



TITRE: LA RÉOLUTION DES CONTRADICTIONS - UN LEVIER POUR DÉVELOPPER LES COMPÉTENCES LOGIQUES

AUTEUR: DURAND-GUERRIER VIVIANE

PUBLICATION: ACTES DU HUITIÈME COLLOQUE DE L'ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE – EMF 2022

DIRECTEUR: ADOLPHE COSSI ADIHOUE, UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE (CANADA/BÉNIN) AVEC L'APPUI DES MEMBRES DU COMITÉ SCIENTIFIQUE ET DES RESPONSABLES DES GROUPES DE TRAVAIL ET PROJETS SPÉCIAUX

ÉDITEUR: LES ÉDITIONS DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

ANNÉE: 2023

PAGES: 285 - 297

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

La résolution des contradictions

Un levier pour développer les compétences logiques

DURAND-GUERRIER Viviane¹

Résumé – Dans ce texte, après avoir précisé ce que nous entendons par l'expression *résolution des contradictions*, nous montrons en appui sur quatre exemples dont deux ne relevant pas des mathématiques, l'intérêt potentiel d'un travail explicite en classe sur la résolution des contradictions pour contribuer au développement des compétences logiques. Dans nos analyses, nous prenons en compte les articulations entre syntaxe, sémantique et pragmatique.

Mots-clefs : logique, contradiction, syntaxe, sémantique, pragmatique.

Abstract – In this text, after having specified what we mean by *resolution of contradictions*, we show, based on four examples, two of which are not related to mathematics, the potential interest of an explicit work in class on the resolution of contradictions to contribute to the development of logical competences. In our analyses, we consider the articulations between syntax, semantics, and pragmatics.

Keywords: logic, contradiction, syntax, semantics, pragmatics.

1. Université de Montpellier, IMAG, CNRS-UM, France, viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Introduction

La pensée logique fait partie de manière intrinsèque de la pensée mathématique, notamment en lien avec le raisonnement et la preuve. De ce fait, les mathématiques sont généralement considérées comme un lieu privilégié pour développer les compétences logiques ; il faut cependant noter que la pensée logique s'exerce dans de très nombreux domaines de la connaissance humaine. Nous abordons dans ce texte la contradiction avec l'acception qu'elle a en logique² depuis Aristote³, et nous considérons que pour envisager la résolution d'une contradiction, il est nécessaire de prendre en compte les trois aspects suivants ainsi que leurs interrelations : la syntaxe, qui renvoie à la forme des énoncés, autrement dit à leur grammaire ; la sémantique, qui correspond à l'interprétation des énoncés en jeu dans un univers de discours donné, en lien avec leur valeur de vérité ; la pragmatique qui prend en compte notamment les sujets, les contextes d'énonciations et les usages qui en sont fait. Comme le souligne Da Costa (1997, p.42), et contrairement à ce que l'on pourrait croire, ceci vaut aussi pour les mathématiques (Durand-Guerrier, 2005, p.113-114). En effet, dans l'activité mathématique d'un sujet donné, qu'il soit un expert ou un novice, ses connaissances du domaine, sa familiarité avec les objets en jeu, ses capacités à mettre en relation différents domaines mathématiques jouent un rôle dans sa manière d'aborder et de résoudre un problème, ce qui relève explicitement de la dimension pragmatique. Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord expliciter ce que nous entendons par l'expression *résolution des contradictions* et nous donnons ensuite quatre exemples : une situation ordinaire fictive mais réaliste ; une situation tirée d'un roman d'Agatha Christie ; un paradoxe mathématique attribué à Lewis Carroll ; une contradiction mettant en jeu l'infini actuel résolue par Dedekind au moyen d'une définition théorique.

La résolution des contradictions : syntaxe, sémantique et pragmatique.

Les relations entre logique et langage sont étroites, dans la mesure où l'on peut considérer la logique comme une modélisation des modes de raisonnement conduits dans la langue naturelle permettant de traiter des relations entre vérité dans une interprétation et vérité obtenue comme conséquence d'un raisonnement valide (Durand-Guerrier, 2008).

