8e Colloque

Bénin, 12-16 décembre 2022

ESPACE MATHÉMATIQUE FRANCOPHONE

Actes du huitième colloque *EMF 2022*

L'activité mathématique dans une société en mutation : circulations entre recherche, formation, enseignement et apprentissage

UDS Université de Sherbrooke

L’organisation de cet événement est rendue possible grâce l’Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP) et à nos partenaires.

L'activité mathématique dans une société en mutation : circulations entre recherche, formation, enseignement et apprentissage

Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Lieu: Cotonou au Bénin - 12 au 16 décembre 2022

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2024

Pages: 1 - 1257

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

© Les auteur

Bureau exécutif de l'EMF

Le bureau a pour tâche entre autres de désigner le lieu et le président du Comité scientifique du colloque. Il valide le Comité scientifique des colloques. Une fois le Comité scientifique du colloque approuvé, un nouveau bureau renouvelé de moitié, avec un nouveau président, entre en fonction et aura pour mission le choix du lieu et du président du comité scientifique du prochain colloque.

Composition du bureau exécutif 2018-2022

Président
Laurent Theis (Canada)
Membres
Maha Abboud (France)
Faiza Chellougui (Tunisie)
Stéphane Clivaz (Suisse)
Patricia Nebout Arkhurst (Côte d'Ivoire)
Mamadou Souleymane Sangaré (Mali)
Ahmed Semri (Algérie)
Joelle Vlassis (Luxembourg/Belgique).

Composition du bureau exécutif 2022 - 2025

Président
Faten Khalloufi-Mouha (Tunisie)
Membres
Said Abouhanifa (Maroc)
Adolphe Adihou (Bénin)
Maha Abboud (France)
Stéphane Clivaz (Suisse)
Isabelle Demonty (Belgique)
Viviane Durand-Guerrier (France)
Patricia Nebout Arkhurst (Côte d'Ivoire)

Comités du colloque EMF 2022

Le comité scientifiqu

Adolphe Adihou, Responsable du Comité Scientifique
Université de Sherbrooke (Canada)
Joel Tossa, Co-Responsable du Comité Scientifique
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Jean-Luc Dorier, Représentant de l'ICMI
Université de Genève (Suisse)
Maha Abboud
CY Cergy Paris Université (France)
Gervais Affognon
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Cissé Ba
Université Cheikh Anta Diop (Sénégal)
Denis Butlen
CY Cergy Paris Université (France)
Ouahiba Cherikh Si Saber
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (Algérie)
Isabelle Demonty
Université de Liège (Belgique)
Abdellah El Idrissi
ENS, UCA, Marrakech (Maroc)
Nadine Grapin
Université Paris-Est-Créteil (France)
Bessan Philippe Kakpo
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Rahim Kouki
Université Tunis el Manar-Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs el Manar (Tunisie)
Eugène Oké
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Éric Roditi
Université de Paris Cité (France)
Mireille Saboya Mandico
Université du Québec à Montréal (Canada)

Judith Sadja Kam
Université de Yaoundé I - École Normale Supérieure de Yaoundé (Cameroun)
Hassane Squalli
Université de Sherbrooke (Canada)
Luc Trouche
Institut français de l'Éducation - École Normale Supérieure de Lyon (France)
Céline Vendeira
Université de Genève (Suisse)

Le comité local d'organisation

Responsable du Comité Local d'organisation

Professeur Aboubacar Marcos (Membre du comité de pilotage des CEA)
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)

Comité de supervision

Carlos Ogouyandjou (Directeur IMSP)
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Joël Tossa (Coordonnateur CEA-SMA ; Co-Responsable du comité scientifique)
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)

Comité de coordination

Gervais Affognon
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Zéphyrin Ahodegnon
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Kossivi Attiklémé
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Albert Ayigbédé
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Magloire Cossou
Ministère des enseignements maternel et primaire (Bénin)
Henri Dandjinou
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Guy Degla
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)

Ahonakpon Florent Gbaguidi
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Jeanne Koudogbo
Université de Sherbrooke (Canada)
Chérif Moussiliou
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Euloge Lézinmé
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Eugène Oké
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)
Boniface Sossa
Université d'Abomey-Calavi - Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (Bénin)

Les responsables des activités scientifiques

Conférences

Correspondant du Comité Scientifique et Coresponsables

Adolphe Adihou – Canada/Bénin – Adolphe.Adihou@USherbrooke.ca
Jean-Luc Dorier – Suisse – Jean-Luc.Dorier@unige.ch

Table ronde en deux temps:

Correspondant du Comité Scientifique et Coresponsables

Denis Butlen – France – denis.butlen@cyu.fr
Gervais Affognon – Bénin – gervais.affognon@imsp-uac.org

Parole aux Grands témoins

Correspondant du Comité Scientifique et Responsable

Adolphe Adihou – Canada/Bénin – Adolphe.Adihou@USherbrooke.ca

Groupes de travail (GT)

GT1 : Développement professionnel et travail collaboratif

Coresponsables

Valérie Batteau – Suisse – valerie.batteau@hepl.ch
Claudia Corriveau -Canada – claudia.corriveau@fse.ulaval.ca
Touré Krouelé – Niger – tk_krouele@yahoo.fr

Correspondant du Comité Scientifique

Luc Trouche - France – luc.trouche@ens-lyon.fr

GT2 : Pratiques, stratégies et dispositifs de formation

Coresponsables

Lalina Coulange – France – lalina.coulange@u-bordeaux.fr
Mariam Haspekian – France – mariam.haspekian@parisdescartes.fr
Sinaly Dissa – Mali – dissasinaly@gmail.com

Correspondant du Comité Scientifique

Hassane Squalli – Canada – Hassane.Squalli@USherbrooke.ca

GT3 : Différentes pensées mathématiques

Coresponsables

Fabienne Venant – Canada – venant.fabienne@uqam.ca
Said Abouhanifa – Maroc – saidabouhanifa@yahoo.fr
Florent Gbaguidi – Bénin – florent.gbaguidi@imsp-uac.org

Correspondant du Comité Scientifique

Isabelle Demonty – Belgique – isabelle.demonty@uliege.be

GT4 : Dimensions historique, culturelle et langagière dans l'enseignement des mathématiques

Coresponsables

Djamil Aissani – Algérie – djamil_aissani@hotmail.com
Aurélie Chenais – France – aurelie.chesnais@umontpellier.fr
Richard Barwell – Canada – Richard.Barwell@UOTTAWA.CA

Correspondant du Comité Scientifique

Rahim Kouki – Tunisie – rahim.kouki@ipeiem.utm.tn

GT5 : Modélisation, interdisciplinarité et complexité

Coresponsables

Souleymane Barry – Canada – Souleymane_Barry@uqac.ca
Laura Weiss – Suisse – Laura.Weiss@unige.ch
Fernand Malonga – Congo – malongaf@gmail.com

Correspondant du Comité Scientifique

Cissé Ba – Sénégal – cisseba2000@yahoo.com

GT6 : Enseignement des mathématiques au post-secondaire, au supérieur et dans les filières professionnelles

Coresponsables

Sonia Ben Othman – Tunisie – soniabo1971@yahoo.fr
Analia Berge - Canada – analia_berge@uqar.ca
Patrick Gibel – France – patrick.gibel@u-bordeaux.fr

Correspondant du Comité Scientifique

Ouahiba Cherikh – Algérie – ouahiba_cherikh@yahoo.fr

GT7 : Conception, diffusion et usages des ressources

Coresponsables

Timbila Sawadogo – Burkina Faso – sawtimbs@gmail.com; sawtimbs@yahoo.fr
Nina Hayfa – Liban – ninhay@yahoo.fr

Correspondant du Comité Scientifique

Abdellah El Idrissi – Maroc – abdellah_elidrissi@yahoo.fr

GT8 : Technologies numériques pour l'apprentissage, l'enseignement et la formation

Coresponsables

Anago Didier – Bénin – d_anago@yahoo.com
Fabien Emprin – France – fabien.emprin@univ-reims.fr
Sophie Soury-Lavergne – France – sophie.soury-lavergne@ens-lyon.fr

Correspondant du Comité Scientifique

Maha Abboud – France – maha.abboud-blanchard@u-cergy.fr

GT9 : Liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages

Coresponsables

Alexandre Mopondi – République Démocratique du Congo – bendekomopondi@yahoo.fr
Julia Pilet – France – julia.pilet@u-pec.fr
Alice Kamga – Cameroun – al_kamga@yahoo.fr

Correspondant du Comité Scientifique

Éric Roditi – France –eric.roditi@u-paris.fr

GT10 : Enseignement auprès de publics spécifiques ou dans des contextes particuliers

Coresponsables

Jeanne Koudogbo – Canada – Jeanne.Koudogbo@USherbrooke.ca
Édith Petitfour – France – edith.petitfour@univ-rouen.fr
Koffi Pierre Kouamé – Côte d'Ivoire – koffipierrekouame@yahoo.fr

Correspondant du Comité Scientifique

Céline Vendeira – Suisse – Celine.Marechal@unige.ch

GT11 : Évaluations dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Coresponsables

Julie Horoks – France – julie.horoks@u-pec.fr
Mélanie Tremblay – Canada – melanie_tremblay@uqar.ca
Maud Chanudet – Suisse – Maud.Chanudet@unige.ch

Correspondant du Comité Scientifique

Judith Sadja-Njomgang – Cameroun – judithnjomg@yahoo.fr / jsadjakam@yahoo.fr

Projets Spéciaux (SPÉ)

SPÉ1 : Projet jeunes enseignants

Coresponsables

Pierre Dossou Dossa – Bénin – pierredossoudossa@yahoo.fr
Doris Jeannote – Canada – jeannotte.doris@uqam.ca
Nataly Essonnier – Suisse – Nataly.Essonnier@unige.ch

Correspondants du Comité Scientifique

Nadine Grapin – France – nadine.grapin@u-pec.fr
Bessan Philippe Kakpo – Bénin – philippe_bessan_kakpo@yahoo.fr

SPÉ2 : La démarche d'investigation et la résolution de problème dans la classe de mathématiques

Coresponsables

Omar Rouan – Maroc – omarrouan@gmail.com
Annie Savard – Canada – annie.savard@mcgill.ca
Marina De Simone – Suisse – Marina.DeSimone@unige.ch

Correspondant du Comité Scientifique

Mireille Saboya – Canada – saboya.mireille@uqam.ca

SPÉ3 : Étude des processus de vulgarisation

Coresponsables

Nicolas Pelay – France – nicolas.pelay@plaisir-maths.fr
Morou Amidou – Niger – moorou_a@yahoo.fr
Guy-Roger Kaba – Gabon – guyrogerkaba@gmail.com

Correspondants du Comité Scientifique

Adolphe Adihou – Canada/Bénin – Adolphe.Adihou@USherbrooke.ca
Joël Tossa – Bénin – joel.tossa@imsp-uac.org / joeltossa@gmail.com

Discussion programmée (DP)

Correspondants du Comité Scientifique et coresponsables

Jean-Luc Dorier – France – Jean-Luc.Dorier@unige.ch

Eugène Oké – Bénin – eugene.oke@imsp-uac.org / okeeugene@gmail.com

Espace Mathématique Francophone

L'*Espace Mathématique Francophone* (EMF) s'est constitué pour promouvoir réflexions et échanges au sein de la francophonie sur les questions vives de l'enseignement des mathématiques dans nos sociétés actuelles, aux niveaux primaire, secondaire et supérieur, ainsi que sur les questions touchant aux formations initiales et continue des enseignants. L'EMF contribue au développement d'une communauté francophone riche de ses diversités culturelles, autour de l'enseignement des mathématiques au carrefour des continents, des cultures et des générations. La langue de travail de l'EMF est le français. EMF est reconnue comme Organisation régionale affiliée à la *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (CIEM) (Regional organization afifliated to the International Commission on Mathematical Instruction, ICMI)*.

Les rencontres scientifiques de l'EMF, qui ont lieu tous les trois ans depuis 2000, s'adressent aux différents intervenants préoccupés par les questions qui touchent à l'enseignement des mathématiques : mathématiciens, didacticiens des mathématiques, chercheurs, formateurs, enseignants de différents niveaux. Les lieux des conférences sont choisis pour respecter un équilibre géographique et favoriser la participation d'une communauté francophone la plus large possible.

Les colloques de l'EMF visent à :

- permettre les échanges d'idées, d'informations, d'expériences, de recherches autour des questions vives en enseignement des mathématiques, en particulier en lien avec le thème retenu pour chacun d'entre eux ;
- renforcer la coopération entre des chercheurs, formateurs, enseignants, vivant dans des contextes sociaux et culturels différents, et ayant des préoccupations communes quant aux questions touchant à l'enseignement des mathématiques ;
- susciter la participation de jeunes enseignants et chercheurs aux débats sur l'enseignement des mathématiques, ainsi que leur contribution à l'élaboration de perspectives d'avenir ;
- favoriser la prise de conscience chez les enseignants, formateurs, chercheurs de leur rôle dans l'élaboration de la culture mathématique de leurs pays respectifs ;
- contribuer au développement, dans la communauté francophone, de la recherche en didactique des mathématiques et de ses retombées, notamment sur les formations initiale et continue des enseignants.

Les précédents colloques ont eu lieu à Grenoble (2000), Tozeur (2003), Sherbrooke (2006), Dakar (2009), Genève (2012), Alger (2015) et Paris (2018). Vous pouvez notamment retrouver les actes de ces colloques : http://emf.unige.ch.

Le prochain colloque de l'Espace Mathématique Francophone (EMF2025) aura lieu à Montréal au Québec au Canada du **26 au 30 mai 2025** à l'UQAM. Il sera précédé par le Projet Jeunes Enseignants du **22 au 26 mai 2025**.

Thème du colloque de l'EMF 2022

L'activité mathématique dans une société en mutation : circulations entre recherche, formation, enseignement et apprentissage

Cotonou – 12 au 16 décembre 2022

Les mathématiques, parmi les autres domaines de savoir, se caractérisent en ce que leurs outils méthodologiques sont organisés et codifiés (système axiomatique, inférences, démonstrations, preuves, raisonnements, etc.) et ses objets sont constitués en structures conceptuelles (ensembles de nombres, groupes, espaces vectoriels et fonctionnels, etc.).

Ces deux spécificités majeures des mathématiques se déploient dans « l'activité mathématique » et la conditionnent, et cela quel que soit l'acteur considéré. En outre, les recherches historiques, épistémologiques et didactiques montrent à la fois que l'activité mathématique est au cœur du travail du chercheur, du formateur d'enseignants, de l'enseignant et de l'élève, et que chacun de ces acteurs l'appréhende avec ses propres objectifs, motifs ou finalités. Ces recherches montrent également que l'activité mathématique évolue, en interaction avec le contexte scientifique et culturel et qu'elle est donc localement et temporellement située.

Ainsi les contextes scientifiques et technologiques ne cessent d'avoir des effets sur l'activité mathématique. Par exemple, l'utilisation grandissante du numérique et de l'intelligence artificielle dans différents domaines de l'activité humaine n'est pas sans conséquence sur la définition ou la redéfinition même de l'activité mathématique, dans les laboratoires de recherche comme dans les classes. A un autre niveau, les facteurs politiques, économiques et sociaux sont aussi des sources d'influence importantes de l'activité mathématique, que ce soit celle des chercheurs, des enseignants ou des élèves. Un de ces facteurs importants depuis ces dernières années, dans plusieurs pays de l'espace mathématique francophone, touche à l'évolution de la démographie qui entraîne une augmentation des effectifs scolaires et, par voie de conséquence, une population de jeunes enseignants à former. Dans d'autres pays, les évolutions socio-économiques complexifient le recrutement d'enseignants de mathématiques, ce qui conduit à modifier les programmes scolaires.

Les mutations diverses que connaissent actuellement nos sociétés et leurs systèmes éducatifs obligent à s'interroger sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Mener une réflexion profonde quant au présent et au devenir de l'activité mathématique à l'École est devenu indispensable, et les questions sont nombreuses :

- Comment les objets de savoir issus de l'activité mathématique circulent-ils auprès des différents acteurs?

- Comment s'investit, s'active, se pratique, se conçoit, se transpose, s'enseigne et s'apprend l'activité mathématique dans ses diverses composantes?

- Au-delà des spécificités culturelles des pays de l'espace mathématique francophone et de la diversité des pratiques, quelles sont les composantes essentielles de l'activité mathématique?

- Comment les différents acteurs de l'enseignement (chercheurs, formateurs d'enseignants, enseignants et élèves) prennent-ils en considération ces composantes?

- Les cadres théoriques et les outils méthodologiques actuels de la didactique des mathématiques tiennent-ils compte de ce contexte en mutation? Dans quelle mesure est-il important, voire urgent, d'adapter ces cadres, notamment dans leurs croisements avec d'autres champs de la recherche en éducation?

Telles sont les considérations majeures à l'origine de la thématique du colloque EMF 2022, que les intervenants et les participants seront invités à éclairer, approfondir et discuter lors des conférences plénières, des tables rondes, des groupes de travail ou des groupes de discussion. Ainsi EMF 2022 constituera une occasion déterminante pour notre communauté de partager des regards diversifiés sur l'activité mathématique passée, actuelle et future.

Introduction aux actes du colloque de EMF 2022

Les actes du colloque présentent les versions écrites des activités réalisées au cours du colloque et les bilans. Il s'agit

- de la première conférence plénière ;
- des activités Covid en discussion, La table ronde, La parole aux grands témoins ;
- des communications orales et de communication par affiche issues des groupes de travail (GT) et des projets spéciaux (SPÉ)
- des discussions programmées (DP).

Les conférences et les activités, Covid en discussion, La table ronde, La parole aux grands témoins et les discussions programmées qui on meublé le colloque ont été rendus possibles grâce à l'acception des invitations adressées aux responsables et participant.e.s à ces activités.

Les présentations dans les GT, SPÉ et DP ont été possibles à la suite d'un appel de propositions de communication et d'une relecture des propositions par des chercheurs en didactique des mathématiques grâce à un travail coordonnée par les membres du comité scientifique et les responsables des GT et SPÉ. La diversité des textes reflète le thème du colloque :

Les actes du colloque EMF 2022 comportent les textes d'une conférence, des activités Covid en discussion, Table ronde, Parole aux grands témoins d'une part et les textes des communications orales, les communications par affiche, les communications dans le cadre des projets spéciaux et les communications dans le cadre des discussions programmées.

Les textes sont présentés par ordre alphabétique au regard du nom du premier auteur.

Table des matières

Conférence prononcée Par le Professeur Saliou Touré XXVI

Bilan du groupe « Le COVID en discussion » 34

Thématique 1 35

État des lieux des modalités de gestion de la pandémie
dans l'espace mathématique francophone 35

Enseignement et apprentissage des mathématiques au temps de la pandémie de Covid-19 au Sénégal : la gestion des paradoxes et les paradoxes de la gestion 36

Le Covid au Bénin : Obstacles rencontrés lors de l'enseignement et l'apprentissage
des mathématiques 43

La continuité pédagogique en temps de crise sanitaire :
quelles perspectives pour l'enseignement et l'apprentissage mathématiques
en temps (plus) ordinaire? 47

Passage à l'enseignement à distance pour la période de mars à juin 2020 : Survol des pratiques déclarées d'enseignement et d'évaluation d'enseignant.e.s du primaire (élèves de 6 à 12 ans) et d'enseignant.e.s du secondaire (élèves de 12 à 17 ans) 50

Thématique 2 55

Enseignement et apprentissage des mathématiques dans un contexte de pandémie :
un effet bénéfique ? 55

Enseigner au temps du Covid et utiliser le Covid pour enseigner 57

Enseignement de de l'évaluation des mathématiques à distance
au secondaire (12-17 ans) au Québec durant la Covid-19 :
Enjeux et défis comme prétexte de réflexion sur le présent et l'avenir 60

1.5 m entre les élèves, une activité qui concerne l'organisation de l'espace de la classe 66

Brève discussion et conclusion 71

Table ronde 75

La contribution des mathématiques et des activités mathématiques à la citoyenneté 77

Les mathématiques dans la formation des élèves maçons en France.
Analyse d'épreuves du Certificat d'Aptitude Professionnelle (CAP) 85

Modélisation mathématique au service de la dynamique d'espèces biologiques 96

Le calcul de dose médicamenteuse en milieu hospitalier :
activité mathématique ou activité infirmière? 105

Visions du colloque EMF 2022 115

Une didactique des mathématiques clinique 127

Propos de conseillers pédagogiques sur le fruit d'une collaboration avec des chercheurs : Histoire
d'un tableau sur la résolution de problèmes en classe 138

Une entrée par la demande pour un travail collaboratif entre un didacticien
des mathématiques et des personnes enseignantes autour de
l'enseignement-apprentissage des mathématiques à l'école primaire 154

Les œuvres coopératives, un dispositif de formation engagé
dans la préservation des patrimoines 168

Le traitement de l'erreur dans les pratiques enseignantes
dans une formation *à l'envers* 183

Usage de ressources pour enseigner les mathématiques
dans une formation *à l'envers* 196

Quelle relation entre pratique de formation en didactique des mathématiques et formation des
enseignants ? 209

Bilan des Groupes de travail n° 1 et n° 2 223

Developpement professionnel et travail collaboratif
Pratiques, Stratégies et dispositifs de formation 223

Raisonnements des élèves dans la résolution de problèmes algébriques
à la transition primaire/collège au Maroc 230

Les problèmes de généralisation à la transition primaire/collège en Tunisie :
Quelles potentialités pour favoriser le développement de la pensée algébrique ? 246

L'identification d'invariants - une entrée dans la pensée algébrique -
un exemple au collège en France 261

Rapports personnels originels à la notion de hasard dans le secondaire au Bénin 272

La résolution des contradictions
Un levier pour développer les compétences logiques 286

L'exploitation des transformations planes pour résoudre des problèmes
de construction géométrique 299

Un sens intrinseque et extrinseque de l'enseignement des mathematiques 304

Mathématiques empiriques, pensée mathématique & école 318

Analyse des raisonnements d'élèves de sixieme sur des problèmes de comparaison :
une étude de cas au Bénin 323

La pensée fonctionnelle et ses interactions avec la pensée algébrique 335

Le développement de la pensée algébrique comme fondement d'un cadre d'analyse
de la transition arithmétique algèbre 350

La pensée algorithmique comme une manière mathématique de penser 363

Bilan du Groupe de travail n° 3 377

Enjeux sociaux et politiques de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques :
réflexions sur la conception et la mise en action d'une perspective dialogique en recherche 385

L'impact de la numération orale en Bamanankan (Bambara) sur l'addition à l'institut d'éducation populaire (IEP) de Kati Coulibaly 398

Comment comptons-nous dans nos langues ? Des particularités de la numération en certaines langues 412

Bilan du Groupe de travail n° 4 426

Dimensions historique, culturelle et langagière dans l'enseignement des mathématiques responsables 426

Analyse des erreurs des élèves de la Seconde C à propos des outils mathématiques en physique 433

Connexions entre Espaces de Travail : une étude entre probabilités et algorithmique 447

Modélisation mathématique : outil efficace d'enseignement-apprentissage des mathématiques et de résolution de problèmes 464

Bilan du Groupe de travail n° 5 478

Le raisonnement par l'absurde a l'entrée à l'université 487

Premiers pas dans l'élaboration d'une séquence visant la propriété de complétude de l'ensemble des nombres réels 500

Situations de recherche pour faciliter l'accès aux concepts mathématiques à l'entrée à l'université 515

L'influence des la figure et ses dessus sur la définitions des étudiants de triangles congruents 529

Présentation et Bilan du Groupe de travail n° 6 543

Enseignement des mathématiques au post-secondaire, au supérieur et dans les filières professionnelles 543

La formation continue à distance des enseignants de mathématiques au primaire 552

Évolution du travail documentaire d'un enseignant du primaire lors de l'usage d'une ressource technologique pour l'enseignement de la géométrie 567

La double transposition de la méthode d'Euler dans un environnement informatique et son impact sur les pratiques des étudiants à l'Université 580

Typologie de messages écrits pour communiquer un trajet dans une ville virtuelle 594

Rapprochement inépuisable en géométrie dynamique : étude de la conceptualisation de la notion de tangente comme position limite chez un lycéen au Cameroun 609

Une approche expérimentale des fonctions numériques avec le logiciel de la géométrie dynamique Geogerba au Niger 623

Bilan des Groupes de travail n° 7 et n° 8 637

Résolution de problèmes déconnectés de partage inéquitable par des élèves français de fin de primaire et de début de secondaire et lien avec l'enseignement reçu 647

Interactions entre un enseignant et ses élèves lors des situations faisant intervenir les fractions et les proportions dans le calcul de la concentration en science et technologie 662

Des jeux pour faciliter l'apprentissage des mathématiques à la maternelle et au primaire : l'expérience du Bénin 677

Contribution pour l'amélioration des pratiques motivationnelles pour l'apprentissage des nombres en cours préparatoire première année 684

Résoudre un problème par essais et ajustements : quelles exploitations des essais ? 694

Quand les neurosciences analysent les apprentissages et en tirent des conséquences pour l'enseignement 706

Modification de l'apprentissage des élèves en modifiant les mathématiques à enseigner : le cas des fonctions trigonométriques en France 720

Une étude à grande échelle des pratiques déclarées des enseignants du secondaire français 734

Enquêter sur les pratiques d'enseignement pour les mettre en lien avec les apprentissages des élèves 748

Analyse critique de la pertinence des activités introductrices des notions en classe de Seconde C 761

Perception d'un corps dans les épreuves de conservation de la matière chez Piaget et réussite des opérations d'égalité en mathématiques chez les apprenants 773

Bilan du Groupe de travail n° 9 784

Utiliser un exerciseur sur une tablette avec des élèves ayant des difficultés d'apprentissage 794

Pratiques enseignantes de la multiplication auprès d'enfants présentant des signes d'autimes dans six écoles de la commune de Cocody 808

Pratiques inclusives et accompagnant d'élèves en situation de handicap (AESH) : une étude de cas en géométrie au collège 821

Le jeu mathématique comme levier à la dévolution en contexte orthopédagogique 835

Temps légal et performances scolaires en mathématiques : cas des élèves en classe à double vacation à l'école primaire 849

La numération de position décimale dans les manuels scolaires québécois du primaire 862

Potentialités mathématiques d'élèves identifiés en difficulté dans la résolution d'une situation-recherche en mathématiques 877

Accompagner un élève malvoyant en mathématiques : quelles aides ? quels effets ? 891

Mise à l'épreuve d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté dans une classe togolaise du primaire 907

Le dessin à main levée en géométrie dans l'enseignement spécialisé 920

Bilan du Groupe de travail n° 10 935

Étude de gestes évaluatifs en situation de résolution de problemes au cycle 2 944

Évaluer les compétences des élèves en résolution de problèmes :
Réflexion sur la nature des apprentissages visés et les modalités d'évaluation 961

Une étude à grande échelle des pratiques enseignantes d'évaluation
en algèbre au collège 977

Tout problème est-il apte à une évaluation certificative ? 990

Évaluation formative dans les pratiques des enseignants du Chili 1003

L'évaluation-régulation interactive dans la résolution d'un problème sous desmos :
tensions entre collecte de traces et guidage 1016

De la faible performance en mathématiques au décrochage scolaire :
quelle approche théorique d'analyse ? 1033

Bilan du groupe de travail n° 11 1039

La pratique de la langue maternelle en éducation sociale à l'école primaire :
avantages, difficultés et approches de solution 1047

Les transformations géométriques dans les programmes
de mathématiques au Sénégal 1058

Développer le sens de vérification chez les élèves 1071

Lien entre jeu et apprentissage a travers l'exemple du math's up 1084

Enseignement et apprentissage de la symétrie en 5ème :
analyse des difficultés des apprenants et perspectives d'amélioration de l'enseignement 1097

Enseignement et apprentissage des nombres décimaux en classe de 4ème : Difficultés et approches
de solutions 1111

Lien entre jeu et apprentissages mathématiques à travers l'exemple du Math's UP 1123

Manipuler les variables didactiques pour influencer le choix d'une procédure de calcul 1137

Récit d'une collaboration autour de l'intégration de l'approche subjective dans l'enseignement des probabilités au primaire 1151

Pourquoi étudier les gestes professionnels et la posture de l'enseignant ? 1166

Bilan du projet spécial n° 1: La parole aux jeunes enseignants francophones : formation et entrée dans le métier 1181

Fonder son enseignement sur des problèmes de recherche en mathématiques : quels impacts sur les élèves ? 1185

L'évolution dans la construction du concept de fonction des élèves dans des activités de résolution de problèmes : une étude de cas 1205

Bilan du Projet Spécial n° 2 1220

Projet d'étude des ateliers récréatifs à l'aide de l'Analyse des intéractions 1229

Discussion programmée n° 1 1240

Discussion programmée n° 2 1247

Conférence prononcée

Par le Professeur Saliou Touré

Président de la Société Mathématique de Côte d'Ivoire
Lors du 8ème COLLOQUE DE L'ESPACE MATHEMATIQUE FRANCOPHONE
Thème : MATHEMATIQUES ET MILIEU EN AFRIQUE
Cotonou, 12 – 16 décembre 2022

Chers collègues mathématiciens de l'Espace Mathématique Francophone,

Honorables invités, tous en vos rangs grades et qualités,

Mesdames, Messieurs,

Je voudrais remercier tout d'abord le Président du Bureau Exécutif de l'EMF et les organisateurs de m'avoir invité à participer aux travaux de cette 8ème édition du COLLOQUE DE L'ESPACE MATHEMATIQUE FRANCOPHONE.

Aujourd'hui, la grande famille de **l'Espace Mathématique Francophone** se réunit ici à Cotonou pour réfléchir aux moyens de mieux faire connaître au public du Bénin et du monde de la francophonie, ce que sont les mathématiques et pour offrir une plateforme de rencontres et d'échanges entre les pays membres, les établissements, les formateurs, les chercheurs et les jeunes enseignants de l'Espace Francophone.

Après la pandémie du COVID, il était urgent que les mathématiciens de l'espace francophone se retrouvent pour poursuivre et pour renforcer la coopération fructueuse qu'ils ont établie autour des problèmes posés par l'enseignement des mathématiques.

J'ai choisi d'axer mon intervention sur les interactions entre le milieu socioculturel des élèves africains et l'enseignement des mathématiques en Afrique car je suis convaincu (et nous le verrons tout à l'heure) que les différentes composantes de l'environnement socioculturel des élèves africains peuvent avoir une incidence positive sur l'apprentissage des mathématiques.

Mais avant d'aborder ce point, il convient de répondre aux deux questions fondamentales suivantes :

- Le milieu socioculturel exerce-il une influence sur l'apprentissage mathématique ? Si oui, alors l'enseignant doit connaitre ce milieu s'il veut connaitre les causes d'échec qui sont liées à ce milieu ;

- la mathématique est-elle seulement une science déductive ou bien devient-elle une science inductive à certains moments de son élaboration ?

Si la mathématique est seulement conçue comme une *science déductive*, c'est-à-dire si elle est construction de raisonnements formels à partir de prémisses abstraites, alors le milieu qui est constitué d'objets concrets aura très peu d'influence sur l'apprentissage des mathématiques.

Si, au contraire, à certaines étapes de son élaboration la mathématique devient une *science inductive*, c'est-à-dire si elle part d'objets réels pour les mathématiser, les rendre cohérents par la mise en évidence de relations ou d'opérations qui les caractérisent, alors le milieu trouvera une place dans l'apprentissage mathématique.

Permettez-moi un bref rappel historique ; dans les années 70, plusieurs critiques ont été formulées par des mathématiciens professionnels, par des savants non mathématiciens et par des utilisateurs des mathématiques. Ces personnalités affirmaient alors que l'enseignement des mathématiques ne se souciait que de faire acquérir des connaissances théoriques abstraites, éloignées des réalités, au lieu de s'adapter aux circonstances, aux besoins sociaux et à l'environnement, que les programmes accordaient une place exagérée à des théories parfois inutiles, voire dangereuses.

Face à ces critiques et à ces mises en garde, de nombreuses initiatives ont vu le jour dans les IREMS en France, au Canada, en Belgique et en Afrique pour « démythifier » les mathématiques dites « modernes » et pour bien montrer que les « mathématiques modernes » n'étaient rien d'autre que des notions que tout le monde connaissait déjà et maniait peut-être sans le savoir ; un peu comme Monsieur Jourdain qui apprend qu'il fait de la prose depuis longtemps sans le savoir.

En étroite collaboration avec le Ministère de l'Education Nationale de Côte d'Ivoire de l'époque, l'Institut de Recherches Mathématiques d'Abidjan (IRMA) a entrepris des recherches sur les contenus et les méthodes d'enseignement des mathématiques afin de réaliser une meilleure adéquation des contenus et des méthodes pédagogiques aux réalités locales de l'époque.

Dans le cadre du Laboratoire « **Mathématiques dans l'environnement socioculturel africain** » de l'IRMA, nos chercheurs ont :

- procédé à l`inventaire des jeux africains (jeux de calculs, jeux de mémoire, jeux de comptine, jeux de cauris, le jeu de l'AWALE, le nigbé Alladian,…) ;
- mis en évidence les concepts mathématiques présents dans ces jeux ;
- illustré les jeux par des modèles mathématiques ;
- trouvé dans les jeux traditionnels des adultes et des enfants des applications pédagogiques susceptibles d'améliorer la qualité de l`enseignement des mathématiques ;
- effectué l`inventaire et l`étude systématique des concepts mathématiques (proportionnalité, symétrie, orthogonalité, formes, métrique, topologie, etc.) utilisés dans l`artisanat traditionnel africain ;
- mené des enquêtes de type ethnographique pour déterminer la façon dont les individus dans les milieux traditionnels comptaient ou mesuraient des grandeurs au cours de leurs activités socio-économiques ou socio-culturelles.

Ils ont observé que, dans la plupart des sociétés africaines, l'enseignement traditionnel se faisait toujours par voie orale, que la sagesse et les connaissances se transmettaient de génération en génération par des jeux, des contes, des chants, des devinettes et des proverbes.

Les recherches sur les **jeux africains** et les **activités socio-économiques et socio-culturelles** ont permis de mettre en évidence l'influence des jeux africains et des activités socio-économiques et socio-culturelles sur le développement intellectuel de l'élève. Par exemple, la structure sociale du type « **classe d'âge** » chez les peuples Akan de Côte d'Ivoire a pu servir de support à l'introduction de notions mathématiques telles que les notions de «relation d'équivalence » et de « classe d'équivalence. »

Toutes les études ont fait apparaitre clairement que les difficultés que rencontraient les élèves pour assimiler les concepts mathématiques provenaient de trois causes principales :

- l'approche axiomatique de l'enseignement des mathématiques qui plaçait l'élève, sans initiation préalable, devant des notions abstraites ;
- la non utilisation de l'environnement socioculturel de l'élève en tant que support et véhicule privilégiés des concepts mathématiques (je pense aux jeux africains et aux statistiques tirées des activités économiques, sociales et culturelles locales) ;
- la disparité et l'hétérogénéité des niveaux de formation et de qualification des enseignants.

Sur la base d'un profond travail d'investigation et d'expérimentation, associant les enseignants, les chercheurs, les services pédagogiques du Ministère de l'Education Nationale ainsi que les Instituts de recherches dans les domaines de la linguistique et de l'ethnosociologie, nous avons proposé de nouveaux programmes de mathématiques pour toutes les classes (de la 6ème à la Terminale) de l'Enseignement Secondaire Général. Puis, nous avons entrepris la rédaction d'une Collection d'ouvrages de mathématiques conformes à ces nouveaux programmes.

Cette collection, nous l'avons appelée « **la COLLECTION IRMA ».**

Cette nouvelle Collection a été conçue pour compenser d'une part, l'hétérogénéité des niveaux de formation et de qualification des enseignants et, d'autre part, le manque d'encadrement des élèves en dehors de l'école. C'est pourquoi, nous sommes souvent revenus dans des contextes variés, sur les notions les plus importantes de manière à les enrichir progressivement et à permettre leur réinvestissement ultérieur. Par exemple, la notion de valeur absolue, la notion de triangles homothétiques apparaissent-elles à plusieurs reprises tout au long du manuel de la classe de Troisième sous des formes diverses.

Pour les auteurs de la Collection IRMA, il s'agissait de substituer à une pédagogie de l'information, une pédagogie de l'animation et de l'action qui contribue efficacement au développement de l'esprit de recherche chez l'élève et l'ouverture de celui-ci aux réalités du milieu dans lequel il serait appelé à évoluer, à observer, à analyser et à s'adapter.

Dans tous les ouvrages de la Collection IRMA, nous nous sommes appuyés sur le milieu socioculturel des élèves et notre objectif principal, était d'amener nos collègues enseignants de mathématiques à tenir compte de l'environnement des élèves dans leurs activités pédagogiques. Les ressources traditionnelles que sont les jeux africains, l'artisanat et les activités diverses des villages africains devaient être constamment utilisés pour soutenir l'éducation mathématique, ce qui devrait contribuer à faciliter l'apprentissage des mathématiques.

Pour nous, cette interaction permanente entre le milieu socio-culturel et l'enseignement des mathématiques était la meilleure approche pédagogique qui soit.

Conçue au départ pour les élèves de Côte d'Ivoire, la Collection IRMA a finalement connu un franc succès puisqu'elle a été adoptée par plusieurs pays d'Afrique de l'Ouest et d'Afrique Centrale.

Dès lors, il nous est apparu extrêmement important d'étendre à tous les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien l'effort de modernisation et de rénovation de l'enseignement des mathématiques que nous avions entrepris en Côte d'Ivoire. Et cela pour deux raisons principales.

La première raison, c'est que cela répondait à un besoin crucial de l'Afrique. En effet, l'enseignement des mathématiques dans les pays francophones d'Afrique, aux niveaux secondaire et supérieur, était

caractérisé par un manque inquiétant de professeurs qualifiés. Et il me paraissait urgent de « faire quelque chose » pour assurer une formation de qualité pour les futures formateurs de nos pays.

La deuxième raison, c'est que l'Afrique avait (et a encore) besoin de femmes et d'hommes bien formés et compétents dans tous les domaines. Elle a besoin de plus de scientifiques, de plus de chercheurs et de plus d'ingénieurs pour son développement économique, social, culturel et technologique. En particulier, nos pays doivent pouvoir disposer de mathématiciens compétents, qui soient capables d'une part, de transmettre avec rigueur et efficacité les outils indispensables aux utilisateurs de mathématiques et, d'autre part, ces mathématiciens doivent pouvoir modéliser et structurer les problèmes économiques, sociaux et environnementaux.

Pour nous, les mathématiques ou du moins, l'esprit mathématique étaient appelés à jouer un rôle déterminant en Afrique.

En effet, les mathématiques qui constituent un patrimoine commun de toute l'humanité jouent un rôle de plus en plus déterminant dans toutes les branches de la science moderne, de la technologie et dans de nombreux secteurs de la vie économique, sociale et culturelle, notamment dans l'éducation, la santé, l'agriculture, la planification, les transports, l'industrie, les banques et les assurances.

Ce sont ces considérations qui nous ont amené à demander dès 1983, l'accord des Ministres de l'Education Nationale des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien, en vue d'entreprendre des réflexions et des échanges sur les nombreux problèmes posés par l'enseignement des mathématiques dans nos pays aux niveaux secondaire et supérieur (contenus des programmes de formation, formation initiale et formation continue des enseignants, didactique des mathématiques, culture mathématique, …).

Après avoir obtenu l'accord d'une vingtaine de ministres, nous avons conçu et mis en place un cadre inter africain d'échanges et de concertation pour améliorer la qualité de l'enseignement des mathématiques dans l'Espace francophone.

Ce projet, appelé **Harmonisation des Programmes de Mathématiques (H.P.M.)** avait pour objectifs :

- d'entreprendre une **réflexion critique** sur les programmes existants dans les différents pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien ;
- de dégager les **grandes orientations** susceptibles de préciser les **objectifs et la finalité** de l'enseignement des mathématiques ;
- de proposer aux responsables de l'Education et de la formation une **rénovation** de l'enseignement des mathématiques qui tienne compte des dernières recherches en didactique des mathématiques et son **adaptation** à l'environnement socio culturel de l'élève africain ;

- d'élaborer **de nouveaux programmes** puis de **rédiger des manuels scolaires conformes** à ces programmes harmonisés ;

- Promouvoir une coopération inter africaine active qui favorise des échanges d'idées et des partages d'expériences entre les jeunes enseignants africains d'une part, et entre ceux-ci et la communauté mathématique francophone d'autre part.

Convaincus qu'une bonne formation mathématique était indispensable pour le développement de l'Afrique, les différents acteurs de ce projet ont travaillé avec un véritable esprit de solidarité et d'intégration africaine.

Après l'organisation de quatre séminaires inter régionaux à Abidjan en 1983, à Cotonou en 1985, à Conakry en 1088, puis à Abidjan en 1992, des programmes harmonisés ont été élaborés en commun. Puis l'Institut de Recherches Mathématiques d'Abidjan (IRMA), dont j'étais le Directeur à l'époque, a été chargé de piloter la rédaction de manuels de mathématiques pour l'Enseignement Secondaire Général des pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien.

Ainsi fut créée et proposée aux responsables pédagogiques et aux élèves africains, la **Collection Inter Africaine de Mathématiques (C.I.A.M.)**. Cette Collection comprend des manuels, des guides pédagogiques et des livrets d'activités couvrant le premier et le second cycles de l'Enseignement Secondaire Général. Ces ouvrages ont été largement diffusés dans les pays francophones d'Afrique, de l'Océan Indien et même à Haïti.

L'objectif visé par l'enseignement des mathématiques étant avant tout, de favoriser chez l'enfant et chez l'adolescent, une certaine démarche scientifique face aux problèmes de la vie nous avons, là aussi, jugé qu'il était important d'associer les activités de la vie quotidienne des élèves à celles de l'éducation mathématique.

Et comme un homme n'a jamais qu'une idée dans sa vie, cette exigence nous a conduits à :

- éviter l'approche axiomatique et abstraite des concepts mathématiques ;

- utiliser l'environnement socioculturel des élèves comme support et véhicule privilégié des concepts mathématiques.

Les contenus adoptés et retenus et les méthodes pédagogiques préconisées ont été systématiquement expérimentés dans plusieurs classes des pays d'Afrique, entre 1992 et 1998 avant que ne soient entreprises les rédactions des manuels.

Sans rien abandonner du caractère universel des mathématiques, les auteurs de la **Collection CIAM** se sont appuyés sur l'environnement des élèves pour les **motiver**, pour les **faire agir**, les amener à **comprendre** et à **agir de nouveau**, de manière autonome et créatrice.

A cette fin, les leçons proposées ne se présentaient plus comme des exposés théoriques, mais comme des séances de travail au cours desquelles des activités de calcul, de dessin, de lecture de documents (le plus souvent empruntés au milieu africain) sont mises en œuvre et débouchent sur la mathématisation du concept sous-jacent aux manipulations.

Les concepts introduits furent autant d'occasions de poursuivre l'apprentissage du raisonnement déductif et de résolution de problèmes. Notre ambition était certes que les professeurs parviennent à doter leurs élèves de quelques outils dont ils auraient besoin dans l'exercice de leurs professions ou au cours de leurs études ultérieures, mais aussi qu'ils leur apprennent à **analyser** une situation, à **conjecturer** des hypothèses et à les **valider** ou non à l'épreuve des faits ou du raisonnement, à recourir aux modèles mathématiques qu'ils connaissaient et à **dégager** une conclusion.

Dans la mise en œuvre de cette pédagogie de l'action, plusieurs séminaires inter régionaux de suivi HPM et de formation des enseignants ont été organisés : Libreville en 1993, N'Djamena en 1994, Yaoundé en 1995, Antananarivo en 1996, Dakar en 1997, Nouakchott en 1998, Niamey en 1999, Ouagadougou en 2000, Cotonou en 2001, Bangui en 2002 et Bamako en 2003.

Aujourd'hui on peut affirmer, sans aucune exagération, que le **Projet HPM-CIAM** a eu, et continue à avoir, un impact positif réel sur la formation des élèves et des professeurs de mathématiques dans les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien.

Avant de clore mon propos, il me tient à cœur de rappeler l'importance des soutiens que les coopérations française et belge nous ont apporté dans la mise en œuvre du **Projet HPM**. Qu'elles trouvent ici l'expression de notre reconnaissance.

Bon colloque à toutes et à tous.

Je vous remercie de votre aimable attention.

Titre: Bilan du groupe « Le COVID en discussion » - Enseignement et apprentissage des mathématique au temps de la pandémie : bilan et perspectives

Auteurs: ARNOUX Pierre et SOKHNA Moustapha

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 33 - 74

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Bilan du groupe « Le COVID en discussion »

Enseignement et apprentissage des mathématique au temps de la pandémie : bilan et perspectives

Responsables
ARNOUX[1] Pierre, SOKHNA[2] Moustapha
Correspondant-e CS
SABOYA[3] Mireille, EL IDRISSI[4] Abdellah

Suite à l'apparition de la pandémie de COVID[5]-19 et l'impact qu'elle a eu sur l'éducation partout dans le monde et dont l'espace mathématique francophone n'est pas épargné, nous avons invité les participants du colloque à discuter sur les conséquences de la pandémie sur l'enseignement des mathématiques, plus généralement sur les systèmes éducatifs, et à en tirer des leçons pour nos institutions et nos sociétés. Pour cela, deux thématiques ont été proposées, chacune d'elles traitée pendant une plage horaire d'une heure et demie. Pour chacune de ces thématiques, trois intervenants de différents horizons, chercheurs, formateurs et enseignants ont partagé leur point de vue, leurs propos ouvrant la discussion aux autres participants. Nous proposons dans ce bilan d'exposer pour chacune des thématiques, les questions qui ont guidées les intervenants, suivies du texte que chacun a proposé comme synthèse de sa présentation. En conclusion, nous exposons un survol des questionnements et commentaires qu'ont suscités les propos des intervenants. Nous avons accueilli 8 intervenants provenant de différents pays.



Noms des intervenants et pays d'appartenance

1. Université d'Aix-Marseille et Institut de Mathématiques de Marseille, France, pierre@pierrearnoux.fr
2. Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal, moustapha.sokhna@ucad.edu.sn
3. Université du Québec à Montréal, Canada, saboya.mireille@uqam.ca
4. Université Cadi Ayyad, ENS, Marrakec, Maroc, abdellah_elidrissi@yahoo.fr
5. Coronavirus disease

Thématique 1

État des lieux des modalités de gestion de la pandémie dans l'espace mathématique francophone

Les conditions dans lesquelles la pandémie s'est annoncée et s'est propagée ont fait que les responsables de l'éducation, sous diverses contraintes et partout dans le monde ont dû, dans la précipitation, prendre des décisions parfois peu éclairées. Est alors né un lexique ad hoc : état d'urgence, confinement partiel, alternance, e-learning, continuité pédagogique, autoapprentissage, etc. Ensemble, nous souhaitions réfléchir pour brosser un état des lieux des effets de la pandémie sur la gestion sociale de l'enseignement et de l'apprentissage ainsi que sur l'évaluation dont la pandémie a mis en défaut certains mécanismes sociaux et a permis un certain renouveau. Voici les questions qui ont été posées autour de cette thématique :

Comment l'enseignement a-t-il été géré durant la catastrophe ?

Quelles décisions les responsables ont-ils pris et comment sont-elles traduites dans la réalité et dans le milieu ?

Quels impacts sur les enseignements, sur les modes d'apprentissage et sur les résultats des élèves ? Comment réduire les inégalités observées ?

Les technologies ont-elles participé à atténuer ou plutôt à amplifier les inégalités dans l'accès à l'éducation ?

Quels rôles ont été confiés aux parents pendant la pandémie ?

Sous quelles formes les évaluations régulières et les examens normalisés ont-ils été organisées ?

Quatre interventions composent le contenu de cette thématique ; leurs auteurs sont respectivement :

- Moustapha Sokhna et Sounkharou Diarra du Sénégal,
- Donatien Ezin, Audrey Fangnon et Fréedy wangninam Chogou du Bénin,
- Lalina Coulange de France
- Mélanie Tremblay du Québec, Canada.

Enseignement et apprentissage des mathématiques au temps de la pandémie de Covid-19 au Sénégal : la gestion des paradoxes et les paradoxes de la gestion

SOKHNA[6]* Moustapha et DIARRA[7]* Sounkharou

Le 14 mars 2020, au Sénégal, à cause de l'apparition SARS-CoV-2, le virus vecteur de la COVID-19, le gouvernement a pris 8 mesures dont celle relative à la fermeture des écoles et des universités. Cette situation inédite a fait naitre des bouleversements, des interrogations et des initiatives sur et pour l'enseignement des mathématiques. Ce samedi 14 mars 2020 avait coïncidé à l'organisation, au Sénégal, de la journée de Pi Days pour l'Afrique de l'Ouest. Les pays de la sous-région, grâce au soutien de CANP[8]1 coordonnée par Mamadou Souleymane SANGARE, de la FASTEF[9] et de l'IREMPT[10], organisaient une première rencontre de l'année internationale des mathématiques. La situation était telle qu'il fallait organiser dans l'urgence le départ de certains participants venus du nord. Ce texte est une étude synthétique de la manière dont l'enseignement de façon général et l'enseignement des mathématiques en particulier a-t-il été géré durant la Pandémie au Sénégal. L'étude s'appuie sur l'approche documentaire du didactique et introduit la notion de distance documentaire pour analyser les ressources utilisées.

Eléments introductifs

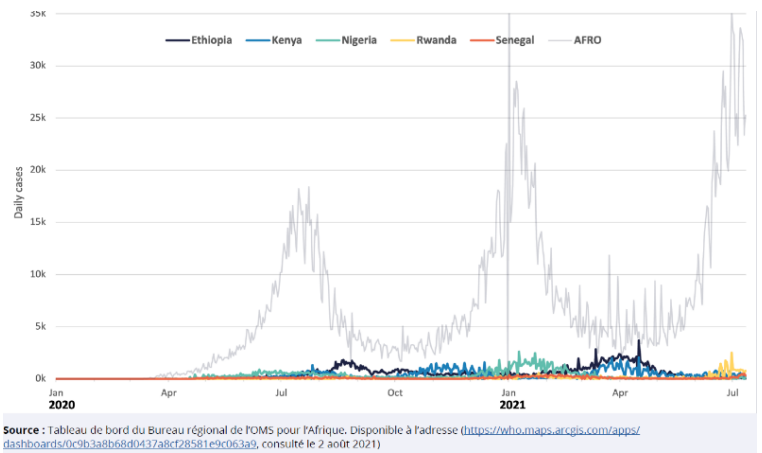


Figure 1. Cas confirmés quotidiens de COVID-19 dans la Région africaine de l'OMS (de janvier 2020 à juillet 2021)

6. Université Cheikh Anta Diop de Dakar – Sénégal– moustapha.sokhna@ucad.edu.sn
7. Université Cheikh Anta Diop de Dakar – Sénégal - sounkharou.diarra@ucad.edu.sn
8. Capacity and Networking Project (CANP) « Projet de capacité et de réseautage »
9. Faculté des Sciences et Technologies de l'Éducation et de la Formation (FASTEF)
10. Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques de la Physique et de la Technologie (IREMPT)

Au Sénégal, l'apparition de la Pandémie de Covid 19 s'est faite au moins deux mois après les premiers malades de Wuhan en Chine. Le premier patient est un ressortissant étranger, résidant du Sénégal, qui est rentré à Dakar le 26 février (https ://www.afro.who.int/fr/news/le-senegal-declare-le-premier-cas-de-covid-19). Bien que les cas ne soient pas si nombreux et les cas graves encore moins, les prévisions étaient très alarmistes pour l'Afrique. L'OMS avait émis beaucoup d'inquiétudes pour l'Afrique concernant la pandémie de COVID-19. Elle avait des craintes que des pays comme le Sénégal puissent être gravement touchés en raison de leur système de santé fragile et de ses ressources limitées. En 2021, la figure1 ci-contre devrait illustrer, selon les auteurs (OMS/AFRO 2021), que la COVID-19 continuait de représenter une grave menace pour la santé. La figure représentait les « Cas confirmés quotidiens de COVID-19 dans la Région africaine de l'OMS (de janvier 2020 à juillet 2021) ». Au Sénégal, voir la courbe en rouge, comparé aux pays du Nord, on ne pouvait pas dire que le nombre de cas par jour était alarmant. Malgré tout, le samedi 14 mars 2020, le gouvernement a pris 8 mesures dont celle relative à la fermeture des écoles et universités à partir du lundi 16 mars. Pour les acteurs de l'éducation au Sénégal, comme pour l'Unesco, la fermeture des écoles pourrait avoir des répercussions à long terme sur la qualité de l'éducation et sur la capacité des élèves à poursuivre leurs études. Au Sénégal, cette situation pourrait complexifier l'option de l'État de développer l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, des sciences et des technologies (PSE, 2018). En effet, au Sénégal, les évaluations du Programme international pour le Suivi des Acquis (PISA-D 2017) ont montré que 92.3% des élèves n'atteignent pas le seuil de compétences en mathématiques. Il s'y ajoute que, de 2016 à 2019, le taux de transition du Moyen général vers la seconde générale scientifique peine à dépasser les 16% (Diarra, 2022). Les apprentissages en Mathématiques font l'objet d'une forte préoccupation, compte tenu de l'écart entre leur importance stratégique en tant que facteurs de développement du capital humain et le peu d'attraction qu'ils exercent sur les élèves et les étudiants. Pour éviter les répercussions à long terme de la fermeture des écoles sur la qualité de l'éducation, l'UNESCO appelait à une coopération internationale pour aider les pays africains à augmenter leur capacité à fournir une éducation à distance appropriée. Les dispositifs de formation à distance devraient faciliter la continuité pédagogique et assurer l'égalité et l'équité de tous les élèves et étudiants dans les systèmes éducatifs. Paradoxalement, ils ont renforcé les inégalités et accentué l'iniquité. En effet, le Sénégal, selon les données de la banque mondiales, s'est classée 126e dans une comparaison internationale sur les vitesses de téléchargement Internet (Il est de 21,23 Mbit/seconde en moyenne pour l'Internet à haut débit sur le réseau fixe). Le Sénégal est également à la traîne en ce qui concerne l'accès à l'Internet à haut débit. 43% des habitants seulement ont accès à Internet et 1% possèdent leur propre connexion Internet à haut débit (plus de 256 kbit/s)[11]. Cette situation ne pouvait pas manquer d'élargir le fossé entre les pays comme le Sénégal et les Pays du nord mais aussi et surtout entre Sénégalais. La situation est d'autant plus complexe au Sénégal que, les salles multimédia pour les lycées et collèges sont concentrées dans les grandes villes généralement plus nanties en termes d'infrastructures et où les enseignants sont en général les plus expérimentés.

11. https://www.donneesmondiales.com/, octobre 2022 dans 180 pays

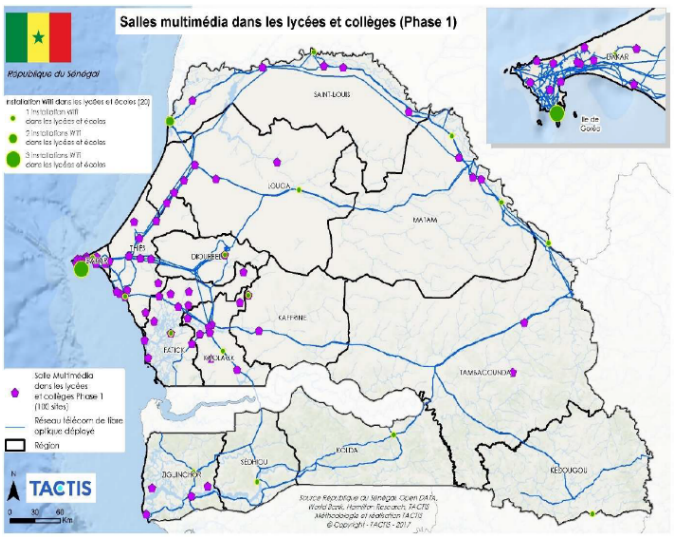


Figure 2. La situation au Sénégal des salles multimédia pour les lycées et collèges http://www.numerique.gouv.sn/mediatheque/documentation/plan-national-haut-d%C3%A9bit-du-s%C3%A9n%C3%A9gal).

Pour gérer cette situation et assurer la continuité pédagogique jusqu'à la réouverture des établissements, une chaine de télévision numérique « Apprendre à la maison »[12] est créée. Il est également laissé aux enseignants la liberté de s'organiser et de prendre des initiatives pour encadrer leurs élèves. Ils peuvent se mobiliser pour assurer une forme de tutorat à distance, par e-mail, WhatsApp ou Facebook[13]. Le Ministère qui semblait prendre conscience de cet état de fait dit privilégier l'impression des cours qui seront distribués aux élèves qui habitent dans des zones où il n'y a pas de connexion internet, voire pas d'électricité.

Une approche documentaire : distance documentaire

L'approche documentaire du didactique (Gueudet et Trouche 2008) peut être décrite autour de trois axes fondamentaux : la distinction entre ressources et documents, la médiation documentaire (Sokhna et Trouche 2015) et le processus de genèse documentaire (figure 3). Le processus de genèse documentaire est un concept relativement complexe. En effet, les ressources doivent être comprises comme un ensemble formé de fonctions constituantes définies par le ou les concepteurs des ressources et des modes opératoires.

12. https://canal.education.sn/home/videos/1/3 avec la vidéo hommage au Professeur Abdoulaye Gueye, décédé durant la covid https://www.youtube.com/watch?v=N9wG0w1YWU4&t=5s

13. https://www.jeuneafrique.com/922593/societe/senegal-les-bons-et-les-mauvais-points-de-lecole-a-distance-au-temps-du-coronavirus/

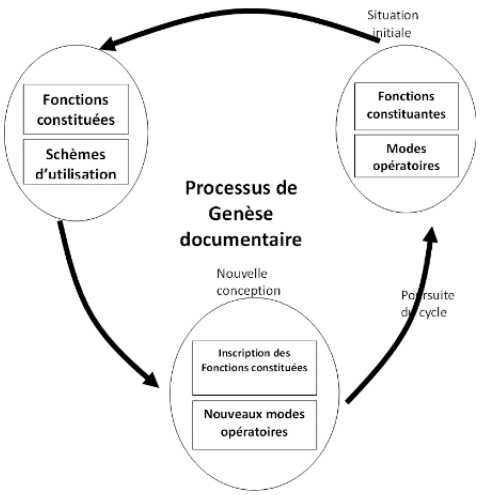


Figure 3. Le processus de genèse documentaire

Ce système, pour l'usager, donne naissance, pour une classe de situations, à des fonctions constituées avec des schèmes associés. Les ressources, au cours de ce processus appelé genèse documentaire, donne naissance à un *document avec une inscription des* fonctions constituées et de nouveaux modes opératoires. Le document se construit ainsi, progressivement, par et pour l'usager, à travers deux processus duaux : *l'instrumentation* (le processus qui fait émerger les fonctions constituantes des ressources) et *l'instrumentalisation* qui est liée au développement des fonctions constituées des ressources. L'approche documentaire vise à analyser l'activité de l'enseignant sur, avec, et pour les ressources. Dans ce processus se pose un problème à la fois écologique et médiateur. Pour le concepteur d'une ressource, les fonctions constituantes s'inscrivent dans un ensemble écologiquement viable et les modes opératoires ont un ancrage culturel idoine. Pour l'usager, intégrer cette ressource dans son système de ressources c'est créer dans un nouvel habitat des conditions de viabilité des ressources afin qu'elles soient médiatrices dans la nouvelle culture. Nous introduisons la notion de distance documentaire pour désigner la distance de l'habitat de la ressource dans sa culture d'origine, celle du concepteur, à celui du document, c'est-à-dire de l'habitat de l'usager. Nous faisons l'hypothèse que l'évolution de cette distance dépend d'une part des fonctions constituantes des ressources et des modes opératoires et, d'autre part, des fonctions constituées, des schèmes d'utilisation avec *une inscription dans la nouvelle ressource des* fonctions constituées et de nouveaux modes opératoires. Si, par exemple, une ressource sur la comparaison des décimaux conçue pour une classe de 6^{ième} est utilisée dans une autre classe de 6^{ième} du même établissement la distance documentaire peut être petite. Cette distance peut devenir plus grande si la même ressource doit être utilisée dans un autre pays à un autre niveau et avec programme différent.

Le 26 mai 2020, le Ministère de l'éducation nationale fait un communiqué pour informer les enseignants sur le redémarrage des cours et que des bus sont mis à leur disposition pour leur déplacement du 26 au 29 mai (*Communiqué de presse N° 0001465/MEN/SG/BS/AT* du 26 mai 2020). Les conditions de transport étaient telles que nombreux cas de covid étaient déclarés parmi les enseignants **https://www.emedia.sn/images-hallucinantes-du-depart-des-enseignants-faut-il-craindre-des-cas.html**. Le 1er juin, un autre communiqué est fait pour renvoyer la reprise à une date ultérieure (*Communiqué de renvoie de la reprise des cours N°0001480/MEN/CAB* du 1er juin 2020). Certains parmi les enseignants qui avaient fait le déplacement sont testés positifs et risquaient de propager le virus dans l'espace scolaire. Le 22 juin, après une deuxième reprise des cours, le ministre fait une circulaire sur le réajustement des programmes scolaires dans les classes d'examen (*Circulaire N° 00001592/MEN/SG/IGEF/als* du 22 juin 2020)). Il faut noter que la reprise des cours en présentiel ne concernait que les classes d'examen : les classes de CM2 (11- 12ans), les classes de troisième (15-16 ans) et les classes de terminales (18-19ans). Il faut également préciser que, compte tenu de la distanciation sociale, les classes étaient scindées en petits groupes. Les cours se faisaient par conséquent avec des effectifs réduits et les enseignants qui n'avaient pas de classes d'examen venaient en renfort. Seulement, en Mathématiques, il n'y a pas eu de réduction de programme. Le mardi 30 juin 2020, le Collège des Inspecteurs généraux de l'Éducation et de la Formation en Mathématiques rencontre le MEN et explique son désir de ne pas alléger le programme de mathématiques. Parmi les raisons évoquées, il faut noter l'absence de progression harmonisée au niveau national. Le collège de mathématiques ne serait pas alors à mesure de faire un choix sur les chapitres à élaguer. Une autre raison donnée par le collège est que les mathématiques étant une discipline cumulative, le fait de ne pas traiter certaines parties du programme pourrait porter préjudice aux candidats admis s'ils doivent poursuivre des études supérieures en Mathématiques. Après quelques semaines de cours, le deux septembre 2020, les examens et concours nationaux sont organisés sans allégement du programme de Mathématiques. Paradoxalement, après trois mois d'arrêt des cours, les résultats du baccalauréat étaient parmi les meilleurs des dix dernières années au Sénégal. Plus étonnamment, contrairement aux autres disciplines scientifiques pour lesquelles les programmes étaient allégés, en mathématiques, les notes étaient meilleures en 2020 et en 2021 (figure 4).

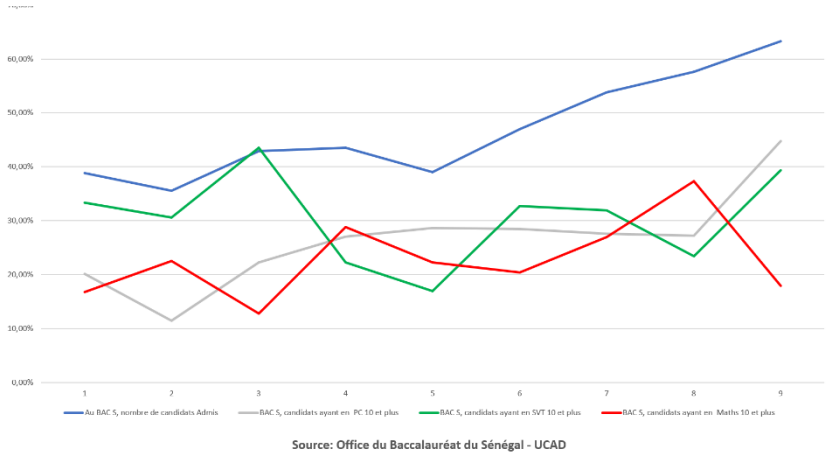


Figure 4. Évolution des effectifs des élèves ayant une note supérieure ou égale à 10 au baccalauréat de 2014 à 2022

Cette situation paradoxale interpelle plus d'un. Pour les besoins de cette étude, un questionnaire est fait et envoyé aux professeurs de Mathématiques du Sénégal. 143 enseignants répartis dans les 59 Inspections de l'Éducation et de la Formation ont répondu à ce questionnaire.

Interrogés sur ce qui pourrait expliquer pourquoi les résultats de ces examens de l'année 2019-2020 étaient jugés bons dans l'ensemble, les professeurs de mathématiques ont donné les réponses *à la figure 5* ci-dessous.

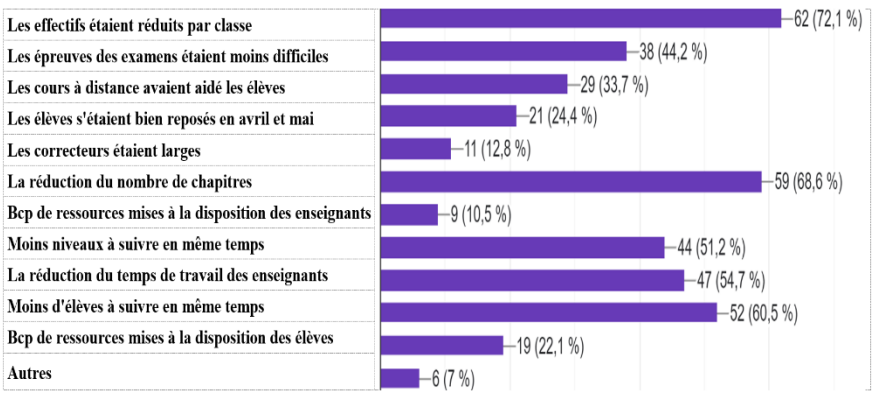


Figure 5. Réponses des enseignants sur la situation du covid

Parmi celles-ci, la plus fréquente est la réduction des effectifs. En effet, au Sénégal, il n'est pas rare d'avoir des classes de plus 70 élèves en situation normale. Il est donc compréhensible que les enseignants apprécient positivement le travail dans des classes à effectifs réduits. La réponse la plus paradoxale est en rapport avec les ressources que l'institution avait mises à la disposition des enseignants.

Moins de 15 % des professeurs de mathématiques interrogés ont considéré que les ressources mises à leur disposition ont impacté leur travail et les résultats des examens de l'année 2019-2020. Cette situation est intéressante pour étudier la notion de distance documentaire dans les dispositifs de formation à distance. On peut dire que la distance documentaire relative aux systèmes de ressources était grande. En effet, si les prérequis, les objectifs d'enseignement et les modalités d'organisation du scénario pédagogique de la ressource du ou des concepteur (s) ne sont pas très proches des conditions d'enseignement-apprentissage, on comprend pourquoi la distance documentaire de la ressource au document de l'enseignant soit assez grande.

Conclusion

Cette étude est troublante : elle a montré comment une situation relativement désorganisée a produit des résultats que l'on peut considérer bon en termes de nombre. Il est possible au moins de souligner que l'organisation des enseignements dans des classes normales (45 élèves par classe maximum) est un intrant de qualité. L'étude n'a analysé les cahiers de texte des enseignants et les cahiers des élèves pour étudier les distances documentaires d'une année à une autre pour le même enseignant. Suivant le niveau de qualification de deux enseignants en mathématiques ou suivant leur culture mathématique, l'étude pourrait comparer les distances documentaires.

Le Covid au Bénin : Obstacles rencontrés lors de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

EZIN[14]* Donatien - FANGNON[15]** Audrey - CHOGOU[16]*** Fréedy wangninan

Bonjour chers éminents enseignants et chercheurs. Le présent colloque qui devait avoir lieu en 2021 est une preuve incontestable des lourdes transformations qu'a subi le monde entier compte tenu de l'arrivée de cette Pandémie. Nous sommes en 2019, un virus nommé Corona Virus a fait son apparition. Comme une trainée de poudre, le virus s'est répandu aussi vite que la nouvelle de son apparition. Cette crise sanitaire sans précédent qui a frappé le monde entier a provoqué des mutations diverses dans tous les pans de la vie y compris le secteur éducatif. Au Bénin, les autorités ont su s'adapter à cette crise en prenant des mesures strictes pour éviter la propagation du virus.

Gestion de l'enseignement durant le COVID-19

Les activités scolaires arrêtées depuis le 30 mars 2020, ont repris le 11 mai 2020 mais sous certaines conditions selon le niveau d'enseignement. Au primaire, les écoliers de Cours Moyen 2ème année (CM2) ont bien repris à cette date dans la perspective de la tenue des évaluations de fin d'année. Par contre, les écoliers des classes de Cours d'Initiation (CI) au Cours Moyen 1ère année (CM1) retournent en cours du 10 août au 04 septembre 2020 soit un congé COVID de 5 mois environ. Cette reprise des cours a été conduite par un emploi de temps spécial élaboré par le Ministère de l'enseignement à la maternelle et au primaire qui résume les savoirs pédagogiques essentiels de chaque cours sur lesquels les enseignants devraient revenir. Ces écoliers subiront par la suite leur évaluation, du 07 au 11 septembre 2020, puis effectuerons la rentrée scolaire 2020-2021, le 28 septembre 2020 en même que tous les autres apprenants. En ce qui concerne les écoles maternelles et la garderie, elles sont restées fermées jusqu'à la nouvelle année scolaire 2020-2021. Dans l'enseignement [secondaire et] supérieur, les apprenants des collèges et lycées ainsi que les étudiants des universités reprirent le 11 mai 2020 comme prévu soit un congé COVID de six semaines environs.

14. * Jeune enseignant et chercheur, Université d'Abomey Calavi, Bénin - donatienezin@gmail.com

15. ** Jeune enseignant et chercheur, Université d'Abomey Calavi – Bénin - audreyfangnon@gmail.com

16. *** Jeune enseignant et chercheur, École normale d'instituteurs – Bénin - chogouwangninan@gmail.com

Mesures prises par les responsables

Durant cette catastrophe, le gouvernement du Bénin a sorti des mesures de prévention pour limiter la propagation de la pandémie. Parmi ses mesures de prévention nous avons entre autres: le cordon sanitaire, la distance de sécurité sanitaire (1 mètre), le port de masque, le lavage systématique des mains, l'interdiction de rassemblement de plus de 50 personnes … En plus de ces mesures de prévention, le ministère des enseignements secondaire, technique et de la formation professionnelle a adressé une lettre aux Directeurs départementaux des enseignements le 08 mai 2020 juste à la veille de la reprise des activités scolaires. Cette lettre contenait le guide des usagers de l'école ainsi que la fiche de bonnes pratiques pour les apprentissages. Le guide des usagers de l'école répond aux questions sur le comportement dans les écoles en ce temps de crise. Par ailleurs la fiche de bonne pratique quant à elle renferme les nouvelles mesures à adopter dans les collèges. Il s'agit entre autres de :

- Supprimer le travail de groupe et de prioriser le travail individuel et la plénière
- Eviter d'envoyer un apprenant au tableau
- Eviter de circuler dans la classe.
- Faire maintenir le masque aux apprenants
- Abaisser le masque pour parler aux apprenants
- Surveiller et favoriser l'expression des malaises éventuels
- Systématiser la manipulation individuelle des matériels de travail

D'autre part dans les universités publiques du Bénin, les cours ont repris le 11 mai 2020 mais ils ont été dispensés en ligne et les amphithéâtres sont restés fermés. A la date de cette reprise, le Ministère du Numérique et de la Digitalisation en collaboration avec le Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique ont procédé au lancement de la plateforme de E-learning (etudiant.bj), pour permettre aux étudiants des quatre universités publiques du Bénin (UAC[17], UP[18], UNA[19], UNSTIM[20]) de suivre les cours en ligne. Comment donc ces mesures ont-elles été mises en application sur le terrain ?

17. Université d'Abomey-Calavi
18. Université de Parakou
19. Université Nationale d'Agriculture
20. Université Nationale des Science, Technologies, Ingénierie et Mathématique d'Abomey

Application des mesures dans la réalité

A la reprise des cours dans les collèges, il a été difficile de mettre en application plusieurs des règles de prévention contre le COVID-19 énumérées précédemment. En effet, l'effectif pléthorique (en moyenne plus de 50 élèves) dans les classes et en plus le nombre insuffisant de tables bancs rendait déjà compliqué voir presque impossible le respect des gestes barrière. A titre d'exemple les apprenants sont très souvent obligés de s'assoir à trois sur une même table banc. Le nombre de cache-nez et de lave-mains, quant à eux, ne permettait pas de couvrir le besoin des établissements. Quant à l'enseignement supérieur, les cours en live se déroulaient pour la plupart sur l'application zoom qui nécessite l'achat d'un forfait internet. Le coût de ce dernier était beaucoup trop élevé pour des étudiants qui désormais pour suivre un cours de 4h doivent acheter un forfait internet qui dépasse de trois fois le coût de leurs repas quotidien. Le réseau WiFi des universités, quant à lui, n'était pas suffisamment puissant pour permettre à plusieurs centaines d'étudiants de se connecter simultanément et de suivre les cours en live. De plus les cours en ligne étaient une nouvelle technologie à laquelle plusieurs enseignants et étudiants n'étaient pas habitués. Cela a rendu la transition difficile. A la faculté des Sciences et Technique de l'université d'Abomey-Calavi, ce fut un véritable calvaire pour la plupart des étudiants dont nous-même.

Impact sur l'enseignement et les modes d'apprentissage

Dans les lycées et collèges du Bénin, les apprenants n'étaient pas psychologiquement préparés à reprendre les mêmes cours après un si long moment de détente, et d'autre part, ils ont eu le temps d'oublier une bonne partie des notions déjà apprises. Tout cela a rendu difficile l'installation de nouvelles connaissances dépendantes de connaissances déjà enseignées avant les congés COVID. C'est le cas par exemple en mathématiques où pour faire comprendre une nouvelle notion, il fallait revenir sans cesse en arrière pour expliquer les notions déjà enseignées qui sont nécessaires pour l'acquisition de cette nouvelle connaissance mais qui sont oubliées par les apprenants. Les conséquences sont vraiment lourdes. En effet le temps accordé étant insuffisant pour enseigner toutes les notions au programme, les apprenants n'ont donc pas eu la chance de connaître tout ce qu'ils devraient connaitre avant la fin de l'année scolaire. Ceux qui sont passé en classe supérieure gardent des lacunes qui les empêchent de comprendre les nouvelles notions des classes supérieures. D'un autre côté, les stratégies de l'approche par compétence ne sont plus respectées compte tenu des recommandations du ministère de tutelle. Les apprenants ne parviennent donc plus à construire leur savoir comme l'exige l'Approche Par Compétence (APC). Ces recommandations constituent donc un handicap pour l'enseignement/apprentissage.

Impact sur les résultats des apprenants

Les résultats obtenus lors de l'année scolaire 2019-2020 ne reflétaient pas le niveau réel des apprenants. En effet les programmes d'étude n'étant pas achevés, on ne peut donc dire qu'un apprenant qui passe en classe supérieure a vraiment le niveau. Les apprenants étaient démotivés et le respect des gestes barrière contre le COVID-19 était encore plus stressant pour eux. Cela a conduit à des résultats médiocres dans la plupart des classes. Mais certains collègues mathématiciens ont confessé qu'ils ont revu les niveaux de difficulté des épreuves afin d'avoir un bon taux de réussite.

Conclusion

Somme toutes, le gouvernement du Bénin a fait son possible pour limiter la propagation du COVID mais les réalités du terrain ont rendu moins efficaces ces mesures de protection.

La continuité pédagogique en temps de crise sanitaire : quelles perspectives pour l'enseignement et l'apprentissage mathématiques en temps (plus) ordinaire?

COULANGE[21]* Lalina

Le lundi 16 mars 2020, l'Ecole française débute un épisode inédit de son histoire. Pendant huit semaines, l'école se fait « à distance » pour 12 millions d'élèves restés à la maison suite à la mise en place du confinement. Le dispositif d'enseignement mis en place est alors qualifié de « continuité pédagogique » par le ministre de l'éducation nationale de l'époque.

Mon propos s'appuie sur les résultats de deux enquêtes conduites auprès d'enseignants français au sujet de la mise en œuvre de cette « continuité pédagogique ». La première d'entre elles concerne des enseignants de mathématiques au collège (élèves de 11 à 15 ans) : nous avons recueilli les réponses de 410 enseignants à un questionnaire portant sur les pratiques d'enseignement des mathématiques pendant l'épisode de confinement (Coulange, Stunell et Train, 2021 ; Coulange, Stunell et Train, 2022). La deuxième d'entre elles s'inscrit dans un projet de recherche, le GTNum PLEIADE[22]. Elle a permis de recueillir les réponses de 859 enseignants de primaire (maternelle et élémentaire : élèves de 2-3 ans à 11 ans) sur leurs pratiques d'enseignement à distance ou sur ce que celles-ci pouvaient recouvrir du point de vue de focales plus spécifiques (usages de la classe virtuelle, relations avec les parents …). Cette deuxième enquête a permis d'associer à ce premier volet quantitatif, un volet plus qualitatif d'étude des pratiques effectives d'enseignants (filmés à l'occasion d'épisode de « classe à distance »).

Un premier constat qui émerge des deux études quantitatives conduites auprès de deux publics d'enseignants différents est que les inégalités sociales constituent un facteur qui a fortement pesé sur les pratiques d'enseignement mise en place dans le cadre de la continuité pédagogique. Ainsi, dans l'enquête concernant les professeurs de mathématiques au collège, la tendance globale constatée à privilégier l'enseignement de notions anciennes ou déjà abordées au détriment de l'enseignement de nouvelles notions est accentuée pour un profil de pratiques enseignantes en particulier (parmi les quatre profils ressortant de l'analyse statistique) : celui qui regroupe davantage d'enseignants déclarant s'adresser à des publics d'élèves issus d'un milieu social défavorisé (Coulange, Stunell et Train, 2021). Les enseignants regroupés dans ce même profil déclarent également ne pas accorder beaucoup (voire pas du tout) de temps aux exercices de recherche. Dans l'enquête concernant les

21. * Professeure - Université de Bordeaux, Laboratoire Epistémologie et Didactique des Disciplines - lalina.coulange@gmail.com

22. Ce projet a été porté par le CIRCEFT (UPEC), la DANE de Créteil, avec le soutien du Bureau à l'innovation numérique et à la recherche appliquée du Ministère (MENJS-DNE-TN2).

enseignants du primaire, ce sont également deux profils (parmi les quatre profils ressortant de l'analyse statistique) regroupant les proportions plus grandes d'enseignants exerçant dans des écoles en éducation prioritaire qui déclarent accorder davantage de place aux révisions. Pour ces deux mêmes profils d'enseignants du primaire, se pose aussi la question du rôle joué par les parents. Il semble majoritairement avoir été perçu comme délicat à gérer pour un de ces deux profils et peut-être est-il même apparu comme « déserté » pour le second[23]. Les résultats de ces deux enquêtes convergent donc pour partie sur un premier fait : l'avancée du temps d'enseignement et d'apprentissage a été plus fortement impactée dans la mise en œuvre de la continuité pédagogique, auprès des publics d'élèves issus de milieux socialement défavorisés. Les réponses données au rôle joué par les parents dans l'enquête adressée aux enseignants du primaire interrogent également les conditions du travail personnel des élèves et de son accompagnement par différents acteurs, parents et/ou enseignants dont les modalités semblent avoir été particulièrement questionnées pendant l'épisode de confinement.

A ce sujet, à partir des données de l'enquête adressée aux enseignants de mathématiques pendant le confinement, nous avions mis en avant l'existence de « bulles de créativité » parfois investies par les enseignants de mathématiques au collège. Les pratiques « inédites » (déclarées ou données à voir comme telles) par les enseignants visent à aménager des nouvelles conditions de régulation du travail personnel des élèves « à distance ». Celles-ci ont pu prendre des formes variées : allant de sondages d'expression à renseigner en ligne sur le travail donné à faire (*« la fiche (…) t'a-t-elle paru facile, moyennement facile, plutôt difficile, très difficile ? »*) à des capsules vidéo dédiées à la correction d'un exercice (plus qu'à une leçon), etc. Notons d'ailleurs que le numérique semble avoir été davantage investi pour accompagner le travail personnel des élèves, qui lui restait souvent éloigné d'usages des outils numériques, pourtant considérés comme « classiques » (logiciels de géométrie dynamique, tableurs, environnement de programmation…) au collège. Est-ce à dire que les collégiens français sont finalement rendus assez peu autonomes dans leurs usages personnels de ces outils numériques ?

Non sans lien avec la question posée ci-dessus, on peut faire l'hypothèse que l'étude des pratiques enseignantes « en temps de crise sanitaires » peut contribuer à révéler certains aspects des pratiques enseignantes ou de leurs effets « en temps ordinaire ». C'est sans doute là que le volet plus qualitatif de l'enquête conduite auprès d'enseignants du primaire peut s'avérer particulièrement informatif. En effet, les matériaux de cette enquête contribuent de notre point de vue à révéler des malentendus socio-cognitifs qui avancent souvent masqués dans un contexte plus ordinaire d'enseignement. Par exemple, une tâche aux contours quelque peu inédits, sur les fractions données à distance à des élèves de CM1 et de CM2 donne à voir des malentendus sur des représentations circulaires de ces fractions. Ou encore, les difficultés rencontrées par un élève de maternelle pour produire la ré-

23. Ce profil minoritaire regroupe par ailleurs une proportion importante d'enseignant exerçant en maternelle, dans un contexte d'éducation prioritaire. Ces enseignants déclarent avoir été peu voire pas du tout été sollicités par les parents – tout en qualifiant assez négativement les relations vécues avec les parents pendant cette période.

ponse attendue à une tâche proposée avec des modalités d'interaction différentes (situation duale d'étayage à distance), peuvent nous en apprendre sur les conditions de conceptualisation du nombre et des quantités à l'école. Une ressource intitulée « ce que l'extraordinaire du confinement révèle des difficultés ordinaires » (produite par l'équipe de chercheurs didacticiens et sociologues impliquée dans ce projet) a d'ailleurs été produite et rendue accessible récemment sur le site du Centre Alain Savary – IFE : http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/travail-personnel-de-leleve/ce-que-lextraordinaire-du-confinement-revele-des-difficultes-ordinaires.

Ainsi, peut-on penser qu'il y aurait de « bonnes » leçons à tirer de la crise (sanitaire) pour répondre à une autre crise (scolaire).

Passage à l'enseignement à distance pour la période de mars à juin 2020 : Survol des pratiques déclarées d'enseignement et d'évaluation d'enseignant.e.s du primaire (élèves de 6 à 12 ans) et d'enseignant.e.s du secondaire (élèves de 12 à 17 ans)

TREMBLAY[24]* Mélanie

Au Québec, province canadienne qui compte plus de 8,5 millions d'habitants, l'état d'urgence sanitaire associée à la propagation du SARS-CoV-2 a été déclaré le 13 mars 2020, soit deux semaines après la semaine traditionnelle de congé de classe (semaine dite de relâche) planifiée dans les établissements scolaires québécois. Pendant plus d'un mois, différentes mesures, dont la fermeture des établissements scolaires, ont été annoncées par le premier ministre François Legault. D'abord planifiée comme une période de deux semaines, elle fut qualifiée par le ministre de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES), M. Jean-François Roberge, comme une période de « vacances » pour les élèves et personnes étudiantes. La présente communication exposera dans un premier temps différentes mesures mises en place au Québec afin de favoriser le retour à l'école. Des résultats issus de notre étude (Tremblay et Delobbe, 2021) sur les pratiques déclarées de 311 personnes enseignantes en mathématique permettront d'éclairer différents enjeux relativement à l'accessibilité des technologies pour tous, le développement d'une expertise chez les enseignant·e·s dans l'intégration des technologies d'où pourrait découler un enseignement favorisant la participation des élèves et le recours à leur contribution pour faire avancer les apprentissages de la classe.

Une variété de mesures dont l'enseignement à distance

Motivé ou non par l'incapacité de certains foyers à se connecter à l'Internet à la maison, l'enseignement à distance (ED) n'avait initialement pas été évoqué par le ministre. Le 28 mars 2020, trois mesures seront annoncées pour favoriser la poursuite des apprentissages à la maison sans qu'elle ne soit obligatoire :

1. l'École ouverte, un site Web proposant une variété de ressources ou d'activités ludiques classées selon les différents niveaux du primaire et du secondaire, par discipline ou selon les différentes dimensions de la compétence numérique ;

2. la réalisation et la diffusion de capsules éducatives et d'activités animées en partenariat avec la chaîne à vocation culturelle et éducative, Télé-Québec, propriété du gouvernement;

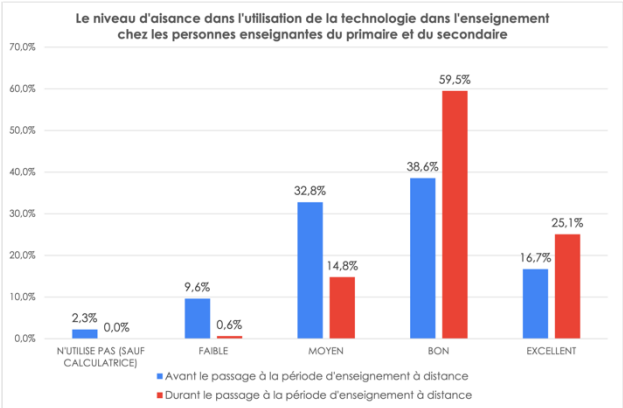
24. * Professeure – Université du Québec à Rimouski (campus Lévis) - melanie_tremblay@uqar.ca

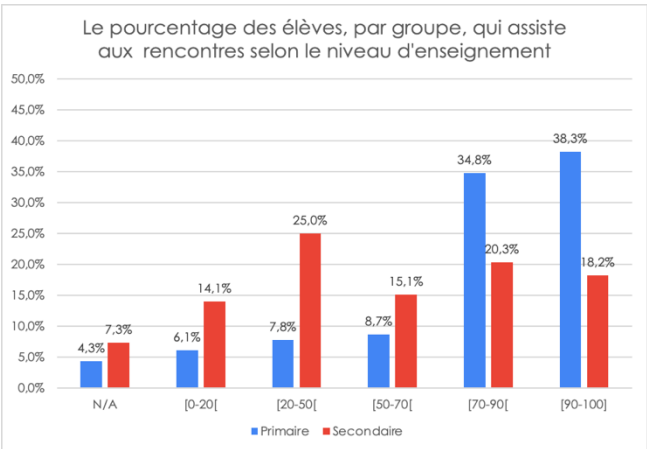
3. la conception et la mise à la disposition aux centres de services scolaires de trousses pédagogiques développées par le MEES.

