu'elle a une «générativité» plus grande, c'est-à-dire que davantage de résultats peuvent en être déduits et dérivés. Une œuvre est donc vue comme apportant des réponses $R_i = (T_i, \tau_i, \theta_i, \Theta_i)$ à un ensemble de questions Q_i . Dans ce que nous venons d'écrire, lorsque les quatre niveaux sont fixés, l'organisation mathématique est générée à partir de tâches précises, ce qui correspond au niveau d'une **orga-**

3. Chevallard appelle œuvre toute production humaine dont l'objet est d'apporter une réponse à une ou plusieurs questions théoriques ou pratiques.

organisation mathématique ponctuelle. Mais nous pouvons, par exemple, fixer maintenant le niveau technologique θ et par voie de conséquence également le niveau théorique Θ tout en faisant varier les tâches T_i et les techniques τ_i . Nous obtenons alors une **organisation mathématique locale** : $(T_i, \tau_i, \theta, \Theta)$. Une autre possibilité est de fixer le niveau théorique Θ tout en faisant varier tous les niveaux inférieurs qu'elle est censée contrôler. Nous obtenons ainsi plusieurs technologies θ_j , relatives à plusieurs techniques τ_{ij} qui elles-mêmes s'appliquent à différents types de tâches T_{ij} et nous avons alors une **organisation mathématique régionale** : $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta)$. Enfin, il est également possible, au dernier niveau, de faire varier les quatre éléments du quadruplet, ce qui correspond à une **organisation mathématique globale** : $(T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k)$. C'est ainsi que plusieurs théories peuvent parfois être nécessaires pour démontrer un théorème faisant lui-même partie d'une autre théorie.

Un cadre **situationnel** : la théorie anthropologique du didactique (Chevallard) est employée également dans le cadre de la conception et de l'analyse a posteriori de PER pour l'approche du sens intrinsèque et d'AER pour la partie extrinsèque.

Méthodologie

Il est évident que les élèves de l'enseignement primaire et secondaire n'auront pas à aborder la notion de relation d'équivalence qui permettrait de faire apparaître un sens intrinsèque des mathématiques. Mais en ce qui concerne les enseignants, il nous semble important qu'ils aient conscience de ce fait. Aussi, dans un second temps, cette recherche pourrait avoir des répercussions en termes de formation. Il pourra être possible, par exemple, de mettre en évidence cette structuration des connaissances sans que le concept de relation d'équivalence ne soit pleinement étudié dans le cadre d'une formation suivant le niveau des étudiants auquel elle s'adresserait. Nous allons nous appuyer sur la TAD et son aspect structurant grâce à la notion d'organisation didactique et en rajoutant les notions de micro didactique, méso didactique et macro didactique en ce qui concerne les concepts mathématiques que nous aurons choisis d'étudier. L'aspect structurant commencera dès le début de l'introduction du concept jusqu'à son étude au Lycée. C'est cette partie qui constituerait *in fine* un fil conducteur en vue d'une proposition de formation des enseignants. Il s'agira également de concevoir et de mettre en œuvre des séquences d'introduction des notions à partir d'un cadre théorique cohérent. Recherche *a priori* du sens extrinsèque : nous allons nous fonder sur les notions de PER pour compléter le sens intrinsèque d'une notion et d'AER et également sur la modélisation de la réalité dans le cadre de la DDE. L'objectif est de construire et de mettre en œuvre en classe ensuite des situations d'apprentissage afin d'une part d'illustrer le sens *a priori* que nous aurons préalablement mis en évidence et d'autre part d'observer ce que cela produit en termes d'apprentissage auprès des élèves. Nous avons décidé de travailler en partie à cheval sur l'école Primaire et le Collège français. Notre choix porte sur les angles et sur les fractions. Au regard des relations d'équivalence, ces deux notions nous semblent être d'un intérêt important pour deux raisons. Les angles sont comparés au Primaire mais ne sont mesurés qu'au Collège. Cette scission s'explique d'une part du fait que l'instrument de mesure est difficile à manier et d'autre part, lorsque cela est possible, il est nécessaire de procéder

dans cet ordre l'introduction des grandeurs mesurables car sinon cela renforce certains obstacles. Les fractions quant à elles sont travaillées de deux manières différentes au Primaire et au début du Collège. Un travail de transition doit donc être assurée entre ces deux approches.