Énoncés contradictoires : articulation entre syntaxe et sémantique

On dit que deux énoncés sont contradictoires si et seulement s'ils échangent leurs valeurs de vérité, c'est-à-dire que si l'un est vrai, alors l'autre est faux et vice-versa. Autrement dit, l'un est la négation de l'autre. Dans une langue donnée, on reconnaît que deux énoncés sont contradictoires avec des cri-

2. Dans ce texte, le terme *logique* fait référence à la logique classique du premier ordre.

3. Dans le livre 2 de l'organon, De l'Interprétation, traduit par Jean Tricot dans Aristote (1989)

tères grammaticaux (syntaxiques). Il n'est pas nécessaire pour cela de savoir lequel des deux énoncés est vrai. Nous donnons ci-dessous trois exemples.

Exemple 1 : *3 est un nombre pair / 3 n'est pas un nombre pair*. Il s'agit de phrases singulières ; la négation se construit en introduisant l'expression « ne...pas » sur le verbe.

Exemple 2 : *Tout nombre se terminant par 7 est un nombre premier / Il existe un nombre se terminant par 7 qui n'est pas un nombre premier*. Le premier est un énoncé universel. Sa négation est un énoncé existentiel qui exprime l'existence d'un contre-exemple.

Exemple 3 : *Il existe un nombre entier dont le carré est 2 / Aucun nombre entier n'a pour carré 2*. Le premier énoncé est un énoncé existentiel ; le second est un énoncé universel introduit par le quantificateur aucun, qui en logique correspond à « Tous, non » (à ne pas confondre avec « Tous, ne pas » qui, du point de vue la norme linguistique française, correspond à « Non, tous »)⁴.

Deux énoncés contradictoires ne peuvent pas être vrais en même temps, ni être faux en même temps (sémantique). Dans une langue donnée, les énoncés contradictoires suivent des règles de grammaires (syntaxe), comme on le voit dans les exemples ci-dessus.

En logique classique, la conjonction de deux énoncés contradictoires est un énoncé qui est nécessairement faux. En effet, un tel énoncé est de la forme *P* et *non P* ; en raison de sa forme (sa syntaxe), il est faux dans tout univers du discours non vide quel que soit l'interprétation de l'énoncé *P*, et de ce fait, comme le souligne Wittgenstein, il ne décrit aucun état de chose

4.462 – La tautologie et la contradiction ne sont pas des images de la réalité. Elles ne représentent pas d'état de choses possibles. Car la tautologie admet chaque état de chose possible, la contradiction n'en admet aucun. (Wittgenstein, 1921, 1961, p.63)

Si on s'en tenait à ce point de vue logique, on devrait rejeter les contradictions hors du champ de la rationalité humaine. Pourtant, comme nous allons le discuter dans ce texte, des contradictions peuvent apparaître dans différents contextes, et loin de devoir les balayer d'un revers de la main, s'engager dans leur résolution peut faire émerger des interprétations possibles permettant de reconsidérer les raisonnements ayant conduits aux énoncés contradictoires en jeu.

Contradiction dans une situation donnée – introduction de la dimension pragmatique

On dira qu'on est présence d'une contradiction lorsque dans une situation donnée on est en présence de deux énoncés qui devraient être contradictoires (en raison de leur grammaire, leur syntaxe), mais qui sont interprétés dans cette situation comme étant tous les deux vrais (leur sémantique).

4. Pour des analyses sur ces questions, voir par exemple Durand-Guerrier (2016)

Cette définition prend en compte le contexte, la situation dans lesquels les énoncés sont produits et interprétés, ce qu'on appelle la dimension pragmatique.

Pistes pour la résolution d'une contradiction

Dans le monde réel ordinaire, comme en mathématiques, il n'est pas possible que deux énoncés contradictoires (en raison de leur syntaxe) soient simultanément vrais (point de vue sémantique). Dans le cas où cela se produit, pour tenter de résoudre la contradiction, on peut⁵ 1/ se donner les moyens de décider lequel des deux énoncés contradictoires est vrai (et par suite lequel est faux) ; 2/ remettre en cause des énoncés tenus pour vrais (implicites ou explicites) qui ont conduit à établir les deux énoncés contradictoires, et faire des hypothèses alternatives ; 3/ montrer que d'autres interprétations des énoncés sont possibles (point de vue sémantique) et montrer que c'est bien le cas dans la situation (point de vue pragmatique) ; 4/ faire évoluer le contexte théorique dans lequel la contradiction est apparue. Dans ce qui suit, nous allons illustrer ceci par des exemples variés relevant ou non des mathématiques.