Le 27 avril, dans son plan de retour en classe graduel, le ministre propose une réouverture des écoles primaires le 11 mai. Elle n'aura toutefois jamais lieu pour les écoles situées sur les territoires de la communauté métropolitaine de Montréal et de la municipalité régionale de comté de Joliette, dû au manque de contrôle de la propagation dans ces régions. Au secondaire, le repositionnement du ministre sur « l'obligation de poursuivre la scolarisation » favorise désormais l'accompagnement par le personnel enseignant et non enseignant des élèves, notamment, ceux ayant des besoins particuliers, en difficulté ou en situation d'échec. Cet accompagnement demeure toutefois sous la forme de l'ED pour la grande majorité des élèves de cet ordre. Pour les élèves qui n'ont pas accès à l'Internet ou qui ne disposent pas de ressources matérielles pour y accéder, des prêts de matériel informatique sont annoncés. Ce plan s'accompagne de différentes offres de formation sur l'ED pour tout le personnel enseignant, du préscolaire à l'université, offerte par l'Université du Québec (TÉLUQ, Cadre21, Récit, École en réseau…) Le 11 mai, plus de 70 % des élèves des ordres préscolaire et primaire reviennent en classe. L'ED, sous ses modalités synchrone et asynchrone, devient la formule d'enseignement pour tout le corps enseignant du secondaire et pour plusieurs enseignant·e·s du primaire qui assurent les apprentissages des élèves demeurant à la maison. Pour le corps enseignant, ce passage forcé à l'ED engendre un bouleversement important des pratiques enseignantes, incluant celles relatives à l'évaluation. Ce défi s'accompagne d'un enjeu d'engagement et de participation chez les élèves dû à la reconnaissance de la réussite de l'année scolaire pour ceux qui avaient déjà un résultat supérieur à 60 % aux deux premières étapes.

Esquisse de l'enseignement à distance offert : possibilités de participation et enjeux

La conception et les connaissances de la discipline enseignée, les connaissances et habiletés technologiques des personnes enseignantes teintent leur expertise pédagogique (*Dennen et al.*, 2018). Cela nous semble d'autant plus vrai lorsqu'il s'agit d'approcher les pratiques d'ED. La suite de notre propos s'appuiera sur des résultats issus d'un questionnaire administré, en juin et juillet 2020, auprès de 311 répondant·e·s (115 sont des enseignant·e·s au primaire et 192 sont des enseignant·e·s au secondaire). Neuf enseignant·e·s ont été rencontrés pour réaliser les entretiens d'explicitation.

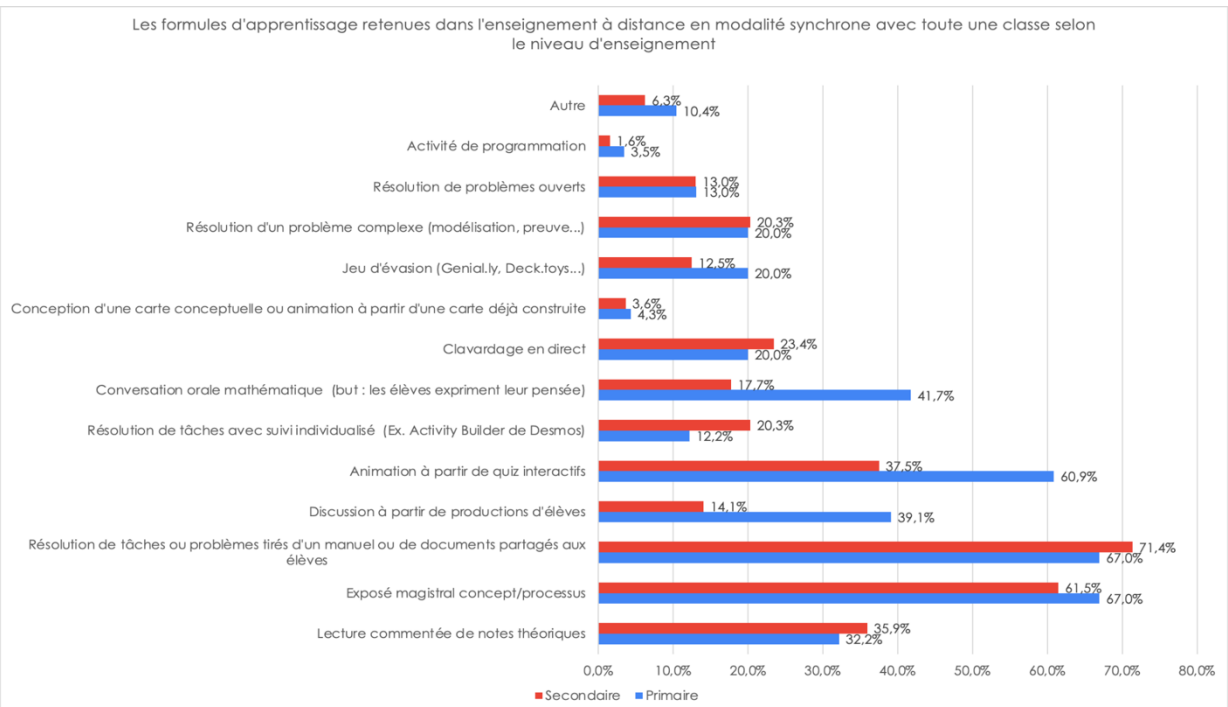




Au passage forcé à l'ED le niveau d'aisance des personnes enseignantes intervenant en mathématique était jugé « bon » ou « excellent » par plus de la moitié des personnes répondantes (56,1% au primaire ; 54,7% au secondaire). Sans surprise, en juin 2020, plus 84% s'attribuent ces mêmes niveaux d'aisance. Malgré tout, 82% des répondants intervenant au primaire et 68 % de ceux du secondaire mentionnent que le niveau d'aisance dans le recours aux technologies demeure un enjeu important, notamment lorsqu'il s'agit d'orchestrer des situations qui favoriseront la participation des élèves. Autre enjeu important relevé par 58% des personnes enseignantes au primaire et pour 68% des personnes enseignantes du secondaire est le pourcentage d'élèves qui assiste aux rencontres. Au chapitre des modalités d'enseignement, tant chez les personnes enseignantes intervenant au primaire (82,6% d'entre eux) que pour ceux intervenant au secondaire (91,7%), une combinaison d'enseignement synchrone à distance et d'enseignement asynchrone a été privilégiée. Au primaire, 12,2% des répondants ont retenu l'enseignement synchrone, moins de 5% des autres de cet ordre indiquent avoir privilégié la modalité d'enseignement asynchrone. Au secondaire, c'est plutôt la modalité asynchrone qui a pris le second rang pour 7,3% des répondants ; 5,7% de ceux-ci ont recouru à la modalité synchrone. Nous souhaitions évaluer le taux de participation des élèves aux séances d'ED synchrone.

Si les élèves du primaire étaient majoritairement présents à ces séances, on observe une variabilité importante chez les élèves du secondaire. Le quart des enseignants ont ainsi mentionné qu'entre 20 à 50% de leurs élèves étaient présents alors que seulement 18,2% des enseignant·e·s ont mentionné que plus de 90 % de leurs élèves assistaient aux séances. Parmi les justifications évoquées de ces absences, lors d'entretiens menés auprès des enseignant·e·s, les difficultés de connexion à l'Internet, la nécessité de répondre aux besoins à combler sur le marché du travail et la réussite déjà annoncée par le ministre de l'Éducation furent évoqués. Ces résultats doivent être interprétés en tenant compte que pour plus de 70% des enseignantes du primaire comme du secondaire, l'enjeu premier aura été l'accessibilité

Les pratiques d'enseignement au primaire et au secondaire sont déjà reconnues comme étant variées. Elles oscillent entre des formules centrées sur l'élève, où l'avancement des connaissances s'appuie sur les productions et idées de chaque apprenant·e, et des formules où l'enseignant·e, à l'aide d'exposés magistraux, introduit les savoirs. L'identification des formules pédagogiques utilisées par les enseignant·e·s en modalité synchrone (l'enseignant·e échange en temps réel, par visioconférence ou par clavardage avec ses élèves) permet d'approcher les activités mathématiques vécues par les élèves.



Ces résultats laissent entrevoir que la fin de l'année scolaire 2019-2020 a été consacrée à une appropriation des technologies pour assurer la mise en place d'une classe virtuelle. Sans surprise, on observe peu de formules pour lesquelles un outil facilite la collecte des contributions des élèves. Celles-ci ont pu être recueillies oralement à la suite d'un questionnement de l'enseignant·e et, dans une moindre mesure, sous forme écrite, par le biais de quiz interactifs ou encore, grâce à un environnement tel que *Desmos* ou *GeoGebra Classroom*. Grâce à ces outils, l'enseignant·e peut visualiser en temps réel les productions et la progression des élèves. Davantage utilisés au secondaire, seulement 20% des personnes répondantes mentionnent y avoir eu recours.

Les formules retenues peuvent conduire ou non à l'exploitation des idées ou procédures de résolution des élèves. Pour cette première période d'ED, les résultats recueillis montrent une participation plus grande des élèves du primaire ; au secondaire, 35% des personnes répondantes admettent avoir pas un peu sollicité l'expression du point de vue des élèves, soit entre 0 à 20% du temps d'une séance. Dans une question complémentaire, 61% de ces mêmes répondants avancent que leurs élèves étaient en posture d'écoute durant plus de 70 % du temps de la séance.

Pour conclure … Des enjeux à considérer

Outre l'accès au réseau Internet et la disponibilité des ressources, le passage non-planifié à l'ED a mis en lumière divers enjeux déjà évoqués dont les compétences pédagogiques des personnes enseignantes à recourir aux technologies pour favoriser la participation des élèves. Cela n'est pas sans conséquence puisque près de 70% des personnes aux deux ordres identifient d'ailleurs comme enjeu important l'impression d'avoir mis de l'avant une compréhension de surface axée sur l'apprentissage de procédures plutôt qu'une compréhension en profondeur. La participation variée des élèves aux séances d'enseignement synchrone a eu des impacts colorant même l'évaluation des acquis des élèves. Bien que l'exercice du jugement évaluatif fût principalement porté sur la maîtrise des savoirs jugés essentiels par le ministère et dans une moindre mesure sur les trois compétences mathématiques, 43,5% des personnes enseignantes du primaire et 52% des personnes enseignantes au secondaire admettent avoir tenu compte de la participation des élèves aux séances et même des efforts fournis lors de celles-ci (41% au primaire ; 59% au secondaire) dans l'exercice de leur jugement. De plus, la tricherie est un enjeu retenu par 73% des personnes enseignantes au secondaire. La possibilité de faire encore appel à l'ED motive la nécessité de s'attarder aux enjeux reconnus par les enseignant·e·s de manière à réduire les inégalités repérées.

Thématique 2

Enseignement et apprentissage des mathématiques dans un contexte de pandémie : un effet bénéfique ?

La pandémie a plongé le monde entier, et particulièrement le monde de l'éducation dans une réflexion sur les mesures de la pandémie, la conception et l'analyse des données et des courbes, les aspects probabilistes, effets des mesures de précaution, traitements et vaccins, etc. Toutes ces notions ont un attachement intrinsèque avec les mathématiques. En outre, les données relatives à la pandémie constituent un contexte propice à une réflexion sur les mathématiques, leur place dans la société et dans l'enseignement, les contenus à sélectionner et la manière de les approcher, etc. Finalement, l'évaluation des apprentissages mathématiques sous ses diverses formes a dû être revue et de nouvelles formes d'évaluation ont émergées. Les questions suivantes ont été proposées aux intervenants :

L'image des mathématiques a-t-elle été modifié suite à la pandémie ? Comment ?

Quels sont les concepts mathématiques les plus utilisés dans ce contexte pandémique ?

Ces usages sont-ils liés à cette pandémie ; aux pandémies ? Ont-ils un rôle explicatif ; justificatif ?

Les mathématiques peuvent-elles approfondir la compréhension par le grand public du fonctionnement d'une pandémie ?

L'enseignement des concepts mathématiques peut-il jouer un rôle civique ?

Y aurait-il des concepts dont l'introduction dans le curricula mathématique se justifie suite à la pandémie ?

Quelles sont les modalités d'apprentissage propices aux mathématiques dans un contexte pandémique ?

Comment les données numériques relatives à la pandémie peuvent-elles être exploitées pour illustrer des notions mathématiques ?

Le recours aux technologies, a-t-il permis de dépasser ou de répondre aux contraintes liées à l'enseignement des mathématiques ?

Quels mécanismes ont été mis en place lors de l'évaluation et pour assurer une différentiation et un soutien aux apprenants en difficultés en mathématiques ?

Trois présentations composent le contenu de cette thématique. Elles sont assurées par :

- Pierre Arnoux de France,
- Arnaud Inhe de Suisse.
- Mélanie Tremblay du Québec, Canada

Enseigner au temps du Covid et utiliser le Covid pour enseigner

ARNOUX[25]* Pierre

Au début de 2020, j'étais chargé de l'enseignement d'un groupe de soutien en première année de licence de mathématiques, quand on a appris qu'à partir de la semaine suivante, tout l'enseignement se ferait à distance. J'étais en train d'aborder les suites, qui posaient visiblement des problèmes, et je me suis dit qu'un enseignement purement formel, à distance, avait peu de chances de succès. Comme à l'époque toutes les informations parlaient de la croissance exponentielle du nombre de cas, j'ai pensé rendre l'enseignement plus concret en envoyant les étudiants regarder quelques sites, comme celui de l'hôpital John Hopkins, et en leur demandant si les suites qu'on y trouvait étaient géométriques. A notre rendez-vous suivant, je leur ai demandé quels résultats ils avaient obtenus : ils m'ont tous répondu qu'ils n'avaient trouvé aucune suite! Après 10 minutes de discussion, il s'est avéré qu'ils avaient cherché u_n dans tout le site, et qu'ils ne l'avaient évidemment jamais trouvé ; aucun d'entre eux n'avait réalisé que le nombre de cas donné pour chaque jour constituait un début de suite... Et je me suis dit que mon enseignement du début de semestre n'avait eu aucun sens pour eux.

Des modèles élémentaires

J'ai réorienté mon cours en leur montrant que toutes les données qu'on trouvait sur ces sites internet (nombre de cas, nombre de victimes, nombre de personnes guéries...) constituaient autant de suites, avec la date pour index, et qu'on pouvait trouver des relations entre ces suites: si on note u_n le nombre de cas déclarés au jour n, et v_n le nombre total de cas depuis le début de l'épidémie jusqu'au jour n, alors $u_n = v_n - v_{n-1}$; en particulier, u_n est une suite positive d'entiers, et v_n est une suite croissante (ce qui ne leur paraissait pas évident au début). On a pu aussi constater que la plupart des sites donnaient des représentations graphiques de ces suites, et que ces représentations pouvaient être au choix en coordonnées linéaires ou logarithmiques (ce qui est à ma connaissance une première pour un site grand public); ces changements de coordonnées permettaient de voir diverses propriétés du développement de l'épidémie. Pour essayer de comprendre un peu comment se développe une épidémie, je leur ai proposé de jouer sur tableur avec divers types de modèles.

25. * Université d'Aix-Marseille et Institut de Mathématiques de Marseille – France – pierre@pierrearnoux.fr

Des modèles linéaires

Le premier modèle était un modèle linéaire : chaque malade contamine une personne le premier jour, une autre le deuxième jour, puis guérit. L'épidémie commence avec un seul malade. Ce modèle se programme très facilement, et on constate tout de suite que le nombre de malades est donné par la suite de Fibonacci, dont on vérifie expérimentalement qu'elle est approximativement géométrique, de raison le nombre d'or. Il n'est pas très difficile de prouver cela de façon rigoureuse, et c'est une bonne introduction à l'algèbre linéaire. On peut ensuite modifier le modèle en ajoutant des paramètres : chaque malade contamine *a* personnes le premier jour, et β personnes le second. On peut jouer avec le modèle, et chercher à quelle condition une épidémie se déclenche ; on trouve assez rapidement que la condition est que α+ β>1 (c'est le fameux coefficient R_0), et c'est assez facile à prouver. On peut aussi augmenter le nombre de jours que dure la maladie, pour accroître la dimension du problème, et aborder de cette façon une large partie de l'algèbre linéaire, suivant le niveau des étudiants. On peut aussi leur demander si ce modèle est réaliste, et ils comprennent tout de suite que non, puisqu'un tel modèle donne très rapidement dix milliards de malades... On peut alors chercher à compliquer un peu les choses, pour pallier ce manque de réalisme.

Un modèle logistique : une épidémie de zombies

Si le modèle linéaire n'est pas réaliste, c'est d'abord qu'il ne prend pas en compte la finitude de la population ; on peut donner un modèle très simple d'une épidémie de zombie, qui est incurable, et où le nombre de nouveaux cas est proportionnel à la fois au nombre de zombies, et au nombre de personnes saines, ce qui donne un accroissement non linéaire. Il n'est pas difficile dans ce cas de prouver rigoureusement que le nombre de zombies croît, et que le nombre de personnes saines décroît et tend vers 0; on retrouve des raisonnements typiques d'analyse. Bien entendu, ce modèle d'une maladie incurable ne correspond pas à la réalité ; mais il n'est pas difficile de le modifier pour plus de réalisme.

Des modèles SIR

Il suffit de rajouter une équation de guérison des malades, qui sont désormais immunisés, et on trouve le fameux modèle SIR, avec le pic épidémique dont on peut calculer la hauteur ; il n'est pas très dur de montrer qu'avec un tel modèle, on a un démarrage quasi-exponentiel, suivi d'un pic, puis d'une extinction de l'épidémie. On peut modifier ce modèle de base, pour rajouter par exemple une perte d'immunité, qui donne des vagues successives, ou des variants avec des contagiosités différentes ; ces divers modèles peuvent être étudiés de façon rigoureuse, ce qui donne une excellente initiation à l'analyse.

Des modèles continus

Tous ces modèles sont discrets : il est en général plus facile aux étudiants de manipuler des suites que des fonctions. Mais on peut aussi sans problème donner des modèles continus, basés sur des équations différentielles, et montrer que les modèles discrets correspondent en fait au calcul numérique des solutions de ces équations différentielles (méthode d'Euler); certains d'entre eux (modèles linéaires et logistiques) peuvent être résolus explicitement, mais pas le modèle SIR.

Conclusion

On voit que, à partir de ces exemples, on peut traiter une large partie du programme de mathématiques, simplement pour répondre aux questions qui se posent naturellement dans ces modèles ; ce travail a d'ailleurs été repris pour donner l'un des chapitres d'un document d'enseignement pour l'option de Mathématiques Complémentaires des nouveaux programmes de terminale français, voir Arnoux, P. et Le Payen Poublan, V. (2022). J'ajouterai trois remarques :

1. La première, c'est que dans un tel contexte, les notions prennent bien plus de sens pour les étudiants, et qu'ils ont semblé trouver le cours bien plus facile que les autres années.

2. La seconde, peut-être plus importante, c'est que, quand nous avons discuté des conséquences de tels modèles, par exemple pour les vaccins, la discussion a été complètement différente de ce que j'avais vu dans d'autres environnements, et je n'ai entendu aucun argument conspirationniste ; en particulier, il était clair pour eux que la présence d'une large proportion de personnes immunisées change radicalement la dynamique de l'épidémie (bien que je n'aie jamais fait de remarque à ce sujet). Il me semble que, sur un tel sujet, l'enseignement mathématique peut jouer un rôle civique important.

3. La troisième, c'est que cet enseignement marche bien parce que ces modèles sont simples, et construits par des petites modifications à partir d'un modèle de base, ce qui permet aux étudiants de se les approprier complètement : il n'y a pas de «boite noire». Un défaut de ces modèles, c'est qu'ils sont tous déterministes : il serait très intéressant de construire des modèles probabilistes, mais je n'ai pas encore réussi à en faire un qui soit programmable par des étudiants de première année.

Enseignement de de l'évaluation des mathématiques à distance au secondaire (12-17 ans) au Québec durant la Covid-19 : Enjeux et défis comme prétexte de réflexion sur le présent et l'avenir

TREMBLAY[26*] Mélanie

La présente communication fait écho à notre présentation réalisée dans le cadre de la première thématique *État des lieux des modalités de gestion de la pandémie dans l'Espace mathématique francophone*. À partir de l'étude des pratiques déclarées d'enseignement et d'évaluation des mathématiques réalisée grâce à une collecte de données en juin et juillet 2020 (Tremblay & Delobbe, 2021), nous avons esquissé un portrait de l'enseignement et y avons dégagé quelques enjeux associés au passage non-planifié à l'enseignement distance (ED) en mathématique chez 311 personnes enseignantes du primaire et du secondaire. Cette présentation expose d'abord des résultats issus de cette même étude qui portent sur les objets et modalités d'évaluation. S'en suit une discussion de résultats issus d'une recherche-action ÉCRAN (Évaluation collaborative réussie des apprentissages par le numérique) amorcée au cours de l'année scolaire 2020-2021, en collaboration avec deux équipes enseignantes en mathématique au secondaire, alors que les mesures associées à la pandémie ont conduit à une alternance de cours en présence et à distance.

Rendre compte des acquis ? Ou l'exercice ardu du jugement évaluatif en juin 2020

Le processus d'évaluation doit s'assurer de répondre à l'objectif d'évaluation fixé préalablement. Il faut ainsi que l'enseignant·e planifie la nature des apprentissages visés, la façon de les évaluer et à quoi serviront les informations recueillies. L'approche par compétences promue dans le programme québécois encourage (MEQ, 2001) la prise en compte de l'expression d'un savoir-agir en situations. Considérant cela, les tâches d'évaluation dites complexes sont préconisées. Si les informations recueillies sur les apprentissages des élèves peuvent être obtenues de diverses façons et porter sur des contenus mathématiques de nature différente, leur interprétation peut, elle aussi, se réaliser selon différents procédés (Scallon, 2004). Dans le contexte scolaire, une interprétation basée sur des critères qui sont définis dans le programme est usuellement mise de l'avant.

À la fin d'année scolaire 2020, la réussite scolaire avait déjà été confirmée aux élèves dont les résultats étaient supérieurs à 60 % pour le ministre. Le taux d'absentéisme étant grand au secondaire, plus de 40 % des personnes enseignantes expriment avoir formulé des critères autres que ceux du

26. * Professeure – Université du Québec à Rimouski (campus Lévis) - melanie_tremblay@uqar.ca

ministère pour exercer leur jugement. Et, lorsqu'il s'agit d'identifier les objets considérés pour évaluer les acquis, seulement 34,8 % des personnes enseignantes du primaire et 37,5 % des personnes enseignantes intervenant au secondaire ont identifié avoir porter un jugement sur les compétences mathématiques visées dans le programme. L'évaluation des savoirs ayant été mise de l'avant par 65,2 % des enseignant·e·s du primaire et 81,8 % des personnes enseignantes du secondaire. L'importance de favoriser le bien-être des élèves et de féliciter leur résilience durant cette gestion de crise pandémique sont des justifications avancées par les participant·e·s de pour expliquer que l'effort et la participation des élèves soient des objets évolués pour rendre compte des acquis à la fin de l'année scolaire par plus de la moitié d'entre eux. Mais il y a plus, la difficulté de l'exercice du jugement « dans l'action » des élèves alors qu'ils résolvent un problème seul ou en équipe est un défi. Au secondaire, le questionnaire en ligne, l'évaluation écrite dont l'élève achemine les photos et la conversation en ligne sont les trois moyens qui furent privilégiés. Au primaire, l'exercice du jugement s'est appuyé majoritairement sur l'observation, les conversations tant en individuelle qu'en grand groupe. Pour cette période forcée d'ED en fin d'année scolaire, l'exercice du jugement n'est pas simple pour les personnes enseignantes, on y relève ainsi différents enjeux dont celui de la tricherie et celui de la conception de tâches à résoudre en ligne.

Revisiter l'exercice du jugement soutien-d'apprentissage avec le numérique : en présence et à distance

La suite de notre propos se tourne sur quelques résultats issus de la recherche-action ECRAN qui s'est amorcée au cours de l'année scolaire 2020-2021 alors que l'alternance d'épisodes d'enseignement en présence et à d'ED ont eu cours. L'objet ambitieux du projet : réfléchir et expérimenter l'exercice du jugement dans la résolution de problèmes mathématique, en collaboration, avec le numérique. Pour l'équipe de recherche, il s'agit là de profiter de cette recherche pour encourager une vision de la résolution de problèmes en tant qu'activité mathématique humaine qui se donne à voir et dont on peut offrir de la rétroaction en cours d'action (rétroaction interactive) pour encourager l'engagement individuel ou collectif des élèves, dans un travail de généralisation ou de modélisation où l'émission de conjectures et leur remise en question est espéré. Les expériences vécues à la fin de l'année scolaire 2020 et le passage forcé à l'ED ont nourri l'agentivité des personnes enseignantes participantes. Leur soif de se familiariser avec différentes plateformes numériques est présente et nombre de discussions sur les façons de recourir à celles-ci pour favoriser l'activité mathématique chez les élèves ont ainsi lieu durant l'année scolaire entre les équipes de recherche et enseignante. L'entrée sur la mise en place d'une démarche d'évaluation en soutien aux apprentissages (Allal et Laveault, 2009) fut retenue. L'enseignant·e est ainsi invité·e à recueillir différentes informations sur les apprentissages de sorte à utiliser celles-ci pour aider les élèves à progresser (Wiliam, 2011). L'évaluation y est ainsi vue non pas uniquement comme une démarche formelle, mais également comme une démarche informelle qui se déroule de façon continue (Mottier Lopez, 2015). Comme l'expression l'indique, elle vise essentiellement à apporter un soutien à l'élève – qui peut être de nature diverse (questionnement

ouvert visant à inviter l'élève à valider l'application d'une procédure ou étayer sa compréhension sur un savoir en jeu ou sur des stratégies possibles de résolution) selon le profil d'apprenant de l'élève – en cours d'apprentissage de sorte à ce que celui-ci puisse progresser en vue d'atteindre une réussite que collectivement, enseignant·e·s et équipe de recherche, ont défini en termes de participation à une activité mathématique. Laquelle exige des élèves qu'ils apprennent à écouter les idées mathématiques de leurs pairs autant qu'à formuler les leurs et à coconstruire ensemble pour faire avancer la résolution.

Potentialités du numérique : varier les modalités et les moments de rétroaction

Si l'on peut reconnaitre les potentialités qu'offrent certaines plateformes numériques, la rétroaction permettra aux élèves de s'engager mathématiquement dans la mesure où ils sont sensibles aux rétroactions formulées, cette sensibilité étant elle-même influencée par l'objet, la forme et la formulation de la rétroaction. Parmi les différentes expérimentations réalisées tant en ED (les modalités asynchrone et synchrone) qu'en enseignement en présence, trois familles de rétroaction ont été identifiées. Elles peuvent être 1) offertes par l'outil ou la plateforme retenue (exemples : correction automatisée d'une réponse entrée, glissement d'une curseur avec visualisation de l'impact sur l'allure de courbes, rédaction d'une équation et obtention d'une représentation graphique ou validation de la perpendicularité de segments par déplacement de points), 2) des rétroactions exprimées oralement aux élèves en cours d'activité (soit durant une séance synchrone en ED ou en classe) ou rédigées à l'écrit en direct par le biais d'une plateforme (nommé ailleurs rétroaction augmentée) et 3) les rétroactions en différé, soit à la suite d'une analyse a posteriori des traces de l'activité passée. Ces rétroactions peuvent être exprimées à l'écrit dans la plateforme utilisée, sur une feuille de papier ou transmises oralement par le biais d'un enregistrement vocal par exemple.

Dans le cas de l'ED, les personnes enseignantes ont mentionné apprécier la possibilité de regrouper les élèves en équipes en salles de vidéoconférence et de pouvoir se « déplacer » rapidement de salle en salle pour pouvoir discuter avec chaque équipe ou même, déplacer un élève dans une salle pour mener un échange particulier sans être sous le regard des autres élèves. Les défis importants sont a) la recherche de moyens pour faciliter la collaboration des élèves autour d'un même problème, b) tout en leur permettant de visualiser leur résolution commune en cours d'activité et, il s'agit aussi, pour la personne enseignante, c) de pouvoir visualiser les résolutions des élèves en cours d'activité et enfin de d) maintenir l'engagement des élèves lors de la mise en commun des résolutions.

Réguler les apprentissages en variant les occasions (modalités) et les moments d'offrir de la rétroaction aux élèves

Un exemple de plateforme numérique offrant de la rétroaction et facilitant la régulation

Parmi les plateformes numériques les plus appréciées pour répondre à certains défis exprimés : *l'Activity Builder de Desmos*. Construit de manière à exploiter plusieurs modèles de tâches offrant de la rétroaction directe à l'élève, cette plateforme, sous la vue « enseignant » (voir figure) permet de suivre la progression des élèves pour chaque tâche proposée.

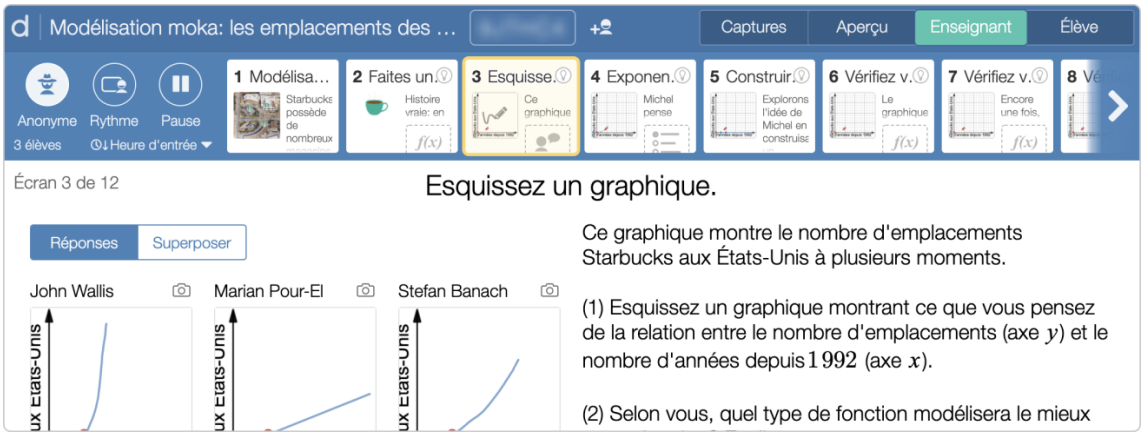


Figure 1. Exemple de vue « enseignant » tiré du site Desmos.com

La personne enseignante peut aussi offrir de la rétroaction écrite aux élèves de façon individualisée sur chaque écran/tâche, soit en direct (pendant que les élèves avancent dans la résolution de différentes tâches) ou en différé (à la suite de l'analyse des productions des élèves).

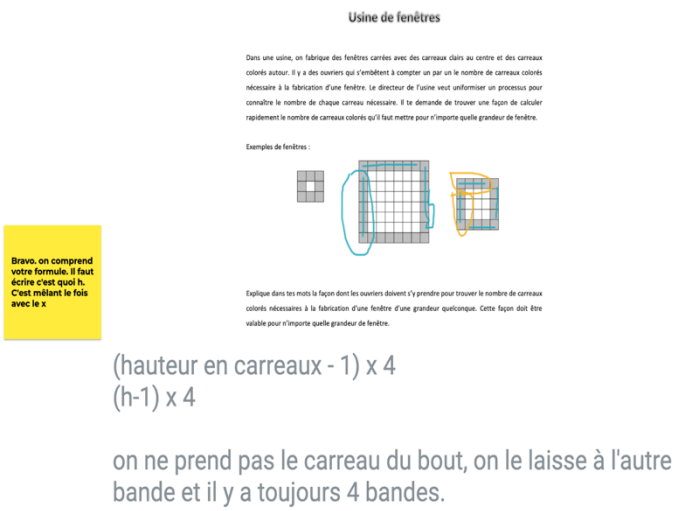
Un exemple de leçon dans les grandes lignes vécue à distance

Pour relever les défis plus tôt évoqués, une leçon intéressant à partager est celle menée en synchrone par une enseignante de 2e secondaire (élève 13-14 ans). Il s'agit de la troisième période d'une séquence d'enseignement visant l'introduction à l'algèbre par un travail de généralisation algébrique. La leçon est subdivisée en cinq phases autour du problème de l'« Usine à fenêtres » aussi connu sous le nom de « carreaux bordés ».

Phase 1 – En grand groupe, présentation du problème (10 minutes)

Phase 2 – Répartition des équipes de trois en salles virtuelles et résolution du problème (20-25 minutes)

Chaque équipe se voit associer un tableau blanc virtuel différent dans l'espace Google Jamboard (voir exemple figure). La phase de résolution s'amorce



Phase 3 – En grand groupe, présentation du critère d'évaluation retenu (clarté et exactitude de la formule) et de la façon d'offrir une rétroaction positive et constructive puis répartition dans les salles où chaque équipe doit évaluer une autre équipe (10 minutes)

Phase 4 – En équipe, rédaction de la rétroaction augmentée à visée constructive (20 minutes)

Sous-forme de «post-it», une équipe analyse la formule produite. Les rétroactions écrites devraient être suffisamment riches pour aider les récepteurs à cibler ce qu'ils devront améliorer.

Temps 5 – Pour l'enseignante seulement, phase de validation. Le retour en grand groupe, se fait au cours suivant, cela permet à l'enseignante d'évaluer le travail réalisé

Le double investissement d'une même tâche permet à l'enseignante de cumuler des traces tant sur l'équipe qui a trouvé la formule que sur l'équipe qui a commenté

Alors qu'en classe, le retour en groupe a usuellement lieu à la fin de la leçon, celui-ci est déplacé au cours suivant et le maintien de l'engagement des élèves est mis à contribution par la mise en place d'une phase de rétroaction formulée par une équipe à un autre (pour plus de détails, voir Laferrière *et al*., 2022).

Conclusion

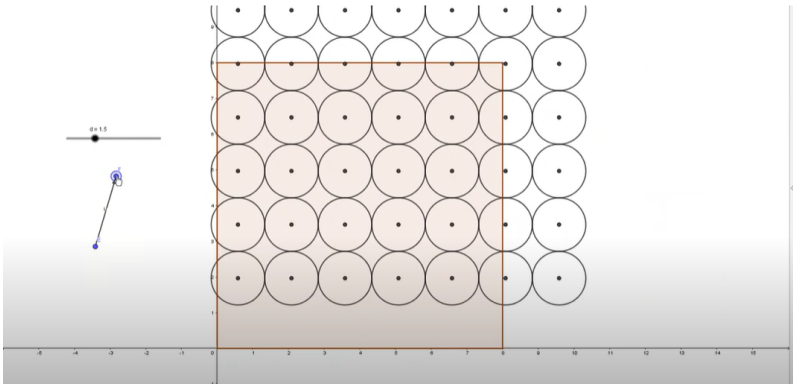
Alors que le passage à l'ED a conduit à l'identification de nombre d'enjeux, le retour à l'enseignement en présence en amène d'autres qui étaient auparavant insoupçonnés. Encourager la participation guidée des élèves en menant une régulation interactive en présence ou augmentée (par le biais d'une plateforme numérique), où la personne enseignante porte son attention sur les activités mathématiques des élèves peut être facilité par le recours à diverses plateformes numériques qui ne se limitent plus à recueillir des traces qui prennent la forme de mots, d'expressions numériques ou algébriques. La collecte de photos, vidéos, dessins, tables de valeurs ou de graphiques est dorénavant facilitée. Il en va de même pour le travail de sélection de productions d'élèves (une fenêtre donnant accès aux différentes productions d'élèves) qui pourront soutenir la phase de retour en grand groupe ayant pour objectif de comparer les différentes procédures et stratégies de résolution. Le retour en présence ne se transpose pas encore dans toutes les classes par la présence de tablettes ou d'ordinateurs portables pour chaque élève, condition qui permettrait alors le recours quotidien aux diverses plateformes disponibles. Le retour à l'enseignement en présence entraine un autre enjeu : l'intégration de ces mêmes plateformes aux routines de classe, bien que l'on en reconnaisse les potentialités pour mieux réguler la progression des élèves, doit être réfléchie en gardant en tête que la variété des tâches à proposer ainsi que les plateformes utilisées est un facteur à considérer pour conserver la motivation des élèves.

1.5 m entre les élèves, une activité qui concerne l'organisation de l'espace de la classe

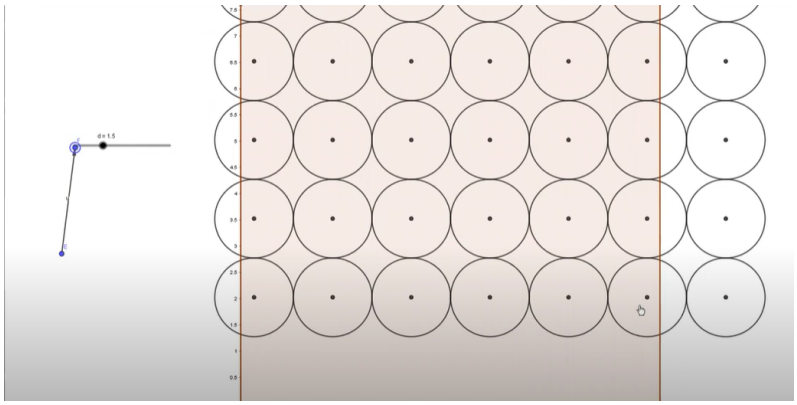
INHE[27]* Arnaud

Comme enseignant en secondaire 1 (élèves de 12 à 15 ans) à Genève, j'ai fait, dans le contexte de la pandémie, une activité avec mes élèves à l'été 2021. À cette période, on avait comme consigne du Canton de respecter la distance de 1,50 mètres entre les élèves si on ne voulait pas être obligés de porter le masque en classe. Je me suis posé la question de savoir si c'était possible de respecter cette consigne et à quelles conditions. L'année d'avant, les élèves avaient leur masque et c'était assez gênant parce qu'on perdait tout ce qui était non verbal. Le directeur de l'école m'avait dit une semaine avant la rentrée que comme j'avais 23 élèves (on a des classes de 25 élèves maximum), ce n'était pas possible de garantir le 1,50 mètres donc il fallait prévoir de porter des masques. En tant que bon mathématicien, je me suis mis à griffonner sur une feuille quadrillée et j'ai constaté que ça se jouait à pas grand-chose. Je me suis dit que j'allais proposer cette situation lors de la rentrée aux élèves de mes classes. Dans ce qui suit, je vais m'attarder sur ce qui s'est passé avec une classe de première année du secondaire dans laquelle les élèves ont environ 12 ans. Avec eux, cette activité a vraiment bien fonctionné. Donc lors du premier cours et d'une manière totalement transparente, je leur transmets les consignes du Canton et ce qu'a dit le directeur et je leur ai demandé « Est-ce que c'est possible que vous respectiez la distance de 1,50 m en classe ? ». La première étape c'était de formaliser le problème parce qu'il fallait se mettre d'accord sur ce que représentait 1,50 mètres de distance entre deux personnes. On s'est mis d'accord pour symboliser chaque individu par un point dans l'espace. Il fallait que l'on ait au moins 1,50 mètres entre chaque point, ce qui nous a fait penser à un problème équivalent qui est de chercher à « Répartir au mieux des cercles dans un espace tel que les cercles ne se chevauchent jamais ». Ces cercles doivent avoir un rayon de 75 cm pour garantir le 1,50 mètres entre chaque personne. Les élèves ont commencé à griffonner, c'était sympa. Une relance qui a été importante c'était quand je voyais des élèves qui ne faisaient pas leurs figures à l'échelle, je leur disais « Attention, au choix des carreaux que tu utilises ». De plus, je leur ai donné les dimensions de la salle, 8 mètres par 8 et il fallait prévoir 2 mètres de recul à l'avant parce qu'il y a le tableau et le bureau de l'enseignant. Les élèves ont cherché et en amont j'avais préparé un fichier Geogebra pour pouvoir faire varier la distance entre chaque point et ainsi discuter avec eux des différents cas de figure. Dans le fichier, on pouvait faire varier la distance entre chaque point selon les discussions et les consensus que l'on avait entre nous.

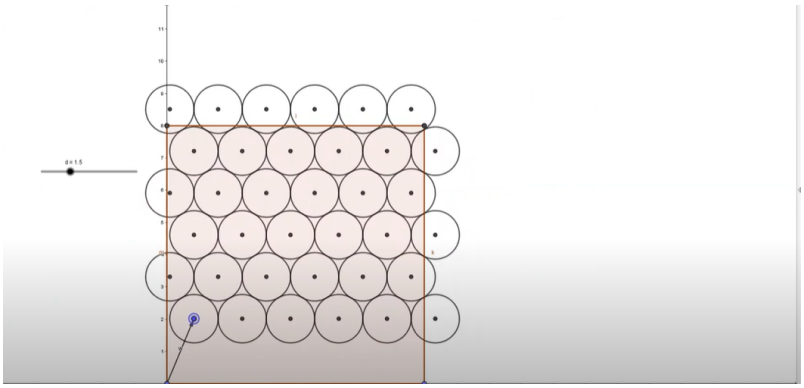
27. * Enseignant chercheur - Université de Genève - arnaud.ihne@edu.ge.ch



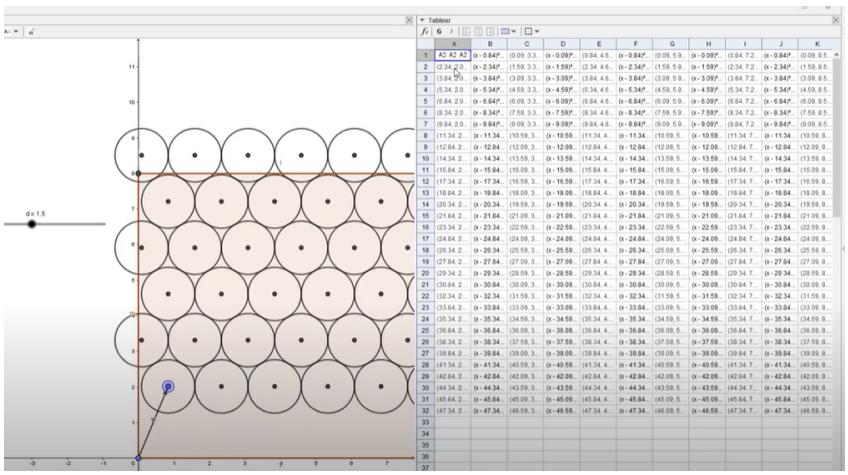
Pendant ce cours, une élève est vite arrivée à discréditer la solution de mettre 6 élèves par rangée parce qu'en fait si on veut maintenir 1,50 m avec 6 élèves par rangée, on a moins de 30 cm sur chacun des côtés puisque les bureaux font plus de 60 cm de large. On ne pourrait pas rentrer, ce ne serait pas confortable d'avoir des élèves aux extrémités donc on a écarté cette possibilité. On a donc gardé les 5 élèves par bureau et 5 rangées que nous avons actuellement.



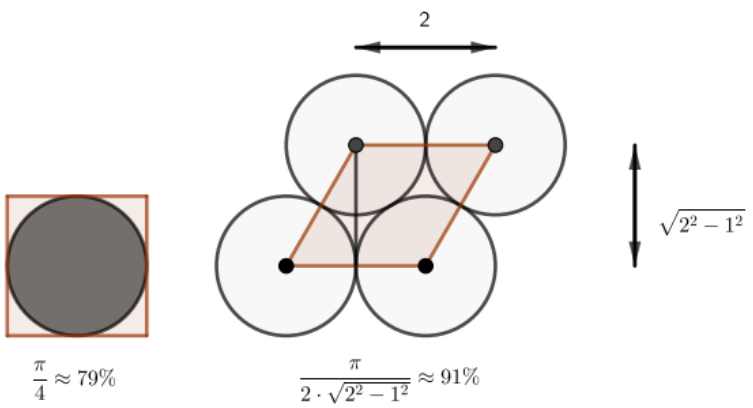
Mais en procédant ainsi, on remarquait que les élèves du fond n'étaient pas confortables, ils n'avaient pas d'espace avec le mur et en plus à la fin des cours, il fallait relever chacune des chaises sur le bureau respectif, il n'y avait pas assez d'espace. J'ai demandé à un élève d'estimer l'espace qu'il fallait avec le fond et il a jugé qu'il fallait environ 65 centimètres derrière l'élève au fond de la classe pour pouvoir être confortable au moment de relever la chaise. Comme matériel, j'avais plusieurs mètres, j'avais aussi coupé un bambou de longueur 1,50 m pour qu'ils voient exactement ce que c'est 1,50 mètres et ainsi pouvoir tester directement la distance. Très vite on a vu qu'en répartissant les bureaux de façon quadrillée ça n'allait pas. Un élève a proposé de les mettre comme suit.



J'ai fait ce fichier avec un tableur. On a le point (0,0) et un vecteur, pour le premier point c'est w et je le fais varier puis le suivant c'est le point A1 + d à l'horizontale et 0 en verticale et là je fais toute la première ligne et là je génère tous mes premiers points. Après, je fais pareil pour les suivants. Mes cercles sont, pour l'un d'eux, centré en A1 et de rayon d/2 et après ça génère tous mes cercles.

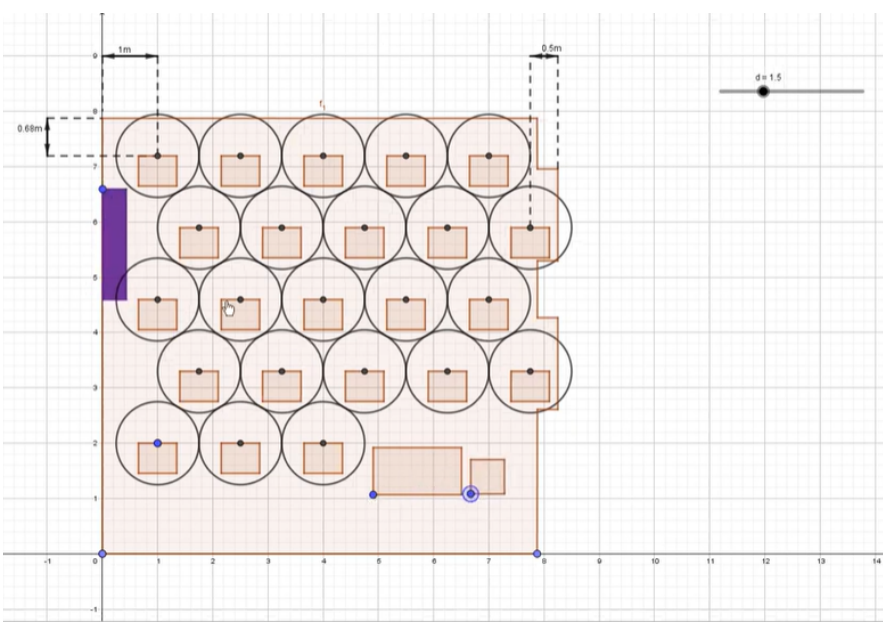


La solution de cet élève permettait d'avoir plus de rangées en profondeur. On pouvait avoir 5 rangées de 5 mais il fallait voir comment on gérait les extrémités. Avec cette classe avec ce niveau scolaire, on doit laisser de côté les calculs mais avec une classe d'élèves de 15 ans on peut calculer ceci. C'est assez simple (voir figure ci-dessous). À gauche, on a une tuile d'une répartition quadrillée donc on peut très bien paver tout le plan avec des tuiles identiques et voir la proportion de cercle par rapport à la surface totale. J'ai pris comme côté du carré 2. On a Pi sur l'aire du carré qui est 4. Donc Pi/4 c'est la proportion de cercle par rapport au total. Donc on recouvre le plan à 79%, ce sont des cercles de manière quadrillée alors que si on répartit les cercles comme l'élève l'a proposé, on peut utiliser une tuile en forme de parallélogramme, on arrive ainsi à paver tout le plan avec des tuiles identiques.



Dans cette tuile, on a un cercle entier donc on a Pi comme numérateur et si on regarde par rapport à la surface totale, on a l'aire du parallélogramme qui est base fois hauteur. La base c'est 2, la hauteur on la trouve avec Pythagore. Ça donne 91%. L'espace non couvert avec la configuration de gauche est de 21% alors qu'il est de 9% avec la configuration de droite. On remplit donc 2 fois plus d'espace libre avec la configuration de droite. Avec la classe d'élèves de 12 ans, j'aurais juste donné les résultats, 79% et 91% en expliquant ce que ça veut dire.

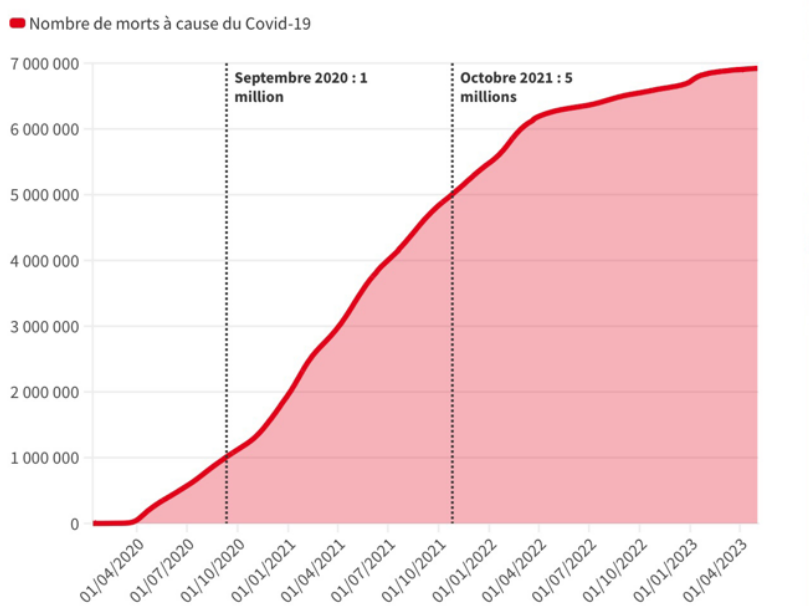
Maintenant qu'on a notre modèle, il fallait qu'on prenne tous les éléments de la salle comme les fenêtres pour voir la façon dont on pouvait poser chaque élément. Dans la figure ci-dessous construite avec Geogebra, on peut mettre les fenêtres, déplacer le bureau de l'enseignant, etc. On a des distances qui varient. On a fait attention d'avoir 65 centimètres au fond, en plus on pouvait mettre les fenêtres pour avoir un repère.



On a donc vu que c'était possible. On a mis les bureaux tel qu'indiqué sur la figure et on avait de la marge sur les côtés. On a également fait un projet avec 25 élèves pour que ce soit réalisable pour l'ensemble de l'établissement. On a dit au directeur que l'on avait vu que c'était possible si on mettait les bureaux différemment. En plus, en testant ceci pendant plusieurs jours, on s'est rendu compte de pas mal de petites choses : les élèves voyaient beaucoup mieux ce qui était projeté au tableau parce qu'ils ne sont pas les uns derrière les autres, l'enseignant voit mieux chaque élève et en plus le concierge a dit qu'il arrivait à passer entre chaque bureau, avant son balai était trop large pour passer entre les bureaux. On a laissé les bureaux comme ça dans cette salle avec l'accord de mes collègues parce que nous sommes plusieurs à nous partager la salle. On a proposé à la direction de faire pareil au niveau de l'établissement. Malheureusement, le directeur nous a dit que dans 2-3 mois, on allait avoir d'autres mesures sanitaires et peut-être que les masques tomberaient donc il n'a pas voulu que ça aille plus loin. Mais on n'avait pas cours avec ces élèves dans cette salle, on a donc demandé à ce que tous nos cours soient dans la même salle et j'ai permis aux élèves qui le voulaient de ne pas avoir leur masque. C'était la première fois que je voyais leur visage parce qu'on avait le masque dès le départ. C'était pas mal et en plus ça a permis d'avoir un résultat concret, une activité mathématique qui a été très appréciée au niveau des élèves.

Brève discussion et conclusion

La pandémie de Covid-19 est une pandémie d'une maladie infectieuse émergente, appelée la maladie à coronavirus 2019 ou Covid-19, provoquée par le coronavirus SARS-CoV-2. Elle est apparue le 16 novembre 2019 à Wuhan, ville située en Chine centrale, avant de se propager dans le monde. Elle a touché tous les pays du monde, a causé le décès de sept millions de personnes environ (voir graphe ci-dessous) et elle continue à en tuer encore quoiqu'avec une fréquence réduite.



COVID-19 : le nombre total de morts dans le monde (Source OMS)

Pour pallier au manque de données fiables et comparables, l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS) se base sur la mesure de « l'excès de mortalité », défini comme la différence entre le nombre de décès réels et le nombre de décès estimés en l'absence de pandémie. Quant au nom, l'acronyme COVID-19, il provient de l'expression anglaise CoronaVirus Deseases; le numéro 19 rappelle l'année de son apparition 2019. Une icône fut créée pour le designer et il a été décrété par l'académie française qu'on en parlera au féminin, la COVID-19 par référence à la maladie.

S'il est possible de dresser une conclusion pour les travaux de cette session du colloque EMF2022 consacrée au COVID-19, il serait hasardeux et prématuré de tenter une conclusion qui synthétise les discussions quant à l'arrivée du COVID-19 et ce qu'il a fait vivre au monde entier. Les raisons sont multiples et on en mentionnera en premier que nous vivons encore sous l'influence du COVID et les bouleversements causés par la COVID ne se sont pas encore stabilisés. Comme l'ont souligné les auteurs jeunes du Bénin, le colloque EMF en soi devait avoir lieu en 2021. Les organisateurs se sont

vus contraints de le reporter en 2022. Il aurait pu être organisé en mode hybride laissant place à des interventions synchrones en ligne, il n'a été que semi hybride laissant place plutôt à des interventions préalablement enregistrées. Nous laissons aux historiens le soin de procéder aux analyses globales, rétrospectives et historiques proprement dites. Alors seulement, ils pourront tirer les conclusions plausibles et crédibles quant à l'impact de la pandémie sur l'activité sociale, scolaire et économique. Néanmoins, certains constats, quoique mitigés méritent d'être pointés et mis en exergue.

L'apparition de la pandémie de la COVID, comme on pourrait le constater à travers les différents textes a conduit à la fermeture de l'école et à l'arrêt généralisé et immédiat de la scolarité. Le premier recours a été la technologie. On constata alors une ruée vers les outils technologiques de formation en ligne et un concept pédagogique fut même créé : la continuité pédagogique. En fait, en plus de ces outils et plateformes de Elearning, on utilisa les outils classiques de communication sociale tels WhatsApp, YouTube, Skype, MEET, ZOOM, etc. et on s'appuya sur des ressources diverses sous forme de quiz, d'audio, de vidéo ou d'animation. Si ces solutions improvisées ont permis la mise à disposition de formation et d'enseignement, elles ont également révélé des disparités et des inégalités sociales dans un même pays et d'un pays à l'autre. Pour pouvoir bénéficier d'outils et de ressources technologiques, il faut d'abord en disposer et bénéficier de connexion internet fiable et convenable. De plus, il faut en être habitué au préalable et avoir bénéficié de formation adéquate. Ce n'était le cas que pour une minorité de personnes ou de pays.

La mise en place précipitée d'approches d'enseignement à distance a, quant à elle, dicté une nécessité d'adaptation et de redéploiement au niveau des structures administratives des établissements scolaires et de formation puisque certaines tâches ont été réduites, d'autres ont été créées et de nouveaux espace-temps ont dû être aménagés. Dans tous ces bouleversements, l'enseignement des mathématiques n'a pas été épargné, compte tenu notamment de la place qu'elle occupe dans les curricula. Contrairement à l'apprentissage des langues, l'activité mathématique s'appuie beaucoup sur un travail en « papier-crayon » que les technologies ne peuvent combler. Contraints de procéder via des enseignements à distance, enseignants et élèves se sont trouvés démunis et amenés à s'adapter avec cette nouvelle médiation technologique.

Au-delà de cet impact à caractère social, l'apparition de la COVID-19 a permis d'accélérer les études et les recherches sur les technologies de l'information et de la communication en enseignement. Elle a aussi occasionné des débats profonds sur la place des savoirs dans la société, sur les choix de contenus d'enseignement et sur leur transposition. (Éducation à la santé, éducation financière, mathématiques, citoyenneté). Ainsi, en mathématiques, la pertinence et l'efficacité de certains outils et certaines notions s'est avérée évidente pour traiter, comprendre la propagation de la pandémie. Des simulateurs basés sur différents modèles mathématiques sophistiqués furent construits.

Références

Allal, L., et Laveault, D. (2009). Assessment for Learning. Mesure et évaluation en éducation,32(2), 99-106. https://doi.org/10.7202/1024956ar

Arnoux, P. et Le Payen Poublan, V. (2022). Modélisation mathématique et activités économiques pour l'option Mathématiques Complémentaires de terminale, chapitre 2, IREM d'Aix-Marseille (Institut de Recherche sud l'Enseignement des Mathématiques).

Coulange, L. (2020), Enseigner les mathématiques : Vous avez dit continuité pédagogique, Intervention à la table ronde. L'usage des outils numériques dans l'enseignement des mathématiques avec un focus sur l'enseignement à distance, à l'occasion du Grand Forum des Mathématiques Vivantes à Lyon, le 11 mars 2021. Vidéo disponible et consultable sur : https://www.dailymotion.com/video/x805mn4?playlist=x71m5e

Coulange, L., Stunell, K. et Train, G. (2022), Les pratiques d'enseignants de mathématiques dans la mise en œuvre de la continuité pédagogique. Que nous disent-elles des inégalités scolaires? In Weiss P.-O. & Ali M. (Eds), L'éducation aux marges en temps de pandémie, p. 413-440, PU Antilles.

Coulange L., Stunell, K. et Train, G. (2021), Pedagogical continuity: myth or reality? Journal of Research in Innovative Teaching & Learning, n° 1, p. 75-92. Disponible et consultable sur : https://www.emerald.com/insight/content/doi/10.1108/JRIT-11-2020-0077/full/pdf?title=pedagogical-continuity-myth-or-reality

Coulange, L., Stunell, K., et Train, G. (2020), La continuité pédagogique : mythe ou réalité ? Bulletin de la CFEM, 49, p. 9-11. Disponible et consultable sur : http://www.cfem.asso.fr/liaison-cfem/bulletin-de-liaison-49-juin-2020.

Dennen, V. P., Burner, K., et Cates, M. (2018). Information and communication technologies and learning theories: Putting pedagogy into practice. In J. Voogt, G. Knezek, R. Christensen, & K-W. Lai (Eds.), Handbook of information technology in primary and secondary education (p. 143-160). Springer.

Diarra S. (2022). Continuité et ruptures dans la transition élémentaire-collège en géométrie: les paradigmes géométriques en question Thèse de Doctorat. Université Cheikh Anta DIOP de Dakar.

Gueudet, G. et Trouche, L. Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés, Éducation et didactique [En ligne], 2-3 | Décembre 2008, mis en ligne le 01 décembre 2010, consulté le 25 avril 2022. URL : http://journals.openedition.org/educationdidactique/342 ; DOI : https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342

Laferrière T., Tremblay M., Nadeau-Tremblay S., Boisjoly F., Gamache M. et Paré G. (2022). La rétroaction par les pairs «augmentée» à des fins d'apprentissage. L'École branchée, 25(1).

Ministère de l'Éducation du Québec (MEQ) (2001). Programme de formation de l'école québécoise. Version approuvée, Éducation préscolaire et enseignement primaire. Gouvernement du Québec.

Mottier Lopez, L. (2015). Évaluations formative et certificative des apprentissages. Enjeux pour l'enseignement. Louvain-La-Neuve: DeBoeck Éducation.

OMS/AFRO (2021). Coordonner l'action : enseignements tirés de la première riposte de la COVID-19 dans cinq pays africains. Brazzaville : Bureau régional de l'OMS pour l'Afrique; 2021.

Scallon, G. (2004). L'évaluation des apprentissages dans une approche par compétences. Montréal, Québec. Éditions du renouveau pédagogique

Sokhna M. et Trouche L. (2015). Formation mathématique des enseignants : quelles médiations documentaires ? Dans Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT6, pp. 624-639.

Tremblay, M. et Delobbe, A. M. (2021). Enseignement et évaluation des mathématiques à distance durant la Covid-19. Canadian Journal of Learning and Technology, 47(4).

Wiliam, D. (2011). What is assessment for learning? Studies in Educational Evaluation, 37(1), 3-14. https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2011.03.001

Table ronde

La table ronde est centrée sur les mathématiques nécessaires pour la société et pour les différents métiers (convoquant prioritairement souvent d'autres disciplines que mathématiques). Elle a été animée par **Gervais Affognon** chargé de cours à l'université d'Abomey-Calavi. Deux sous-thèmes sont abordés : la contribution des mathématiques et des activités mathématiques à la citoyenneté d'une part, les mathématiques nécessaires pour l'exercice de différents métiers et la formation des professionnels qui les exercent d'autre part.

Quatre interventions sont retenues. Elles ont rythmé les deux séances prévues dans l'emploi du temps du colloque (deux fois 1h30). L'intervention de F. Ndaye introduit le débat autour du premier sous-thème. Les trois autres interventions (D. Butlen, J. Doumaté, E. Roditi) concernent le second sous-terme.

Titre: La contribution des mathématiques et des activités mathématiques à la citoyenneté

Auteur: NDIAYE Faguèye

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 76 - 83

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

La contribution des mathématiques et des activités mathématiques à la citoyenneté

NDIAYE[1] Faguèye

Résumé – Dans cette présentation, nous avons mis en exergue la contribution des mathématiques et des activités mathématiques à l'éducation à la citoyenneté à travers la résolution d'une situation complexe dans le contexte des tests de COVID-19. L'objectif visé est de montrer l'existence et l'utilité des mathématiques dans toute activité humaine.

Mots-clefs : Contribution, mathématiques, activités, citoyenneté.

Abstract – In this presentation, we have highlighted the contribution of mathematics and mathematical activities to citizenship education through the resolution of a complex situation in the context of COVID-19 tests. The aim is to show the existence and usefulness of mathematics in any human activity.

Keywords: Contribution, mathematics, activities, citizenship.

1. FASTEF/UCAD, Sénégal, fagueye.ndiaye@ucad.edu.sn

Introduction

Selon F. Gleize (2007), le concept de citoyenneté est très présent dans notre vie quotidienne ; il est en constante évolution. Il s'est construit au travers les siècles, à partir des préoccupations des populations et du mode de vie commune qu'elles ont choisi.

Le citoyen est celui qui appartenant à la « cité », dispose de droits c'est-à-dire d'une liberté d'expression, d'opinion, de réunion, d'association, de culte, etc. Il est soumis à des devoirs et il doit respecter les lois au nom de l'intérêt général.

Être citoyen, cela s'apprend ; l'exercice de la citoyenneté n›est pas une compétence innée. L›école et l›université peuvent jouer un rôle crucial dans l'éducation à la citoyenneté coordonnée avec celle de la famille.

La citoyenneté est identifiée comme un outil transversal qui peut être développé à tous les âges, sous différentes formes et par tout type d'acteurs.

D'où la réflexion sur « *La contribution des mathématiques et des activités mathématiques à la citoyenneté* ».

Ainsi, nous allons essayer de répondre à ces quelques questions :

- Qui est futur citoyen?
- Comment les mathématiques et des activités mathématiques contribuent-elles à l'exercice de la citoyenneté?

Le futur citoyen

En mathématiques, sciences et technologies, le profil d'un futur citoyen qu'on cherche à développer à travers les activités pédagogiques sont :

- une personne autonome et responsable, qui peut résoudre des situations de la vie courante, qui peut faire face à l'ensemble des actes de la vie quotidienne (gestion d'un budget, achats pour un ménage, aménagements d'une habitation, etc.), qui peut utiliser des moyens et outils appropriés (algorithme, calculette...), et qui peut mobiliser des connaissances, des savoir-faire et des savoir-être pour agir sur son environnement et le protéger au nom de l'intérêt général.
- un citoyen critique, qui peut décrypter et problématiser les contextes et/ou les situations-problèmes du monde qui nous entoure.
- une personne qui, à divers niveaux de l'enseignement, est capable de

- débattre de questions mathématiques, ne pas être d'accord et argumenter pour convaincre les autres.
- critiquer un raisonnement, chercher un contre exemple, donner un argument imparable ou oser partager une intuition qui se dessine,
- écouter un avis différent, se décentrer pour le comprendre et s›en imprégner pour faire évoluer le sien.
- faire preuve de rationalité. Selon Duval (2001), la rationalité, fondée sur le dialogue et orientée vers la régulation des interactions sociales, qui s'exprime entre autres à travers ce que les didacticiens conviennent d'appeler l'argumentation, est suffisante à la formation d'un citoyen éclairé.

Après avoir identifié le profil d'un futur citoyen, il est alors plus aisé de vérifier s'il y a des mathématiques, des activités mathématiques indispensables à sa formation citoyenne. Et de voir la place que doit occuper l'éducation à la citoyenneté dans l'enseignement des mathématiques et dans les activités mathématiques.

La contribution des mathématiques et des activités mathématiques à la citoyenneté

Les mathématiques apportent des outils de modélisation et d'analyse sur le plan quantitatif de phénomènes étudiés dans le cadre des thèmes comme : « les mises en équations, la construction de graphique, la statistique, les probabilités, les suites numériques… »

À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, mettre en forme une solution, communiquer un résultat, en débattre. Les conditions du débat doivent être profitables à tous. nous nous intéressons à l'acquisition de compétences citoyennes à travers le débat mathématique que provoque cette situation complexe ci-dessous portant sur les tests du COVID-19.

Situation complexe : Le CORONAVIRUS, cause de la maladie appelée COVID-19, est un virus transmis d'un être humain à l'autre par le contact. Les médecins décident de lutter contre la propagation de la maladie dans la population ; un test est mis au point pour le dépistage de cette maladie. Ils considèrent que le test est fiable lorsqu'au moins 95 personnes sur 100 ayant un test positif sont réellement malades. Le laboratoire faisant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- Une personne malade a 49 chances sur 50 d'être testée positive.
- Une personne non malade a une chance sur 1000 d'être testée positive.

Les médecins procèdent à un test de dépistage systématique dans une population « **cible** ».

On note *p*, 0 ≤ p ≤ 1 la proportion de personnes malades de COVID-19 dans la population « **cible** ».

f désigne la proportion d'individus susceptibles d'être malades sachant qu'ils sont déclarés positifs par le test.

En t'appuyant sur les informations fournies dans le texte et sur les outils mathématiques au programme, aide les médecins à montrer que *f* s'exprime en fonction de *p* par :

$$f(p) = \frac{980p}{979p+1}.$$

À partir de quelle proportion de personnes malades dans la population jugent-ils que le test est fiable?

Face à cette situation, on se peut se poser les questions qui suivent :

- Les élèves ont-ils des connaissances, des savoir-faire et des savoir-être nécessaires pour répondre à ces questions ?
- En quoi cette situation contribue-t-elle dans la formation citoyenne de l'élève?

L'élève à qui est proposé cette situation est y familiarisé en classe suite à l'organisation de séances d'intégration. Pour répondre à ces questions on utilise le thème « **Calcul de Probabilités** ».

La démarche attendue de l'élève est la suivante :

On considère l'espace de probabilité ((Ω, *A*, *p* avec Ω dénombrable.

On note M l'événement « *une personne est malade* », S l›événement « *une personne n'est pas malade* », T_+ l'événement « *une personne est testée positive* », *T*_ l'événement « *une personne est testée négative* ».

On sait que la probabilité d'être malade sachant qu'on est testé positif, *p*, est définie par

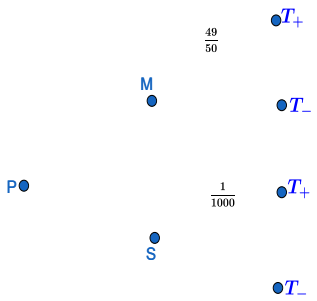
p

Ce qui est équivalent à *p* = *p*

Or *p*

D'où $p=p$.

Ce qui donne $f = p$.



Donc $f = f(p) = \frac{\frac{49}{50}\times p}{\frac{49}{50}\times p+\frac{1}{1000}\times(1-p)} = \frac{980}{979p+1}$.

Le test est fiable si $f(p) \geq 0{,}95$ c'est-à-dire si $p \geq 0{,}019$.

Le test est fiable si au moins **une** personne sur **cinquante** est atteinte de COVID-19.

Cette situation qui vient d'être résolue est orientée vers

- l'action dans le milieu. L'élève qui a résolu ou qui a participé à la résolution de cette situation complexe non seulement il a étalé ses compétences en calcul de probabilités mais il a aussi pris conscience de la rapidité par laquelle la contamination peut se produire. A son tour, il sensibilisera ses parents les plus proches, ses amis, son quartier, ainsi de suite,
- la prise de décision. L'élève va aussi respecter et faire respecter les mesures barrières, il va aussi décider d'aller se faire dépister et demander à ses proches d'aller se faire dépister,
- la citoyenneté. L'élève décrypte et problématise un contexte, argumente pour contribuer à la prévention de la maladie.

Conclusion

Les mathématiques, au travers d'un regard probabiliste, peuvent conduire les élèves à distinguer la maladie, définie par sa fréquence et son intensité, du risque qui associe maladie et comportements humains. Par ailleurs l'information relative aux risques d'être contaminé peut s'appuyer sur les connaissances mathématiques pour mettre en évidence les liens entre ce risque et la validité du test, en tant qu'exemple. Elle permet à l'élève de prendre conscience de la dimension humaniste des mathématiques, en décryptant et problématisant des situations-problèmes.

Références

Duval, R. (2001). *Écriture et compréhension : Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves?* In *Produire et lire des textes de démonstration*. Collectif coord. par É. Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde. Ellipses. Paris.

Fanny, G. (2007). *Introduction à la citoyenneté*. Think tank européen Pour la Solidarité, Mars 2007.

Titre: Les mathématiques dans la formation des élèves maçons en France. Analyse d'épreuves du Certificat d'Aptitude Professionnelle (CAP)

Auteur: BUTLEN Denis

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 84 - 94

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Les mathématiques dans la formation des élèves maçons en France. Analyse d'épreuves du Certificat d'Aptitude Professionnelle (CAP)

BUTLEN, Denis[1]

Résumé – L'analyse des épreuves écrites de mathématiques et des épreuves professionnelles de l'examen de fin de formation des élèves maçons en France fait apparaître un décalage important portant sur les contenus et les supports graphiques mobilisés. Deux logiques semblent entrer en concurrence : une logique de formation professionnelle et une logique de formation du citoyen. Ces différences interrogent la contribution de la formation mathématique à l'appropriation des outils spécifiques du métier.

Mots-clefs : didactique des mathématiques, enseignement professionnel, maçons, logiques de formation

Abstract – The analysis of the written mathematics tests and the professional tests of the final examination for student masons reveals a significant discrepancy in the content and graphic supports used. Two logics seem to be competing: a logic of vocational training and a logic of training the citizen. These differences question the contribution of mathematical training to the appropriation of the specific tools of the profession.

Keywords: didactics of mathematics, vocational education, masons, training logics

1. CY Cergy Paris Université, Laboratoire de Didactique André Revuz, France, denis.butlen@cyu.fr

Contexte de la recherche et documents analysés

Le contexte de la recherche

Initialisée dans le cadre d'un projet de recherche franco-algérien intitulé *les écrits professionnels des élèves maçons, raisonnements et exactitude des résultats dans un langage adéquat*, cette étude s'inscrit dans un projet plus large d'analyse des pratiques des enseignants qui exercent dans des conditions pouvant apparaître comme difficiles notamment s'adressant à des élèves en difficulté en mathématiques Charles Pézard (Butlen D., Masselot P, 2019)). Le cadre théorique et méthodologique mobilisé est celui de la double approche didactique et ergonomique (Robert, Rogalski, 2002).

Deux questions sont à l'origine de la recherche. Quelle est la contribution de la formation en mathématiques à la constitution des savoirs professionnels des élèves maçons ? Quels savoirs mathématiques sont nécessaires à leur formation professionnelle ?

Le corpus de données

Afin de répondre à ces questions, nous avons analysé plusieurs types de données.

L'analyse des programmes, des instructions officielles et des différents référentiels de formation a permis d'identifier les savoirs à enseigner et les compétences à acquérir lors de cette formation de CAP. L'analyse des exercices des épreuves de mathématiques de l'examen de CAP a permis de préciser les notions mathématiques dont la maîtrise est exigée en fin de formation. Enfin nous avons mis en relation les savoirs mathématiques convoqués lors de l'épreuve intitulée « analyse d'une situation professionnelle » avec ceux de l'épreuve de mathématiques. Cette épreuve a pour but de mesurer la maîtrise de savoirs professionnels nécessaires à la préparation et à la réalisation d'une situation professionnelle susceptible d'être rencontrée dans l'exercice du métier.

Analyse des attentes institutionnelles en mathématiques

Pour déterminer ces attentes, nous avons analysé deux types de documents : les programmes officiels de mathématiques en vigueur lors de la période 2004-2020 et les référentiels accompagnant ces programmes.

Les programmes de mathématiques fixant les contenus enseignés lors de la formation du métier de maçon sont pour une part importante communs à différents métiers du bâtiment mais aussi à d'autres métiers faisant l'objet d'un CAP. Ils sont accompagnés d'un référentiel de compétences et d'instructions relatives à la conception des épreuves d'examen. Ils font référence au socle commun

de connaissances, texte institutionnel fixant les connaissances et compétences jugées indispensables pour la formation du citoyen et devant être acquises à la fin de la scolarité obligatoire.

Trois versions de ces programmes ont été rédigés en 2002, 2009 et 2019. Ces programmes successifs présentent une grande stabilité. Les changements sont mineurs. Les intitulés sont souvent identiques au mot près. On peut noter quelques ajouts et quelques suppressions qui ne changent pas l'équilibre général.

Les objectifs des programmes et référentiels de mathématiques

La formation de CAP doit permettre une adaptation aux évolutions probables des métiers. Peu de connaissances nouvelles sont proposées en mathématiques. La plupart d'entre elles ont été vues au collège. Il est toutefois précisé :

> Il ne s'agit pas (…) de révisions ; l'enseignant utilisera le support de situations empruntées aux autres disciplines - notamment du secteur professionnel - ou issues de la vie courante pour faciliter la compréhension et la maîtrise de concepts et en montrer l'efficacité. (…)
>
> La formation en mathématiques (…) a pour objectifs, dans le cadre du référentiel de certification, l'acquisition de connaissances de base dans ces domaines et le développement des capacités suivantes : formuler une question dans le champ où elle trouve naturellement sa place et analyser les informations qui sous-tendent cette question ; argumenter avec précisions ; appliquer ces techniques avec rigueur ; analyser la cohérence des résultats (notamment par la vérification d'ordre de grandeur) ; rendre compte par oral et/ou par écrit des résultats obtenus. (Programme de mathématiques 2010, page 1).

Les contenus sont organisés en domaines mathématiques :

- Le calcul numérique
- Le repérage, en fait il s'agit de l'analyse et représentation de données dont les objectifs sont d'apprendre à partir de situations professionnelles ou de la vie courante à lire un tableau numérique ; placer des points dans un plan rapporté à un repère orthogonal ; exploiter des courbes tracées dans un plan rapporté à un repère orthogonal.
- La proportionnalité, notons que l'on ne parle pas de fonction linéaire mais de situation linéaire ou de relation de la forme $y = ax$.
- Les situations du premier degré (résolution d'équation)
- Les statistiques descriptives (tableau de données, caractère, effectif, fréquence, moyenne)
- Géométrie plane et dans l'espace

A titre d'exemple, intéressons-nous au domaine géométrique.

Le domaine géométrique

Les programmes précisent les savoirs de géométrie plane :

> Pour développer la perception des objets géométriques dans des situations professionnelles, dans d'autres disciplines ou dans la vie courante, les objectifs visés sont les suivants : mettre en œuvre les notions géométriques essentielles par la description et la construction d'objets géométriques du plan ; utiliser les instruments pour, construire des objets géométriques, mesurer des longueurs et des angles, constater l'égalité de segments ou d'angles ; calculer des grandeurs attachées à ces objets. (Programme de mathématiques 2010, page3)

Le référentiel de compétences précise et liste ces contenus : segment, parallélisme, orthogonalité, angle, médiatrice d'un segment, symétrie centrale et orthogonale, axe et centre de symétrie, polygones usuels, cercle, unités de longueur et d'aire, distance d'un point à une droite, Après un titre, le style par défaut est normal

Dans le domaine de la géométrie dans l'espace, le programme précise :

> Pour développer la perception des objets géométriques de l'espace dans des situations professionnelles, dans d'autres disciplines ou dans la vie courante, les objectifs visés sont les suivants : mettre en œuvre les notions géométriques essentielles pour l'identification de solides usuels ; calculer des grandeurs attachées à ces solides. (Programme de mathématiques 2010, page3)

Des modifications peu importantes d'un programme ou d'un référentiel à l'autre

Comme nous l'avons déjà souligné, les différentes versions des programmes restent très proches. Notons toutefois l'introduction de notion de probabilité relevant de cas simples en 2019. Il est aussi précisé en 2009 que dans le cadre d'une pédagogie de l'alternance, les professeurs de mathématiques-physique devront faire des visites d'élèves en stage pratique dans le but d'amener les élèves à prendre en compte la réalité de ces enseignements dans la pratique quotidienne du métier (modèles mobilisés implicitement). Il est précisé que ces visites pourront être préparées en amont par un questionnaire dont les réponses seront exploitées au retour en lycée

Enfin, il est indiqué que le professeur de mathématiques-sciences physiques doit avoir le souci de compléter l'acquisition et la validation des compétences du socle commun non validées au collège.

Des exemples de situations professionnelles privilégiées par le référentiel

Les différentes versions de référentiels indiquent des exemples de situations. Outre l'idée, difficile de cerner, de situations de la vie courante, il est fait référence pour le domaine numérique : à des éléments commerciaux (facture, calcul de TVA) et pour le domaine géométrique à l'observation et description d'une charpente, d'une photographie de monument, à la façade d'un édifice, à la lecture et exploitation de dessins techniques (plans et schémas de pièces, d'édifices), au calcul d'une surface à peindre ou à tapisser, à la construction de figures de la vie professionnelle telle que carreau, vitres, etc. , au volume d'eau pour remplir une piscine, au volume d'une cuve, d'une pièce, etc.

Analyse des épreuves de mathématiques de CAP

Afin d'analyser ces épreuves de mathématiques, nous nous sommes intéressés aux notions convoquées dans les exercices, aux types de situations et aux contextes des situations habillant les exercices, aux supports et représentations mobilisés.

Les épreuves analysées

Nous avons analysé 18 épreuves nationales ou académiques de mathématiques de CAP (de 2004 à 2020).

L'épreuve de mathématiques comporte 2 à 3 exercices. Les exercices de géométrie et de proportionnalité sont les plus présents. Ainsi 15 sujets sur 18 comportent un ou plusieurs exercices de géométrie ; le même nombre d'épreuves comportent un exercice portant sur la proportionnalité ou l'étude de situation linéaire. D'autre part, 12 sujets comportent un exercice de statistiques descriptives

Les types de situations ou les contextes convoqués

Nous avons distingué deux types de situations.

La première regroupe les situations de la vie courante et celles relevant d'une approche culturelle. Dans ces situations, les mathématiques sont des outils pour résoudre un problème. Nous avons pris en compte la part laissée à l'élève dans la reconnaissance ou non du modèle sous-jacent. Nous avons identifié celles qui demandaient ou non une part consistante ou faible de modélisation.

Nous avons dénombré 14 épreuves (78%) et 28 exercices (54%) qui présentent ou relèvent des situations de la vie courante ou des situations culturelles comportant une faible part de modélisation. De plus, 7 épreuves (39%) et 7 exercices (14%) relèvent de cette même catégorie mais sans une part de modélisation.

La seconde catégorie est celle des situations convoquant un contexte professionnel. 11 exercices (21%) relevant de 6 épreuves différentes seulement (33%) sont à classer dans cette catégorie des situations initialisées par une question professionnelle demandant ou non une part (consistante ou faible) de modélisation. Précisons que 8 exercices (15%) présents dans 5 épreuves différentes (28%) ne demandent aucune modélisation.

La mobilisation d'un contexte professionnel apparaît donc davantage comme un prétexte ou un habillage pour traiter de questions mathématiques que pour traiter une réelle question professionnelle. Aucune connaissance professionnelle spécifique du métier n'est mobilisée ou visée à cette occasion. Il s'agit essentiellement de justifier des calculs d'aire, de coût, de division (consommation ou débit ou vitesse dépendant linéairement d'une donnée), voire la reconnaissance de polygones ou la mobilisation de propriétés géométriques simples (Thalès, Pythagore, etc.).

Les exercices de géométrie

Les supports des exercices de géométrie font intervenir quasi systématiquement (14 épreuves 15) des dessins figuratifs associés (dans 10 cas sur 15) à une figure géométrique donnée et décontextualisée. Dans 12 sujets, une figure géométrique accompagnée d'une légende ou d'un commentaire faisant référence à une situation plutôt professionnelle ou de la vie courante (représentant une salle par exemple) est présente.

Il n'est jamais demandé aux élèves de produire la figure géométrique associée au dessin ou à la description de la situation évoquée.

Les figures comportent des lettres pour désigner les points et souvent des indications de mesure de longueur ou d'angle.

La tâche prescrite demande souvent un calcul à partir des données de la figure ou l'utilisation d'une propriété. Ainsi, nous dénombrons 7 épreuves et exercices demandant une application du théorème de Pythagore et plus rarement (3 seulement) une application du théorème de Thalès. notons que dans ce dernier cas, ce sont plutôt des épreuves d'avant 2010.

2 épreuves demandent la mobilisation d'une relation métrique dans le triangle rectangle. Les calculs d'une mesure de longueur sont présents dans 3 épreuves, ceux de calculs d'aire dans 8 épreuves et de volume dans 5 épreuves. 4 sujets font appel à des notions de trigonométrie.

Les exercices numériques (15 épreuves sur 18)

Tous les sujets (sauf 1) comportent le tracé d'une droite à partir d'une relation linéaire ou à partir d'un tableau de données. 13 sujets sur 15 demandent de lire le graphique pour déterminer l'une ou les deux coordonnées d'un point du graphe et interpréter le résultat.

La moitié des énoncés demandent de reconnaître une situation linéaire à partir d'un graphique ou d'un tableau de nombres (8 sur 15). En revanche, rares sont les sujets qui demandent la production de la relation linéaire (y=ax) à partir des données d'un tableau ou d'une phrase de l'énoncé.

Quelques sujets proposent de comparer les graphes de fonctions linéaires et affines en vue d'une comparaison de coût. La majorité des sujets donnent le graphe de la fonction linéaire ou affine.

Les exercices de statistiques (12 épreuves sur 18)

Ils concernent 12 épreuves sur les 18 analysées ; leur présence devient systématique à partir de 2010. Ils portent sur des calculs de moyennes (6 cas sur 12) ou de fréquences (10 cas) ou d'effectifs (6 cas).

La complétion ou l'interprétation d'un diagramme circulaire sont demandées dans 3 cas et dans 8 cas pour un diagramme en bâtons. Le diagramme est systématiquement donné ; l'élève doit tout au plus le compléter à partir de données organisées en tableau.

Il s'agit quasi systématiquement d'interpréter et ou de compléter un tableau de données (brutes ou statistiques). Dans 3 cas, l'élève doit effectuer le passage d'un tableau de données brutes ou d'un diagramme avec légende à un tableau statistique. Enfin, 5 exercices demandent d'identifier un caractère (quantitatif).

Analyse d'une situation professionnelle (épreuve 1 du CAP)

Présentation de l'épreuve

Nous avons précédemment évoqué le statut de cette épreuve professionnelle. Elle comporte un dossier ou figurent différents documents que l'élève doit analyser pour répondre aux questions qui lui sont posées

Les compétences demandées dans cette épreuve sont de différents types. On peut noter la mobilisation de connaissances «technologiques» qui le plus souvent figurent dans les documents distribués aux candidats. Toutefois, assez peu de termes techniques spécialisés sont utilisés sans être définis dans les documents.

Il s'agit d'une épreuve visant à mesurer les capacités du candidat à se servir de documents pour renseigner des questions techniques.

Le décodage de plans mobilise des connaissances spécialisées mais en nombre limité. Il s'agit surtout de savoir lire des côtes, utiliser ces renseignements pour calculer des longueurs ou des aires,

passer de longueurs sur plan aux longueurs réelles ou réciproquement (échelle) ou encore calculer une pente (de façon non théorique) ou bien mesurer un angle. Mais le plus souvent les connaissances mathématiques convoquées sont très simples et anciennes.

L'épreuve peut comporter une lecture de graphiques proches de ceux existant dans les épreuves de mathématiques. Dans une des épreuves, il est demandé de citer le théorème de Pythagore comme outil de contrôle des longueurs des éléments d'une équerre en bois, partie de la charpente.

Les supports de l'épreuve professionnelle, comparaison avec les supports de l'épreuve de mathématiques

L'élève doit travailler à partir de plans (respectant visiblement des critères professionnels) nettement plus complexes que ceux de l'épreuve de mathématiques. En revanche, certaines questions peuvent s'appuyer sur des schémas proches de ceux convoqués en mathématiques. Les plans peuvent être associés à des dessins figuratifs ou des photos. Des questions demandent aux candidats de mettre en relation les premiers et les seconds.

Conclusion

Nous constatons un décalage important dans les tâches demandées dans les deux types d'épreuves mais aussi dans les supports graphiques mobilisés.

Malgré les injonctions institutionnelles du référentiel, les représentations des épreuves mathématiques restent proches des représentations fréquentées au collège. Le contexte professionnel est souvent un prétexte pour traiter un problème mathématique. Les problématiques professionnelles sont souvent convoquées pour initialiser une résolution proche de celles demandées au collège.

Les représentations (plan notamment) de l'épreuve professionnelle sont plus complexes et servent de supports à des questions mathématiques plutôt simples mais proches de certaines questions de l'épreuve de mathématiques.

L'épreuve de mathématiques semble devoir répondre à deux logiques différentes (présentes dans les programmes officiels) : une logique professionnelle d'une part et une logique de consolidation de connaissances et compétences du socle commun de connaissances indispensable à la construction du citoyen d'autre part.