Un sens intrinsèque des angles

Structuration

Nous avons vu, dans le cadre des OM, la possibilité de fixer le niveau théorique Θ tout en faisant varier tous les niveaux inférieurs qu'elle est censée contrôler. Nous obtenons ainsi plusieurs technologies θ_j , relatives à plusieurs techniques τ_{ij} qui elles-mêmes s'appliquent à différents types de tâches T_{ij} et nous avons alors une OM régionale : $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta)$. Dans ce paragraphe, la théorie en ce qui concerne les angles non orientés, est la suivante : à l'instar de Tauvel (1995) ou Avez (1993), nous pouvons définir les angles non orientés en désignant par E un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure ou égale à 2, D et D' deux demi-droites. On appelle angle non orienté de D et D' l'orbite de (D, D') sous l'action du groupe orthogonal O(E). L'action est définie comme suit : r est une rotation, $r(D, D') = (r(D), r(D'))$. Cette action définit une relation d'équivalence : deux couples sont équivalents s'ils appartiennent à la même orbite de O(E).

L'angle non orienté de D_1D_1 et D_2D_2 est l'une des deux rotations $r : D_1 \rightarrow D_2$ $r : D_1 \rightarrow D_2$ ou $r^{-1} : D_2 \rightarrow D_1$ $r^{-1} : D_2 \rightarrow D_1$. La mesure (en radians) de cet angle est la plus petite des valeurs absolues des mesures (en radians) de l'une des deux rotations. Avec Bories-Longuet et Al (1993), nous avons : soient deux vecteurs directeurs unitaires respectifs des deux demi-droites. La relation R définie par $(\vec{u}_1, \vec{v}_1)R(\vec{u}_2, \vec{v}_2)(\vec{u}_1, \vec{v}_1)R(\vec{u}_2, \vec{v}_2)$ est une relation d'équivalence sur les couples de vecteurs unitaires.

La classe d'équivalence du couple est appelé angle des vecteurs unitaires.

Le type de Tâche élémentaire consiste à comparer des angles de façon pratique. Les techniques peuvent être par exemple, de procéder par superposition des objets angles matériel à l'école Primaire ou par mesurage au collège. L'un des objectifs fondamentaux à atteindre à l'école est de se rendre compte que la grandeur angle est indépendante de la « longueur » de ces côtés, ce qui constitue un obstacle épistémologique pour les élèves. La mesure constitue une étape supplémentaire vers l'abstraction.

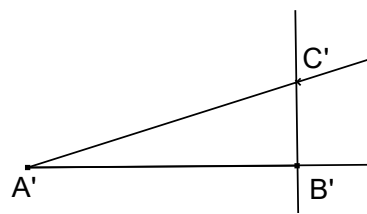
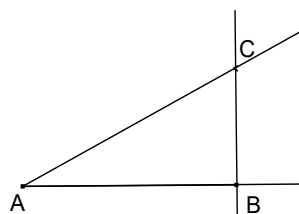
Idées initiales qui permettraient d'aboutir à un PER à venir

À l'école, les élèves ont tendance à relier comparaison des angles et comparaison de leurs côtés car ils se fixent sur une grandeur qu'ils connaissent déjà : la longueur. Il s'agit d'un obstacle lié à une fixation sur une contextualisation familière (Artigue, 1990) qui consiste à se focaliser sur un contexte connu (longueur) pour répondre à une question en rapport avec un autre contexte (angle). Pour cela

des situations de référence doivent être conçues et mise en œuvre afin de dépasser cet obstacle. Il s'agira par exemple de proposer des angles à comparer par superposition qui mettraient en évidence l'indépendance angle/longueur côtés. Au préalable, il sera possible de nous fonder sur des définitions élémentaires et pratiques de l'égalité des angles données au cours de l'histoire (Euclide, Roberval, Arnould, Bos, Lamy, Clairaut, La Caille, Bezout, Legendre, Lacroix, Francoeur, Hadamard, Hilbert, Borel, Queysanne) pour que les élèves commencent à concevoir ce nouvel objet. Les objets matériels sont amovibles et peuvent donc effectivement se superposer.

La mesure des angles n'est introduite qu'au collège en 6^{ème} et non à l'école Primaire. L'une des raisons est sûrement pour séparer la comparaison de la grandeur angle de la mesure mais également du fait que l'instrument de mesure est plus difficile à utiliser pour les élèves que le double décimètre pour les longueurs par exemple. L'objectif d'apprentissage étant alors la mesure. On revoit les méthodes de comparaison du primaire puis on propose une situation dans laquelle les angles sont inamovibles. Comment procéder ?