Une situation ordinaire fictive mais réaliste

Un matin, Manuel arrive au travail et se rend compte qu'il n'a pas ses clés avec lui. Il est pourtant sûr d'avoir fermé la porte à clé. Il téléphone à un voisin qui habite dans le même immeuble. Il lui dit que lorsqu'il est parti de chez lui pour aller au travail, il a fermé la porte à clé et les clés sont restées sur la porte. Et il lui demande s'il veut bien aller récupérer les clés et les garder jusqu'à ce qu'il rentre du travail. Cinq minutes plus tard, son voisin le rappelle et lui dit : les clés ne sont pas restées sur la porte. Les deux énoncés soulignés sont contradictoires. En effet, le second est la négation du premier. Par suite, nécessairement, l'un est vrai et l'autre faux. Mais lequel ? Manuel et son voisin se trouvent en présence d'une contradiction : *les clés sont restées sur la porte* et *les clés ne sont pas restées sur la porte*. Comme cette contradiction ne peut pas décrire un état de chose existant, il est nécessaire de chercher à la résoudre. Pour cela, une des premières choses que l'on peut faire, c'est identifier les hypothèses implicites ou explicites qui ont conduit à ces deux énoncés contradictoires, afin de les examiner. Il y a une hypothèse explicite (H1) : Manuel a fermé la porte à clé avant de partir au travail (il en est sûr). Il y a également une hypothèse implicite (H2) : le voisin a été vérifié que les clés n'étaient pas sur la porte et il ne s'est pas trompé de porte. Afin de questionner H1, le voisin peut aller voir si la porte est bien fermée à clé.

Imaginons que c'est bien le cas, la porte est fermée à clé, l'hypothèse H1 est confirmée ; il va falloir examiner d'autres hypothèses : Manuel a peut-être mal cherché en arrivant au bureau ; il cherche à nouveau pour s'assurer qu'il ne les a pas avec lui. S'il les trouve, la contradiction est résolue. S'il ne les trouve pas, c'est peut-être qu'il les a perdues, ou qu'il les a oubliées quelque part (par exemple, il s'est

5. Cette liste n'est pas exhaustive. Elle correspond à ce que nous allons illustrer dans ce texte.

arrêté pour prendre un café, il avait ses clés à la main, il les a laissées sur le comptoir) ; et cela peut déclencher de nouvelles actions (par exemple appeler le bar) ; et ainsi de suite. Imaginons maintenant que le voisin s'aperçoive que la porte en fait est restée ouverte. Premier scénario - Les clés sont à l'intérieur ; Manuel a oublié de fermer la porte en partant ; l'hypothèse H1 est invalidée ; le premier énoncé est faux – la contradiction est résolue. Second scénario - L'appartement a été cambriolé – quelqu'un a vu les clés sur la porte, les a prises et en a profité pour rentrer et voler quelques objets. Dans ce cas, la contradiction n'était qu'apparente. Il faut en effet introduire ici le paramètre temps : le premier énoncé était vrai au moment où Manuel est sorti de chez lui ; il était faux deux heures plus tard lorsque le voisin est allé vérifier. Il n'y a pas de contradiction. Naturellement, ceci n'épuise pas les possibles ; vous pouvez vous-mêmes imaginer d'autres scénarios. On peut aussi interroger l'hypothèse H2 : il se pourrait par exemple que le voisin se soit trompé de porte.

Au début de l'épisode, on nous dit que Manuel est sûr d'avoir fermé la porte de chez lui. Dans un ouvrage écrit à la fin de sa vie, Wittgenstein s'interroge sur la certitude :

193. Qu'est-ce que cela veut dire que la vérité d'une proposition est certaine ?

194. Par le mot « certain », nous exprimons la conviction totale, l'absence de moindre doute, et nous cherchons par là à convaincre autrui. C'est la certitude subjective.

Mais quand y-a-t-il de l'objectivement certain ? – quand une erreur n'est pas possible. Mais quel genre de possibilité est-ce là ? Ne faut-il pas que l'erreur soit logiquement exclue ? (Wittgenstein, 1969, 1976. p. 66)

Ce que montre l'analyse précédente, c'est qu'une certitude subjective peut (doit) être mise en doute dès lors qu'elle fait émerger une contradiction. Une telle contradiction étant logiquement exclue (du point de vue de la logique classique), il est nécessaire de questionner les certitudes subjectives. Ce ressort joue un rôle important dans la résolution de nombreuses contradictions comme on va le voir dans les deux exemples suivants.