La logique professionnelle semble répondre à plusieurs objectifs. D'une part ancrer et légitimer une « mise à niveau mathématique » dans un contexte professionnel. Les connaissances mathématiques sont censées devoir fonctionner comme des modèles pouvant expliquer certaines pratiques professionnelles mais l'épreuve mathématique de l'examen demande peu de modélisation à l'élève.

D’autre part, il s’agit de réconcilier les élèves avec les mathématiques en les présentant comme des connaissances incontournables mais pouvant être masquées dans la pratique.

La logique de consolidation des connaissances semble répondre à un souci de consolider une culture générale et de stabiliser des connaissances indispensables pour le citoyen, à prévoir des mutations professionnelles et enfin à laisser une possibilité de poursuivre des études de type technique

Bibliographie

Butlen D., Masselot P., (2019), Enjeux et modalités de formation pour les professeurs des écoles en didactiques des mathématiques, *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Techonology Education*, Canada

Ministère de l'Education Nationale, Banque Nationale des sujets d'examen de l'enseignement professionnel, Epreuves de mathématiques et épreuves professionnelles n°1, (2004-2020), *Eduscol*,https://bnseep.eduscol.education.fr/ressources/examens/consultation_ministere/epreuvescb2a.html?choixdip=5002321700

Ministère de l'Education Nationale (2002), Programme de mathématiques, *Bulletin Officiel de l'Education Nationale, n°5*, 33-57

Ministère de l'Education Nationale (2010), Programme de mathématiques, *Bulletin Officiel de l'Education Nationale, n°8*, 1-30

Ministère de l'Education Nationale (2019), Programme de mathématiques, *Bulletin Officiel de l'Education Nationale, n°5*, 1-30

Robert A., Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Canadian Journal of Science, Mathématics and Technology Education 2* (4), 505-528, Toronto

Titre: Modélisation mathématique au service de la dynamique d'espèces biologiques

Auteur: DOUMATE Têlé Jonas

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 95 - 103

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Modélisation mathématique au service de la dynamique d'espèces biologiques

DOUMATE[1] Têlé Jonas

Résumé – Dans ce manuscrit, nous avons présenté le concept de la modélisation mathématique et montré son utilisation dans l'étude de la dynamique d'espèces biologiques à travers différents modèles mathématiques de la littérature.

Mots-clefs : Modèle, activité cognitive, modèle mathématique, dynamique des populations.

Abstract – In this manuscript, we present mathematical modeling concept and show its use in the dynamics of biology species through different existing mathematical models in literature.

Keywords: Model, cognitive activity, mathematical model, dynamics of population.

1. Faculté des Sciences et Techniques (FAST) / Université d'Abomey-Calavi (UAC), doumatt@yahoo.fr ou jonas.doumate@fast.uac.bj

Introduction

Les interactions entre les sciences mathématiques et biologiques se sont multipliées ces dernières années au point où les sujets traditionnels, tels que la modélisation comme la modélisation des populations, d'espèces biologiques, et des maladies, ont fait des biomathématiques un domaine passionnant et en extension. La modélisation en biomathématique conduit à l'élaboration ou à l'utilisation d'un ou plusieurs équations mathématiques décrivant le système biologique étudié. Selon l'approche de modélisation et les aspects biologiques auxquels se rapporte l'étude, ces équations peuvent être discrètes, différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles (Mamadou, 2013). L'image de la biologie comme une science non mathématique, qui persiste chez de nombreux étudiants, rend un mauvais service à ceux qui l'entretiennent (Elizabeth & John, 2004).

Les mathématiques peuvent contribuer à résoudre une variété de problèmes d'intérêt en recherche biologique. La capacité à collecter des données avec l'avènement de l'intelligence artificielle par exemple, dépasse notre capacité à raisonner de manière heuristique sur les mécanismes de cause à effet dans les systèmes complexes. C'est l'analyse des modèles mathématiques qui nous permet de formaliser le processus de cause à effet et de le relier aux observations biologiques (Gerda *et al.*, 2006).

Ce manuscrit tente de présenter le concept de la modélisation mathématique couplé avec ses principes et quelques modèles mathématiques en dynamique des populations incluant l'approche de l'analyse compartimentale utilisée en épidémiologie.

Généralités sur la modélisation mathématique

Selon la définition du dictionnaire du mot *modèle*, c'est une représentation miniature de quelque chose ; modèle de quelque chose à fabriquer ; exemple à imiter ou à émuler ; description ou analogie utilisée pour aider à visualiser quelque chose (par exemple, un atome) qui ne peut pas être observé directement ; système de postulats, de données et de déductions présenté comme une description mathématique d'une entité ou d'un état de choses ; un système de postulats, de données et d'inférences présenté comme une description mathématique d'une entité ou d'un état de fait.

Cette définition suggère que la modélisation est une activité, une activité cognitive au cours de laquelle nous réfléchissons et élaborons des modèles pour décrire la manière dont les dispositifs ou les objets sont utilisés. Selon Clive Dym (2004), il existe de nombreuses façons de décrire les dispositifs et les comportements. Nous pouvons utiliser des mots, des dessins ou des croquis, des modèles physiques, des programmes informatiques ou des formules mathématiques. En d'autres termes, l'activité de modélisation peut se faire dans plusieurs langages, souvent simultanément. Étant donné que nous nous intéressons particulièrement à l'utilisation du langage mathématique pour créer des

modèles, nous allons affiner la définition en disant qu'un *modèle mathématique* est une représentation en termes mathématiques de comportement de dispositifs et d'objets réels.

La modélisation mathématique est une activité fondée sur des principes, qui repose à la fois sur des principes et sur des méthodes qui peuvent être appliquées avec succès. Les principes sont des principes généraux ou des métas principes formulés comme des questions sur les intentions et les objectifs de la modélisation mathématique. Ces méta principes sont presque philosophiques par nature et nous résumons les principes méthodologiques et étapes de l'activité de la modélisation par un diagramme tiré du livre de Clive Dym (2004) fondés sur les réponses aux séries de questions du diagramme :

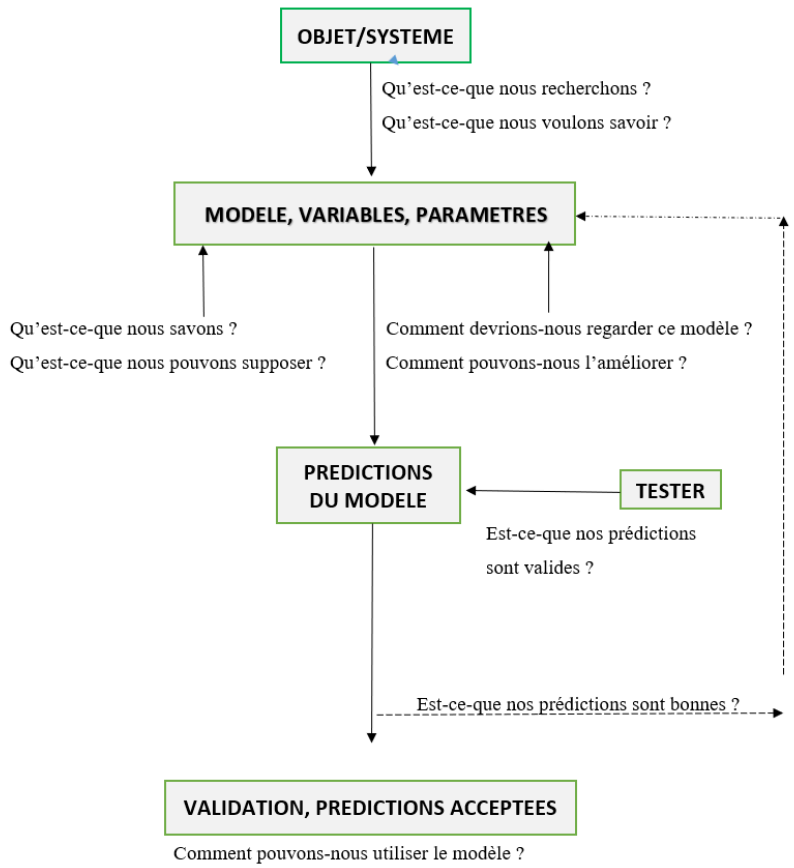


Figure 1 : Principes et étapes de la modélisation mathématique

Modèles mathématiques en dynamique de la population

La conception de modèles mathématiques en général reste un challenge et surtout en sciences agronomiques car elle doit répondre à plusieurs critères au nombre desquels nous pouvons citer :

- L'efficacité de l'outil de simulation et sa robustesse ;

- L'utilisation répétée possible ;
- La transparence ;
- La facilité dans l'application ;
- L'accessibilité aux variables ;
- L'exploitation facile de rendu de sorties ; et
- L'adaptation au changement climatique.

Nous commençons par le modèle mathématique le plus simple d'une population en évolution.

Modèle de Malthus ou modèle exponentiel.

La modélisation en biologie a commencé à être utilisée en dynamique des populations afin de modéliser à la fois la croissance des populations et les différentes interactions qui existent entre elles. Les premiers modèles de croissance de populations datent de la fin du 18e siècle avec le modèle de Malthus (Christelle, 2005) suivant les hypothèses où la taille de la population N évolue en fonction du temps (t) avec un taux de variation individuel constant et la question principale est de savoir comment se comporte cette population lorsque le temps évolue vers l'infini.

En désignant par β, le taux de variation spécifique de la population, la dynamique est régie par l'équation différentielle ordinaire

$$\frac{dN}{dt} = \beta N(t) (1)$$

La résolution de l'équation (1) nous donne

$$N(t) = N_0 e^{\beta t} (2)$$

avec la taille de la population à l'instant initial. À partir de l'équation (2), la dynamique dépend ainsi du signe de β comme le montre le tableau suivant :

	Etat de la population
$\beta < 0$	La population diminue
$\beta = 0$	La population ne varie pas
$\beta > 0$	La population augmente

L'étude du comportement asymptotique de cette population montre qu'à l'infini, lorsque $\beta = 0$, la population reste constante ; lorsque $\beta < 0$, la population s'éteint ou disparaît tandis que quand, $\beta > 0$ la population croît indéfiniment. Le fait que la population augmente de manière exponentielle dans le dernier cas n'est pas satisfaisant du point de vue biologique car les ressources de l'environnement étant souvent limitées. Nous allons maintenant considérer un autre modèle de croissance qui tient compte de cette préoccupation.

Modèle continu de Verhulst ou modèle logistique.

Le modèle de croissance logistique est beaucoup plus réaliste comparé au modèle de Malthus dans lequel les ressources disponibles ne sont pas prises en compte; donc supposées illimitées, ce qui conduit à une explosion de la population dans le cas d'une croissance exponentielle. Le modèle de Verhulst est l'un des premiers modèles qui décrit l'évolution d'une population (bactéries, animaux, etc.). La version simplifiée de ce modèle consiste à considérer les taux de natalité, *b* et de mortalité, *d*, constants. En notant par *N(t)* la taille de la population considérée, le modèle est représenté par l'équation suivante :

$$\frac{dN}{dt} = \beta N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right) (3)$$

où

- β est le taux de variation spécifique de la population avec ; étant le taux de naissance spécifique (supposé constant) et, le taux de mortalité spécifique (supposé croissant par rapport à la taille de la population) avec $d = d_0 + \gamma N(t)$;
- .

$$k = \frac{\beta}{\gamma}.$$

La résolution mathématique de l'équation (3) avec la donnée initiale $N(0) = N_0$ donne :

$$N(t) = \frac{kN_0}{N_0 + (k - N_0)e^{-\beta t}}.$$

Ce modèle nous fournit deux points d'équilibre $N_1 = 0$ et $N_2 = k$ et les questions de stabilité peuvent être étudiées en analysant les scénarios à la position de par rapport à N_0.

Modèle continu de Gompertz.

Gompertz (1779 - 1865) a introduit son modèle pour améliorer aussi celui de Malthus en démographie. Le modèle de Gompertz considère le taux de natalité *b* constant mais suppose que le taux de mortalité est une fonction logarithmique de la taille de la population ; ce qui trouve sa justification dans le fait que la mort peut être une conséquence de deux causes qui coexistent. Ce modèle est maintenant utilisé dans de nombreux domaines.

Modèle d'espèces en compétition (modèle de Lotka-Volterra).

Le modèle de Lotka-Volterra est un modèle type de coexistence de deux populations et où l'une est une proie pour l'autre considérée comme prédateur. Une représentation mathématique de l'interaction entre ces deux espèces est décrite par le système d'équations différentielles

(S'

où N est la densité de proies, M la densité de prédateurs, *a* = taux de croissance des proies, *b* = taux de rencontres des prédateurs avec les proies, c = efficacité de la conversion des proies en nouveaux prédateurs et *d* représente le taux de mortalité des prédateurs. Les solutions de (S') sont des solutions périodiques autour du point d'équilibre et $N = \frac{d}{c}$ et $M = \frac{a}{b}$.

Modèles compartimentaux en épidémiologie.

En présence d'une épidémie, la dynamique de la population peut être étudiée par des modèles épidémiologiques représentés par des compartiments. On distingue, pour le cas le plus simple, trois catégories d'individus (appelées compartiments) en fonction de leur susceptibilité vis-à-vis de la maladie ; les susceptibles (S) qui sont des individus sains mais qui peuvent être contaminés, les infectés (I) et les remis (R) qui retrouvent le statut des susceptibles ; ce qui correspond au modèle dénommé modèle SIS. Le système d'équations différentielles correspondant à ce modèle est le suivant :

où les coefficients, et sont compris entre 0 et 1. On note aussi ce qui suit :

- le terme quantifie le nombre d'individus susceptibles qui sont infectés par unité de temps ;
- le terme représente le nombre d'individus infectés qui guérissent par unité de temps ;
- le terme représente d'individus immunisés et qui perdent leur immunité par unité de temps.

En annulant les seconds membres dans le système, on trouve deux points d'équilibre à savoir :

et : $S(quelconque); I_1 = 0; R_1 = 0$

$$S_2 = \frac{\vartheta}{\beta}; I_2 = \frac{\gamma R}{\vartheta}; R_2 = R(quelconque)$$

L'existence d'intégrale première de permet de réduire la dimension du modèle et le reste de l'étude se fait autour de la nature des points d'équilibre et de leur stabilité.

Conclusion

Dans ce manuscrit, nous avons présenté quelques modèles mathématiques qui sont utilisés en biologie et bien d'autres domaines. L'implication des mathématiques dans tous les domaines continue d'exploser et les recherches doivent continuer sur l'adaptation de techniques et théories mathématiques pour répondre aux problèmes de la vie. L'utilisation de l'intelligence artificielle est une perspective pour affiner les modèles de dynamique d'espèces et les rendre le plus efficace possible.

Références

Allman, Elizabeth S. & Rhodes, Elizabeth S. (2004). *Mathematical Models in Biology: An Introduction*. Cambridge University Press.

Dym, Clive (2004). *Principles of Mathematical Modeling, 2nd Edition*. eBook ISBN: 9780080470283, Hardcover ISBN: 9780122265518.

de Vries, Gerda, Hillen, Thomas, Lewis, Mark, Müller, Johannes & Schönfisch, Birgitt, (2006). *A course in Mathematical Biology: Quantitative Modeling with Mathematical and Computational Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).

Diagne, Mamadou Lamine (2013), *Modélisation et étude mathématique de la dynamique de prolifération du Typha dans le Parc National des Oiseaux de Djoudj (PNOD)*. HAL Id: tel-02180823, https://theses.hal.science/tel-02180823.

Magal, Christelle (2005). *Mathématiques en dynamique des populations*. Bulletin de l'APMEP. N°459. p. 437-448.

Titre: Le calcul de dose médicamenteuse en milieu hospitalier : activité mathématique ou activité infirmière?

Auteur: RODITI Éric

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 104 - 113

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Le calcul de dose médicamenteuse en milieu hospitalier : activité mathématique ou activité infirmière?

RODITI[1] Éric

Résumé –Nos recherches sur le calcul de dose médicamenteuse conjuguent des analyses issues de la didactique des mathématiques et de la didactique professionnelle. Elles révèlent différentes possibilités de raisonnement qui répondent à des besoins spécifiques. Elles montrent également que cette activité infirmière repose sur des concepts pragmatiques qu'il serait utile de développer en formation.

Mots-clefs : Calcul de dose, proportionnalité, didactique professionnelle

Abstract – Our researches on drug dosage calculation combine mathematics and ergonomics analyses. They reveal different possibilities of reasoning, which respond to specific needs. They also show that this nursing activity is based on pragmatic concepts that would be useful to develop in training.

Keywords: Drug dosage calculation, proportional reasoning, ergonomics

1. Université Paris Cité, Laboratoire EDA, France, eric.roditi@u-paris.fr

Introduction

En France, en milieu hospitalier, il revient aux infirmières d'administrer les médicaments, quelle que soit leur forme. Pour les produits injectables en continu, elles doivent effectuer elles-mêmes la préparation qui est parfois complexe (Roditi, 2014 ; Wright, 2009b) et les erreurs ont des conséquences parfois tragiques (Infirmiers.com, 2020). Les recherches que nous effectuons visent à mieux comprendre cette activité (Roditi, 2014 ; Benlahouès, 2020 ; Benlahouès & Roditi, 2023 ; Benlahouès & Roditi, à paraître). Nous avons notamment étudié la préparation d'une injection de dobutamine en service de soins intensifs (ce médicament soutient l'activité cardiaque en cas d'insuffisance grave). Nos recherches, fondées par la didactique des mathématiques et la didactique professionnelle, nous ont permis de mettre en évidence les raisonnements qui sous-tendent les calculs et d'aboutir à cette conclusion que l'activité de calcul de dose ne relève pas seulement d'un registre épistémique, en appui sur les mathématiques, mais aussi d'un registre pragmatique correspondant aux objectifs, normes et contraintes professionnelles (Pastré, Mayen & Vergnaud, 2006).

Dans la partie II de ce texte, nous développons une analyse de l'activité de calcul de dose montrant les raisonnements mathématiques en jeu, avec une explicitation de la diversité des possibles et des origines de cette diversité. C'est ce qu'en didactique professionnelle on appelle le registre épistémique de la conceptualisation de l'activité. Dans la partie III, nous montrons que cette activité de préparation médicamenteuse repose également sur deux concepts organisateurs de l'activité liés au métier lui-même. C'est ce qu'en didactique professionnelle on appelle le registre pragmatique de la conceptualisation de l'activité. Ces deux registres constituent l'apport majeur de nos recherches car, jusqu'à présent, les chercheurs ont mené soit des études épidémiologiques pour rendre compte de la fréquence des erreurs selon les services, les médicaments, etc. (Michel *et al.*, 2011), soit sur les techniques de calculs (Hoyles, Noss & Pozzi, 2001 ; Wright, 2008, 2009a, 2009b).

Le calcul de dose : Registre épistémique

Partons donc d'une prescription médicale de dobutamine, telle qu'on peut la rencontrer en milieu hospitalier, cela nous permettra de rendre compte de ce qui justifie le calcul de dose, des variables en jeu et des raisonnements possibles pour préparer l'injection.

Ce qui explique pourquoi les infirmières calculent

La dobutamine est administrée au patient en continu par injection intra-veineuse (IV), avec un débit massique constant dont la valeur dépend à la fois de sa pathologie et de son poids. L'injection à débit constant est assurée par un pousse-seringue électrique (PSE). La prescription médicamenteuse indique un nombre de µg/kg/min : les kg correspondent au poids du patient et les µg/min au débit massique médicamenteux. Elle ne tient pas compte du fait que les infirmières travaillent avec des

produits dilués ; c'est précisément ce qui engendre la nécessité du calcul de dose. En France, la dobutamine est conditionnée par les laboratoires pharmaceutiques en flacons de 250 mg pour 20 mL. Pour éviter la confusion entre produit sec et produit dilué, nous écrirons « dobutamine » pour le premier et « Dobutamine© » pour le second.

Préparer une injection consiste à prélever dans une seringue un volume de Dobutamine© et à le compléter éventuellement avec un diluant pour obtenir une concentration du produit et un débit volumique qui correspondent au débit massique prescrit. Sans entrer dans le détail des relations entre les paramètres et les variables en jeu, indiquons-les pour rendre compte de la complexité de la tâche de l'infirmière. Paramètres : poids du patient ; horaire du début de l'injection ; débit massique médicamenteux prescrit ; masse, volume et concentration de dobutamine dans les flacons ; capacité volumique de la seringue. Variables : durée de l'injection ; horaire de renouvellement de la seringue ; dose en mg de dobutamine contenue dans la seringue ; nombre de flacons à utiliser ; volume de Dobutamine© prélevé ; volume de diluant ajouté ; concentration de dobutamine dans le liquide médicamenteux préparé par l'infirmière et débit d'injection de ce liquide.

Voyons à présent une prescription médicale telle qu'on peut la rencontrer en milieu hospitalier, et détaillons les calculs que l'infirmière pourra effectuer.

Premier type de raisonnements : entrée par la dose

Tout commence par la prescription médicale :

M. Dupré, 50 kg. 1er décembre 2022, 10 h 30. Dobutamine : 10 µg/kg/min en IV par PSE.

Développons le raisonnement que tiendrait un élève, et voyons quelles adaptations sont nécessaires pour le rendre compatible avec les nécessités du travail infirmier.

Compte tenu du poids du patient qui est égal à 50 kg, la prescription de 10 µg/kg/min correspond à 0,5 mg/min soit 30 mg/h. On prélève un flacon avec la seringue, et comme il y a 250 mg dans un flacon, la durée d'injection correspondant à cette dose est : 250 mg / 30 mg/h = 25/3 h = 8 h 20 min. Le flacon contient 20 mL de solution, le débit de la seringue doit donc être réglé à : 20 mL / 25/3 h = 60/25 mL/h = 2,4 mL/h.

Cette préparation n'est pas pratique en service hospitalier pour différentes raisons : les calculs sont difficiles à effectuer ; la durée n'est pas adaptée aux journées de travail des infirmières qui durent 12 h ; le travail serait à refaire totalement si l'évolution de l'état du patient conduisait à revoir la prescription.

Il est assez simple d'adapter le raisonnement « scolaire » pour obtenir une injection de 12 h. La prescription étant de 30 mg/h = 360 mg/12h, il suffit de prélever 360 mg. Comme les flacons contiennent 250 mg dilués dans 20 mL, un calcul de quatrième proportionnelle conduit à un volume de 28,8 mL et à un débit du PSE de 28,8 mL / 12 h = 2,4 mL/h. La difficulté de cette dernière division peut être évitée :

l'infirmière complète les 28,8 mL par un diluant (eau pour préparation injectable ou EPPI) jusqu'à 48 mL. Comme ce volume doit passer en 12 h, il suffit de régler le débit à 4 mL/h.

La figure 1 illustre cette préparation qu'on rencontre à l'hôpital.

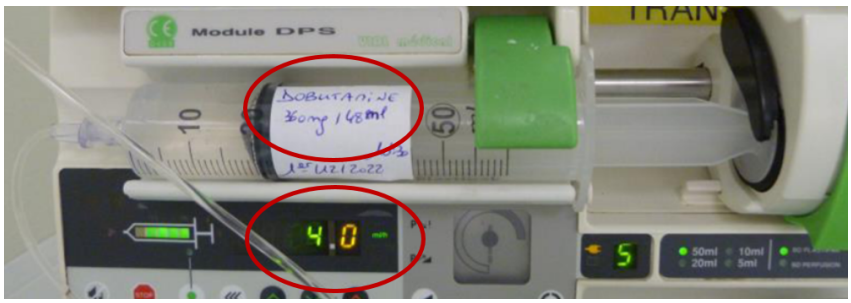


Figure 1 – Seringue de dobutamine préparée pour 12 h (48 mL à 4 mL/h)

Cette préparation a toutefois un défaut qui fait qu'elle n'est pas utilisée dans les services où les patients sont instables : si la prescription change, il faut préparer une nouvelle seringue. Voyons d'autres raisonnements possibles pour éviter cet inconvénient.

Deuxième type de raisonnements : entrée par la concentration

Un autre type de raisonnement est possible, il commence par fixer, non pas la durée de l'injection, mais la concentration du produit médicamenteux qui doit faciliter les calculs. La capacité de la seringue étant de 50 mL, l'infirmière dilue, par exemple, une ampoule dans 50 mL et elle obtient une concentration de 250 mg / 50 mL = 5 mg/mL. La prescription étant toujours de 30 mg/h, il lui suffira de régler de débit à 6 mL/h. Et si le médecin passait d'une ordonnance de 10 µg/kg/min à 5 µg/kg/min il lui suffirait alors de régler le débit à 3 mL/h, sans changer la seringue. La figure 2 montre que c'est une préparation qu'on rencontre à l'hôpital.

Spécialité commerciale		°DOBUTAMINE AGT 250MG IV 20ML®
Dose		
(Dose maxi)		
Dose /kg		10 µg/kg/min
(Dose maxi /kg)		30 µg/kg/min
Utiliser posol fonction du poids	*	Oui
Concentration	*	5 mg/ml
Quantité dans SE	*	250 mg
Volume dans SE		50 ml
Type de diluant	*	EPPI
Débit prescrit		6 ml/h
(Débit max prescrit)		18 ml/h
Volume total		50 ml
Poids		50,000 kg - Admission
Instructions		20 ml Dobutamine 250mg/20ml à diluer dans 30ml d'EAU PPI
Recommandations		Averir si tachycardie >120
Début	*	01/12/2022 10:30
Fin		
Fréquence	*	en continu

Figure 2 – Préparation d'une seringue avec une concentration 5 mg/mL

La figure 2 est une capture d'écran d'ordinateur : dans certains services, les prescriptions sont informatisées et les infirmières sont guidées par le logiciel pour la préparation des seringues.

Sans assistance informatique, l'infirmière doit calculer pour passer d'une prescription en µg/kg/min à une prescription en mg/h. Pour éviter ce passage des µg/kg/min aux mg/h, certains services hospitaliers préconisent un autre type de raisonnements présenté dans la section suivante où l'infirmière met directement en relation le débit massique prescrit et le débit volumique du PSE.

Troisième type de raisonnements : entrée par le débit

Dans ce troisième type de raisonnements, la concentration de dobutamine est choisie de telle manière que le débit volumique du PSE sera de 1 mL/h pour une prescription de 1 µg/kg/min. En supposant que la seringue soit remplie intégralement (50 mL) et que le débit soit bien de 1 µg/kg/min, alors la seringue durera 50 h. Pour un patient de poids P, il faudra une masse de dobutamine en mg égale à : 10^{-3} mg/µg × P kg × 60 min/h × 50 h = 3 × P mg.

Ce résultat est appelé la « règle des trois fois le poids » et est appliqué directement par les infirmières qui passent du poids de 50 kg à une masse de 150 mg de dobutamine. Le calcul du volume de Dobutamine© à prélever est un calcul de quatrième proportionnelle puisque le flacon contient 250 mg dans 20 mL. Le volume à prélever est donc de 12 mL, volume qu'il faudra compléter par de l'EPPI jusqu'à 50 mL. Avec une telle seringue, la prescription de 10 µg/kg/min sera associée à un débit du PSE réglé à 10 mL/h.

Un autre raisonnement avec entrée par le débit est possible. Il consiste à fixer le volume de Dobutamine© puis à le diluer pour obtenir une concentration adaptée. Comme les débits volumiques sont importants, il faut que les liquides médicamenteux soient peu concentrés en dobutamine. L'infirmière prélève par exemple un demi-flacon, soit 10 mL, ce qui correspond à 125 mg de dobutamine. Une prescription de 1 µg/kg/min pour une personne de 50 kg correspond à un débit massique de 3 mg/h et doit correspondre à un débit volumique de 1 mL/h. Il faut donc une concentration de 3 mg/mL, c'est-à-dire un volume d'environ 42 mL pour les 125 mg prélevés. L'infirmière complètera donc les 10 mL de Dobutamine© par 32 mL d'EPPI.

Dans cette partie II, nous avons présenté les quatre seuls raisonnements possibles, ils ont été mis au jour par une analyse mathématique *a priori* (Benlahouès & Roditi, 2023) : un raisonnement avec entrée par la dose, un raisonnement avec entrée par la concentration et deux raisonnements avec entrée par le débit. Une enquête par questionnaire a été réalisée sur 21 infirmières exerçant dans des services de soins intensifs différents, elle montre que tous ces raisonnements sont bien mobilisés sur le terrain (Benlahouès, 2020).

Une autre enquête a été conduite par observation puis par entretien d'auto-confrontation ; elle donne accès à la fois aux raisonnements mathématiques tenus par les infirmières, mais aussi à l'organisation générale de l'activité calculatoire : les variables de la situation sur lesquelles s'appuie la professionnelle, les moyens de contrôle qu'elle met en œuvre, les adaptations qu'elle anticipe ou qu'elle effectue en cas d'incident, etc.

Le calcul de dose : Régistre pragmatique

Dans cette enquête par observations et entretiens auprès des infirmières, nous cherchons à identifier les concepts pragmatiques (Pastré, Mayen & Vergnaud, 2006) qui organisent leur activité, qui la guident et qui leur permettent de la contrôler. Après une description de notre méthodologie d'enquête, nous présentons deux concepts pragmatiques mis en évidence.

Méthodologie de notre enquête par observation de l'activité et par entretien

Cette enquête a été réalisée auprès de 15 infirmières ayant une ancienneté variable en service de soins intensifs (Benlahouès, 2020 ; Roditi & Benlahouès, à paraître). L'activité en situation professionnelle est très difficilement observable compte tenu du contexte de travail, en outre les entretiens post-activité sont impossibles à effectuer sur le terrain. Nous avons donc procédé par observation d'activités simulées suivie d'un entretien post-activités et d'un entretien d'auto-confrontation. Une pièce a été mobilisée en milieu hospitalier, les infirmières disposaient du matériel usuel, elles étaient filmées durant l'activité de préparation. Les protocoles indiqués pour la préparation des seringues étaient variables, ils correspondaient donc aux protocoles habituels des infirmières pour certains d'entre eux seulement. Cela a engendré des perturbations qui ont donné lieu à de riches commen-

taires durant les entretiens post-activités. Les entretiens d'auto-confrontation ont été également très utiles pour mettre au jour deux concepts pragmatiques qui organisent leur activité et que nous avons nommés « sécurité » et « efficacité » en reprenant les propres termes des professionnelles.

La sécurité : premier concept pragmatique du calcul de dose

La sécurité du patient est évoquée par les infirmières à propos de leur capacité à préparer une seringue en utilisant un raisonnement simple, adapté à l'état du patient et de façon sereine. Les enquêtées indiquent toutes qu'il faut que ce soit « simple à préparer pour être simple à injecter ». Certaines évoquent alors la possibilité de faire les calculs de tête, avec des « chiffres ronds » – qualifiés de précis – avec le recours à la calculatrice ou au produit en croix comme outils de vérification en cas de doute. L'administration avec un débit fixe ou adaptable est évoquée par de nombreuses infirmières. Les raisonnements orientés par la concentration ou par le débit est préféré car il permet d'adapter le débit d'administration en cas de changement de prescription, sans changer la seringue.

À ces considérations d'ordre cognitif s'ajoutent des repères portant sur les matériels et leur disponibilité, qu'il s'agisse des flacons de médicaments ou des différents types de seringues. La sécurité est également associée à la dimension collective du travail, à l'appui sur des règles communes et à la possibilité réelle d'interroger une collègue, voire le médecin en cas de doute sur la prescription.

« L'efficacité » : deuxième concept pragmatique du calcul de dose

Les infirmières enquêtées utilisent toutes le terme d'efficacité pour qualifier une réalisation optimale du soin : le strict respect de la prescription médicale ainsi que la prise en compte simultanée de la dangerosité du produit injectable et de la fragilité du patient. L'effet du traitement est évalué par des prises d'informations médicales régulières sur le patient.

Les enquêtées sont nombreuses à déclarer ne pas apprécier que les calculs les obligent à procéder à des arrondis. Les débutantes déclarent préférer que leur activité soit la plus guidée possible, par exemple par l'informatique. Les infirmières expérimentées sont habituées à des prescriptions plus sommaires et associent moins fortement leur recherche d'efficacité à une éventuelle crainte de ne pas respecter la prescription médicale. Dans le cas d'une prescription informatisée, certaines indiquent d'ailleurs contrôler systématiquement les valeurs affichées à l'écran et parfois ne pas appliquer le protocole quand elles n'ont pas la certitude absolue de ne pas commettre d'erreur médicale en le respectant.

Conclusion

Nos recherches ont mis au jour les quatre raisonnements qui organisent l'activité du calcul de dose de dobutamine. Nos travaux antérieurs sur la formation (Roditi, 2014) révèlent que les cadres de santé qui forment les étudiantes en soins infirmiers enseignent presque exclusivement le raisonnement avec une entrée par la dose, parce qu'il n'exige pas d'opérer sur des grandeurs quotients (concentration, débit massique ou volumique, etc.), mais seulement sur des grandeurs simples (durée, dose, volume, masse, etc.). Pourtant, les autres raisonnements sont ceux qui conduisent à des préparations adaptables en cas d'évolution de l'état du patient et qui sont, pour cette raison, sous-jacents aux protocoles utilisés dans les services hospitaliers de soins intensifs.

Nos recherches montrent également que deux concepts pragmatiques organisent l'activité de calcul de dose. Celui de *sécurité* guide le travail de préparation par une recherche de raisonnement simple et contrôlable, adaptable à l'état du patient, qui s'effectue de façon sereine. Celui d'efficacité participe à la fois du strict respect de la prescription médicale et de l'équilibre entre la dangerosité du produit et la fragilité du patient.

Par nos recherches, c'est bien l'élucidation des savoirs de référence à l'activité experte que nous visons, pour une transposition dans les dispositifs de formation. Nous cherchons ainsi à contribuer à la réponse au défi de santé publique que constitue la lutte contre les événements indésirables graves liés au soin.

Références

Benlahouès, D. (2020). *Le calcul de doses médicamenteuses : Une conceptualisation de l'activité infirmière en service de réanimation*. Thèse de doctorat, Université de Paris.

Benlahouès, D. & Roditi, E. (2023). Le calcul de dose médicamenteuse : analyse didactique et conceptualisation de l'activité infirmière. *Éducation & didactique, 17*.

Benlahouès, D. & Roditi, E. (à paraître). L'activité infirmière de calcul de dose : le cas de la dobutamine. *Carrefour de l'éducation*.

Hoyles, C., Noss, R. & Pozzi, S. (2001). Proportional Reasoning in Nursing Practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(1), 4-27.

Infirmiers.com, R. (2020, janvier 10). Trois histoires autour d'événements indésirables graves liés aux soins. *Infirmiers.com*.

Pastré, J., Mayen, P. & Vergnaud, G. (2006). La didactique professionnelle. *Revue française de pédagogie, 154*, 145-198.

Roditi, E. (2014). Le calcul des doses médicamenteuses. Pratiques professionnelles et choix de formation en soins infirmiers. *Recherches en didactique des mathématiques, 34*(2), 103132.

Michel, P., *et al.* (2011). Les événements indésirables graves dans les établissements de santé : Fréquence, évitabilité et acceptabilité. *Études et résultats, 761*. DREES (Direction de la Recherche, des Études et de l'Évaluation et des Statistiques).

Wright, K. (2008). Drug calculations. *Nursing standard, 22*(36), 40-42 & 22(37), 42-44.

Wright, K. (2009a). Supporting the development of calculating skills in nurses. *British Journal of Nursing, 18*(7), 399402.

Wright, K. (2009b). Developing methods for solving drug dosage calculations. *British Journal of Nursing, 18*(11), 685-689.

Titre: Visions du colloque EMF 2022

Auteurs: ARNOUX Pierre, ARTIGUE Michèle, NGNINGONE EYA Isabelle, SALONE Jean-Jacques

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 114 - 125

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Visions du colloque EMF 2022

ARNOUX[1] Pierre – ARTIGUE[2] Michèle – NGNINGONE EYA[3] Isabelle – SALONE[4] Jean-Jacques

Résumé – Le comité scientifique du EMF 2022 nous avait invités à jouer le rôle de grands témoins dans ce colloque EMF 2022. Dans ce texte, comme nous l'avons fait lors de la séance plénière qui a clôturé le colloque, après nous être brièvement situés, nous explicitons chacun à notre tour notre vision de ce collloque, ce qui nous y a particulièrement intéressés, ce qui nous a étonnés, posé question et ce que nous en retenons en priorité, avant de conclure par quelques réflexions plus générales.

Mots-clefs : mathématiques, didactique des mathématiques, apprentissage, enseignement, formation

Abstract – The scientific committee of EMF 2022 had invited us to play the role of major witnesses in this EMF 2022 conference. In this text, as we did during the plenary session that closed the conference, after briefly situating ourselves, we each explain our vision of this conference, what particularly interested us, what surprised us, what raised questions and what we mainly retain from it, before concluding with a few more general thoughts.

Keywords: mathematics, mathematics education, learning, teaching, training

1. Université d'Aix-Marseille, Institut de Mathématiques de Marseille, France, pierre@pierrearnoux.fr

2. Université Paris Cité, LDAR, France, michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

3. Université des Sciences et Techniques de Masuku, Gabo, isabelle.ngningoneeya@univ-masuku.org

4. Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Mayotte, France. Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, France, jean-jacques.salone@univ-mayotte.fr

Introduction

Le comité scientifique de EMF 2022 nous avait invités à jouer le rôle de « grands témoins » dans ce colloque. Il s'agissait pour nous, selon la demande du comité, d'apporter un regard réflexif et critique sur le contenu du colloque, en prenant en compte sa thématique spécifique « L'activité mathématique dans une société en mutation : circulation entre recherche, formation, enseignement et apprentissage », un regard nourri de nos perspectives respectives. Dans ce texte, après avoir brièvement situé chacun d'entre nous et précisé comment nous avons organisé notre travail pour répondre à la demande du comité scientifique, nous explicitons, tour à tour, notre vision de ce collloque, ce qui nous y a particulièrement intéressés, ce qui nous a étonnés, questionnés, et ce que nous en retenons en priorité, comme nous l'avons fait lors de la séance plénière qui a clôturé le colloque.

Nous sommes tous les quatre enseignants-chercheurs mais nous avons des histoires, des centres d'intérêts, des domaines d'expertise différents. Deux d'entre nous font leur recherche en mathématiques : Isabelle Ngningone Eya et Pierre Arnoux. Isabelle Ngningone Eya est spécialiste de modélisation et de systèmes dynamiques. Elle travaille à l'Université des Sciences et Techniques de Masuku et à l'Ecole Normale Supérieure de Libreville au Gabon. Elle est très investie dans la formation des enseignants et c'était son premier EMF. Pierre Arnoux, enseignant-chercheur à l'Université d'Aix-Marseille, est lui aussi spécialiste de systèmes dynamiques. Il est depuis longtemps impliqué dans les activités de l'IREM d'Aix-Marseille et a présidé le comité scientifique des IREM. Il a aussi été membre du groupe d'experts chargé de l'écriture des programmes de mathématiques lors de la réforme du lycée général de 2000. C'était sa quatrième participation à un EMF. Les deux autres grands témoins sont Jean-Jacques Salone et Michèle Artigue. Jean-Jacques Salone a une formation initiale d'ingénieur et il est ethnomathématicien. Il travaille au Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Mayotte. C'était son premier EMF. Michèle Artigue est didacticienne des mathématiques et professeure émérite à l'université Paris Cité. Elle a participé à tous les EMF depuis celui de Tozeur en 2003.

Dans les colloques EMF, une grande importance est donnée aux groupes de travail (GT) qui fonctionnent en parallèle. A EMF 2022, il en existait 11. A ceci s'ajoutaient, au delà des séances plénières, trois projets spéciaux et deux discussions programmées qui fonctionnaient aussi en parallèle. Pour couvrir toutes les activités, nous nous sommes répartis les groupes de travail, les projets spéciaux et les discussions programmées. Nous nous sommes aussi réunis tous les jours, pour échanger nos impressions, discuter de ce que chacun de nous avait envie d'aborder dans son témoignage, nous coordonner pour choisir un ordre de parole et éviter, si possible, les répétitions. Nous avons ainsi choisi de débuter par les deux grands témoins qui participaient pour la première fois à EMF, Isabelle Ngningone Eya et Jean-Jacques Salone, et de terminer par Michèle Artigue qui en a la plus longue expérience. Nous reprenons le même ordre dans ce texte.

La vision d'Isabelle Ngningone Eya

Vers le début de novembre 2022, Adolphe Adihou, Président du comité scientifique du colloque de EMF2022, me contactait pour m'inviter à assister, à titre de grand témoin, à un colloque qui allait se tenir en décembre 2022. Ma première réaction a été : Espace Mathématique Francophone, que sommes-nous encore allés inventer ? Je n'en avais jamais entendu parler. Je suis allée sur le site de l'EMF m'imprégner des objectifs et de l'historique de cette structure. Et, pour ma part, dès que j'entends la juxtaposition des mots « enseignement » et « mathématiques » je suis toujours partante. C'est ainsi que, depuis le 12 décembre, je me retrouve ici, attentive, l'oreille tendue.

Commençons par le choix des groupes de travail. J'ai choisi, en accord avec les autres grands témoins, de parcourir les trois groupes de travail suivants :

- GT 5 : Modélisation, interdisciplinarité et complexité ;
- GT6 : Enseignement des mathématiques au post-secondaire, au supérieur et dans les filières professionnelles ;
- GT11 : Evaluations dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Ces thèmes m'ont interpellée d'une manière singulière. D'abord, parce qu'ils se révélaient être les mots-clés derrière mon identité mathématique et, pour emprunter les termes employés par Fagueye Ndiaye lors du colloque, ma citoyenneté mathématique, ensuite parce que, devant l'évidence de ma méconnaissance de la didactique des mathématiques, il me fallait intégrer ces thèmes du point de vue des didacticiens.

Diversité est l'un des mots qui qualifieraient certainement le mieux cette semaine que nous venons de vivre : diversité de thèmes, d'approches, de projets, de domaines de recherche, d'origines géographiques, culturelles, mais une diversité fédérée autour de cet objet commun qu'est l'enseignement des mathématiques. Voir ainsi les enseignants du primaire, du secondaire, du supérieur, se retrouver pour présenter et discuter de leurs travaux au sein d'une atmosphère dynamique et collaborative, a été pour moi une première.

Au fil des présentations, certains éléments m'ont paru surgir de manière récurrente, en particulier, l'existence de deux voix de la didactique des mathématiques, une française et une canadienne, les pays francophones du Sud se retrouvant comme partagés entre deux amours. A première vue, j'ai pensé que ces deux voix étaient discordantes, mais non, il s'agit plutôt de sensibilités différentes qui, mises en commun, donnent quelque chose d'extraordinaire : une sensibilité didactique où le regard est plus centré sur les élèves, et une autre où le regard est plus centré sur l'élément mathématique. C'est cette diversité des regards qui, pour ma part, a donné toute sa beauté à ce colloque.

Toutefois, une question revenait sans cesse à mes lèvres. Cette diversité des cultures, d'origines géographiques, met aussi en évidence les inégalités et variabilités entre régions, entre pays. Est-ce que ces modèles, ces approches, ces expérimentations sont applicables ou encore adaptables d'un contexte éducatif à l'autre ? Peut-être devons-nous progresser vers des visions où l'on peut aider des enseignants de cultures différentes à s'y retrouver.

Par ailleurs, en ce qui concerne le GT6 « Enseignement des mathématiques au post-secondaire, au supérieur et dans les filières professionnelles », il y avait peu de communications présentées mais les discussions autour de ces dernières ont été très enrichissantes. Cela m'a amenée à m'interroger : cette problématique n'intéresse-t-elle pas les didacticiens des mathématiques ? Et si oui, pourquoi ? Nous, les enseignants de mathématiques du Supérieur, si je peux me le permettre, nous démarrons très souvent notre carrière avec un manque qui peut se transformer pour certains en handicap : pas de formation en didactique des mathématiques, pas de formation en psychopédagogie. Nous sommes donc souvent peu outillés pour faire face à la transition secondaire-supérieur.

Toutefois, et c'est aussi ça la magie de ce colloque ; nous faisons des rencontres, nous avons des débats dans les couloirs, et j'ai pu discuter avec des personnes qui m'ont édifiée sur cette problématique. Aujourd'hui, grâce à cet EMF2022, je sais par exemple qu'il existe un séminaire en ligne traitant de cette transition.

Ma dernière réflexion portera sur le mode de participation aux EMF qui se veut présentiel. Celui-ci était le premier colloque post-pandémie. Il était organisé en présentiel mais nous avons pu aussi bénéficier d'intéressantes contributions à distance. Peut-être, tout en insistant toujours sur le présentiel, les EMF pourraient-ils migrer vers un mode hybride.

Je voudrais enfin, pour terminer ce témoignage, dire combien cette première expérience EMF a été pour moi riche en enseignements, rencontres et partages.

La vision de Jean-Jacques Salone

Tout comme ma collègue Isabelle Ngningone Eya, cette participation au colloque EMF 2022 fut pour moi une première. La commande du comité scientifique était d'apporter un regard d'ethnomathématicien sur les activités du colloque (Ascher & D'Ambrosio, 1994), c'est-à-dire d'interroger la place accordée au plurilinguisme, au pluriculturalisme et, plus généralement, à la prise en compte des contextes territoriaux, dans les communications, les ateliers et les discussions du colloque.

J'ai suivi ainsi trois groupes de travail, les deux premiers ayant, dans les faits, fusionné :

- GT1 :Développement professionnel et travail collaboratif ;
- GT2 : Pratiques, stratégies et dispositifs de formation ;

- GT4 : Dimensions historique, culturelle et langagière dans l'enseignement des mathématiques.

Tout d'abord, il faut souligner la grande diversité culturelle des participants, avec près de 15 territoires représentés et le fort investissement de nos collègues béninois. Cette diversité culturelle, mais aussi la diversité professionnelle et la diversité des formats, aura été gage d'échanges et de débats riches et fructueux, bienveillants et respectueux. Cette diversité multiforme est une caractéristique précieuse des colloques EMF.

Si l'analyse est poussée plus loin, il apparaît très vite que les questions relatives aux langues et aux cultures dans l'enseignement et la recherche en mathématiques ont été très présentes de façon explicite et implicite. En effet, le colloque a déjà commencé par la conférence inaugurale du professeur Saliou Touré qui, depuis fort longtemps, agit pour la prise en compte des contextes socio-culturels dans l'enseignement, prônant l'intégration des pratiques traditionnelles dans l'enseignement et la production de ressources pédagogiques contextualisées (Touré, 2000). Son action autour de l'harmonisation des programmes de mathématiques dans les années 80, avec édition de manuels scolaires (collections IRMA puis CIAM[5]), en est un exemple majeur et fondateur.

Autre activité dans ce colloque, la discussion programmée spécifiquement consacrée au bi-plurilinguisme dans les apprentissages mathématiques aura été particulièrement suivie, avec deux sessions, l'une présentant des contextes spécifiques dans l'espace mathématique francophone (Mayotte, Polynésie française, Guyane, Cameroun et Tunisie), l'autre des réseaux de recherche internationaux et/ou pluridisciplinaires (GREMA, RIICLAS, Commission Internationale InterIREM, OPA)[6]. Les réactions furent nombreuses et positives, avec des participants qui ont parfois découvert à cette occasion des questions de recherche autour des langues et de leurs statuts à l'école, de leurs effets sur les apprentissages et de leurs liens avec les pratiques de la vie quotidienne.

Dans les groupes de travail, là aussi, la prise en compte de la singularité des personnes, enseignants, formateurs et apprenants, aura été une constance. Le groupe de travail GT4 en particulier aura permis de réfléchir aux liens entre langues, numérations, calcul mental et pensée algébrique.

Le projet spécial sur les activités manipulatoires en mathématiques aura lui aussi permis de découvrir quelques pratiques culturelles comme les jeux de ficelles.

Ainsi les questions soulevées par les approches ethnomathématiques, présentes dans les thèmes du colloque EMF depuis sa création, sont bien d'actualité. Accroître leur visibilité dans les prochains

5. IRMA : Institut de Recherche Mathématique Avancée ; CIAM : Collection Inter Africaine de Mathématiques.

6. GREMA : Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques en Afrique (https://irem.u-paris.fr/groupe-de-reflexion-sur-lenseignement-des-mathematiques-en-afrique-grema), RIICLAS : réseau de Recherches Interdisciplinaires sur les Interactions entre Cultures, Langues et Apprentissages Scolaires (http://inspe.upf.pf/riiclas/), OPA : Observatoire du Plurilinguisme Africain, (https://plurilinguismeafricain.org/index.php/fr/).

colloques pourrait être un objectif partagé, avec par exemple un groupe de travail ou un atelier spécifique.

La vision de Pierre Arnoux

C'était mon quatrième EMF, après ceux de Genève, Alger et Gennevilliers, et j'ai aussi participé à trois CANP[7], dont deux en Afrique, le premier organisé au Mali en 2011 et celui organisé enTanzanie en 2014. Je connaissais donc déjà un peu la communauté, et aussi la sous-région. C'est toujours intéressant de participer à cet évènement si divers, en termes de pays représentés comme de professions des participants. En tant que mathématicien, je suis habitué à la variété internationale, mais pas à une telle diversité de professions... Et je pense que nous aurions aussi des leçons à tirer du mode de travail de ces colloques EMF, avec ce fonctionnement en groupes de travail et de discussion autour des contributions présentées.

J'ai participé au groupe de travail GT3 « Différentes pensées mathématiques » et aux deux groupes GT7 « Conception, diffusion et usage des ressources » et GT8 « Technologies numériques pour l'apprentissage, l'enseignement et la formation » qui avaient fusionné.

Que retenir de ce colloque ? D'un côté, j'ai constaté la permanence de certaines thèmatiques comme celle du GT3 sur la nature des pensées mathématiques (pensée algorithmique, algébrique, géométrique…), qui est consubstantielle aux mathématiques, mais j'ai aussi constaté de profonds changements, dus aux évolutions de la société, et en particulier à la diffusion universelle de la technologie. On en parle, certes, depuis des décennies mais quand, il y a plus de 30 ans, on me demandait d'enseigner les équations différentielles avec le langage PASCAL, il s'agissait là d'un outil encombrant et coûteux, à l'efficacité pédagogique limitée. On passait plus de temps à initier les étudiants à une informatique peu ergonomique qu'à en tirer profit pour une meilleure compréhension des mathématiques. Aujourd'hui, l'accès à des moyens bien plus performants semble diffuser partout et change les termes de la discussion, comme en a témoigné par exemple l'exposé auquel j'ai assisté dans le GT7 sur l'enseignement des fonctions numériques à l'aide de Geogebra. Un certain nombre d'habiletés numériques et informatiques font désormais partie de la culture de beaucoup d'élèves. Même si, bien sûr, il reste beaucoup d'inégalités, comme j'ai pu le constater parmi mes étudiants durant le confinement, et si cette culture technologique reste très inégalement répartie.

J'ai aussi participé avec beaucoup d'intérêt au projet spécial 3 sur la diffusion, ce qui m'a permis d'établir de fructueux contacts, ainsi qu'à la discussion programmée sur les neurosciences cognitives

7. Capacity And Networking Project, projet de l'ICMI pour developper la coopération entre pays d'une même sous-région et la formation de formateurs. Il y en a eu cinq jusqu'ici qui ont conduit à la création de cinq réseaux régionaux (https://www.mathunion.org/icmi/activities/developing-countries-support-and-canp/capacity-networking-project-canp).

et la didactique des mathématiques, qui m'a appris beaucoup de choses. Michèle Artigue en parle plus en détail ci-après.

Enfin, j'ai participé à l'organisation des deux sessions intitulées « COVID en discussion ». La première avait pour sujet ce que la pandémie a fait à l'enseignement, avec une analyse des réactions des systèmes éducatifs à la pandémie, et des conséquences, dont une forte augmentation des inégalités. La deuxième, peut-être plus optimiste, montrait comment cette situation pouvait devenir un objet d'enseignement, avec des propositions originales de problèmes géométriques pour optimiser la disposition des tables dans une classe confinée, ou des modèles classiques de suites récurrentes pour l'étude des épidémies, d'un usage rendu bien plus simple par l'utilisation d'un tableur. Ici encore, dans tous les exposés, on voyait l'influence du changement dû à la diffusion des technologies numériques… Ces propositions n'auraient pas été faites il y a 20 ans, même si elles étaient déjà techniquement possibles.

La vision de Michèle Artigue

Ayant participé à tous les EMF, depuis celui de Tozeur en 2003. mon regard est nécessairement un peu différent. En arrivant à Cotonou, j'étais inquiète. J'avais peur que nous soyions peu nombreux par rapport aux EMF précédents et que l'accumulation de crises que nous traversons pénalise tout particulièrement la participation africaine. Cela a été sans doute le cas mais, dès le premier jour, j'ai été rassurée. J'ai retrouvé la diversité qui m'est particulièrement chère dans les colloques EMF, diversité culturelle bien sûr, mais aussi diversité des participants : chercheurs aux profils divers, formateurs, enseignants, avec cette fois-ci la participation active de nombreux inspecteurs béninois. J'ai aussi retrouvé l'ambiance chaleureuse, et le plaisir de pouvoir échanger, discuter avec tous dans une langue qui, même si elle n'est pas pour chacun de nous la langue maternelle, nous est à tous familière.

Cet EMF s'est donc bien situé pour moi dans la continuité d'une histoire et de valeurs partagées. Je me suis retrouvée aussi dans sa structure : l'importance des groupes de travail thématiques qui, pour la plupart d'entre eux, sont apparus il y a plusieurs EMF déjà, même si les intitulés peuvent varier d'un EMF à l'autre, montrant l'évolution des perspectives et problématiques, les projets spéciaux et en particulier le projet « Jeunes enseignants », apparu au colloque de Sherbrooke en 2006 et toujours aussi intéressant.

Mais il y a aussi des évolutions. Cette année sont apparues les discussions programmées. Jean-Jacques Salone a évoqué celle dédiée au plurilinguisme dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, dont il était l'un des deux coordinateurs. Personnellement, je me réjouis de cette initiative. C'est durant mes mandats au comité exécutif de l'ICMI, la Commission internationale de l'enseignement mathématique, que je suis devenue sensible à ces questions. J'ai pris conscience du fait que je vivais dans un pays où, historiquement, le système éducatif avait cherché à annihiler la diversité linguistique existante, et du retard que nous avions dans ce domaine du point de vue de

la recherche didactique. EMF a très certainement un rôle à jouer par les collaborations qu'il favorise avec des pays d'une incroyable richesse linguistique. C'est d'ailleurs à travers la collaboration avec des chercheurs africains que cette thématique a émergé dans la didactique française, comme le montre par exemple le document réalisé pour le congrès ICME-13 en 2016, accessible sur le site de la CFEM.

Quant à moi, j'ai participé à celle organisée sur les relations entre neurosciences cognitives et didactique des mathématiques que j'ai trouvée, elle aussi, particulièrement bienvenue. Il est clair que, au moins en France, l'instrumentalisation éducative des neurosciences est à l'œuvre, et soutenue politiquement au plus haut niveau, Des inférences abusives sont faites à partir des résultats des recherches dans ce domaine. Il est important que la communauté mathématique au sens large, et en particulier sa composante didactique, s'empare de ces questions, avec sérieux et sans naïveté. Les contributions qui avaient été préparées pour nourrir la discussion devraient nous y aider et elles devraient être largement diffusées. Cependant, je suis convaincue qu'il serait dangereux de se limiter à dénoncer les abus. Il faut aussi arriver à montrer ce que nous pouvons apporter à ce champ des neurosciences et plus particulièrement à ce que l'on appelle maintenant la neuro-éducation. De ce point de vue, la contribution à distance de Marie-Line Gardes portait un message d'espoir. Je pense aussi, puisque je suivais le GT10 dédié à l'enseignement auprès de publics à besoins spécifiques, que sur ces questions particulièrement investies par la neuro-éducation, nous pouvons montrer ce qu'apporte la recherche didactique, en ouvrant à des pratiques alternatives qui permettent des apprentissages jugés hors de portée de ces élèves. Au sein de mon laboratoire, le LDAR, la thèse d'Edith Petitfour (Petitfour, 2015) l'a bien montré pour les élèves dispraxiques dans le domaine de la géométrie, il y a plusieurs années déja.

La discussion programmée s'est achevée par l'évocation d'un autre problème dont la communauté doit à mon avis s'emparer très sérieusement, celui de l'influence grandissante d'une vision réduisant les acquis scientifiques à ceux obtenus via des recherches menées sur des échantillons aléatoires contrôlés, ce que l'on appelle *l'evidence-based education* par analogie avec *l'evidence-based medecine*. Pour s'en emparer, il me semble nécessaire que la communauté didactique s'investisse, plus qu'elle ne l'a fait jusqu'ici, en particulier en France, dans les recherches d'implémentation, de reproduction et de changement d'échelle, à leurs besoins théoriques et méthodologiques spécifiques. Ce pourrait être le thème d'une discussion programmée ou d'un projet spécial à un prochain EMF, car on voit bien la sensibilité internationale croissante à ces questions. En témoignent l'existence d'un groupe de travail thématique sur ces questions aux colloques européens CERME depuis 2017, les numéros spéciaux des revues comme celui publié par *ZDM-Mathematics Education* en 2021 (Koichu *et al.*, 2021) et la création, également en 2021, d'une nouvelle revue, *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, pour favoriser la publication et diffusion de ce type de recherche.

Dans ce colloque, j'ai suivi les travaux de deux groupes de travail, le GT9, portant sur les liens entre pratiques d'enseignement et apprentissage et le GT10, déjà évoqué. Dans les deux groupes, il y avait un nombre substantiel de contributions réflétant bien la diversité des participants déjà soulignée.

Les discussions en ont été d'autant plus intéressantes et enrichissantes. Dans le GT9, j'ai admiré les efforts faits par les coordinateurs pour assurer écoute et qualité des discussions, malgré les difficultés créées par le partage de la même salle avec un autre groupe de travail. Les travaux présentés dans ce groupe montraient bien la complexité de la mise en relation des pratiques d'enseignement et des apprentissages des élèves et aussi, comme l'a souligné un inspecteur béninois, la complexité du travail demandé aux enseignants par les évolutions curriculaires et les ambitions qui y sont affichées, sans que ne leur soient fournies les ressources et l'accompagnement nécessaires. Dans le GT10, indépendamment de l'intérêt scientifique des diverses contributions et des différents éclairages qu'elles apportaient sur la question de l'éducation inclusive au cœur de la thématique du groupe pour cet EMF, avec notamment plusieurs contributions interrogeant le fonctionnement des systèmes didactiques auxiliaires mis en place pour permettre et soutenir les apprentissages mathématiques de ces élèves, j'ai aussi beaucoup apprécié l'organisation du travail, avec les phases de discussion en petits groupes sur chacune des contributions et le retour collectif précédant les présentations par leurs auteurs.

Pour terminer ce témoignage, je voudrais revenir sur la thématique spécifique du colloque, l'activité mathématique dans une société en mutation : circulations entre recherche, formation, enseignement et apprentissage. Bien sûr, j'avais des attentes à ce niveau et je me demandais jusqu'à quel point cette thématique se reflèterait dans nos activités. Mon regard était aussi influencé par les Assises des Mathématiques qui ont été organisées par la communauté mathématique française à l'UNESCO à la mi-Novembre[8]. Pierre Arnoux et moi avons participé au groupe de travail préparatoire à ces assises dédié à la formation et aux Assises elles-mêmes. J'avais aussi à l'esprit la table ronde que j'avais pilotée avec Ingrid Daubechies sur les responsabilités des communautés mathématiques et didactiques dans les temps pandémiques et post-pandémiques au congrès ICME-14 en 2021[9], et les échanges que j'avais eus deux mois avant avec des collègues d'Amérique latine au Mexique. Pour ce qui me concerne, c'est davantage dans les séances plénières que j'ai vu cette thématique prise en charge, notamment lors des deux séances intitulées « COVID en discussion » et de la table ronde intitulée « Les mathématiques et les activités mathématiques au service de la société et des différents métiers ». Je les ai trouvées toutes très intéressantes. Dans celles dédiées au COVID, il y avait des résonances évidentes avec la table ronde d'ICME-14, la rupture brutale engendrée par la pandémie, les efforts déployés pour la prendre en charge de la part de tous les acteurs, les inégalités éducatives exacerbées, mais aussi une réactivité et une créativité didactique impressionnantes, la production et mutualisation de nombreuses ressources, de nouveaux rapports entre les enseignants et les élèves, les enseignants et les parents. Il m'a semblé aussi, et je m'en réjouis, que le désastre était moins grand, y compris en Afrique, qu'en Amérique latine. Par ailleurs, j'ai apprécié que la COVID ne monopolise pas l'espace et l'équilibre que permettait la table ronde avec la diversité des contextes professionnels pris en compte.

8. Assises des mathématiques : https://www.assises-des-mathematiques.fr/

9. https://www.mathunion.org/icmi/proceedings-icme-14

J'aurais aimé que, s'agissant de nos sociétés en mutation et des besoins de formation qui en résultent, nous abordions davantage, vu l'influence de l'intelligence artificielle, des algorithmes, du big data, la nécessité de mieux outiller les enseignants et les élèves, en incluant aussi le développement d'un regard critique sur le rôle que jouent les mathématiques dans nos sociétés, mais il y aura d'autres EMF… Et nous pourrons continuer à y travailler sur la façon dont nous pouvons contribuer à affronter collectivement les énormes défis auxquels l'humanité fait face aujourd'hui.

Conclusion

La séance plénière s'est achevée par des échanges avec les participants qui ont tenu, en particulier, à répondre aux questions posées par Isabelle Ngningone Eya dans son intervention, lui montrer par exemple l'existence de nombreuses recherches didactiques sur la transition lycée-université et l'enseignement supérieur dans la communauté francophone et les connexions internationales dans ce domaine dans lesquelles elle joue un rôle actif, comme celles portées par le réseau INDRUM[10]. En tant que grands témoins, nous avons aussi souhaité conclure en remerciant les organisateurs de nous avoir confié cette tâche qui s'est révélée, pour chacun de nous, très enrichissante, et en soulignant l'intérêt particulier de ces colloques EMF qui réunissent des participants de multiples pays, acteurs à divers titres de l'enseignement des mathématiques et de la formation initiale et continue des enseignants, leur permettent de communiquer dans une langue familière, d'échanger et de s'enrichir mutuellement de leurs expériences respectives, dans une atmosphère amicale où chacun est à l'écoute des autres et de ce que peuvent nous apprendre nos similarités comme nos différences.

10. INDRUM : International Network for Didactic Research in University Mathematics (https://hal.science/INDRUM/).

Références

Ascher, M., D'Ambrosio, U. (1994). Ethnomathematics: A Dialogue. *For the Learning of Mathematics, 14*(2), 36–43.

Petitfour, E. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot – Paris 7. https://hal.science/tel-01228248

Koichu, B., Sánchez Aguilar, M., & Misfeldt, M. (Eds.) (2021). Implementation and implementability in mathematics education research. *ZDM Mathematics Education, 53*(5).

Touré, S. (2000). L'enseignement des mathématiques dans les pays francophones d'Afrique et de l'Ocean Indien. *Conférence plénière au Colloque EM2000*, Grenoble, juillet 2000. http://emf.unige.ch/files/3314/5467/5190/EMF2000_Conference_Toure.pdf

Titre: Une didactique des mathématiques clinique

Auteur: BENOIT David

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 126 - 136

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Une didactique des mathématiques clinique

BENOIT[1] David

Résumé – À partir de la proposition de clinique didactique de l'activité (Benoit, 2022), nous explorons l'idée d'une didactique des mathématiques clinique. Approche clinique, entrée par l'activité, développement de la pensée didactique, augmentation de la puissance d'agir, rapports personnes enseignantes et didacticiennes et leurs postures, nature des savoirs développés sont quelques éléments qui sont discutés en vue de circonscrire ce que pourrait être une didactique des mathématiques clinique.

Mots-clefs : Didactique des mathématiques clinique, clinique didactique de l'activité, développement de la pensée didactique, puissance d'agir, travail collaboratif.

Abstract – Extending on the didactic clinic of activity (Benoit, 2022), we explore the idea of a Didactic of Mathematics clinic. Clinical approach, activity entry, didactical thinking development, puissance d'agir development, teachers and didacticians relationship and respective stances, nature of developed knowledge are some of the elements discussed in order to circumscribe of a Didactic of Mathematics clinic might be.

Keywords: Didactic of Mathematics clinic, didactic clinic of activity, didactical thinking development, puissance d'agir, collaborative work.

1. Université du Québec en Outaouais, Québec, david.benoit@uqo.ca

La clinique didactique de l'activité

Notre proposition pour nous inscrire dans le développement professionnel et le travail collaboratif, c'est une clinique didactique de l'activité visant à provoquer le développement de la pensée didactique (des mathématiques) des personnes enseignantes et didacticiennes, travaillant ensemble, afin qu'elles augmentent leur puissance d'agir dans et sur leurs situations respectives afin de les transformer en fonction de leurs objectifs respectifs circonscrit dans un horizon en mouvement (Benoit, 2022). Cette clinique didactique de l'activité est aussi une proposition à partir de laquelle nous explorons l'idée plus générale d'une didactique des mathématiques clinique.

Maintenant que la fin de cet article est écrite, étudions ses éléments et les rapports dialectiques qui les unissent.

Une approche clinique

Des approches cliniques ont été développées dans plusieurs disciplines scientifiques, de la médecine jusqu'aux sciences sociales en passant par la psychologie (Danvers, 2010). Notre proposition clinique s'appuie sur plusieurs éléments qui sont issus de ces propositions. D'abord, pour qu'il y ait clinique, il doit y avoir demande. De manière générale, une personne recourt à une clinique lorsqu'elle n'arrive pas à résoudre un problème à l'aide des ressources qui lui sont accessibles et que ce problème provoque une insatisfaction significative. En fonction de la nature et des causes perçues du problème, elle fera une demande à une autre personne en fonction du potentiel perçu de son expertise pour résoudre son propre problème. Il faut donc retenir les concepts de demande, d'insatisfaction et d'expertise.

La personne clinicienne dispose de savoirs lui permettant un certain champ d'action. Avant d'utiliser ces savoirs, elle doit d'abord comprendre le problème de la personne qui la consulte et en identifier les causes possibles. De là, il lui est possible d'agir. Cependant, elle ne peut pas imposer ses savoirs à la personne qui la consulte. Ses solutions possibles doivent être viables pour la personne demanderesse, car le « clinicien ne soigne pas la maladie, il soigne le malade » (Danvers, 2010). Pour soigner une personne, il faut d'abord aller à la rencontre de cette personne et s'en donner les moyens tout en considérant les questions éthiques. Un dernier aspect du développement de la psychologie clinique, qui entre en écho avec plusieurs situations d'enseignement-apprentissage des mathématiques, est sa genèse dans ce qui n'est pas ordinaire (Danvers, 2010). C'est que pour comprendre une situation qui ne relève pas de l'ordinaire, il n'est pas possible de se limiter à l'observation de l'extérieur à partir d'un point de vue qui relève de l'ordinaire. L'extraordinaire, l'hors-norme, le nouveau, pour être compris, requièrent que l'on se positionne tout près afin de pouvoir le percevoir. Les approches cliniques sont donc particulièrement appropriées pour mieux comprendre des situations moins connues.

Une entrée par l'activité

Pour nous positionner tout près, nous avons choisi une entrée par l'activité dans une perspective vygotskienne en partie inspirée par la conceptualisation de la clinique de l'activité (Clot, 2017). Si de manière générale nous reprenons le rapport tâche-activité issue de l'ergonomie de l'activité, « la tâche indique ce qui est à faire, l'activité, ce qui se fait » (Leplat et Hoc, 1983), le concept d'activité reste à définir plus précisément pour notre proposition. D'abord, l'activité est un concept moniste, l'activité est indivisible. En particulier, sa partie directement perceptible (activité visible, audible, ressentie) et sa partie qui ne l'est pas (activité de conscience ou la pensée) sont en rapport dialectique ne formant ainsi qu'une seule et même activité (Vygotski, 1934/1997). Partant, pour comprendre l'activité d'une personne, il faut se donner les moyens méthodologiques pour avoir accès à sa pensée. Vygotski (1927/1999) argumente qu'il s'agit d'une nécessité méthodologique et que seules des méthodes indirectes peuvent y arriver : il faut donc organiser la mise en mots de l'expérience vécue, la réalisation par la mise en mots de la pensée d'une personne. Pour ce faire, de nouvelles tâches doivent lui être proposées. Ces tâches doivent avoir pour objet sa propre activité perceptible (p. ex. un enregistrement vidéo). Il s'agit alors de provoquer une activité chez la personne à l'aide d'une nouvelle tâche, une activité portant sur sa propre activité afin qu'elle puisse faire l'expérience vécue d'expériences vécues dans un processus de mise à distance ouvrant la voie au développement.

Un dernier mot sur le concept d'activité avant de poursuivre. Dans l'univers vygotskien, tout est dialectique. Ainsi, lorsque plusieurs personnes travaillent ensembles, leur activité respective est nécessairement une activité conjointe. Il convient alors de parler de l'activité conjointe d'enseignement-apprentissage de la personne enseignante et des élèves. Le concept d'enseignement-apprentissage, aussi dialectique, implique que toutes les personnes impliquées enseignent-apprennent, bien que ce qui est enseigné-appris diffère pour chaque personne. En particulier, alors qu'une personne enseignante déploie une activité conjointe d'enseignement-apprentissage des mathématiques afin que les élèves apprennent les mathématiques et développement leur pensée mathématique, elle apprend l'enseignement-apprentissage des mathématiques à travers son activité et le développement sa pensée enseignante. Il en est de même en clinique didactique de l'activité alors que personnes enseignantes et didacticienne travaillent ensemble, à partir de l'activité d'enseignement-apprentissage des personnes enseignantes, une activité conjointe de formation-recherche de laquelle chaque personne apprend et se développe en fonction de ses propres objectifs.

Une telle entrée par l'activité permet de dépasser le discours « sur » la pratique, toujours édulcoré, pour se concentrer sur la mise au jour de l'activité réelle en situation tout aussi réelle. De là, il est possible de conceptualiser une clinique développementale qui s'appuie sur le niveau de développement actuel de personnes singulières tel que révélé au moins en partie à travers le processus clinique dans leurs situations singulières et en fonction de leurs objectifs. Il ne s'agit donc pas d'observer, d'évaluer et de prescrire, mais plutôt d'écouter, de suspendre le jugement et de comprendre, du moins, dans

un premier temps, car il faudra éventuellement répondre à la demande. Pour répondre à la demande, il faudra provoquer le développement.

Didactique et puissance d'agir

Une fois l'approche clinique et l'entrée par l'activité posées, il reste à y insérer l'expertise du clinicien, la didactique des mathématiques. Notons toutefois que cette expertise pourrait relever d'une autre didactique ou d'une autre discipline comme la sociologie (Roche, 2016).

Nous avons donc une demande d'intervention clinique, impliquant une certaine légitimité éthique, et une voie, l'activité, pour nous retrouver au plus près de la personne à l'origine de la demande. Encore faut-il tenter de répondre à la demande toujours liée à une insatisfaction et à une impossibilité vécue par la personne enseignante de passer à un état de satisfaction : une impuissance à agir ou une puissance empêchée. Dit autrement en s'insérant dans la philosophie de Spinoza (1677/2005), pour répondre à la demande, il faudra que la personne passe d'une situation de travail qu'elle subit à une situation de travail dans et sur laquelle elle peut agir de manière à la transformer de telle sorte qu'elle éprouve de la satisfaction produisant au passage de la joie, une joie qu'elle cherchera dès lors à vivre à nouveau. Il s'agit donc, pour la personne didacticienne en clinique, de contribuer, à l'aide des outils de la didactique des mathématiques, à l'augmentation de la puissance d'agir des personnes enseignantes et, par le même mouvement, à l'augmentation de sa propre puissance d'agir. Il est alors possible de voir se tisser des rapports entre apprentissage, développement, puissance d'agir et transformation.

Vygotski (1927/1997) a posé ainsi certaines bases spinozistes de ces rapports :

> Notre expérience est confinée entre deux seuils; nous ne voyons qu'une infime partie du monde. Nos sens nous donnent accès au monde sous forme d'extraits qui sont importants pour nous. Et à l'intérieur des seuils, à nouveau, ce n'est pas toute la diversité des changements qui est appréhendée; de nouveaux seuils existent. C'est comme si la conscience suivait la nature par bonds, avec des omissions et des lacunes. Le psychisme sélectionne des éléments stables de réalité au sein du mouvement universel. Il constitue des ilôts [sic] de sécurité dans le flux héraclitéen. Il est l'organe qui choisit, le tamis qui filtre le monde et le transforme de telle sorte qu'il soit possible d'agir. (p. 167)

Cet extrait des travaux de Vygotski mérite que l'on s'y attarde en particulier en ce qui a trait au rapport affect-intellect qui le traverse sans être nommé explicitement. D'abord, il est important de rappeler que pour Vygotski le rapport affect-intellect est dialectique dans une conception moniste du psychisme et de la conscience. Pour Vygotski (1934/1997), « la séparation de l'aspect intellectuel de notre conscience d'avec son aspect affectif, volitif est l'un des défauts majeurs et fondamentaux de toute la psychologie traditionnelle » (p. 61). Ce faisant, poursuit-il, la pensée « est coupée de toute la plénitude

de la vie réelle » (p. 61). Conséquemment, les seuils qu'évoque Vygotski sont des seuils affectifs-intellectuels sélectionnés par l'activité de conscience d'une personne. Ils sont choisis pour les possibilités qu'ils offrent pour agir dans et sur le monde. Ces possibilités sont à la fois intellectuelles et émotives. Vygotski parle ici d'îlots de sécurité dans un mouvement continu. Cette activité de conscience de sélection de seuils filtre et transforme le monde. C'est donc dire que pour transformer le monde il s'agit que la conscience sélectionne d'autres seuils déjà disponibles dans le psychisme ou encore que des seuils existants se développent par l'apprentissage-développement et la rééquilibration du rapport affect-intellect. C'est ainsi qu'en provoquant le développement de la pensée didactique des personnes enseignantes à l'aide des outils de la didactique des mathématiques (des manières de penser, de dire, d'agir, de ressentir, d'affecter et d'être affecté ainsi que les concepts didactiques y étant liés), il est possible, lorsque la personne enseignante s'en saisit en rapport dialectique avec sa propre activité, qu'elle augmente sa puissance d'agir dans et sur sa situation pour la transformer.

Horizons de transformation en mouvement

Ici, la direction de la transformation n'est pas déterminée par la personne didacticienne, même si elle met nécessairement en place un horizon en mouvement (Stetsenko, 2017) qui recoupe en partie l'horizon en mouvement de la personne enseignante. C'est dans ce rapprochement des horizons respectifs que se joue l'équilibre entre provoquer le développement et prescrire. Or, la prescription, ou

> l'enseignement direct de concepts s'avère toujours pratiquement impossible et pédagogiquement sans profit. Le maître qui tente de suivre cette voie n'obtient habituellement rien d'autre qu'une vaine assimilation des mots, un pur verbalisme, simulant et imitant chez l'enfant l'existence des concepts correspondants, mais masquant en réalité le vide. L'enfant assimile alors non pas des concepts, mais des mots, il acquiert par la mémoire plus que par la pensée et s'avère impuissant dès qu'il s'agit de tenter d'employer à bon escient la connaissance assimilée. (Vygotski, 1934/1997, p. 277)

Ici, non seulement cette citation s'applique aussi aux adultes, mais elle est renforcée si l'on considère, à la suite des résultats de Benoit (2022), que le rapport affect-intellect chez les adultes, en particulier pour les personnes enseignantes au travail, est moins flexible que chez les enfants. C'est que l'activité de tous les jours, celle qui permet à la personne enseignante d'agir dans et sur sa situation de manière à se retrouver en équilibre entre la satisfaction du travail bien fait et sa santé ne s'est pas développée sans souffrances, sans conflits. Aussi insatisfaisante soit-elle, cette activité représente un îlot de sécurité qu'il est difficile de quitter pour un avenir incertain. Dejours, Dessors et Molinier (1994) vont plus loin et disent qu'en « prônant un changement de gestes dans le travail, on bouleverse une modalité d'inscription du sujet dans la société et, au-delà, on atteint jusqu'à la personne et à son identité » (p. 2). Ainsi, intervenir dans ou sur le travail d'autrui n'est pas banal. Il ne suffit pas de prescrire pour que la prescription devienne activité, car la personne risque alors de résister et de mettre en place des comportements défensifs, son identité et sa place dans la société ou dans son collectif

de travail étant remises en question. Donc, ce n'est pas parce que la personne didacticienne prescrit un concept pour penser et orienter son activité que la personne enseignante s'en saisira. Il s'agit plutôt pour la personne didacticienne de mettre en rapport l'activité de la personne enseignante et les outils de la didactique des mathématiques qu'elle juge potentiellement riches pour provoquer le développement de la pensée didactique de la personne enseignante afin qu'elle puisse transformer sa situation en fonction de ses objectifs.

Cette mise en rapport est au cœur du projet éthique de l'approche clinique en général. Cela implique, pour la personne intervenante, une posture d'activiste transformateur visant à cocréer le monde à-venir dès maintenant (Stetsenko, 2017). Cette posture est en quelque sorte à l'opposé de la posture en retrait qui consiste à documenter et à comprendre la réalité actuelle, le statu quo. Elle implique de retourner la question de savoir s'il est éthique d'intervenir, pour se demander s'il est éthique de ne pas intervenir lorsque l'on constate, à partir de nos seuils d'appréhension du monde, que des humains se retrouvent en position difficile ou encore, comme le disait Freire (1968/2021), qu'ils sont opprimés. Bien entendu, nos seuils de personnes intervenantes-chercheures peuvent nous amener à « constater » des positions difficiles qui ne sont pas vécues comme telles par les personnes qui les vivent. Or, dans le cas de la demande clinique et de l'insatisfaction vécue inhérente à cette demande, cet écueil est évité, du moins en partie. C'est que les causes identifiées initialement par les personnes demanderesses pourraient s'avérer inadéquates (Spinoza, 1677/2005). Pour Freire (1968/2021), le « problème fondamental, dans ce cas, est que s'il manque aux êtres humains une compréhension critique de la totalité dans laquelle ils se trouvent – parce qu'ils la saisissent par bribes, ne reconnaissant pas l'interaction qui la constitue – ils ne peuvent en prendre connaissance » (p. 135). D'où l'importance du travail clinique avec les personnes demanderesses, car « en approfondissant la prise de conscience de leur situation, les êtres humains se l' «approprient» comme une réalité historique qu'il leur est possible de transformer » (Freire, 1968/2021, p. 97). Ce travail collaboratif permet alors aux personnes enseignantes d'identifier des causes adéquates à partir desquelles elles pourront agir. Il permet aussi aux personnes didacticiennes de convoquer des outils de la didactique des mathématiques potentiellement pertinents pour les personnes enseignantes et leur activité réelle. Ce travail permet alors, à travers un processus d'intercompréhension, de rapprocher les horizons en mouvement de chacune des personnes rendant possible la cocréation de monde à-venir dès maintenant. Pour illustrer le travail collaboratif en clinique, les derniers mots de cette section, et le point de départ de la prochaine, reviennent à Freire (1968/2021) : « Personne n'éduque personne, personne ne d'éduque soi-même, les êtres humains s'éduquent entre eux, médiatisés par le monde » (Freire, 1968/2021, p. 87).

Le beau risque de la personne didacticienne

Jusqu'ici, la proposition de didactique des mathématiques clinique que nous développons s'est concentrée sur les personnes enseignantes et le rôle de la personne didacticienne pour répondre à la demande dans une approche clinique. Or, la personne didacticienne n'est pas qu'une personne clini-

cienne, elle est aussi une personne chercheure. Au fil du texte, certains éléments pointaient implicitement vers la pertinence d'une approche clinique pour la personne chercheure. Nous les élaborons ici en commençant par revisiter certaines des personnes autrices déjà convoquées.

Avec la citation de Freire qui terminait la section précédente, nous pouvons nous demander comment la personne didacticienne s'éduque avec les personnes enseignantes à travers un dispositif clinique. Si Spinoza (1677/2005) répondait à la question, il nous dirait que le chemin vers la liberté ne peut être que social, c'est-à-dire que ce qui me permet d'augmenter ma puissance d'agir dans et sur le monde, je me dois de m'appliquer à ce que beaucoup d'autres y aient accès afin qu'il soit possible peux eux aussi d'augmenter leur propre puissance d'agir dans et sur leur propre situation. Or, ce mouvement est dialectique et implique pour la personne qui semble ici transmettre un savoir, de prendre le risque d'être affecté par l'autre, de voir ce savoir remis en question, remettant en question sa propre quête de liberté. Or, de ce processus de confrontation au réel à travers la délibération et même s'il est risqué, les deux personnes affectées par l'autre et affectant l'autre au même moment s'engagent activement pour augmenter leur puissance d'agir respective et collective. C'est ce à quoi Stetsenko (2017) réfère lorsqu'elle parle de cocréer le monde à-venir ensemble, à partir de nos singularités et à travers un travail collectif.

Pour la personne didacticienne, l'approche clinique impose un changement de posture radicale, car elle doit prendre le risque d'être affectée par l'autre, le risque de se transformer. En d'autres mots, la personne didacticienne ne peut sortir indemne du processus clinique. En référence au concept d'écoute risquée (Dejours et al., 1994), c'est qu'en prenant le risque d'écouter la personne enseignante en organisant, par des méthodes indirectes et une posture de suspension du jugement, la possibilité d'une parole authentique, la personne didacticienne prend le risque d'entendre. Le risque d'entendre c'est « celui de découvrir par la parole de l'autre des dimensions de la réalité jusque-là ignorées, qui une fois entendues et assimilées peuvent déstabiliser les analyses, les convictions et les croyances sur lesquelles celui qui écoute a fondé sa vision du monde, en l'occurrence sa vision du monde du travail » (p. 7). Le beau risque de la personne didacticienne, c'est celui de confronter au réel ses manières de penser, d'agir, de dire, de ressentir et les concepts de la didactique des mathématiques qui y sont liés et de les voir se faire rudoyer, tordre ou pire (ou mieux ?) rejeter. Autant d'occasions pour provoquer le développement des concepts de la didactique des mathématiques et de la personne didacticienne.

Le développement des concepts didactiques

Faire de la clinique, c'est prendre un risque, certes, mais c'est aussi se créer un espace ayant le potentiel de provoquer chez soi l'ouverture des zones de développement le plus proche et, d'un même mouvement, des développements de concepts de la didactique des mathématiques ayant pour critère de vérité, le juge suprême, soit la pratique. Ce critère de vérité, Vygotski (1927/1999) le

mettait de l'avant il y a longtemps en expliquant le mouvement fait ou à faire afin de développer des disciplines scientifiques pertinentes :

> [auparavant] la pratique était une colonie de la théorie, dépendant en tout de la métropole; la théorie ne dépendait en aucune manière de la pratique; la pratique était la conclusion, l'annexe, pour tout dire une excursion en dehors des limites de la science, une opération para-scientifique, post-scientifique, qui débutait là où la démarche scientifique était considérée comme achevée. Le succès ou l'échec [des applications pratiques] n'avaient pratiquement aucune incidence sur le destin de la théorie. Aujourd'hui la situation s'est inversée; la pratique s'insinue dans les fondations les plus profondes de la démarche scientifique et la transforme du début à la fin; la pratique propose les tâches et sert de juge suprême de la théorie, de critère de vérité; elle dicte la manière de construire les concepts et de formuler les lois. (p. 235)

Ainsi, la personne didacticienne en posture clinique prend le risque de voir ébranler ses convictions, ses croyances voire ses certitudes affectant du même coup son identité (Dejours et al., 1994). Il est dès lors plus aisé de comprendre pourquoi nous qualifions l'approche clinique de beau risque, car provoquer son propre développement, c'est se donner les moyens d'augmenter sa puissance d'agir dans et sur sa situation pour la transformer, mais sans savoir à l'avance la direction exacte du développement à-venir.

Par ailleurs, en plus des savoirs didactiques auxquels nous avons référés jusqu'à maintenant, soit ceux que l'on frotte au réel pour tester leur résistance à la pratique, l'approche clinique provoque le développement de savoirs de natures différentes. Ces savoirs ne portent pas tant sur la didactique des mathématiques, stricto sensu, que sur les conditions de transformation vers un état plus désirable par les personnes enseignantes des mathématiques. Dit autrement, les savoirs portent sur le passage d'un état actuel jugé insatisfaisant à un état jugé plus satisfaisant. En considérant qu'en clinique didactique de l'activité, ce passage est réalisé de manière collaborative à partir de la demande et de l'activité des personnes enseignantes de même que l'apport de la personne didacticienne, ce passage risque fort d'entrer en résonnance avec d'autres personnes enseignantes vivant des situations proches. Prendre pour objet d'étude le passage d'un état à un autre, le développement ou encore les voies de transformation pourraient permettre de redéfinir les interrelations pratique-formation-recherche de manière à ce que les personnes enseignantes jugent les résultats de recherche plus pertinents et qu'elles soient en mesure de s'en saisir. Ainsi, au lieu que les résultats de recherche n'indiquent que les objectifs, ils indiqueraient aussi des voies possibles pour les atteindre sans nier toute la complexité d'emprunter et de s'approprier de telles voies vécues par d'autres qui partagent un même métier. Vygotski, qui tire cet enseignement de Marx, dit que « lorsqu'on est arrivé au bout du chemin, on peut plus aisément comprendre ce chemin dans son entièreté, de même que la signification de ses différentes étapes » (Vygotski, 1927/1999, p. 80). C'est cette histoire du développement de personnes enseignantes singulières qu'il est possible de documenter à travers une approche clinique.

Une didactique des mathématiques clinique

La clinique didactique de l'activité (Benoit, 2022) que nous proposons n'est qu'une proposition en développement parmi d'autres qui s'inscrivent dans une didactique des mathématiques clinique. Par ailleurs, les rapports qu'elle entretient avec d'autres propositions dans la constellation des recherches « avec » restent à explorer. Chose certaine, en clinique, la question de la demande est centrale, car sans demande, aucune intervention n'est possible. Qui plus est, même lorsqu'il y a demande, le processus d'adéquation avec l'offre de la personne didacticienne des mathématiques demeure un enjeu complexe. Le développement de la demande, de l'offre et de leur rapport au cours d'une clinique mérite notre attention (Martin et Benoit, soumis). Ce qui est peut-être encore plus fondamental, c'est le changement de posture nécessaire et qui implique pour la personne didacticienne de prendre un risque. Prendre le risque d'affecter et d'être affecté afin de cocréer le monde à-venir collectivement constitue à nos yeux, un beau risque nécessaire.