Dans la continuité des techniques abordées par les élèves, la situation que nous proposons débute par le fait d'utiliser des gabarits pour comparer des angles dans le micro-espace par superposition afin de confirmer le fait que la comparaison des angles est indépendante de la « longueur » des côtés des angles. Puis, dans le méso-espace ou alors avec des angles inamovibles, la question est de savoir comment procéder puisque la superposition directe n'est plus possible ? La situation que nous construisons utilise des angles inamovibles. Dans un premier temps, du matériel qui est mis à disposition des élèves permet de reproduire l'un des deux angles pour pouvoir superposer ce gabarit sur l'angle restant. Il s'agit d'une comparaison indirecte utilisant un objet tiers. Un double décimètre est à disposition des groupes. L'idée est de construire une perpendiculaire sur l'un des côtés de l'angle reproduit sur le calque et de le superposer sur l'autre angle à la manière d'Arnaud (sinus). Toute la question est de savoir comment les élèves vont penser à construire cette perpendiculaire et s'ils n'y pensent pas comment l'expérimentateur pourra poser une question qui ne donnera pas directement la solution mais qui débloquera les élèves. Dans un second temps la tâche sera la même, c'est-à-dire comparer deux angles, mais sans la possibilité d'utiliser un objet tiers. La situation avec le calque doit faire apparaître l'idée de construire une perpendiculaire à un côté de chaque angle situé à la même distance du sommet et de mesurer la longueur du second côté de l'angle droit des triangles rectangles ainsi obtenus. $AB = A'B'$, (BC) et (BA) perpendiculaires, $(B'C')$ et $(B'A')$ perpendiculaires. Puis comparaison de AC et $A'C'$ ou alors de BC et $B'C'$.



Mais cela n'est pas satisfaisant du point de vue de la mesure qui doit être indépendante de la « longueur » des côtés. Nous sommes encore dans un contexte familier aux élèves. Il s'agira ensuite de comparer des angles sans double décimètre ou alors nous ne pourrons plus construire de triangles ABC et A'B'C'. L'idée est de construire un instrument de mesure. Une réflexion reste à mener à ce sujet.

Un sens intrinsèque des fractions

Structuration

Dans ce paragraphe, la théorie est la suivante : nous définissons la relation $\sim$ par : $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, (a, b) \sim (c, d) \text{ ssi } ad = bc$. Nous vérifions facilement qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* / \sim$ est l'ensemble des nombres rationnels. A l'école en France, les fractions sont introduites à partir de situations de références fondées sur le partage de l'unité puis au collège la fraction a/b est le nombre tel que : $\frac{a}{b} \times b = a$. Mais nous sommes précisément en présence d'un obstacle lié à une fixation sur une contextualisation familière. En effet, l'attachement des fractions à la conception du partage de l'unité et la tentative de déstabiliser ce point de vue au profit de la commensurabilité (Artigue, 1990). En classe de quatrième, les fractions sont travaillées à partir de la relation d'équivalence précédente sans développer la théorie en question. Cette dernière n'est spécifiquement travaillée que dans l'enseignement supérieur.

Idées initiales qui permettraient d'aboutir à un PER à venir

Il serait fondamental qu'une réflexion globale de l'enseignement des fractions puis des nombres rationnels soit menée afin que les différentes approches citées ci-dessus ne renforcent et ne fassent naître des difficultés voire des obstacles chez les élèves. En particulier, le point nodal semble se situer à la transition entre l'approche « partage de l'unité » et celle fondée sur la caractérisation : $\frac{a}{b} \times b = a$.

Références

- Arnaud A. *Nouveaux éléments de géométrie ; contenant, outre un ordre tout nouveau, et de nouvelles démonstrations des propositions les plus connues, de nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, de nouvelles mesures des angles, dont on ne s'était point encore avisé, et de nouvelles manières de trouver et de démontrer la proportion des lignes*. Charles Savreux. Paris. Réédition inter IREM Epistémologie. Reproduit par l'IREM de Dijon (2000).
- Artigue M. (1990). Epistémologie et didactique. Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol 10.2.3. *La Pensée Sauvage*. Grenoble.
- Aves A. (1993) *La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation*. (p 130) Paris : Masson.
- Boero P., Consogno V., Guala G., Gazzolo T. (2009) Research for innovation : a teaching sequence on the argumentative approach to probabilistic thinking in grades I-V and some related basic research results. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 29/1. La Pensée Sauvage.
- Bories-Longuet F., Lévy-Bruhl A., Jarraud P. (1993) *Problèmes de mathématiques. Ecrit du CAPES. Algèbre et géométrie*. Paris : Masson.
- Granger G. (1988) Sur l'idée de concept mathématique « naturel ». *Revue Internationale de Philosophie* n°167. Paris PUF.
- Gravemeijer K. & Doorman M. (1999) Context problems in realistic mathematics education : a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics* 39.
- Laguerre E. (2005) *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège*. Thèse de Doctorat. Université Paris VII Denis Diderot.
- Laguerre E. (2014) Une modélisation d'une éclipse solaire totale. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. 34/2-3. La Pensée Sauvage.
- Rosset C. (2000) La notion de réalité *Encyclopédie philosophique universelle* I 97.
- Tauvel P. (1995) *Mathématiques générales pour l'agrégation*. (p 242) Paris : Masson.
- Tiberghien A., Vince J. (2000) Simuler pour modéliser. *Sciences et techniques éducatives* 7-2.
- Treffers A. (1987) *Three dimensions : a model of goal and theory description in mathematics instruction – the Wiskobas Project*. Dordrecht Kluwert.