Un exemple tiré d'un roman policier

Dans un roman publié en 1944 par Agatha Christie, intitulé *Sparkling Cyanide*, et traduit en Français sous le titre *Meurtre au champagne* en 1983, un des personnages expose avec brio la résolution, qu'il qualifie lui-même de géniale, d'une contradiction⁶. Nous nous situons à un moment du roman où un des personnages, George Barton, a été assassiné. Tony, qui était présent le jour du meurtre expose

6. Cet exemple est analysé plus longuement dans Durand-Guerrier (2005 ; 2006). Il a également été présenté à la Première journée mondiale de la logique à l'université de Montpellier le 14 janvier 2019. Le diaporama de l'exposé intitulé « Vérité versus validité à la lumière de la méthodologie des sciences déductives » est disponible en ligne à l'adresse : <https://www.lirmm.fr/~retore/WLD/WorldLogicDay2019.html>.

avec brio à Iris, elle aussi présente le jour du meurtre, sa solution au problème insoluble a priori qui s'est posé à la suite de l'assassinat de George.

L'affaire, grosso modo, paraissait simple comme bonjour. Ce que j'entends par là, c'est que les relations de cause à effet s'imposaient [...]. L'enchaînement logique, si je peux m'exprimer ainsi, semblait évident. Seulement quelques contradictions évidentes sont presque aussitôt apparues. Telles que : a) Personne n'a pu être empoisonné ; b) George a été empoisonné. Et a) Personne n'a touché à la coupe de George ; b) Quelqu'un a mis du poison dans la coupe de George. (Christie, 1944, 1983, p. 432)

De la première paire d'énoncés suit la contradiction : *George n'a pas été empoisonné* et *George a été empoisonné*. La conjonction des énoncés de la deuxième paire est également un énoncé contradictoire qui s'appuie sur l'hypothèse H : « on ne peut pas avoir mis du poison dans la coupe de George sans l'avoir touché ». C'est en examinant la deuxième contradiction, que Tony va avoir une idée géniale :

En réalité, je négligeais un élément capital, à savoir les différents degrés d'appartenance.

« L'oreille de George » est incontestablement l'oreille de George. [...] Mais par « la montre de George », je me borne à désigner la montre que porte George. [...] Et quand j'en arrive à la « coupe de George » [...] je commence à me rendre compte que l'appartenance évoquée recouvre une réalité des plus vagues. (ibid, pp. 432-433)

Tony propose ainsi de se placer sur le niveau sémantique en considérant les différents degrés d'appartenance selon les objets considérés : l'oreille de George / la montre de George / la coupe de George. Bien que les structures syntaxiques soient identiques, la « force » de la relation d'appartenance dépend des objets dont on parle. La reconnaissance de la faiblesse de la relation concernant la coupe laisse entrevoir une possibilité de résolution : on pourrait imaginer qu'il y ait eu un changement dans les coupes, ce qui invaliderait l'hypothèse H, et par là le raisonnement conduisant à la contradiction. Mais, à ce stade, rien ne permet de l'affirmer. Pour montrer la possibilité de l'échange, Tony se livre alors à une petite expérience. Il construit une situation artificielle dans laquelle l'énoncé implicite « on ne peut pas avoir mis du poison dans la coupe de quelqu'un sans l'avoir touché », qui pourrait sembler certain, est mis en défaut.

Pour cela, il s'installe avec deux personnes autour d'un guéridon, chacun ayant une tasse de thé devant lui contenant des boissons différentes mais semblant identiques ; l'un des personnages (Kemp) a une pipe posée à côté de sa tasse. Sous un prétexte, Tony fait sortir à la hâte ses amis, et il profite de la bousculade pour changer la place de la pipe. Lorsqu'ils rentrent à nouveau, le possesseur de la pipe s'assied à la place où se trouve sa pipe. Après avoir exposé son expérience à Iris, il s'exclame :

Oui, mais notez bien sur quoi débouche mon subterfuge : sur une nouvelle contradiction entre a) et b) ! En effet, a) la tasse de Kemp contenait du thé sucré ; b) la tasse de Kemp contenait du café. Deux propositions antagonistes qui ne pouvaient être vraies toutes les deux. ... Et qui pourtant l'étaient bien. (ibid, p. 433)