Références

Benoit, D. (2022). *La clinique didactique de l'activité en classe d'accueil de mathématiques : provoquer le développement de la pensée didactique* (Thèse de doctorat inédite). Université de Sherbrooke, Québec.

Clot, Y. (2017). *Travail et pouvoir d'agir*. PUF.

Danvers, F. (2010). « Clinique ». *Recherche et formation, 63*, 106-116.

Dejours, C., Dessors, D. et Moliner, P. (1994). Comprendre la résistance au changement. *Documents pour le médecin du travail, 58*, 1-8.

Freire, P. (1968/2021). *La pédagogie des opprimé·es* (É. Dupau et M. Kerhoas, trad.). Éditions de la rue Dorion.

Leplat, J. et Hoc, J.-M. (1983). Tâche et activité dans l'analyse psychologique des situations. *Cahiers de psychologie cognitive, 3*(1), 49-63.

Roche, P. (2016). *La puissance d'agir au travail. Recherches et interventions cliniques*. Érès.

Spinoza, B. (1677/2005). *L'Éthique*. Mille et une nuits.

Stetsenko, A. (2017). *The Transformative Mind. Expanding Vygotsky's Approach to Development and Education*. Cambridge University Press.

Vygotski, L. S. (1927/1999). *La signification historique de la crise en psychologie* (C. Barras et J. Barberies, trad.). Delachaux et Niestlé.

Vygotski, L. S. (1934/1997). *Pensée et langage*. La Dispute.

Titre: Propos de conseillers pédagogiques sur le fruit d'une collaboration avec des chercheurs : Histoire d'un tableau sur la résolution de problèmes en classe

Auteurs: MAHEUX Jean-François, SABOYA Mireille, HANI Vanessa, BEDNARZ Nadine, BACON Lily et LAJOIE Caroline

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 137 - 152

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Propos de conseillers pédagogiques sur le fruit d'une collaboration avec des chercheurs : Histoire d'un tableau sur la résolution de problèmes en classe

MAHEUX[1] Jean-François - SABOYA[2] Mireille - HANIN[3] Vanessa - BEDNARZ[4] Nadine - BACON[5] Lily - LAJOIE[6] Caroline

Résumé – La résolution de problèmes est un élément central de l'enseignement des mathématiques au Québec, mais peu a été fait en matière d'accompagnement des enseignants pour son utilisation en classe. Pour creuser cette question de l'accompagnement, nous avons mis en place une recherche collaborative avec huit conseillers pédagogiques (CPs). Parmi les fruits de cette collaboration entre CPs et chercheurs en didactique des mathématiques, on trouve un « tableau synthèse » de ce qui a été co-construit au fil des ans. Dans cette étude, nous examinons ce que disent les CPs de ce tableau et comment ceci nous informe sur leur développement professionnel en lien avec cette ressource structurante co-construite avec les chercheurs qu'est le tableau synthèse.

Mots-clefs : Recherche collaborative, Conseillers pédagogiques, Accompagnement, Résolution de problèmes, Développement professionnel

Abstract – Little has been done in terms of supporting teachers for problem solving in their classroom. To explore this, we set up a collaborative research with eight pedagogical advisors (PAs). PAs and researchers created a "table" which synthetizes what they co-constructed. We examine this table as a structuring resource, what the PAs said about it, and how this informs us about the professional development of PAs.

Keywords: Collaborative research, Pedagogical advisors/consultants, Supporting teachers, Problem solving, Professional development.

1. Université du Québec à Montréal, Canada, jfuqam@gmail.com

2. Université du Québec à Montréal, Canada, saboya.mireille@uqam.ca

3. Université Catholie de Louvain, Belgique, vanessa.hanin@uclouvain.be

4. Université du Québec à Montréal, Canada, descamps-bednarz.nadine@uqam.ca

5. Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue, Canada, lily.bacon@uqat.ca

6. Université du Québec à Montréal, Canada, lajoie.caroline@uqam.ca

Contexte de l'étude

La résolution de problèmes (RP) est un élément central de l'enseignement des mathématiques au Québec qui rejoint différentes communautés. On pense ainsi aux élèves qui résolvent ces problèmes, aux enseignants qui les font vivre en classe, aux conseillers pédagogiques (CPs) qui forment ou accompagnent des enseignants pour cette mise en œuvre, et aux chercheurs qui s'intéressent à la résolution de problèmes en contexte d'enseignement. Lajoie et Bednarz (2012, 2014, 2016) ont mené une analyse des documents officiels québécois en lien avec la RP de 1900 à nos jours. Elles mettent en évidence le caractère de plus en plus ambitieux des fonctions associées à la RP et l'éclairage quasi inexistant fourni aux enseignants et aux CPs pour aborder la RP en classe.

Cet éclairage quasi inexistant fait peser sur les épaules du CP en mathématiques un poids important et conduit à la nécessité d'un recul qui puisse leur permettre de mieux comprendre les enjeux rencontrés face à l'accompagnement ainsi que les pistes possibles pour le réussir. Rappelons ici que les CPs en mathématiques au Québec sont issus du corps enseignant, et sont généralement recrutés sur la base de leurs expériences de pratiques innovantes mais n'ont pas de formation particulière (voir Duchesne 2016). Tout en se définissant comme des enseignants au service d'autres enseignants, ils constituent ce que Draelants (2007) nomme un « segment d'élite » de la profession enseignante, et ils sont responsables de leur propre développement professionnel. Plusieurs études ont mis ainsi en évidence la complexité de leur travail (voir aussi Duchesne et Gagnon, 2013 ; Houle et Pratte, 2003 ; Lessard, 2008).

Le constat formulé par la recherche à l'égard de la RP rejoint celui émis par un groupe de CPs avec lequel nous avons travaillé et qui a mené, en 2015, à la mise en place d'une recherche collaborative sur la RP en classe de mathématiques (e.g. Bednarz *et al.*, 2020). À l'origine de ce projet, on trouve donc un désir (et même une demande) de la part d'un groupe de CPs de mettre en commun, d'examiner, de valider et d'enrichir, entre eux et avec des chercheurs en didactique des mathématiques, leurs questions, leurs observations et leurs stratégies à propos de la RP en classe et de l'accompagnement des enseignants. Ils mentionnent alors leur intention de mieux comprendre, de développer et de légitimer leurs actions en lien avec l'accompagnement à la RP en classe de mathématiques.

Cette situation souligne par ailleurs le peu que l'on connait du point de vue de la recherche sur le métier de CP et sur les pratiques des CPs en mathématiques en particulier. Des travaux indiquent en effet que les CPs doivent occuper plusieurs rôles, tels celui de formateur, d'accompagnateur, d'agent de changement, d'expert de contenu et de terrain, de collaborateur, etc. (Duschesne, 2016), et se reconnaissent majoritairement dans un ensemble de « fonctions » lié à certaines « interventions » types (Houle et Pratte, 2007). Mais des études fines sur la manière dont ils accomplissent ceci manquent toujours. La mise en place d'une recherche collaborative nous permet donc également d'éclairer des enjeux liés à la pratique de CP en mathématiques, et leurs manières de faire autour de ceux liés à la RP en classe en particulier. Nos travaux avec ces CPs ont ainsi mis en évidence la nature partagée du

métier CP en mathématiques en termes d'un « genre CP » se déclinant suivant différents « styles » (e.g. Hanin *et al.*, 2020 ; Lajoie *et al.*, accepté).

Dans le cadre de cette étude, nous cherchons à préciser ce qu'apporte aux CPs leur collaboration avec des chercheurs au sein d'une recherche comme celle que nous avons menée. La recherche collaborative a déjà été conceptualisée sous l'angle du développement professionnel des praticiens qui y prennent part (nous y reviendrons plus loin). On peut par exemple observer la mise en place d'un certain contrat réflexif, soutenu par le chercheur au moment du travail conjoint avec des praticiens, ayant comme potentiel d'enrichir leurs manières d'aborder les situations qu'ils rencontrent (e.g. Bednarz *et al.*, 2012). Durand et Poirier (2012) décrivent quant à elles l'apport de l'analyse collective d'actions enseignantes pour la construction d'expertises et « le développement d'une vision professionnelle riche et partagée pour interpréter le déroulement d'une situation d'apprentissage et guider la pratique » (p.134). Dans une veine similaire, nous cherchons ici à décrire et comprendre ce qu'apporte à des CPs la construction collaborative d'une « ressource » co-construite (et qui pourrait inspirer leur pratique), à savoir un tableau synthèse (voir figures 1 et 2) de ce qui a été mis en lumière au cours de la recherche à propos de la RP en classe de mathématiques et de l'accompagnement des enseignants.

Considérations méthodologiques et appuis théoriques

La recherche collaborative a pour objectif de prendre appui sur le croisement des expertises des praticiens et des chercheurs pour nourrir l'élaboration collective de manières de voir, de manières de faire et de ressources par exemple. Elle repose sur une reconnaissance de l'apport des différentes perspectives pour éclairer les objets liés à la pratique (Desgagné, 1997) et s'appuie sur un critère de « double vraisemblance » auquel cherche à répondre la recherche (Dubet, 1994). La collaboration a pour but d'assurer une certaine validité et une certaine pertinence à ce qui est produit par la recherche, à ce qui est « co-construit », mais aussi de rapprocher différents acteurs autour de préoccupations communes. En pratique, ceci implique la « co-situation » d'un objet autour duquel s'organise la démarche (qui fait sens pour les uns et les autres), la « co-opération » de l'investigation (dans l'esprit d'une recherche faite *avec* plutôt que « sur » les praticiens), et la « co-production » sous différentes formes des fruits de ce travail collaboratif (par exemple dans l'élaboration conjointe de résultats sous forme de modèles, de ressources, d'activités, de présentations, dans une analyse des résultats qui prend en compte les voix des uns et des autres, dans une diffusion qui rejoint la communauté de recherche et la communauté de pratique, etc.) (Bednarz, 2013). Dans le cas présent, une recherche collaborative a été mise en route en réponse aux besoins évoqués plus haut, à travers un objet co-situé qui fait sens pour les uns et les autres : mieux comprendre 1- la RP en contexte d'enseignement et 2- l'accompagnement des enseignants (par les CPs) autour de celle-ci.

Le cadre de la cognition située (Lave et Wenger, 1991) nous invite à concevoir ceci du point de vue de deux « communautés de pratiques » croisant leurs regards sur des « objets frontières » (par exemple

la RP, ou un tableau synthèse), dont il s'agit de préciser la nature et les contours. Une communauté de pratique peut être définie comme un groupe de gens ayant en commun une certaine activité professionnelle, et qui partagent donc des intérêts, des manières de faire, un champ de savoirs, des outils, des problématiques et des expériences (Wenger *et al.*, 2002). Elle peut être formelle ou informelle, mais suppose une certaine forme de collaboration, différentes formes d'engagement mutuel des membres. Les « chercheurs en didactique des mathématiques » forment ainsi une certaine communauté dans laquelle ils peuvent se reconnaître. Il en va de même pour les CPs dont le domaine d'activité est relativement bien défini (localement du moins) en tant qu'intervenants « en soutien » auprès d'enseignants en même temps qu'au « au service » d'institutions qui leur confient certaines tâches. Dans le cas de la recherche collaborative discutée ici, on considère donc le croisement des regards de chercheurs et de CPs comme la rencontre des membres de deux communautés de pratiques ayant chacune leurs manières de voir et de faire, et qui cherchent à travailler ensemble sur une problématique qui les intéresse. On parle ainsi d'un groupe formé de huit CPs en mathématiques au primaire provenant de différents centres de services scolaires du Québec, et d'autre part de cinq chercheurs de notre groupe. La démarche qui s'est étalée sur trois années (2015-2018) s'est organisée autour de dix-sept rencontres réflexives d'une journée chacune, à raison de cinq la première année, six la deuxième et six la troisième.

Le travail collaboratif suppose certaines intersections dans la pratique de différentes communautés. Les rencontres chercheurs-CPs ont porté sur la RP en classe de mathématiques, par un partage d'observations, de questionnements, de pistes d'interventions à propos du travail avec des élèves ainsi que d'accompagnement des enseignants. Pendant ces rencontres, les discussions ont par exemple été alimentées par des vidéos abordant la RP en classe, des problèmes spécifiques (amenés par les uns et les autres), des récits d'expérimentations avec les enseignants (parfois en salle de classe), des articles et des rapports d'ateliers ou de groupes de travail. Ainsi, dans le but de faire émerger des conseils à donner aux enseignants, « l'histoire d'un problème » à travers la planification, l'anticipation, l'exploitation en classe et le retour ont été le sujet de plusieurs échanges. L'ensemble des rencontres a été enregistré et a fait l'objet de comptes-rendus retournés au groupe, discutés et annotés par les différents intervenants, et des transcriptions de rencontres ont été analysées.

Au fil de ces rencontres, les CPs ont ressenti le besoin de synthétiser le produit des échanges pour garder une trace commune de ce qui se construisait conjointement. Il s'agissait de répondre à un besoin d'y voir plus clair dans ce qui se dégageait de la collaboration, de ce que les CPs pourraient vouloir retenir des échanges. Le travail de synthèse a d'abord été réalisé individuellement par certains CPs qui ont ensuite partagé leurs productions avec le groupe. Cette mise en commun a peu à peu pris la forme d'un unique tableau qui a évolué au long des rencontres et est devenu à plusieurs occasions le centre des discussions : une ressource qui structure ce que Lave (1988) nomme le monde expérientiel de l'acteur et contribue à façonner les actions, les possibilités, les significations et les interprétations, un tableau qui, en ce sens, apparaît comme une « ressource structurante ».

Dans les sections qui suivent, nous allons (sommairement) présenter ce tableau et ce qu'en ont dit les CPs en lien avec l'exercice de leur métier. Un examen des transcriptions de rencontres nous a permis d'identifier différents moments au cours desquels les CPs se sont explicitement exprimés sur ces questions. Nous avons ensuite réalisé une analyse émergente du contenu de ces propos (Bardin, 1977) visant une reconstruction progressive des données (Lessard-Hébert *et al.*, 1997). Nous verrons donc comment ce tableau et ses différentes utilités pour les CPs, ainsi que son processus d'élaboration, illustrent ce que peut apporter aux CPs une ressource structurante co-construite avec les chercheurs[7]. Nous discuterons ensuite ces éléments en termes d'apport du travail collaboratif au développement professionnel des CPs.

Analyses

Petite histoire d'un tableau produit d'une collaboration

Dès le début de la première année du projet, certains CPs ont exprimé le besoin de schématiser certains éléments de la RP en classe discutés lors des rencontres. Un d'eux (CP1[8]) a proposé un premier « schéma » dans lequel on retrouve des éléments qu'il cherche à organiser : il est question des « traces » produites par les élèves en RP, d'un examen de la RP selon différents points de vue (l'élève, l'enseignant, le CP, chacun ayant des intentions particulières), et d'angles d'entrée pour le travail avec les enseignants. On y retrouve par exemple certains « conseils » présentés comme des choses à formuler avec les enseignants (et non comme une liste d'instructions à suivre) et on note plusieurs « trous » et cases vides qui montrent bien le caractère « en construction » de ce qui est proposé.

À la fin de la première année, une nouvelle schématisation est proposée sous forme de tableaux par CP2 et CP3 d'une part et CP4 d'autre part. On y trouve une organisation fort différente autour de « Questions d'enseignants » et de manières de les travailler avec eux. Le tableau propose aussi un découpage en trois moments de la RP en classe (avant, pendant, après) regroupant des « enjeux » et des pistes pour le travail avec les enseignants, et trois « colonnes » auxquelles ils feront souvent référence par la suite : « Enjeux, défis et nœuds », « Conseils, pistes, gestes porteurs » et « Exemples, vignettes » (voir au centre de la figure 1 en annexe).

7. Une analyse de la co-construction serait à présenter (voir par exemple Bednarz *et al.* 2020), mais nous la laissons de côté afin d'aborder plus largement la collaboration chercheurs-CPs en termes de développement professionnel.

8. Nous utilisons les pseudonymes CP1, CP2, ... pour désigner les CPs.

Ce tableau, beaucoup plus précis, cherche toujours à synthétiser les échanges. Il ne s'agit pas simplement d'une réorganisation du contenu des schémas précédents : de nombreux éléments ont été ajoutés, qui ont fait l'objet de discussions (parfois en lien direct avec un élément présenté dans un tableau précédent, et parfois non). Il s'agit donc d'un produit qui se développe, s'enrichit, se complexifie en faisant l'objet d'échanges et d'élaborations. On remarque, à ce titre, que les tableaux proposés ont toujours un caractère inachevé, en construction. Et ça sera aussi le cas de la version « finale » du tableau (dont la structure est illustrée à la figure 1) où sont explicités par exemple des « enjeux/défis/nœuds », des « conseils/gestes porteurs », des « exemples/vignettes » et des « ressources théoriques ou pratiques » en fonction de trois « temps » de la RP en classe, ainsi que des « principes directeurs » qui traversent tout le travail en RP. Les principes directeurs sont des éléments mis en évidence au fil des échanges pour la mise en place en arrière-plan d'une culture de classe mathématique souhaitée, par exemple : « s'adresser à l'intelligence des élèves en les considérant comme de jeunes mathématiciens », « laisser de la place aux élèves et apprendre à se taire », « développer une culture de classe où l'erreur est vue positivement », … Des sections en gris intitulées « Éléments supplémentaires CP » contiennent des éléments que les CPs envisagent de partager avec d'autres CPs qui, comme eux, doivent accompagner des enseignants à faire de la RP. Afin d'illustrer brièvement la manière dont les CPs ont collaboré entre eux et avec les chercheurs pour l'élaboration de ce tableau, observons un extrait d'un des éléments qui s'y retrouve : l'idée de « Présenter le problème succinctement sans trop en dire » (Figure 2 en annexe).

L'idée de « ne pas trop en dire » lors de la présentation d'un problème en classe est discutée à quelques moments[9]. Sans faire une analyse détaillée de la co-construction, les échanges suivants donnent un aperçu de la manière dont cela a été abordé lors de la rencontre de novembre 2016. Dans ces trois extraits, le thème se formule et se précise. On voit qu'il s'agit déjà de revenir sur quelque chose qui a été discuté de manière à formuler un « conseil » (à noter dans le tableau), et qu'il est question de différents problèmes et de nuances dont on retrouve la trace dans le tableau. Par contre, il n'est pas question des « références » (e.g. Dan Meyer) : elles apparaissent lors d'une prochaine rencontre, alors que le groupe revient sur le tableau.

> C4[10] [à propos d'éléments qu'on trouve dans la colonne « Conseils… », voir figure 2] : Là, les conseils que j'ai ramassés, c'est de ne pas guider les élèves. Donc si on conseille les enseignants, ça veut dire : Tu ne guides pas les élèves, tu leur donnes des consignes et tu les laisses aller.
>
> CP4 : En fait, ce n'est pas : ne pas guider les élèves. Je ne suis pas d'accord. C'est ne pas … comme ne pas tout dire. Je ne sais pas comment le dire. Ne pas *trop* guider les élèves, ne pas...

9. Les extraits donnent principalement la parole aux CPs vu le propos de ce texte, mais une analyse des contributions réciproques montrerait mieux la co-construction et l'apport important de part et d'autre.

10. Les codes C1, C2, etc. désignent les chercheurs.

C4 : Trop en dire.

CP1 [référant à un problème présenté en classe sous forme de jeu] : En fait, au début t'as expliqué les règles du jeu. Pis là on n'a pas à s'attendre à ce que tous les élèves aient saisi les règles. C'est ça qui s'est passé. Tu les as données les règles. Ça s'est passé vite. Tu aurais pu les marteler : comment qu'on va jouer ; rappelle-moi ça ; fait donc ça. […]

C2 : Qu'est-ce que tu voulais dire CP8, tu as dit ne pas voir la différence. La différence entre quoi ?

CP8 : Quand on dit de ne pas trop en dire aux élèves, peu importe le type de problèmes, problème qu'ils ont fait, ou le problème de la sortie, et moi j'ai fait le géant : on présente le problème d'une façon courte et on attend qu'ils demandent les informations peu importe le type de...

C3 : Mais celui-ci a des données. Celui-là n'en n'a pas. Eux ils n'ont pas de données, l'intention… c'est relié à l'utilisation du problème qui est différente.

CP5 : Ici, il y a toutes les informations, et ici, ils n'ont pas toutes les informations. […]

CP4 : J'ai l'impression que ce qu'on veut dire c'est : susciter l'engagement réel des élèves en mathématique, c'est ça qu'on veut... En utilisant le « Ne pas trop en dire » on veut les mettre dans une réelle situation de mathématiques que ce soit en problématisation, ou … c'est ça qu'on veut en fait.

Le tableau est bien le fruit de la collaboration des différents acteurs CPs et chercheurs. Nous allons maintenant voir comme il joue le rôle de ressource structurante. Voyons pour cela comment les CPs parlent de ce processus de construction collaborative, et la manière dont ils envisagent d'utiliser ce tableau dans leur pratique. Nous pourrons ensuite, en guise de discussion, examiner cette collaboration sous l'angle du développement professionnel des CPs.

Le tableau comme processus de collaboration structurant le travail collectif

À l'automne 2017, C5 retrouve le groupe après avoir manqué plusieurs séances. Son retour donne l'occasion de revenir sur le tableau et son processus de construction et de faire discuter les CPs à son propos. Ces échanges nous amènent à voir que le tableau est à la fois un objet de mémoire de la collaboration, et une ressource qui sert au support de la pensée collective sur la RP et l'accompagnement. Il permet donc aux acteurs d'une part de rassembler leurs idées, de garder une trace de ce qui est discuté et retenu par le groupe, et d'autre part de travailler l'organisation de ces idées et d'aller plus avant. Ainsi CP4 et CP8 soulignent l'importance de « garder des traces » et de les « organiser » ou de les « structurer » :

> CP4 : Ça se veut quelque chose qui laisse des traces, mais ça sert aussi à organiser l'avancement, donc ce n'est pas qu'un aide-mémoire, des fois l'idée d'avoir les trois temps, en tout cas pour moi ça me permet de faire "ok, là vraiment on est plus dans l'avant, là on est plus dans le pendant, plus dans l'après", c'est plus que ça organise ma pensée en RP.

> CP8 : Ce n'est pas juste pour structurer. Moi je trouve qu'on sent qu'il y a quand-même à certains moments le désir de garder une trace.

Cet objet de mémoire est, de plus, un appui, un levier pour orienter les discussions, pour approfondir certains aspects en lien avec la RP, et interroger leur organisation. CP3 parle ici de revoir certaines formulations et d'ajouter des précisions, le tableau étant quelque chose qui reste en construction au fil des rencontres, la collaboration conduisant à « la superposition de la compréhension de chacun » :

> CP3 : Puis la superposition de la compréhension de chacun des enjeux, on la voit à chacune des rencontres où on se dit « ah, oui mais ça je devrais le vérifier, parce que ce n'est pas tout à fait ça qu'on voulait dire » on ajoute des précisions. Finalement ça fait que c'est un tableau qui est aussi… [très détaillé].

Le tableau permet également de prendre conscience de certains manques. Il rend visible des aspects qui n'ont pas encore fait l'objet d'un travail collaboratif, et permet d'orienter les discussions. C'est donc un outil de collaboration qui vient aider à structurer la suite :

> CP4 : À un moment il y a eu la discussion sur le pilotage et là on s'est dit, on s'est rendu compte qu'on était tout le temps dans l'avant, tout le temps dans la préparation, la planification. On s'est dit on va aller creuser dans ce qui se passe dans la classe et c'est de là qu'est venu en fait le problème des 3 temps. … C'est que l'après on l'a négligé, mais il est ressorti aujourd'hui, il y a eu au moins deux-trois commentaires qui disaient « bon on a besoin d'aller feuilleter ce qui se passe après »

Ainsi, le tableau permet d'y voir plus clair, mais aussi de pousser la réflexion. Les CPs le nourrissent (revoir l'extrait autour de « ne pas trop en dire ») en allant plus loin. Il permet de prendre du recul par rapport à la collaboration, de prendre conscience de ce qui a été fait ou non, et d'orienter le travail à venir. Le caractère inachevé du tableau est important ici : le tableau est un révélateur et on travaille sur ce qu'il révèle. C'est un outil *en* développement parce que c'est un outil de développement et vice versa : c'est en développant le tableau que la réflexion se développe et c'est en développant le tableau que les idées se développent.

Le tableau comme aide à l'accompagnement d'enseignants par les CPs dans une perspective de collaboration avec eux

Notons que pour les CPs le tableau agit aussi comme une ressource structurante dans leur travail avec les enseignants. C'est la dimension interpersonnelle du métier. L'activité professionnelle du CP s'adresse aux autres, elle est pensée en relation avec des enseignants, des élèves en arrière-plan, des collègues CPs avec qui il interagit, etc. (e.g. Hanin *et al.*, 2021 ; Lajoie *et al.*, accepté).

> C5 : On sent qu'il y a peut-être un auditoire potentiel autre qui est quand-même un peu là d'une certaine façon.
>
> CP8 : Oui puis il faudrait baliser c'est qui les autres? Est-ce que c'est d'autres CPs? Est-ce que ce sont des enseignants? Est-ce que…?
>
> CP5 : Je suis d'accord quand tu disais « peut-être pour nous », ça paraît qu'il y a une intention prochaine de communiquer. On pense à d'autres là.

Le tableau comporte ainsi des éléments qu'il serait intéressant de « communiquer » (e.g. les conseils, les ressources, les principes directeurs), mais ce n'est pas tout. Les CPs envisagent d'utiliser le tableau comme grille de lecture pour interpréter ce qui se passe pendant l'accompagnement, afin de situer ce qui se produit avec les enseignants et de s'orienter :

> CP5 : Ça [le tableau] m'aide à un peu encadrer des échanges avec des enseignants, je pourrais dire « ah oui, ça vient de là, tu es en train de faire ça, c'est l'avant, quelle est l'intention, qu'est-ce qu'on veut ». Ça je le sais, ça ne se traduit pas à l'enseignant, mais dans ma tête ça oriente déjà la pensée, là c'est le premier exemple que j'ai.
>
> CP8 : […] Moi dans mon rôle de CP, ça [le tableau] me sert dans à peu près toutes mes actions que je pose en accompagnement des maths avec les orthopédagogues, les enseignants, même avec mes collègues, dans les discussions et tout ça…

Dans les extraits suivants, CP5 et CP6 expliquent comment le travail fait autour du tableau leur permet de nommer les gestes qu'ils posent en accompagnement, ceux-ci étant empreints des réflexions menées en groupe sur les « principes directeurs » (voir section 3.1). Cette mise en mots, explicitation de ce qui se passe en accompagnement, illustre la réflexivité de ces CPs sur leur propre pratique.

> CP5 : Quand je suis en rencontre avec les enseignants, soit c'est moi qui prends des notes, soit [c'est eux]. On les met ensemble et moi… j'ajoute, je bonifie, je mets différentes couleurs et je [mets en évidence] certains éléments qu'on peut dégager. Il y a des affaires qui vont comme au-delà et qui ressemblent étrangement à des principes directeurs : on considère l'élève comme un mathématicien, […] on n'en dit pas trop, on laisse aller, on retrouve des

conseils indirectement. Ce ne sont pas des éléments qui ont orienté nos discussions [avec les enseignants] mais je suis en mesure de pouvoir les nommer, les reconnaître... […]

CP6 : La semaine passée, une jeune enseignante m'appelle « Ah je sais pas trop comment » […] Elle me demande quoi faire, et en 45 minutes au téléphone j'ai essayé de lui communiquer l'idée d'ouvrir [sur] une culture de résolution de problèmes […] on a parlé aussi des moyens d'aider les élèves, par des formes différentes de problèmes ou par les interactions […] qu'on doit favoriser en classe. Fait que ça [les principes directeurs], ça m'a nourrie davantage … en tout cas ce sont des éléments sur lesquels en ce moment j'ai le plus poussé là, mais effectivement c'est une ressource. […]

CP4 : Comment je le fais parler moi [le tableau] […] Ça m'arrive souvent dans ma pratique avec les enseignants de rentrer par la troisième colonne [« Vignettes - exemples » dans la figure 1]. On prend un exemple. On rentre par une tâche. On donne un problème. À partir de cette tâche-là, on questionne les enseignants sur les enjeux : « Hey, c'est quoi l'enjeu de cette tâche-là ? Qu'est-ce qu'on y voit ? C'est quoi les variables ? ». Je m'en vais avec cette question-là, je vais aller voir la première colonne [« Enjeux, défis, nœuds » dans la figure 1] avec [les enseignants]. Bon, enjeux. Là le conseil, je ne sais pas comment je le fais vivre vraiment dans ma tête, mais tu sais, « qu'est-ce qu'on retient par rapport à ça ? C'est quoi la leçon qu'on retire dans notre enseignement ? »

CP5 : « Ah oui, moi je dégage qu'il faut que je fasse plus de variétés » bien on est proche de l'enjeu, mais on entend le conseil pareil : « il faut que je varie mes affaires ». Et « Hey, y en a-t-il d'autres des situations de ce genre-là ? » Oups, là ça pourrait être mes ressources admettons. Ou bien, qui nous a parlé de ça ? Ou pour aller plus loin, ou pour aller connecter ce qu'on vient de faire là dans la pratique avec les recherches, mettons, on pourrait lire sur tel auteur, tel auteur, tel auteur.

On voit ici que le tableau a plusieurs fonctions dans le travail des CPs, les aidant à cibler des éléments à aborder, mais aussi à repérer des conduites chez les enseignants qu'ils accompagnent, à donner des pistes d'interventions et ainsi de suite. Et on sent bien que le métier de CP, dans la manière dont ils l'exercent, ne se limite pas à informer les enseignants qu'ils accompagnent, mais à *travailler avec eux*. Le tableau apparaît alors à nouveau comme une aide à la collaboration : un outil au service d'un accompagnement qui consiste en quelque sorte à collaborer avec les enseignants afin de les aider à surmonter les défis qu'ils rencontrent (voir Lajoie *et al.*, accepté). L'élaboration du tableau et les discussions sur son usage sont donc l'occasion pour les CPs d'expliciter comment leur accompagnement prend la forme d'une œuvre conjointe avec les enseignants autour d'éléments qui se trouvent dans le tableau.

Discussion et conclusion

Le travail et les responsabilités des enseignants se sont sensiblement complexifiés au fil des ans en raison des changements advenus dans la sphère éducative (e.g. hétérogénéité de la population scolaire, évolution des connaissances et des contextes sociaux, réformes curriculaires successives) (Portelance *et al.*, 2014). Par voie de conséquence, le métier de CP également. Rappelons que les CPs doivent naviguer entre les prescrits, les conceptions singulières qui orientent l'action de chaque enseignant et les contextes professionnels. Afin de répondre aux nouvelles préoccupations des enseignants, les CPs sont appelés à questionner leurs pratiques de manière continue, à actualiser leurs compétences professionnelles et à faire évoluer leurs pratiques d'accompagnement (Hanin *et al.*, 2021). La recherche collaborative, en offrant des espaces réflexifs de groupe au sein desquels les conceptions, rationnels, connaissances et expériences des uns et des autres s'entrecroisent, constitue un levier de choix pour répondre à ce besoin de développement professionnel (Bednarz *et al.*, 2012).

Dans cette contribution, nous avons choisi d'illustrer ce point en centrant notre analyse sur ce que disent des CPs à propos de la production d'un tableau qui fait une synthèse sur ce qui se co-construit autour de la résolution de problèmes en classe. Si le schéma/tableau permet initialement de garder une trace et de voir plus clair, il devient très vite un support au développement professionnel du CP. Effectivement, l'inscription de l'information dans les « bons mots » et à la « bonne case », la construction d'une compréhension partagée du tableau et de ce dont il traite, demandent aux CPs d'expliciter leur pensée avec plus de profondeur et de précision. À ce propos, plusieurs CPs soulignent explicitement leur souhait d'utiliser le tableau comme outil d'intelligibilité et d'analyse de leur pratique d'accompagnement des enseignants. De plus, la présence de cases vides qui pousse à aller plus loin conduit les CPs à affiner et à approfondir leur réflexion. Ils s'interrogent ainsi sur des aspects de la RP auxquels ils n'auraient pas pensé s'ils ne l'avaient pas structurée de la sorte. Cela rend les espaces réflexifs très productifs, que ce soit en termes de savoirs didactiques, de savoir-agir, ou d'évolution des conceptualisations initiales. En outre, le format même du tableau impose une certaine concision qui invite les CPs à formaliser et à nommer avec plus de précision les pratiques et gestes professionnels (voir Lajoie *et al.*, accepté) auxquels ils réfèrent. La construction collaborative du tableau avec les chercheurs renforce naturellement cela (on le voit dans les extraits de la section 3.1).

Nos analyses font également ressortir l'intérêt des CPs pour d'autres manières de faire, pour la découverte d'alternatives à leurs pratiques. Cette actualisation et ces réflexions sur les manières de faire sont soutenues par le collectif. Si les réflexions menées entre CPs sont recherchées, appréciées et source de développement professionnel, les CPs sont demandeurs d'être alimentés par les avancées de la recherche sur la question, et souhaitent « valider » leurs manières de faire auprès du collectif, dont le tableau est ici une sorte de réification, comme gage de légitimité de leurs pratiques auprès des enseignants. Le tableau co-construit parle ainsi d'une voix collective qui légitimise un certain horizon d'actions, objet de mémoire collective auprès de laquelle chacun se réfère ensuite pour valider ses actions particulières situées dans son contexte (notions de genre et style CP, voir Hanin *et al.* 2021).

En effet, c'est ce désir de mieux comprendre, de développer et de légitimer leurs actions et à propos de la RP en classe qui est à l'origine de la recherche. Ceci résonne évidemment avec l'absence de formation spécifique pour devenir CP (et le fait que les formations continues sont peu nombreuses) (voir par exemple Duchesne, 2016 ; Duchesne et Gagnon, 2013). Terminons en soulignant que nous nous sommes peu attardés ici au processus même de co-construction entre chercheurs et CPs, et à la façon dont celui-ci contribue au développement des CPs *et* au travail des chercheurs. C'est le projet d'une autre analyse, en partie amorcée dans Bednarz *et al.* (2020).

Références

Bardin L. (1977). *L'analyse de contenu*. Paris : Presses Universitaires de France.

Bednarz N., Desgagné S., Maheux J.F., & Savoie Zjac L. (2012). La mise au jour d'un contrat réflexif comme régulateur d'une démarche de recherche qui se veut participative : le cas d'une recherche action et d'une recherche collaborative. *Recherches en Éducation 14*, 128-151. https://journals.openedition.org/ree/5894

Bednarz N. (Dir.) (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement*. Editions L'Harmattan.

Bednarz N., Bacon L., Lajoie C., Maheux J. F., & Saboya M. (2020). L'activité réflexive en recherche collaborative : analyse polyphonique d'un projet mené avec des conseillers pédagogiques en mathématiques au primaire. *Revue hybride de l'éducation 4*(1), 24-45.

Desgagné S. (1997) Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. *Revue des sciences de l'éducation 23*(2), 371-393.

Draelants H. (2007). Entre le pair et l'expert, trouver la distance qui convient : une question de légitimation pour le conseiller pédagogique. *Recherches sociologiques et anthropologiques, 38* (1), 163-182.

Dubet F. (1994). *Sociologie de l'expérience*. Paris : Éditions du Seuil.

Duchesne C., Gagnon N. (2013). Les sources du sentiment d'efficacité personnelle des conseillers pédagogiques en tant que formateurs d'adultes. *Revue canadienne de l'éducation 36* (4), 202-227.

Duchesne C. (2016) Complexité et défis associés aux rôles de conseiller pédagogique. *McGill Journal of Education 5* (1), 635-656.

Durand M.-J., Poirier S. (2012). La recherche collaborative au service du développement professionnel en ligne. *Éducation et francophonie 40* (1), 119-137.

Hanin V., Lajoie C., Bednarz N., Saboya M., & Bacon L. (2021). Vers une meilleure compréhension du métier de conseiller pédagogique en mathématiques au primaire : une approche par le genre et les styles. *Phronesis 10*(1), 52-71.

Houle H., Pratte M. (2007). La fonction de conseiller pédagogique au collégial. Repéré à http://www.cdc.qc.ca/pdf/786746-houle-pratte-fonctions-conseillers-pedagogiques-performa-2007.pdf

Lajoie C., Bednarz N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec : un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Revue canadienne d'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies 12*(2), 178-213.

Lajoie C., Bednarz N. (2014). La résolution de problèmes en mathématiques au Québec : évolution des rôles assignés par les programmes et des conseils donnés aux enseignants. *Éducation et Francophonie 42*(2), automne, 7-23.

Lajoie C., Bednarz N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du 21ème siècle au Québec : rupture ou continuité ? *Revue canadienne d'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies 16* (1), janvier-mars, 1-27.

Lajoie C., Bednarz N. Saboya M., Hanin V., & Bacon L. (2022). Logiques d'action de conseillers pédagogiques en mathématiques au primaire dans l'accompagnement d'enseignants à la résolution de problèmes en contexte d'enseignement. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 1, 119-166.

Lave J. (1988) *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge University Press.

Lave J., Wenger E. (1991) *Situated learning. Legitimate peripherial participation*. Cambridge University Press.

Lessard C. (2008). Entre savoirs d'expérience des enseignants, autorité ministérielle et recherche : les conseillers pédagogiques. In Perrenoud, P. *et al. Conflits de savoir en formation des enseignants* (pp.169-182). De Boeck.

Lessard-Hébert M., Goyette G., & Boutin G. (1997). *La recherche qualitative : fondements et pratiques*. Paris : De Boeck.

Portelance L., Martineau S., & Mukamurera J. (2014). *Développement et persévérance professionnels dans l'enseignement*. Québec : Les presses de l'Université du Québec.

Theis L., Gagnon N. (2016) *L'apprentissage à travers des situations-problèmes mathématiques : Bases théoriques et réalisation pratique*. PUQ.

Wenger E., McDermott R. A., & Snyder W. (2002). *Cultivating communities of practice: A guide to managing knowledge*. Harvard Business Press.

Wenger E. (2005). *La théorie des communautés de pratique*. Presses Université Laval.

Annexe

PRINCIPES DIRECTEURS - VALEURS - IDÉES - QUESTIONNEMENTS		TEMPS DU PROBLÈME	ENJEUX / DÉFIS / NOEUDS	CONSEILS / PISTES / GESTES PORTEURS	EXEMPLES - VIGNETTES	DES RÉFÉRENCES, DES RESSOURCES… plus théoriques ou plus pratiques
Instauration d'une culture de recherche mathématique en classe	**RÉFÉRENCES - RESSOURCE**	**1. Avant le pilotage**	**ENSEIGNANTS ET CP** 1.1 PLANIFICATION 1.2 CHOIX DES PROBLÈMES			
			ÉLÉMENTS SUPPLÉMENTAIRES CP			
		2. Pendant le pilotage	**ENSEIGNANTS ET CP** 2.1 MISE EN ROUTE 2.2 RÉALISATION 2.3 RETOUR AVEC LES ÉLÈVES			
ÉLÉMENTS SUPPLÉMENTAIRES POUR LES CP:			ÉLÉMENTS SUPPLÉMENTAIRES CP			
		3. Après le pilotage	**ENSEIGNANTS ET CP** ÉVALUATION PROLONGEMENT ARTICULATION			
			ÉLÉMENTS SUPPLÉMENTAIRES CP			

Figure 1 - Rubriques du tableau « final » construit collectivement

Temps du problème	ENJEUX / DÉFIS / NOEUDS	CONSEILS / PISTES / GESTES PORTEURS	EXEMPLES – VIGNETTES	RÉFÉRENCES, RESSOURCES…
…				
Pendant le pilotage MISE EN ROUTE	ENSEIGNANTS ET CP PRÉSENTATION DU PROBLÈME	Présenter le problème succinctement sans trop en dire** **Ce conseil ne prend pas la même forme d'un problème à l'autre. Différentes raisons : 1. Avoir accès à l'interprétation des élèves ; 2. Placer l'élève en position de recherche	Exemple 1 : Organisation d'une sortie On présente le contexte et l'objectif sans plus, et on laisse les élèves déterminer ce dont ils ont besoin comme infos.	« Be less helpful » (vidéos de Dan Meyer) « Effet Topaze » (de Guy Brousseau) Theis et Gagnon (2016)

Figure 2 – Extrait du tableau autour de « sans trop en dire »

Titre: Une entrée par la demande pour un travail collaboratif entre un didacticien des mathématiques et des personnes enseignantes autour de l'enseignement-apprentissage des mathématiques à l'école primaire

Auteurs: MARTIN Vincent et BENOIT David

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 153 - 166

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Une entrée par la demande pour un travail collaboratif entre un didacticien des mathématiques et des personnes enseignantes autour de l'enseignement-apprentissage des mathématiques à l'école primaire

MARTIN[1] Vincent – BENOIT[2] David

Résumé – Dans une réflexion sur l'adéquation entre offre et demande de formation continue autour de l'enseignement-apprentissage des mathématiques, nous analysons la rencontre initiale d'une clinique didactique de l'activité pour illustrer une entrée par la demande dans le cadre d'un travail collaboratif entre des personnes enseignantes et un didacticien des mathématiques autour de l'émergence d'un objet professionnel de formation lié à l'enseignement-apprentissage des mathématiques à l'école primaire.

Mots-clefs : Travail collaboratif, formation continue en enseignement-apprentissage des mathématiques, développement de la demande, objet professionnel de formation, clinique didactique de l'activité.

Abstract – Offer and demand do not always meet when it comes to in-service teacher training with regards to teaching-learning Mathematics. To mitigate the gap, we analyse the initial meeting of a didactic clinic of activity to illustrate an entry through a demand expressed by teachers to a didactician of mathematics as they work in collaboration to enable a common training professional object linked to teaching-learning mathematics in an elementary school to emerge.

Keywords: Collaborative work, in-service teacher training related to teaching-learning Mathematics, development of a demand, training professional object, didactic clinic of activity

1. Université de Sherbrooke, Québec, Canada, vincent.martin@usherbrooke.ca

2. Université du Québec en Outaouais, Québec, Canada, david.benoit@uqo.ca

Une (in)adéquation de l'offre et de la demande en formation continue autour de l'enseignement-apprentissage des mathématiques

Au Québec, le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MEES) (2022) définit la formation continue des personnes enseignantes comme « l'ensemble des actions et des activités dans lesquelles les enseignantes et les enseignants en exercice s'engagent de façon individuelle et collective en vue de mettre à jour et d'enrichir leur pratique professionnelle » (s.p.). Il s'agit donc d'une démarche ponctuelle et volontaire de la personne enseignante qui peut reposer sur plusieurs moyens visant, selon le MEES, à adapter la formation continue aux traits distinctifs des milieux scolaires.

Mais dans le contexte de la formation continue spécifiquement liée à l'enseignement-apprentissage, est-ce qu'offre et demande correspondent toujours ? Le rapport du Conseil supérieur de l'éducation (CSÉ) (2014) est clair à ce sujet : les formations offertes ne sont pas toujours pertinentes pour répondre aux besoins des personnes enseignantes québécoises. Pour le CSÉ, l'adéquation entre la demande et l'offre constituerait le maillon faible du développement professionnel des personnes enseignantes. Il note d'ailleurs que ces dernières se sentent souvent spectatrices plutôt qu'actrices du processus de détermination de l'offre en formation continue en enseignement-apprentissage. Enfin, il remarque que l'offre est peu différenciée, malgré la diversité des besoins des personnes enseignantes.

C'est du côté de la détermination différenciée de l'offre que la personne didacticienne a un rôle à jouer. Pour ce faire, nous proposons une entrée en formation continue par la demande à travers un dispositif théorique et méthodologique nommé la clinique didactique de l'activité (CDA), que Benoit (2022) a développé dans son travail doctoral[3]. La CDA s'inspire du dispositif méthodologique de la clinique de l'activité (Clot, 2017). Elle s'appuie sur la psychologie vygotskienne (Vygotski, 1934/1997) et le concept de puissance d'agir (Spinoza, 1677/2005) dans une posture d'activisme transformateur (Stetsenko, 2017). Par ailleurs, à travers les interventions de la personne didacticienne, des outils de la didactique des mathématiques sont convoqués en rapport à la réalisation d'une CDA et à l'objet professionnel qui s'y développe.

Pour conceptualiser une entrée par la demande, la première question à se poser est pourquoi les personnes enseignantes de mathématiques s'engagent-elles en formation continue? Ici, nous considérons que la pléthore de réponses possibles se résume par le fait que ces personnes ressentent une insatisfaction, liée à leur activité d'enseignement-apprentissage des mathématiques, qu'elles n'arrivent pas à résoudre grâce à leurs ressources habituelles. Si elles formulent une demande à des personnes didacticiennes des mathématiques, c'est qu'elles reconnaissent en elles (et en leur discipline) une source potentielle pour les aider à transformer leur situation de telle sorte qu'elle devienne plus satisfaisante. À nos yeux, elles cherchent à passer d'une situation subie à une situation dans et sur laquelle elles sont en mesure de développer et de déployer leur puissance d'agir à l'aide de la

3. Le texte de Benoit (soumis) pour le GT1 de l'EMF 2022 présente les fondements et la démarche de la CDA.

didactique des mathématiques. Le rôle de la personne didacticienne est donc de contribuer, principalement à l'aide de la didactique des mathématiques, au développement de la puissance d'agir des personnes enseignantes de mathématiques en fonction de leur demande liée à leurs réalités.

D'une demande initiale à un objet professionnel de formation

Initialement, une demande de formation continue est adressée à la personne didacticienne, mais elle n'est pas nécessairement en adéquation avec les réalités des personnes enseignantes. D'une part, comme l'indique le CSÉ (2014), cette demande est fortement influencée par les besoins organisationnels lorsqu'elle est formulée par une personne gestionnaire. D'autre part, même lorsqu'une demande est formulée par des personnes enseignantes de mathématiques, la définition précise de cette demande est rendue difficile par le fait que celles-ci n'ont pas toujours pleinement conscience des causes de leur insatisfaction.

Dans le contexte de la CDA, c'est au moment d'une rencontre initiale d'un collectif composé de personnes enseignantes et de la personne didacticienne qu'est précisée la demande à travers la circonscription d'un objet professionnel collectif qui sera au cœur du dispositif. De la formulation de la demande initiale à la circonscription de l'objet professionnel collectif, la personne didacticienne doit être attentive au développement de cette demande tout au long de la CDA afin d'y contribuer. Puisque cette demande est adressée à une personne didacticienne, elle est toujours liée au moins en partie à un projet didactique recherché par la personne enseignante qui, s'il se réalisait, augmenterait sa satisfaction. Ainsi, elle cherche activement à le réaliser afin de créer un à-venir meilleur dès maintenant (Stetsenko, 2017).

Or, la puissance d'agir de la personne enseignante est (partiellement) empêchée. La personne didacticienne cherche donc à contribuer à l'aide d'outils didactiques, en collaboration avec la personne enseignante et en lien avec sa réalité, au développement de la pensée didactique de celle-ci afin qu'il lui soit possible d'agir dans et sur sa situation pour la transformer en cohérence avec son projet didactique recherché. Au regard de ces réflexions entourant le contexte de travail collaboratif entre une personne didacticienne des mathématiques et des personnes enseignantes du primaire, une question émerge et guide notre travail :

> Dans le cadre d'une CDA, comment la personne didacticienne des mathématiques peut-elle contribuer au développement de la demande initiale de formation et à sa transformation en un objet professionnel collectif lié à l'enseignement-apprentissage des mathématiques?

La clinique didactique de l'activité : bases théoriques et déroulement

De notre point de vue de personnes didacticiennes des mathématiques, la CDA est un dispositif théorique et méthodologique d'intervention-recherche à visée transformative autant pour les personnes enseignantes que didacticiennes. Du point de vue des personnes enseignantes, la clinique didactique de l'activité est plutôt perçue comme une offre de formation à la fois personnalisée et collective (Benoit, 2022). Il s'agit d'un dispositif collaboratif dans lequel la dimension de formation se fait à travers l'activité conjointe des personnes enseignantes et de la personne chercheure, mais où la dimension de recherche est faite (simultanément) par cette dernière sur le travail de formation.

Quoi qu'il existe une variété d'étapes et de méthodes à l'intérieur d'une CDA en fonction des besoins des personnes participantes et des contraintes, il existe un canevas de base: demande initiale, rencontre initiale du collectif, enregistrements de séances de classe, autoconfrontations simples (ACS), autoconfrontations croisées (ACC), retour au collectif. Au cours de la rencontre initiale du collectif, un objet professionnel collectif émerge à partir de la demande initiale de formation et devient l'objet central de l'intervention-recherche ou de la formation, selon le point de vue. L'étape suivante consiste à filmer des séances de classe ordinaires dans lesquelles la personne enseignante prévoit que l'objet professionnel apparaitra. Il s'agit de séances de classe ordinaires au sens où rien de spécial n'est mis en place pour le projet au niveau de la planification de la personne enseignante. Au contraire, les séances doivent être le plus fidèle à l'activité d'enseignement-apprentissage des mathématiques telle qu'elle est vécue au jour le jour. Par la suite, la personne enseignante et la personne didacticienne visionnent chacune de leur côté les enregistrements et identifient des extraits pertinents au regard de l'objet professionnel. En ACS, une rencontre entre la personne enseignante et la personne didacticienne, ces extraits constituent le matériau de base pour discuter de l'objet professionnel en rapport avec l'activité conjointe d'enseignement-apprentissage des mathématiques réalisée par la personne enseignante et les élèves. Or, ce qui est visible, audible et ressenti n'est pas toute l'activité. Ce qui est perceptible pour la personne didacticienne ne représente qu'une partie de l'activité. Pour accéder à une plus grande part de l'activité réelle de la personne enseignante, incluant sa pensée, il est nécessaire de mettre en place une situation (avec des méthodes indirectes) lui permettant de la révéler le plus possible. Pour la personne enseignante, ce qui est perceptible dans les extraits n'est jamais satisfaisant. Rapidement, elle sent qu'elle doit ajouter quelque chose afin que la personne didacticienne puisse comprendre. Ainsi s'amorce à la fois le travail de formation et d'intervention-recherche. L'étape suivante consiste à réunir deux personnes enseignantes avec la personne didacticienne dans une ACC au cours de laquelle des manières de faire différentes en lien avec l'objet professionnel retenu par le collectif sont mises en lumières à partir d'extraits pertinents des séances enregistrées dans les classes de chacune des deux personnes enseignantes. Enfin, un retour au collectif permet un partage des apprentissages réalisés en lien avec l'objet professionnel: prises de consciences, possibles évoqués, points de convergence et de divergence, etc.

Quelques éléments méthodologiques

Dans ce texte, nous étudions un exemple de demande de formation continue en enseignement-apprentissage des mathématiques dans le contexte d'une CDA pour analyser l'histoire de son développement, de la demande initiale jusqu'à l'émergence d'un objet professionnel collectif dans la rencontre initiale du collectif. Cette CDA a été pilotée par un didacticien des mathématiques au primaire (premier auteur). Elle a pris forme autour d'une équipe de personnes enseignantes du 2e cycle (8 à 10 ans) d'une école primaire de Montréal. Durant l'année scolaire 2019-2020, le chercheur a participé à des communautés d'apprentissage professionnel (CAP) qui traitaient généralement du thème de l'enseignement-apprentissage des mathématiques au sein de cette école. Cette participation à ces CAP découlait d'une demande d'accompagnement professionnel d'une équipe de personnes conseillères pédagogiques en mathématiques au primaire[4], qui avait été formulée par une gestionnaire à l'intention du chercheur. Au fil des rencontres, ce dernier a été invité par deux des conseillères pédagogiques de l'équipe à prendre part aux CAP dans l'école, puis le projet d'intervention-recherche s'est mis en place.

Parmi les personnes enseignantes du 2e cycle, un collectif composé de 10 personnes a été formé. Celui-ci comprenait d'abord six personnes enseignantes, dont une œuvrant au sein d'une classe d'adaptation scolaire au 2e cycle et une agissant à titre d'enseignante ressource dans l'école, ainsi que quatre titulaires de classes de 3e ou de 4e année. Il contenait également deux conseillères pédagogiques qui accompagnaient déjà l'équipe de personnes enseignantes. Enfin, le didacticien des mathématiques et une étudiante à la maitrise complétaient le collectif.

La rencontre initiale du collectif d'environ 90 minutes a eu lieu en mars 2020[5]. Elle a permis de confirmer la participation libre et éclairée des personnes participantes et mené à l'identification d'un objet professionnel collectif visé par la CDA, à savoir le questionnement dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Un enregistrement audio de la rencontre a été réalisé et retranscrit en verbatim. Une analyse de ce verbatim a permis de cibler deux extraits qui sont maintenant présentées sous forme de vignette, comme cela a été fait par Benoit (2022) dans le cadre de sa CDA, afin de mettre en lumière une contribution que peut avoir la personne didacticienne au développement de la demande initiale et à sa transformation en un objet professionnel collectif lié à l'enseignement-apprentissage des mathématiques.

4. Voir le texte de Maheux et al (soumis) pour le GT1 de l'EMF 2022 pour en savoir plus sur ce type d'acteur du système scolaire québécois.

5. En raison du contexte sociosanitaire entourant la pandémie de COVID-19, la CDA a été suspendue le lendemain de la rencontre initiale du collectif.

Résultats

Vignette 1 : accompagner les personnes enseignantes dans l'orientation d'un regard vers elles-mêmes

Durant la rencontre initiale du collectif, le discours des personnes enseignantes se centre à plusieurs reprises sur des difficultés vécues par les élèves et non sur des difficultés qu'elles rencontrent elles-mêmes dans leur activité de travail. Or, c'est bien le développement professionnel qui est l'objet de la CDA, et non pas le développement des élèves, même si les deux sont en rapport dialectique. Le didacticien cherche alors à recentrer le propos des personnes enseignantes afin d'orienter le collectif vers l'identification d'un objet professionnel. Ainsi, le rôle de la personne didacticienne consisterait en partie à orienter le regard des personnes enseignantes vers elles-mêmes, vers leurs propres difficultés au lieu d'être centré sur celles des élèves. Ce faisant, elle doit commencer par reconnaitre l'existence de la réalité décrite par les personnes enseignantes au sujet des élèves, pour ensuite les questionner au sujet de l'autre pôle du rapport dialectique, c'est-à-dire elles-mêmes, afin d'amener ces dernières à continuellement considérer le rapport dialectique entre la personne enseignante et les élèves dans l'activité conjointe d'enseignement-apprentissage des mathématiques.

Par exemple, dans l'extrait suivant, les personnes enseignantes discutent depuis plusieurs minutes de la difficulté perçue chez les élèves à réguler une activité de résolution de problèmes.

> Marie-Line : « Mais parfois, [les élèves] commencent quelque chose, puis là, ils se rendent compte que ça ne marche pas, ou qu'ils ne sont plus sûrs, alors ils s'arrêtent, puis on dirait qu'ils ne sont pas capables non plus de revenir, puis de… C'est pour ça que, tantôt je parlais d'autorégulation, d'être capable de se dire : «OK, je vais essayer quelque chose.» Puis là, d'essayer, puis un moment donné de s'arrêter puis de se dire : «Est-ce que ça marche mon affaire ou ça ne marche pas… ?» »
>
> Kelly : « Ils ne sont pas capables d'essayer. »
>
> Anne : « C'est qu'ils ne [s'autorégulent pas]. Ils ne changent pas leurs processus, ils ne pensent pas avoir fini. »
>
> Marie-Line : « Ils ne font pas ça, on dirait que cet aller-retour-là, on dirait qu'ils ne le font pas. »
>
> Didacticien : [Acquiesce silencieusement.]
>
> Yannick : « Ils ont peur de se mouiller parfois. »
>
> [Les échanges se poursuivent quelques minutes sur l'auto-régulation des élèves de la 4e à la 6e année. Le didacticien choisit alors d'intervenir.]

Didacticien : « [...] Il faut se rappeler, puis je veux juste être sûr qu'on est encore dans le même cadre, là, qu'on ne réfléchit pas à une difficulté ou à un enjeu de l'élève, on est dans une réflexion sur : qu'est-ce que dans mon travail constitue un enjeu par rapport à l'élève. Alors ce que j'entends, ce n'est pas : «C'est dur pour mes élèves de faire ça.» C'est : «C'est dur pour mes élèves de faire ça, puis pour moi, ça constitue donc un enjeu dans ma pratique.» »

Personne participante : « Je ne sais pas comment l'accompagner. »

Personne participante : « Le questionner, oui, c'est ça. »

Didacticien : « J'entends ça, dans le fond. Alors ça pourrait être un enjeu de questionnement, à la limite, ou d'autre chose. »

En retournant la caméra vers les personnes enseignantes, le didacticien leur propose de se regarder agir avec les élèves, de réfléchir à leur activité. Dans cet extrait, le rôle du didacticien s'avère donc de mettre en rapport l'activité de l'élève qui vit des difficultés avec l'activité de la personne enseignante qui vit elle-même une difficulté en rapport avec celle de l'élève. En un sens, on met en lumière le concept d'activité conjointe d'enseignement-apprentissage en orientant les regards sur la personne enseignante. Dans ce contexte, des questions sont soulevées. Est-ce parce qu'elles ont l'habitude de se centrer sur l'activité de l'élève, qu'il n'est pas commun pour les personnes enseignantes de se questionner sur leurs besoins, leurs défis, leurs pistes de développement professionnel? Est-ce parce que c'est plus facile (ou moins déstabilisant) de regarder les difficultés de l'élève que leurs propres difficultés que ce retournement de caméra doit être proposé par le didacticien?

Plus tard dans la rencontre initiale, une des personnes enseignantes contribue elle aussi au recadrage (en simultané avec le didacticien) du discours d'une collègue qui discute de la difficulté vécue par l'élève dans l'organisation de ses démarches mathématiques.

Maude : « Oui. Mais, l'organisation, je trouve que c'est un enjeu intéressant, aussi. [...] Parfois, c'est juste ça qui leur manque, puis on a l'impression qu'on les pénalise dans leur raisonnement, mais on se rend compte que non finalement, non il le sait, c'est juste qu'il ne l'a pas écrit au début, alors ça l'a tout mélangé dans le reste, ou il s'est trompé avec ses jetons, alors… Mais… »

Didacticien : « Alors l'enjeu, ce serait, pour toi… »

Anne : « C'est parce que ça, c'est pour l'élève et non pas pour nous. »

Didacticien : « Merci, on a fait exactement la même intervention, en même temps, hein. Donc, le fait que l'élève rencontre une difficulté dans son organisation, pour toi ça constitue un enjeu dans ton activité d'enseignante ?»

[Silence]

> Maude : « Ben non, mais peut-être de prendre plus de temps pour mettre l'emphase là-dessus, puis enseigner… C'est peut-être ça que je fais, moi, parce que je me dis «Ah, raisonnement, raisonnement», plus que «Organisation». [...] »

Ici, la prise de conscience est amenée par une collègue, Anne, qui invite une autre personne enseignante à se regarder, à retourner la caméra sur soi. C'est donc dire qu'Anne elle-même a fait une prise de conscience par rapport à l'importance d'explorer l'activité de la personne enseignante. Mieux encore, elle est en mesure d'agir volontairement sur la situation dans laquelle elle se trouve pour mettre en lumière la nécessité de retourner la caméra. Anne a déjà développé sa puissance d'agir en mettant en rapport dialectique la difficulté d'enseignement et la difficulté d'apprentissage. Ce faisant, cette personne enseignante se trouve à contribuer directement à la circonscription d'un objet professionnel collectif lié à l'enseignement-apprentissage des mathématiques. Le didacticien poursuit alors :

> Didacticien : « J'ai vraiment à cœur qu'on garde en tête que l'intention qu'on a, c'est de se regarder nous-mêmes. J'ai comme l'impression qu'on est des… [...] Si chacun des individus ici est une feuille qu'on a pliée de plein de manières, au fil des situations professionnelles qu'on rencontre, il y a comme un pli qui a l'air commun sur chacune de nos feuilles, c'est le pli de s'intéresser à ce que l'élève vit. Puis on dirait qu'on a… puis dites-moi si vous le vivez, puis si ça a du bon sens, mais, on l'a refait plusieurs fois de se ramener à notre niveau à nous, là. Dans le fond, c'est… C'est par rapport à notre activité qu'on se questionne. Alors le questionnement que moi je vais faire auprès de l'élève. Ça va vraiment être ça l'enjeu. Même si notre pli est sur chacune de notre feuille, on est intéressé à ce que l'élève vit, puis on est intéressé par le questionnement que l'élève mobilise, mais OK, là, c'est vraiment par rapport à notre activité professionnelle à nous, dans notre activité d'enseignement, le questionnement. Est-ce que je résume bien ? Est-ce que ça a du bon sens ? »

Dans cet extrait, le didacticien nomme un enjeu de développement professionnel sous-jacent à celui qui sera ultimement choisi, celui de s'intéresser à son propre développement et vécu, même si c'est en rapport étroit avec ce que l'élève vit. On peut se demander si cette centration sur l'élève au détriment de sa propre personne est un trait caractéristique de plusieurs personnes enseignantes ou s'il relève d'un effet de groupe spécifique à cette rencontre.

À travers son accompagnement des personnes enseignantes dans le processus de transformation de la demande initiale vers un objet professionnel collectif, la personne didacticienne cherche à aider les personnes enseignantes à devenir actrices de leur développement professionnel en déterminant l'objet professionnel, ce qui peut conduire au développement de leur puissance d'agir. Considérant qu'elles «subissent» des formations ciblées et développées par d'autres personnes qu'elles, ces personnes enseignantes n'ont pas nécessairement l'habitude d'être actrices de leur propre développement professionnel. La personne didacticienne, qui propose aux personnes enseignantes un

retournement de la caméra des élèves vers elles-mêmes, vise à provoquer l'ouverture de zones de développement le plus proche à partir des difficultés vécues par les personnes enseignantes en conséquence des difficultés vécues par les élèves dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques. C'est donc une forme de responsabilisation à travers une nouvelle manière de regarder la réalité à laquelle la personne didacticienne invite les personnes enseignantes. Ce retournement de caméra se poursuivra en ACS, alors que l'attention sera portée sur les détails de l'activité des personnes enseignantes, créant ainsi un espace permettant aux personnes une mise à distance de leur activité, de redoubler leur expérience, de faire « l'expérience vécue d'expériences vécues » (Vygotski, 1925/2003, p. 79).

Vignette 2: soutenir l'émergence d'un objet professionnel collectif à partir d'une variété d'objets professionnels individuels

Dans le cadre de la rencontre initiale du collectif, la personne chercheure doit naviguer entre l'individuel et le collectif. Ainsi, en accueillant progressivement les réflexions et les préoccupations disjointes des membres du collectif, à savoir les insatisfactions vécues par les différentes personnes enseignantes dans leur activité d'enseignement-apprentissage des mathématiques, le rôle de la personne didacticienne est de tisser des liens vers un objet professionnel collectif. Celui-ci doit permettre à chacune des personnes enseignantes d'identifier sa part (ou son insatisfaction) individuelle qui pourra être réinvestie en ACS. Il entre ainsi par les objets professionnels individuels pour accompagner le développement d'un objet professionnel collectif, un objectif de développement professionnel commun pour augmenter de leur puissance d'agir dans et sur leur travail. C'est ce qui ressort de notre analyse de la rencontre initiale de la CDA rapportée dans ce texte.

La seconde vignette se dessine alors que plus d'une heure d'échanges s'est écoulée durant la rencontre initiale du collectif. La plupart des personnes enseignantes ont exposé des objets professionnels auxquels elles souhaiteraient s'intéresser dans le cadre de la CDA, notamment l'accompagnement des élèves dans une situation complexe de résolution de problèmes, l'accompagnement des élèves dans une situation de collaboration et la manière de soutenir de manière équitable l'activité mathématique d'élèves à différents niveaux de développement au sein d'une classe. C'est alors que le didacticien fait le point et propose un objet professionnel collectif, à savoir le questionnement dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques.

> Didacticien : « J'ai le sentiment que la notion de questionnement, comme personne enseignante, soit en train d'essayer d'accompagner les élèves avec des niveaux différents, soit dans le moment… la situation où l'élève est *stallé*[6] dans [une tâche de] math en trois temps (*3 act maths*), par exemple, puis que je n'arrive pas à faire des liens, puis comment je joue ça, comment je dénoue ça ou qu'est-ce que j'injecte pour remettre la machine en marche… ou par rapport à l'enjeu de collaboration des élèves, pour, comment je les amène à avoir une

6. Il s'agit d'un anglicisme utilisé pour incarner l'idée qu'une personne ou qu'un processus est bloqué.

présence constructive. Je ne sais pas, si la notion de questionnement, c'est quelque chose qui peut… rallier… »

Kelly : « Oui, c'est un bon point. »

[...]

Anne : « C'est ce que j'allais dire tantôt, que le questionnement, si on travaille sur le questionnement, ça pourrait prendre comme deux avenues : celle que nous on doit développer, pour questionner l'élève, puis en même temps, qu'est-ce qu'on doit développer pour guider l'enfant dans, lui, son questionnement, dans sa collaboration. Fait que dans le fond, ça pourrait prendre comme deux… »

Personne participante non-identifiée : [Mmm]

Didacticien : « Mais c'est sûr que, l'activité de l'élève, ce que lui fait, ça ce n'est pas l'objet de notre discussion. Évidemment, notre objectif comme enseignante ou comme enseignant ou comme chercheur ou comme CP, c'est évidemment d'amener l'élève à se développer. [...] Mais là, on se regarde là-dedans. Alors on est sur le questionnement que nous… »

Anne : « Que moi je vais développer. »

Personne participante non-identifiée : « Oui. »

Didacticien : « …on mobilise auprès de l'élève. [...] »

Yannick : « [En faisant un lien avec son objet professionnel personnel.] C'est ça, comment je fais, dans le fond, pour questionner un élève plus fort pour le développer à son plein potentiel, puis comment je fais pour questionner un élève plus faible pour essayer de faire en sorte qu'il débloque. »

Anne : « De le débloquer… »

[Silence]

Didacticien : « Alors ça peut être… c'est le questionnement, mais à la sauce différenciation, prendre en considération les écarts dans les niveaux de développement. Après ça, j'avais quand même vu Marie-Line qui dit : « Ah oui, le questionnement quand on est bloqués dans une classe, dans [une tâche de] math en trois temps, puis je veux amener collectivement le groupe à se remettre en action.» Une fois que j'ai l'impression d'avoir pesé sur les principaux pitons, qu'est-ce qu'il me reste, dans le fond, j'avais ça, aussi. »

Quelques minutes plus tard, le didacticien reprend des objets personnels évoqués qui se retrouvent fédérés par l'objet professionnel collectif qui semble se dégager des échanges, soit le questionnement dans l'activité d'enseignement-apprentissage des mathématiques.

> Didacticien : « Ça marche. Parce que dans le fond, l'idée c'est que si nous on s'améliore, dans l'outil qu'est le questionnement, on pourrait faire le pari que ça va améliorer l'expérience d'apprentissage qu'on offre aux élèves. Plus forts, plus faibles, avec un écart, dans un contexte de résolution de problème ou avec un élève bloqué dans une tâche. Fait que j'entends ça. Ou même dans un contexte de collaboration. »
>
> Personne participante non-identifiée : [Mmm]
>
> Didacticien : « OK. [Euh] Alors on identifie le questionnement, puis on le sait que… ça trouvera écho de manière différente dans chacune de nos situations d'enseignement qu'on va observer, puis on verra vers où ça s'en va. Puis j'ai l'impression que le jour où on va revenir en collectif, à la fin, puis qu'on va voir qu'on s'est questionné sur des aspects différents de notre questionnement, probablement qu'on pourra voir des liens. En tout cas j'espère, j'ai comme envie de faire le pari qu'on va faire des liens entre les différents échanges qu'on aura eus par rapport à différents aspects particuliers de notre questionnement. »

En CDA, comme dans tout dispositif collectif, il faut provoquer le développement de ce collectif. C'est-à-dire qu'il n'est pas suffisant de mettre des personnes ensembles, dans une même pièce, autour d'un même projet. Il faut aussi qu'émerge l'intercompréhension des difficultés vécues afin qu'il soit possible de reconnaitre l'autre et de se reconnaitre dans l'autre. L'un des rôles de la personne didacticienne en intervention clinique est de rendre visible les convergences entre les difficultés vécues par les personnes enseignantes pour qu'un projet de développement professionnel collectif se cristallise à travers l'objet professionnel choisi. Cet objet collectif, chaque personne enseignante entre en rapport différemment avec lui, créant ainsi autant de demandes individuelles liées à la demande collective. C'est en particulier sur ce rapport que la personne didacticienne s'appuiera pour provoquer le développement de la pensée didactique en ACS (et en ACC). Puis, en revenant au collectif, il sera possible pour les personnes enseignantes de mieux comprendre la notion de questionnement à partir d'angles différents et de situations réelles différentes. De là, un véritable développement est possible, un développement qui va au-delà de la situation personnelle de chaque personne enseignante.

Remarques conclusives

Ces deux vignettes issues de la rencontre initiale d'un collectif dans une CDA nous permettent de constater qu'en même temps que la demande et un objet professionnel collectif se développent, des demandes et des objets professionnels individuels s'insèrent en rapports dialectiques avec eux. Ces rapports varient notamment en fonction des besoins en enseignement-apprentissage des mathématiques et de la réalité de chaque personne enseignante. Dans cette situation, nous remarquons qu'une partie du rôle de la personne didacticienne est de contribuer activement au développement d'un espace propice au déploiement et au développement de la puissance d'agir du collectif et de chacune des personnes singulières qui le composent, incluant elle-même. En ce sens, la rencontre initiale du collectif est conçue pour la mise en place de conditions favorables à l'ouverture éventuelle de zones de développement le plus proche de la pensée didactique des personnes enseignantes et de la personne didacticienne. De là, des adéquations entre offres et demandes deviennent possibles et plausibles en CDA. En liant dialectiquement demande et offre, individuel et collectif, réalités et expériences des personnes enseignantes et des personnes didacticiennes, une collaboration visant à transformer le monde à-venir dès maintenant devient possible.

Références

Benoit, D. (soumis). *Une didactique des mathématiques clinique*. Dans les actes du colloque EMF 2022.

Benoit, D. (2022). *La clinique didactique de l'activité en classe d'accueil de mathématiques : provoquer le développement de la pensée didactique*. (Thèse de doctorat, Université de Sherbrooke, Québec).

Clot, Y. (2017). *Travail et pouvoir d'agir*. Presses universitaires de France.

Conseil supérieur de l'éducation (2014). *Le développement professionnel, un enrichissement pour toute la profession enseignante*. Gouvernement du Québec.

Maheux, J.F., Saboya, M., Hanin, V., Bednarz, N., Bacon, L. et Lajoie, C. (soumis). *Propos de conseillers pédagogiques sur le fruit d'une collaboration avec des chercheurs : histoire d'un tableau sur la résolution de problèmes en classe*. Dans les actes du colloque EMF 2022.

Ministère de l'éducation et de l'enseignement supérieur du Québec (2022, 23 septembre). *Formation continue*. http://www.education.gouv.qc.ca/professionnels/formation-continue/

Spinoza, B. (1677/2005). *Traité de la réforme de l'entendement*. Mille et une nuits.

Stetsenko, A. (2017). *The Transformative Mind. Expanding Vygotsky's Approach to Development and Education*. Cambridge University Press.

Vygotski, L. S. (1925/2003). La conscience comme problème de la psychologie du comportement. Dans L. S. Vygotski (2003), *Conscience, inconscient, émotions* (p. 61-94). La Dispute.

Vygotski, L. S. (1934/1997). *Pensée et langage*. La Dispute.

Titre: Les œuvres coopératives, un dispositif de formation engagé dans la préservation des patrimoines

Auteur: SALONE Jean-Jacques

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 167 - 181

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Les œuvres coopératives, un dispositif de formation engagé dans la préservation des patrimoines

SALONE[1] Jean-Jacques

Résumé – Dans cette communication nous présentons un dispositif de formation initiale des enseignants du premier degré, les œuvres coopératives. Ce dispositif novateur amène les professeurs stagiaires à développer des compétences professionnelles multiples et variées tout en les engageant dans la sauvegarde et la transmission des patrimoines régionaux. Il sera examiné ici à l'aune des genèses documentaires qu'il suscite et avec un focus sur la contextualisation des ressources pédagogiques.

Mots-clefs : œuvres coopératives, formation initiale premier degré, préservation des patrimoines, genèse documentaire, contextualisation didactique.

Abstract – In this paper we present a new training system addressed to primary school teachers and denoted as the cooperative works. Preservice teachers are thus led to improve several professional skills and abilities while they are engaged into the preservation of and the access to regional heritage. It will be here studied through the teachers' documentation work it allows and with a focus on the culturally responsive teaching resources.

Keywords: cooperative works, primary school teachers' training system, heritage preservation, documentation work, didactic contextualization.

1. Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Mayotte, Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, France, jean-jacques.salone@univ-mayotte.fr

Introduction

Mayotte est une île de l'archipel des Comores, sur la côte orientale de l'Afrique (Mozambique, Tanzanie) et à l'ouest de la grande île de Madagascar. Habitée depuis le huitième siècle l'île est islamisée dès le dixième siècle puis, après un âge d'or Swahili suivi d'une période moderne de sultanats, elle est cédée à la France en 1841 et devient colonie française. En 2011 un référendum en fait le 101ème département français. Depuis 2017, le Centre Universitaire de Formation et de Recherche (CUFR) de Mayotte, en partenariat avec le Rectorat de Mayotte et l'INSPE de La Réunion, a mis en place un parcours de formation initiale des professeurs du 1er degré[2] sous la forme d'un master Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation (MEEF). Par dérogation ministérielle, ce master MEEF de Mayotte présente la particularité de se dérouler sur deux années pleines après un concours de recrutement en fin de licence. C'est ce qui a permis d'y expérimenter un dispositif de formation novateur, les œuvres coopératives, que nous présentons dans cette communication.

Le dispositif des œuvres coopératives amène les Professeurs des écoles Stagiaires (PES) à développer leurs compétences professionnelles tout en allant à la rencontre de la société dans laquelle ils vivent et exercent leur métier. Structuré autour de paradigmes puisés dans les pédagogies actives du vingtième siècle, il articule sur quatre semestres enquête et collecte de ressources, création d'une œuvre collective, production de documents pédagogiques et mises en œuvre dans les classes.

Dans cette communication notre regard s'attachera à décrire la genèse documentaire à l'œuvre dans ce dispositif de formation ouvert et collaboratif. Quelles sont les ressources collectées ou créées? Comment sont-elles transformées en documents pédagogiques? Comment sont-elles utilisées dans les classes? Comment prennent-elles en compte le contexte de Mayotte?

Le dispositif des œuvres coopératives

Initialement conçu pour permettre le développement des compétences professionnelles des PES, le dispositif des œuvres coopératives adopte le paradigme du 'learning by doing' initié par Dewey (1993) dès le début du XXème siècle et partagé par ses contemporains, comme Frœbel, Neil ou Decroly, puis par nombre de pédagogues postérieurs comme Kilpatrick, Reggio, Freinet (Deny & Pigache, 2017). Il articule ainsi sur deux années un quadruplet de sous-dispositifs inspirés des pédagogies actives (Tableau 1). En outre de son étalement sur toute la durée de la formation, le dispositif est rendu

2. En France, et à Mayotte en particulier, le cursus scolaire des élèves commence dès l'âge de 2 ou 3 ans par l'école maternelle et se poursuit d'abord à l'école élémentaire, puis au collège puis au lycée. Ecole maternelle et école élémentaire constituent le 1er degré, collège et lycée le 2nd degré. Les enseignants pour ces deux degrés sont essentiellement recrutés via des concours spécifique et suivent en formation initiale un master MEEF.

pérenne par son insertion dans les maquettes d'enseignement avec un peu plus de 5% du volume horaire total[3] et avec des rendus réguliers exigés par les modalités de contrôle des connaissances.

Semestres	S1	S2	S3	S4
Œuvres Coopératives	Enquêtes Thématiques Pluridisciplinaires	Œuvres Didactiques	Ressources pédagogiques	Projets pluridisciplinaires
Productions	Corpus 1 - Recueils numériques de données - Pistes pédagogiques	Corpus 2 - Chefs-d'œuvre - Mémentos pédagogiques	Corpus 3 - Recueils monodisciplinaires	Corpus 4 - Dossiers réflexifs

Tableau 1 – Organisation du dispositif des œuvres coopératives

En début de première année, les PES ont d'abord constitué librement des groupes coopératifs[4] pour l'année et qui préfigurent en quelque sorte les équipes pédagogiques[5] qu'ils devront intégrer à l'issue de leur formation. Ces groupes coopératifs ont alors choisi un sujet d'étude parmi les enjeux qui animent la société mahoraise et se sont lancés au premier semestre dans une *enquête thématique et pluridisciplinaire* visant à collecter des ressources dans les médias dont ils disposent et directement sur le terrain. Des collaborations sont nées alors entre les PES et divers acteurs locaux pour exhumer des documents authentiques, recueillir des témoignages, réaliser des sondages… Cette enquête a ensuite été finalisée en un recueil numérique[6] (annexe 1) et à un bref document proposant quelques pistes d'utilisation dans les classes (Corpus 1). Au deuxième semestre les PES ont par la suite produit un chef-d'œuvre (Meirieu, 2015), une *œuvre didactique* à même de montrer leurs compétences professionnelles tout en sensibilisant les publics visés aux enjeux sociétaux qu'ils avaient retenus pour

3. Le master MEEF 1er degré de Mayotte, comme ceux de métropole, propose des curricula de près de 800 heures de formation initiale sur deux années avec des enseignements dans toutes les disciplines scolaires, d'initiation à la recherche (dont l'écriture d'un mémoire professionnel en fin de deuxième année) et de découverte du contexte de Mayotte (dont fait partie le dispositif des œuvres coopératives). En outre une alternance intégrative permet aux PES d'entrer progressivement dans le métier par des mises en stage dans les classes.

4. Le concours CRPE de recrutement des PES étant un concours national avec recrutement à Mayotte, les origines géographiques des PES sont diverses même si une forte composante d'origine insulaire apparait. Les groupes sont constitués indépendamment de ce paramètre. Ils comptent de 3 à 6 PES qui coopèrent pendant la première année uniquement. En deuxième année ces groupes deviennent des binômes ou des monômes en fonction des classes prises en charge par les PES une semaine sur deux.

5. Dans une école du premier ou du second degré, les enseignants sont regroupés en équipes pédagogiques en fonction des classes dans lesquelles ils interviennent. L'objectif est pour ces équipes d'organiser et coordonner les apprentissages des élèves tout en faisant vivre les projets pédagogiques de l'établissement.

6. Ce recueil numérique est évalué dans le cadre de la formation : compétences en numérique (utilisation d'un traitement de texte et d'un tableur, organisation de l'arborescence d'un dossier numérique, utilisation d'un espace numérique de travail…), compétences en recherche (recueil et traitement de données, réalisation de sondages, d'entretiens…)

thème d'enquête (annexe 2). Les formes médiatiques de ces œuvres sont multiples : albums illustrés de littérature jeunesse, brochures photographiques, court-métrages, web-documentaires, spectacles vivants…[7] L'œuvre didactique est généralement accompagnée d'un *mémento pédagogique* (annexe 3) qui reprend en partie les pistes du premier semestre et qui développe de façon plus approfondie leur utilisation en classe dans toutes les disciplines scolaires à enseigner (Corpus 2). Au cours de la deuxième année il s'agit alors pour les PES de s'approprier et de mettre en œuvre dans leurs classes des éléments de cette pédagogie par projet (Boutinet J.-P., 2012; Perrenoud P., 1999; Proulx J., 2004; Reverdy C., 2013) qu'ils ont vécue la première année. Ainsi au semestre 3 les binômes de PES qui partagent une même classe[8] sont alors accompagnés par les formateurs universitaires pour concevoir des *ressources pour la classe* dans plusieurs disciplines scolaires (en français, en mathématiques, en arts, en langues…) qui sont contextualisées9. Puis, au semestre 4, ces ressources sont utilisées par les PES dans les classes dont ils ont la responsabilité pour enseigner et pour conduire des *projets pédagogiques pluridisciplinaires*. Deux dossiers à rendre rythment cette deuxième année, l'un présentant les ressources pédagogiques produites discipline par discipline (annexe 4) et anticipant leur utilisation dans un projet pédagogique (Corpus 3), l'autre prenant un peu plus de recul réflexif pour présenter les projets réalisés dans les classes et confronter les PES à leurs propres pratiques (Corpus 4)[10].

Cadres théorique et méthodologique

Le focus dans notre communication étant mis sur la genèse documentaire au travers du dispositif des œuvres coopératives, notre cadre théorique s'inscrira dans l'Approche Documentaire du Didactique (ADD) (Trouche & al., 2019, 2020). Dans cette approche le travail documentaire des professeurs

7. Les œuvres didactiques sont présentées publiquement en fin d'année. Elles sont alors évaluées par un jury constitué d'universitaires et de partenaires qui décerne des prix : qualité artistique, intérêt patrimonial, originalité, coups de cœur… Une sélection de ces œuvres didactiques est consultable et téléchargeable sur les pages dédiées du site internet du CUFR : https://www.univ-mayotte.fr/fr/formation/sciences-de-l-education/oeuvres-cooperatives.html. Une sélection de 10 œuvres est d'autre part en cours d'édition par le Centre de documentation pédagogique de Mayotte.

8. Les deux PES qui constituent un binôme ne proviennent généralement pas d'un même groupe coopératif de première année. Les deux PES doivent donc s'entendre sur une ou plusieurs thématiques qu'ils développent dans leur classe partagée (les deux PES ont la même classe en alternance une semaine sur deux) ou, à défaut, ils se séparent en monômes. Ces thématiques ne sont plus forcément en rapport avec les thèmes qu'ils avaient retenus la première année pour leurs enquêtes et les œuvres didactiques. Toutes les enquêtes et toutes les œuvres produites toutes les années antérieures sont à leur disposition (base de données à disposition).

9. Les ressources sont généralement élaborées en groupe pendant des séances de travaux dirigés disciplinaires. Elles sont ensuite parfois rassemblées en un recueil rendu au formateur de la discipline. C'est le cas en mathématiques, les recueils étant alors évalués par rapport aux compétences disciplinaires et didactiques. En fin de semestre 3 une synthèse des ressources, toutes disciplines confondues, est intégrée au dossier à rendre.

10. Ce dossier réflexif est réalisé de façon individuelle. Chaque PES rapporte et analyse a minima une séquence d'enseignement (au moins 3 séances, dont une décrite finement) qu'il a conduite dans sa classe dans le cadre du projet pédagogique pluridisciplinaire. Il est relu ensuite par deux formateurs qui évaluent sa qualité professionnelle : intérêt du projet, rigueur des programmations, adéquation aux programmes officiels, finesse des analyses didactiques…

est vu comme un processus par lequel des systèmes de ressources sont constitués puis combinés en documents. Nous en avons par conséquent adopté les principes : une collecte large de toutes les productions sur le long terme, avec 4 années de suivi du dispositif, et une implication active des PES qui sont régulièrement confrontés à leurs pratiques via les écrits attendus et au cours de séances de cours ou de travail dirigé. Des résultats statistiques d'ensemble seront donc d'abord présentés ci-après pour décrire le processus de constitution des système de ressources : thématiques retenues par les PES et acteurs institutionnels rencontrés. Nous rappellerons également dans un paragraphe préalable des résultats déjà publiés (Salone, 2019) relatifs à la motivation et aux compétences professionnelles développées par les PES dans le cadre du dispositif des œuvres coopératives. Mais dans cette recherche notre regard s'attachera aussi à comprendre l'instrumentalisation des ressources que font les PES pour arriver à une contextualisation didactique (Forissier, 2019) des savoirs qu'ils enseignent. L'ADD s'appuie alors grandement sur les concepts de schème et d'invariant empruntés à Vergnaud (1996) dans la Théorie des champs conceptuels :

- Pour une classe de situations, un sujet (ici un professeur) développe une organisation stable de son activité : c'est un schème. Une autre manière de définir le schème, qui permet aussi de le décrire, est de dire qu'il comporte 4 composantes :
- Le but de l'activité (qui caractérise la classe de situations) ;
- Des règles d'action, de prise d'information et de contrôle ;
- Des invariants opératoires, qui constituent la part épistémique du schème. Il y a deux sortes (associées) d'invariants opératoires: les théorèmes-en-actes, qui sont des propositions considérées comme vraies ; et les concept-en-actes, qui sont des concepts considérés comme pertinents (nous donnons des exemples ci-dessous) ;
- Des possibilités d'inférences, d'adaptation à la variété des situations. (Trouche *et al.*, 2020, p. 5)

Nous présenterons donc ensuite des résultats relatifs au travail documentaire des PES pendant les deux années de formation avec un focus sur leurs schèmes d'élaboration et d'utilisation de documents pédagogiques contextualisés. Les données brutes pour notre étude sont constituées par les 4 corpus avec : 102 recueils numériques de données (corpus 1), 102 œuvres didactiques et mémentos pédagogiques (corpus 2), 252 recueils de ressources (corpus 3) et 252 dossiers réflexifs (corpus 4). Un premier traitement a été effectué sur l'ensemble de ces données visant à catégoriser les systèmes de ressources constitués en fonction des thématiques abordées et des acteurs locaux rencontrés (corpus 1) et les disciplines scolaires envisagées (corpus 3). Pour les thématiques, les enjeux sociétaux sont scindés en 4 catégories (Hartog, 2003; Unesco, s. d.): la préservation du patrimoine naturel, la préservation du patrimoine culturel matériel, la préservation du patrimoine culturel immatériel, les enjeux non patrimoniaux. Pour les acteurs locaux, nous avons distingué également 4 catégories : les acteurs institutionnels, les professionnels, les associations et les personnes référentes (appelées

'fundis' à Mayotte). Les disciplines scolaires ont quant à elles été définies en conformité avec les programmes officiels de l'Education Nationale. Un crible a été ensuite effectué pour ne retenir de ces corpus que des travaux remplissant trois conditions : qualité esthétique, épaisseur didactique[11] et présence des mathématiques. Après ce crible, 30 triplets enquête-œuvre-mémento ont été retenus (corpus 1 et 2) ainsi que 53 doublets recueil de ressources-dossier réflexif (corpus 3 et 4). Ces données sélectionnées ont fait ensuite l'objet d'une analyse de contenu plus fine par lecture directe afin d'en dégager quelques invariants dans les schèmes d'utilisation ou de conception de documents pédagogiques contextualisés.