Cette expérience conduite par Tony montre que de l'énoncé : *Quelqu'un a fourré du poison dans la coupe de George* (1), on ne peut pas déduire l'énoncé : *Quelqu'un a touché la coupe de George* (2). Ceci ouvre la possibilité que l'énoncé (2) soit faux, bien qu'il soit établi que l'énoncé (1) soit vrai (puisqu'il est établi que George a été empoisonné). Autrement dit, il se peut que le contenu de la coupe de George ait été modifié sans que personne n'ait touché à la coupe de George. A ce stade, il s'agit seulement d'une possibilité. Pour poursuivre le raisonnement, il faut prendre en compte la dimension pragmatique en examinant ce qui s'est réellement passé ce jour-là, dans cette situation, dans ce lieu avec ces personnes. C'est ce que Tony explique à Iris.

Et ça Iris, c'est ce qui s'est passé au Luxembourg le jour où George Barton est mort. A la fin des attractions, quand nous sommes tous allés danser, vous avez laissé tomber votre sac. Un garçon l'a ramassé, non pas le garçon qui connaissait votre place, mais un garçon, un petit serveur anxieux, pressé [...] Il a ramassé le sac et l'a placé près de l'assiette qui se trouvait à gauche de la vôtre, et vous êtes allée tout droit à la place indiquée par votre sac. Quant à George, il a pris ce qu'il croyait être sa place, à votre droite, et quand il a proposé un toast (..) il a bu dans ce qu'il croyait être sa coupe mais qui était en réalité votre coupe – coupe dans laquelle le poison avait facilement pu être versé (...) (ibid, pp.433-434)⁷.

Ce retour minutieux au fait renvoie à la dimension pragmatique de l'analyse logique. Ceci ne clôt pas l'analyse de l'intrigue. A ce stade, il n'y a pas encore de certitude absolue de ce que les places ont été changées. Mais le raisonnement de Tony oriente les recherches pour résoudre l'intrigue : en effet ceci conduit Tony à envisager que la personne visée était Iris. Ce qui se révèle être le cas dans la suite du roman.

Ces deux premiers exemples nous ont permis d'illustrer les articulations entre la syntaxe, la sémantique et la pragmatique pour conduire les raisonnements permettant de traiter les contradictions apparentes. L'exemple suivant va nous permettre de le faire dans le cadre des mathématiques.

7. Iris est la seule convive à ne pas avoir bu dans son verre avant d'aller danser car un toast lui a été porté.

Un paradoxe mathématique attribué à Lewis Carroll

Nous nous intéressons dans cette section à un paradoxe mathématique attribué à Lewis Carroll (figure 2), en mettant l'accent sur la résolution des contradictions apparentes associées.

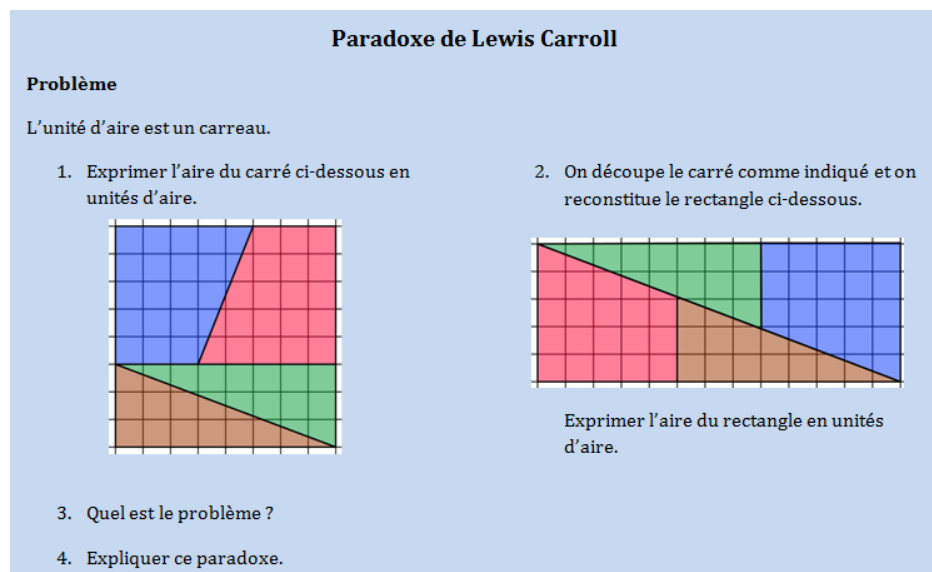


Figure 2 : Le paradoxe de Lewis Carroll⁸

Dans cet exemple, on peut rapidement identifier une première contradiction. 1. Le rectangle est composé des quatre figures découpées qui composaient le carré. Donc, *les deux quadrilatères ont la même aire* (propriété d'équidécomposabilité des aires). 2. a) Le carré est composé de 8 lignes comportant chacune 8 carreaux unités. Il contient donc 64 petits carreaux. L'unité d'aire est le petit carreau. Son aire est donc égale à 64 ; 2.b) Le rectangle est composé de cinq lignes comportant chacune 13 carreaux. L'unité d'aire est le petit carreau. Son aire est donc égale à 65. Par suite, *les deux quadrilatères n'ont pas la même aire*.

On est donc en présence d'un énoncé contradictoire : *Les deux quadrilatères ont la même aire et les deux quadrilatères n'ont pas la même aire*.

En mathématiques classiques (celles du primaire, du secondaire et des premières années d'université), on ne peut pas accepter de telles contradictions. Il est donc nécessaire de s'engager dans un processus de résolution de la contradiction. Nous rappelons que les deux énoncés ne peuvent pas être simultanément vrais. Un seul des deux énoncés est vrai ; l'autre est faux. On peut se convaincre facilement que le deuxième énoncé est vrai car le calcul de l'aire du carré et celui de l'aire du rectangle ne comportent pas d'erreur. Par suite, le premier énoncé doit être faux. Pourtant, il semble également

8. Relever le 17 mai 2022 sur : <http://mathaulogis.wifeo.com/paradoxe-de-lewis-carroll.php>

être vrai. Cet énoncé a été produit à l'issue d'un raisonnement dont nous décrivons les différentes étapes (qui peuvent ne pas être explicites)

1. Le rectangle est composé de quatre figures identiques à celles qui composent le carré (découpage et recomposition).
2. La somme des aires des quatre figures qui composent le carré est égal à l'aire du carré (par construction).
3. On applique le théorème d'équidécomposabilité des aires : *Si deux figures planes sont composées des mêmes sous figures, alors elles ont la même aire.*
4. On en déduit : le rectangle a la même aire que le carré

Figure 3 : Le raisonnement conduisant à affirmer le premier énoncé

Il s'agit ici d'un raisonnement direct simple (la règle d'inférence utilisée est le modus ponens) qui semble a priori valide. Pourtant, les calculs des aires des deux quadrilatères montrent que l'aire du rectangle est différente de celle du carré ; par suite l'énoncé obtenu comme conclusion de ce raisonnement est un énoncé faux. Dans un tel cas, il y a deux possibilités : 1/ le théorème utilisé n'en est pas un dans le contexte mathématique considéré ; 2/ le théorème utilisé est correct, mais les conditions d'applications ne sont pas remplies. Ici, nous sommes dans le cas 2/. Comme le théorème est un énoncé vrai dans ce contexte de mesure des aires, le fait que la conclusion soit fausse conduit à déduire que les conditions d'application du théorème ne sont pas vérifiées. Ceci conduit à une nouvelle contradiction : *le rectangle est composé de quatre figures identiques à celles qui composent le carré et le rectangle n'est pas composé de quatre figures identiques à celles qui composent le carré*. Pour appuyer le premier énoncé, on s'appuie sur une évidence perceptive (qui fournit en quelque sorte une certitude subjective) tandis que le second a été établi grâce au raisonnement précédent s'appuyant sur la contradiction liée aux aires. Cette nouvelle contradiction invite à se tourner vers la géométrie plane. Un examen de la figure permet de conjecturer que le problème se trouve au niveau de la diagonale du rectangle qui est tracé sur la figure : il est possible que les deux segments qui semblent former la diagonale du rectangle ne soient pas portés par la même droite. Cette conjecture est vraie. Pour le prouver, on peut par exemple utiliser le théorème de Thalès, ou montrer que les deux segments sont portés par des droites ayant des coefficients directeurs différents. On trouve régulièrement cette situation dans des manuels ou sur des sites en ligne, le plus souvent l'accent est mis essentiellement sur le calcul pouvant expliquer la différence des deux aires⁹. On se prive ainsi de la richesse potentielle de cette activité pour un travail d'analyse logique des raisonnements permettant de résoudre cette contradiction apparente. En particulier, il n'est pas si fréquent de proposer aux élèves d'analyser un raisonnement conduisant à un énoncé faux, dans le cas où le mode de raisonnement (ici la règle d'inférence utilisée) est valide.