Résultats

Les premiers résultats ont été obtenus dès la première année et publiés (Salone, 2019). Ils font apparaitre d'abord l'efficacité du dispositif en termes d'acquisition de compétences professionnelles : une compétence de coopération, aussi bien en interne dans les groupes constitués qu'en externe avec les partenaires, des compétences en pédagogies actives, avec une appropriation à la fois de connaissances et de savoir-faire, des compétences numériques, autour de logiciels bureautiques et aussi de logiciels plus experts comme ceux de montage audio-vidéo, et une compétence de contextualisation définie comme la « capacité à intégrer différentes sphères contextuelles et qui conditionnerait, pour partie, la nature des processus à l'œuvre dans la gestion de cette situation professionnelle particulière qu'est celle d'enseigner » (Sauvage-Luntadi & Tupin, 2012, p. 106). Autre résultat préalable (Salone, 2019), la motivation des PES à entrer dans le dispositif. Nous avons utilisé pour la mesurer des questionnaires individuels dérivés de la grille d'évaluation de la motivation situationnelle développée par Guay *et al.* (2000). Ce questionnaire a été complété par un sondage d'opinions qui a précisé les sources de motivation, intrinsèques ou extrinsèques (Ryan & Deci, 2000), des PES : de façon quasi unanime, ce qui les a motivés est à la fois de vivre des pédagogies actives et d'en acquérir une certaine maîtrise, et de rencontrer la société locale mahoraise, la (re)découvrir tout en contribuant à la préservation de son patrimoine. Ce qui aura le plus déplu aux PES, dans une mesure relativement faible, est l'aspect coopératif : même s'il a parfois été difficile pour certains de s'entendre dans des groupes ou des binômes constitués pour une année entière, cela aura été tout de même formateur pour eux. Nos résultats initiaux faisaient également apparaître une grande variété de thématiques abordées. Nous les avons précisées depuis. Sur les 102 thèmes envisagés au cours des quatre années de suivi, ceux relatifs au patrimoine culturel immatériel ont été nettement les plus nombreux : 60% de l'effectif[12]. Nous avons affiné cette catégorie (annexe 5) pour mieux en rendre compte : beaucoup d'enquêtes ou d'œuvres didactiques ont traité de questions relatives à l'agriculture, la sylviculture

11. Nous rappelons que les 4 différents corpus ont été évalués en amont par les formateurs universitaires (parfois aussi par des partenaires extérieurs) et qu'en conséquence ils sont soit notés, soit appréciés. Ce sont ces notes et ces appréciations qui ont été utilisées pour juger de leur qualité esthétique ou de leur épaisseur didactique dans le crible.

12. Compte-tenu de la faible taille de la population soumise à statistique (102) et des incertitudes induites par l'attribution d'une unique catégorie à chaque thème retenu, les pourcentages donnés sont arrondis à l'unité près. Ce choix de précision explique les fluctuations de leurs sommes à 1 ou 2 unités près autour de 100%.

ou l'élevage (techniques et pratiques associées), près de 26%. D'autres ont abordé des questions relatives à des usages ou des connaissances sur la nature, comme des pharmacopées, d'autres des pratiques sociales comme des rituels religieux ou des événements festifs (les mariages par exemple), d'autres encore les arts du spectacle, les jeux et sports traditionnels… Le patrimoine culturel matériel vient en deuxième position, avec 18% des thématiques, et des sujets comme le bâti traditionnel ou religieux, les transports. Puis vient le patrimoine naturel, 12%, avec plusieurs sujets sur le lagon ou la barrière de corail, et enfin viennent des enjeux non patrimoniaux, 11%, avec des thèmes parfois très originaux ou polémiques comme la polygamie, le rôle des grands parents dans la société, l'éducation à la santé ou le tri sélectif des déchets. À noter que ces catégories ne sont pas disjointes et que dans presque tous les cas les thématiques sont mixtes, nos statistiques ne prenant donc en compte que les caractères dominants.

Dans la collecte des ressources brutes, des premiers schèmes de production sont identifiables. Ainsi tous les groupes ont conduit des recherches de documents curriculaires, pédagogiques ou thématiques sur le web et dans les médias disponibles au CUFR, ce qui correspond en un invariant opératoire situant les savoirs à enseigner à la fois dans les textes officiels et dans les documents produits par les acteurs locaux. Mais l'enquête a aussi été conduite sur le terrain directement auprès de très nombreux acteurs locaux. Les plus fréquemment sollicités ont été des 'fundis', des personnes localement reconnues pour leurs savoirs, pour près de 46% des rencontres. Il s'agit par exemple d'artisans, d'agriculteurs, de personnes âgées témoins de l'histoire de Mayotte, de conteurs… Très souvent des parents ou des proches ont également été impliqués. Ce schème largement partagé repose grandement sur un théorème-en-acte ancré culturellement qui est qu'à Mayotte les fundis détiennent les savoirs. En conséquence recueillir leurs témoignages est une règle d'action sine qua non si l'on souhaite contextualiser les savoirs enseignés. De façon similaire, rencontrer les acteurs institutionnels est une règle d'action adoptée par 32% des PES. Certains sont devenus des incontournables comme la Direction des Affaires Culturelles ou les Archives Départementales. Puis viennent des associations, avec 13% de l'effectif, comme l'association SHIME qui regroupe des linguistes locaux ou celle des Naturalistes de Mayotte. Enfin des acteurs professionnels ont été souvent associés à la réalisation des œuvres didactiques, comme des artistes plasticiens, des éditeurs, des vidéastes. Autre schème de collecte de données, la réalisation de sondages et d'enquêtes. Plus de 35% des groupes ont intégré cet invariant opératoire : une enquête de terrain doit inclure des données statistiques sur des populations ciblées. Plusieurs groupes (31%) ont également inclus dans leurs recueils numériques un document dont le but était de décrire leurs systèmes de ressources. Des tableaux de synthèse des données collectées et des acteurs locaux rencontrés ont généralement était proposés. Les systèmes de ressources ainsi constitués ont fourni le matériel brut pour concevoir deux types de documents au second semestre : les chefs-d'œuvre et les mémentos pédagogiques. Le but des premiers est de transmettre un message didactique en lien avec la thématique des enquêtes et à destination d'un public choisi librement, tandis que celui des deuxièmes et d'envisager des pistes d'instrumentalisation dans les classes du primaire. Pour concevoir et produire leurs chefs-d'œuvre, les PES ont conduit un travail de sélection et de remise en forme des ressources. De façon très majoritaire les chefs-d'œuvre

prennent la forme d'albums de littérature jeunesse illustrés. Cette règle d'action qui oriente le genre littéraire et la forme médiatique des documents produits correspond à des théorèmes-en-actes que les PES partagent généralement au sujet des attendus dans leur formation initiale et dans leur futur métier, comme par exemple « les chefs-d'œuvre devront être utilisés en deuxième année dans nos futures classes en responsabilité » ou « les albums de littérature jeunesse sont des ressources pédagogiques incontournables à l'école primaire »[13]. En termes de contextualisation, plus de 62% des œuvres assument un certain plurilinguisme avec des changements de codes fréquents entre français et langues vernaculaires (shimaore et kibushi), parfois même avec des dialogues complets et des lexiques. Plus ponctuellement les chefs-d'œuvre sont aussi des documentaires vidéos parfois théâtralisés, des brochures, des plaquettes, des livres… Plus rarement ce sont des œuvres immatérielles comme des spectacles ou des conférences.

La deuxième année du dispositif amène les PES à exploiter pédagogiquement les systèmes de ressources constitués en première année en produisant de nouveaux documents utilisés dans les classes en responsabilités. Ce travail documentaire a alors pris deux formes distinctes : production de ressources pédagogiques et programmation de séquences d'enseignement dans le cadre d'un projet pluridisciplinaire. Les ressources pédagogiques, comme celle présentée en annexe 4, ont été élaborées principalement dans des unités d'enseignement disciplinaires, dans les cours de didactique des mathématiques en particulier. Dans ce cours le format attendu a été largement cadré par le formateur, avec trois exigences : une première partie précisant l'insertion de la ressource au niveau des programmes officiels (cycle, niveau, domaine…), une deuxième partie proposant un problème, un exercice ou une activité contextualisée, et une troisième partie en proposant une analyse des objectifs disciplinaires et compétences visées. En termes de contextualisation didactique, deux modalités émergent des analyses directes des énoncés : la coloration et l'adaptation. La coloration correspond d'une part à une contextualisation didactique qui ne change en rien les savoirs disciplinaires en jeu, mathématiques ici. C'est le cas pour l'énoncé de l'annexe 4. D'autre part, sur un plan linguistique, elle s'accompagne d'un emprunt sporadique de quelques mots seulement aux lexiques vernaculaires, comme des noms de personnages, de lieux ou d'objets. Le principal bénéfice de la coloration des ressources est qu'elle situe les apprenants dans le contexte de leurs réseaux de proximité, évitant ainsi des difficultés qui seraient liés à des différences culturelles. L'adaptation va un peu plus loin dans la contextualisation en prenant en compte la réalité des éléments patrimoniaux. Sur un plan disciplinaire certaines de leurs caractéristiques sont ainsi prises en compte, comme par exemple des valeurs numériques réalistes ou comme l'introduction d'un conte par une formulation traditionnelle en langue locale. Sur un plan linguistique l'adaptation se caractérise par une alternance codique où langue de scolarisation et langues vernaculaires se mélangent, avec souvent l'apparition de lexiques dans les documents.

13. Propos recueillis de façon informelle lors des séances de travail dirigé.

L'analyse des dossiers réflexifs (corpus 4) révèle quant à elles certains usages professionnels que font les PES des ressources produites. Pour tous les PES les documents produits au semestre 3 sont venus nourrir les situations d'enseignement/apprentissage qu'ils ont conduites dans leurs classes, en particulier celles dédiées aux projets pluridisciplinaires. Ces derniers ont été divers, comme des projets jardinage, des spectacles ou expositions de fin d'année, des réalisations de maquettes… Deux invariants peuvent être discernés dans les usages pédagogiques des ressources par les PES. Pour près de 65% des PES les séances consacrées aux projets disciplinaires ont été séparées des séances disciplinaires et les ressources ont été utilisées de façon perlée dans les séquences d'enseignement, au même titre que d'autres ressources issues d'autres sources (des manuels scolaires et des sites internet par exemple). Pour les autres PES les projets et les ressources ont au contraire servi de fil conducteur, permettant de faire des ponts entre les disciplines. Pour certains de ces PES, faire un schéma heuristique du projet, de son thème et de ses liens aux disciplines (annexe 6) est devenu un modus operandi.

Conclusion et perspectives

Le dispositif des œuvres coopératives nous apparaît donc comme étant un dispositif de formation initiale ambitieux. Visant a priori à permettre l'acquisition par les professeurs des écoles stagiaires de compétences professionnelles multiples, allant de la maîtrise de pédagogies actives à des compétences de coopération et de contextualisation, il les plonge également dans des pratiques essentielles à leur métier comme l'usage des outils numériques, la recherche de ressources, l'élaboration de documents pour la classe ou la programmation de séquences pluridisciplinaires. Loin de prôner une forme de localisme ou de folklorisation des connaissances, il s'inscrit dans une perspective d'inclusion des patrimoines culturels largement initiée pour l'enseignement des mathématiques en Afrique et en Océan Indien par Touré (Touré, 2002). Il promeut des pratiques d'enseignement motivantes qui redonnent aux élèves et aux étudiants le plaisir d'apprendre. Nos résultats initiaux montraient clairement l'engouement qu'il suscite auprès des PES et ses effets positifs sur le développement de plusieurs compétences professionnelles, celles de coopération en particulier. Les résultats présentés ici s'attachent à analyser le travail documentaire des PES dans le dispositif en dégageant des modalités statistiques d'ensemble et des schèmes de production ou d'utilisation des ressources pédagogiques.

Au-delà de la formation initiale, nous espérons bien qu'une mise en abîme sera réalisée, plus tard, par nos PES quand ils seront devenus des professeurs titulaires. C'est une étude longitudinale qu'il nous reste encore à conduire, et même si nous avons rapporté ici déjà quelques résultats sur la mise en œuvre dans les classes, les aléas engendrés par la crise sanitaire actuelle nous ont empêchés de vraiment les asseoir. Sur le plan de la recherche, ce dispositif a également induit des collaborations entre les chercheurs de notre département de sciences de l'éducation au CUFR. Ainsi nous nous sommes emparés de questions relatives au plurilinguisme dans l'enseignement, en mathématiques et en langues en particulier (Dureysseix, 2020, Salone & Dureysseix, 2022). De nouvelles questions de recherche émergent encore, comme par exemple celles en anthropologie autour de la réception de

ce dispositif par la société locale, les parents d'élèves en particulier, ou celles relatives aux pratiques numériques de nos étudiants dans le dispositif. Mais la portée du dispositif dépasse le simple cadre de la formation initiale ou de la recherche. Par les liens multiples qu'il a suscités avec les acteurs du territoire, il renforce largement les relations entre INSPE, Ecole et société. Ainsi une formidable dynamique est née, impliquant de nombreux acteurs locaux, institutionnels, professionnels, associations ou 'fundis', une dynamique que nous entendons aujourd'hui amplifier encore davantage en accompagnant une diffusion large des ressources produites, dans les médias locaux ou les écoles de l'île par exemple. En outre le dispositif touche à des questions identitaires, contribuant largement à la sauvegarde et la transmission des patrimoines régionaux, qu'ils soient culturels, matériels ou naturels. Même si ce n'est pas sa finalité première, qui reste de l'ordre du pédagogique, il engage l'Ecole dans une démarche citoyenne où son rôle dans la société acquiert encore plus d'importance, permettant aux enfants d'aujourd'hui de devenir demain des adultes fiers et respectueux de leurs racines.

Références

Boutinet J.-P. (2012) *Anthropologie du projet*. Paris: Presses Universitaires de France.

Deny M., Pigache A.-C. (2017) *Le grand guide des pédagogies alternatives*. Paris: Eyrolles.

Dewey J. (1993). *Logique: la théorie de l'enquête*. Paris: Presses universitaires de France.

Dureysseix F. (2020) Teacher's Curriculum Contextualisation in an overseas French territory: how can local specificities be acknowledged within the education system. Dans Gardelle, L. et Jacob, C. (Eds). *Schools and national identities in French-speaking Africa: political choices, means of transmission and appropriation*. Londres : Routledge, Perspectives on Education in Africa, 109-126.

Forissier, T. (2019). Contextualisation et effets de contextes dans l'apprentissage des Sciences. Habilitation à diriger les recherches, Université des Antilles et de la Guyane, 2019. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02277162/document

Guay F., Vallerand R., & Blanchard C. (2000) On the assessment of situational intrinsic motivation: The situational motivation scale (SIMS). *Motivation and Emotion 24*(3), 175-213.

Hartog F. (2003) *Régimes d'historicité, présentisme et expérience du temps*. Paris: Le Seuil.

Meirieu P. (2015). *Le plaisir d'apprendre*. Paris : Autrement.

Perrenoud P. (1999) Apprendre à l'école à travers des projets: pourquoi? Comment? https://www.unige.ch/fapse/SSE/teachers/perrenoud/

Proulx J. (2004) Apprentissage par projet. Québec: Presses de l'Université du Québec.

Reverdy C. (2013) L'apprentissage par projet: le point de vue de la recherche. *Technologie 186*, 46-55.

Ryan R. M., Deci, E. L. (2000) Intrinsic and extrinsic motivations: classic definitions and new directions. *Contemporary educational psychology 25*(1), 54-67.

Salone J.-J. (2019) La contextualisation, une compétence professionnelle au centre du master MEEF 1er degré de Mayotte. *La nouvelle revue, éducation et sociétés inclusives 85*, 221-243.

Salone J-J., Dureysseix F. (2022). Linguistiques et mathématiques du patrimoine de Mayotte. Dans Hache, C. Mendonça Dias, C. (coord.). *Plurimaths. Plurilinguisme et mathématiques*. Paris : Lambert-Lucas.

Sauvage-Luntadi L., Tupin F. (2012) La compétence de contextualisation au cœur de la situation d'enseignement-apprentissage. *Phronesis 1*(1),102-117. https://www.erudit.org/fr/revues/phro/2012-v1-n1-phro1825121/1006488ar/

Touré, S. (2002). L'enseignement des mathématiques dans les pays francophones d'Afrique et de l'Océan Indien. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 34*(4), 175-178.

Trouche L., Gueudet G., & Pepin B. (2019) *The 'Resource' Approach to Mathematics Education*. Heidelberg (Allemagne): Advances in Mathematics Education, Springer.

Trouche L., Gueudet G., Pepin B., & Aldon G. (2020) *L'approche documentaire du didactique*. DAD-Multilingual. hal-02512596

UNESCO (s. d.) *La liste du patrimoine mondial*. Consulté sur: https://whc.unesco.org/fr/list/

Vergnaud G. (1996). La théorie des champs conceptuels. Dans J. Brun (Ed). *Didactique des Mathématiques*. Delachaux et Niestlé. Lausanne.

Annexes


Département Sciences de l'éducation

LES JEUX D'ENFANCE MAHORAIS
Entre persistance et transformation

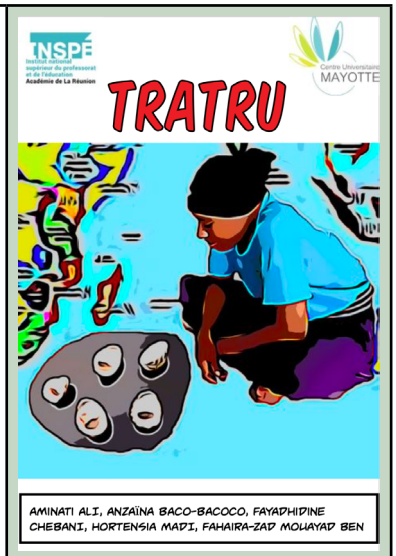
Présenté par

Michèle Lauret, Mina MARI,
Mathieu VERNET BELLIOT
, Soudjai BENALI

Groupe n°16

Année universitaire 2019 – 2020

Annexe 1 – un recueil d'enquête thématique pluridisciplinaire


TRATRU

AMINATI ALI, ANZAÏNA BACO-BACOCO, FAYADHIDINE CHEBANI, HORTENSIA MADI, FAHAIRA-ZAD MOUAYAD BEN

Annexe 2 – une œuvre didactique


Département de Sciences de l'éducation

ŒUVRE COOPERATIVE

PREMIERE ANNEE MASTER/DIPLOME UNIVERSITAIRE

Métiers de l'Enseignement, de l'Education et de la Formation

Mention Premier Degré–Parcours Professeur des écoles

2017/2018

MURAHA WA TSO

Auteurs

MCHANGAMA, Kalathoumi

HIMIDI-MONDROHA, Kalathoumi

YOU-SEEN, Ludovic

Annexe 3 – un mémento pédagogique


I. Tableau synthétique

LES BAIES DE CAFÉ

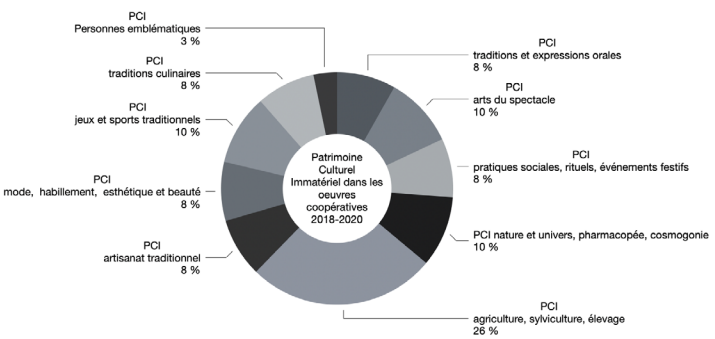
Auteur(s) : Mounissa HASSANE ALI, Aude HENRY, Nayla CHARIKANE, Grégory SEVERIN
Cycle : 1
Niveau : Grande section
Domaine : Construire les premiers outils pour structurer sa pensée
Sous-domaine : Découvrir les nombres et leurs utilisations

II. Le recueil des supports

CONSIGNE : Combien de baies de café voit-on sur chaque image ? Entoure la bonne réponse.

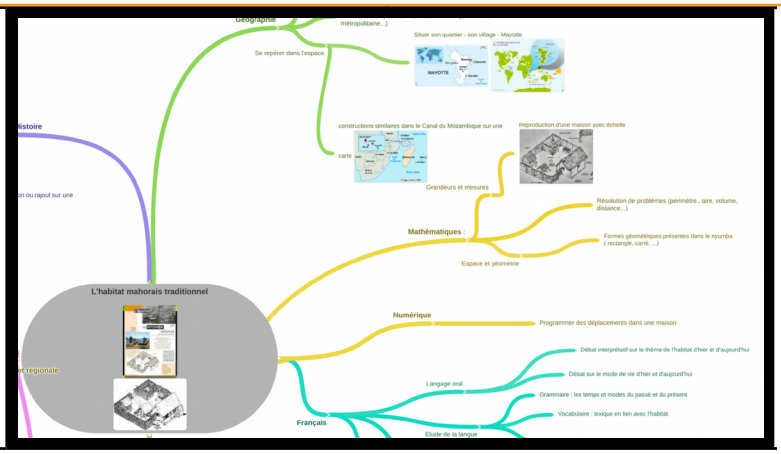
Image 1	Image 2	Image 3
3 – 6 – 4	7 – 8 – 9	2 – 3 – 4
Image 4	Image 5	Image 6
6 – 7 – 8	4 – 5 – 6	3 – 4 – 5

Annexe 4 – Un exemple de ressource pédagogique



Annexe 5 – Le patrimoine culturel immatériel dans les œuvres didactiques

Annexe 6 – Extrait d'un schéma heuristique de programmation



Titre: Le traitement de l'erreur dans les pratiques enseignantes dans une formation *à l'envers*

Auteurs: COULANGE Lalina et TRAIN Grégory

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 182 - 194

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Le traitement de l'erreur dans les pratiques enseignantes dans une formation *à l'envers*

COULANGE[1] Lalina – TRAIN[2] Grégory

Résumé – Nous examinons dans ce texte une formation à destination de futurs enseignants de mathématiques, adaptée d'une démarche de formation à l'envers (Robert & Vivier, 2013) ancrée dans la double approche ergonomique et didactique (Robert, 2008). Cette contribution se centre plus précisément sur des moments de formation qui concerne le traitement de l'erreur dans les pratiques enseignantes. Nous montrons en quoi une démarche de formation partant des pratiques enseignantes pilote nos choix de formateurs-chercheurs sur cette thématique en particulier.

Mots-clefs : formation initiale d'enseignants de mathématiques, formation à l'envers, traitement de l'erreur

Abstract – In this text, we examine a training for future mathematics teachers, adapted from a training approach *in reverse* (Robert & Vivier, 2013) grounded in the dual ergonomic and didactic approach (Robert 2008). This contribution focuses more specifically on moments of formation concerning the processing of error in teaching practices. We show how a training approach starting from teaching practices drives our choices as trainer-researchers on this theme in particular.

Keywords: initial training of mathematics teachers, training "in reverse", the processing of error

1. Laboratoire Epistémologie et Didactique Des Disciplines, Université de Bordeaux, France, lalina.coulange@u-bordeaux.fr

2. ** Laboratoire Epistémologie et Didactique Des Disciplines, Université de Bordeaux, France, gregory.train@u-bordeaux.fr

Introduction

Nous examinons dans ce texte une formation mise en place[3] dans le cursus « Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de formation » (master MEEF), fréquenté par des étudiants de l'Université de Bordeaux se dirigeant vers une carrière d'enseignants des mathématiques au secondaire (élèves de 11-18 ans – du collège au lycée). Depuis plusieurs années, l'équipe d'intervenants en charge de la formation s'est engagée dans une démarche de formation *à l'envers* ou à partir des pratiques enseignantes, tout en ne négligeant pas l'importance accordée à l'analyse des contenus disciplinaires (Robert, 2010 ; Robert & Vivier, 2013). En lien étroit avec le cadre d'analyse des pratiques enseignantes que constitue la Double Approche ergonomique et didactique (DA) (Robert et Rogalski, 2002 ; Robert, 2008a, 2008b, 2008c), cette démarche prend appui sur des principes généraux structurants et empruntés directement d'hypothèses fondatrices de la DA. Ainsi le travail proposé en formation est envisagé au « plus près » des pratiques enseignantes (vécues, projetées à un moment donné de la formation), visant ainsi à s'ancrer dans la Zone Proximale de Développement des Pratiques[4] (ZPDP) des futurs enseignants (Robert & Vivier, 2013). La DA postule une complexité des pratiques qu'elle vise à appréhender à partir de composantes descriptives de l'activité enseignante (composantes cognitive et médiative) et en prenant en compte différents déterminants de cette activité (composante sociale, institutionnelle et personnelle). La prise en considération de cette complexité des pratiques enseignantes au sein d'une démarche de formation *à l'envers* implique de privilégier un travail avec les stagiaires autour des choix, décisions et activités en lien avec les contenus enseignés (cognitif) et les déroulements en classe associés (médiatif), sans négliger la place et le rôle des autres contraintes en jeu (sociales, institutionnelles, personnelles). En postulant différents niveaux d'organisation des pratiques enseignantes (micro-local-global), la formation dispensée doit pouvoir agir sur à la fois ce qui relève des routines du métier (micro) mais tout autant sur les autres niveaux d'organisation que sont le quotidien de l'activité enseignante ou encore le niveau des projets et scénarios.

La démarche de formation *à l'envers* a été initialement décrite et mise en œuvre dans le cadre de formations de formateurs (Robert & Vivier, 2013) avec une cohorte d'enseignants de mathématiques expérimentés. Si la démarche de formation à l'envers expérimentée au sein de la seconde année du MEEF Mathématiques de l'Université de Bordeaux a pu rencontrer des conditions favorables dans sa mise en œuvre, notamment en permettant aux concepteurs de la formation de penser et projeter leurs pratiques à l'échelle d'une année de formation (et non pas uniquement à l'échelle d'un scénario isolé de formation), reste que le public cible, en formation initiale, se distingue à plusieurs égards d'un public d'enseignants formateurs. Ces futurs enseignants, en stage en responsabilité (un ou deux niveaux de classe au collège), affichent des profils très variés du point de vue de la formation

3. Les deux auteurs de cette contribution sont co-responsables de la formation et y interviennent.

4. La notion de ZPDP est une extension de celle de ZPD développée par Vygotski (1997) aux pratiques enseignantes. Cette extension est d'ailleurs travaillée par d'autres auteurs didacticiens qui s'intéressent aux pratiques et à la formation d'enseignants, avec une approche ergonomique (Cèbe & Goigoux, 2017) ou instrumentale (Haspekian & Gélis, 2017).

antérieurement suivie : tous n'ont par exemple pas suivi la formation dispensée en première année du MEEF. Le parcours professionnel antérieur des stagiaires atteste également d'une telle variété : se côtoient dans la promotion des étudiants, des personnels de l'Éducation Nationale en reconversion (Professeurs des Écoles, enseignants de Lycée Professionnel, Contractuels) ou encore des salariés du privé s'orientant vers une carrière d'enseignants. De telles spécificités peuvent s'ériger à la fois en leviers tout autant qu'en contraintes. Elles conduisent à penser des adaptations nécessaires de notre point de vue par rapport à une démarche de formation *à l'envers* pensée initialement pour un public d'enseignants expérimentés ou de formateurs. L'hétérogénéité de la cohorte, du point de vue de la formation antérieure suivie, conduit notamment à envisager des apports de connaissances et de savoirs didactiques, rendus plus visibles et explicites pour le collectif. Une telle démarche n'implique par ailleurs pas nécessairement une formation descendante, mais invite, à différentes échéances de la formation, à mieux structurer de telles connaissances et savoirs didactiques du point de vue des stagiaires.

Dans cette contribution, nous proposons de documenter la manière dont nous déclinons notre démarche de formation *à l'envers* en formation initiale de futurs enseignants de mathématiques à partir d'un moment de formation abordant la question du traitement de l'erreur dans les pratiques enseignantes. Nous apportons au préalable quelques éclairages sur le choix de ce matériau d'étude dans le cadre de cette formation. Cette contribution fait directement écho à une autre contribution qui vise à éclairer cette même démarche de formation *à l'envers* du point de vue de la place, du rôle et de l'usage des ressources dans les pratiques enseignantes.

Un moment de formation sur le traitement de l'erreur dans les pratiques enseignantes

L'erreur dans les pratiques enseignantes : une question de formation ?

La thématique de l'erreur en mathématiques est un sujet ancien qui aura été très tôt au cœur même des théories didactiques – en particulier celles considérées comme « fondatrices » et en premier lieu, la théorie des situations didactiques (TSD). Dans le cadre de la TSD, certaines erreurs sont considérées comme constitutives de la connaissance visée :

> « L'erreur est l'effet d'une connaissance antérieure qui avait son intérêt, ses succès, mais qui maintenant, se révèle fausse ou simplement inadaptée […]. Aussi bien dans le fonctionnement du maître que celui de l'élève, l'erreur est constitutive de la connaissance acquise » (Brousseau, 1983, p. 171)

Nous considérons d'ailleurs nous-mêmes ces erreurs en tant que telles, dans certains de nos apports en formation initiale. Ainsi nous donnons fréquemment à étudier des productions d'élèves donnant à

voir des erreurs « typiques » relatives aux nombres décimaux et à leurs écritures décimales/fractionnaires, ou encore dans le domaine de la compétence algébrique, etc.

Pour autant, la littérature de recherche sur cette thématique de l'erreur apparaît moins prolixe notamment lorsqu'il s'agit d'envisager le traitement des erreurs dans les pratiques enseignantes au sein de la classe. Les visites de stage que nous conduisons depuis de nombreuses années dans les classes des stagiaires soulignent invariablement une forme de diversité en ce qui concerne la prise en compte des erreurs des élèves par ces mêmes stagiaires. Tel stagiaire interviendra pour signaler une erreur dès que celle-ci sera commise alors qu'un autre laissera plus volontiers un élève « s'enferrer » avec l'espoir que celui-ci puisse « de lui-même » lever la contradiction dans laquelle cette erreur le conduit. L'hypothèse peut être faite que de telles pratiques enseignantes se construisent assez précocement, de manière non explicite et au regard de représentations du rôle de l'enseignant dans le processus d'enseignement/apprentissage et plus largement du métier d'enseignant.

Nos recherches actuelles et notamment celles conduites au sein du réseau Recherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages (RESEIDA)[5] nous conduisent à penser que la problématique est plus complexe (ou résistante) qu'il n'y paraît s'agissant du traitement de l'erreur en classe de mathématiques, dans et par les pratiques enseignantes. En particulier, une telle complexité tient, en partie au moins, aux deux points de vue complémentaires qu'il est possible de poser sur l'erreur dans l'enseignement : l'erreur en tant qu'écart au savoir de référence mais, également, l'erreur en tant qu'écart aux attendus de l'enseignant dans la conduite de son projet d'enseignement.

Une telle perspective nous apparaît être une voie d'intérêt pour mieux interroger le rôle et la place des écarts au sein d'un projet d'enseignement et envisager les alternatives de traitements de ces écarts en classe. Adopter un tel point de vue permet par exemple de questionner le fait que ce qui relève d'une erreur au sens d'écart au savoir de référence peut se relever (être envisagé comme) un attendu du professeur (une non erreur du point de vue des écarts aux attendus du professeur) dans la perspective de problématiser le savoir en jeu. On voit bien par ailleurs que du point de vue des élèves, un tel changement de jeu est potentiellement très différenciateur (à tout le moins nécessite d'être négocié avec les élèves) ceci dans la mesure où pour certains élèves, l'enjeu du jeu reste la recherche de la bonne réponse à substituer à une réponse erronée quand d'autres cherchent à apprendre de leurs erreurs…

À partir de premiers traitements d'erreurs observés dans les pratiques enseignantes…

En prise d'appui sur ces recherches récentes (Coulange, Netter et Train, 2021) et encore en cours sur cette thématique, nous avons dégagé différentes « strates » possibles de traitement de l'erreur dans

5. Le réseau pluridisciplinaire Reseida (Recherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages), fondé en 2001, étudie la construction des inégalités d'apprentissage.

les pratiques enseignantes. Nous mettons en mots ces strates (y compris en formation) de la manière suivante :

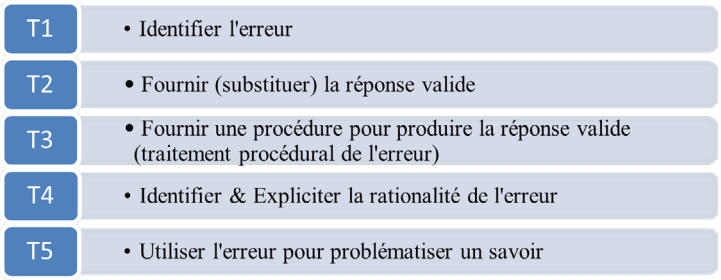


Figure 1 - Strates de traitement de l'erreur dans les pratiques enseignantes

Ce moment de formation se positionne classiquement en fin du premier semestre de formation (décembre ou janvier). Il illustre comment dans une stratégie de formation *à l'envers*, nous prenons appui conjointement sur des matériaux issus des pratiques des stagiaires – ici les matériaux sont des récits d'épisodes de visites de classe effectuées par les formateurs en amont de la séance de formation – et de recherches conduites en didactique des mathématiques sur les pratiques enseignantes. A l'issue des premières visites effectuées dans les classes des enseignants stagiaires (de septembre à fin novembre), nous avons pu observer que la plupart d'entre eux adoptaient des traitements des erreurs des élèves assez peu élaborés au regard des strates d'erreurs données ci-dessus. Au mieux, les traitements que nous avons pu observer relèvent de traitements « procéduraux » des erreurs, visant à fournir une procédure plus ou moins décontextualisée permettant de fournir une réponse valide à l'exercice traité, voire à un ensemble d'exercices proches. Dans un premier moment de formation, un tel constat est dévoilé et partagé avec les stagiaires sur la base de premiers récits d'erreurs commises récemment dans leurs classes et qu'ils ont eu pour certains d'entre eux à gérer *in situ* en classe. Les stagiaires sont ensuite invités rapidement à positionner les différents traitements des erreurs évoqués par rapport aux strates de traitement de l'erreur une fois celles-ci dévoilées.

L'enjeu de formation est dans un second temps précisé au collectif : il s'agit d'investir la palette des traitements possibles des erreurs en classe de mathématiques, en vue d'enrichir potentiellement les pratiques des stagiaires. Il s'agit notamment d'envisager ce que pourrait signifier des strates du type « identifier et expliciter la rationalité de l'erreur » ou « utiliser l'erreur pour problématiser un savoir » sur des exemples liés à « leurs pratiques enseignantes ».

Ce travail est conduit à partir de nouveaux matériaux issus de nos propres visites dans leurs classes. Ils prennent la forme de récits d'épisode de visite. Deux exemples de tels matériaux sont fournis ci-dessous.

Récit d'épisode n°1
Dans une activité donnée sur les multiples en classe de cinquième, des élèves considèrent que « 5 divisé par 5, cela fait 0 » et que « 5 divisé par 0, cela fait 5 »
Récit d'épisode n°2
Dans l'exercice donné en début de cours en classe de quatrième : Calculer $A = (-5)^2$; $B = -5^2$; $C = -(-5)^2$; $D = 5^2-12$ Un élève en désignant l'expression C déclare « Monsieur le moins il ne sert à rien, on peut le supprimer »

Figure 2 - Récit d'épisodes observés lors de premières visites dans des classes d'enseignants stagiaires

Le premier récit conduit rapidement à mettre en exergue de possibles origines et autres rationalités cachées derrière la commission de telles erreurs « classiques » d'élèves renvoyant à des gestes enseignés qui peuvent d'ailleurs être réinterrogés à cette occasion. Il en va ici notamment de la « routine » de barrer « en haut » et « en bas » des « facteurs communs » visibles dans une écriture fractionnaire en vue de penser sa « simplification », routine qui exercée sans moyen de contrôle est susceptible d'être une pourvoyeuse d'erreurs… Descendre dans les strates de traitements de l'erreur pour viser à dépasser la seule substitution d'une « bonne réponse » ou dans le second cas, de justifier « l'interdiction de diviser par zéro » apparaît plus résistant aux stagiaires. Le seul recours à la loi « il est interdit de diviser par zéro » apparait évidemment peu convaincant. De la même manière, des arguments purement numériques sont jugés peu convaincants dans la mesure où ces derniers sont susceptibles de « tourner en rond » ou de ne faire que déplacer la problématique pour des élèves qui n'auraient pas compris pourquoi le produit de tout nombre par zéro est nul. Un espace justificatif apparait pourtant en remontant aux différents sens possibles d'une division : « division partition » (recherche de la valeur d'une part, le nombre de parts étant donné) et « division quotition » (recherche du nombre de part, sa valeur étant donnée) (Vergnaud, 1991), chemin que nous invitons les stagiaires à investir. Le sens « quotition » de la division apparaît dès lors fournir une justification potentiellement intéressante à partager avec les élèves, et en substance : si la valeur de la part est nulle, alors je peux distribuer autant de parts « nulles » que je veux, je n'arriverai pas à « épuiser » 5. Le traitement d'une telle erreur permet par ailleurs de faire apparaître clairement la distinction entre les deux sens possibles d'une division, le fait de partager « 5 entre 0 personne » paraissant plus difficilement renvoyer à une forme de signification « possible » …

Ce premier récit et son exploration au travers des différentes strates de traitement de l'erreur, jusqu'à envisager sa problématisation, apparaît potentiellement intéressant dans la mesure où une telle erreur est largement rencontrée par les stagiaires et que son traitement professoral reste délicat faute de prise d'appui sur le plan conceptuel.

Le deuxième récit, quant à lui, renvoie à davantage de complexité. En premier lieu, l'occasion est offerte de se questionner sur la présence même (ou l'identification) d'une erreur commise dans l'intervention de l'élève : de quel « moins » parle-t-il et pourquoi ? Tient-il ce discours car il a identifié qu'en élevant au carré un nombre négatif, on obtient le même résultat qu'en élevant au carré son opposé ? Dit comme cela (et nous le disons comme cela aux enseignants stagiaires au moment de

la « mise en doute » de l'erreur que ce récit recouvre), cela paraît peu probable. Nous envisageons dès lors le traitement de « l'erreur » sous-jacente, liée à une règle potentiellement aveugle de suppression d'un signe « moins ». Celle-ci peut trouver son origine dans une règle du type « moins par moins » ça donne plus : ce qui donne lieu à une erreur « visible » dans le résultat donné au final : 25 (ce qui est le cas dans la classe observée). Elle pourrait tout aussi bien trouver son origine dans une suppression du « moins » dans une parenthèse « au carré » mais sans savoir pourquoi : -25 serait dès lors la réponse donnée mais on pourrait presque la qualifier d'une « fausse réussite ». Il est assez aisé pour les enseignants stagiaires d'identifier un premier traitement procédural de l'erreur. Celui-ci est rapidement mis en mots de la façon suivante : « on commence par traiter le carré de ce qui est entre parenthèses » et complété d'un discours permettant un retour au sens du carré d'un nombre comme le produit de ce nombre – ici négatif – par lui-même – ce qui donnera un résultat positif. La rationalité de l'erreur est identifiée comme en lien avec une technique non contrôlée de « moins par moins » ou de « suppression d'un signe moins ». Sauf qu'une fois mise en exergue, elle permet précisément de montrer que le traitement procédural proposé n'outille pas vraiment pour requestionner cette rationalité première car une « règle » vient se substituer potentiellement à une autre : « on commence par le carré entre parenthèse » avant « moins par moins cela donne plus » …

Les enseignants stagiaires cherchent alors ce qui pourrait être problématisé en lien avec des priorités opératoires pour résoudre la question de « mise en ordre » des calculs à effectuer. Mais la problématisation de l'erreur pourtant presque implicitement portée par l'énoncé de l'exercice leur échappe, et ce, de manière résistante… Un retour à l'énoncé et une poursuite de son analyse est dès lors nécessaire pour faire émerger que les variations d'écritures des expressions en jeu dans l'exercice - $A = (-5)^2$; $B= -5^2$; $C = -(-5)^2$ – correspondent à autant de structures d'expressions numériques différentes, quoique proches en apparence : le carré de -5, l'opposé du carré de 5 et l'opposé du carré de -5 ou de l'opposé de 5. Cette problématisation sous-jacente à l'énoncé risque fort d'être passée sous silence si l'on ne revient pas précisément à l'enjeu de l'exercice qui vise à faire distinguer des différences entre des structures d'expressions numériques, permises entre autres par le parenthésage. Cette problématisation sous-jacente apparaît difficile d'accès en premier abord au collectif de stagiaires. Reste qu'une fois soulignée, elle permet de faire émerger un élément constitutif du relief (Robert, 2012) de la notion d'expression algébrique/numérique, l'aspect structural d'une expression (Sfard, 1991), aspect permettant le pilotage des « calculs » ou les réécritures des expressions qui en conservent la dénotation (Drouhard, 1992). Faute de quoi, l'enseignement du calcul numérique et algébrique est susceptible de se réduire à l'application de règles apprises et n'éclairant pas la logique de la pratique de calcul sur les expressions symboliques. Ce moment de formation est l'occasion pour les formateurs de problématiser/légitimer la nécessité de savoirs didactiques nouveaux sur les expressions symboliques du point de vue de leurs aspects structuraux, savoirs qui seront dès lors abordés dans la cadre de formations potentiellement plus « descendantes » centrées sur des thèmes d'étude comme les relatifs ou encore l'algèbre, dans des séances ultérieures.

A la fin d'un tel moment de formation, ces traitements possibles de l'erreur dans la classe sont re-contextualisés du point de vue des composantes médiatives et cognitives des pratiques enseignantes. Toute erreur n'est pas « bonne » ou à problématiser dans le processus d'enseignement et d'apprentissage. La réflexion conduite sur la base de ces « récits » peut aussi inviter les futurs enseignants à se questionner sur la portée de strates « plus habituelles », liées à des traitements procéduraux (par exemple, en se questionnant sur la décontextualisation rendue ou non possible à travers les épisodes de correction).

Discussion

Dans cette contribution, nous avons tenté, en prise d'appui sur un épisode de formation, de montrer comment, à partir d'une démarche de formation *à l'envers* pensée initialement dans le cadre d'une formation de formateurs, nous avons adapté une telle démarche à un public de formés en formation initiale. Les adaptations de la démarche relèvent avant tout des spécificités d'un tel public, débutant dans l'exercice du métier, d'horizons variés, à la recherche de premières balises pour faire la classe. Dans une telle démarche, nous tentons de nous placer au plus près de la ZPDP des formés, tout en veillant à la faire évoluer à partir de matériaux de formation entretenant une proximité « contrôlée » avec les matériaux dont disposent les formés dans l'exercice du métier. Un tel point de départ nous permet d'agir prioritairement sur deux principales composantes du métier, cognitive et médiative, au plus près de l'activité mathématique des élèves en classe. Ce travail centré sur ces deux composantes, jugées particulièrement « en construction » chez ce public de débutants, est conduit en veillant à ne pas écarter le poids d'autres composantes/contraintes structurantes du métier. Il s'agit pour nous de viser une forme de progressivité dans la construction du développement professionnel de ces futurs enseignants de mathématiques en veillant à ne pas déstabiliser brutalement leurs pratiques de débutants en construction. De telles séances de formation *à l'envers* sont conduites périodiquement tout au long de l'année. Elles sont également envisagées comme un moyen de légitimer d'autres épisodes passés ou à venir, pensés plus « descendants » afin d'asseoir de nouvelles connaissances didactiques. L'enjeu est bel et bien de rendre rapidement fonctionnelles de telles connaissances en prise d'appui sur les épisodes de formation *à l'envers* qui y font référence, à même de les valoriser comme des outils pour penser la construction et la gestion de leur enseignement. La séance de formation documentée dans cette contribution aura d'ailleurs bien montré que la mise en lien de connaissances didactiques sur les structures d'expressions symboliques (numériques ou algébriques) et les possibles traitements d'erreurs associées n'est pas un allant de soi. Le choix de la thématique de l'erreur associé à des matériaux de formation issus des visites de classe s'est fait en cohérence avec le souhait d'investir au plus près la ZPDP des formés. Mais d'autres éléments ont également participé à un tel choix. En prenant comme point de départ des récits de visite sur l'erreur en classe, l'opportunité (pas si fréquente par ailleurs) a été offerte d'entendre en formation des discours proches de ceux que tiennent les stagiaires en classe sur les erreurs commises par leurs élèves. Et en miroir, c'est la question de l'aménagement de la ZPD des élèves qui est posée. Les tentatives formulées par les enseignants stagiaires pour investir les strates plus élaborées de traitement de l'erreur nous semblent pouvoir être relues comme des tentatives de rapprochements explicites dans le discours de l'enseignant entre ce qui est visé et ce qui vient des élèves, soit, dans une certaine mesure, de proximités discursives[6] (Robert et Vandebrouck, 2014 ; Vandebrouck et Robert, 2017).

6. Ces proximités discursives, notamment ascendantes sont également au cœur de notre deuxième contribution qui se positionne dans la même démarche globale de formation « à l'envers ».

Pour conclure, nous disons un mot de la politique réformiste actuelle dans la formation des futurs enseignants français. Des incertitudes existent aujourd'hui relativement à la place du concours, à son contenu mais aussi en termes de conditions de stages pour les étudiants se destinant au métier d'enseignant. La question des conditions favorables pour déployer une telle démarche de formation *à l'envers* demain se pose ainsi clairement. Pour notre part, de telles incertitudes n'entament en rien notre volonté de poursuivre la réflexion sur une telle démarche avec très probablement le défi de penser de nouvelles adaptations pour « partir des pratiques enseignantes » en formation.

Références

Brousseau G. (1983) Obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 4.2., pp. 165-198.

Cèbe S. et Goigoux R. (2007). Concevoir un instrument didactique pour améliorer l'enseignement de la compréhension de textes. *Repères, 35*, 185-206.

Coulange, L., Netter, J. et Train, G. (2021, septembre). *Quel traitement de l'erreur pour « lutter » contre les inégalités ?* Communication présentée au colloque former contre les inégalités (Haute école pédagogique du canton de Vaud -Laboratoire d'Analyse du Travail Enseignant et de la Formation en Alternance), Lausanne, Suisse.

Drouhard J.-P. (1992) *Les écritures symboliques de l'Algèbre élémentaire*, Thèse de l'université Paris 7.

Haspekian, M., & Gélis, J.-M. (2021). Informatique, Scratch et robots : de nouvelles pratiques enseignantes en mathématiques ? *STICEF (Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Éducation et la Formation), 28.1(1)*, 1–37. doi: 10.23709/sticef.28.1.1

Robert A. (2008a) Le cadre général de nos recherches en didactique des mathématiques. In Vandebrouk F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.11–22). Toulouse : Octarès Editions.

Robert A. (2008b) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouk F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45–54). Toulouse : Octarès Editions.

Robert A. (2008c) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In Vandebrouk F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.59–65). Toulouse : Octarès Editions.

Robert A. & Abboud-Blanchard M. (2016) *Un cadre d'étude des pratiques enseignantes pour penser la formation des enseignants de mathématiques*, Recherches en éducation [Online].

Robert, A., Penninckx J., & Lattuati M. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques, (se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.

Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol 34(2/3), pp 239-285

Robert A., Vivier L. (2013) Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques, *Éducation et didactique 7-2*, 115-144.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22(1)*, 1-36.

Vandebrouck, F, Robert A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec des technologies, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 37(2-3), pp 333-382

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 10/2.3, 135-169.

Vygotski, L.S. (1997) [1934] *Pensées et langage*. Trad. du russe par F. Sève. Paris : Éditions Sociales.

Titre: Usage de ressources pour enseigner les mathématiques dans une formation *à l'envers*

Auteurs: COULANGE Lalina et TRAIN Grégory

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 195 - 207

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Usage de ressources pour enseigner les mathématiques dans une formation *à l'envers*

COULANGE[1] Lalina – TRAIN[2] Grégory

Résumé – Nous examinons dans ce texte une formation à destination de futurs enseignants de mathématiques, adaptée d'une démarche de formation *à l'envers* (Robert & Vivier, 2013) ancrée dans la double approche ergonomique et didactique (Robert, 2008). Cette contribution se centre plus précisément sur des moments de formation qui concernent l'usage de ressources pour enseigner les mathématiques au collège (élèves de 11-15 ans). Nous montrons en quoi une démarche de formation partant des pratiques enseignantes pilote nos choix de formateurs-chercheurs sur cette thématique en particulier.

Mots-clefs : formation initiale d'enseignants de mathématiques, formation « à l'envers », usages de ressources pour enseigner les mathématiques

Abstract – In this text, we examine a training for future mathematics teachers, adapted from a training approach *in reverse* (Robert & Vivier, 2013) grounded in the dual ergonomic and didactic approach (Robert 2008). This contribution focuses more specifically on moments of formation concerning the use of resources to teach mathematics in middle school (pupils aged 11-15). We show how a "training approach starting from teaching practices drives our choices as trainer-researchers on this theme in particular.

Keywords: initial training of mathematics teachers, training "in reverse", uses of resources to teach mathematics

1. Laboratoire Epistémologie et Didactique Des Disciplines, Université de Bordeaux, France, lalina.coulange@u-bordeaux.fr

2. Laboratoire Epistémologie et Didactique Des Disciplines, Université de Bordeaux, France, gregory.train@u-bordeaux.fr

Introduction

Nous examinons dans ce texte une formation mise en place[3] dans le cursus « Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de formation » (master MEEF), fréquenté par des étudiants de l'Université de Bordeaux se dirigeant vers une carrière d'enseignants des mathématiques au secondaire (élèves de 11-18 ans – du collège au lycée). Depuis plusieurs années, l'équipe d'intervenants en charge de la formation s'est engagée dans une démarche de formation *à l'envers* ou à partir des pratiques enseignantes, tout en ne négligeant pas l'importance accordée à l'analyse des contenus disciplinaires (Robert, 2010 ; Robert & Vivier, 2013). En lien étroit avec le cadre d'analyse des pratiques enseignantes que constitue la Double Approche ergonomique et didactique (DA) (Robert et Rogalski, 2002 ; Robert, 2008a, 2008b, 2008c), cette démarche prend appui sur des principes généraux structurants et empruntés directement d'hypothèses fondatrices de la DA. Ainsi le travail proposé en formation est envisagé au « plus près » des pratiques enseignantes (vécues, projetées à un moment donné de la formation), visant ainsi à s'ancrer dans la Zone Proximale de Développement des Pratiques[4] (ZPDP) des futurs enseignants (Robert & Vivier, 2013). La DA postule une complexité des pratiques qu'elle vise à appréhender à partir de composantes descriptives de l'activité enseignante (composantes cognitive et médiative) et en prenant en compte différents déterminants de cette activité (composante sociale, institutionnelle et personnelle). La prise en considération de cette complexité des pratiques enseignantes au sein d'une démarche de formation *à l'envers* implique de privilégier un travail avec les stagiaires autour des choix, décisions et activités en lien avec les contenus enseignés (cognitif) et les déroulements en classe associés (médiatif), sans négliger la place et le rôle des autres contraintes en jeu (sociales, institutionnelles, personnelles). En postulant différents niveaux d'organisation des pratiques enseignantes (micro-local-global), la formation dispensée doit pouvoir agir sur à la fois ce qui relève des routines du métier (micro) mais tout autant sur les autres niveaux d'organisation que sont le quotidien de l'activité enseignante ou encore le niveau des projets et scénarios.

La démarche de formation *à l'envers* a été initialement décrite et mise en œuvre dans le cadre de formations de formateurs (Robert & Vivier, 2013) avec une cohorte d'enseignants de mathématiques expérimentés. Si la démarche de formation *à l'envers* expérimentée au sein de la seconde année du MEEF Mathématiques de l'Université de Bordeaux a pu rencontrer des conditions favorables dans sa mise en œuvre, notamment en permettant aux concepteurs de la formation de penser et projeter leurs pratiques à l'échelle d'une année de formation (et non pas uniquement à l'échelle d'un scénario isolé de formation), reste que le public cible, en formation initiale, se distingue à plusieurs égards d'un public d'enseignants formateurs. Ces futurs enseignants, en stage en responsabilité (un ou deux niveaux de classe au collège), affichent des profils très variés du point de vue de la formation

3. Les deux auteurs de cette contribution sont co-responsables de la formation et y interviennent.

4. La notion de ZPDP est une extension de celle de ZPD développée par Vygotski (1997) aux pratiques enseignantes. Cette extension est d'ailleurs travaillée par d'autres auteurs didacticiens qui s'intéressent aux pratiques et à la formation d'enseignants, avec une approche ergonomique (Cèbe & Goigoux, 2017) ou instrumentale (Haspekian & Gélis, 2017).

antérieurement suivie : tous n'ont par exemple pas suivi la formation dispensée en première année du MEEF. Le parcours professionnel antérieur des stagiaires atteste également d'une telle variété : se côtoient dans la promotion des étudiants, des personnels de l'Education Nationale en reconversion (Professeurs des Ecoles, enseignants de Lycée Professionnel, Contractuels) ou encore des salariés du privé s'orientant vers une carrière d'enseignants. De telles spécificités peuvent s'ériger à la fois en leviers tout autant qu'en contraintes. Elles conduisent à penser des adaptations nécessaires de notre point de vue par rapport à une démarche de formation *à l'envers* pensée initialement pour un public d'enseignants expérimentés ou de formateurs. L'hétérogénéité de la cohorte, du point de vue de la formation antérieure suivie, conduit notamment à envisager des apports de connaissances et de savoirs didactiques, rendus plus visibles et explicites pour le collectif. Une telle démarche n'implique par ailleurs pas nécessairement une formation descendante, mais invite, à différentes échéances de la formation, à mieux structurer de telles connaissances et savoirs didactiques du point de vue des stagiaires.

Dans cette contribution, nous documentons la manière dont nous déclinons notre démarche de formation *à l'envers* en formation initiale de futurs enseignants de mathématiques à partir d'un scénario de formation qui aborde la question du rôle et de l'usage des ressources professionnelles. Nous apportons au préalable quelques éclairages sur le choix de ce matériau d'étude dans le cadre de cette formation. Cette contribution fait directement écho à une autre contribution qui vise à éclairer cette même démarche de formation *à l'envers* en abordant la question du traitement de l'erreur dans les pratiques enseignantes.

Des moments de formation *à l'envers* sur les usages de ressources pour enseigner les mathématiques

La place, le rôle et l'usage des ressources en formation

Les visites de stage permettent de faire de façon récurrente différents constats sur la documentation professionnelle des stagiaires. Un premier constat est sa diversité. Manuels scolaires, ressources produites par un collectif d'enseignants, documentation institutionnelle (les programmes mais aussi les documents ressources associés) sont des exemples de documents professionnels et ceci sans épuiser la liste… Un second constat, allant de pair avec le précédent, relève de l'ergonomie de ces ressources : plus ou moins scénarisées, plus ou moins didactisées, etc. Un troisième constat relève d'un lien difficile à établir entre le degré de scénarisation/didactisation d'une ressource et la réussite de sa mise en oeuvre en classe du point de vue du projet d'enseignement visé. Ces premiers constats permettent de souligner le lien complexe entre les ressources professionnelles, leurs usages et la formation d'enseignants. De nombreuses recherches en didactique se sont développées sur les usages de ressources par les enseignants dans le cadre d'une approche documentaire qui a fait l'objet d'un ouvrage de synthèse (Gueudet & Trouche, 2010). Précisons que nos propres questions de formateurs

didacticiens sur le sujet restent assez « naïves » en la matière et n'empruntent pas explicitement à cette approche, pour le moment[5]. Elles sont avant tout pilotées par des fondements liés à notre stratégie globale de formation *à l'envers*. Il s'agit pour nous de veiller à une remontée à partir des pratiques enseignantes ou à aménager des enrichissements de ces pratiques – ce qui exclut par exemple dans le cadre d'une telle stratégie de formation, de prescrire l'usage d'une ressource donnée, fusse-t-elle « didactisée ».

L'analyse a priori de ressources du « quotidien » en termes d'adaptations de connaissances

En début d'année, les ressources étudiées en formation sont avant tout « celles du quotidien » ou que nous imaginons comme telles, majoritairement les manuels scolaires. Nous partageons avec les enseignants stagiaires des outils d'analyse de la double approche ergonomique du didactique liés à l'analyse *a priori* de tâches en termes d'adaptations de connaissances. Ces outils prennent la forme d'une grille d'analyse (Coulange & Train, 2014). L'étude d'exemples de ce que recouvrent les adaptations de connaissances est conduite collectivement. Elle devient ainsi un outil partagé et privilégié pour conduire des analyses d'énoncés d'exercices extraits de manuels. Un des enjeux de formation est de faire éprouver aux stagiaires le potentiel de ces analyses pour anticiper un déroulement en classe. Les enseignants stagiaires peuvent proposer des modifications[6] d'énoncés en justifiant leurs choix en prise d'appui des analyses conduites.

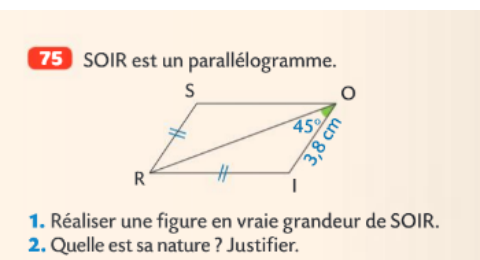


Figure 2 - Exemple d'énoncé tiré du manuel Maths Monde, cycle 4, tome 2

5. Ceci ne veut pas dire que nous n'envisageons pas des croisements potentiels ultérieurs avec des travaux relevant de l'approche documentaire, certains des points évoqués par la suite pouvant d'ailleurs être regardés comme des points de rapprochements possible : par exemple, lorsque nous évoquons la difficulté des liens à établir entre un usage prévu d'une ressource – même scénarisée - par ses concepteurs et sa mise en œuvre en classe par un enseignant débutant.

6. La possibilité même de pouvoir modifier un énoncé d'exercice n'apparait d'ailleurs pas tout à fait comme un allant de soi pour les stagiaires à ce stade de la formation.

L'étude de l'énoncé ci-dessus fait émerger plusieurs points notables. Tout d'abord l'analyse des connaissances potentiellement mises en fonctionnement pour répondre à la première question (la réalisation de la figure en vraie grandeur) fait apparaître le fait que la recherche d'une réponse à la deuxième question (celle de la justification) sera largement entamée une fois la figure tracée. Les enseignants stagiaires s'accordent rapidement sur ce point tout en trouvant pertinent pour certains de la conserver mais avec l'enjeu davantage liée à la mise en forme d'une démonstration qu'à la production d'une preuve, quand d'autres peuvent juger plus judicieux de supprimer cette seconde question ou de la repositionner en premier. L'analyse en termes d'adaptations de connaissances de la tâche de construction de la figure permet d'identifier des trajectoires possibles dans les activités mathématiques potentielles des élèves. Les plus probables sont parfois difficilement identifiées par les stagiaires, du fait d'adaptations de connaissances qui leur échappent.

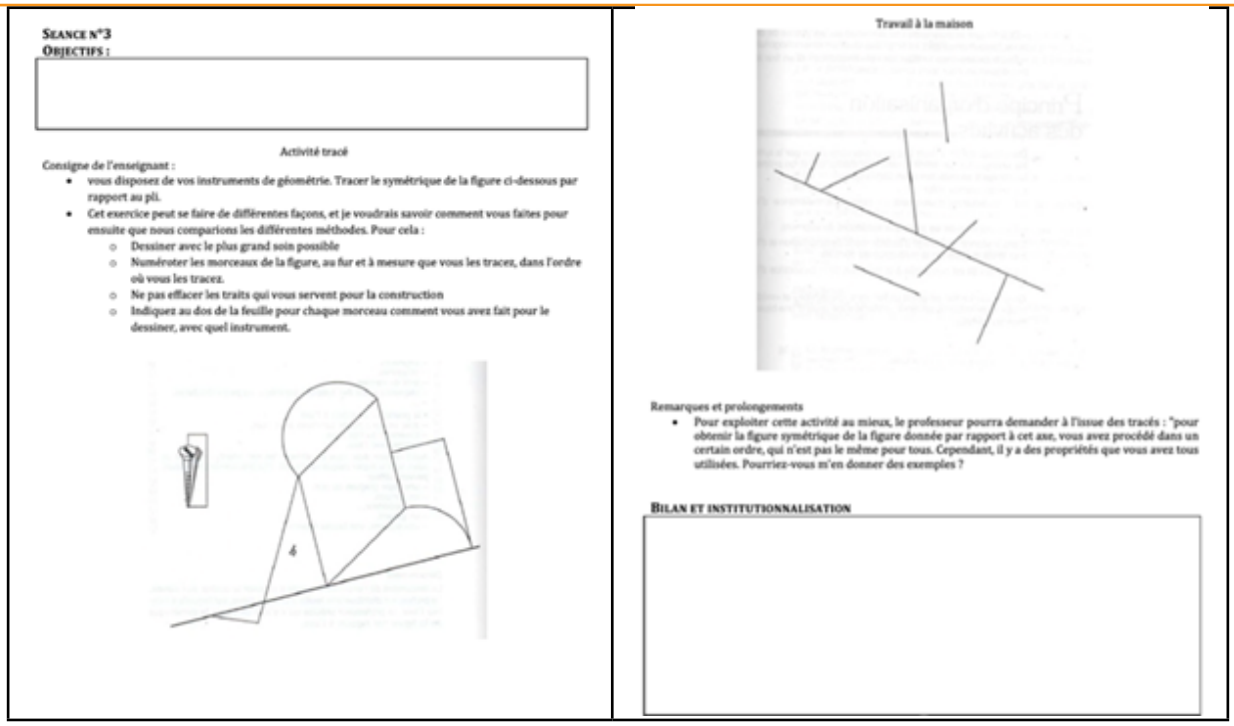
En effet, les futurs enseignants envisagent souvent au moins dans un premier temps des trajectoires davantage liées à la reconnaissance quasi-immédiate de la nature carrée du quadrilatère SOIR. Le fait que les élèves puissent s'engager dans la tâche de construction sans cette « conclusion » est difficilement envisagé par les stagiaires. Ainsi, une trajectoire probable (car moins coûteuse en termes d'adaptations de connaissances) est le tracé du segment [IO] puis de la demi-droite [OR) à partir des données numériques indiquées sur la figure. Dans une telle trajectoire, trouver la position du point R sur la demi-droite nécessite plusieurs adaptations de connaissances : identifier la sous-figure en jeu triangle et envisager que la constructibilité de ce triangle réside dans la recherche de la longueur inconnue RI, ce qui conduit à des intermédiaires en termes d'étapes de raisonnements à conduire pour arriver à conclure que RI = RS = IO du fait que la figure est un parallélogramme. Une telle analyse donne à voir des difficultés probablement rencontrées par les élèves qui investiraient cette trajectoire de construction, à la suite des premiers tracés de [IO] et de [OR). Ces difficultés non soupçonnées par une partie des enseignants stagiaires sont parfois confirmées par certains qui « ont expérimenté » cet énoncé ou un énoncé proche dans leurs classes. Ceci ouvre sur des anticipations possibles en termes d'aides à apporter aux élèves dans un déroulement associé à cet énoncé.

A la suite de cette formation, certains enseignants stagiaires s'emparent plus que d'autres de cette grille d'analyse pour analyser les énoncés qu'ils proposent « au quotidien » dans leurs classes. A minima, un tel épisode de formation permet en tout cas d'adopter un lexique commun dans l'analyse *a priori* de tâches en termes d'adaptation de connaissances qui peut être utilisé lors de séances de formation ultérieures, ou d'entretiens de formation avec les enseignants débutants que nous observons en visite. Ainsi un enseignant stagiaire ne sera-t-il pas surpris si en tant que « visiteur », nous l'engageons à analyser un énoncé d'exercice qu'il compte proposer à ses élèves à la suite de la visite, en termes d'adaptations de connaissances.

Les ressources plus didactisées sont introduites plus tardivement dans la formation avec des enjeux ciblés de formation qui relèvent souvent conjointement de « zooms » sur un aspect de la pratique enseignante et d'apports sur la conceptualisation d'une notion mathématique. Dans le cas qui nous intéresse ci-après, les objectifs de la formation recouvrent à la fois un questionnement autour de la pratique des bilans de connaissances et d'apports didactiques sur l'enseignement de la symétrie axiale. A noter que nous n'interdisons ni n'encourageons les stagiaires à utiliser dans leurs classes une ressource présentée en formation, l'enjeu étant plus volontiers de montrer que l'étude d'une ressource spécifique en formation vise à « dépasser » le seul usage de cette ressource.

Nous prenons appui depuis plusieurs années sur une « ancienne » ressource extraite de l'ouvrage Ermel Sixième (1991) pour problématiser de concert la question des « bilans » et des apports didactiques sur l'enseignement de la symétrie axiale. Ce que nous qualifions de « bilans » relèvent de moments d'expositions de connaissances (Bridoux et al. 2016) visant à aménager des proximités discursives (Robert et Vandebrouck, 2014 ; Vandebrouck et Robert, 2017) avec (et au plus près de) l'activité mathématique des élèves. Nous faisons le choix du mot « bilan » en formation pour mieux le distinguer d'un « cours ». Nous faisons en effet l'hypothèse que de leur point de vue, le « cours » renvoie pour les futurs enseignants à une « mise en texte de savoirs mathématiques » (théorèmes, propriétés…), éventuellement illustrée par des « exemples » (qui peuvent prendre la forme de méthodes ou de techniques à retenir). Il peut constituer le seul moment d'exposition de connaissances que les stagiaires identifient clairement en tant que tel et peut s'avérer parfois descendant et « distancié » des activités mathématiques des élèves convoquées par des tâches qui leur sont prescrites. Autrement dit, nous supposons que dans la composante médiative de leurs pratiques enseignantes, sont plus rarement considérés des moments intermédiaires d'exposition de connaissances renvoyant à des proximités discursives (notamment horizontales ou ascendantes). Le risque potentiel d'une mise en lien délicate entre un « cours » avec l'activité mathématique des élèves permet de problématiser l'objet « bilan » comme un intermédiaire possible.

Le document qui leur est distribué par la suite vise « l'exercisation » du bilan par les enseignants stagiaires. Ce sont des extraits de la partie « symétrie axiale » du Ermel sixième (1991) mais qui sont « partiels ». Nous avons volontairement effacé tout ce qui relève des objectifs (explicités dans la ressource initiale) et du « bilan et institutionnalisation » (également présent dans la ressource originale). La consigne donnée aux enseignants stagiaires est d'étudier les tâches données aux élèves décrites dans la ressource mise à leur disposition et de proposer de renseigner à la fois les objectifs et les bilans. Un exemple de notre document de formation, associé à la « séance n°3 » de la ressource est donné ci-après.



SEANCE N°3
OBJECTIFS :

Activité tracé

Consigne de l'enseignant :

- vous disposez de vos instruments de géométrie. Tracer le symétrique de la figure ci-dessous par rapport au pli.
- Cet exercice peut se faire de différentes façons, et je voudrais savoir comment vous faites pour ensuite que nous comparions les différentes méthodes. Pour cela :
  - Dessiner avec le plus grand soin possible
  - Numéroter les morceaux de la figure, au fur et à mesure que vous les tracez, dans l'ordre où vous les tracez.
  - Ne pas effacer les traits qui vous servent pour la construction
  - Indiquez au dos de la feuille pour chaque morceau comment vous avez fait pour le dessiner, avec quel instrument.

Travail à la maison

Remarques et prolongements

- Pour exploiter cette activité au mieux, le professeur pourra demander à l'issue des tracés : "pour obtenir la figure symétrique de la figure donnée par rapport à cet axe, vous avez procédé dans un certain ordre, qui n'est pas le même pour tous. Cependant, il y a des propriétés que vous avez tous utilisées. Pourriez-vous m'en donner des exemples ?

BILAN ET INSTITUTIONNALISATION

Figure 2 - Extraits du document de formation - la ressource « partielle » sur la symétrie axiale

La ressource à l'étude présente des particularités fortes du point de vue de la trajectoire de conceptualisation envisagée concernant la symétrie axiale en classe de sixième. En particulier, une transition progressive est aménagée allant de la perception de certaines propriétés « qualitatives » de figures symétriques (en termes d'orientation par rapport à l'axe, de distance ou d'intersection avec l'axe) à des tracés en prise d'appui sur ces aspects perceptifs (devenant moyens de contrôle). De la même façon, une progressivité est envisagée dans les « outils » de production de figures symétriques. Les élèves ont d'abord à effectuer des tracés à main levée pour asseoir les propriétés « qualitatives » (le pliage étant lui-même le moyen de contrôle de ces premiers tracés). Les instruments sont ensuite introduits pour organiser le passage de tracés à main levée en prise d'appui sur ces propriétés (« penchées pareil » par rapport à l'axe) à des tracés instrumentés qui font émerger leur pendant en lien avec les propriétés de conservation (« même angle » avec l'axe)[7]. La construction instrumentée du symétrique d'un point est envisagée plus tardivement dans la ressource. Une telle ressource apparaît dès lors éloignée des pratiques ordinaires d'enseignants de collège, lesquelles privilégient fréquemment une entrée directe dans des tracés « ponctuels » de figures symétriques, allant de pair avec la formalisation de propriétés de la symétrie axiale (conservation de longueurs, d'angles, etc.).

La difficulté de l'exercice proposé aux enseignants stagiaires sur la base des extraits partiels de la ressource est grande et les bilans à produire sont délicats car ils s'avèrent éloignés d'une mise en texte des savoirs, classiquement rencontrées dans les ressources « de leur quotidien ». Les bilans

7. Le gabarit d'angle est d'ailleurs le premier instrument de production d'une figure symétrique pour mieux faire apparaître « un report d'angle ».

prévus par les auteurs de cette ressource font appel à des mises en mots liés au « perceptif » (le symétrique est « penché pareil », « touche l'axe », « coupe l'axe », etc.), ce qui est tout à fait inhabituel du point de vue des étudiants. En général, leurs premières tentatives sont infructueuses. Ceci les conduit d'ailleurs à proposer des bilans proches ou identiques d'une situation à l'autre, alors qu'ils se rendent bien compte que l'activité potentiellement convoquée par les élèves n'est pas de même nature. Par exemple, alors que l'enjeu premier de la séance n°1, est de rendre disponible auprès des élèves, une technique d'obtention d'une figure symétrique d'une figure donnée qui repose sur le pliage, les premiers bilans proposés demeurent souvent très éloignés de cet enjeu. Un réel écart existe entre les bilans proposés et l'activité mathématique des élèves, potentiellement convoquée dans la réalisation des tâches prescrites.

La proposition de bilan rédigée par un stagiaire (figure 3) pour cette première séance fait apparaître plusieurs phénomènes. D'une part, cet étudiant dit « comment vérifier que deux figures sont symétriques par pliage », alors que les élèves ont eu à produire une figure symétrique à une figure donnée. Le passage d'une technique de construction à un moyen de contrôle reste transparent. D'autre part, à l'instar d'autres stagiaires, il formalise précocement les propriétés de « conservation » de la symétrie axiale, lesquelles apparaissent très éloignées de l'activité mathématique des élèves convoquée durant cette première séance. Ceci posera la question des bilans à associer aux séances suivantes (tout est dit !).

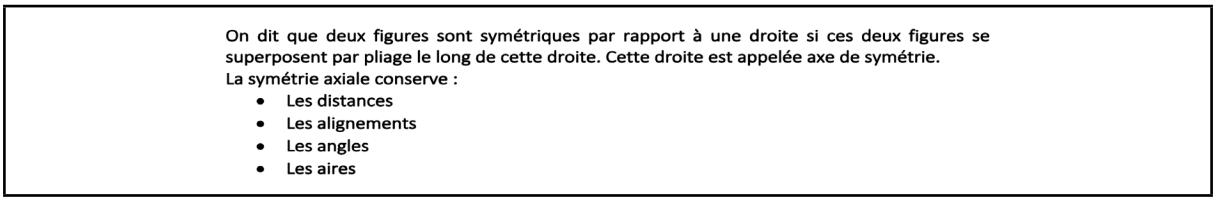

On dit que deux figures sont symétriques par rapport à une droite si ces deux figures se superposent par pliage le long de cette droite. Cette droite est appelée axe de symétrie.
La symétrie axiale conserve :
- Les distances
- Les alignements
- Les angles
- Les aires

Figure 3 - Exemple de bilan proposé par un stagiaire concernant la séance n°1

Concernant la séance n°3 (voir figure n°2) de la ressource, d'autres tentatives de bilans sont formulées. On trouve ci-dessous (figure n°4) un exemple de bilan proposé par un enseignant stagiaire Certes cette proposition tend à s'éloigner d'un texte « classique » de savoir (décontextualisé). Toutefois, une tension subsiste dans le discours tenu : entre des propriétés d'invariance très générales (l'invariance des angles, etc.) et la mise en mot d'une technique de construction instrumentée (en prise d'appui sur de telles propriétés). Une telle production d'étudiant invite le collectif à chercher des formulations plus contextualisées et permettant davantage de mises en lien avec l'activité potentielle des élèves : si un segment coupe l'axe de symétrique, alors l'angle qu'il forme avec cet axe est le même que l'angle formé par son symétrique et l'axe, etc.

Afin de construire le symétrique d'une figure, nous utilisons les propriétés de conservation de la symétrie axiale. Par exemple, nous pouvons commencer par relever les points dont leur symétrique est invariant, s'il y en a.
Nous pouvons ensuite continuer en utilisant l'invariance des angles et des longueurs.
Comment faire lorsque notre figure n'a pas de point invariant ?
Par exemple, nous pouvons prolonger un ou plusieurs segments de notre figure afin de construction un point invariant.

Figure 4 - Exemple de bilan proposé par un stagiaire concernant la séance n°3

La séance de formation se poursuit en donnant accès aux stagiaires à des matériaux complémentaires recueillis lors de l'expérimentation de cette ressource par un collègue Professeur Formateur Académique (PFA) : un extrait vidéo d'un élève envoyé au tableau qui produit et décrit les étapes de construction du symétrique de la figure donnée lors de la séance n°3 (voir figure n°2), des productions d'élèves associées aux différentes séances (notamment séance n°2 et n°3 de la ressource) (voir figure n°5).

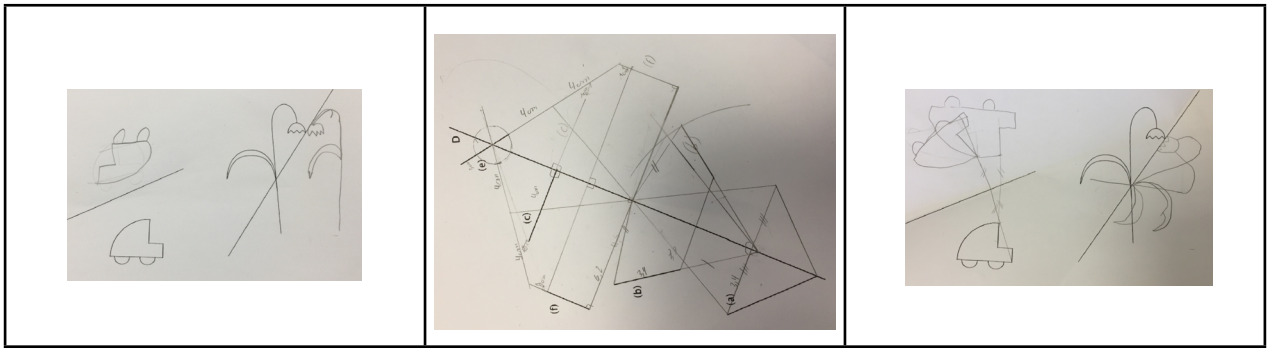


Figure 5 – Exemples de matériaux complémentaires fournis aux stagiaires

Ces matériaux permettent aux stagiaires de mieux identifier les enjeux conceptuels visés par la ressource – et d'avancer dans la formulation de « leurs bilans » en prise d'appui à la fois sur ces enjeux conceptuels mais aussi sur des observables de l'activité des élèves. Les difficultés rencontrées par les stagiaires dans la production de bilans sont dépassées à l'issue de la séance de formation. De telles difficultés jouent un effet « loupe » sur des proximités discursives, qu'ils ne s'autoriseraient pas toujours spontanément, mais avec le souci que la recherche de telles proximités restent « sous contrôle » d'enjeux conceptuels à identifier clairement, même si elles visent à mettre en lien des moments d'expositions de connaissances avec l'activité mathématique des élèves.

Discussion

Dans cette contribution, nous avons tenté, en prise d'appui sur un épisode de formation, de montrer comment, nous avons adapté une démarche de formation à l'envers auprès d'un public d'enseignants stagiaires. Dans une telle démarche, nous tentons de nous placer au plus près de la ZPDP des formés, à partir de matériaux de formation entretenant une proximité « contrôlée » avec les matériaux dont disposent les formés dans l'exercice du métier. Nous agissons d'autre part, prioritairement sur les deux composantes cognitive et médiative car nous les jugeons particulièrement « en construction » chez des enseignants débutants, tout en veillant à ne pas écarter les autres composantes (sociale, institutionnelle et personnelle) déterminantes de leurs pratiques et de leur évolution.

Ainsi s'agissant des usages de ressources, cette démarche nous conduit à nous centrer en début d'année, sur des ressources « du quotidien », c'est-à-dire celles que nous pensons déjà utilisées par les enseignants stagiaires, au regard de composantes sociales et institutionnelles des pratiques. Un tel choix permet d'autre part de légitimer un outil d'analyse *a priori* d'énoncés (en termes de connaissances mobilisables et disponibles, d'adaptations de connaissances) qui permet d'illustrer en quoi de telles analyses peuvent être fructueuses pour anticiper un déroulement dans la classe. Ceci nous semble une étape importante du point de vue des composantes médiative et cognitive de leurs pratiques « en construction » en début d'année.

Plus tard dans l'année, nous introduisons des ressources « plus didactisées », souvent avec un double enjeu ancré dans les composantes médiative et cognitive des pratiques enseignantes. L'exemple développé permet ainsi d'une part de (re)penser des éléments de relief d'une notion, la symétrie axiale enseignée en sixième. Il permet aussi (et même surtout) de travailler des « bilans » qui recouvrent potentiellement des moments intermédiaires d'exposition de connaissances veillant à aménager des proximités discursives ascendantes avec l'activité mathématique des élèves.

Ces choix qui s'inscrivent dans une démarche plus globale de formation *à l'envers* nous semblent avoir le mérite d'éviter des écueils parfois rencontrés quand il est question de ressources en formation initiale : l'usage de ressources éloignées du quotidien des pratiques enseignantes ou la prescription de « bonnes ressources didactisées » … Nous visons d'ailleurs toujours un « au-delà » des ressources

et des usages des ressources introduites et étudiées en formation. Ce que nous visons relève principalement des composantes médiative et cognitive des pratiques enseignantes, toujours en veillant à nous situer dans la ZPDP des pratiques d'enseignants débutants, y compris du point de vue des composantes sociale, institutionnelle et personnelle qui contribuent à les déterminer ou à les faire évoluer.

Références

ERMEL (1991). *Apprentissages mathématiques en 6ème*. Paris, Hatier.

Bridoux S., Grenier-Boley N., Hache C. et Robert A. (2016) Les moments d'exposition des connaissances, analyses et exemples. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris (IREM).

Cèbe S. et Goigoux R. (2007). Concevoir un instrument didactique pour améliorer l'enseignement de la compréhension de textes. *Repères, 35*, 185-206.

Coulange L. et Train G. (2014) Une question de formation : gérer la classe et/ou l'activité mathématique des élèves, *Petit x*, 94, 51-69

Gueudet G. et Trouche L. (2010) *Ressources vives : le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Rennes, France : Presses universitaires de Rennes

Haspekian, M., & Gélis, J.-M. (2021). Informatique, Scratch et robots : de nouvelles pratiques enseignantes en mathématiques ? *STICEF (Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication pour l'Éducation et la Formation), 28.1(1)*, 1–37. doi: 10.23709/sticef.28.1.1

Robert A. (2008a) Le cadre général de nos recherches en didactique des mathématiques. In Vandebrouk F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.11–22). Toulouse : Octarès Editions.

Robert A. (2008b) Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouk F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45–54). Toulouse : Octarès Editions.

Robert A. (2008c) La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In Vandebrouk F. (Ed.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.59–65). Toulouse : Octarès Éditions.

Robert A. & Abboud-Blanchard M. (2016) Un cadre d'étude des pratiques enseignantes pour penser la formation des enseignants de mathématiques, Recherches en éducation [Online].

Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol 34(2/3), pp 239-285

Robert A., Vivier L. (2013) Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques, *Éducation et didactique 7-2*, 115-144.

Vandebrouck, F, Robert A. (2017). Activités mathématiques des élèves avec des technologies, *Recherche en Didactique des Mathématiques* – Vol 37(2-3), pp 333-382

Vygotski, L.S. (1997) [1934] *Pensées et langage*. Trad. du russe par F. Sève. Paris : Éditions Sociales.

Titre: Quelle relation entre pratique de formation en didactique des mathématiques et formation des enseignants ?

Auteur: SQUALLI Hassane

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 208 - 221

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Quelle relation entre pratique de formation en didactique des mathématiques et formation des enseignants ?

SQUALLI[1] Hassane

Résumé : Cette contribution se situe dans l'axe 1 du GT2. Elle questionne la relation entre pratique de formation en didactique des mathématiques et formation des enseignants. Plus précisément, elle propose de discuter la question du rôle que peut jouer le didacticien des mathématiques dans des activités de formation initiale ou continue pouvant générer chez l'enseignant en formation une activité potentiellement riche en perfectionnement de ses compétences professionnelles.

Mots-clefs : Formation des enseignants ; didactique des mathématiques ; modélisation de l'enseignant en formation ; formation initiale, 5 mots clefs séparés par des virgules)

Abstract: In this contribution we examine the relationship between training practice in didactic of mathematics and teacher training. More specifically, we propose to discuss the question of the role that the didactician of mathematics can play in initial or continuous training activities that can generate an activity potentially rich in the development of professional preservice teachers' competencies.

Keywords: Didactic of mathematics, teacher training, preservice teacher

1. Université de Sherbrooke, Québec, Canada, hassane.squalli@usherbrooke.ca

Introduction

Il y a une vingtaine d'années déjà, Martinand (1994) affirmait qu'il est illusoire de croire qu'il va être possible de fonder entièrement la formation professionnelle des enseignants sur les seuls résultats de la recherche. Il ajoute :

> Aucune formation professionnelle, dans quelque domaine que ce soit, n'a pu être construite ainsi ; chacune doit composer avec l'»état de l'art», les normes techniques, les exigences sociales. La recherche peut anticiper, accompagner, réguler les évolutions ; la prétention de les déterminer est (heureusement) hors de sa portée. (Martinand, 1994, p. 63)

La recherche est loin d'avoir – mais le pourrait-elle ? – des réponses adéquates à toutes les questions qui se posent à l'enseignement des mathématiques aujourd'hui. Même dans le cas hypothétique où elle les aurait, la question de la formation initiale, mais aussi continue, des enseignants, reste entière. En effet, comme le souligne le Conseil supérieur de l'éducation (2005, 2006), la disponibilité des rapports de recherche ne peut suffire pour influencer les pratiques, ni d'ailleurs la disponibilité des ressources pédagogiques, notamment dans l'Internet. Par ailleurs, la didactique des mathématiques n'a pas le monopole de la formation des enseignants des mathématiques. Elle y contribue, certes, mais avec d'autres disciplines constitutives des sciences de l'éducation. La place qui lui est accordée au sein des programmes de formation est plus ou moins importante selon la culture institutionnelle et reste encadrée par un cahier de charge établit par le ministère de l'éducation. La question pour un formateur universitaire didacticien des mathématiques est alors : comment contribuer efficacement à la formation des enseignants ?

Quelques éléments de contexte

Systèmes de formation des enseignants au Québec

Au Québec, deux voies mènent à l'obtention du brevet d'enseignement en enseignement au secondaire. La première est le BES (baccalauréat en enseignement au secondaire). Il s'agit d'une formation de premier cycle universistaire, comportant une formation en mathématiques, une formation en didactique des mathématiques, une formation en psychopédagogie et une formation pratique (stages dans le milieu scolaire).

La seconde est la MQES (Maîtrise en enseignement secondaire). Il s'agît d'un programme de formation professionnelle de 2e cycle destiné à des enseignants de mathématiques au secondaire non légalement qualifiés et débouchant sur l'obtention d'un brevet d'enseignement. Ces enseignants ont préalablement suivi une formation universitaire en mathématiques. Les personnes suivant cette formation ont donc une solide formation disciplinaire, souvent enrichie d'une expérience de travail,

et sont à la fois enseignant et étudiant universitaire se formant à l'enseignement en vue d'une qualification administrative.

Spécificité de la recherche en didactique des mathématiques au Québec

La didactique des mathématiques peut se décliner en plusieurs domaines d'activités : comme domaine scientifique de recherche; comme domaine de recherche sur l'enseignement, sur l'apprentissage, sur les objets d'enseignement-apprentissage, ainsi que sur les différents acteurs aux prises avec ces objets; comme domaine de recherches empiriques dont le but est de produire des connaissances sur l'enseignement ou l'apprentissage des mathématiques, et aussi, comme un contenu de formation des enseignants (Squalli, 2015).

Ainsi, au Québec, les didacticiens des mathématiques sont à la fois chercheurs (40% de la tâche professorale) et formateurs (40% de cette tâche). Leur implication dans la formation initiale des enseignants se fait via les cours de didactique des mathématiques ainsi que la supervision des stages et des mémoires professionnels de fin d'études implantés dans certaines universités (comme c'est le cas de l'université de Sherbrooke). Ce double rôle a un impact sur les liens entre les activités de recherche et celle de formation. Comme l'explique Bednarz (2007), la recherche en didactique des mathématiques s'est développée, au Québec, en lien étroit avec la formation des enseignants.

> Les recherches prennent leur ancrage dans la formation et elles viennent l'alimenter. Il s'agit de comprendre les productions des élèves, d'élaborer des situations d'enseignement fécondes sur le plan des apprentissages, de développer des outils conceptuels, non pas pour élaborer une théorie sur les phénomènes d'enseignement, mais, au-delà des connaissances nouvelles produites dans ces recherches, pour mieux agir sur le plan de la formation. (Bednarz, 2007, p. 49)

Cette vision semble favoriser l'articulation entre la recherche en didactique des mathématiques et la formation à l'enseignement. Cependant, comment cette articulation se traduit-elle dans les pratiques de formation ?