9. On peut trouver une solution classique sur le site: <http://mathaulogis.wifeo.com/paradoxe-de-lewis-carroll.php>

Notre dernier exemple illustre le fait que dans l'histoire des mathématiques, la résolution de certaines contradictions peut être le moteur de nouveaux développements théoriques.

Une contradiction résolue par une définition théorique

La contradiction que nous examinons est discutée dans un texte célèbre de Galilée, traduit en français dans Galilée (1966). Elle apparaît en lien avec un questionnement sur la possibilité de comparer les infinis. Au cours du dialogue entre les personnages la contradiction suivante va émerger : *il y a autant de nombres carrés que de nombres entiers* et *il y a plus de nombres entiers que de nombres carrés*. Le premier énoncé est vrai car à chaque entier correspond son carré et étant donné un nombre carré, il existe exactement un entier naturel dont ce nombre est le carré. Le second énoncé est vrai car il y a de nombreux nombres entiers qui ne sont pas des nombres carrés. La première étape pour résoudre la contradiction consiste à remarquer que si on considère que le tout est formé de tous les entiers inférieurs à un entier donné, et la partie est formée des éléments de ce tout qui sont des carrés d'entiers, alors le premier énoncé est faux : il n'y a pas autant de carré d'entiers que d'entiers. Nous sommes dans le fini, il n'y a pas de contradiction. Une deuxième étape consiste à considérer l'énumération simultanée des nombres entiers et de leurs carrés. On construit ainsi deux suites en correspondance biunivoque. Étant donné un rang k de la suite, on peut considérer les deux ensembles comportant les valeurs de chacune des deux suites jusqu'au rang k . Ces deux ensembles ont la même taille, mais aucun n'est inclus dans l'autre. Dans ce contexte, l'énoncé : *il y a plus de nombres entiers que de nombres carrés* est faux. Il n'y a donc pas de contradiction, et ce même si on considère que l'énumération *ne s'arrête pas*, autrement dit même si on se place dans le point de vue de *l'infini potentiel*¹⁰, associé à la suite illimitée des nombres entiers. Comme le savait bien Galilée, la contradiction apparaît lorsque l'on envisage de considérer la *collection achevée* de tous les entiers et celle de tous les nombres carrés. Dans ce cas la collection des nombres carrés est une partie propre de la collection des entiers. Suivant l'axiome euclidien du tout et de la partie, l'ensemble des entiers est plus grand que l'ensemble des carrés d'entiers, mais d'après la correspondance biunivoque, les deux collections devraient avoir la même taille. Pour résoudre la contradiction, il faut distinguer deux choses : l'inclusion comme ordre partiel sur les ensembles ; l'ordre induit par la mise en correspondance biunivoque entre les éléments de deux ensembles. Cet ordre permet pour les collections finies de comparer leur taille, et ce indépendamment de la nature des objets qui composent ces collections. Ce que montre l'exemple discuté par Galilée, c'est que dès lors que l'on considère des quantités infinies (au sens de collections d'objets) dont l'une est incluse dans l'autre les deux ordres (inclusion et comparaison de la taille) ne coïncident pas, et il est possible qu'une partie propre ait la même taille que la collection totale, ce qui est en contradiction avec l'axiome euclidien du tout et de la partie. Ceci a conduit Galilée, et d'autres mathématiciens après lui, à refuser l'existence d'un infini actuel¹¹. Deux siècles plus tard, Dedekind

10. La distinction entre *infini potentiel* et *infini actuel* dans une approche philosophique, épistémologique et didactique est présentée et illustrée avec des exemples pour la classe dans Boulais et al. (2018).