Le formateur didacticien tire son expertise non des savoirs issus de la pratique d'enseignement, mais des savoirs issus de la recherche en didactique, principalement. Ces savoirs peuvent être des construits théoriques (théories, concepts, modèles, outils méthodologiques …) permettant, entre autres, d'éclairer les pratiques d'enseignement et d'apprentissage ; ils peuvent aussi être des savoirs sur ces pratiques, éclairant, par exemple les effets potentiels de pratiques d'enseignement en termes d'apprentissages des élèves. Mais ces savoirs ne peuvent suffire pour prescrire la pratique ni être prêts à être mobilisables directement par les enseignants dans leur pratique. Comme le souligne Martinand (1994), les propositions pour la formation qui peuvent émaner de recherches en didactique

des mathématiques résulteraient d'un point de vue didactique sur la formation qui est nécessaire, mais non suffisant. Sur le plan strict de la pratique de formation, dans une situation de formation le formateur didacticien ne peut être considéré comme un expert de la pratique d'enseignement plus compétent que l'enseignant en formation.

La question pour un formateur didacticien des mathématiques est alors : comment contribuer à la formation des enseignants, sans être un prescripteur de la pratique d'enseignement des mathématiques ni un théoricien déconnecté du contexte de cette pratique ?

En outre, à l'instar de Martinand (1994), les propositions pour la formation qui peuvent émaner de recherches en didactique des mathématiques doivent prendre en compte les savoirs issus de la recherche en didactique sur les pratiques enseignantes et expliciter dans la formation la relation entre la recherche en didactique des mathématiques et la pratique enseignante.

> Mais dans la pratique de la formation, comme dans sa conception, la place, le rôle de la pratique enseignante sont essentiels. C'est plus à la recherche d'en tenir compte, que l'inverse, non seulement en approfondissant l'étude des pratiques enseignantes, mais en situant de façon plus explicite dans la formation le rapport à la pratique enseignante à côté du rapport à la recherche didactique et pédagogique. (Martinand, 1994, p. 73).

Pour discuter de cette question, nous convoquons un modèle de l'enseignant en formation que nous avons présenté en détail dans (Squalli, 2012, 2015) et dont nous rappelons les grandes lignes ci-après.

L'enseignant en formation : un complexe d'assujettissements institutionnels

Dans la suite, nous allons désigner l'étudiant universitaire qui suit un programme de formation initiale en enseignement d'*enseignant en formation*. En effet, nous préférons cette expression, car elle rappelle que c'est l'enseignant que l'on veut former, et non un étudiant universitaire en sciences de l'éducation ou en mathématiques et que c'est cette posture qui permet aux formés de donner un sens à leur formation.

Au cours de sa formation initiale, l'enseignant en formation est *sujet* de différentes institutions : institution mathématique universitaire, institution didactique universitaire, institution pédagogique universitaire et institution scolaire, celle de la pratique de l'enseignement. Chacune de ces institutions possède sa propre culture qui véhicule des normes, des valeurs, des pratiques sociales de références spécifiques, des manières de voir, de dire et de faire le travail de l'enseignant (Saussez, 2005). En étant assujetti à ces différentes institutions l'enseignant en formation est appelé à adopter différentes postures épistémologiques (DeBlois et Squalli, 2002; Squalli, 2010) selon l'institution de référence de l'activité de formation dans laquelle il est enrôlé. C'est ainsi que dans les cours de didactique des

mathématiques, l'enseignant en formation mobilise des savoirs didactiques pour, par exemple analyser les erreurs des élèves, ou faire une analyse a priori des raisonnements que les élèves pourraient potentiellement produire en réponse à une tâche mathématique donnée. Comme stagiaire dans une classe, l'enseignant en formation joue le rôle d'un enseignant, avec une grande préoccupation pour la gestion de la classe et pour le pôle enseignement (McKinnon, 1987, dans DeBlois et Squalli, 2002). Comme étudiant universitaire en mathématiques, l'enseignant en formation a tendance à voir les mathématiques comme une discipline axiomatisée, qui s'enseigne de manière magistrale, en présentant les objets du savoir mathématique de manière formelle. C'est dans ce sens que nous parlons de l'enseignant en formation comme un complexe d'assujettissements institutionnels, expression que nous empruntons à Chevallard (1986). Nous dirons alors que l'enseignant en formation adopte les postures de mathématicien (EfM), de l'enseignant (EfE) et finalement, celle du didacticien-pédagogue[2] (EfDP)[3].

Dans cette modélisation, l'enseignant en formation est vu comme une entité multiple : EfM, EfDP et EfE. Pour les besoins de la conceptualisation, considérons que ces trois entités soient distinctes.

Contribution de la formation didactique à la formation des enseignants : notre postulat

Un enseignant en formation accorde de l'importance et de la signifiance à un dispositif de formation s'il a la perception que ce dispositif contribue à son développement comme enseignant. Contrairement aux activités de la formation pratique, les dispositifs de formation en didactique, en pédagogie et en mathématiques ne sont pas perçus *de facto* comme signifiants par les enseignants en formation. Un travail d'explicitation et de négociation de sens (Wenger, 1998) doit être fait par le formateur pour les rendre signifiants aux yeux des enseignants en formation.

En lien avec ce postulat, et en reprenant le modèle théorique présenté précédemment, un dispositif de formation est potentiellement signifiant quand il sollicite l'enseignant en formation dans des activités d'interactions de connaissances entre les trois entités enseignant en formation-mathématicien, enseignant en formation-didacticien-pédagogue et enseignant en formation-enseignant. Ces activités nécessitent l'engagement actif de chacune des entités, avec leurs compétences complémentaires poursuivant des intérêts communs.

2. Bien que les institutions de didactique et de pédagogie projettent des formes culturelles différentes sur l'enseignant en formation, nous ne les distinguons pas ici. Sans cela, nous aurions à faire des distinctions entre ce qui relève du didactique et du pédagogique, compliquant ainsi les analyses sans gain pour notre propos.

3. Pour une explication de ces différentes postures, voir (Squalli, 2015).

Ce postulat a des conséquences sur la posture et le rôle du formateur. Celui-ci ne doit pas agir comme praticien expert prescripteur de la pratique, ni comme un théoricien déconnecté du contexte de la pratique. Son rôle est d'aider les trois entités à se constituer comme une communauté de pratique au sens de Wenger (1998). Rappelons-en les caractéristiques essentielles.

Une communauté de pratique est un groupe de professionnels dont les membres s'engagent régulièrement dans des activités de partage de connaissances et d'apprentissage à partir d'intérêts communs. L'appartenance à une communauté de pratique est le résultat d'un engagement des individus dans des actions négociées les uns avec les autres. Cet engagement mutuel est basé sur la complémentarité des compétences et sur la capacité des individus à communiquer efficacement leurs connaissances avec celles d'autrui. Il suppose aussi un rapport d'entraide entre les participants, nécessaire au partage de connaissances sur la pratique.

Une autre caractéristique d'une communauté de pratique est l'entreprise commune. Elle est le résultat d'un processus collectif permanent de négociation qui reflète la complexité de la dynamique de l'engagement mutuel. La négociation des actions communes crée des relations de responsabilité mutuelle entre les personnes impliquées.

Enfin, la création d'un répertoire partagé est une autre caractéristique essentielle d'une communauté de pratique. Au fil du temps, la communauté crée des ressources qui forment le répertoire partagé. Elle a un capital initial qu'il convient de gérer pour élaborer progressivement une connaissance communautaire. Cette connaissance ne se réduit pas à la juxtaposition des connaissances individuelles; il y a mutualisation, innovation et production de nouvelles connaissances en utilisant les savoirs et compétences de chacun.

En cohérence avec notre postulat, la contribution du didacticien formateur au développement des compétences professionnelles de l'enseignant en formation est de proposer un milieu de formation favorisant l'émergence de ce type de communauté de pratique. La didactique des mathématiques est alors nécessaire à la formation à l'enseignement des mathématiques. Elle fournit un cadre de référence (des théories, des concepts et un langage, des outils d'analyse de sa propre activité et celle de ses élèves, potentiels ou réels) qui permet à l'enseignant en formation enseignant, de problématiser des questions liées à la pratique d'enseignement, de produire et d'échanger des savoirs professionnels (savoirs pratiques, savoirs *sur* ou *pour* la pratique, avec un discours raisonné sur cette pratique).

Dans la section qui suit, nous exploitons ce modèle dans l'analyse de quelques exemples de dispositifs de formation utilisés dans des cours de didactique des mathématiques.

Exemples de dispositifs de formation

Une activité de narration de recherche : le journal de bord en résolution de problèmes[4]

Dans ce travail, les étudiants doivent décrire leur propre activité de résolution de cinq problèmes sélectionnés du chapitre 10 du livre *L'esprit mathématique* (Mason et al., 1994)[5], en laissant des traces en lien avec leurs processus de résolution. Ces traces doivent comporter des remarques de nature cognitive, métacognitive et affective. Dans l'introduction, l'enseignant en formation doit présenter ses propres conceptions, attitudes, souvenirs, etc. à l'égard des mathématiques. Dans la conclusion, il doit analyser l'effet qu'a eu ce travail sur son rapport personnel aux mathématiques, ainsi qu'une réflexion sur le processus de résolution de problèmes. L'évaluation du journal de bord porte sur la qualité de la narration de recherche, non sur la justesse des raisonnements et des solutions aux problèmes.

Pour analyser la signifiance de ce dispositif pour la formation de l'enseignant en formation et en cohérence avec notre postulat, le discours réflexif est considéré comme un dialogue entre les postures épistémologiques qui se manifestent (EfDP, EFfM et EfE). Il s'agit alors de reconstruire ce discours en termes d'interactions, en mettant en évidence les connaissances en acte et les significations associées chez les différents locuteurs.

Bien que les critères d'évaluation ne prennent pas en compte la justesse ou la qualité des démonstrations, mais uniquement la qualité de la narration, il arrive que le journal de bord de certains étudiants ne contienne que des démonstrations! Nous interprétons ce résultat de la manière suivante. Le discours réflexif est produit presque uniquement par l'enseignant en formation-mathématicien. On peut y voir une manifestation d'une forme culturelle de l'institution mathématique universitaire : le mathématicien n'a l'habitude de rendre publiques que ses démonstrations abouties, et non son activité intime de recherche, surtout lorsque celle-ci n'aboutit pas à une solution mathématiquement acceptable. Ce dispositif n'est donc pas signifiant pour ces enseignants en formation. Il peut l'être pour d'autres. Voici des exemples :

En identifiant les postures épistémologiques à travers lesquels l'enseignant en formation élabore ses réflexions, nous pouvons reconstruire le dialogue intérieur en termes d'interactions entre ces

4. Le journal de bord en résolution de problème est un exemple de telles activités. Il est inspiré d'une activité conçue par Richard Pallascio qui l'exploitait dans un cours de didactique des mathématiques dans le programme Baccalauréat en enseignement au préscolaire et au primaire (BEPP à l'UQAM).

5. Cet ouvrage est destiné au grand public, il vise à démystifier le processus de résolution de problèmes mathématiques. Utilisant une démarche phénoménologique, l'ouvrage invite le lecteur à vivre des expériences de résolution de problèmes sélectionnées guidées par les conseils des auteurs. Le chapitre 10 propose une longue liste de problèmes mathématiques de type problèmes ouverts dans le sens de Arsac *et al.* (1991).

différentes postures. Nous reprenons cet extrait en explicitant, devant les pronoms personnels et possessifs, la posture épistémologique dont il est question.

> Dans ce travail, [j', EfDP] ai observé, [j', EfDP] ai analysé et [j', EfDP] ai réfléchi sur [mes, EfM] mécanismes cognitifs dans le but de comprendre comment s'articule [mon, EfM] raisonnement logique. De cette manière, [je, EfE] serai mieux outillée pour détecter et comprendre les méthodes de résolution de problèmes utilisées par [mes, EfE] élèves et, par conséquent, [je, EfE] pourrai les accompagner de manière plus efficace dans la construction de leurs apprentissages.

Les compétences analytiques de l'enseignant-didacticien-pédagogue permettent à l'enseignant-mathématicien de comprendre « ses mécanismes cognitifs » mobilisés dans la résolution de problèmes. L'enseignant-enseignant compte exploiter cette compréhension dans son enseignement pour « accompagner » la construction des apprentissages de ses élèves de manière plus efficace. Bien que l'activité mathématique de l'enseignant-mathématicien ait été le point de départ des interactions, les préoccupations de l'enseignant en formation sont d'abord et avant tout de faire progresser l'enseignement. L'enseignant-didacticien-pédagogue a joué un rôle important dans l'émergence de connaissances en actes sur l'activité mathématique de l'enseignant-mathématicien, mais c'est l'enseignant-enseignant qui se charge de transposer ces connaissances sur le plan de sa pratique d'enseignement. Tout se passe comme si, pour l'enseignant en formation-enseignant, la valeur pratique d'une connaissance de l'enseignant en formation-didacticien-pédagogue est renforcée quand celle-ci est validée par une expérience significative de l'enseignant-mathématicien et qu'une interaction est engagée entre ces trois entités à propos du sens de cette connaissance. Voici un commentaire réflexif d'un enseignant en formation qui se prête aussi à une telle interprétation.

> L'activité proposée m'a fait remarquer un autre point que mes élèves peuvent vivre dans une situation de résolution de problème. Pour ma part, cette activité s'est déroulée sur une période de quelques jours donc je faisais une première tentative de résolution et j'y revenais un peu plus tard. Pour certains problèmes, le déclic *Ah! Ah!* s'est fait après plusieurs essais et erreurs et quelques jours de réflexion. Toujours en faisant le parallèle avec mes élèves, j'ai réalisé que mes élèves n'ont peut-être pas cette chance de prendre le temps de réfléchir. Bien souvent, ils n'ont qu'une seule période pour résoudre les problèmes. Donc, j'ai réalisé que le temps alloué aux élèves peut être un élément à considérer dans la réussite ou l'échec de la résolution de problème.

Notre analyse de cet extrait en termes d'interprétation du discours réflexif comme des interactions entre les trois postures épistémologiques de l'enseignant en formation est la suivante :

L'enseignant en formation-mathématicien a vécu une expérience de résolution de problèmes sous le regard analytique de l'enseignant en formation-didacticien-pédagogue. Celui-ci fait remarquer que l'activité de résolution de problèmes demande du temps ; pour certains problèmes, l'idée de la réso-

lution peut jaillir après plusieurs tentatives infructueuses de résolution. Cette connaissance-en-acte provoque une prise de conscience chez l'enseignant en formation-enseignant : ses élèves ne disposent pas de suffisamment de temps dans des activités de résolution de problèmes pour qu'ils aient la chance de réfléchir, ce qui peut nuire à leur réussite dans la résolution de certains problèmes. Cette connaissance en acte, explicitée par l'enseignant en formation-didacticien-pédagogue peut s'avérer une connaissance fausse ou valide dans certaines conditions. Il n'en demeure pas moins qu'elle soit robuste, car elle possède un référent expérientiel (apporté par l'enseignant en formation-mathématicien), une justification épistémique (apportée par l'enseignant en formation-didacticien-pédagogue) et une solution à un problème de pratique (conviction de l'enseignant en formation-enseignant). Si l'on ne tient pas compte de la valeur des connaissances construites, cette action est une réussite du point de vue du développement des compétences professionnelles de l'enseignant en formation.

Les jeux de rôles

C'est sans doute l'approche qui concrétise de manière explicite notre postulat. Le «jeu de rôles» est la mise en scène d'une situation-problème didactique par des enseignants en formation, jouant le rôle d'enseignants pour certains, et celui d'élèves pour d'autres. La préparation au jeu de rôles exige aux enseignants en formation de mobiliser leurs connaissances didactiques. Cette activité les pousse donc de manière explicite à adopter les trois postures épistémologiques et les mettre en interaction. La situation suivante présentée par Lajoie et ses collaborateurs (2012) illustre cette approche. Il s'agit d'une situation exploitée dans le cours de didactique de l'arithmétique dans le programme du BEPP de l'UQAM.

> Dans votre classe de deuxième cycle, un de vos élèves explique que « 1⁄4 » se dit « un tiers », car il s'agit de « la moitié de la moitié ».
>
> En analysant le raisonnement possible de l'élève, préparez-vous à interagir comme enseignant et comme élève. Pour ce faire, inspirez-vous des articles suggérés [préalablement lus à la maison] en relation avec l'apprentissage des fractions, référez- vous au travail fait en classe sur les erreurs liées aux fractions, et utilisez le matériel didactique de votre choix.
>
> (Lajoie et al., 2012, p. 52)

Selon ces auteurs, cette activité offre à la fois une formation théorique et une formation pratique. Après un travail de préparation, les enseignants en formation réalisent effectivement le jeu de rôles d'une durée de 5 à10 minutes. Lors de ce jeu de rôles l'enseignant en formation jouant l'enseignant expérimente ce qui a été préparé dans son équipe, mais doit également s'adapter à ce qui vient de l'enseignant en formation jouant le rôle d'élève. Après ce jeu une discussion est entamée entre les différents acteurs sur les expériences vécues lors du jeu ainsi que les enseignements à tirer sur le plan de la pratique d'enseignement ou sur le plan de la réflexion didactique. En cohérence avec notre postulat, la pertinence de ce dispositif de formation ne tient pas au simple fait que les enseignants en

formation jouent différents rôles, autrement dit, adoptent successivement les trois postures épistémologiques. Il est important que ce dispositif amène ces trois postures à s'engager dans des interactions de connaissances. Dans ce sens, les réflexions et les discussions lors du travail de préparation et de retour réflexif sur les jeux de rôles nous semblent importantes.

Conclusion

Il existe une diversité de dispositifs de formation utilisés dans les cours de didactique et qui sont potentiellement signifiants dans le sens de notre postulat. L'articulation des formations en mathématiques, didactiques, pédagogique et pratique est une problématique de la formation et un vœu des concepteurs de la formation. Plusieurs programmes et formateurs essaient de favoriser cette articulation au moyen de différents types de dispositifs : cours d'intégration, mémoires professionnels de fin d'études, connections entre des cours de didactiques et de pédagogie et la formation pratique, par exemple : réalisation d'un travail commun dans les cours de didactique et de pédagogie et expérimentation en stage, puis retour réflexifs dans les cours de didactique et de pédagogie, approche par situation problème professionnelle (on soumet un problème professionnel réel aux enseignants en formation ; par exemple, l'analyse du potentiel d'une ressource pédagogique produite par un enseignant réel, tentative de son intégration dans la pratique d'enseignement en stage, retour réflexif sur les expérimentations en stage, et enfin, échanges avec l'enseignant concepteur). Si ces dispositifs peuvent être potentiellement signifiants, leurs effectivités en situation de formation exigent du formateur à favoriser l'émergence d'une communauté de pratique auprès du trio formé par les trois postures épistémologiques.

Dans les termes de notre modélisation de l'enseignant en formation, la négociation de sens, nécessaire à la construction de connaissances professionnelles négociées entre l'enseignant-mathématicien et l'enseignant-enseignant, dépend inévitablement des habiletés analytiques de l'enseignant-didacticien-pédagogue.

Un des objectifs importants de la contribution de la didactique des mathématiques au perfectionnement des compétences professionnelles des enseignants de mathématiques est de leur permettre d'enrichir, d'actualiser leur cadre de référence à propos d'un contenu mathématique à enseigner. Ce cadre comporte un ensemble de connaissances sur différents aspects liés à ces contenus mathématiques (disciplinaire, épistémologique, curriculaire, l'élève qui doit apprendre cet objet, l'enseignant qui l'enseigne, différentes ressources pédagogiques en lien avec l'enseignement et l'apprentissage de cet objet, etc.). Cependant, pour créer des conditions favorables à la construction de connaissances professionnelles, notre postulat est qu'il est nécessaire de proposer des activités de formation qui permettent à l'enseignant-mathématicien, à l'enseignant-enseignant et à l'enseignant-didacticien-pédagogue de s'engager mutuellement.

Cet engagement mobilise leurs compétences complémentaires. Il permet la construction de connaissances et la négociation du sens de ces connaissances, chaque instance raisonnant à partir de sa propre épistémologie. Le jeu de rôle et le journal de bord en résolution de problèmes nous semblent être deux exemples d'une activité organisée dans l'institution didactique universitaire au profit de la pratique et du développement de cette pratique. La situation du journal de bord en résolution de problèmes analysées a permis, pour la majorité des enseignants en formation de notre échantillon, d'impliquer l'enseignant-mathématicien et l'enseignant-enseignant dans une interaction féconde avec l'enseignant-didacticien-pédagogue.

Bibliographie

Arsac, G., Germain, G., et Mante, M. (1991). *Problème ouvert et situation problème* (Première édition 1988). IREM de Lyon.

Bednarz, N. (2007). Ancrage de la didactique des mathématiques au Québec : à la recherche de sens et de cohérence. Dans Marchand, P. (ed) *Actes du colloque GDM-2007, La didactique des mathématiques au Québec :Genèse et perspectives*, Université du Québec à Rimouski, 4-8 juin 2007.

Chevallard, Y. (1986). Le Concept de Rapport au Savoir. Rapport Personnel, Rapport Institutionel, Rapport Officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*, IREM d'Aix de Marseille.

Conseil supérieur de l'éducation (2006a). L'accès à la recherche en enseignement et son utilisation dans la pratique : Résultats d'une enquête auprès des enseignants et des enseignantes du préscolaire, du primaire et du secondaire, Conseil supérieur de l'éducation.

Conseil supérieur de l'éducation (2006b). Le dialogue entre la recherche et la Pratique en éducation : une clé pour la réussite. Rapport annuel sur l'état de l'éducation. 2004-2005. Ste-Foy, Conseil supérieur de l'éducation.

DeBlois, L. et Squalli, H. (2002). Implications de l'analyse de productions d'élèves dans la formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(2), 212-237.

Lajoie, C.; Maheux, J. F.; Marchand, P. ; Adihou, A. et Bisson, C. (2012). Actes du colloque du groupe de didactique des mathématiques du Québec. La recherche sur la résolution de problèmes en mathématiques: au-delà d'une compétence, au-delà des constats, p.48-56. Québec, Université Laval.

Martinand, J.-L. (1994). La didactique des sciences et de la technologie et la formation des enseignants. ASTER. N° 19. *La didactique des sciences en Europe*.

Mason, J., Burton, L. et Stancey, K. (1994). *L'esprit mathématique*. Mont-Royal, Québec, Modulo Éditeur.

McKinnon, A.M. (1987). Detecting reflection in-action among preservice elementary sciences teachers. *Teaching and Teacher Education, 3*. 135-145.

Saussez, F. (2005). Entre disciplines scolaires et disciplines universitaires, l'affiliation des enseignants de l'enseignement secondaire supérieur en devenir à des cultures disciplinaires. Texte présenté dans le cadre des rencontres du REF.

Squalli, H. (2015). Impliquer les professionnels dans leur formation : un journal de bord en résolution de problèmes mathématiques. In. (Maulini,O.; Desjardins, J.; Etienne, R.; Léopold Paquay, P.-G., dir.). *La formation continue des enseignants : quelles évolutions, sous ou pour quel contrôle de la profession ? chapitre 10.* DeBoeck

Squalli, H. (2010). Quelle articulation entre formation mathématique, formation didactique et formation pratique dans la formation des maîtres ? Dans J. Proulx et L. Gattuso (Dir.). *Formation des enseignants en mathématiques: tendances et perspectives actuelles* (pp. 153-158). Sherbrooke, Québec : Éditions du CRP.

Wenger, E. (1998) *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity*. New York, Cambridge University Press.

Titre: Developpement professionnel et travail collaboratif Pratiques, Stratégies et dispositifs de formation bilan des Groupes de travail 1 et 2

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 222 - 228

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Bilan des Groupes de travail nº 1 et nº 2

Developpement professionnel et travail collaboratif Pratiques, Stratégies et dispositifs de formation

Responsables
POUR LE GT1 « Développement professionnel et travail collaboratif »
CORRIVEAU[1] Claudia – BATTEAU [2] Valérie - TOURE[3] Krouele
TROUCHE Luc
POUR LE GT2 « pratiques, stratégies et dispositifs de formation »
COULANGE[4] Lalina – HASPEKIAN[5] Mariam - SINALY[6] Dissa
SQUALLI[7] Hassane

Introduction

Le thème du développement professionnel abordé sous l'angle du travail collaboratif (GT1) est assez récent au colloque Espace Mathématique Francophone (EMF)[8]. Le thème du travail collaboratif ne peut pour autant être qualifié de nouveau – en tout cas si l'on considère certaines de ses visées liées au développement professionnel associant des collectifs d'enseignant-e-s. Ceci est particulièrement vrai pour le cas des *Lesson study* originaire du Japon, mais aussi pour d'autres projets d'analyse de pratiques). Toutefois, les contextes visant à développer des communautés d'apprentissages professionnelles (DuFour, 2004), la reprise de contextes anciens (comme les Lesson Study) mais impliquant plus directement les chercheur-e-s (Batteau et Clivaz 2016) ou, *réciproquement, la reprise de contextes issus d'approches de recherche collaboratives* (Bednarz, 2013) avec des visées de développement professionnel apparaissent comme des phénomènes plus récents, repositionnés au cœur de l'appel du GT1.

1. Université Laval, Québec, Canada, claudia.corriveau@fse.ulaval.ca

2. HEP Vaud, Suisse, valerie.batteau@hepl.ch

3. École Normale Supérieure d'Abidjan, Côte d'Ivoire, tk_krouele@yahoo.fr

4. LaB-E3D (EA 7441), Université de Bordeaux, France, lalina.coulange@u-bordeaux.fr

5. EDA (EA 4071), Université de Paris, France, mariam.haspekian@parisdescartes.fr

6. École Normale Supérieure (ENSup) de Bamako, Mali, dissasinaly@gmail.com

7. Université de Sherbrooke, Canada, hassane.squalli@usherbrooke.ca

8. Un projet spécial sur ce thème a été mis en place en 2018. Deux axes ont alors été mis en avant : les outils d'analyse pour caractériser les dispositifs de collaboration et les apports et limites du travail collaboratif (Mangiante, Marchand et Romo-Vazquez, 2018).

Le thème de la formation d'enseignants (GT2) apparait quant à lui dès les premiers colloques Espaces Mathématiques Francophone. Les contextes variés (de politiques éducatives, contraintes institutionnelles, publics d'enseignants/ d'élèves, systèmes de formation, etc.) et parfois « mouvants » (changements de l'éco-système socio-éducatif, contexte récent de pandémie) conditionnent tant les pratiques enseignantes que la formation d'enseignants. Dans le cadre de ce « nouveau » GT2, nous appelions précisément à rendre plus visibles ces éléments de contextes et leurs effets potentiels sur les pratiques, stratégies et dispositifs de formation (Robert A., Penninckx J. et Lattuati M., 2012) voire sur les recherches conduites en didactique sur la formation d'enseignants (Robert et Vivier, 2013).

Bien que les thématiques des GT 1 et 2 aient fait l'objet de problématisations indépendantes, des proximités pouvaient sans doute d'emblée être envisagées entre ces thématiques. En effet, le développement professionnel permis par le travail collaboratif ouvre potentiellement sur une formation faisant la « part belle » à la collaboration entre enseignantss ou entre enseignants et chercheurs. Réciproquement, des pratiques, stratégies et dispositifs de formation qui envisagent de partir des pratiques enseignantes ou de les prendre en compte ouvrent potentiellement sur des démarches plus collaboratives en formation. L'existence de deux groupes de travail se justifiait toutefois au regard des dimensions variées que recouvraient la problématisation de chacune des thématiques initiales, d'ailleurs rendues visibles dans les appels à contribution associés initialement à ces deux GT. Ainsi, certains des sous-axes de questionnement mis en avant dans les deux appels à contributions, correspondent à des focales spécifiques de l'un ou de l'autre GT : par exemple, sur les apports, rôles et responsabilités des personnes impliquées dans un travail collaboratif (fusse-t-il conduit dans le cadre d'une formation) ou sur les « terrains » ou contextes à considérer pour les pratiques enseignantes et la formation. Toutefois, d'autres questionnements pouvaient davantage faire penser à des rapprochements possibles : par exemple, sur le rôle des ressources dans et pour l'enseignement, la formation ou le travail collaboratif ou sur la question des ancrages possibles en termes d'approches théoriques ou méthodologiques en didactique des mathématiques.

Au final, les communications retenues dans chacun des GT présentaient quant à elles des proximités apparentes : s'agissant de travail collaboratif conduit principalement dans des contextes de la formation (initiale, continue ou de formateurs) (contributions initialement proposées pour le GT1) et de pratiques, de stratégies ou de dispositifs de formation (initiale) d'enseignants visant à partir des pratiques ou des connaissances de futurs enseignants (contributions initialement proposées pour le GT2). Elles invitaient en cela à « faire dialoguer » les deux entrées initialement retenues correspondant aux deux GT.

Les séances du groupe de travail « 1 & 2 »

Le GT1 « Développement professionnel et travail collaboratif » et le GT2 « Pratiques, stratégies et dispositifs de formation » ont alors fait l'objet d'un regroupement pendant le colloque afin de permettre des rapprochements intéressants pour les communicant-e-s et les participant-e-s. Dans le

cadre de ce nouveau « GT1-GT2 », les sessions de travail ont permis à un groupe de 14 participant-e-s de travailler ensemble. Les participant-e-s venaient de cinq pays différents (4 du Bénin, 4 du Québec, 3 de France, 1 du Sénégal et 1 de Suisse) et le groupe se démarquait par une présence importante de jeunes enseignant-e-s (4 venant de 4 pays différents). Les sessions ont donné lieu aux présentations de sept communications (4 relevant initialement du GT 1 – 3 relevant du GT 2), détaillées dans le Tableau 1, suivies de temps d'échanges entre participant-e-s.

Les œuvres coopératives, un dispositif de formation engagé dans la préservation des patrimoines, Salone, Jean-Jacques (session 1) *Une didactique des mathématiques clinique*, Benoit, David (session 1) *Propos de conseillers pédagogiques sur le fruit d'une collaboration avec des chercheurs : Histoire d'un tableau sur la résolution de problèmes en classe*, Maheux, Jean-François, Saboya, Mireille (session 3) *Une entrée par la demande pour un travail collaboratif entre un didacticien des mathématiques et des personnes enseignantes autour de l'enseignement-apprentissage des mathématiques à l'école primaire*, Martin Vincent et Benoit, David (session 3)	*Usage de ressources pour enseigner les mathématiques dans une formation à l'envers*, Coulange, Lalina, Train, Grégory (session 2) *Didactique des mathématiques et formation des enseignants : un rôle à définir entre prescription de la pratique et prescription de la théorie*, Squalli, Hassane (session 2) *Le traitement de l'erreur dans les pratiques enseignantes dans une formation à l'envers*, Coulange, Lalina, Train, Grégory (session 2)

Tableau 1 – Répartition des communications des GT1 et des GT2

Comme le fait apparaître le tableau, la répartition des communications a été envisagée avec une alternance de sessions dédiées au travail du GT1 (première et troisième sessions) et sessions dédiées au travail du GT2 (deuxième et troisième sessions). Des moments de travail plus collaboratifs ont parfois été aménagés de manière à permettre aux participants (notamment les « jeunes ») de réagir aux contenus et de s'exprimer.

Bilan et perspectives du Groupe de travail 1 et 2

Pour comprendre les pratiques, le développement professionnel, le travail collaboratif, comme les stratégies de formation, partir des pratiques enseignantes et de leur complexité (Coulange et Train), de l'activité de la personne enseignante en situation de travail (Benoît) apparaît comme une nécessité commune pointée par plusieurs des contributions du « GT 1 et 2 ». C'est, dès lors, le « sujet-personne », enseignant ou futur enseignant, qui gagne en épaisseur et ce, dans des directions multiples : par exemple, en termes de postures (enseignant, mathématicien ou didacticien-pédagogue) adoptées en formation initiale (Squalli) ou en intégrant des aspects originaux liés au patrimoine culturel (à la fois linguistique et mathématique) dans une perspective citoyenne de la formation aux mathématiques ou à l'enseignement des mathématiques (Salone). Les contributions du « GT 1 et 2 » donnent à voir des stratégies de formation qui visent à intégrer de manière explicite cette épaisseur du « sujet-personne ». Ces stratégies convoquent, pour cela, des approches théoriques et méthodologiques aux contours variés : la clinique de l'activité (Benoît et Martin), des formations « à l'envers » (Coulange et Train). Elles recouvrent a minima l'ouverture d'espaces d'expression, importants pour le (et même les) sujet-personne(s) en formation, par exemple, par le biais d'un journal de bord ou de jeux de rôle (Squalli) et a maxima une place accordée au travail collaboratif pouvant aller jusqu'à la co-construc-

tion de ressources inédites pour l'enseignement et la formation (Maheux et Saboya).Les dispositifs de formation analysés dans les recherches présentées accordent tous une importance aux traces d'activités des enseignants et des élèves. Ces traces d'activités sont, elles-mêmes objets d'analyse ou d'étude et prennent des formes variées : ce sont, par exemple, des analyses réflexives d'enseignants conduites sur leur(s) activité(s) en situation de travail (Benoit, Benoit & Martin), des analyses d'erreurs d'élèves, ou des analyses d'énoncés d'exercices par les enseignants (Coulange et Train).

La place des ressources pour l'enseignement et la formation est d'ailleurs importante dans ces recherches. Ces ressources se caractérisent par la mise à contribution d'acteurs potentiellement variés (enseignants, formateurs, chercheurs et même *fundi*…), que ce soit dans leur (co-)construction comme dans leurs usages. Cela confère à ces ressources des aspects évolutifs ou dynamiques (que ce soit dans leurs usages ou dans la (co-)construction de ces ressources) pouvant inciter les chercheurs à considérer de près leur « trajectoire » comme devenant à son tour une trace possible d'activités d'enseignants et de formateurs (Maheux et Saboya).Cette attention aux traces de l'activité et ce caractère non figé a priori des ressources vont de pair avec l'ouverture faite aux différentes dimensions de l'activité enseignante qui peuvent être considérées. C'est un peu une forme d'ouverture « à l'autre » (enseignant, formateur, chercheur) qui est en permanence recherchée : que ce soit en termes de connaissances et de savoirs d'origines plurielles (Squalli), en termes de « culture » ou de patrimoine culturel et linguistique (Salone) ou encore en lien avec des dimensions plus subjectives liées à l'histoire du « sujet-personne » enseignant (Benoit).

En guise de perspectives, l'une d'elles a tout particulièrement émergé au fil des échanges : celle d'apports réciproques entre le développement professionnel de l'enseignant et le développement professionnel du chercheur en didactique des mathématiques. En effet, la visée initiale, commune aux GT 1 et 2, liée au développement professionnel de l'enseignant, que ce soit par le biais de la formation (et dès lors des pratiques, des stratégies et des dispositifs de formation) et/ou du travail collaboratif (entre enseignants, formateurs et chercheurs) nous a semblé en recouvrir une autre, devenant de plus en plus explicite au fur et à mesure des échanges. Les recherches conduites sur et avec cette visée contribuent potentiellement à enrichir le point de vue du chercheur en didactique des mathématiques sur le « sujet-personne-enseignant » et ses différentes facettes (parfois singulières) à même de contribuer à façonner son activité, ses pratiques… Pourquoi alors ne pas considérer le chercheur comme un « sujet-personne-chercheur » et ce qui relève de son développement professionnel nourri ou enrichi, entre autres, par les recherches qu'il conduit sur les pratiques enseignantes, le travail collaboratif et/ou la formation ? Ceci pourrait fort bien faire l'objet d'un nouveau Groupe de Travail à venir lors d'un prochain colloque EMF.

Références

Batteau V., & Clivaz, S. (2016) Le dispositif de lesson study: travail autour d'une leçon de numération. *Grand N*, 98, 27-48.

Bednarz, N. (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement*. Paris : L'Harmattan.

Dufour R. (2004). What Is a "Professional Learning Community"? *Educational Leadership, 61*, 6-11.

Robert, A., Penninckx, J. et Lattuati, M. (2012). *Une caméra au fond de la classe de mathématiques, (se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.

Robert, A. & Vivier, L. (2013). Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques : des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation de formateurs – quelle transposition ?, *Éducation et didactique*, vol. 7, n° 2, p. 115-144.

Annexe

Liste des textes du GT1

BENOIT D.

Une didactique des mathématiques clinique.

MAHEUX J.-F. SABOYA M., HANIN V., BEDNARZ N., LAJOIE C.

Propos de conseillers pédagogiques sur le fruit d'une collaboration avec des chercheurs : Histoire d'un tableau sur la résolution de problèmes en classe.

MARTIN V., BENOIT D.

Une entrée par la demande pour un travail collaboratif entre un didacticien des mathématiques et des personnes enseignantes autour de l'enseignement-apprentissage des mathématiques à l'école primaire

SALONE J.-J.

Les œuvres coopératives, un dispositif de formation engagé dans la préservation des patrimoines

Liste des textes du GT2

COULANGE L., TRAIN G.

Le traitement de l'erreur dans les pratiques enseignantes dans une formation à l'envers.

COULANGE L., TRAIN G.

Usage de ressources pour enseigner les mathématiques dans une formation à l'envers.

Une didactique des mathématiques clinique.

SQUALLI H.

Quelle relation entre pratique de formation en didactique des mathématiques et formation des enseignants ?

Titre: Raisonnements des élèves dans la résolution de problèmes algébriques à la transition primaire/collège au Maroc

Auteurs: ABOUHANIFA Saïd, SQUALLI Hassane, SEDDOUG Belkacem, HADDAD Sabah, ANASSAY Saadia, ENNASSIRI Brahim et MESOUAKI Hajar

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 229 - 244

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Raisonnements des élèves dans la résolution de problèmes algébriques à la transition primaire/ collège au Maroc

ABOUHANIFA[1] Saïd – SQUALLI[2] Hassane – SEDDOUG[3] Belkacem – HADDAD[4] Sabah – ANASSAY Saadia – ENNASSIRI[5] Brahim – MESOUAKI[6] Hajar

Résumé – Cette étude vise la caractérisation des raisonnements des élèves selon leur degré d'analycité et la nature du registre de représentation sémiotique. Basé sur un cadre d'analyse qui s'est développé dans le cadre du projet international. Les résultats montrent qu'il y a des apprentissages à explorer chez les élèves (âge 11 à 12 ans) dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre, qui comportent des traces d'un raisonnement algébrique.

Mots-clefs : Pensée algébrique, raisonnement algébrique, analycité, problèmes de comparaison, registre de représentation sémiotique.

Abstract – This study aims at characterizing students' reasoning according to their degree of analycity and the nature of the register of semiotic representation. It is based on an analytical framework that was developed within the framework of the international project. The results show that there are learnings to be explored in students (age 11 to 12) in the transition from arithmetic to algebra, which include traces of algebraic reasoning.

Keywords: Algebraic thinking, algebraic reasoning, analycity, comparison problems, semiotic representation register.

1. CRMEF CS, Maroc, saidabouhanifa@yahoo.fr

2. Université de Sherbrooke, Canada, hassane.squalli@usherbrooke.ca

3. CRMEF RS, Maroc, bseddoug@gmail.com

4. CRMEF RS, Maroc, sabahhaddad24@gmail.com

5. FST Université Hassan1, Maroc, ennassiri.prof.math@gmail.com

6. FST Université Hassan1, Maroc, mesouakihajar@gmail.com

Introduction

Cette recherche s'inscrit dans le cadre d'un projet du programme APPRENDRE mis en œuvre par l'Agence universitaire de la Francophonie (AUF) avec l'appui de l'Agence Française de Développement (AFD). Thématique : « Accompagner le développement du cycle fondamental : l'enjeu de la transition école / collège ». (Appel à projet d'avril 2019). Ce projet international est réalisé entre le Canada, Maroc, Bénin et Tunisie, est intitulé : « Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre ».

Au Bénin, Maroc et Tunisie l'enseignement fondamental, consiste en 9 années de scolarité obligatoire (de 6 à 15 ans) et est reparti sur deux cycles pédagogiques, soit un premier cycle de 6 ans (école primaire) et un deuxième cycle de 3 ans (collège). En mathématiques, la transition de l'école primaire au collège est marquée essentiellement par la transition de l'enseignement de l'arithmétique à celui de l'algèbre. En effet, l'arithmétique occupe la partie prépondérante du temps alloué à l'enseignement des mathématiques au primaire, alors que l'enseignement de l'algèbre commence d'une manière explicite au niveau de la 7ème année de l'enseignement fondamental, soit la première année du collège. Cette première année du collège est considérée comme une année charnière au cours de laquelle l'élève devrait passer d'un « mode de pensé arithmétique » à un « mode de pensé algébrique » (M.E.N., 1991).

Comme dans la plupart des pays du monde, l'algèbre occupe une place centrale dans les mathématiques du secondaire. Elle constitue en quelque sorte un filtre pour l'accès à des études post-secondaires, puisque des connaissances en algèbre s'avèrent indispensables pour poursuivre des études dans plusieurs disciplines. Cependant, l'algèbre enseignée est réputée être, depuis longtemps, un sujet scolaire aride et difficile et les élèves éprouvent de grandes difficultés lors de son apprentissage (Rosnick et Clément, 1980; Küchemann, 1981; Wagner, Rachlin & Jensen, 1984; Booth, 1984). Ce fait devient encore plus évident lorsqu'il s'agit d'enseigner l'algèbre à tous les élèves.

Dans cette communication, on s'intéresse au cas du Maroc dans le cadre de ce projet, les orientations pédagogiques (programmes) du secondaire collégial (2009) envisagent la voie classique des équations dans l'introduction de l'algèbre. Deux facettes sont préconisées à cette entrée à l'algèbre dans les premiers apprentissages du secondaire. La première facette s'occupe des expressions algébriques et la deuxième se consacre à la résolution des équations de premier degré à une inconnue. Cependant, l'apprentissage du calcul algébrique occupe une place importante dans l'enseignement de l'algèbre, il est mobilisé dans des activités de mathématisation de diverses situations par des expressions algébriques ainsi que dans des activités de résolution de problèmes se ramenant à la résolution d'équations algébriques du premier degré à une inconnue. Pour chercher à dégager des éclairages sur l'activité de l'élève, la nature des objets avec lesquels il résout les problèmes de comparaison, les méthodes et les raisonnements qu'il met en œuvre de même que le caractère algébrique de ses raisonnements. Dans la perspective de comprendre comment le programme de mathéma-

tiques au Maroc prépare les élèves au développement de la pensée algébrique, nous avons effectué une étude qui porte sur les stratégies de résolution de problèmes algébriques de type comparaison chez les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre (Marchand et Bednarz, 1999, 2000). Nous cherchons en particulier à répondre aux questions suivantes : Qu'en est-il des raisonnements des élèves de la 6ème primaire qui n'ont pas encore reçu un enseignement de l'algèbre ? Quels sont les raisonnements utilisés par ces élèves ? Nous intéresserons aux prédispositions manifestées par ces élèves à produire des raisonnements algébriques, de les caractériser en distinguant le raisonnement algébrique du raisonnement arithmétique dans la résolution de problèmes se ramenant à la recherche de valeurs d'inconnues.

Degré d'analycité et nature du registre de représentation

Du raisonnement arithmétique au raisonnement algébrique

Les programmes de 6ème primaire et de 7ème (1er année du collège)

Au Maroc, l'algèbre est introduite comme une arithmétique généralisée ; la structure du programme du collège est basée sur l'extension des systèmes de nombres et l'établissement du calcul algébrique sur ces domaines de calcul dont la maîtrise par les élèves est l'un des objectifs essentiels du curriculum d'algèbre à ce niveau. L'enseignement de base repose sur une approche par compétences qui vise à développer chez l'élève la résolution de problèmes. Le programme au primaire ne fait pas référence explicitement à l'algèbre, mais il le positionne comme domaine relatif au nombre et calcul.

Les registres de représentation sémiotiques

Nous avons retenu trois types de registres au sens de Duval (1991, 1995) et de Hitt et Passero (2007) : le registre numérique, le registre algébrique conventionnel et le registre intermédiaire. Comme Hitt (2004) ainsi que Hitt et Passaro (2007), en plus de considérer les représentations sémiotiques institutionnalisées, nous nous intéressons aux mots et aux registres spontanés. À cette fin, il devient nécessaire d'étudier les contraintes du problème, mais aussi celles dont l'élève tient compte dans l'élaboration de sa résolution.

- Le registre de représentation est dit « numérique » quand les traces de la résolution de l'élève ne comportent que des nombres détermines et des opérations sur ces nombres.
- Le registre de représentation est dit « algébrique conventionnel » si l'élève recourt au langage algébrique littéral.
- Le registre de représentation est dit « intermédiaire » si l'élève recourt à un, ou à plusieurs, mode de représentation non purement numérique ou algébrique conventionnel. Par exemple, l'élève peut représenter une inconnue par un mot, par le dessin d'une ligne, ou par un carré vide. Il peut représenter les relations par un dessin, utiliser une table de va-

leurs numériques, etc.

Le raisonnement analytique : pont entre le raisonnement arithmétique et le raisonnement algébrique.

Pour illustrer quelques caractéristiques de la transition qui se manifeste entre l'algèbre et l'arithmétique dans ce contexte particulier de résolution de problème de comparaison, nous avons fait référence aux travaux de Marchand (1998) qui a étudié spécifiquement l'aspect analytique de l'introduction à l'algèbre. Aussi, nous avons fait état des travaux de Bednarz et Janvier (1996), qui ont étudié la résolution de problèmes sous l'angle de continuité et de discontinuité entre la résolution avec l'arithmétique et l'approche algébrique. Ainsi que le modèle épistémologique de référence construit et exploité dans ce projet, Najar et al, (2021), qui décrit les caractéristiques essentielles de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre dans le contexte de résolution de problèmes, afin de mieux faire percevoir les manifestations chez les élèves des diverses ruptures et complémentarités.

L'analyse des raisonnements des élèves mobilisés dans la résolution de problèmes de partage inéquitable porte sur deux dimensions : le degré d'analycité du raisonnement et la nature du registre de représentation (Squalli et al., 2020).

Raisonnements algébrique

Dans ce type de raisonnement algébrique (analytique), l'élève considère l'inconnue, la représente par un symbole, utilise cette représentation pour exprimer les relations entre les données connues et les autres inconnues du problème et opère sur ces représentations pour former l'équation et trouver les valeurs des inconnues.

Les raisonnements à tendance algébrique

Nous incluons dans cette catégorie trois classes de raisonnements, Squalli et al (2020) :

- La première regroupe les raisonnements hypothético-déductifs où l'élève affecte une valeur déterminée à une inconnue sachant qu'elle est fausse, fait comme si cette inconnue possédait cette valeur, opère sur les relations et génère les valeurs des autres inconnues. Il raisonne ensuite sur les relations et les valeurs produites pour trouver la valeur exacte de l'inconnue de départ. Les raisonnements de type fausse position sont un exemple de tels raisonnements. Dans ce type de raisonnement, le sujet fait comme si la valeur de l'inconnue était connue, mais au lieu d'opérer sur une représentation de cette inconnue, il opère sur une valeur fausse mais déterminée. Pour cette raison, nous considérons que ce type de raisonnement est à tendance analytique mais n'est pas analytique.

- La seconde classe regroupe les raisonnements où l'élève considère les inconnues momentanément comme des variables. Pour trouver les valeurs de ces variables qui respectent les conditions du problème, il n'opère pas sur elles, comme dans le cas d'un raisonnement analytique, mais sur leurs instanciations numériques.

- La troisième classe regroupe les raisonnements où l'élève considère l'inconnue, la représente explicitement, utilise cette représentation pour traduire les relations entre les inconnues et les connues mais n'opère pas sur ces représentations pour trouver les valeurs des inconnues. C'est pour cette dernière raison que le degré d'analyticité du raisonnement n'est pas jugé optimal.

Méthodologie

Nous chercherons particulièrement à étudier les stratégies adoptées par les élèves dans la réalisation des tâches qui leur sont proposées et à comprendre les difficultés et obstacles rencontrés. L'analyse des réponses des élèves permet de décrire les rapports personnels des élèves à l'algèbre et l'évolution de ces rapports dans la transition primaire/collège. Pour cela, un questionnaire de cinq problèmes de comparaison a été administré un échantillon de 685 élèves marocains de la 6e primaire et de la 1ere année secondaire collégial (grades 7 à 9). Les mêmes problèmes sont proposés aux élèves des deux niveaux scolaires. Le but est de voir s'il y a des évolutions chez les élèves lors du passage du primaire au collège. L'administration du questionnaire a commencé le 7 Mai 2021 et elle a pris fin le 14 Juin 2021.

Dans ce questionnaire (Annexe), le problème 1 est connecté, les problèmes 2, 3, 4 et 5 sont déconnectés. Selon la typologie de Bednarz et Janvier (1996), les 5 problèmes se présentent par ordre croissant de complexité. Nous distinguons deux types de problèmes : les problèmes connectés et les problèmes déconnectés. Un problème est dit « connecté » s'il est possible de trouver la valeur de l'inconnue en opérant uniquement sur des données et des relations connues. Un problème est dit déconnecté, s'il n'est pas connecté, c'est à dire que pour trouver la valeur de l'inconnue il est nécessaire d'opérer sur l'inconnue.

Dans le déroulement de l'enquête, nous avons demandé à chaque élève de résoudre les problèmes proposés, individuellement, en respectant les consignes suivantes :

- Le travail est individuel ;
- Le temps estimé pour répondre à ce questionnaire est de 50 minutes ;
- Nous n'avons pas interdit l'usage de la calculatrice ;
- Nous avons demandé aux élèves de ne pas effacer, rayer au besoin ;
- Si l'élève ne parvient pas à résoudre un problème, il doit nous expliquer la cause qui l'empêche de l'accomplir.

Afin de collecter plus d'indicateurs sur les différents raisonnements manifestés, les stratégies utilisées, nous avons demandé aux élèves de laisser les traces écrites dans la copie, de tous ce qu'ils pensent.

L'analyse effectuée s'inscrit dans la continuité des études accomplies par les équipes de recherche de l'OIPA : (Adihou, Squalli, Saboya, Tremblay, Lapointe, 2015) ; (Squalli, Larguier, Bronner, et Adihou, 2018) et Abouhanifa (2021). Elle vise la caractérisation des raisonnements réalisés par les élèves dans la résolution de problèmes de partage inégaux, voire contribuer à éclairer et enrichir le développement de la pensée algébrique.

Catégories de raisonnements et registres de représentations sémiotiques illustrées d'exemples

Problème 2

Le problème 2 est déconnecté dont la structure est formée de deux branches et une relation additive entre les inconnues.

Exemple 1 : Raisonnement algébrique dans le registre de représentation numérique

L'élève (figure 1) commence par soustraire 17 600 de la somme totale 181 000, il trouve 181 000-17 600= 163400 dhs et ensuite il divise le résultat trouvé 163400 par 2 et il trouve 81700. Il en déduit le prix de la voiture de Chaima 81700 dhs. Ensuite, par une erreur d'inattention, au lieu d'ajouter 81700 à 17600, il ajoute 31700 à 17600 pour trouver le prix de la voiture de Maria.

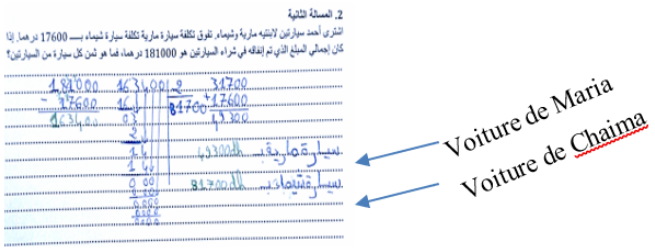


Figure 1 - Élève de 6e primaire

Dans ce raisonnement, l'inconnue principale, qui est le prix de la voiture de Chaima, n'est pas représentée explicitement ni l'équation mathématisant le problème. Donc, l'inconnue et l'équation sont muettes bien qu'elles soient objets de la pensée de l'élève. C'est un raisonnement algébrique alors que le registre de représentation est exclusivement numérique.

Exemple 2 : Raisonnement à tendance algébrique dans le registre de représentation numérique

Dans la résolution du problème 2 (figure 2), l'élève commence par diviser la somme totale du prix des deux voitures 181 000 par 2, il trouve 90500. Ensuite il divise par 2 l'écart entre le prix de la voiture de Marie et celui de Chaima 17600/2, il trouve 8800. Il en déduit le prix de la voiture de Maria 99300

dhs, en additionnant 90500 à 8800 et il déduit le prix de la voiture de Chaima 81700dhs, en soustrayant 8800 de 90500.

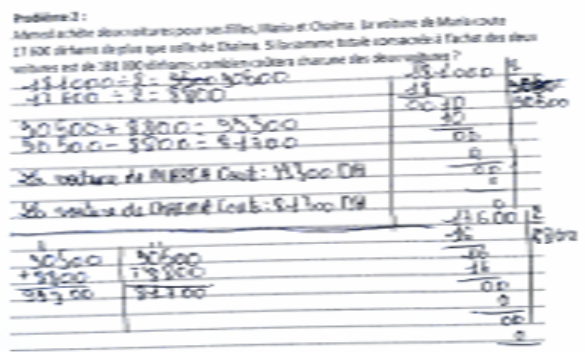


Figure 2 - Élève de 6e primaire

L'élève donne une valeur spécifique aux inconnues qu'il sait fausse. En se basant sur l'écart obtenu entre le prix de la voiture de Maria et celui de Chaima et le prix total des deux voitures, il ajuste en conséquence la valeur du nombre de départ en prenant en compte les relations entre les inconnues. Nous sommes donc dans le scénario des raisonnements à tendance algébrique et le registre et ici uniquement numérique. Nous voyons que l'élève maitrise bien l'équation mathématisant le problème bien qu'elle reste implicite. Les règles de traitement dans le registre numérique, peuvent être interprétées également comme celles effectuées dans le registre algébrique. En effet, si M le prix de voiture de Maria et C celui de Chaima, on aura M – C = 17600 et M + C = 181000, en divisant les deux égalités par 2 on trouve :

(M + C)/2 = 181000/2= 90500 (1)

(M – C)/2 = 17600/2= 8800 (2)

donc (1) +(2) = (M + C)/2 +(M – C)/2 = M = 90500+8800 = 99300

et (1) - (2) = (M + C)/2 - (M – C)/2 = C = 90500-8800 = 81700.

Problème 3

Le problème 3 est déconnecté dont la structure est formée de deux branches et une relation multiplicative entre les inconnues.

Exemple : Raisonnement algébrique dans le registre de représentation numérique

Dans un premier temps, l'élève commence par la division de 132000 par 3 il trouve 44000, il accorde ce nombre au produits de nettoyage et en suite, il soustrait 44000 de 132000 il trouve 88000. L'élève procède à une vérification, il voit que la relation 3 fois plus de produits de conserve que de produits de nettoyage n'est pas conservé. Dans ce cas, il barre ce raisonnement et il change de méthode de résolution, il divise 132000 par 4 il trouve 33000 produits de nettoyage. Ensuite pour trouver le nombre de conserve, il retranche 33000 de 132000, il trouve 99000(figure 3a).



Figure 3a - Élève du 1er collège

Quand l'élève a déposé sa copié, le chercheur lui a demandé d'expliquer pourquoi il a divisé par 4. La réponse de l'élève est la suivante (figure 3b) :

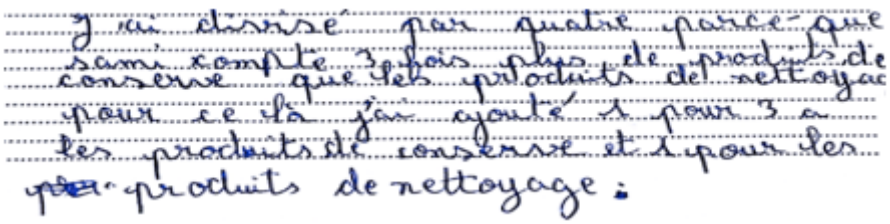


Figure 3b - Réponse du même Élève du 1er collège

Dans ce raisonnement, l'inconnue principale, qui est le nombre de produits nettoyage, n'est pas représentée explicitement ni l'équation mathématisant le problème. Donc, l'inconnue et l'équation sont muettes bien qu'elles soient objets de la pensée de l'élève. C'est un raisonnement algébrique alors que le registre de représentation est exclusivement numérique. Dans ce raisonnement l'élève

manifeste un mode de penser qui met en exergue la transition conceptuelle entre le raisonnement arithmétique et algébrique, tout en exploitant les registres de représentations sémiotiques.

Problème 4

Le problème 4 est déconnecté, de type Source : les deux relations ont la même donnée comme point de départ. Dans la structure de ce problème, trois paramètres ont été pris en compte, à savoir : Les branches sont en nombre de trois, les relations entre les données sont additives et la spécificité des quantités prises en comptes.

Exemple : Raisonnement algébrique dans le registre de représentation numérique

L'élève (figure 4) commence par soustraire 20000 de la somme totale 131000, il trouve 131000-20000= 111000 dhs, en fait 20000 est la somme 5000 et 15000 dhs. Ensuite, il divise 111000 par 3 et il trouve 37000. Il en déduit les frais d'alimentation 37000 dhs. Ensuite, il ajoute 15000 à 37000 pour trouver les frais de scolarité 58000 dhs et il ajoute 5000 à 37000 pour trouver les frais d'habillement 42000 dhs.

Cet élève n'utilise pas de représentation explicite des inconnues, des relations et de l'équation, mais son traitement numérique montre qu'il opère sur les inconnues et non sur les relations. L'élève a produit un raisonnement algébrique l'inconnue et l'équation sont muettes. Le registre du langage naturel comme trace du raisonnement de l'élève qui a introduit cette inconnue. Il traduit les trois relations entre les inconnues en représentant les inconnues par les noms des objets.

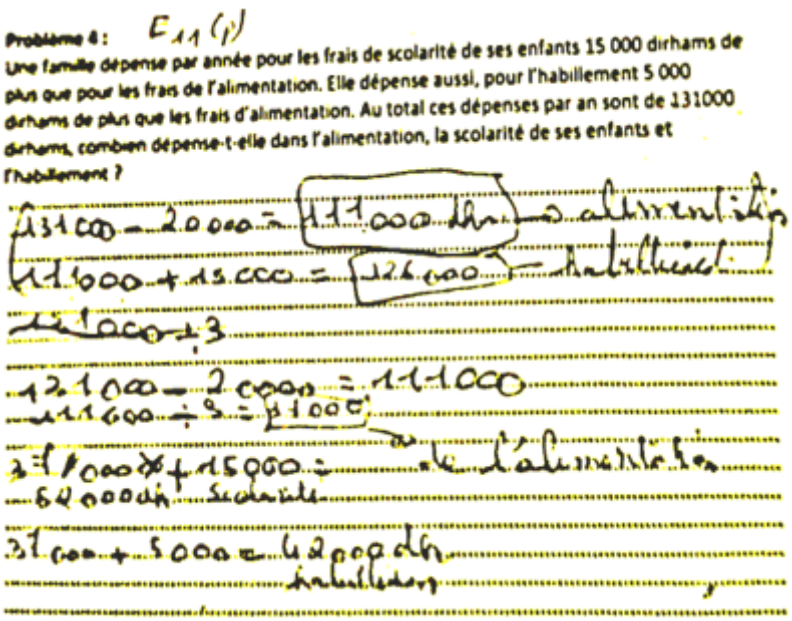


Figure 4 - Élève de 6e primaire

Problème 5

Le problème 5 est déconnecté, de type Composition : une des données est le point d'arrivée d'une relation soit le point de départ de l'autre relation. Dans la structure de ce problème, trois paramètres ont été pris en compte, à savoir : Les branches sont en nombre de trois, les relations entre les données sont additives et multiplicatives, ainsi que la spécificité des quantités prises en comptes.

Exemple 1 : Raisonnement algébrique dans le registre de représentation intermédiaire

L'élève (figure 5) semble saisir la structure multiplicative et additif du problème 5. Il a représenté le nombre de timbres de Chaima par un segment « une partie », le nombre de timbres de Sophia est 3 fois de nombre de timbres de Chaima, et le nombre de de timbres de Maria est 3 fois celui de Chaima, donc « 3 parties » c'est-à-dire trois parties auxquelles, il ajoute 16. Le total des nombres de timbres des trois personnes étant le tout, c'est-à-dire 208. Le terme « partie » est un substitut de l'inconnue, il joue le rôle d'inconnue intermédiaire dont il faut calculer sa valeur en nombre de timbres. Le tout est donc constitué de « 7 parties » qui totalisent 208+16= 224 timbres.

Pour trouver la valeur d'une partie en nombre de timbres, l'élève commence par ajouter une valeur 16 du total des timbres 208 ; (208+16= 224). Il divise le résultat trouvé par 7 ; (224 /7 = 32) et il trouve le nombre de timbres de Chaima.

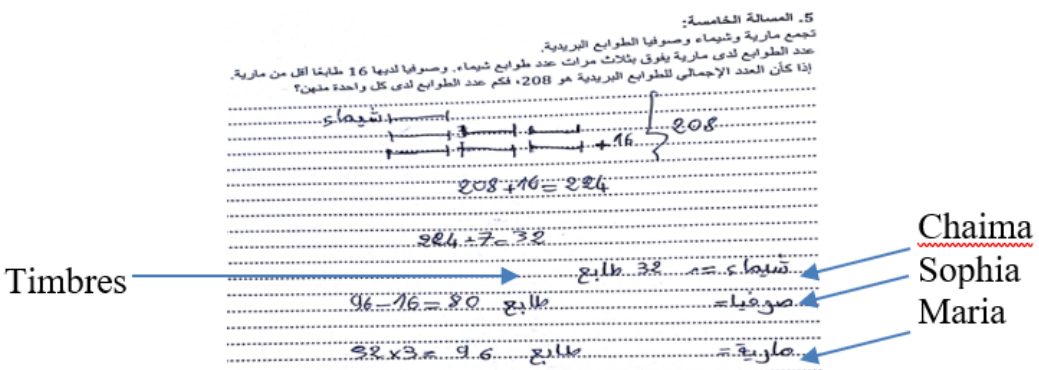


Figure 5 - Élève de 6e primaire

À travers une multiplication de 32 par 3, il en déduit le nombre de timbres Maria qui est de 96 timbres. Il en déduit ensuite, le nombre de timbres de Sophia qui est 80, en effectuant une soustraction de 96 par 16. L'inconnue et l'équation sont muettes bien qu'elles soient objets de la pensée de l'élève. L'élève a commis une erreur dans la représentation schématique, il faut noter -16 ou lieu de +16. Cependant, son raisonnement est correct.

Dans ce raisonnement, l'élève a recouru au registre des schémas qui est traité comme des parties. Cependant, le registre du langage naturel comme trace du raisonnement de l'élève qui a introduit cette inconnue intermédiaire, reste confiné au registre de représentation qui est uniquement numérique.

Exemple 2 : Raisonnement algébrique dans le registre de représentation algébrique

L'élève traduit les trois relations entre les inconnues en représentant l'inconnue principale(fig.7), il exprime l'équation mathématisant le problème en fonction de l'inconnue x qui est le nombre de timbres de Maria. Il utilise donc de façon correcte le registre algébrique pour former l'équation, il sait bien utiliser les règles de traitement dans le registre algébrique.

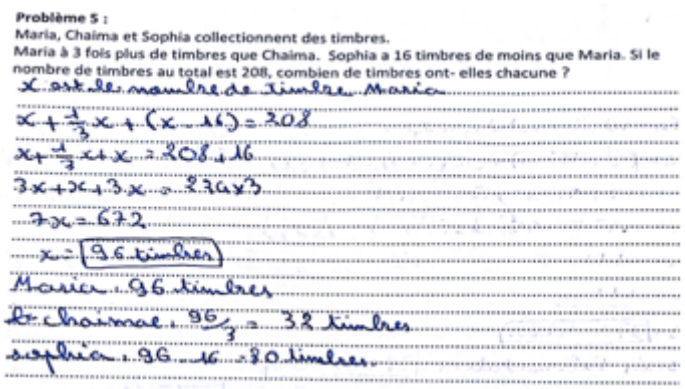


Figure 7 - Élève du 1er collège

Par une action de traitement dans le registre algébrique, l'élève a opéré sur l'équation pour la simplifier et isoler l'inconnue x en utilisant les transformations algébriques sans rattachement au contexte du problème. Le raisonnement est algébrique et le registre de représentation algébrique avec perte de lien avec le contexte du problème.

Conclusion

L'étude portée au Maroc, Abouhanifa (2021), tend à montrer ainsi, comme dans le cas de l'enquête présentée dans le cadre des recherches OIPA qu'en proposant aux élèves des problèmes de type déconnecté avant l'enseignement de la méthode algébrique conventionnelle de résolution de problèmes, cela pousse certains élèves à produire des raisonnements qui sont algébriques et des raisonnements qui ne sont ni arithmétiques, ni algébriques. La résolution de problèmes déconnectés a permis aux élèves de mettre en évidence des stratégies leur permettant de produire des raisonnements algébriques dans les registres de représentation numériques et intermédiaires. La structure du problème influence le processus de la résolution. En effet, les liens établis entre les relations et le nombre de branches qui sont introduites dans les problèmes, assurent cette influence.

L'analyse montre qu'il y a des apprentissages à explorer chez les élèves dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre, qui comportent des traces d'un raisonnement algébrique. En effet, les raisonnements manifestés, dépasseront celles de la pensée arithmétique qui tendent vers des raisonnements algébriques, où l'inconnue et l'équation ne sont pas explicites bien qu'elles soient objets de la pensée de l'élève. Les registres de représentation sémiotique manifestés sont de nature numérique, intermédiaire et algébrique. Même si chez les élèves de la 6e primaire l'algèbre n'a pas encore été introduite, les catégories de raisonnement algébrique sont présentes dans les réponses des élèves et les raisonnements à tendance algébrique bien que peu représentés sont également présentes.

L'idée d'initier les élèves à la pensée algébrique dès le primaire est une opportunité pour enrichir les mathématiques du primaire, en leur apportant plus de profondeur et de cohérence, sans ajouter de nouveaux contenus, ainsi que de résoudre le problème de la transition entre l'arithmétique du primaire et l'algèbre du collège.

Références

Abouhanifa, S. (2021). Caractérisation des raisonnements des élèves Marocains de 11 à 13 ans dans la résolution de problèmes algébriques, *ITM Web Conf*. Volume 39.

Adihou, A., Squalli, H., Saboya, M., Tremblay, M. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves en lien avec différentes structures des problèmes de comparaison, *Actes EMF2015* - GT3

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1996). Emergence and development of Algebra as a problem solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 115- 136). Dordrecht: Kluwer.

Booth, L. (1984). *Algebra: children's strategies and errors*. Windsor: NFERNELSON.

Duval, R. (1991). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65 et leur rôle dans une démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation*, 30(2), 329-354.

Hitt, F. (2004). *Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques*

Hitt, F. et Passaro, V. (2007). *De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes*

Küchemann, D. (1981). *Algebra. In K. M. Hart* (Ed.), Children's Understanding of Mathematics (pp. 102-119). London: John Murray. Le rôle des représentations spontanées. *Dans Actes de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques* (CIEAEM-59) (p. 117-123). Dobogókő, Hongrie, juillet 2007.

Marchand, P. (1998). *Résolution de problèmes en al- gèbre au secondaire : analyse de deux approches et des raisonnements des élèves*. Mémoire de maîtrise en mathématiques, option enseignement, Université du Québec à Montréal.

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ*, 39(4), 30-42.

Marchand, P. et Bednarz, N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. *Bulletin AMQ*, 40(4), 15-25.

Ministère de l'Éducation Nationale du Maroc. (1991). *Programmes et orientations pédagogiques de l'enseignement des mathématiques au premier et deuxième cycle de l'enseignement fondamental*. Direction de l'enseignement secondaire. Rabat.

Ministère de l'Éducation Nationale du Maroc. (2009), *Orientations pédagogiques du secondaire*.

Ministère de l'Éducation Nationale du Maroc. (2021), *Curriculum de l'enseignement primaire*.

Najar, R., Squalli, H., Adihou, A. et Abouhanifa, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre, *ITM Web of Conferences 39*, 01004 CIFEM'2020

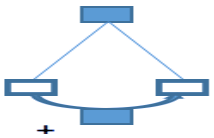
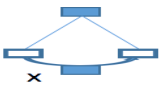
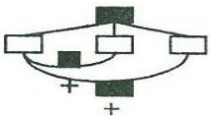
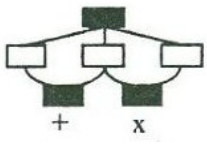
Rosnick, P. & Clement, J. (1980). Learning without understanding: the effects of tutoring strategies on algebra misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, volume 3,n.1,pp.327.

Squalli, H. ; Najar, R. ; Abouhanifa, S. et Adihou, A. (2020). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie. État des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. *Communication présentée dans la 3ème édition du Colloque International sur la Formation et l'Enseignement des Mathématiques et des Sciences CIFEM'2020 25 & 26 Mars 2020, CRMEF* Casablanca-Settat, Section provinciale d'El Jadida, Maroc.

Squalli, H., Bronner, A., Larguier, M., et Adihou, A. (2018). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 25 pages.

Wagner, S., Rachlin, S.L. & Jensen, R.J. (1984). *Algebra learning project :Final report*. Athens : University of Georgia, Department of Mathematics Education.

Annexe

Nature des relations	Problèmes	Structures
Problème connecté	Problème 1 : Hussam a partagé la somme de 133 000 dirhams entre ses deux nièces, Maria et Chaima. Il a donné à Maria 33 000 dirhams. Combien Chaima a-t-elle reçu ?	
Problème déconnecté Une relation additive entre deux inconnues	Problème 2 : Ahmed achète deux voitures pour ses filles, Maria et Chaima. La voiture de Maria coute 17 600 dirhams de plus que celle de Chaima. Si la somme totale consacrée à l'achat des deux voitures est de 181 000 dirhams, combien coûtera chacune des deux voitures ?	
Problème déconnecté Une relation multiplicative entre deux inconnues	Problème 3 : Sami fait l'inventaire de deux produits de sa boutique. Il compte 3 fois plus de produits de conserve que de produits de nettoyage. S'il y a 132000 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type ?	
Problème déconnecté Le problème est de type **Source :** une seule inconnue permet de générer les deux autres inconnues.	Problème 4 : Une famille dépense par année pour les frais de scolarité de ses enfants 15 000 dirhams de plus que pour les frais de l'alimentation. Elle dépense aussi, pour l'habillement 5 000 dirhams de plus que les frais d'alimentation. Au total ces dépenses par an sont de 131000 dirhams, combien dépense-t-elle dans l'alimentation, la scolarité de ses enfants et l'habillement ?	
DLe problème est de type **Composition de relations :** une des données est le point d'arrivée d'une relation et le point de départ de l'autre.	Problème 5 : Maria, Chaima et Sophia collectionnent des timbres. Maria à 3 fois plus de timbres que Chaima. Sophia a 16 timbres de moins que Maria. Si le nombre de timbres au total est 208, combien de timbres ont-elles chacune ?	

Titre: Les problèmes de généralisation à la transition primaire/collège en Tunisie : Quelles potentialités pour favoriser le développement de la pensée algébrique ?

Auteurs: BEN NEJMA Sonia, KHALOUFI-MOUHA Faten et ADEL Fadhel

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 245 - 259

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Les problèmes de généralisation à la transition primaire/collège en Tunisie : Quelles potentialités pour favoriser le développement de la pensée algébrique ?

BEN NEJMA[1] Sonia – KHALOUFI-MOUHA[2] Faten - ADEL[3] Fadhel

Résumé – En se plaçant dans la lignée des travaux du mouvement « Early algebra » et ceux de la théorie anthropologique du didactique, ce travail exploite un Modèle Praxéologique de Référence de la Pensée Algébrique pour explorer le potentiel des problèmes de généralisation proposés dans les manuels officiels de 6ème année primaire et de première année de collège en Tunisie, à développer la pensée algébrique avant l'introduction du formalisme conventionnel.

Mots-clefs : Pensée algébrique, Modèle praxéologique, Généralisation, Potentiel algébrique, Transition primaire/collège.

Abstract – In line with the "Early algebra" movement and the anthropological theory of didactics, this paper uses a Praxeological Reference Model of Algebraic Thinking to explore the potential of generalization activities proposed in the official textbooks of the 6th year of primary school and the first year of secondary school in Tunisia to develop algebraic thinking prior to the introduction of conventional formalism.

Keywords: Algebraic thinking, Praxeological model, Generalization, Algebraic potential, Primary/college transition.

1. Université de Carthage, Laboratoire LaRINA, Faculté des sciences de Bizerte-Tunisie, sonianejma@yahoo.com

2. Université de Carthage, Faculté des sciences de Bizerte, Tunisie, faten.khalloufi@fsb.u-carthage.tn

3. Ministère de l'éducation tunisienne, Circonscription de l'éducation à Kairouan, afadhel34@yahoo.fr

Introduction et problèmatique

Ce travail s'inscrit dans le cadre du projet international « Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie, état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre » du programme international APPRENDRE, mis en œuvre par l'Agence universitaire de la Francophonie (AUF) avec l'appui de l'Agence Française de Développement (AFD) (Appel à projet d'avril 2019). Il s'inspire également des recherches de l'Observatoire International sur la Pensée Algébrique (OIPA) (Squalli, 2015, Vlasiss, Demonty, Squalli, 2017, Jeannotte, Squalli, Robert, 2019, Bronner, squalli,2021). Il s'agit, plus particulièrement, d'analyser les enjeux du passage de l'arithmétique vers l'algèbre enseignée à la transition primaire (6ème année de base) /collège (7ème année de base) en Tunisie (élèves de 11 à 13 ans). Nous nous situons dans la lignée des travaux portant sur le développement de la pensée algébrique dès les premières années du primaire sans recours au symbolisme algébrique conventionnel qui sera rencontré ultérieurement au collège. Contrairement aux approches d'enseignement classiques de l'algèbre, l'objectif n'est pas d'introduire le symbolisme littéral pour donner du sens aux concepts ou faire émerger des propriétés mais plutôt de mettre l'accent sur l'importance de la généralisation dans le développement du raisonnement analytique. Bien que la présence d'opérations (lois de composition interne ou externe, binaire ou n-aires) en nombre fini soit essentielle et assure le caractère algébrique de l'activité, la présence des lettres n'y est pas indispensable, elle serait selon Marchand et Bednarz (1999) un moyen d'exprimer la généralité. Ce travail est motivé par les réformes des mathématiques actuellement en vigueur dans les pays anglophones qui s'inscrivent dans le mouvement Early-algebra visant à renforcer les acquis en arithmétique par le développement d'une vision relationnelle de l'algèbre. Dans le contexte tunisien, c'est à partir de la 7ème année de base, en fin d'année, que le langage algébrique est explicitement introduit via le calcul littéral et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue, comme on peut lire :

> « L'apprenant sera sensibilisé au domaine algébrique à travers sa familiarisation progressive avec les écritures algébriques et la manipulation de certaines expressions par des opérations d'addition et de soustraction ainsi que la simplification et le calcul d'expressions algébriques connaissant des indéterminées ainsi que s'entrainer à résoudre des problèmes en rapport avec des équations simples ou des relations entre deux variables ».(Programme officiel de l'enseignement de base tunisien, 2020)

Cette analyse revient à identifier parmi les activités de généralisation proposées dans les manuels officiels tunisiens (Ben Nejma et al, 2022), celles ayant un potentiel algébrique à développer un raisonnement analytique. Dans quelle mesure les tâches posées en 6ème année de base permettent-elles de développer éventuellement une généralisation algébrique ? Le potentiel de ces tâches évolue-t-il en 7ème année ? Quelle importance est-elle accordée par l'institution scolaire tunisienne à la généralisation comme moyen de développer la pensée algébrique chez les élèves à la transition primaire/collège ?

Nous présentons le cadre théorique adopté pour aborder notre problématique, la méthodologie d'analyse considérée et les principaux résultats relatifs à l'analyse institutionnelle avant de conclure.

Cadre théorique

Nous faisons référence à l'articulation théorique proposée par (Najar et al 2021) entre la théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, 1992 et 1999) qui permet de modéliser toute activité mathématique en termes de praxéologies selon une dynamique des niveaux de codétermination mathématiques (globale, régionale, locales et ponctuelles) et le modèle épistémologique de référence de la pensée algébrique (MPRPA) (Squalli, et al. 2019). Cette articulation est nourrie par l'approche sémiotique (Duval, 1993). Nous analysons les praxéologies ponctuelles relatives à la praxéologie mathématique régionale « généralisation » et les techniques attendues qui seraient éventuellement compatibles avec les caractéristiques d'un raisonnement analytique ainsi que les registres qui peuvent être convoqués dans la mobilisation de ces techniques. En effet, dans le (MPRPA), la praxéologie mathématique globale élaborée autour de la pensée algébrique s'organise autour de trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) : Généralisation (G), Modélisation (M) et Calcul (C), chacune d'elle se décline en des praxéologies mathématiques locales (PML). La PMR « Généralisation » se décline en deux PML : (G1) : « Généralisation de régularités » et (G2) : « Généralisation de règles, de formules, de loi et d'algorithmes ». Celles-ci sont caractérisées, à leur tour, par des praxéologies mathématiques ponctuelles (PMP organisées autour de types de tâches), comme il est illustré dans le tableau suivant.

PML (G1) : Généralisation de régularités	**PML (G2) : Généralisation de de règles, de formules, de loi et d'algorithmes**
Repérer une régularité dans une suite	Repérer une règle, une loi, un algorithme
Prolonger une suite régulière	Étendre le domaine de validité d'une règle, d'une loi, d'un algorithme
Représenter une suite régulière dans un registre donné	Représenter dans un registre donné une règle, une loi, un algorithme
Créer une suite régulière	Créer une règle, une loi, un algorithme
Justifier/prouver une régularité	Justifier/prouver une règle, une loi, un algorithme
Comparer des suites régulières dans un sens donné	Comparer des règles, des lois, des algorithmes

Tableau 1 - Les PMP relatives aux PML du MPRPA

Nous identifions trois types de registres au sens de Duval (1995) et de Hitt et Passaro (2007), le registre numérique, le registre algébrique conventionnel et le registre intermédiaire. Le registre « numérique » renvoie aux nombres et aux opérations entre ces nombres mis en jeu dans les activités proposées. Le registre algébrique fait appel au formalisme algébrique et à l'usage de la lettre et le registre *intermédiaire* qui renvoie, ici, à toute autre représentation des relations convoquées par l'énoncé, le tableau de valeurs, le dessin, le schéma, la figure géométrique, etc.

Méthodologie

Un bref aperçu sur le système éducatif tunisien : la transition primaire/collège

Le système éducatif scolaire tunisien est composé de deux cycles d'enseignement, l'enseignement de base et l'enseignement secondaire. L'enseignement de base est un cycle complet qui s'étale sur neuf années accueillant des élèves de première année (6 ans) jusqu'à la 9ème année (14-15ans). Il se compose à son tour de deux cycles complémentaires, le premier cycle (cycle primaire) dispensé dans les écoles primaires, d'une durée de six ans, subdivisés en trois degrés de deux ans chacun, et le second cycle (cycle préparatoire) dispensé dans les collèges, d'une durée de trois ans. L'examen de fin d'études de l'enseignement de base est organisé au terme de la neuvième année et sanctionné par le diplôme de fin d'études de l'enseignement de base (DFEB). Pour sa part, l'enseignement secondaire est d'une durée de 4 ans et sanctionné par l'examen national du baccalauréat à la fin de la 4ème année. La langue naturelle en usage à l'écrit et à l'oral en mathématiques dans l'enseignement de base est la langue arabe et se base sur l'approche par compétences dont la résolution de problèmes constitue un enjeu majeur. Dans le contexte tunisien nous disposons, pour chaque niveau d'enseignement, d'un manuel officiel unique qui représente la principale référence à suivre par l'enseignant et ses élèves et traduit les objectifs du programme officiel.

Méthodologie d'analyse des pratiques institutionnelles

Nous identifions les praxéologies ponctuelles développées dans les manuels officiels tunisiens de 6ème année et de 7ème année de base en analysant les tâches qui convoquent de manière implicite ou explicite les PMP identifiées dans le MPRPA. Cette analyse est réalisée à partir des types de tâches convoqués, des techniques permettant de les accomplir ou attendues par l'institution scolaire et des registres de représentations en jeu. Ces critères nous permettent de caractériser le potentiel algébrique des problèmes posés. Ce concept est envisagé en tant qu'outil méthodologique (Ben Nejma et al 2022) permettant de classer ces problèmes en fonction des PMP identifiées. Trois degrés du potentiel algébrique sont considérés, nul, faible et fort. Le premier niveau concerne les tâches purement arithmétiques, c'est à dire celles qui impliquent des nombres qui sont tous déterminés et la réalisation de la tâche repose uniquement sur la qualité nombrante des nombres (leurs valeurs). Comme lorsqu'il s'agit de vérifier par calcul que : $4\times(5+7) = 4\times5 + 4\times7$. Le second concerne les tâches dont les

énoncés encouragent l'utilisation d'une technique arithmétique, ou si la technique algébrique est hors de portée de l'élève. C'est le cas par exemple pour la tâche : Justifier que : 4× (5+7) = 4×5 + 4×7. Ici l'énoncé n'oriente pas les élèves vers une technique arithmétique mais ne la défavorise pas au profit d'une technique sans calcul. […] Le potentiel algébrique est fort lorsque les tâches proposées encouragent l'utilisation d'une technique algébrique, ou si celle-ci est à la portée des élèves. C'est le cas de la tâche : Justifier, sans aucun calcul, que 4× (5+7) = 4× 5 + 4× 7. L'analyse que nous réalisons se base ainsi sur une analyse a priori des tâches proposées dans les manuels officiels tunisiens de 6ème et 7ème année de base convoquant une généralisation afin d'identifier leur PDPA (potentiel de développement de la pensée algébrique) selon les techniques permettant de les accomplir. Ce potentiel peut varier selon le statut des activités proposées (découverte, application, exercices), c'est pourquoi, nous analysons les situations d'apprentissage dans leur globalité pour en tirer les conclusions sans se limiter aux activités de découverte.

Analyse des problèmes de généralisation à la fin de l'enseignement primaire

En 6ème année, l'analyse révèle le faible pourcentage des problèmes de généralisation comparé aux problèmes de modélisation dominants dans les programmes de mathématiques (Khalloufi-Mouha, Ben Nejma et al 2023). En fait, nous avons distingué 30,38% de problèmes autour de la PMR « Calcul », 64,24% autour de la PMR « Modélisation » et 5,38% qui concernent la PMR « Généralisation ». Dans notre travail, en se centrant sur la praxéologie de généralisation, nous avons choisi d'analyser la répartition de ces activités selon les deux PML, G1 et G2. Parmi les 17 activités de généralisation, repérées dans le manuel, 11,76% (2 activités parmi les 17) font référence à la PML G1. L'objet de ces activités consiste à repérer ou à justifier une régularité dans une suite numérique en se basant sur un registre numérique. Les activités relatives à la PML G2 constituent 88,24% avec 15 activités parmi les 17 activités de généralisation. Ces activités visent à repérer une règle ou une loi et sont essentiellement proposées aux élèves lors de la phase de découverte d'une nouvelle connaissance mathématique. L'analyse en termes de registres fait apparaitre l'importance du registre numérique qui est utilisé dans 10 problèmes parmi les 17 donc avec une proportion de 58,82%. Les sept problèmes restants se répartissent entre le registre intermédiaire (registre graphique) et le registre numérique.

Dans l'objectif d'étudier la façon dont l'enseignement tunisien à la fin du primaire prépare les élèves à la transition arithmétique-algèbre à travers des activités de généralisation, nous proposons dans ce qui suit, quatre exemples d'activités relatives à la PMR généralisation, proposées dans le manuel scolaire. Nous analysons les potentialités de ces problèmes à permettre aux élèves la mobilisation de la pensée algébrique à travers l'approfondissement des notions de régularité (Généralisation de règles et identification de régularités).

Exemple1 : G1. Repérer une régularité dans une suite.

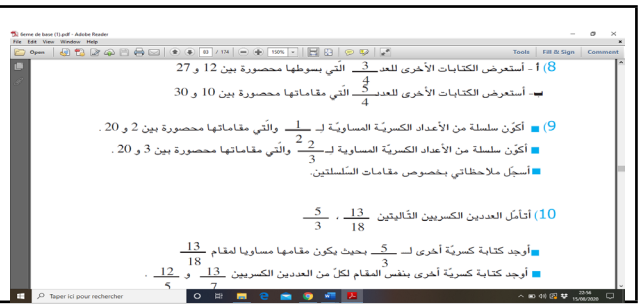
• Je construis une suite de nombres rationnels égaux à dont les dénominateurs sont compris entre 2 et 20. • Je construis une suite de nombres rationnels égaux à dont les dénominateurs sont compris entre 3 et 20. Je note mes remarques à propos des dénominateurs des deux suites.	

Figure 1 – Activité 9 p 83 du manuel de 6ème année primaire de l'enseignement tunisien

Cette activité est extraite du sujet d'étude intitulé « J'écris un nombre rationnel de plusieurs manières ». L'activité est classée dans la catégorie « je m'entraine » et elle a pour objectif de donner plusieurs écritures pour un même nombre rationnel. L'activité relève de l'organisation « Généraliser » et appartient à l'organisation praxéologique locale (OPL) : Repérer une régularité dans une suite et au type de tâche : Repérer une régularité dans une suite numérique. En fait, l'objet de l'activité est de repérer une régularité au niveau des dénominateurs des différentes écritures d'un nombre rationnel à travers l'étude des deux exemples et . Bien qu'elle soit essentiellement basée sur l'utilisation d'une stratégie arithmétique qui consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur par le même entier non nul afin d'obtenir des nombres entre 2 et 20 ou 3 et 20, cette activité permet aux élèves de repérer des régularités et d'identifier la forme des différentes écritures des deux nombres rationnels donnés. Pour cela, nous avons classé cette activité comme ayant un potentiel algébrique faible Ce classement est appuyé par le fait que cette activité est une activité d'application. Donc, les élèves sont supposés avoir déjà rencontré les procédures nécessaires pour la résolution de l'activité.

Exemple 2 : G1. Justifier/prouver une régularité. Activité 5 page 36

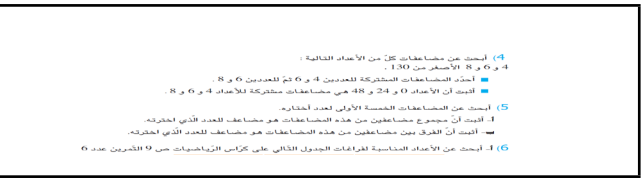
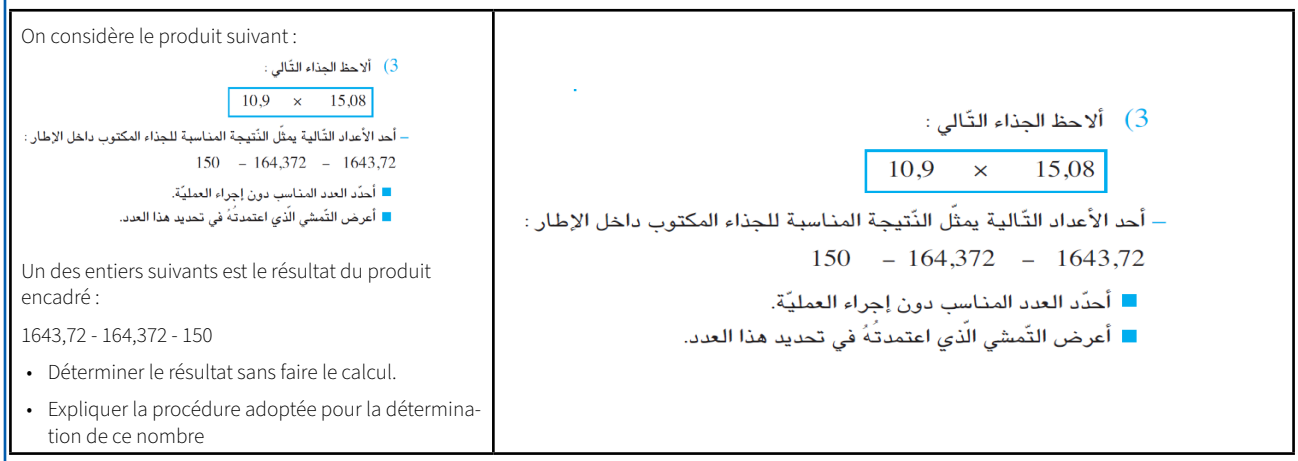
5) Je cherche les cinq premiers multiples d'un nombre que je choisis. a. Prouver que la somme de deux de ces multiples est un multiple du nombre choisi. b. Prouver que la différence entre deux de ces multiples est un multiple du nombre choisi.	

Figure 2 – Activité 5 p 36 du manuel de 6ème année primaire de l'enseignement tunisien

L'activité précédente est extraite du chapitre du manuel intitulé « identifier des multiples communs de deux entiers naturels ou plus ». L'activité est classée dans la catégorie « je m'entraine » du manuel qui vise l'entrainement sur un nouveau contenu mathématique et la stabilisation de sa signification à travers des activités d'application courtes permettant aux élèves d'acquérir de nouvelles compétences. Cette activité est associée à la PML G1 (Généralisation de régularités) et au type de tâche : Justifier/prouver une régularité dans une suite numérique. Dans cette activité il ne s'agit pas de réaliser une preuve mathématique mais il s'agit d'une validation pragmatique de de la règle visée à travers l'utilisation des termes de la suite des multiples du nombre choisi. Aucune précision n'a été donnée

donc on peut s'attendre à ce que les élève vérifient la règle sur la base d'exemples. Nous considérons que cette activité a un potentiel algébrique fort dans la mesure où elle permet d'initier les élèves à la généralisation en travaillant avec un nombre générique qui peut prendre n'importe quelle valeur dans l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Exemple 3 : G2. Repérer une règle, une loi, un algorithme



On considère le produit suivant :

3) ألاحظ الجداء التّالي :

10,9 × 15,08

– أحد الأعداد التّالية يمثّل النّتيجة المناسبة للجداء المكتوب داخل الإطار :

150 – 164,372 – 1643,72

■ أحدّد العدد المناسب دون إجراء العمليّة.

■ أعرض التّمشي الّذي اعتمدتُهُ في تحديد هذا العدد.

Un des entiers suivants est le résultat du produit encadré :

1643,72 - 164,372 - 150

- Déterminer le résultat sans faire le calcul.
- Expliquer la procédure adoptée pour la détermination de ce nombre

3) ألاحظ الجداء التّالي :

10,9 × 15,08

– أحد الأعداد التّالية يمثّل النّتيجة المناسبة للجداء المكتوب داخل الإطار :

150 – 164,372 – 1643,72

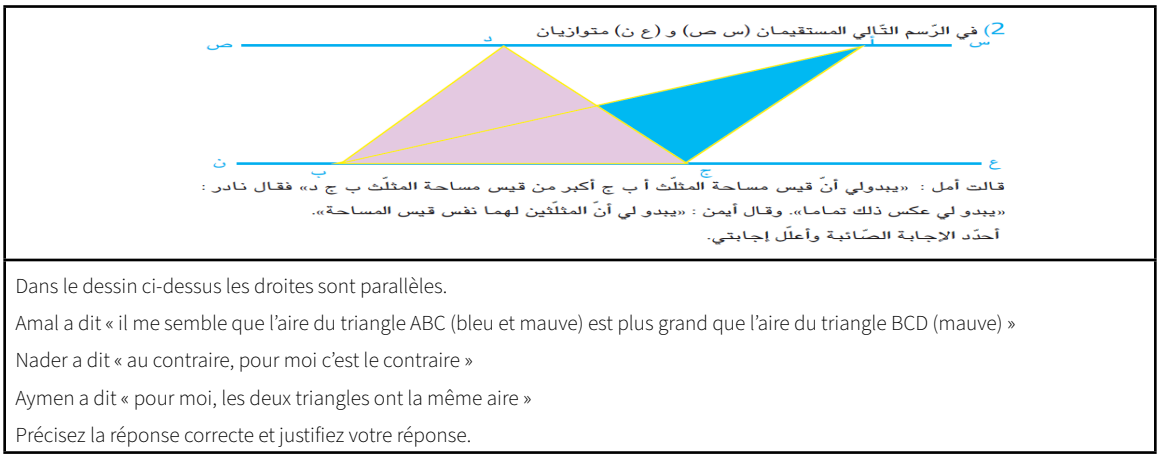
■ أحدّد العدد المناسب دون إجراء العمليّة.

■ أعرض التّمشي الّذي اعتمدتُهُ في تحديد هذا العدد.

Figure 3 –. Activité 3p 10 du manuel de 6ème année primaire de l'enseignement tunisien

L'activité proposée dans cet exemple renvoie à la PML G2 : Généralisation de règles, de formules, de lois, d'algorithmes et le type de tâche « Repérer une règle, une loi, un algorithme. » En fait, il s'agit d'identifier une règle relative à la multiplication de deux nombres décimaux et plus précisément l'identification du nombre de chiffres après la virgule du produit à partir du nombre de chiffres des deux facteurs. Cette activité mobilise le registre numérique, dans laquelle la description de la technique est convoquée en tant qu'indicateur pour repérer la règle en jeu. Cependant, bien que l'objectif de l'activité soit d'identifier une règle susceptible d'être généralisée à tous les nombres décimaux, nous considérons que les nombres proposés dans cette activité peuvent conduire les élèves à mobiliser un raisonnement de nature arithmétique en procédant par élimination jusqu'à obtenir la réponse correcte. C'est pourquoi nous considérons le degré du potentiel algébrique de ce problème comme faible en raison de la nature des variables didactiques proposées.

Exemple4 : G2. Justifier/prouver une règle, une loi, un algorithme



Dans le dessin ci-dessus les droites sont parallèles.

Amal a dit « il me semble que l'aire du triangle ABC (bleu et mauve) est plus grand que l'aire du triangle BCD (mauve) »

Nader a dit « au contraire, pour moi c'est le contraire »

Aymen a dit « pour moi, les deux triangles ont la même aire »

Précisez la réponse correcte et justifiez votre réponse.

Figure 4 –. Activité 2 p 132 du manuel de 6ème année primaire de l'enseignement tunisien

L'activité renvoie à la PML G2 : Généralisation de règles, de formules, de lois, d'algorithmes et de type de tâche : Justifier/prouver une règle, une loi, un algorithme. Il s'agit en fait de justifier l'égalité de l'aire des triangles ayant une base commune et la même longueur de la hauteur et cela en utilisant des connaissances et des formules déjà étudiées comme la mesure de l'aire d'un triangle et la distance entre deux droites parallèles. La justification ne se base pas nécessairement sur une preuve intellectuelle mais peut être exploitée dans le but d'initier les élèves à une généralisation par des arguments mathématiques (propriétés déjà rencontrées). Cette activité présente, selon nous, un potentiel algébrique fort justifié par le fait que l'absence de mesure exacte peut conduire les élèves à la mobilisation de stratégies de nature algébrique à travers une initiation au concept d'équation. En effet, en se référant aux trois composantes de la pensée algébrique introduites par (Radford, 2014), l'activité évoquée fait appel à deux indéterminés, la base et la hauteur de chacun des deux triangles. Ces deux indéterminés peuvent être dénotés à partir des points B et C pour la base et par une autre représentation sémiotique pour la hauteur, même dans le registre du langage naturel. Cette activité fait apparaitre le rôle que peut jouer le registre intermédiaire dans le développement du processus de généralisation.

Analyse des problèmes de généralisation au début du collège (septième année de l'enseignement de base)

D'après le programme de la septième année de base, l'algèbre est explicitement introduite à travers le calcul de la valeur numérique d'une expression littérale ou algébrique. Après avoir fait une analyse des PMR autour des situations d'apprentissage du manuel scolaire nous avons d'abord distingué 40,2 % de problèmes autour de la PMR « C », 53 % autour de la PMR « M » et 6,8 % qui concernent la PMR « G ». Parmi celles-ci, nous identifions les activités comportant des tâches de généralisation de régularité « G1 » ou de généralisation de règles, de formules, de lois, d'algorithmes « G2 ». Nos analyses nous ont

permis de noter que parmi les 33 activités de généralisation du manuel, 60,6 % appartiennent aux trois PMP : repérer, étendre ou justifier une régularité. Les activités restantes (39,4 %) font partie des trois PMP : repérer, étendre ou justifier une formule.

Nous identifions, à travers trois exemples d'activités de généralisation dans le manuel, le potentiel de la pensée algébrique que ces tâches permettent de mobiliser chez les élèves de 7ème année de base. Ce choix est fait parmi les PMP les plus représentées dans le manuel.

Exemple 1 : G1. Repérer une régularité dans une suite

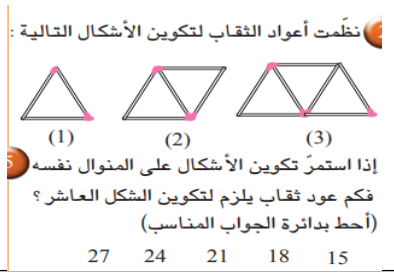
Traduction de l'énoncé : Tu as arrangé des allumettes pour obtenir les formes ci-contre : (Dans l'énoncé initial) Si la construction des formes se poursuit de la même façon, combien faut-il d'allumettes pour former la dixième figure. (Encercler la réponse correspondante) 27 24 21 18 15	

Figure 5 –. Activité 2 p 62 du manuel de 7ème année de l'enseignement tunisien

Cette activité est extraite de la rubrique « exercices » du premier chapitre intitulé « les opérations sur les nombres entiers naturels ». Elle fait appel au registre géométrique et au registre numérique. Elle met l'accent sur les caractéristiques d'un triangle (nombre de cotés) et non aux propriétés géométriques. Elle fait appel à l'OML « généraliser une régularité » et dont la résolution nécessite d'abord de correspondre le numéro de la figure au nombre de triangles constituant cette figure, puis de repérer une régularité dans la liaison entre le nombre d'allumettes et le nombre de triangles et la prolonger à la figure numéro 10. Certaines techniques de résolution peuvent être mobilisées. Une technique possible est générée par un raisonnement récursif qui se base sur la structure du triangle, c'est-à-dire qu'après le premier triangle qui correspond à trois allumettes, chaque nouveau triangle est formé à partir de deux allumettes. Une fois la régularité repérée, l'élève peut trouver les termes consécutifs de sa suite jusqu'à la figure (10) qui correspond à 10 triangles. Les figures (2) et (3) permettent de valider ses choix. Une deuxième technique se base sur l'analyse de la structure de la chaine pour trouver la relation entre le nombre de triangles et le nombre d'allumettes et prend les figures (2) ou (3) comme exemple générique. Il est possible d'exprimer cette régularité dans un registre intermédiaire en considérant que le nombre d'allumettes pour 10 triangles est celui correspondant au premier triangle auquel on ajoute deux fois le reste des triangles. Ou bien aussi que le nombre d'allumettes correspond à 2x (nombre de triangles) +1. Dans tous les cas, le registre algébrique n'est encore pas accessible aux élèves à ce moment de l'étude à moins que l'enseignant ait anticipé sur le programme d'étude. De plus, le choix du nombre (10 allumettes) dans l'exercice ne favorise pas la deuxième stratégie mais plutôt une stratégie de comptage : cette stratégie passe par la construction du dessin numéro (10). Les régularités à repérer entre le nombre de triangles et le nombre d'allumettes confèrent à cette PMP

un potentiel algébrique faible en raison des variables didactiques proposées (nombre d'allumettes et valeurs prises pour les distracteurs).

Exemple 2 : G2. Repérer/ étendre une règle, formule.

On a construit des escaliers à l'aide de cubes (dans la figure à droite).

1) Compter les cubes de chaque escalier et écrire le résultat sous forme d'un carré.

2) On a construit les formes (fig. à gauche) à l'aide des cubes de chaque escalier.

a) Combien de cubes contient un escalier à quatre niveaux ? écrire le résultat sous forme d'un carré. Que remarque-t-on ?

b) Quel serait le nombre de cubes d'un escalier à cinq niveaux ? à neuf niveaux ?

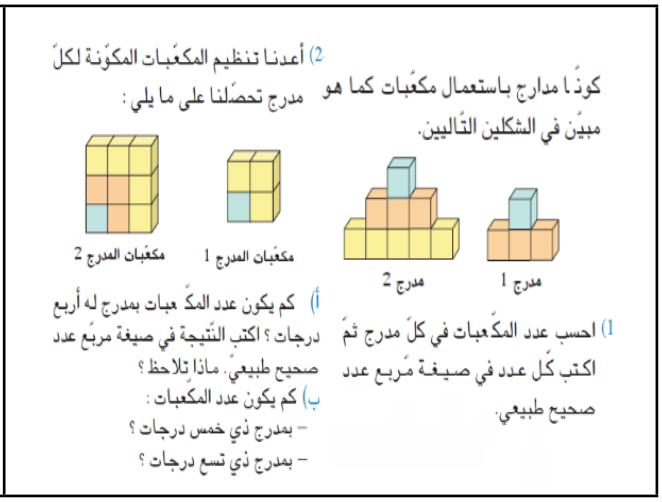


Figure 6 –. Activité 11 p 66 du manuel de 7ème année de base de l'enseignement tunisien

Cette activité relève du chapitre consacré aux entiers naturels et convoque des puissances d'entiers naturels à travers le repérage de l'égalité du nombre de cube dans un escalier et dans le parallélépipède correspondant, c'est-à-dire $1+3=2^2$ et $1+3+5=3^2$. Il s'agit d'étendre cette formule aux cas d'escaliers à cinq puis neuf niveaux : $1+3+5+7+9=5^2$ puis $1+3+5+7+9+11+13+15+17=9^2$. Cependant, il n'est pas demandé de généraliser le résultat pour un niveau n quelconque. Le fait de se limiter à la valeur 9 (assez petite) peut freiner le processus de généralisation chez les élèves en se limitant au registre numérique, même si les élèves ne rencontrent le formalisme algébrique conventionnel que dans les chapitres qui suivent. Il est pourtant possible d'exprimer le résultat sollicité dans le registre intermédiaire (du langage naturel, par exemple) de la manière suivante : le nombre de cubes dans un escalier est le carré du nombre de niveaux dans cet escalier. Par ailleurs, l'utilisation du contexte géométrique permet d'initier les élèves au processus de généralisation de règles ou de propriétés algébriques. Cela nous amène à considérer que le potentiel algébrique de ce problème est faible à moins que l'enseignant par son apprêtage didactique des items proposées lui confère un potentiel fort en dépassant le simple repérage de la relation numérique vers un prolongement de cette régularité.

Exemple 3 : G2. Repérer, étendre le domaine de validité d'une règle, d'un algorithme.

Ziad possède des pièces sous forme de triangles équilatéraux de côté chacun 1 cm.

a) Il a collé quatre pièces pour obtenir le triangle de la figure ci-contre. Quelle est la nature de ce triangle et quelles sont ses dimensions ?

b) Combien a-t-il besoin de pièces pour construire un triangle équilatéral de côté 4 cm ?

c) Combien faut-il de pièces pour construire un triangle équilatéral de côté 8 cm ? 32 cm ?

لزياد قطع في شكل مثلثات متقايسة الأضلاع أطوال أضلاعها 1 cm

أ- ألصق أربع قطع كما هو مبيّن في الرّسم المقابل فتحصّل على مثلث
ما هي طبيعته ؟ ما هو طول ضلعه ؟

ب- يريد زياد الحصول على مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 4 cm
كم قطعة يحتاج لذلك ؟

ج - ما هو عدد القطع التي تمكّنه من الحصول على :
- مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 8 cm ؟
- مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 32 cm ؟

Figure 7 – Activité 2 p 172 du manuel de 7ème année de base de l'enseignement tunisien

L'activité en question relève du chapitre du manuel scolaire intitulé « triangles » et vise le renforcement des propriétés d'un triangle équilatéral. Pour accomplir les tâches demandées l'élève peut faire appel à un raisonnement récursif sur la base de propriétés pour obtenir un triangle équilatéral quatre fois plus grand par l'assemblage de quatre triangles équilatéraux isométriques. De ce fait, si on utilise quatre triangles de coté 2 cm, on obtient un grand triangle de coté 4 cm qui contient 4x4=16 triangles de coté 1. De même pour construire un triangle de coté 8 cm, on utilise quatre triangles de coté 4 cm c'est-à-dire 16x4=64 petits triangles. Ainsi de suite pour construire un triangle de coté 32 cm=2^5 cm, on a besoin de quatre triangles de coté 16 cm, c'est-à-dire de 16 triangles de coté 8 cm, c'est-à-dire encore 64x16=45= 1024 petits triangles. Une autre technique possible pourrait faire appel à la somme des nombres impairs de l'exemple 1 (exercice 2 p.62). Cependant, le choix des nombres 2, 4, 8 et 32 qui sont tous des puissances de 2, favorise davantage la première technique. Cette praxéologie ponctuelle permet de faire implicitement le lien entre deux variables qui sont des grandeurs de natures différentes : le nombre de triangles et la longueur du côté du grand triangle et de trouver l'une connaissant l'autre. La mobilisation des formules et des propriétés des triangles (triangles équilatéraux) dans le registre géométrique est une façon d'initier les élèves à des conjectures qui renvoient au processus de généralisation sans faire appel au registre algébrique conventionnel d'où le potentiel algébrique fort de ce type d'activité.

Conclusions et Discussions

A la lumière des analyses conduites sur l'ensemble des activités et tâches convoquant un processus de généralisation dans les manuels tunisiens à la transition primaire/collège, il apparait que du point de vue de cette praxéologie régionale, et en dépit du faible pourcentage des tâches de ce genre, les situations d'apprentissage proposées permettent sous certaines conditions de développer la pensée algébrique chez les élèves. Il nous semble que leur potentiel algébrique identifié à partir des analyses a priori, témoigne de l'intérêt accordé à cette approche dans le primaire malgré l'absence de certaines praxéologies ponctuelles du MPRPA. Cette volonté est davantage renforcée à l'entrée au collège via des situations convoquant le repérage de régularités, le prolongement de cette régularité et des rela-

tions de récurrence ou de dépendance, par exemple, de suites à motifs croissants et le prolongement de ces régularités à des termes plus grands de la suite. Cependant le choix des variables didactiques en jeu dans les problèmes proposés peut détourner cet objectif institutionnel et conduire les élèves à des stratégies de nature arithmétique. Souvent, le nombre des termes de la suite (ou motifs) n'est pas assez grand ou une conjecture n'est pas convoquée pour un nombre arbitraire, ce qui ne motive pas le processus de généralisation et limite la technique au seul traitement de la tâche dans un seul registre numérique ou géométrique. Par exemple, la reproduction du motif, le calcul des termes de la suite sur la base d'un raisonnement récursif ou encore l'exécution d'un programme de calcul sans qu'il y ait un processus de généralisation en jeu. De ce fait, même si la praxéologie généralisation est présente dans cette transition institutionnelle, sa place en tant que praxéologie régionale au même niveau que le calcul ou la modélisation reste encore à désirer. Il semble que la pratique enseignante joue un rôle déterminant dans l'apprêtage didactique des praxéologies de généralisation développées dans ces manuels officiels par l'exploitation de leur potentiel à développer la pensée algébrique.

Références

Ben Nejma, S., Abouhanifa, S., Oké, E., Najjar, R, Squalli, H. & Adihou, A. (2022). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : analyse du savoir à enseigner relatif au développement de la pensée algébrique dans les manuels de 6ème année primaire. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 2022, Numéro thématique 2 (Tome 1), p. 59-95.

Bronner, A., & Squalli, H. (2021). *La généralisation dans la pensée algébrique*. Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques, 3, 3-38.

Chevallard, Y. (1989). *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège* - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. Petit x, 19 43-75.

Chevallard, Y. (1990). L*e passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège* - Troisième partie. Voies d'attaque et problèmes didactiques. Petit x, 23, 5-38. Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en didactique des mathématiques, 12(1).

Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Recherches en didactique des mathématiques, 19(2), 221-266.

Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de didactique et de sciences cognitives, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne : Peter Lang SA.

Hitt, F. & Passaro, V. (2007). *De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées*. Dans Actes de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM-59) (p. 117-123). Hongrie.

Khalloufi-Mouha, F., Ben Nejma, S., Adel, F. & Najar, R. (à paraitre 2023). *Analyse du rapport institutionnel relatif à l'activité de modélisation dans la transition primaire collège en Tunisie*. In Adima 3- Approche interdisciplinaire dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : quel projet et quels enjeux pour l'Afrique ? GT4- Hammamet- 15-20 août 2022- Tunisie.

Jeannotte, D, Squalli, H & Robert, V. (2019). *Mise à l'épreuve d'un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique par l'entremise d'une analyse du PFEQ au primaire*. Actes du colloque GDM 2019 - À quoi ressemble aujourd'hui la recherche en didactique des mathématiques au Québec ? Université Laval, Québec, Canada. 146-155

Marchand, P. et Bednarz, N. (1999). *L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une analyse des problèmes présentés aux élèves*. Bulletin AMQ, (4), 30-42.

Najar, R. Squalli, H. Adihou, A. Abouhanifa, S. (2021). Transition primaire-collège au Bénin, Maroc et Tunisie : Pour un état des lieux, comparaison et perspectives de l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre. ITM Web of Conferences 39, 01004 CIFEM 2020.

Radford, L. (2014). *The progressive development of early embodied algebraic thinking*. Mathematics Education Research Journal, 26(2), 257-277.

Squalli, H. (2015). *La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels*. Actes du congrès Espace Mathématique Francophone (EMF). Alger, octobre 2015.

Vlassis, I; Demonty, I, Squalli, H. (2017). *Développer la pensée algébrique à travers une activité de généralisation basée sur des motifs (patterns) figuratifs*. Nouveaux Cahiers de la Recherche en Éducation 20(3) :131

Titre: L'identification d'invariants - une entrée dans la pensée algébrique - un exemple au collège en France

Auteurs: CIAVALDINI Jérôme-Ange, DEMAILLY Marie-Claire, GRAVAS Julien, LE-MEN Karine, SOFONEA Carmen, BOULAIS Pascale et DURAND-GUERRIER Viviane

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 260 - 270

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

L'identification d'invariants - une entrée dans la pensée algébrique - un exemple au collège en France

CIAVALDINI Jérôme-Ange – DEMAILLY Marie-Claire – GRAVAS Julien – LE-MEN Karine – SOFONEA Carmen – BOULAIS Pascale – DURAND-GUERRIER Viviane[1]

Résumé – Un enjeu important de la scolarité obligatoire au début du collège (élèves 12-14 ans) est de permettre aux élèves une entrée réussie dans l'algèbre. Dans ce texte, nous défendrons l'importance de l'identification d'invariants dans des activités mettant en jeu des nombres entiers pour favoriser l'entrée des élèves dans la pensée algébrique. Nous illustrerons ceci dans le cas d'une situation didactique empruntée à Gustavo Barallobres que nous avons mise en œuvre à de nombreuses reprises dans nos classes.

Mots-clefs : Pensée algébrique, invariants, situation didactique, conjecture, dimension expérimentale en mathématique.

Abstract – An important issue of compulsory education at the beginning of secondary school (pupils aged 12-14) is to enable pupils to successfully enter algebra. In this paper, we will defend the importance of identifying invariants in activities involving natural numbers to help students enter algebraic thinking. We will illustrate this in the case of a didactic situation borrowed from Gustavo Barallobres that we have implemented many times in our classes.

Keywords: Algebraic thinking, invariants, didactic situation, conjecture, experimental dimension in mathematics.

1. IREM de Perpignan, Académie de Montpellier, France

Introduction

Il est bien connu que l'entrée dans l'algèbre est un facteur d'échec électif au début du collège (élèves entre 12 et 14 ans), y compris pour des élèves ayant été en réussite en mathématiques jusque-là. De nombreux travaux de recherche abordent cette question (voir par exemple Coulange et al. 2012). Dans le groupe IREM[2] de Perpignan[3], nous avons souhaité proposer à des élèves des classes de cinquième et de quatrième des activités pour les aider à entrer dans la pensée algébrique, comme préalable à l'introduction de l'algèbre au sens propre du terme.

Nous voulions utiliser une situation dont le scénario respecte la théorie des situations didactiques de Brousseau tout en s'appuyant sur le lien développé entre pensée algébrique et invariants, décrits dans de nombreux travaux (Bronner, A. & Squalli, H. (2021), *La généralisation dans la pensée algébrique*, Revue québécoise de didactique des mathématiques, vol 3, p. 3-38). Toute collection de situations qui caractérisent une même connaissance mathématique, possède au moins une situation fondamentale qui les génère toutes par la détermination des valeurs de ses variables (La théorie des situations didactiques de Brousseau, article d'Alain Kuzniaj[4]). Le groupe IREM de Perpignan a vu dans la situation didactique développée par Gustavo Barallobres dans sa thèse[5] et présentée au colloque EMF 2008 à Sherbrooke (Barallobres et Giroux 2008) le potentiel d'une situation fondamentale. Cette situation illustre de ce que la multiplication des expériences, en appui sur des objets, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves, et contribue de manière essentielle au processus de conceptualisation (Vergnaud, 1991).

Elle pourrait générer, au moyen des patterns (motifs), des situations visant le développement de l'algèbre chez l'élève de 12 ans. Nous émettons donc l'hypothèse que la recherche d'invariants dans cette situation d'actions mettant en jeu des entiers naturels permet une entrée fondamentale et facilitée dans la pensée algébrique.

Dans cette proposition de communication, nous allons tout d'abord préciser ce que nous entendons par invariant et pourquoi nous faisons l'hypothèse de leur rôle dans l'entrée dans la pensée algébrique. Nous présenterons ensuite la situation didactique retenue en motivant nos choix et en donnant des éléments d'analyse a priori centrée sur l'émergence d'invariants en lien avec les conjectures attendues. Nous terminerons par des analyses de travaux d'élèves issues de mises en œuvre en classe.

2. Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
3. Groupe délocalisé à Perpignan de l'IREM de l'académie de Montpellier
4. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/ST/IST04030/IST04030.pdf
5. https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/bitstream/handle/1866/16466/Barallobres_Gustavo_2005_these.pdf

Rôle des invariants dans l'émergence d'une pensée algébrique

Un aspect essentiel de l'algèbre est son aspect formel, entendu au sens que ce terme peut avoir par exemple lorsque l'on parle de logique formelle chez Aristote : les raisonnements conduits en algèbre sont valides ou non en fonction de leur forme : par exemple, si vous avez une équation de la forme $ab+ac = d$, vous pouvez la transformer en l'équation équivalente $a(b+c)=d$. Ces deux équations auront exactement les mêmes solutions en raison de leur forme, ce qui renvoie à la syntaxe des deux expressions. On parlera ici d'équivalence syntaxique.

Cependant, en amont de ces équivalences syntaxiques, se trouvent des équivalences sémantiques, que l'on peut repérer à partir d'invariants dans les calculs numériques. Si nous revenons à l'exemple ci-dessus, imaginez une situation où vous avez des boites d'œufs comportant soit six œufs, soit quatre œufs, et vous devez préparer des commandes pour lesquelles on vous demande systématiquement de fournir autant de boite de 4, que de boites de 6. Lorsque vous préparez la commande, vous devez indiquer le nombre de boites commun et le nombre total d'œufs de la commande. Au bout de quelques commandes réalisées, il va apparaître un invariant : le nombre total d'œufs est égal à 10 fois le nombre de boîtes. Ceci permet de remplacer le calcul $4B + 6B$ où B représente le nombre de boîtes par la multiplication $10B$; or $10 = 4 + 6$. Ceci ayant été observé, on peut identifier que connaissant le nombre total d'œufs commandés par l'entreprise, il suffit de diviser ce nombre par dix pour avoir le nombre de boîtes de chaque catégorie. Ceci va faire émerger un nouvel invariant : si le nombre d'œufs commandé est un multiple de 10, on pourra fournir exactement tous les œufs demandés avec des boîtes complètes. Si ce nombre n'est pas un multiple de 10, il n'y a pas de solution en nombres entiers de l'équation. Comme on travaille dans le domaine discret, on va s'intéresser au reste dans la division euclidienne et il faudra décider ce que l'on fait de ces œufs restants (aspect pragmatique). Pour poursuivre dans la voie de recherche d'invariants dans une perspective de généralisation, on pourra varier les types d'objets et les nombres en conservant la même règle : par exemple fabriquer deux types de colliers avec des nombres de perles différents en ayant le même nombre de type de colliers pour chaque commande. Progressivement, un nouvel invariant pourra apparaître associer à la règle de la distributivité mentionnée ci-dessus. En accord avec Larguier (2015, p. 327), nous considérons que l'identification d'invariants en situation est un indicateur d'un début de pensée algébrique.

La situation que nous présentons ci-dessous est issue de la thèse de Gustavo Barallobres. Elle a été présentée lors du congrès EMF 2006 à Sherbrooke (Barallobres et Giroux 2008). Elle a été adaptée pour une implémentation dans des classes ordinaires par les membres du groupe de l'IREM de Perpignan (Académie de Montpellier) en France et elle a été mise en œuvre à de nombreuses reprises. Une présentation de ce travail est publiée dans Boulais (2022). Dans ce texte, après avoir présenté rapidement la situation, nous mettons l'accent sur les opportunités a priori qu'offre cette situation pour faire émerger des invariants. Nous terminerons en montrant sur des exemples de productions d'élèves l'apparition en situation de tels invariants.

Une situation didactique favorisant l'identification d'invariants

La situation qui a été retenue et adaptée est construite autour du problème : « Calculer le plus rapidement possible la somme de 10 nombres consécutifs ». C'est un cas particulier du problème général « Trouver le plus rapidement possible la somme de p nombres consécutifs commençant à n ». Une première variable didactique de ce problème est la parité du nombre p. En effet, lorsque p est impair, le résultat est nécessairement un multiple de p ; tandis que lorsque p est pair, le résultat n'est jamais un multiple de p. Ici, nous sommes dans le cas pair. Une forme générale du résultat est

$$\sum_{k=n}^{k=n+p-1} k = pn + \sum_{k=1}^{p-1} k = pn + \frac{p(p-1)}{2} \quad (1)$$

que l'on peut écrire sous d'autres formes équivalentes comme par exemple

$$\sum_{k=n}^{k=n+p-1} k = \frac{p(2n+p-1)}{2} \quad (2)$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir le cas où le nombre de termes de la liste est 10 nombres consécutifs, les principaux invariants susceptibles d'apparaitre sont d'une part 45 qui correspond à la somme des entiers de 1 à 9, qui est elle-même un invariants, « 10 fois le premier nombre » ainsi que l'invariant « 2 fois le premier nombre plus 9 ». Les trois premiers sont liés à la formule (1), le dernier à la formule (2). Il y a également des invariant de structure, notamment la somme entre deux types d'invariants, le produit ou demi produit d'un invariant par le nombre de termes de la liste.

Dans la mise en œuvre en classe, l'organisation didactique prend appui sur la théorie des situations didactiques (Brousseau 1988) en jouant sur une alternance de phases d'action (sous forme de jeu), de phases de formulation des méthodes les plus rapides et de phases de validation pour justifier les méthodes. Les phases d'actions sont propices à l'identification en acte de certains invariants ; les phases de formulation des méthodes permettent de les expliciter pour préparer les débats pendant les phases de validation qui visent à ce stade à produire des justifications ne faisant pas appel à l'algèbre qui n'a pas encore été introduite en classe. A ce niveau, nous faisons l'hypothèse que les nombres entiers et les opérations élémentaires sur les entiers sont suffisamment stabilisés pour que les élèves aient confiance dans les résultats de leurs calculs ; ils jouent ainsi le rôle d'objets concrets au sens de Durand-Guerrier (2019).

Émergence a priori des invariants dans les phases d'action

La première phase est une phase d'expérimentation et de recherche. Les élèves vont faire des calculs en essayant d'être astucieux et de dégager des conjectures qu'ils mettront à l'épreuve de la série suivante. Les actions possibles et accessibles aux élèves de collège sont nombreuses. Elles sont présentées par exemple dans Durand-Guerrier (2010). La phase d'action est organisée sous la forme d'un jeu où les élèves jouent individuellement. Le critère de rapidité vise à faire émerger des méthodes variées. Certaines méthodes de calcul vont favoriser l'apparence des invariants. Nous donnons ci-dessous les principales[6].

Méthode 1 – Décomposer les nombres sous la forme N, N+1, N+2, …, N+9

Cette méthode fait appel en acte à la notion théorique de « nombres consécutifs ». Cette méthode favorise l'apparition de l'invariant « 10 fois le premier nombre » auquel il faut ajouter « la somme des entiers de 1 à 9 », ce qui produit par calcul l'invariant 45. Ceci produit directement l'une des méthodes la plus rapide.

Méthode 2 – Faire des regroupements par paire

Écrire la liste en ligne et regrouper les nombres par paire : le premier avec le dernier, le second avec l'avant dernier et ainsi de suite. Dans ce cas, à chaque étape, le résultat est « 2 fois le premier nombre +9 ». On voit donc apparaître ici le dernier invariant que nous avions mentionné plus haut. Comme on avait 10 nombres, on a cinq paires, il faut donc multiplier par 5. Cette méthode se justifie par la compensation des écarts au sein des différentes paires.

Méthode 2bis – A la manière du jeune Gauss

Cette méthode consiste à écrire la liste des nombres en ligne, puis à écrire dessous la liste en commençant par le dernier terme, puis l'avant dernier et ainsi de suite. Pour la même raison que dans la méthode 2, toutes les sommes sont égales à « 2 fois le premier nombre plus 9 ». Ici cet invariant apparaît 10 fois, mais en multipliant par 10, on obtient deux fois la somme. Il faut donc diviser par 2.

6. Nous ne donnons pas ici toutes les méthodes possibles. Pour une étude plus complète voir Boulais (2022) ou le site DREAM : https://clarolineconnect.univlyon1.fr/clarolinepdfplayerbundle/pdf/4019128.

Méthode 2ter – Utiliser la médiane

Recopier la liste et la partager en deux parties égales. Comme il n'y a pas de nombre au milieu (car 10 est un nombre pair), il faut introduire « le nombre du milieu », qui n'est pas un entier, qui correspond à la moitié de l'invariant « 2 fois le premier nombre +9 ». Les écarts entre les deux listes se compensent. Le résultat est dix fois « le nombre du milieu ».

Notons que considérée comme une méthode générale, elle fournit une justification au fait que lorsque le nombre p de termes de la liste est pair, le résultat n'est jamais un multiple de p, et permet de prouver que lorsque p est impair, le résultat est toujours un multiple de p (en effet, dans ce cas, la médiane est un nombre de la liste).

Méthode 3 – Ajouter les nombres en colonnes

Cette méthode très élémentaire et qui peut sembler a priori peu rapide peut permettre d'identifier après 2 ou 3 itérations que la somme des unités est toujours égale à 45, et avec une observation un peu plus fine, que la somme des dizaines est toujours égale au nombre de départ. Ceci s'appuie sur les propriétés de la numération décimale de position. Notamment, dans ce système, une liste de 10 nombres consécutifs comporte toujours une fois et une seul chacun des chiffres des unités de 0 à 9. Une fois les invariants identifiés, il est possible d'abandonner cette méthode un peu fastidieuse pour une des méthodes les plus rapides, à savoir « multiplier par 10 le premier nombre et ajouter 45 ».

Notons que l'identification de ce dernier invariant peut aussi éventuellement résulter de l'observation. Ceci peut être le cas si on laisse au tableau pour les différentes étapes la liste des nombres et le résultat une fois celui-ci confirmé collectivement. Notons aussi qu'il est intrinsèquement lié à la numération décimale de position, ce qui explique que nous ne l'ayons pas mentionné dans la liste a priori donnée plus haut.

Méthode 4 – Décomposition décimale

Cette méthode est très proche de la précédente ; elle consiste à décomposer les nombres en dizaines et unités, et à faire la somme des dizaines, puis la somme des unités et à ajouter les deux résultats. Cette méthode fait émerger l'invariant 45 ; comme pour la méthode précédente, ceci est justifié par le fait que dans une somme de dix nombres consécutifs, toutes les unités de 0 à 9 apparaissent une fois et une seule.

Les phases de formulation pour expliciter les méthodes

Dans les mises en œuvre dont sont issus les travaux d'élèves analysés dans la section suivante, les phases de formulation font suite aux phases d'action. Elles se déroulent en groupe de trois ou quatre élèves, en faisant en sorte que dans chaque groupe il y ait au moins un élève ayant répondu rapidement pendant les phases d'action. La consigne proposée est « Échangez sur vos stratégies de calcul et mettez-vous d'accord sur la plus rapide. Expliquez cette stratégie sur la feuille A_4 comme vous le feriez pour un camarade absent. Vous pourrez tester cette stratégie sur deux nouvelles séries après le travail de groupe ». Compte tenu du rôle a priori des invariants dans l'évolution des méthodes individuelles pendant las phases d'action, nous faisons l'hypothèse que les productions d'élèves permettront d'identifier certains des invariants mobilisés par les élèves pendant les phases d'action.

Des invariants dans les productions des élèves

Dans cette section, nous rendons compte de l'identification d'invariants par les élèves à partir des productions des groupes dans les phases de formulation, que nous retranscrivons ici.[7]

Identification de l'invariant 45

> Groupe 2[8] : « On calcule d'abord les dizaines et après les unités. Le nombre des unités fait tout le temps 45 parce que c'est tout le temps 1, 2, 3, 4 etc… ».

Dans ce groupe, on peut faire l'hypothèse que les élèves ont mis en œuvre la méthode 4 qui leur a permis d'identifier l'invariant 45 ; ils ont en outre identifier l'invariant de la liste des unités, qui permet de justifier l'invariant 45. Ceci est manifeste par l'usage deux fois de l'expression « tout le temps ».

> Groupe 3 : On multiplie le premier chiffre de la série par le nombre des autres chiffres et on ajoute toutes les différences avec les autres chiffres.
>
> 10+45

Les élèves mentionnent d'abord un invariant concernant la structuration du calcul. Ils produisent ensuite une expression formelle rendant compte de la structure et montrant qu'ils ont identifié l'invariant 45.

7. Les scans des copies correspondantes sont disponibles dans Boulais (2022)
8. Les numéros des groupes correspondent à ceux de Boulais (2022).

Groupe 4 : On prend le dernier nombre de la liste, on ajoute un zéro et on enlève 45.

36-37-38-39-40-41-42-43-44-45

450-45=405

Il n'y a pas de justification pour ce groupe permettant de faire des hypothèses sur la ou les méthodes ayant conduit à l'identification de 45 et à une structure correcte, que nous n'avions pas anticipée.

Groupe 5 : On prend le 5ème chiffre de la série puis on ajoute 5 car les chiffres de 0 à 9 ça fait 45 ; alors automatiquement à la fin il y aura 5.

Exemple : 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 = 585

58 puis on met 5 à la fin.

Dans ce groupe, on ne sait pas comment ils ont identifié le rôle du 5ème nombre de la liste ; en revanche, ils justifient le fait qu'il faut ajouter 5 (sous-entendu à droite du 5ème nombre) par la somme des entiers de 0 à 9.

Identification d'un invariant de type structure

Les productions de plusieurs groupes montrent l'identification d'un invariant de type structure, qui marquent selon nous clairement une entrée dans la pensée algébrique. On l'a vu déjà avec les groupes 3 et 4 analysés ci-dessus. C'est aussi le cas pour la production du groupe 7 ci-dessous.

Groupe 7 : notre stratégie est de prendre le premier nombre et le dernier nombre de la liste. On les additionne et on fait fois 5.

Ceci correspond à la méthode 2. Bien qu'il n'y ait pas de justification, la mise en œuvre de cette méthode nécessite au moins en acte l'identification de l'invariant de la somme des paires.

Conclusion

Dans cette communication, nous avons mis l'accent sur le rôle que peut jouer l'identification d'invariants dans l'entrée dans la pensée algébrique dans des situations didactiques élaborées à cet effet. Nous avons retenu et adapté une situation pensée par Gustavo Barallobres comme situation d'entrée dans l'algèbre, que nous avons mises en œuvre à de nombreuses reprises dans des classes de début de collège. Les analyses des productions d'élèves pendant les phases de formulation suivant les phases d'action montrent que les invariants identifiés a priori apparaissent de manière régulière. On observe dans cette situation plusieurs aspects essentiels de la dimension expérimentale en mathématique pour les apprentissages mathématiques : la multiplication des expériences, en appui sur

des objets, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet [ici les nombres entiers], favorise l'élaboration de nouveaux objets conceptuels et de leurs propriétés (Durand-Guerrier, 2010). Comme le montre les analyses des preuves produites par les élèves dans Boulais (2022, pp. 14-19), les invariants qui émergent pendant les phases d'action et de validation nourrissent le milieu pour la validation, et favorisent par là-même l'entrée dans une pensée algébrique. L'IREM de Perpignan pense que la situation pensée par Gustavo Barallobres est une situation fondamentale permettant l'émergence d'une pensée algébrique.

Bibliographie

Barallobres, G. & Giroux, J. (2008), Différents scénarios de situations d'une phase de validation collective, in *Actes électroniques du colloque EMF 2006*, Sherbrooke, pp. 27- 31 mai 2006.

Boulais, P. (2022)

Brousseau, G. (1998), *La théorie des situations didactiques*, La Pensée sauvage.

Larguier M. (2015) Première rencontre avec l'algèbre. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* – GT3, pp. 313-333.

Coulange, L, Drouhard, J-P., Dorier, J-L, Robert, A. (2012) Enseignement de l'algèbre élémentaire - Bilan et perspectives. *Recherches en didactique des Mathématiques*, numéro spécial.

Durand-Guerrier, V. (2010), La dimension expérimentale en mathématiques. Enjeux épistémologiques et didactiques. http://educmath.ens-lyon.fr/applet/exprime/texteintroress.pdf.

Durand-Guerrier, V. (2019), La théorie des situations didactiques comme levier pour penser les rapports au monde des connaissances mathématiques, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018. Penser et organiser les articulations entre abstrait et concret dans l'apprentissage des mathématiques, de la maternelle à l'université*. pp.370-382. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410/document.

Titre: Rapports personnels originels à la notion de hasard dans le secondaire au Bénin

Auteurs: DANDJINOU Henri et BRONNER Alain

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 271 - 284

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Rapports personnels originels à la notion de hasard dans le secondaire au Bénin

DANDJINOU[1] Henri – BRONNER[2] Alain

Résumé – Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au développement de la pensée probabiliste chez les élèves béninois des deux cycles de l'enseignement secondaire général. Nous avons notamment évalué leur rapport personnel à la notion de hasard dans des classes où la première rencontre avec les probabilités n'est pas officiellement prévue. En utilisant des outils de la théorie anthropologique du didactique, nous avons montré qu'il existe des traces de la pensée probabiliste à tous les niveaux d'études au secondaire.

Mots-clefs : Probabilités, hasard, rapport personnel, classe de sixième, classe de seconde.

Abstract – In this work, we are interested in the development of probabilistic thinking among Beninese students of the two cycles of general secondary education. In particular, we assessed their personal relationship to the notion of chance in classes where the first encounter with probabilities is not officially planned. Using tools from the anthropological theory of didactics, we have shown that there are traces of probabilistic thinking at all levels of secondary education.

Keywords : Probabilities, chance, personal relationship, sixth grade, second grade.

1. Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Bénin, hdandjinou@yahoo.fr

2. Université de Montpellier, France, alain.bronner@umontpellier.fr

Introduction et problématique

Depuis la fin relative de leur construction à partir des travaux de Kolmogorov, les probabilités constituent un domaine des mathématiques pures, utiles dans plusieurs autres domaines scientifiques dont les principaux sont la mécanique quantique, la génétique, les sciences actuarielles et la statistique. En dehors de cette utilité, l'enseignement des probabilités dans le secondaire peut se justifier aussi par le fait que cet enseignement participe du développement de la pensée mathématique, dont une caractérisation est « liée à l'agir des individus et aux pratiques sociales à l'intérieur desquelles ces individus agissent » (Radford, 2015, p. 336). Le découpage de la mathématique en plusieurs domaines, mis en évidence dans les programmes d'enseignement, est une preuve que la pensée mathématique est plurielle. L'une de ses composantes est évidemment la pensée probabiliste, qui relève d'un mode de raisonnement, celui de l'aléatoire, complémentaire au déterminisme, qui caractérise les autres composantes de la pensée mathématique telles que la pensée algébrique, la pensée numérique, la pensée géométrique, etc. Si l'accent est mis sur la construction de la pensée numérique et la pensée géométrique dans les programmes du Bénin et d'autres pays francophones d'Afrique subsaharienne, à travers leur découpage en « activités numériques » et « activités géométriques », il n'en est pas de même pour la pensée probabiliste. La notion de hasard, socle de l'aléatoire, est la caractéristique fondamentale de la pensée probabiliste. Du point de vue de l'écologie du savoir, elle est une niche de la notion d'expérience aléatoire. Considérée comme un acquis social, la notion de hasard n'est évoquée ni dans les instructions officielles, ni par les enseignants au cours de l'étude des probabilités en classe, bien que plusieurs types d'obstacles à cette notion existent au niveau des élèves (Dandjinou et Bronner, 2017). Par ailleurs, depuis leur premier enseignement au Bénin, au milieu des années 1960, les probabilités sont enseignées en fin du second cycle et s'enseignent actuellement pour la première fois en classe terminale (17-18 ans).

Dans ces conditions de l'enseignement des probabilités, repoussé au plus haut niveau scolaire et pour lequel la notion de hasard devient un acquis social, il nous semble important d'évaluer le développement de la pensée probabiliste chez les élèves béninois n'ayant pas l'occasion de suivre les cours de probabilités. De façon précise, nous voudrions nous questionner sur l'existence de la pensée probabiliste chez les élèves dans les conditions actuelles de l'enseignement des probabilités au Bénin, en nous intéressant particulièrement à leurs rapports personnels à la notion de hasard dans les classes où l'enseignement des probabilités n'est pas prévu dans le curriculum. Nous formulons alors l'hypothèse que ces rapports personnels sont variés à tous les niveaux d'études, pouvant être conformes ou non au hasard du « tirage au sort » (Lahanier-Reuter, 1999). Il s'agira pour nous dans ce travail d'apporter des justifications supplémentaires aux noosphères africaines à la thèse que l'aléatoire n'est pas seulement à la portée des élèves de fin du secondaire.

Cadre théorique et méthodologie de recherche

Cadre théorique

Le cadre théorique mobilisé dans ce travail est constitué de la théorie anthropologique du didactique (TAD) aussi bien dans sa composante d'anthropologie cognitive (Chevallard, 1992) que dans celle d'organisation mathématique (Chevallard, 1999), et du concept d'obstacle au sens de Brousseau (1989).

Nous avons notamment emprunté à l'anthropologie cognitive le concept primitif de rapport personnel à un objet. L'objet est tout ce qui est étudié pour répondre à une question donnée (Chevallard, 1992). Celui de notre étude est le hasard et plus précisément le hasard du tirage au sort (Lahanier-Reuter, 1999), dont il est généralement question dans l'enseignement secondaire. L'institution d'étude est le « lieu moral » où l'étude est menée, tandis que les personnes sont celles qui sont concernées par l'étude (Chevallard, 1992). Dans notre travail, l'institution I est constituée selon le moment d'étude, de la classe de seconde (15-16 ans) ou de sixième (11-12 ans), premières classes respectives du second et du premier cycles du secondaire. Les personnes de notre étude sont les élèves, qui n'avaient reçu aucun enseignement de probabilités auparavant. Le rapport personnel $R_X(O)$ d'une personne X à un objet d'enseignement O est la connaissance et toutes les relations que la personne X a de l'objet, tandis que le rapport institutionnel $R_I(O)$ à l'objet O est tout ce que l'institution prévoit comme savoir relatif à cet objet (Ibid.). Dans notre contexte, où le rapport institutionnel RI(O) est vide, nous avons étudié le rapport personnel $R_X(O)$ chez les sujets élèves X de l'institution I.

L'organisation mathématique ou praxéologique sert à décrire, analyser, évaluer les rapports personnels, les rapports institutionnels, et plus généralement les apprentissages, les pratiques enseignantes (Chevallard, 1999). Les éléments qui le composent sont respectivement les notions de type de tâches, de technique, de technologie et de théorie. Le type de tâches précise l'objet de ce qu'on veut étudier. Pour un type de tâches T donné, une technique τ est une manière d'accomplir les tâches relevant de T. Pour une technique τ donnée, une technologie θ est tout discours rationnel sur cette technique. Elle a besoin, à son tour, d'une justification θ, que l'on appelle la théorie de la technique (Ibid.). Dans notre étude, l'organisation mathématique a servi à analyser les réponses des élèves aux consignes qui leur ont été proposées. Ainsi pour un type de tâches T précis, nous avons déterminé les différentes techniques associées, que nous avons justifiées par leurs technologies et théories respectives.

Enfin, pour identifier et caractériser les rapports personnels à l'objet hasard, nous avons mobilisé le cadre de la théorie de Brousseau (1989) relative à la notion d'obstacle. En effet, reprenant les travaux de Bachelard (1934), Brousseau confirme le statut d'obstacles des erreurs récurrentes, persistantes et prévisibles, qui ne sont que des effets de connaissances antérieures. Il complète alors la classe des obstacles épistémologiques, par celles d'obstacles ontogéniques et didactiques (Brousseau, 1989).

Méthodologie de recherche

Au plan méthodologique, nous avons réalisé en 2017, et ceci dans une classe de seconde scientifique, une première expérimentation d'enseignement des probabilités dont l'une des perspectives est la réalisation d'autres expérimentations au premier cycle de l'enseignement secondaire. C'est la raison principale d'une seconde expérimentation, réalisée en 2021 dans une classe de sixième. Au nombre de 16, les élèves de la classe de seconde ont un âge moyen de 15 ans, tandis que ceux de la classe de sixième sont au nombre de 39 avec un âge moyen de 12 ans. Les modèles d'enseignement que nous avons conçus comportent pour chacun des deux niveaux d'études concernés une situation élaborée dans le but de surmonter les obstacles à la notion de hasard, préalablement identifiés chez les élèves des classes terminales scientifiques dans des travaux antérieurs (Dandjinou et Bronner, 2017).

Pour chacune des consignes de la situation, les réponses et réactions des élèves sont alors analysées en vue d'étudier le rapport personnel des élèves à la notion de hasard. Compte tenu de la différence entre les niveaux d'études concernés par notre travail, les situations d'enseignement proposées n'ont pas les mêmes énoncés bien qu'elles visent le même objectif.

Rapports personnels à la notions de hasard en classe de seconde

Nous présentons dans cette section les résultats de l'expérimentation réalisée en classe de seconde pour identifier et surmonter les obstacles à la notion de hasard dans le cadre d'un enseignement des probabilités. La situation d'apprentissage conçue, son analyse a priori, ainsi que l'analyse a posteriori de sa mise en œuvre sont les éléments essentiels de cette section.

Présentation de la situation de la classe de seconde et son analyse a priori

La situation proposée aux élèves de seconde en 2017 s'énonce comme suit.

> Dansou dispose d'un cauri ayant une face plane (P) et une face courbe (C) qu'il désire lancer quatre fois de suite.
>
> Question Q1 : Quel résultat obtiendrait Dansou, s'il lance le cauri pour la première fois ? Argumente ta réponse.
>
> Question Q2 : Dansou a lancé le cauri trois fois de suite et a obtenu les résultats CCC. Quelle face obtiendrait-il s'il lance le cauri une quatrième fois ? Argumente ta réponse.

Le cauri, coquillage assimilable à un solide ayant deux faces non équiprobables, est un élément important du milieu (Brousseau, 1997). Il est virtuel, car les élèves n'ont pas été autorisés à en faire usage, bien que des cauris leur aient été montrés au début de la séance. Mais il est aussi social, car faisant partie de l'environnement familier des élèves. Organisés en cinq groupes de 3 ou 4 personnes, les élèves ont été invités à travers les deux questions à prédire le résultat du lancer d'un cauri, et à faire de même lorsque les résultats sont connus pour des lancers précédents. Ils ont fonctionné sur la base de leur rapport initial au hasard et ont travaillé individuellement, puis en petits groupes avant la phase de validation pendant laquelle les élèves se sont exprimés pour le compte de leurs groupes respectifs.

Dans le fond, la deuxième question posée a fait l'objet d'une étude sur le rapport des collégiens et des lycées à l'indépendance d'expériences aléatoires par Maury (1985) puis par Dhieb (2009). Nous l'exploitons plutôt pour détecter les obstacles éventuels à la notion de hasard, comme nous l'avions déjà fait dans nos travaux antérieurs (Dandjinou et Bronner, 2017). Pour l'ensemble des deux questions, nous avons envisagé six types de rapports personnels que nous avons nommés respectivement « tirage au sort », « compensation », « confirmation », « géométrie du cauri », « mécanique » et « fatalité » (Dandjinou, 2020). Le type de rapports « tirage au sort » regroupe les réponses dans lesquelles les élèves soutiendront pour chacune des deux questions que le résultat du lancer est imprévisible, et sera donc soit (C), soit (P). Ce type de rapports est conforme au hasard du « tirage au sort ». Le type de rapports « compensation » comprend les réponses où il est affirmé au niveau de la deuxième question que le résultat ne peut être que (P), en prétextant que la face (P) n'était pas encore jusque-là apparue. C'est l'une des conceptions que Piaget et Inhelder (1951) ont remarquées chez l'enfant du stade préopératoire, qui juge plus probable l'éventualité la moins fréquente. Dans ce même registre, il y a le type de rapports « confirmation » selon lequel l'éventualité la plus fréquente serait la plus probable. C'est fort de cela qu'il est envisageable que certains élèves prédisent le résultat (C) au niveau de la question Q_2. Quant au type de rapports « géométrie du cauri », il concerne les élèves qui soutiendront au niveau des deux questions que le résultat du lancer serait (C), en se basant sur la forme géométrique du cauri, qui fait de la face (C), l'éventualité la plus probable. Le type de rapports « mécanique » est celui qui pourrait faire dire à certains élèves que le résultat d'un lancer dépend de la manière dont le cauri est lancé. Enfin, le type de rapports « fatalité » est basé sur une conception déterministe selon laquelle le résultat du lancer dépend du pouvoir surnaturel de celui qui a lancé le cauri. Ce type de réponses peut s'expliquer par l'existence dans la société béninoise d'une mentalité caractérisée par un comportement fataliste.

Analyse a posteriori

Les deux questions de la situation sont des spécimens d'un même type de tâches T : « Prédire le résultat d'une expérience aléatoire ». Chez les élèves, la technique relevant effectivement de ce type de tâches pour chacune des questions Q_1 et Q_2 consiste à identifier l'expérience aléatoire et à donner le résultat du premier lancer pour la question Q_1 et celui du quatrième lancer pour la question Q_2. Les

réponses proposées par les élèves montrent que cette technique ne met pas l'accent sur l'imprévisibilité du résultat de l'expérience aléatoire. La technologie qui justifie cette technique est basée sur l'intuition ou l'expérience personnelle des élèves par rapport au jeu de lancer de dé ou de pièce de monnaie. Deux types de réponses sont identifiés pour la question Q_1 et quatre pour la question Q_2.

Pour ce qui est de la question Q_1, où il est question de prédire le résultat d'un seul lancer d'un cauri, deux groupes d'élèves ont estimé que le résultat du lancer serait (C) ou bien (P) avec l'argument que le résultat dépendra de la manière dont le cauri est lancé tel que le précise la formulation suivante de ces élèves.

> Si Dansou lance le cauri pour la première fois, le résultat qu'il obtiendra dépend de la manière dont il a lancé. Il pourra trouver le résultat (P) ou (C).

Les trois autres groupes d'élèves ont prédit la face (C) comme résultat du lancer, ce qu'ils justifient par le fait que le cauri reposera nécessairement sur la face (P), compte tenu de la forme géométrique du cauri, comme on peut s'en rendre compte dans la formulation ci-après.

> Si Dansou lance le cauri pour la première fois, il obtiendra la face (C), car le cauri ayant deux faces, une face plane et une face courbe, pour que le cauri soit totalement immobile la face plane doit rester sur la terre.

Ainsi au niveau de la question Q_1, on note l'absence de la réponse pouvant soupçonner un rapport personnel conforme à celui du hasard du « tirage au sort », selon lequel le résultat est dû au hasard et serait soit (C), soit (P), mais avec une plus forte chance pour l'obtention de (C).

Concernant la question Q_2, qui demande de prédire le résultat du quatrième lancer sachant qu'il est obtenu CCC comme résultats des trois premiers lancers, quatre groupes, dont les trois qui avaient prédit la face (C) comme résultat du premier lancer, ont confirmé ce résultat mais avec deux arguments différents de celui évoqué précédemment. Pour l'un de ces groupes, c'est une certaine pression qui est exercée sur le cauri pour obtenir (C) pour chacun des trois premiers lancers et cette même pression sera exercée pour le quatrième lancer.

> Comme c'est la même personne. C'est la manière dont il avait lancé les autres fois, c'est la force qu'il avait exercée sur le cauri, qu'il exercera de nouveau.

Il nous semble que ce raisonnement n'est pas anodin. C'est possible qu'il soit la conséquence d'une explication du professeur selon laquelle c'est le lanceur qui immobilise le cauri avec la main. Indépendamment de cette cause probable, ce type de réponses peut être classé dans le type de rapports « mécanique » prévu dans l'analyse a priori.

Un autre argument avancé par deux autres groupes ayant prédit la face (C) comme résultat du quatrième lancer semble traduire le type de rapports « confirmation » mais nuancé.

> Si Dansou lance le cauri une quatrième fois, ce serait la face (C), car il a lancé le cauri trois fois et cela est tombé sur la face (C). Donc c'est fort probable qu'elle tombe encore sur la face (C).

La nuance vient du fait que les élèves n'ont pas précisé à ce niveau qu'on obtiendrait nécessairement la face (C). On pourrait dire qu'ils affirment par leur réponse que le résultat pourrait être (C) ou (P), montrant ainsi un certain rapport en construction conforme à celui du hasard du « tirage au sort ». En répondant à la préoccupation du professeur, qui a cherché à comprendre la nuance cachée dans l'expression « il est fort probable », les élèves ont confirmé qu'il s'agit bien d'un rapport adéquat au hasard du « tirage au sort », avec apparemment une reconnaissance de la situation comme une situation d'équiprobabilité pour certains.

> Prof : Vous avez dit que c'est la face (C), vous dites encore que c'est fort probable. Dans « fort probable là », est-ce qu'on comprend que c'est forcément (C) ? C'est forcément (C) que vous dites ou bien ça pourrait être (C) ou (P).
>
> Un élève d'un groupe : C'est fort possible.
>
> Un autre élève du même groupe : Ça pourrait être (C) ou (P).
>
> Un troisième élève du groupe : A moitié (C), à moitié (P).

L'un des groupes ayant prédit la face (C) comme résultat du quatrième lancer n'a pas accepté d'argumenter. Ce groupe est l'un des deux groupes ayant prédit que le résultat du premier lancer serait (C) ou (P). Tout logiquement, leur réponse concernant le résultat du quatrième lancer pourrait correspondre au rapport « géométrie du cauri », sur lequel leur réponse à la question Q_1 était basée.

La réponse proposée par le groupe qui avait prédit le résultat du premier lancer comme pouvant être (C) ou (P) peut être classée dans le type de rapports « compensation », car les élèves de ce groupe ont déclaré que le résultat du quatrième lancer serait la face (P), en argumentant que le lanceur chercherait à immobiliser le cauri sur une autre face que la face (C) observée à l'issue de chacun des trois premiers lancers.

> Si Dansou lançait le cauri pour la quatrième fois, il pourrait obtenir la face (P) car étant donné qu'il a lancé trois fois et obtenu la face (C), il va chercher à immobiliser le cauri sur une autre face d'une autre manière.

A travers cette réponse, qui donne la preuve de la présence du type de rapports « compensation », selon lequel l'éventualité la moins fréquente est la plus probable, on peut noter une nuance qui ne lie pas nécessairement ce résultat à un effet quelconque du hasard, mais qui le lie plutôt à la volonté du lanceur à immobiliser le cauri sur la face (P).

En somme, à travers les réponses effectives des élèves à la question Q_2, il apparaît chez les élèves des types de rapports au hasard identiques aux types de rapports « tirage au sort », « géométrie du cauri », « mécanique » et « compensation », prévus dans l'analyse a priori. Si les deux premiers semblent être clairement exprimés, les deux autres sont nuancés par un effet de l'enseignement, celui d'avoir faire croire que le cauri lancé devrait être immobilisé par son lanceur. Les types de rapports « confirmation » et « fatalité », également inventoriés au niveau de l'analyse a priori, semblent être absents chez les élèves concernés par l'expérimentation que nous avons réalisée en classe de seconde.

Rapports personnels à la notion de hasard en classe de sixième

La situation d'apprentissage élaborée pour la classe de sixième dans le cadre de notre expérimentation, son analyse a priori, ainsi que l'analyse a posteriori de sa mise en œuvre sont présentées dans cette section.

Présentation de la situation de la classe de sixième et son analyse a priori

La situation proposée en classe de sixième s'énonce comme il suit :

> 1) Une pièce de monnaie a deux faces : Pile et Face.
>
> Baké lance une pièce de monnaie. Quel résultat peut-elle obtenir ? Justifie ta réponse.
>
> 2) Baké lance trois fois une pièce de monnaie et elle a obtenu successivement Pile, Face, Face.
>
> Quel résultat obtiendra-t-elle si elle lance la pièce de monnaie une quatrième fois ? Justifie ta réponse.

La situation proposée en sixième est une situation d'équiprobabilité avec une pièce de monnaie supposée implicitement équilibrée. Contrairement à la situation de la classe de seconde, il n'est pas interdit aux élèves de sixième, organisés en cinq groupes de 7 à 8 élèves, de lancer des pièces de monnaie pour répondre aux questions qui leur sont posées. Les types de rapports envisageables sont ceux évoqués dans l'analyse a priori de l'expérimentation de la classe de seconde, à l'exception du type de réponses « géométrie du cauri ». Il s'agit notamment des types de réponses « tirage au sort », « compensation », « confirmation », « mécanique » et « fatalité » tels qu'ils sont définis plus haut.

Analyse a posteriori

Dès les premiers instants du travail en petits groupes, les élèves de quatre groupes ont eu à lancer des pièces de monnaie, pendant que ceux du cinquième groupe ont répondu aux questions sur la base de leur intuition et de leur expérience personnelle. En dehors de la technique évoquée au ni-

veau de l'expérimentation faite en classe de seconde, il se dégage ainsi chez les élèves de la classe de sixième, une seconde technique pour l'unique type de tâches : « prédire le résultat d'une expérience aléatoire ». Elle consiste à identifier l'expérience aléatoire, lancer un nombre défini de fois une pièce de monnaie, et donner la réponse à la question posée.

Au niveau de la première question qui consiste à prédire le résultat qu'obtiendrait Baké si elle lance une pièce de monnaie pour la première fois, trois groupes sur les cinq ont affirmé que le résultat serait le côté « Face » en avançant des justifications diverses. Pour certains, c'est après avoir lancé effectivement une pièce de monnaie, qu'ils ont trouvé que Baké obtiendra le côté « Face ». Pour d'autres, Baké pourrait l'obtenir par chance. Ci-dessous les termes dans lesquels les élèves de ces groupes se sont exprimés.

> Selon nous, elle peut obtenir la face de la pièce parce qu'elle peut avoir la chance.
>
> Nous nous sommes considérés comme Baké et nous avons fait l'expérience. A la fin de l'expérience, nous avons trouvé la face.

Pour avoir lancé aussi une pièce de monnaie, les élèves d'un autre groupe, ont répondu que Baké trouverait plutôt le côté « Pile ». Certains, ont estimé qu'elle obtiendrait « Pile » ou « Face » comme l'indique la conversation ci-dessous.

> Elève : Elle peut obtenir une partie de la pièce.
>
> Prof. : Oui, ça veut dire quoi ? Expliquez-nous un peu une partie de la pièce.
>
> Élève : Elle obtient Pile ou Face.
>
> Prof. : Donc, c'est pile ou face. Pourquoi ?
>
> Élève : Parce que les faces sont « posables » au sol.

Par « posable au sol », nous comprenons que la pièce peut reposer sur l'un quelconque de ses côtés. À voir de près, les élèves de ce groupe, qui donnent ici les éventualités de l'expérience aléatoire, semblent avoir à cette étape un rapport personnel conforme à celui du « tirage au sort ». La forme géométrique régulière de la pièce de monnaie a certainement favorisé ce rapport.

Concernant la deuxième question, où les élèves devraient prédire le résultat du quatrième lancer de la pièce de monnaie, sachant que les trois premiers avaient donné « Pile, Face, Face », nous avons eu les mêmes types de réponses qu'au niveau de la première question, avec évidemment des justifications différentes. Pour deux groupes, le résultat est « Pile » parce que Baké avait trouvé plus de « Face » que de « Pile » pour les trois premiers lancers. Nous sommes clairement en face du type de rapports « compensation ».

Pour la quatrième fois, elle peut trouver « Pile », parce qu'elle a trouvé « Pile » quand elle a lancé pour la première fois et pour les deux autres fois, elle a trouvé « Face ».

Pour ce même résultat, un groupe d'élèves a dit avoir fait l'expérience en lançant quatre fois une pièce de monnaie, mais ayant obtenu Face, Pile et Face pour les trois premiers lancers comme le confirme la conversation ci-dessous.

Prof. : Quand vous avez lancé les trois premières fois, est-ce que vous avez trouvé Pile, Face, Face comme Baké ?

Élève : Face deux fois, on a trouvé Pile deux fois, la deuxième et la quatrième fois, on a trouvé Pile.

Les élèves de ce groupe ne sont pas dans la catégorie « compensation », puisque l'expérience qu'ils ont réalisée pourrait conduire à un autre résultat.

Le seul groupe qui avait prédit qu'au premier lancer, Baké obtiendrait Pile ou bien Face, n'est pas resté constant dans son argumentation. Il est passé au type de rapports « Confirmation » au niveau de la deuxième question. Les membres du groupe ont estimé que pour le quatrième lancer Baké obtiendrait « Face » parce que le côté « Face » lui porte chance, étant donné qu'elle avait obtenu plus de « Face » que de « Pile » pour les trois premiers lancers.

La quatrième fois, elle trouvera Face parce que la Face est sa partie chanceuse.

En somme, les types de rapports effectivement observés en sixième sont « compensation » et « confirmation ». Le rapport personnel conforme à celui du hasard du tirage au sort n'a pu être observé que partiellement. Les réponses proposées avec la technique consistant à réaliser l'expérience aléatoire sont de l'ordre du déterminisme auquel les élèves sont jusque-là habitués.

Discussion et conclusion

Au total, quatre types de rapports à la notion de hasard ont caractérisé les élèves de la seconde. Il y a d'abord, le rapport personnel visé par l'expérimentation menée, celui du « tirage au sort ». Ensuite, il y a le type de rapports « compensation ». Ce type de rapports traduit ainsi un obstacle ontogénique (Brousseau, 1989) persistant ici chez des sujets plus âgés (15-16 ans). Le type de rapports « géométrie du cauri » est également observé. Il traduit une certaine appréhension des phénomènes aléatoires non équiprobables chez les élèves. Ce qui justifie, de notre point de vue, la maturité certaine de ces élèves à mener de façon évidente des raisonnements basés sur l'aléatoire. Enfin, le type de rapports « mécanique » apparait dans notre expérimentation comme un obstacle didactique, provoqué par l'enseignant dans ses explications.

Au niveau des élèves de la classe sixième (11-12 ans), nous avons clairement identifié dans notre expérimentation deux types de rapports à la notion de hasard. Il s'agit des types de rapports « Compensation » et « Confirmation », qui constituent un obstacle ontogénique comme nous l'avions fait remarquer au niveau des élèves de la classe de seconde. Sans être totalement absent, le type de rapports « tirage au sort » n'est observé que partiellement.

Notre étude semble confirmer les résultats des travaux de recherche relatifs à l'enseignement précoce des probabilités dont notamment ceux de Fischbein et ses collaborateurs (1969, 1971) et de Brousseau (2005). En effet, les connaissances préalables, basées fondamentalement sur les acquis sociaux, favorisent le débat sur l'aléatoire à tous les niveaux d'études de l'enseignement secondaire. Chez les plus jeunes, le contexte social caractérisé entre autres par les jeux de hasard, bien que favorisant davantage le rapport des élèves à la notion de hasard, n'empêche pas l'existence des obstacles d'ordre ontogénique caractérisés dans notre étude par les types de rapport « Compensation » et « Confirmation » (Savard, 2008). Sans un apprentissage formel, ils persistent chez un bon nombre d'élèves parmi les plus grands.

Dans ce cadre, il importe que l'attention des enseignants soit conduite au cours des formations sur l'existence d'obstacles de diverses natures à la notion de hasard, dont ceux évoqués précédemment. Il serait alors souhaitable que ces obstacles soient identifiés et surmontés, ou du moins pris en compte et travaillés à l'entrée officielle des élèves dans la pensée probabiliste.

Pour terminer, nous voudrions formuler sous forme de question, un plaidoyer à l'endroit de la noosphère béninoise ainsi qu'à celles des pays francophones au Sud du Sahara. À quand l'introduction des probabilités dans les programmes d'études du premier cycle du secondaire ?

Références bibliographiques

Bachelard G. (1934). *Formation de l'esprit scientifique, Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*, Édition électronique de Jean-Marie Tremblay, 288 pages.

Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. *In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), Construction des savoirs, Obstacles et Conflits* (pp. 41-63). Montréal: CIRADE : Les éditions Agence d'Arc inc. En ligne à l'adresse : https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516581v2/document

Brousseau G. (1997), *Théories des situations didactiques*. Conférence de Montréal, récupéré à l'adresse : http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf

Brousseau, G. (2005). Situations fondamentales et processus génétiques de la statistique. In A. Mercier & C. Margolinas (dir.), *Balises en didactique des mathématiques : Cours de la 12e École d'été de didactique des mathématiques (pp. 165-194)*. Grenoble : La Pensée sauvage, téléchargeable sur le site de Guy Brousseau à l'adresse : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/03/03-Sit-fond-et-processus-g%C3%A9n%C3%A9tiques-de-la-stat.pdf

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une anthropologie. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 12, n°1, p. 73-112

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2). La Pensée Sauvage.

Dandjinou, H. (2020). *Enseignement des probabilités dans l'enseignement secondaire au Bénin : Apport d'une démarche expérimentale à l'apprentissage*. Thèse de doctorat, Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, Université d'Abomey-Calavi, Bénin, téléchargeable à l'adresse https//tel.archives-ouvertes.fr/tel-03606616

Dandjinou, H. et Bronner, A. (2017). Rapport personnel a l'objet hasard dans l'enseignement secondaire au Bénin. *Revue de Mathématiques pour l'École (RMé)*, N°228, Septembre 2017, pp. 42-49.

Dhieb, M. (2009). *Contribution à l'introduction des probabilités au collège : rapports d'élèves à quelques notions probabilistes* (Thèse de doctorat). Université Paris Descartes, France. Récupéré du site http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00507751

Fischbein E., Pampu I., Minzat I. (1969). Initiation aux probabilités à l'école élémentaire, *Educational Studies in Mathematics 2* (1969), pp. 16-31.

Fischbein E., Barbat I., Minzat I. (1971). Intuitions primaires et intuitions secondaires dans l'initiation aux probabilités, *Educational Studies in Mathematics 4* (1971), pp. 264-280.

Lahanier-Reuter D. (1999). *Conceptions du hasard et enseignement des probabilités et statistiques*. Presses Universitaires de France, 1ère édition, Novembre 1999

Maury S. (1985). Influence de la question dans une épreuve relative à la notion d'indépendance. *Educational Studies in Mathematics 16* (1985), pp. 283-301.

Piaget J. et Inhelder B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Presses universitaires de France, 2e édition, 4e trimestre 1974.

Radford L. (2015). Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – *Actes du colloque EMF2015* – GT3, pp. 334-345.

Savard A. (2008). *Le développement d'une pensée critique, Envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités à l'école primaire : Vers une prise de décision*, Thèse de doctorat, Faculté des Sciences de l'Éducation, Université Laval, Québec.

Titre: La résolution des contradictions - Un levier pour développer les compétences logiques

Auteur: DURAND-GUERRIER Viviane

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 285 - 297

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

La résolution des contradictions
Un levier pour développer les compétences logiques

DURAND-GUERRIER Viviane[1]

Résumé – Dans ce texte, après avoir précisé ce que nous entendons par l'expression *résolution des contradictions*, nous montrons en appui sur quatre exemples dont deux ne relevant pas des mathématiques, l'intérêt potentiel d'un travail explicite en classe sur la résolution des contradictions pour contribuer au développement des compétences logiques. Dans nos analyses, nous prenons en compte les articulations entre syntaxe, sémantique et pragmatique.

Mots-clefs : logique, contradiction, syntaxe, sémantique, pragmatique.

Abstract – In this text, after having specified what we mean by *resolution of contradictions*, we show, based on four examples, two of which are not related to mathematics, the potential interest of an explicit work in class on the resolution of contradictions to contribute to the development of logical competences. In our analyses, we consider the articulations between syntax, semantics, and pragmatics.

Keywords: logic, contradiction, syntax, semantics, pragmatics.

1. Université de Montpellier, IMAG, CNRS-UM, France, viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr

Introduction

La pensée logique fait partie de manière intrinsèque de la pensée mathématique, notamment en lien avec le raisonnement et la preuve. De ce fait, les mathématiques sont généralement considérées comme un lieu privilégié pour développer les compétences logiques ; il faut cependant noter que la pensée logique s'exerce dans de très nombreux domaines de la connaissance humaine. Nous abordons dans ce texte la contradiction avec l'acception qu'elle a en logique[2] depuis Aristote[3], et nous considérons que pour envisager la résolution d'une contradiction, il est nécessaire de prendre en compte les trois aspects suivants ainsi que leurs interrelations : la syntaxe, qui renvoie à la forme des énoncés, autrement dit à leur grammaire ; la sémantique, qui correspond à l'interprétation des énoncés en jeu dans un univers de discours donné, en lien avec leur valeur de vérité ; la pragmatique qui prend en compte notamment les sujets, les contextes d'énonciations et les usages qui en sont fait. Comme le souligne Da Costa (1997, p.42), et contrairement à ce que l'on pourrait croire, ceci vaut aussi pour les mathématiques (Durand-Guerrier, 2005, p.113-114). En effet, dans l'activité mathématique d'un sujet donné, qu'il soit un expert ou un novice, ses connaissances du domaine, sa familiarité avec les objets en jeu, ses capacités à mettre en relation différents domaines mathématiques jouent un rôle dans sa manière d'aborder et de résoudre un problème, ce qui relève explicitement de la dimension pragmatique. Dans ce qui suit, nous allons tout d'abord expliciter ce que nous entendons par l'expression *résolution des contradictions* et nous donnons ensuite quatre exemples : une situation ordinaire fictive mais réaliste ; une situation tirée d'un roman d'Agatha Christie ; un paradoxe mathématique attribué à Lewis Carroll ; une contradiction mettant en jeu l'infini actuel résolue par Dedekind au moyen d'une définition théorique.

La résolution des contradictions : syntaxe, sémantique et pragmatique.

Les relations entre logique et langage sont étroites, dans la mesure où l'on peut considérer la logique comme une modélisation des modes de raisonnement conduits dans la langue naturelle permettant de traiter des relations entre vérité dans une interprétation et vérité obtenue comme conséquence d'un raisonnement valide (Durand-Guerrier, 2008).

Énoncés contradictoires : articulation entre syntaxe et sémantique

On dit que deux énoncés sont contradictoires si et seulement s'ils échangent leurs valeurs de vérité, c'est-à-dire que si l'un est vrai, alors l'autre est faux et vice-versa. Autrement dit, l'un est la négation de l'autre. Dans une langue donnée, on reconnaît que deux énoncés sont contradictoires avec des cri-

2. Dans ce texte, le terme *logique* fait référence à la logique classique du premier ordre.

3. Dans le livre 2 de l'organon, De l'Interprétation, traduit par Jean Tricot dans Aristote (1989)

tères grammaticaux (syntaxiques). Il n'est pas nécessaire pour cela de savoir lequel des deux énoncés est vrai. Nous donnons ci-dessous trois exemples.

Exemple 1 : *3 est un nombre pair / 3 n'est pas un nombre pair*. Il s'agit de phrases singulières ; la négation se construit en introduisant l'expression « ne…pas » sur le verbe.

Exemple 2 : *Tout nombre se terminant par 7 est un nombre premier / Il existe un nombre se terminant par 7 qui n'est pas un nombre premier*. Le premier est un énoncé universel. Sa négation est un énoncé existentiel qui exprime l'existence d'un contre-exemple.

Exemple 3 : Il existe un nombre entier dont le carré est 2 / Aucun nombre entier n'a pour carré 2. Le premier énoncé est un énoncé existentiel ; le second est un énoncé universel introduit par le quantificateur aucun, qui en logique correspond à « Tous, non » (à ne pas confondre avec « Tous, ne pas » qui, du point de vue la norme linguistique française, correspond à « Non, tous »)[4].

Deux énoncés contradictoires ne peuvent pas être vrais en même temps, ni être faux en même temps (sémantique). Dans une langue donnée, les énoncés contradictoires suivent des règles de grammaires (syntaxe), comme on le voit dans les exemples ci-dessus.

En logique classique, la conjonction de deux énoncés contradictoires est un énoncé qui est nécessairement faux. En effet, un tel énoncé est de la forme *P* et *non P* ; en raison de sa forme (sa syntaxe), il est faux dans tout univers du discours non vide quel que soit l'interprétation de l'énoncé *P*, et de ce fait, comme le souligne Wittgenstein, il ne décrit aucun état de chose

> 4.462 – La tautologie et la contradiction ne sont pas des images de la réalité. Elles ne représentent pas d'état de choses possibles. Car la tautologie admet chaque état de chose possible, la contradiction n'en admet aucun. (Wittgenstein, 1921, 1961, p.63)

Si on s'en tenait à ce point de vue logique, on devrait rejeter les contradictions hors du champ de la rationalité humaine. Pourtant, comme nous allons le discuter dans ce texte, des contradictions peuvent apparaître dans différents contextes, et loin de devoir les balayer d'un revers de la main, s'engager dans leur résolution peut faire émerger des interprétations possibles permettant de reconsidérer les raisonnements ayant conduits aux énoncés contradictoires en jeu.

Contradiction dans une situation donnée – introduction de la dimension pragmatique

On dira qu'on est présence d'une contradiction lorsque dans une situation donnée on est en présence de deux énoncés qui devraient être contradictoires (en raison de leur grammaire, leur syntaxe), mais qui sont interprétés dans cette situation comme étant tous les deux vrais (leur sémantique).

4. Pour des analyses sur ces questions, voir par exemple Durand-Guerrier (2016)

Cette définition prend en compte le contexte, la situation dans lesquels les énoncés sont produits et interprétés, ce qu'on appelle la dimension pragmatique.

Pistes pour la résolution d'une contradiction

Dans le monde réel ordinaire, comme en mathématiques, il n'est pas possible que deux énoncés contradictoires (en raison de leur syntaxe) soient simultanément vrais (point de vue sémantique). Dans le cas où cela se produit, pour tenter de résoudre la contradiction, on peut[5] 1/ se donner les moyens de décider lequel des deux énoncés contradictoires est vrai (et par suite lequel est faux) ; 2/ remettre en cause des énoncés tenus pour vrais (implicites ou explicites) qui ont conduit à établir les deux énoncés contradictoires, et faire des hypothèses alternatives ; 3/ montrer que d'autres interprétations des énoncés sont possibles (point de vue sémantique) et montrer que c'est bien le cas dans la situation (point de vue pragmatique) ; 4/ faire évoluer le contexte théorique dans lequel la contradiction est apparue. Dans ce qui suit, nous allons illustrer ceci par des exemples variés relevant ou non des mathématiques.

Une situation ordinaire fictive mais réaliste

Un matin, Manuel arrive au travail et se rend compte qu'il n'a pas ses clés avec lui. Il est pourtant sûr d'avoir fermé la porte à clé. Il téléphone à un voisin qui habite dans le même immeuble. Il lui dit que lorsqu'il est parti de chez lui pour aller au travail, il a fermé la porte à clé et *les clés sont restées sur la porte*. Et il lui demande s'il veut bien aller récupérer les clés et les garder jusqu'à ce qu'il rentre du travail. Cinq minutes plus tard, son voisin le rappelle et lui dit : *les clés ne sont pas restées sur la porte*. Les deux énoncés soulignés sont contradictoires. En effet, le second est la négation du premier. Par suite, nécessairement, l'un est vrai et l'autre faux. Mais lequel ? Manuel et son voisin se trouve en présence d'une contradiction : *les clés sont restées sur la porte* et *les clés ne sont pas restées sur la porte*. Comme cette contradiction ne peut pas décrire un état de chose existant, il est nécessaire de chercher à la résoudre. Pour cela, une des premières choses que l'on peut faire, c'est identifier les hypothèses implicites ou explicites qui ont conduit à ces deux énoncés contradictoires, afin de les examiner. Il y a une hypothèse explicite (H1) : Manuel a fermé la porte à clé avant de partir au travail (il en est sûr). Il y a également une hypothèse implicite (H2) : le voisin a été vérifié que les clés n'étaient pas sur la porte et il ne s'est pas trompé de porte. Afin de questionner H1, le voisin peut aller voir si la porte est bien fermée à clé.

Imaginons que c'est bien le cas, la porte est fermée à clé, l'hypothèse H1 est confirmée ; il va falloir examiner d'autres hypothèses : Manuel a peut-être mal cherché en arrivant au bureau ; il cherche à nouveau pour s'assurer qu'il ne les a pas avec lui. S'il les trouve, la contradiction est résolue. S'il ne les trouve pas, c'est peut-être qu'il les a perdues, ou qu'il les a oubliées quelque part (par exemple, il s'est

5. Cette liste n'est pas exhaustive. Elle correspond à ce que nous allons illustrer dans ce texte.

arrêté pour prendre un café, il avait ses clés à la main, il les a laissées sur le comptoir) ; et cela peut déclencher de nouvelles actions (par exemple appeler le bar) ; et ainsi de suite. Imaginons maintenant que le voisin s'aperçoive que la porte en fait est restée ouverte. Premier scénario - Les clés sont à l'intérieur ; Manuel a oublié de fermer la porte en partant ; l'hypothèse H1 est invalidée ; le premier énoncé est faux – la contradiction est résolue. Second scénario - L'appartement a été cambriolé – quelqu'un a vu les clés sur la porte, les a prises et en a profité pour rentrer et voler quelques objets. Dans ce cas, la contradiction n'était qu'apparente. Il faut en effet introduire ici le paramètre temps : le premier énoncé était vrai au moment où Manuel est sorti de chez lui ; il était faux deux heures plus tard lorsque le voisin est allé vérifier. Il n'y a pas de contradiction. Naturellement, ceci n'épuise pas les possibles ; vous pouvez vous-mêmes imaginer d'autres scénarios. On peut aussi interroger l'hypothèse H2 : il se pourrait par exemple que le voisin se soit trompé de porte.

Au début de l'épisode, on nous dit que Manuel est sûr d'avoir fermé la porte de chez lui. Dans un ouvrage écrit à la fin de sa vie, Wittgenstein s'interroge sur la certitude :

> 193. Qu'est-ce que cela veut dire que la vérité d'une proposition est certaine ?
>
> 194. Par le mot « certain », nous exprimons la conviction totale, l'absence de moindre doute, et nous cherchons par là à convaincre autrui. C'est la certitude subjective.
>
> Mais quand y-a-t-il de l'objectivement certain ? – quand une erreur n'est pas possible. Mais quel genre de possibilité est-ce là ? Ne faut-il pas que l'erreur soit logiquement exclue ? (Wittgenstein, 1969, 1976. p. 66)

Ce que montre l'analyse précédente, c'est qu'une certitude subjective peut (doit) être mise en doute dès lors qu'elle fait émerger une contradiction. Une telle contradiction étant logiquement exclue (du point de vue de la logique classique), il est nécessaire de questionner les certitudes subjectives. Ce ressort joue un rôle important dans la résolution de nombreuses contradictions comme on va le voir dans les deux exemples suivants.

Un exemple tiré d'un roman policier

Dans un roman publié en 1944 par Agatha Christie, intitulé *Sparkling Cyanide*, et traduit en Français sous le titre *Meurtre au champagne* en 1983, un des personnages expose avec brio la résolution, qu'il qualifie lui-même de géniale, d'une contradiction[6]. Nous nous situons à un moment du roman où un des personnages, George Barton, a été assassiné. Tony, qui était présent le jour du meurtre expose

6. Cet exemple est analysé plus longuement dans Durand-Guerrier (2005 ; 2006). Il a également été présenté à la Première journée mondiale de la logique à l'université de Montpellier le 14 janvier 2019. Le diaporama de l'exposé intitulé « Vérité versus validité à la lumière de la méthodologie des sciences déductives » est disponible en ligne à l'adresse : https://www.lirmm.fr/~retore/WLD/WorldLogicDay2019.html.

avec brio à Iris, elle aussi présente le jour du meurtre, sa solution au problème insoluble a priori qui s'est posé à la suite de l'assassinat de George.