11. Pour un exemple d'utilisation du texte de Galilée en classe l'obstacle de l'infini actuel, voir Boulais et al. 2018.

choisit de s'affranchir de l'axiome euclidien du tout et de la partie en définissant les ensembles infinis comme des ensembles pouvant être mis en bijection avec une de leur partie propre¹². Ce faisant, il donne un statut théorique à l'infini actuel dans le cas des ensembles. Ceci permet de résoudre la contradiction initiale en considérant que l'expression : « plus ...que » dans la deuxième phrase s'interprète du point de vue de l'inclusion entre ensembles, tandis que l'expression « autant ...que » dans la première phrase s'interprète en termes de correspondance biunivoque (bijection). L'existence de cette bijection, entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres qui sont des carrés d'entiers, permet de prouver que l'ensemble des entiers naturels est un ensemble infini au sens de Dedekind.

Conclusion

Les contradictions sont présentes en mathématiques et dans de nombreux domaines de l'activité humaine. Leur résolution met en jeu les *aspects syntaxiques* (la grammaire des énoncés), les *aspects sémantiques* (ce à quoi renvoient les énoncés, leurs interprétations possibles, et leur valeur de vérité) et les *aspects pragmatiques* (le contexte d'énonciation, l'interprétation et les usages des énoncés par les sujets humains dans une situation donnée). Dans ce texte, nous avons montré que réfléchir à la manière de résoudre les contradictions permet de reconsidérer certaines hypothèses que l'on tenait pour acquises et d'envisager de nouvelles possibilités qui auraient pu nous échapper, en conduisant une analyse logique des raisonnements en jeu. De ce fait, ce travail contribue au développement de compétences logiques. En outre on peut faire l'hypothèse qu'un travail explicite en classe sur la résolution des contradictions pourrait servir de prolégomènes à l'étude du raisonnement par l'absurde dont le schéma peut s'interpréter dans cette perspective de la résolution des contradictions : sous une hypothèse A (la négation de ce que l'on veut prouver), on établit une contradiction (un énoncé de la forme P et $\text{non } P$). Pour résoudre cette contradiction, on rejette l'hypothèse A , ce qui revient à accepter la négation de A , c'est-à-dire en logique classique l'énoncé de départ¹³.

12. Voir Dedekind (2008, page 173).

13. Pour une étude didactique pour le lycée du raisonnement par l'absurde, voir Bernard et al. (2018).

Références

- Aristote (1989) *L'Organon, livre II - De l'interprétation* ; traduction Jean Tricot. Paris : Vrin.
- Bernard D., Gardes D., Gardes M-L. ; Grenier D. (2018) Le raisonnement par l'absurde - Une étude didactique pour le lycée. *Petit x 108*, 5-40.
- Boulais, P., Brouzet, R., Durand-Guerrier, V., Majaj, M., Marino, D., Monnoyeur, F., & Vergnac, M. (2018) Enseignement et apprentissage de l'infini. Aspects philosophiques, épistémologiques et didactiques. M. Abboud (Ed.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone*, (246-255), IREM de Paris.
- Christie, A. (1944) *Sparkling Cyanide*. Collins. Traduction française : *Meurtre au champagne*, 1983, Le Masque.
- Da Costa, N. C. A. (1997) *Logiques classiques et non classiques : essai sur les fondements de la logique*. Paris : Masson.
- Dedekind, R. (2008) *La création des nombres*, traduction et notes par H. Sinaceur. Paris : Vrin.
- Durand-Guerrier, V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches. Université Lyon 1. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00201626>
- Durand-Guerrier, V. (2006) La résolution des contradictions : apports de la sémantique logique. In V. Durand-Guerrier, J.L. Héraud, C. Tisseron (2006) *Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration des savoirs en classe*, 161-179. Lyon, Presses Universitaires de Lyon,
- Durand-Guerrier, V. (2008) Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 373-384.
- Durand-Guerrier, V. (2016) Négation et quantification dans la classe de mathématiques. R. Daval, P. Frath, E. Hilgert; S. Palma. *Négation et référence*, ÉPURE - Éditions et Presses universitaires de Reims, pp.269-288, 2016, Res per nomen, 978-2-37496-021-0.
- Galilée, G. (1966). *Dialogues. Lettres choisies*. Traduction de P-H Michel. Paris : Hermann.
- Wittgenstein, L. (1921) Logisch-Philosophische Abhandlung. *Annalen der naturphilosophie* ; traduction française, *Tractatus logico-philosophicus*, Gallimard, 1961.
- Wittgenstein, L. (1969) über Gewissheit. G. E. M. Anscombe and G. H. von Wright (Eds) Oxford: Basil Blackwell. Tr. Fr. *De la certitude*, Gallimard, 1976.