> L'affaire, grosso modo, paraissait simple comme bonjour. Ce que j'entends par là, c'est que les relations de cause à effet s'imposaient […]. L'enchainement logique, si je peux m'exprimer ainsi, semblait évident. Seulement quelques contradictions évidentes sont presque aussitôt apparues. Telles que : a) Personne n'a pu être empoisonné ; b) George a été empoisonné. Et a) Personne n'a touché à la coupe de George ; b) Quelqu'un a mis du poison dans la coupe de George. (Christie, 1944, 1983, p. 432)

De la première paire d'énoncés suit la contradiction : *George n'a pas été empoisonné* et *George a été empoisonné*. La conjonction des énoncés de la deuxième paire est également un énoncé contradictoire qui s'appuie sur l'hypothèse H : « on ne peut pas avoir mis du poison dans la coupe de George sans l'avoir touché ». C'est en examinant la deuxième contradiction, que Tony va avoir une idée géniale :

> En réalité, je négligeais un élément capital, à savoir les différents degrés d'appartenance.
>
> « L'oreille de George » est incontestablement l'oreille de George. […] Mais par « la montre de George », je me borne à désigner la montre que porte George. […] Et quand j'en arrive à la « coupe de George » […] je commence à me rendre compte que l'appartenance évoquée recouvre une réalité des plus vagues. (ibid, pp. 432-433)

Tony propose ainsi de se placer sur le niveau sémantique en considérant les différents degrés d'appartenance selon les objets considérés : l'oreille de George / la montre de George / la coupe de George. Bien que les structures syntaxiques soient identiques, la « force » de la relation d'appartenance dépend des objets dont on parle. La reconnaissance de la faiblesse de la relation concernant la coupe laisse entrevoir une possibilité de résolution : on pourrait imaginer qu'il y ait eu un changement dans les coupes, ce qui invaliderait l'hypothèse H, et par là le raisonnement conduisant à la contradiction. Mais, à ce stade, rien ne permet de l'affirmer. Pour montrer la possibilité de l'échange, Tony se livre alors à une petite expérience. Il construit une situation artificielle dans laquelle l'énoncé implicite « on ne peut pas avoir mis du poison dans la coupe de quelqu'un sans l'avoir touché », qui pourrait sembler certain, est mis en défaut.

Pour cela, il s'installe avec deux personnes autour d'un guéridon, chacun ayant une tasse de thé devant lui contenant des boissons différentes mais semblant identiques ; l'un des personnages (Kemp) a une pipe posée à côté de sa tasse. Sous un prétexte, Tony fait sortir à la hâte ses amis, et il profite de la bousculade pour changer la place de la pipe. Lorsqu'ils rentrent à nouveau, le possesseur de la pipe s'assied à la place où se trouve sa pipe. Après avoir exposé son expérience à Iris, il s'exclame :

> Oui, mais notez bien sur quoi débouche mon subterfuge : sur une nouvelle contradiction entre a) et b) ! En effet, a) la tasse de Kemp contenait du thé sucré ; b) la tasse de Kemp contenait du café. Deux propositions antagonistes qui ne pouvaient être vraies toutes les deux…. Et qui pourtant l'étaient bien. (ibid, p. 433)

Cette expérience conduite par Tony montre que de l'énoncé : *Quelqu'un a fourré du poison dans la coupe de George* (1), on ne peut pas déduire l'énoncé : *Quelqu'un a touché la coupe de George* (2). Ceci ouvre la possibilité que l'énoncé (2) soit faux, bien qu'il soit établi que l'énoncé (1) soit vrai (puisqu'il est établi que George a été empoisonné). Autrement dit, il se peut que le contenu de la coupe de George ait été modifié sans que personne n'ait touché à la coupe de George. A ce stade, il s'agit seulement d'une possibilité. Pour poursuivre le raisonnement, il faut prendre en compte la dimension pragmatique en examinant ce qui s'est réellement passé ce jour-là, dans cette situation, dans ce lieu avec ces personnes. C'est ce que Tony explique à Iris.

> Et ça Iris, c'est ce qui s'est passé au Luxembourg le jour où George Barton est mort. A la fin des attractions, quand nous sommes tous allés danser, vous avez laissé tomber votre sac. Un garçon l'a ramassé, non pas le garçon qui connaissait votre place, mais un garçon, un petit serveur anxieux, pressé […] Il a ramassé le sac et l'a placé près de l'assiette qui se trouvait à gauche de la vôtre, et vous êtes allée tout droit à la place indiquée par votre sac. Quant à George, il a pris ce qu'il croyait être sa place, à votre droite, et quand il a proposé un toast (..) il a bu dans ce qu'il croyait être sa coupe mais qui était en réalité votre coupe – coupe dans laquelle le poison avait facilement pu être versé (…) (ibid, pp.433-434)[7].

Ce retour minutieux au fait renvoie à la dimension pragmatique de l'analyse logique. Ceci ne clôt pas l'analyse de l'intrigue. A ce stade, il n'y a pas encore de certitude absolue de ce que les places ont été changées. Mais le raisonnement de Tony oriente les recherches pour résoudre l'intrigue : en effet ceci conduit Tony à envisager que la personne visée était Iris. Ce qui se révèle être le cas dans la suite du roman.

Ces deux premiers exemples nous ont permis d'illustrer les articulations entre la syntaxe, la sémantique et la pragmatique pour conduire les raisonnements permettant de traiter les contradictions apparentes. L'exemple suivant va nous permettre de le faire dans le cadre des mathématiques.

7. Iris est la seule convive à ne pas avoir bu dans son verre avant d'aller danser car un toast lui a été porté.

Un paradoxe mathématique attribué à Lewis Caroll

Nous nous intéressons dans cette section à un paradoxe mathématique attribué à Lewis Caroll (figure 2), en mettant l'accent sur la résolution des contradictions apparentes associées.

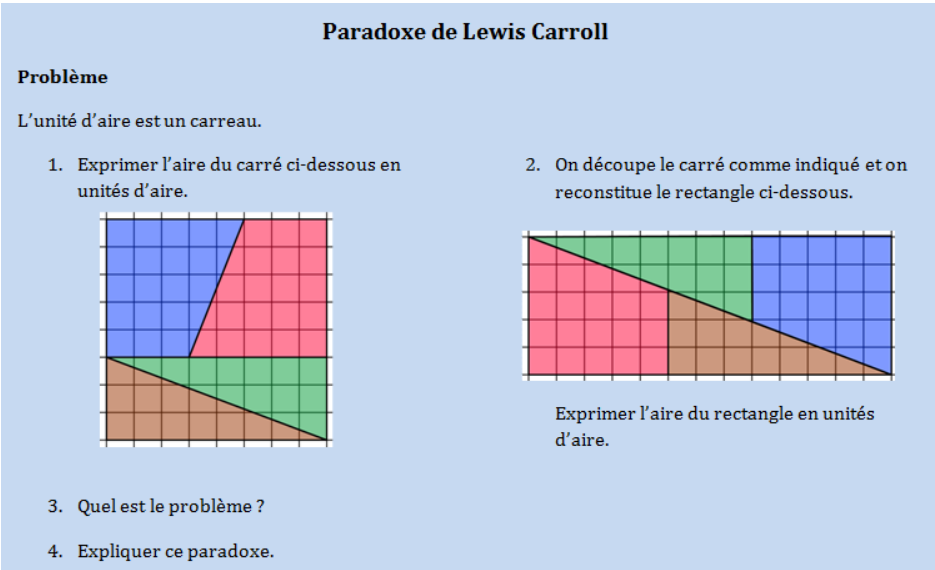


Figure 2 : Le paradoxe de Lewis Carroll[8]

Dans cet exemple, on peut rapidement identifier une première contradiction. 1. Le rectangle est composé des quatre figures découpées qui composaient le carré. Donc, *les deux quadrilatères ont la même aire* (propriété d'équidécomposabilité des aires). 2. a) Le carré est composé de 8 lignes comportant chacune 8 carreaux unités. Il contient donc 64 petits carreaux. L'unité d'aire est le petit carreau. Son aire est donc égale à 64 ; 2.b) Le rectangle est composé de cinq lignes comportant chacune 13 carreaux. L'unité d'aire est le petit carreau. Son aire est donc égale à 65. Par suite, *les deux quadrilatères n'ont pas la même aire*.

On est donc en présence d'un énoncé contradictoire : *Les deux quadrilatères ont la même aire et les deux quadrilatères n'ont pas la même aire*.

En mathématiques classiques (celles du primaire, du secondaire et des premières années d'université), on ne peut pas accepter de telles contradictions. Il est donc nécessaire de s'engager dans un processus de résolution de la contradiction. Nous rappelons que les deux énoncés ne peuvent pas être simultanément vrais. Un seul des deux énoncés est vrai ; l'autre est faux. On peut se convaincre facilement que le deuxième énoncé est vrai car le calcul de l'aire du carré et celui de l'aire du rectangle ne comportent pas d'erreur. Par suite, le premier énoncé doit être faux. Pourtant, il semble également

8. Relever le 17 mai 2022 sur : http://mathaulogis.wifeo.com/paradoxe-de-lewis-carroll.php

être vrai. Cet énoncé a été produit à l'issue d'un raisonnement dont nous décrivons les différentes étapes (qui peuvent ne pas être explicites)

1. Le rectangle est composé de quatre figures identiques à celles qui composent le carré (découpage et recomposition).
2. La somme des aires des quatre figures qui composent le carré est égal à l'aire du carré (par construction).
3. On applique le théorème d'équidécomposabilité des aires : S*i deux figures planes sont composées des mêmes sous figures, alors elles ont la même aire*.
4. On en déduit : le rectangle a la même aire que le carré

Figure 3 : Le raisonnement conduisant à affirmer le premier énoncé

Il s'agit ici d'un raisonnement direct simple (la règle d'inférence utilisé est le modus ponens) qui semble a priori valide. Pourtant, les calculs des aires des deux quadrilatères montrent que l'aire du rectangle est différente de celle du carré ; par suite l'énoncé obtenu comme conclusion de ce raisonnement est un énoncé faux. Dans un tel cas, il y a deux possibilités : 1/ le théorème utilisé n'en est pas un dans le contexte mathématique considéré ; 2/ le théorème utilisé est correct, mais les conditions d'applications ne sont pas remplies. Ici, nous sommes dans le cas 2/. Comme le théorème est un énoncé vrai dans ce contexte de mesure des aires, le fait que la conclusion soit fausse conduit à déduire que les conditions d'application du théorème ne sont pas vérifiées. Ceci conduit à une nouvelle contradiction : *le rectangle est composé de quatre figures identiques à celles qui composent le carré* et *le rectangle n'est pas composé de quatre figures identiques à celles qui composent le carré*. Pour appuyer le premier énoncé, on s'appuie sur une évidence perceptive (qui fournit en quelque sorte une certitude subjective) tandis que le second a été établi grâce au raisonnement précédent s'appuyant sur la contradiction liée aux aires. Cette nouvelle contradiction invite à se tourner vers la géométrie plane. Un examen de la figure permet de conjecturer que le problème se trouve au niveau de la diagonale du rectangle qui est tracé sur la figure : il est possible que les deux segments qui semblent former la diagonale du rectangle ne soient pas portés par la même droite. Cette conjecture est vraie. Pour le prouver, on peut par exemple utiliser le théorème de Thalès, ou montrer que les deux segments sont portés par des droites ayant des coefficients directeurs différents. On trouve régulièrement cette situation dans des manuels ou sur des sites en ligne, le plus souvent l'accent est mis essentiellement sur le calcul pouvant expliquer la différence des deux aires[9]. On se prive ainsi de la richesse potentielle de cette activité pour un travail d'analyse logique des raisonnements permettant de résoudre cette contradiction apparente. En particulier, il n'est pas si fréquent de proposer aux élèves d'analyser un raisonnement conduisant à un énoncé faux, dans le cas où le mode de raisonnement (ici la règle d'inférence utilisée) est valide.

9. On peut trouver une solution classique sur le site: http://mathaulogis.wifeo.com/paradoxe-de-lewis-carroll.php

Notre dernier exemple illustre le fait que dans l'histoire des mathématiques, la résolution de certaines contradictions peut être le moteur de nouveaux développements théoriques.

Une contradiction résolue par une définition théorique

La contradiction que nous examinons est discutée dans un texte célèbre de Galilée, traduit en français dans Galilée (1966). Elle apparaît en lien avec un questionnement sur la possibilité de comparer les infinis. Au cours du dialogue entre les personnages la contradiction suivante va émerger : *il y a autant de nombres carrés que de nombres entiers* et *il y a plus de nombres entiers que de nombres carrés*. Le premier énoncé est vrai car à chaque entier correspond son carré et étant donné un nombre carré, il existe exactement un entier naturel dont ce nombre est le carré. Le second énoncé est vrai car il y a de nombreux nombres entiers qui ne sont pas des nombres carrés. La première étape pour résoudre la contradiction consiste à remarquer que si on considère que le tout est formé de tous les entiers inférieurs à un entier donné, et la partie est formée des éléments de ce tout qui sont des carrés d'entiers, alors le premier énoncé est faux : il n'y a pas autant de carré d'entiers que d'entiers. Nous sommes dans le fini, il n'y a pas de contradiction. Une deuxième étape consiste à considérer l'énumération simultanée des nombres entiers et de leurs carrés. On construit ainsi deux suites en correspondance biunivoque. Étant donné un rang k de la suite, on peut considérer les deux ensembles comportant les valeurs de chacune des deux suites jusqu'au rang *k*. Ces deux ensembles ont la même taille, mais aucun n'est inclus dans l'autre. Dans ce contexte, l'énoncé : *il y a plus de nombres entiers que de nombres carrés* est faux. Il n'y a donc pas de contradiction, et ce même si on considère que l'énumération *ne s'arrête pas*, autrement dit même si on se place dans le point de vue de *l'infini potentiel*[10], associé à la suite illimitée des nombres entiers. Comme le savait bien Galilée, la contradiction apparaît lorsque l'on envisage de considérer la *collection achevée* de tous les entiers et celle de tous les nombres carrés. Dans ce cas la collection des nombres carrés est une partie propre de la collection des entiers. Suivant l'axiome euclidien du tout et de la partie, l'ensemble des entiers est plus grand que l'ensemble des carrés d'entiers, mais d'après la correspondance biunivoque, les deux collections devraient avoir la même taille. Pour résoudre la contradiction, il faut distinguer deux choses : l'inclusion comme ordre partiel sur les ensembles ; l'ordre induit par la mise en correspondance biunivoque entre les éléments de deux ensembles. Cet ordre permet pour les collections finies de comparer leur taille, et ce indépendamment de la nature des objets qui composent ces collections. Ce que montre l'exemple discuté par Galilée, c'est que dès lors que l'on considère des quantités infinies (au sens de collections d'objets) dont l'une est incluse dans l'autre les deux ordres (inclusion et comparaison de la taille) ne coïncident pas, et il est possible qu'une partie propre ait la même taille que la collection totale, ce qui est en contradiction avec l'axiome euclidien du tout et de la partie. Ceci a conduit Galilée, et d'autres mathématiciens après lui, à refuser l'existence d'un infini actuel[11]. Deux siècles plus tard, Dedekind

10. La distinction entre *infini potentiel* et *infini actuel* dans une approche philosophique, épistémologique et didactique est présentée et illustrée avec des exemples pour la classe dans Boulais et al. (2018).

11. Pour un exemple d'utilisation du texte de Galilée en classe l'obstacle de l'infini actuel, voir Boulais et al. 2018.

choisit de s'affranchir de l'axiome euclidien du tout et de la partie en définissant les ensembles infinis comme des ensembles pouvant être mis en bijection avec une de leur partie propre[12]. Ce faisant, il donne un statut théorique à l'infini actuel dans le cas des ensembles. Ceci permet de résoudre la contradiction initiale en considérant que l'expression : « plus …que » dans la deuxième phrase s'interprète du point de vue de l'inclusion entre ensembles, tandis que l'expression « autant …que » dans la première phrase s'interprète en termes de correspondance biunivoque (bijection). L'existence de cette bijection, entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres qui sont des carrés d'entiers, permet de prouver que l'ensemble des entiers naturels est un ensemble infini au sens de Dedekind.

Conclusion

Les contradictions sont présentes en mathématiques et dans de nombreux domaines de l'activité humaine. Leur résolution met en jeu les *aspects syntaxiques* (la grammaire des énoncés), les *aspects sémantiques* (ce à quoi renvoient les énoncés, leurs interprétations possibles, et leur valeur de vérité) et les *aspects pragmatiques* (le contexte d'énonciation, l'interprétation et les usages des énoncés par les sujets humains dans une situation donnée). Dans ce texte, nous avons montré que réfléchir à la manière de résoudre les contradictions permet de reconsidérer certaines hypothèses que l'on tenait pour acquises et d'envisager de nouvelles possibilités qui auraient pu nous échapper, en conduisant une analyse logique des raisonnements en jeu. De ce fait, ce travail contribue au développement de compétences logiques. En outre on peut faire l'hypothèse qu'un travail explicite en classe sur la résolution des contradictions pourrait servir de prolégomènes à l'étude du raisonnement par l'absurde dont le schéma peut s'interpréter dans cette perspective de la résolution des contradictions : sous une hypothèse *A* (la négation de ce que l'on veut prouver), on établit une contradiction (un énoncé de la forme *P* et *non P*). Pour résoudre cette contradiction, on rejette l'hypothèse *A*, ce qui revient à accepter la négation de A, c'est-à-dire en logique classique l'énoncé de départ[13].

12. Voir Dedekind (2008, page 173).

13. Pour une étude didactique pour le lycée du raisonnement par l'absurde, voir Bernard et al. (2018).

Références

Aristote (1989) *L'Organon, livre II - De l'interprétation* ; traduction Jean Tricot. Paris : Vrin.

Bernard D., Gardes D., Gardes M-L. ; Grenier D. (2018) Le raisonnement par l'absurde - Une étude didactique pour le lycée. *Petit x 108*, 5-40.

Boulais, P., Brouzet, R., Durand-Guerrier, V., Majaj, M., Marino, D., Monnoyeur, F., & Vergnac, M. (2018) Enseignement et apprentissage de l'infini. Aspects philosophiques, épistémologiques et didactiques. M. Abboud (Ed.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone*, (246-255), IREM de Paris.

Christie, A. (1944) *Sparkling Cyanide*. Collins. Traduction française : *Meurtre au champagne*, 1983, Le Masque.

Da Costa, N. C. A. (1997) *Logiques classiques et non classiques : essai sur les fondements de la logique*. Paris : Masson.

Dedekind, R. (2008) *La création des nombres*, traduction et notes par H. Sinaceur. Paris : Vrin.

Durand-Guerrier, V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Note de synthèse pour l'habilitation à diriger les recherches. Université Lyon 1. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00201626

Durand-Guerrier, V. (2006) La résolution des contradictions : apports de la sémantique logique. In V. Durand-Guerrier, J.L. Héraud, C. Tisseron (2006) *Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration des savoirs en classe*, 161-179. Lyon, Presses Universitaires de Lyon,

Durand-Guerrier, V. (2008) Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 40(3)*, 373–384.

Durand-Guerrier. V. (2016) Négation et quantification dans la classe de mathématiques. R. Daval, P. Frath, E. Hilgert; S. Palma. *Négation et référence*, ÉPURE - Éditions et Presses universitaires de Reims, pp.269-288, 2016, Res per nomen, 978-2-37496-021-0.

Galilée, G. (1966). *Dialogues. Lettres choisies*. Traduction de P-H Michel. Paris : Hermann.

Wittgenstein, L. (1921) Logisch-Philosophische Abhandlung. *Annalen der naturphilosophie* ; traduction française, Tractatus logico-philosophicus, Gallimard, 1961.

Wittgenstein, L. (1969) über Gewissheit. G. E. M. Anscombe and G. H. von Wright (Eds) Oxford: Basil Blackwell. Tr. Fr. *De la certitude*, Gallimard, 1976.

Titre: L'exploitation des transformations planes pour résoudre des problèmes de construction géométrique

Auteur: GBAGUIDI Ahonankpon Florent

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 298 - 302

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

L'exploitation des transformations planes pour résoudre des problèmes de construction géométrique

GBAGUIDI[1] Ahonankpon Florent

Résumé : La résolution des problèmes de mathématiques dévolus aux élèves ne doit pas se limiter la seule application des propriétés, des théorèmes, des définitions et autres. Il faut aussi des situations qui amènent des élèves à savoir mobiliser leurs connaissances pour résoudre des problèmes. Notre recherche nous a conduit en géométrie et plus particulièrement sur les problèmes de construction géométrique. Plus précisément, nous avons cherché, à travers la résolution des problèmes de construction géométrique, à faire vivre les transformations du plan au collège.

Mots-clefs : Dessin, construction géométrique, programme de tracé, transformations du plan, validation

Abstract : Solving the mathematical problems assigned to pupils should not be limited to the application of properties, theorems, definitions and so on. It also requires situations that lead students to know how to mobilize their knowledge to solve problems. Our research led us to geometry and more particularly to geometric construction problems. More precisely, we sought, through the resolution of geometrical construction problems, to bring to life the transformations of the plane in secondary school.

Keywords : Drawing, geometric construction, drawing program, plane transformation, validation

1. Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP) de l'UAC à dangbo-bénin-florent.gbaguidi@imsp-uac.org

Problème de construction géométrique : approche définitionnelle

Un problème de construction géométrique est un problème dont la tâche à accomplir sous certaines contraintes conduit à la réalisation d'un dessin, d'une figure géométrique, réalisation précédée d'un programme de construction suivi d'un raisonnement justifiant que le programme considéré permet d'obtenir la figure demandée. (Gbaguidi 2015, P. 62).

Aiguiser la faculté d'observation et de combinaison et donner à l'esprit de la clarté et de la logique, (Petersen 1866, p.1), en s'intéressant aux problèmes de construction géométrique, c'est le rôle qu'il définit pour ces types de problèmes.

Un exemple d'exploitation de l'application symétrie centrale pour résoudre un problème de construction géométrique

Problème

Dans la figure ci-dessous, le quadrilatère ABCD est un parallélogramme de centre I. Δ1 et Δ2 désignent respectivement les droites (CD) et (AB). La perpendiculaire Δ3 à Δ1 passant par le point B coupe Δ1 en E. Construire en utilisant uniquement la règle non graduée la perpendiculaire Δ4 à Δ2 passant par le par le point D.

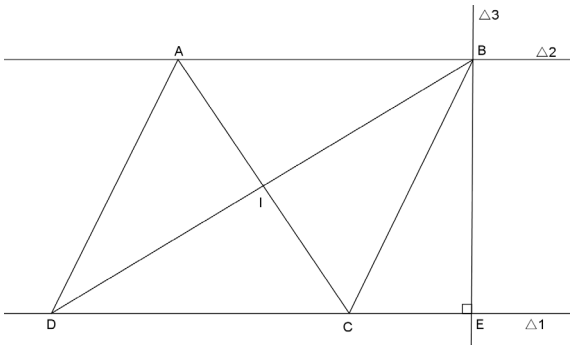


Figure 1 - Dessin de la figure de l'énoncé

Organisation mathématique

Cette situation fait apparaître le type de tâches T suivant : « construire la perpendiculaire à une droite donnée avec certaines contraintes ».

Construire en utilisant uniquement la règle non graduée, la perpendiculaire Δ4 à Δ2 passant par le point D est une tâche particulière relevant du type de tâches T. Procédons à une analyse praxéolo-

gique au sens de Chevallard (2009) de ce problème, sachant que la théorie utilisée est la géométrie euclidienne.

Type de tâches	Technique	Elements de technologies
Construire la perpendiculaire à une droite donnée avec certaines contraintes.	1-Tracer la droite (EI) ; elle coupe Δ2 en F. 2- Tracer la droite (DF). (DF) est la droite Δ4 cherchée. 3- Valider ce procédé de construction. (Voir ci-dessous)	-Définition de l'application symétrie centrale -Propriétés du parallélogramme et du rectangle -Propriétés de centre de symétrie d'un parallélogramme -Propriétés de deux droites symétriques par rapport à un point.

Tableau 1 - Organisation mathématique relative au problème

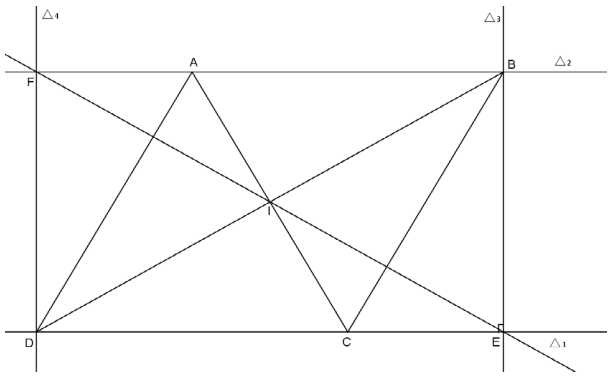


Figure 2 - Dessin de la figure demandée

Validation

On peut attendre la validation suivante qui est basée sur une articulation entre les techniques et les éléments technologiques. Désignons par SI l'application symétrie centrale ;

SI(E) = F, voici pourquoi : SI(Δ1) = Δ2. Or E Δ1 et la droite (IE) coupe la droite Δ2 en F ; d'où SI(E) = F. On a ainsi : SI(E) = F et SI(D) = B donc le quadrilatère FBED est un parallélogramme. Comme l'angle de sommet E est droit, alors FBED est un rectangle. Par suite (DF) Δ2. Or Δ4 doit être la perpendiculaire à la droite Δ2 passant par le point D. Δ4 et (DF) sont donc parallèles car elles sont perpendiculaires à une même troisième. Comme elles ont en commun le point D, alors elles sont confondues.

La figure à construire est la droite Δ4 perpendiculaire à Δ2 passant par le point D.

Références bibliographiques

Chevallard, Y. (2009), *La TAD face aux professeurs de mathématiques*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_professeur_de_mathematiques.pdf

Gbaguidi F. (2015) *La place et le rôle des problèmes de construction géométrique dans l'enseignement et dans l'apprentissage de la mathématique au cours secondaire au Bénin*, doctorat, université d'Abomey-Calavi, 396 pages

Petersen J. (1901) *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques* 3ème édition, p.1, Copenhague.

Titre: Un sens intrinseque et extrinseque de l'enseignement des mathematiques

Auteur: LAGUERRE Eric

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 303 - 316

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Un sens intrinseque et extrinseque de l'enseignement des mathematiques

LAGUERRE[1] Eric

Résumé – Cet article relève de la quête d'un sens qu'il est possible de donner à un contenu mathématique. Nous proposons, en premier lieu, des éléments de réponses en scrutant ce sens en dehors des mathématiques, grâce à la notion de modélisation de phénomènes de la réalité, mais également à l'intérieur des mathématiques par le biais de l'aspect structurant que peut apporter la notion de relation d'équivalence. Nous prenons appui d'une part sur les éclipses totales de soleil et d'autre part sur les angles et fractions.

Mots-clefs : sens intrinsèque et extrinsèque aux mathématiques, modélisation, organisation mathématique.

Abstract – This article is a search for a meaning that can be given to mathematical content. We propose, in the first place, elements of answers by examining this meaning outside mathematics, thanks to the notion of modelling phenomena of reality, but also within mathematics through the structuring aspect that the notion of equivalence relationship can bring. We build on the total eclipses of the sun and on the angles and fractions.

Keywords: intrinsic and extrinsic sense to mathematics, modelling, mathematical organization.

1. * Maître de Conférences Université Toulouse Jean Jaurès, France, eric.laguerre@univ-tlse2.fr

Introduction

Il est possible de distinguer deux types de mathématiques (Granger, 1988) :

les mathématiques dialectiques qui viseraient à construire une science rigoureusement logique et les mathématiques algorithmiques qui veulent avant tout créer des outils pour résoudre des problèmes. Deux approches des mathématiques à enseigner pourraient alors être mises en relation avec ces conceptions générales de notre rapport au monde. Au sein d'un enseignement fondé sur une approche empirique et contextualisée, Treffers (1987) pense que les connaissances peuvent provenir de l'observation et de l'expérience du monde. Ce type d'enseignement génère un processus de mathématisation « horizontale » de la réalité. Le réel rend légitime l'étude des concepts et leur sens est en partie extrinsèque à la discipline. Dans le cadre d'une approche structuraliste et décontextualisée des mathématiques, Treffers considère également que les axiomes et les théorèmes qui en découlent fondent leur enseignement par une mathématisation « verticale » qui est détachée du monde dit réel. Le sens des objets enseignés est intrinsèquement lié à la matière. Il prend sa source et se développe dans le cadre strict de cette science. Cette double approche nous a séduit mais il restait à chercher une réponse à la question fondamentale : que peut signifier précisément, dans l'enseignement, une mathématisation s'appuyant sur le réel ? Cela a été l'objet d'une première recherche en rapport avec le sens extrinsèque de l'enseignement des mathématiques (Laguerre, 2016). Notre travail a consisté à nous intéresser à la mathématisation de la réalité. En l'occurrence, nous cherchions à étudier la modélisation du réel non pas en science en général, mais dans l'enseignement des mathématiques et plus particulièrement dans le cadre de la trigonométrie au collège. La première partie de cette communication aura pour objet de rappeler succinctement ce travail afin de l'articuler avec la seconde approche, lié au sens intrinsèque de l'enseignement des mathématiques, qui fait l'objet de notre nouvelle recherche que nous développerons dans un second temps.

Un sens extrinseque des mathématiques : une modelisation de la realité

Notre intention est de définir l'acte de modélisation du réel dans l'enseignement et d'illustrer cet acte en prenant appui sur un problème en situation (Gravemeijer K. & Doorman M., 1999). Nous pouvons dire qu'un tel problème est expérimenté de façon effective par les élèves mais pas nécessairement dans la réalité du monde physique qui nous entoure mais éventuellement au sein d'une représentation de ce dernier. Notre problème en situation est élaboré dans le but, d'une part, de comprendre le phénomène d'éclipse de soleil et, d'autre part, d'introduire la tangente. Dans un premier, nous tentons tout d'abord d'élaborer une première définition de la modélisation du réel dans le cadre de l'enseignement en prenant appui sur la Didactique des Domaines d'Expérience (DDE dans la suite ; Boero, Consogno, Guala & Gazzolo 2009). Dans un second temps, nous élaborons un domaine d'expérience, inspiré de notre thèse (2005), en nous fondant sur les relations qui peuvent être établies au

sein d'une étude des éclipses totales de soleil entre le macro-espace, le méso-espace et le micro-espace[2]. Nous nous appuyons sur cette élaboration pour affiner un peu plus la « modélisation du réel ».

Cadre théorique

Nous fondons notre travail sur la DDE (Boero & al. 2009). Un domaine d'expérience est relatif aux relations complexes qui se développent à l'école entre :

- la composante interne de l'élève qui est caractérisée par ses savoirs, ses pratiques et ses schèmes relatifs au domaine visé, avec leur part de subjectivité et de références culturelles parfois liées aux émotions ; cette composante permet à l'élève de faire un repérage des données qu'il juge pertinentes du monde réel, un choix d'hypothèses supplémentaires sur le monde réel si cela est nécessaire ;

- la composante interne de l'enseignant qui est caractérisée par ses savoirs relatifs au domaine visé, ses pratiques, ses représentations, avec leur part de subjectivité, de références culturelles et bien sûr ses objectifs d'enseignement ;

- et la composante externe qui est liée, par exemple, aux contraintes provenant de la réalité même (comme le fait, dans le cadre des éclipses totales de soleil, que la lune et la terre ont des mouvements réguliers et qu'il est parfois impossible de procéder à certaines mesures de longueurs dans le macro-espace), aux moyens matériels (les instruments avec leurs fonctionnements), aux représentations symboliques (les schémas et les signes par exemple), aux règles et usages sociaux, etc.

L'objectif est de prendre appui sur les représentations des élèves et de les faire évoluer à partir de la composante de l'enseignant et de la composante externe. Le but est alors de repérer chez les élèves ce qu'ils savaient déjà et ce qu'ils ne savaient pas encore et de réfléchir aux conditions culturelles et didactiques de l'acquisition de savoirs. La conception des mathématiques dans un DE dépasse l'unique maîtrise des symboles, des règles et des procédures et sous-tend des compétences de raisonnement et de modélisation. Dans ce cadre, un modèle est construit à partir d'artefacts matériels et d'artefacts liés aux mathématiques ainsi qu'aux registres symboliques. Dans notre recherche, nous travaillons sur la modélisation d'un problème physique posé initialement dans le monde réel. L'idée que nous prenons en considération est liée au fait qu'un modèle apparaissant à un certain niveau de la modélisation constitue une nouvelle réalité, ce qui correspond à la prise en compte de l'existence de différentes interprétations de la réalité. Que pouvons-nous entendre par modélisation du réel dans le cadre de la DDE ? Les modèles sont construits en utilisant des artefacts matériels (supports, matériaux, objets, signes, ordinateur…) et des artefacts tels que les triangles rectangles, les angles etc., au sein des modèles mathématiques. Mais un modèle peut lui-même être employé comme artefact dans le but de construire d'autres modèles. A partir d'une situation tirée de la réalité, un déplacement s'effectue de modèle à modèle pour créer une nouvelle interprétation de la réalité

2. Le méso-espace fera référence dans le texte à l'espace associé à une cour d'établissement scolaire et le micro-espace à une feuille ou un ouvrage.

initiale ou une nouvelle réalité. Ainsi la réalité peut se présenter sous une forme modélisée ou sous une réalité fruit elle-même de la construction de plusieurs modèles. Mais avec Tiberghien et Vince (2000), nous considérons que certains modèles de la réalité physique sont difficiles à construire par les élèves. Nous faisons nôtre l'idée qu'il est parfois nécessaire d'imposer à un moment ou à un autre un modèle d'un phénomène qui ne représente qu'une étape dans le processus de modélisation.

Méthodologie et résultats

Nous cherchons à savoir comment une dynamique de modélisation menée au sein de la DDE peut aboutir une analyse cohérente d'une situation d'enseignement. Cette dernière a pour objectif d'aborder avec des élèves une méthode de modélisation d'un phénomène du réel et de légitimer l'introduction d'une nouvelle notion mathématique telle que la tangente. Nous nous appuyons sur les composantes internes élève/enseignant et sur la composante externe. Pour compléter ce cadre, nous ressentons le besoin de mieux cerner le vocable « réalité » que nous envisageons, avec Clément Rosset (2000), en termes de situation et d'événement. La situation se décompose selon le binôme matériel/action. Au départ, la situation est détachée de tout constat de fait. Par événement, nous comprenons la donnée d'un lieu, d'un instant et d'interprétations de faits en rapport avec une situation initiale. La modélisation du réel concerne tous les différents mouvements établis entre, d'une part, une situation et un événement qui lui est rattachée, perçu et constaté dans le langage courant et, d'autre part, leurs diverses représentations. Ces représentations engendrent de nouvelles interprétations ou génèrent de nouveaux binômes situation/événement. A partir de là, nous pouvons dire que la modélisation s'établit par un certain nombre d'allers et retours entre différents méta-niveaux d'interprétation de la réalité et par une dialectique mise en place entre divers outils et objets.

En ce qui concerne un développement cohérent d'un tel processus, nous pouvons juger de la pertinence des analyses des contraintes locales et des connaissances initiales des élèves que nous pouvons mettre en évidence. Au début de la situation, les élèves doivent savoir qu'il y a une éclipse totale de soleil lorsque les trois astres terre, lune et soleil sont alignés, ce qui est confirmé tant par leurs productions initiales que par les programmes antérieurs. Aucune condition sur les distances entre les objets célestes n'apparaît dans les écrits des élèves. Tout notre travail consiste à faire émerger cette condition. Le choix de transposer le phénomène dans le micro-espace grâce aux lorgnettes, qui sont des boîtes parallélépipédiques, se produit au vu des programmes et des connaissances initiales des élèves.

L'analyse épistémologique tant mathématique que physique nous a amené à faire le choix d'une approche trigonométrique du phénomène d'éclipse qui prolonge le programme de mathématique de la classe antérieure. Même si ce phénomène fait partie des programmes de collège et de la culture des élèves de ces âges, il s'agit d'un exemple où les représentations préexistantes sont peu nombreuses. Aussi, l'expérimentateur prend largement part à la mise en place du processus de modélisation permettant de passer du macro-espace au méso-espace. Par contre, le modèle plan des

lorgnettes du micro-espace est construit par les élèves. Deux choix didactiques à long terme semblent déterminants en ce qui concerne la mise en œuvre de la modélisation. D'une part, il faut s'assurer que le modèle choisi est pertinent. D'autre part, au vu du temps qu'il faut consacrer à la mise en place d'une telle situation, un choix judicieux de la notion mathématique à travailler à un niveau scolaire donné doit être fait. Finalement, quel intérêt trouvons-nous à proposer un tel enseignement fondé sur la modélisation de problèmes tirés de la réalité même si toutes les étapes ne sont pas à la charge des apprenants ? La modélisation permet d'interpréter autrement les événements de la réalité ou d'en faire émerger de nouveaux pour mieux l'appréhender. Elle permet également d'anticiper dans le modèle des actions du réel. La modélisation mathématique peut favoriser l'émergence de nouveaux objets pour finalement anticiper des réponses liées au réel mais construites dans l'abstraction des mathématiques.

Un sens intrinseque des mathématiques

Idées générales

Dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, une partie du sens des notions qu'il serait possible de construire avec des élèves pourrait correspondre à l'approche structuraliste telle que celle évoquée par Treffers, sachant que l'enseignant pourrait déblayer en quelque sorte une partie du terrain à la place des élèves. Dans notre nouvelle recherche, un concept mathématique particulier pourrait permettre, au moins partiellement, cette structuration grâce à un lien tissé entre différents savoirs à enseigner : le concept de relation d'équivalence. Dès la maternelle, un tri consiste à retenir des éléments d'une collection en fonction d'un seul critère de sélection : il y a les objets d'une collection qui conviennent et il y a les « autres ». Nous parlons de classement lorsqu'il y a au moins deux critères qui permettent d'aboutir à au moins trois sous-ensembles de la collection. Le tri et le classement sont liés au concept de relation d'équivalence. A partir de cet exemple, nous pouvons penser que cette notion est familière et correspond de manière intuitive à tout ce qui « est pareil ». D'autre part, cette notion semble utile pour introduire de nouveaux objets mathématiques. Un travail sur les relations d'équivalence permettrait de clarifier un peu les concepts d'égalité et de relation d'équivalence. Le sens intrinsèque peut être également construit à partir de problèmes ou de questions non plus posés au départ à l'extérieur des mathématiques mais à l'inverse à l'intérieur de ces dernières. La notion de PER serait alors intéressante à réinvestir.

Relation d'équivalence

Soit un ensemble E. On dit qu'une relation est définie sur l'ensemble E si nous avons un ensemble $G \subset E \times E$ appelé graphe de la relation. On note $(x, y) \in G$ ou alors xRy.

Une relation R définie sur un ensemble E est une relation d'équivalence, si elle est :

Réflexive, $\forall x \in E, xRx$.

Symétrique, $\forall (x,y) \in E^2, xRy \Rightarrow yRx$.

Transitive, $\forall (x,y,z) \in E^3, xRy \text{ et } yRz \Rightarrow xRz$.

Soit $x\ x$ un élément de E, on appelle classe d'équivalence, notée C_x, de x selon la relation R

l'ensemble des éléments y de E qui sont en relation avec x :

$$y \in C_x \Leftrightarrow xRy \quad C_x = \{y \in E, xRy\}$$

L'ensemble des classes d'équivalence de E selon R est appelé l'ensemble quotient de E par R.

Comme nous l'avons déjà dit, le concept de relation d'équivalence est intuitif. Il correspond à la notion exprimée quand on dit : «C'est pareil» pour une caractéristique choisie. Encore faut-il s'entendre sur ce qui est pareil. Deux pièces de monnaie peuvent être équivalentes du point de vue de leur valeur faciale mais pas de celui de l'année d'émission ou de la masse. Deux terrains à bâtir peuvent être équivalent du point de vue de leurs aires mais pas du point de vue de l'éloignement du centre-ville ou des possibilités d'implantation d'une construction. Pour les cas d'égalité des triangles qui sont au programme du collège depuis 2016 en France, il y a une confusion entre les deux concepts d'égalité et de relation d'équivalence.

L'égalité est une relation d'équivalence mais la réciproque n'est pas vraie.

Cela peut avoir des répercutions s'il y a confusion entre les deux concepts.

La longueur : nous choisissons un ensemble X non vide de baguettes dont les extrémités sont considérées comme des points. Soit $\sqcup$ la relation « peut être juxtaposé à » dans le sens où si deux extrémités de deux baguettes coïncident alors les deux autres extrémités coïncident également. Il s'agit d'une relation entre des bipoints. Les classes d'équivalence sont ici les sous-ensembles de baguettes ayant la même longueur.

La grandeur aire : nous choisissons un ensemble non vide de surfaces planes. Soit la relation « peut être superposé à » dans le sens où si on superpose une surface à une autre, elles coïncident. Les classes d'équivalence sont les surfaces isométriques.

La masse : par rapport aux objets, nous pouvons instaurer la relation « pèse autant que ».

Les angles : $O^+(E)$ est l'ensemble des applications orthogonales positives du plan vectoriel E. Sur l'ensemble $\mathcal{U}$ des vecteurs unitaires du plan on définit la relation suivante : sur $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$: $(\vec{u_1}, \vec{u_2}) R (\vec{v_1}, \vec{v_2}) \Leftrightarrow \exists \rho \in O^+(E), \rho(\vec{u_1}) = \vec{v_1} \text{ et } \rho(\vec{u_2}) = \vec{v_2}$. $C_{(\vec{u},\vec{v})} = angl(\vec{u},\vec{v})$.

En France, on compare des angles au Cours Moyen et on ne les mesure qu'en 6ème.

Egalité : l'égalité (arithmétique 2 + 3 = 5, algébrique $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, fonctionnelle f(x)=exp(x)) est une relation d'équivalence. D'une manière générale, sur tout ensemble E, l'égalité de deux éléments est une relation d'équivalence. On a alors : $\forall x \in E, C_x = \{x\}$.

Le parallélisme : la relation « est parallèle ou confondue à », sur l'ensemble des droites d'un espace affine, est une relation d'équivalence, dont les classes sont les directions. Au primaire, les droites parallèles sont abordées avec une approche de penchées pareil, ou d'écart constant, ou encore perpendiculaires à une troisième. Au collège, ce sont des droites qui font le même angle avec une troisième dont l'angle droit. Au Lycée : l'approche est plutôt vectorielle, avec également aussi les nombres complexes.

Les fractions : dans $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $(p,q)R(p',q') \Leftrightarrow pq' = p'q$. $C_{(p,q)} = \frac{p}{q}$. En France, trois approches différentes des fractions : au Cours Moyen, une première liée au partage de l'unité, et en 6ème une seconde où la fraction a/b et le nombre qui multiplié par b donne a. En classe de 4ème, il serait possible d'aborder les fractions en termes de classe d'équivalence.

Le cardinal d'un ensemble : sur l'ensemble des ensembles finis donc dénombrables, nous en choisissons deux. Nous posons alors la relation suivante : à chaque élément du premier ensemble correspond un et un seul élément du second.

Les classes d'équivalences sont les nombres entiers sur leur aspect cardinal.

Vecteurs : la notion de bipoints équipolents. Sur l'ensemble des bipoints du plan (ou de l'espace), $(A,B)R(C,D) \Leftrightarrow ABDC$ parallélogramme. $C_{(A,B)} = \overrightarrow{AB}$.

Congruence modulo n : dans $\mathbb{Z}$, la relation $x \equiv y [n]$ si n divise $x-y$. Les classes d'équivalences sont représentées par : $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{n-1}$ où $\bar{i} = \{x / \exists k \in \mathbb{Z}, x - i = kn\}$: $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$.

Relation d'équipotence : dès l'école maternelle, ce qui relève des tâches de tri et de classement est en rapport avec le concept de relation d'équivalence.

Entiers relatifs : dans $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(a,b)R(a',b') \Leftrightarrow a + b' = a' + b$. $C_{(a,b)} = a - b$.

Il s'agit de la différence de deux entiers relatifs. $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / R$.

Matrices semblables, matrices équivalentes : deux matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice P telle que : $A = PBP^{-1}$. Deux matrices A et B sont équivalente s'il existe deux matrices P et Q telle que : $A = QBP^{-1}$.

Triangles isométriques : deux triangles sont isométriques si l'un est l'image de l'autre par une isométrie. La composée de deux isométries est une isométrie et la réciproque d'une isométrie est encore une isométrie.

Triangles semblables : sur l'espace affine, deux triangles sont semblables s'il existe une similitude qui transforme l'un en l'autre. Un triangle est semblable à lui-même (Id), si un triangle est semblable à un second, ce dernier est semblable au premier (similitude de même centre, d'angle opposé et de rapport 1/k. Pour la transitivité : k+k' et somme des angles pour les similitudes directes. La composée de deux similitudes (quelles soient directes ou indirectes) et une similitude.

Equivalence des suites : c'est une relation d'équivalence.

Nous ferons plus loin le choix de concepts parmi les exemples précédent que nous étudierons plus en profondeur.

Cadre théorique

Les cadres théoriques généraux retenus pour cette recherche concernent trois domaines principaux. Un cadre **épistémologique** : le concept d'obstacle qui est utile dans notre première partie mais également dans la partie consacrée aux variables didactiques et aux obstacles. Un cadre **institutionnel** : (Chevallard) l'organisation mathématique au regard des quatre *T*.

Partant d'un type de tâches *T*, une œuvre *O*[3] permet d'apporter un type de réponse *R* qui est une organisation formée de :

- un type de tâches *T* associé au type de questions *Q* ;
- une technique τ relative au type de tâche *T* ;
- une technologie θ relative à cette technique τ ;
- une théorie Θ relative à la technologie θ .

Une technique τ est justifiée par une technologie θ qui, de plus, la rend intelligible. Une technologie θ est elle-même produite, justifiée et rendue intelligible par une autre technologie supérieure Θ, plus vaste, qui est appelée théorie. Une théorie Θ se distingue d'une technologie θ par le fait qu'elle a une «générativité» plus grande, c'est-à-dire que davantage de résultats peuvent en être déduits et dérivés. Une œuvre est donc vue comme apportant des réponses $R_i = (T_i, \tau_i, \theta_i, \Theta_i)$ à un ensemble de questions Q_i. Dans ce que nous venons d'écrire, lorsque les quatre niveaux sont fixés, l'organisation mathématique est générée à partir de tâches précises, ce qui correspond au niveau d'une **orga-**

3. Chevallard appelle œuvre toute production humaine dont l'objet est d'apporter une réponse à une ou plusieurs questions théoriques ou pratiques.

nisation mathématique ponctuelle. Mais nous pouvons, par exemple, fixer maintenant le niveau technologique θ et par voie de conséquence également le niveau théorique Θ tout en faisant varier les tâches T_i et les techniques τ_i. Nous obtenons alors une **organisation mathématique locale** : $(T_i, \tau_i, \theta, \Theta)$. Une autre possibilité est de fixer le niveau théorique Θ tout en faisant varier tous les niveaux inférieurs qu'elle est censée contrôler. Nous obtenons ainsi plusieurs technologies θ_j, relatives à plusieurs techniques τ_{ij} qui elles-mêmes s'appliquent à différents types de tâches T_{ij} et nous avons alors une **organisation mathématique régionale** : $(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta)$. Enfin, il est également possible, au dernier niveau, de faire varier les quatre éléments du quadruplet, ce qui correspond à une **organisation mathématique globale** : $(T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k)$. C'est ainsi que plusieurs théories peuvent parfois être nécessaires pour démontrer un théorème faisant lui-même partie d'une autre théorie.

Un cadre **situationnel** : la théorie anthropologique du didactique (Chevallard) est employée également dans le cadre de la conception et de l'analyse a posteriori de PER pour l'approche du sens intrinsèque et d'AER pour la partie extrinsèque.

Méthodologie

Il est évident que les élèves de l'enseignement primaire et secondaire n'auront pas à aborder la notion de relation d'équivalence qui permettrait de faire apparaître un sens intrinsèque des mathématiques. Mais en ce qui concerne les enseignants, il nous semble important qu'ils aient conscience de ce fait. Aussi, dans un second temps, cette recherche pourrait avoir des répercutions en termes de formation. Il pourra être possible, par exemple, de mettre en évidence cette structuration des connaissances sans que le concept de relation d'équivalence ne soit pleinement étudié dans le cadre d'une formation suivant le niveau des étudiants auquel elle s'adresserait. Nous allons nous appuyer sur la TAD et son aspect structurant grâce à la notion d'organisation didactique et en rajoutant les notions de micro didactique, méso didactique et macro didactique en ce qui concerne les concepts mathématiques que nous aurons choisis d'étudier. L'aspect structurant commencera dès le début de l'introduction du concept jusqu'à son étude au Lycée. C'est cette partie qui constituerait *in fine* un fil conducteur en vue d'une proposition de formation des enseignants. Il s'agira également de concevoir et de mettre en œuvre des séquences d'introduction des notions à partir d'un cadre théorique cohérent. Recherche *a priori* du sens extrinsèque : nous allons nous fonder sur les notions de PER pour compléter le sens intrinsèque d'une notion et d'AER et également sur la modélisation de la réalité dans le cadre de la DDE. L'objectif est de construire et de mettre en œuvre en classe ensuite des situations d'apprentissage afin d'une part d'illustrer le sens *a priori* que nous aurons préalablement mis en évidence et d'autre part d'observer ce que cela produit en termes d'apprentissage auprès des élèves. Nous avons décidé de travailler en partie à cheval sur l'école Primaire et le Collège français. Notre choix porte sur les angles et sur les fractions. Au regard des relations d'équivalence, ces deux notions nous semblent être d'un intérêt important pour deux raisons. Les angles sont comparés au Primaire mais ne sont mesurés qu'au Collège. Cette scission s'explique d'une part du fait que l'instrument de mesure est difficile à manier et d'autre part, lorsque cela est possible, il est nécessaire de procéder

dans cet ordre l'introduction des grandeurs mesurables car sinon cela renforce certains obstacles. Les fractions quant à elles sont travaillées de deux manières différentes au Primaire et au début du Collège. Un travail de transition doit donc être assurée entre ces deux approches.

Un sens intrinseque des angles

Structuration

Nous avons vu, dans le cadre des OM, la possibilité de fixer le niveau théorique Θ tout en faisant varier tous les niveaux inférieurs qu'elle est censée contrôler. Nous obtenons ainsi plusieurs technologies θ_j , relatives à plusieurs techniques τ_{ij} qui elles-mêmes s'appliquent à différents types de tâches T_{ij} et nous avons alors une OM régionale : $\left(T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta\right)$. Dans ce paragraphe, la théorie en ce qui concerne les angles non orientés, est la suivante : à l'instar de Tauvel (1995) ou Avez (1993), nous pouvons définir les angles non orientés en désignant par E un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure ou égale à 2, D et D' deux demi droites. On appelle angle non orienté de D et D' l'orbite de (D,D') sous l'action du groupe orthogonal O(E). L'action est définie comme suit : r est une rotation, r(D,D') = (r(D),r(D')). Cette action définit une relation d'équivalence : deux couples sont équivalents s'ils appartiennent à la même orbite de O(E).

L'angle non orienté de D_1D_1 et D_2D_2 est l'une des deux rotations $r : D_1 \to D_2$ $r : D_1 \to D_2$ ou $r^{-1} : D_2 \to D_1 r^{-1} : D_2 \to D_1$. La mesure (en radians) de cet angle est la plus petite des valeurs absolues des mesures (en radians) de l'une des deux rotations. Avec Bories-Longuet et Al (1993), nous avons : soient deux vecteurs directeurs unitaires respectifs des deux demi-droites. La relation R définie par $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1})R(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_2})(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1})R(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{v_2})$ est une relation d'équivalence sur les couples de vecteurs unitaires.

La classe d'équivalence du couple est appelé angle des vecteurs unitaires.

Le type de Tâche élémentaire consiste à comparer des angles de façon pratique. Les techniques peuvent être par exemple, de procéder par superposition des objets angles matériel à l'école Primaire ou par mesurage au collège. L'un des objectifs fondamentaux à atteindre à l'école est de se rendre compte que la grandeur angle est indépendante de la « longueur » de ces côtés, ce qui constitue un obstacle épistémologique pour les élèves. La mesure constitue une étape supplémentaire vers l'abstraction.

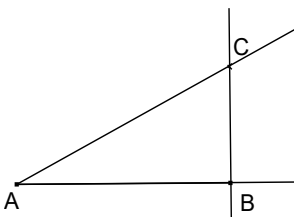
Idées initiales qui permettraient d'aboutir à un PER à venir

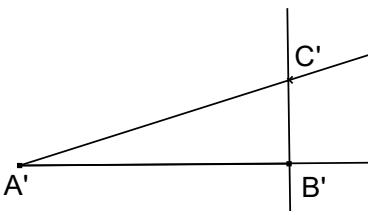
À l'école, les élèves ont tendance à relier comparaison des angles et comparaison de leurs côtés car ils se fixent sur une grandeur qu'ils connaissent déjà : la longueur. Il s'agit d'un obstacle lié à une fixation sur une contextualisation familière (Artigue, 1990) qui consiste à se focaliser sur un contexte connu (longueur) pour répondre à une question en rapport avec un autre contexte (angle). Pour cela

des situations de référence doivent être conçues et mise en œuvre afin de dépasser cet obstacle. Il s'agira par exemple de proposer des angles à comparer par superposition qui mettraient en évidence l'indépendance angle/longueur côtés. Au préalable, il sera possible de nous fonder sur des définitions élémentaires et pratiques de l'égalité des angles données au cours de l'histoire (Euclide, Roberval, Arnauld, Bos, Lamy, Clairaut, La Caille, Bezout, Legendre, Lacroix, Francoeur, Hadamard, Hilbert, Borel, Queysanne) pour que les élèves commencent à concevoir ce nouvel objet. Les objets matériels sont amovibles et peuvent donc effectivement se superposer.

La mesure des angles n'est introduite qu'au collège en 6ème et non à l'école Primaire. L'une des raisons est sûrement pour séparer la comparaison de la grandeur angle de la mesure mais également du fait que l'instrument de mesure est plus difficile à utiliser pour les élèves que le double décimètre pour les longueurs par exemple. L'objectif d'apprentissage étant alors la mesure. On revoit les méthodes de comparaison du primaire puis on propose une situation dans laquelle les angles sont inamovibles. Comment procéder ?

Dans la continuité des techniques abordées par les élèves, la situation que nous proposons débute par le fait d'utiliser des gabarits pour comparer des angles dans le micro-espace par superposition afin de confirmer le fait que la comparaison des angles est indépendante de la « longueur » des côtés des angles. Puis, dans le méso-espace ou alors avec des angles inamovibles, la question est de savoir comment procéder puisque la superposition directe n'est plus possible ? La situation que nous construisons utilise des angles inamovibles. Dans un premier temps, du matériel qui est mis à disposition des élèves permet de reproduire l'un des deux angles pour pouvoir superposer ce gabarit sur l'angle restant. Il s'agit d'une comparaison indirecte utilisant un objet tiers. Un double décimètre est à disposition des groupes. L'idée est de construire une perpendiculaire sur l'un des côtés de l'angle reproduit sur le calque et de le superposer sur l'autre angle à la manière d'Arnaud (sinus). Toute la question est de savoir comment les élèves vont penser à construire cette perpendiculaire et s'ils n'y pensent pas comment l'expérimentateur pourra poser une question qui ne donnera pas directement la solution mais qui débloquera les élèves. Dans un second temps la tâche sera la même, c'est-à-dire comparer deux angles, mais sans la possibilité d'utiliser un objet tiers. La situation avec le calque doit faire apparaître l'idée de construire une perpendiculaire à un côté de chaque angle situé à la même distance du sommet et de mesurer la longueur du second côté de l'angle droit des triangles rectangles ainsi obtenus. AB = A'B', (BC) et (BA) perpendiculaires, (B'C') et (B'A') perpendiculaires. Puis comparaison de AC et A'C' ou alors de BC et B'C'.





Mais cela n'est pas satisfaisant du point de vue de la mesure qui doit être indépendante de la « longueur » des côtés. Nous sommes encore dans un contexte familier aux élèves. Il s'agira ensuite de comparer des angles sans double décimètre ou alors nous ne pourrons plus construire de triangles ABC et A'B'C'. L'idée est de construite un instrument de mesure. Une réflexion reste à mener à ce sujet.

Un sens intrinseque des fractions

Structuration

Dans ce paragraphe, la théorie est la suivante : nous définissons la relation $\sim\sim$ par : $(a,b) \in ZxN^*, (c,d) \in ZxN^*, (a,b) \sim (c,d)\ ssi\ ad = bc$ $(a,b) \in ZxN^*, (c,d) \in ZxN^*, (a,b) \sim (c,d)\ ssi\ ad = bc$. Nous vérifions facilement qu'il d'agit d'une relation d'équivalence. L'ensemble quotient $ZxN^*/\sim$ est l'ensemble des nombres rationnels. A l'école en France, les fractions sont introduites à partir de situations de références fondées sur le partage de l'unité puis au collège la fraction a/b est le nombre tel que : $\frac{a}{b} \times b = a$. Mais nous sommes précisément en présence d'un obstacle lié à une fixation sur une contextualisation familière. En effet, l'attachement des fractions à la conception du partage de l'unité et la tentative de déstabiliser ce point de vue au profit de la commensurabilité (Artigue, 1990). En classe de quatrième, les fractions sont travaillées à partir de la relation d'équivalence précédente sans développer la théorie en question. Cette dernière n'est spécifiquement travaillée que dans l'enseignement supérieur.

Idées initiales qui permettraient d'aboutir à un PER à venir

Il serait fondamental qu'une réflexion globale de l'enseignement des fractions puis des nombres rationnels soit menée afin que les différentes approches citées ci-dessus ne renforcent et ne fassent naître des difficultés voire des obstacles chez les élèves. En particulier, le point nodal semble se situer à la transition entre l'approche « partage de l'unité » et celle fondée sur la caractérisation : $\frac{a}{b} \times b = a$ $\frac{a}{b} \times b = a$.

Références

Arnaud A. *Nouveaux éléments de géométrie ; contenant, outre un ordre tout nouveau, et de nouvelles démonstrations des propositions les plus connues, de nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, de nouvelles mesures des angles, dont on ne s'était point encore avisé, et de nouvelles manières de trouver et de démontrer la proportion des lignes*. Charles Savreux. Paris. Réédition inter IREM Epistémologie. Reproduit par l'IREM de Dijon (2000).

Artigue M. (1990). Epistémologie et didactique. Recherche en Didactique des Mathématiques. Vol 10.2.3. *La Pensée Sauvage*. Grenoble.

Aves A. (1993) *La leçon de géométrie à l'oral de l'agrégation*. (p 130) Paris : Masson.

Boero P., Consogno V., Guala G., Gazzolo T. (2009) Research for innovation : a teaching sequence on the argumentative approach to probabilistic thinking in grades I-V and some related basic research results. *Recherche en Didactique des Mathématiques 29/1*. La Pensée Sauvage.

Bories-Longuet F., Lévy-Bruhl A., Jarraud P. (1993) *Problèmes de mathématiques. Ecrit du CAPES. Algèbre et géométrie*. Paris : Masson.

Granger G. (1988) Sur l'idée de concept mathématique « naturel ». *Revue Internationale de Philosophie n⁰167*. Paris PUF.

Gravemeijer K. & Doorman M. (1999) Context problems in realistic mathematics education : a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics 39*.

Laguerre E. (2005) *Une ingénierie didactique pour l'apprentissage du théorème de Thalès au collège*. Thèse de Doctorat. Université Paris VII Denis Diderot.

Laguerre E. (2014) Une modélisation d'une éclipse solaire totale. *Recherche en Didactique des Mathématiques*. 34/2-3. La Pensée Sauvage.

Rosset C. (2000) La notion de réalité *Encyclopédie philosophique universelle I* 97.

Tauvel P. (1995) *Mathématiques générales pour l'agrégation.* (p 242) Paris : Masson.

Tiberghien A., Vince J. (2000) Simuler pour modéliser. *Sciences et techniques éducatives* 7-2.

Treffers A. (1987) *Three dimensions : a model of goal and theory description in mathematics instruction – the Wiskobas Project*. Dordrecht Kluwert.

Titre: Mathématiques empiriques, pensée mathématique & école

Auteur: MAHEUX Jean-Francois

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 317 - 321

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Mathématiques empiriques, pensée mathématique & école

MAHEUX[1] Jean-Francois

Résumé – Est-ce la fin des mathématiques déductives, le calcul permettant « de nous débarrasser des axiomes » ? Certains s'expriment en faveur des mathématiques expérimentales et d'une vision large de la « vérité » en mathématique. La programmation à l'école fourni l'occasion de faire place aux mathématiques empiriques et au développement de la pensé algorithmique à l'intérieur des mathématiques.

Mots-clefs : Empirique, expérimental, calcul, programmation, épistémologie

Abstract – Will calculations be the end of deductive mathematics? Some speak in favor of experimental mathematics and a broad view of "truth" in mathematics. Programming in school give the opportunity to include empirical mathematics, developing algorithmic thinking 'inside' mathematics.

Keywords: Empirical, experimental, computation, programming, epistemology

1. UQAM/LEAM, Canada, jfmaheux@mail.com ou maheux.jean-francois@uqam.ca

Mathématiques empiriques ?

Certains demandent si nous assistons à la fin des mathématiques déductives, croyant que les mathématiques du futur seront essentiellement algorithmiques, computationnelles, expérimentales. Ainsi, Dowek (2007) écrit : « Le calcul nous permettra-t-il de nous débarrasser un jour des axiomes ou, malgré le calcul, serons-nous toujours contraints de leur laisser une place dans l'édifice mathématique ? » (p.197). Sa réflexion est issue d'observations autour du rôle et possibilités des technologies de plus en plus puissantes dans l'activité mathématique contemporaines. La création d'ordinateurs quantique mariée aux développements de logiciels assistant de preuve (on pense à Mizar, Isabelle, Coq, etc.) pourraient bien rendre « caduque » la recherche de preuve au sens classique. Chaitin (2005) s'expriment fortement en faveur des mathématiques expérimentales et d'une vision plus large de la « vérité » ou la « rigueur » en mathématique. Il fait la promotion d'une activité mathématique plus proche de celle des physiciens qui émettent et éprouves des *théories* (plutôt que des théorèmes) sur la base d'observations, d'expériences, etc. On peut ainsi concevoir des « mondes mathématiques » et des instruments pour les sonder. L'accumulation « d'évidences » autour de l'hypothèse de Riemann, pour laquelle on a identifié plus de 10^{13} zéros, est souvent donnée en exemple. La technologie joue ici un grand rôle (différent de celui des assistants de preuve) qui n'est pas du tout inaccessible aux élèves du secondaire par exemple via la création de programmes.

Pensée algorithmique et mathématiques empiriques

Plusieurs se sont penché sur les liens entre programmation, mathématiques, pensée algorithmique, pensée informatique ou computationnelle, et ainsi de suite (par exemple Modeste 2012). Des clarifications restent à faire, mais on comprend que l'approche de situation mathématiques par des programmes informatiques fait appel à « une pensée algorithmique, non entièrement 'superposable' à la pensée mathématique mais intimement liée à elle » (Briant et Bronner 2015, p. 237)[2]. Par ailleurs, les expérimentations avec des élèves sont généralement orientées vers la production de preuve formelle, que l'accumulation d'évidence servant à motiver : une distinction forte avec l'empirisme des science expérimentales (e.g. Dias 2005). C'est par exemple l'idée du « physicien-géomètre » de Tanguay et Geeraerts (2012) où on envisage l'observation comme moteur d'une pensée axiomatique devant « dépasser l'intuition ». Or, de telles approches dévalorisent le travail algorithmique et empirique en les positionnant comme des intermédiaires d'une activité mathématique supérieure. En revanche, une approche de l'algorithmique par les mathématiques empiriques pourrait valoriser cette forme de pensée en en développant les caractéristiques à l'intérieur des mathématiques. On parle ici de programmer *pour* les mathématiques, et de considérer les programmes comme des résultats mathématiques (importants). Un pas qui permet une certaine réconciliation avec l'algorithmique au sens traditionnel : l'art de créer et d'utiliser des procédures, des méthodes, des techniques, des formules.

2. Définir chacune de manière complète et étanche pour ensuite établir des liens semble difficile. Pourrait-on conceptualiser tout ceci autrement? Idem pour distinguer (ou amalgamer) programmation et algorithmique.

Ces algorithmes sont omniprésents en mathématique, mais rarement considérés du point de vue de la pensée les ayant formés et qu'ils soutiennent.

Quel est le 1000e nombre de Fibonacci? Combien faut-il d'itérations pour chaque décimale de π calculées par la méthode de Monte-Carlo? Dans quelle mesure une courbe est-elle proche d'un cercle? Explorer de telles questions par la création d'algorithmes pourrait aussi être mis en parallèle avec les démarches de modélisation mathématique également appelées à prendre une place plus importante dans les curriculums (e.g. Wozniak 2012). Or, ceci ne vient pas sans défis. On pense évidemment aux aspects techniques liés à la disposition des outils et à la qualification du personnel enseignant. Mais aussi aux conflits épistémologiques qui risquent d'être difficiles à dépasser : les mathématiques empiriques répondent mal à l'idéal de « perfection » souvent attachée à la discipline (Maheux 2018) et on sait des résistances face à l'approximation (Marchini 2012), par exemple.

Dans le cadre de cette communication, je présenterai cette problématique et tâcherai de souligner certains enjeux. Je mettrai de l'avant l'intérêt d'une approche de la pensée algorithmique à l'école par le biais des mathématiques empiriques et la programmation, en lien avec le potentiel de la dimension expérimentale en mathématiques (e.g. Dias 2008).

Références

Briant N., Bronner A. (2015) Étude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée: une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique. In Theis L. (Éd.) *Pluralités culturelles et universalité´des mathématiques – Actes du Colloque EMF 2015* - GT3 (pp. 231–246).

Chaitin, G. (2005). *Hasard et complexité en mathématiques*. Flamarion.

Dias, T. (2005). La dimension expérimentale en mathématiques: mythe ou réalité. *Actes des 4e rencontres de l'ARDIST*. En ligne: www.inrp.fr/ardist2005/ressources/contributions/21.pdf

Dias, T. (2008). *La dimension expérimentale en mathématiques : Étude exploratoire dans des situations d'enseignement et de formation au sein de l'enseignement spécialisé*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard.

Dowek, G. 2007. *Les métamorphoses du calcul*. Le Pommier.

Maheux, J.F. (2018). The unsettling playfulness of computing, In Alexei Volkov & Viktor Freiman (Eds). *Computations and Computing Devices in Mathematics Education before the Advent of Electronic Calculators* (pp. 409-431). Springer.

Marchini C. (2012) Les résistances des enseignants face à l'approximation. In Dorier J.-L., Coutat S. (Éds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social – Actes du colloque EMF2012 – GT3* (pp. 445–456).

Modeste S. (2012) La pensée algorithmique : apports d'un point de vue extérieur aux mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Éds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social – Actes du colloque EMF2012 – GT3* (pp. 467–479).

Tanguay, D., & Geeraerts, L. (2012). D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive: à la recherche du paradigme manquant. *Petit x*, 88, 5-24.

Wozniak, F. (2012). Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématique à l'école: une étude de cas. *Éducation et didactique*, 6, 2, 65-88.

Titre: Analyse des raisonnements d'élèves de sixieme sur des problèmes de comparaison : une étude de cas au Bénin

Auteurs: OKE Sègbégnon Eugène, AFFOGNON Gervais Marc A et DOSSOU DOSSA Pierre

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 322 - 333

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Analyse des raisonnements d'élèves de sixieme sur des problèmes de comparaison : une étude de cas au Bénin

OKE[1] Sègbégnon Eugène – AFFOGNON[2] Gervais Marc A – DOSSOU DOSSA[3] Pierre

Résumé - Notre présentation analyse les raisonnements d'élèves de 6e au Bénin dans leurs productions en réponse à un test sur les problèmes de comparaison. Les résultats de la recherche montrent que différents modes de raisonnements sont mobilisés par les élèves sans qu'ils ne réussissent à résoudre correctement les problèmes de comparaison proposés. Cela questionne la qualité du développement de la pensée algébrique chez les élèves et les stratégies pour son amélioration.

Mots-clefs : Bénin, collège, problème de comparaison, pensée algébrique, raisonnements.

Abstract - Our presentation analyzes the reasoning of 6th grade students in Benin in their productions in response to a test on comparison problems. The results of the research show that different modes of reasoning are mobilized by the students without them succeeding in solving correctly the proposed comparison problems. This raises questions about the quality of the development of algebraic thinking in students and strategies for its improvement.

Key words: Benin, middle school, comparison problem, algebraic thinking, reasoning.

1. Université d'Abomey-Calavi (UAC), Faculté des Sciences et Techniques (FaST) et Institut de Mathématique et de Sciences Physiques (IMSP), Bénin, eugene.oke@imsp-uac.org

2. Université d'Abomey-Calavi (UAC), Institut de Mathématique et de Sciences Physiques (IMSP), Bénin, gervais.affognon@imsp-uac.org

3. Ministère des Enseignements Secondaire Technique et de la Formation Professionnelle (MESTFP), Direction de l'Inspection Pédagogique, de l'Innovation et de la Qualité (DIPIQ)

Problème et public ciblé de la recherche

Cette recherche s'inscrit dans le cadre d'un projet du programme APPRENDRE mis en œuvre par l'Agence universitaire de la Francophonie (AUF) avec l'appui de l'Agence Française de Développement (AFD) dont la thématique est : « Accompagner le développement du cycle fondamental : l'enjeu de la transition école / collège ». (Appel à projet d'avril 2019).

Après l'analyse du manuel de la classe de 6e (cf. Actes ADiMA3 en Tunisie), nous analysons dans cette présentation les raisonnements d'élèves de 6e à propos de la résolution des problèmes de comparaison. L'objectif est d'appréhender la qualité du développement de la pensée algébrique des apprenants en liaison avec le manuel officiel. A terme, nous cherchons à déterminer dans quelle mesure les contenus du manuel officiel utilisé et les pratiques enseignantes influencent le développement de la pensée des apprenants dans la transition arithmétique - algèbre.

Nous avons choisi de collecter des données auprès des apprenants de ce niveau de collège et de la sixième année du primaire à travers deux tests élaborés dans le cadre de la mise en œuvre de l'étude de la transition primaire-secondaire réunissant le Bénin, le Maroc, la Tunisie sous la supervision d'une équipe du Canada. Dans cette présentation, nous analysons les réponses des apprenants de 6è seulement. Nous pensons que les réponses des apprenants à ces deux tests nous renseignent sur leurs raisonnements à propos de leurs manières d'aborder et de résoudre des problèmes de comparaisons. Le tableau ci-après renseigne sur le public cible de la recherche que nous présentons.

Zone urbaine		Zone rurale		Total
5 collèges publics	2 collèges privés	4 collèges publics	1 collège privé	12 collèges
8 classes	2 classes	5 classes	2 classes	17 classes
362 élèves (50,14%)	64 élèves (8,86 %)	208 élèves (28,81 %)	88 élèves (12,19 %)	722 élèves (100%)

Tableau n°1 : Statistique de la collecte des données en classe de 6ème.

Au total, douze (12) collèges et 17 classes ont été impactés par la collecte des données. Nous avons obtenu des réponses de sept cent vingt-deux (722) élèves qui ont répondu aux questionnaires relatifs aux problèmes de comparaison. Ce tableau montre que neuf (9) collèges publics et trois (3) collèges privés ont participé à l'enquête dans les départements de l'Ouémé, du Littoral, de l'Atlantique, du zou, du Mono et du Couffo. Soit six (6) départements du sud et du centre sur les douze que compte le Bénin. 79% des élèves impactés par l'enquête sont dans des collèges publics contre 21% des élèves des collèges privés. La plupart des élèves sont en zone urbaine à raison de 59% contre 41% en zone rurale.

Dans les lignes qui suivent, nous présentons les questionnaires auxquels les élèves ont répondu puis une analyse a priori.

Présentation et analyse a priori du test proposé pour le recueil des données

Brève présentation du test avec les problèmes de comparaison

Le questionnaire relatif aux problèmes de comparaison ou de partage inégal vise à enquêter sur les raisonnements algébriques des élèves dans la résolution de ces problèmes. L'analyse des réponses des élèves permet de décrire les raisonnements de ces élèves en l'algèbre et l'évolution de ces raisonnements au cours de la transition primaire-collège. Nous cherchons particulièrement à étudier les stratégies adoptées par les élèves dans la réalisation des tâches qui leur sont proposées et à comprendre les difficultés et obstacles rencontrés.

Dans les problèmes de comparaison qui sont proposés, nous distinguons deux types de problèmes : les problèmes connectés et les problèmes déconnectés. Un problème est dit «connecté » s'il est possible de trouver la valeur de l'inconnue en opérant uniquement sur des données et des relations connues. Un problème est dit déconnecté, s'il n'est pas connecté, c'est à dire que pour trouver la valeur de l'inconnue il est nécessaire d'opérer sur l'inconnue (Vergnaud, 1997; 2001). Dans le questionnaire des problèmes de « comparaison », le problème 1 est connecté, les problèmes 2, 3, 4 et 5 sont déconnectés. Selon la typologie de Bednarz et Janvier (1996), les 5 problèmes se présentent par ordre croissant de complexité.

Analyse a priori du test de comparaison proposé

Le raisonnement algébrique est caractérisé, entre autres, par la capacité à se détacher des grandeurs et du contexte (habillage du problème) soit pour opérer sur l'inconnue, soit pour modéliser des relations, soit pour généraliser un phénomène (Adihou, 2020). Il conduit à un travail sur les données connues et inconnues pour modéliser le problème et en faire un traitement formel en vue de le résoudre (Squalli, 2020).

Le raisonnement arithmétique consiste à déterminer les données inconnues en partant des éléments connus du contexte.

L'analyse a priori est essentiellement basée sur le cadre d'analyse présenté dans le texte Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. & Adihou, A. (2020) intitulé : Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable.

L'analyse des raisonnements mobilisés par des élèves dans la résolution de problèmes de comparaison porte sur deux dimensions : le degré d'analycité du raisonnement et la nature du registre de représentation.

D'abord, la première dimension : le degré d'analycité :

Le raisonnement analytique (An) est le premier type de raisonnement sans cette première dimension. Dans ce type de raisonnement, nous voyons l'élève qui considère ou désigne l'inconnue, la représente par un symbole, utilise cette représentation pour exprimer les relations entre les données connues et les autres inconnues du problème et opère sur ces représentations pour former l'équation et trouver les valeurs des inconnues.

Le raisonnement à tendance analytique est le deuxième type de raisonnement dans la première dimension considérée. Nous décrivons dans cette catégorie de raisonnement trois classes de raisonnements :

(a)-La première classe regroupe les raisonnements hypothético-déductifs où nous incluons l'élève qui affecte une valeur déterminée à une inconnue sachant qu'elle est fausse, fait comme si cette inconnue possédait cette valeur, opère sur les relations et génère les valeurs des autres inconnues. Puis, il raisonne ensuite sur les relations et les valeurs produites pour trouver la valeur exacte de l'inconnue de départ. Il s'agit par exemple des raisonnements de type «fausse position». Dans ce type de raisonnement, l'élève fait comme si la valeur de l'inconnue était connue, mais au lieu d'opérer sur une représentation de cette inconnue, il opère sur une valeur fausse mais déterminée. Pour cette raison, nous considérons que ce type de raisonnement est à tendance analytique mais n'est pas analytique.

(b)- La seconde classe regroupe les raisonnements où l'élève considère les inconnues momentanément comme des variables. Pour trouver les valeurs de ces variables qui respectent les conditions du problème, il n'opère pas sur elles (comme dans le cas d'un raisonnement analytique) mais sur leurs instanciations numériques. C'est le cas des raisonnements fonctionnels.

(c)- La troisième classe regroupe les raisonnements où l'élève considère l'inconnue, la représente explicitement, utilise cette représentation pour traduire les relations entre les inconnues et les connues mais n'opère pas sur ces représentations pour trouver les valeurs des inconnues. Il est parfois admis pour cette dernière raison que le degré d'analyticité du raisonnement n'est pas jugé optimal.

Ensuite, la deuxième dimension : elle est relative à la nature du registre de représentation.

Les registres de représentations sémiotiques sont les trois types de registres au sens de Duval (1995) et de Hitt et Passaro (2007) ont été retenus à savoir, le registre numérique, le registre algébrique conventionnel et le registre intermédiaire.

Le registre de représentation est dit « numérique » quand les traces de la résolution de l'élève ne comportent que des nombres déterminés et des opérations sur ces nombres, « algébrique conventionnel » si l'élève recourt au langage algébrique littéral et « intermédiaire » si l'élève recourt à un, ou à plusieurs, mode de représentation non purement numérique ou algébrique conventionnel. Ainsi nous considérons par exemple que l'élève peut représenter une inconnue par un mot, par le dessin d'une ligne, ou par un carré vide, les relations par un dessin, utiliser une table de valeurs numériques, etc.

Problème 1
Ousmane a partagé la somme de 133 000 francs entre ses deux filles, Maria et Aicha. Il a donné à Maria 33 000 francs. Combien Aicha a-t-elle reçu ?

Ainsi nos analyses des problèmes de comparaison se présentent comme suit :

Ce problème est un problème connecté et additif du genre composition d'états (Vergnaud, 1997, 2001). Sa résolution ne nécessite pas obligatoirement l'usage d'un raisonnement algébrique.

Étant donné qu'il est un problème connecté, il peut être résolu par un calcul direct : Aicha va recevoir 133 000 francs – 33 000 francs = 100 000 francs. Le registre est purement numérique.

Pour ce problème, il est aussi possible de développer les raisonnements de type essais-erreurs avec ajustement simple. Dans ce cas, l'élève donne une valeur spécifique à une des inconnues, génère les valeurs des autres inconnues à l'aide des relations connues. En se basant sur l'écart obtenu entre le nombre total désiré et le nombre total obtenu, il ajuste en conséquence la valeur du nombre de départ sans prendre en compte les relations entre les inconnues.

Il est également possible de développer un raisonnement "Algébrique // Registre numérique // correct " notée ALn(c): A + 33 000 = 133 000. Donc, A = 133 000 - 33 000. Le raisonnement est algébrique à cause de l'utilisation d'une équation. Le registre est numérique parce que les traces de résolution comportent l'utilisation des nombres.

Problème 2
Ahmed achète deux voitures pour ces filles, Maria et Aicha. La voiture de Maria coûte 17 600 francs de plus que celle de Aicha. Si la somme totale consacrée à l'achat des deux voitures est de 181 000 francs, combien coûtera chacune des deux voitures

Par des essais, l'élève peut tenter de « deviner » la valeur juste de l'inconnue en utilisant en actes le théorème des valeurs intermédiaires. Les calculs sont réalisés pour vérifier la justesse de la valeur initiale. Le registre est numérique. La table de valeurs peut servir ici comme moyen d'organisation des essais numériques. Ce n'est pas un raisonnement de type hypothético-déductif. C'est un raisonnement de type essais-erreurs avec ajustement raisonné. Nous conjecturons que les élèves ne sont pas entraînés à faire des essais-erreurs pour l'apprentissage, nous ne rencontrerons pas ce type de raisonnement. Ce n'est pas exclu que d'autres raisonnements soient mobilisés.

Problème 3

Sami fait l'inventaire de deux produits de sa boutique. Il compte 3 fois plus de produits de conserve que de produits de nettoyage. S'il y a 132000 produits en tout, combien y a-t-il de produits de chaque type ?

Si le nombre de produits de nettoyage représente une part (partie) de l'inventaire; le nombre de produits de conserve représenterait alors 3 parts. Nous aurons en tout 4 parts qui valent 132 000 produits en tout. Chaque part représente alors 132 000 /4 = 33 000 produits.

Sami possède donc 33 000 produits de nettoyage et 3 * 33 000 = 99 000 produits de conserve. Il s'agit d'un raisonnement analytique, inconnue intermédiaire, registre numérique. Ce raisonnement nous semble prégnant chez les élèves et nous pensons que les élèves vont l'utiliser dans la résolution de ce problème.

Ce problème est un problème déconnecté et additif du genre comparaison d'états (Vergnaud, 1997 et 2001). Sa résolution passe par un raisonnement algébrique. Les possibilités de résolution peuvent être :

Soit, le raisonnement "Algébrique // Registre intermédiaire" notée (ALi). Le registre est intermédiaire parce que les traces écrites dans la production comportent l'utilisation de segments pour représenter les parts comme celles-ci :

Nourriture ------

Habillement ------ + 5 000

Scolarité ------ + 15 000

Cela se traduit par les égalités suivantes :

Pour la nourriture: (131 000 - 5 000 - 15 000) / 3 = 37 000

Pour la scolarité: 37 000 + 15 000 = 52 000

Pour l'habillement: 37 000 + 5 000 = 42 000

Le raisonnement n'est pas arithmétique parce qu'il faut plusieurs transformations avant de trouver les différentes dépenses.

Soit, le raisonnement "Algébrique // Registre numérique " notée (ALn). Le registre est numérique parce que les traces écrites dans la production comportent l'utilisation des nombres uniquement. La production est la suivante:

Pour la nourriture: (131 000 - 5 000 - 15 000) / 3 = 37 000

Pour la scolarité: 37 000 + 15 000 = 52 000

Pour l'habillement: 37 000 + 5 000 = 42 000

Le raisonnement "algébrique // Registre algébrique " notée (ALa). Le registre est algébrique parce que les traces écrites dans la production comportent l'utilisation de symboles ou de lettres désignant les inconnues. La situation peut être traduite comme suit:

S = N + 15 000

H = N + 5 000

N + S + H = 131 000

Ce problème est un problème déconnecté et multiplicatif du genre comparaison d'états (Vergnaud, 1997; 2001). Sa résolution passe par un raisonnement algébrique dans un registre intermédiaire ou un raisonnement algébrique dans un registre algébrique. Les possibilités de résolution peuvent être:

Le raisonnement "Algébrique // Registre numérique" notée (ALn). Le registre est à numérique parce que les traces écrites dans la production comportent l'utilisation des nombres uniquement.

La situation peut se traduire comme suit :

Nombre de capsules de Aïcha : (208 + 16) / 7 = 32

Nombre de capsules de Maria : 32 * 3 = 96

Nombre de capsules de Sophia : 96 - 16 = 80

Le raisonnement "Algébrique // Registre intermédiaire" notée (ALi). Le registre est intermédiaire parce que les traces écrites dans la production comportent l'utilisation de de segments pour représenter les parts et aussi des nombres.

Aïcha ------

Maria ------ ------ ------

Sophie ------ ------ ------ (-16)

Ce qui se traduit par les égalités :

Pour Aicha: (208 + 16) / 7 = 32

Pour Maria: 32 * 3 = 96

Pour Sophie: 96 - 16 = 80

Le raisonnement "algébrique // Registre numérique // correct" notée (ALn(c)). Le registre est algébrique parce que les traces écrites dans la production comportent l'utilisation explicite des lettres.

La situation peut être traduite par un système d'équations linéaires à trois équations suivant:

M = 3A

S = M - 16

M + S + A = 208

Cette analyse est celle sur laquelle repose le dépouillement, la catégorisation et l'analyse des productions obtenues.

Nous présentons dans les lignes qui suivent une synthèse des résultats.

Synthèse des résultats et conclusion

Synthèse des résultats

Nous avons dénombré au total 4309 productions en réponse aux cinq problèmes de comparaison proposés dans le questionnaire. Les raisonnements arithmétique dans le registre numérique sont prépondérant à raison de 14,25 + 0,46 + 82,82 = 97,53% contre 2,09 + 0,07 + 0,30 = 2,47% (voir tableau n° 2) pour les raisonnements algébriques dans le registre numérique. Le tableau ci-après décrit les proportions des différents raisonnements retrouvés dans les productions des élèves. Le problème 4 comporte trois questions et est subdivisé en P4.1, P4.2 et P4.3 afin de faciliter sa compréhension aux élèves ainsi que notre dépouillement des productions.

Problèmes	ARn(c)	ARn(i)	ARn(e)	ALn(c)	ALn(i)	ALn(e)	Total
P1	543	01	168	00	00	00	712
P2	24	17	639	15	03	03	701
P3	24	02	602	21	00	01	650
P41	08	00	629	21	00	00	658
P42	07	00	499	18	00	03	527
P43	07	00	486	15	00	05	513
P5	01	00	545	00	00	01	547
Total	614 (14,25%)	20 (00,46%)	3569 (82,83 %)	90 (02,09%)	03 (00,08 %)	13 (00,30 %)	4309 (100 %)

Tableau n°2 : Proportions des différents raisonnements recensés pour le test de comparaison

Nous avons préféré parler de raisonnement algébrique au lieu de raisonnement analytique dans le tableau parce que le raisonnement à tendance analytique n'apparaît pas dans les productions des élèves.

Ce tableau indique qu'il n'y a aucun raisonnement arithmétique dans le registre intermédiaire, ni dans le registre algébrique. Nous constatons que la plupart des élèves de 6e au collège utilise le raisonnement arithmétique dans le registre numérique avec des réponses erronées dans 82,82% des cas. Cela amène à croire que l'apprentissage de la résolution des problèmes de comparaison n'est pas acquis et que les élèves de collège de notre échantillon ont des difficultés. De même, il apparaît clairement dans le tableau que la totalité des raisonnements arithmétiques ou algébriques sont dans le registre numérique. Le registre algébrique est totalement absent ou n'est pas du tout utilisé.

Le tableau n°3 nous renseigne sur la justesse des productions élaborées par nos sujets.

	Réponses correctes	Réponses erronées	Réponses incomplètes	Pas de réponse
Problème 1	543	168	01	10
Problème 2	39	642	20	21
Problème 3	45	603	02	65
Problème 4	76	1619	00	481
Problème 5	01	546	00	169
Total	704 (16,34%)	3582 (83,13%)	23 (00,53 %)	745

Tableau n°3 : Justesse des productions élaborées par les élèves

Cette synthèse des résultats va laisser place à la conclusion et des perspectives envisagées pour cette recherche.

Conclusions et perspectives

Nous avons analysé les raisonnements d'élèves de 6e à propos de la résolution des problèmes de comparaison en vue d'étudier plus tard son influence sur la pensée algébrique au cours de la transition primaire – secondaire. Cette influence pourrait dépendre des acquis des élèves. C'est pour cette raison que nous avons exploré les manières utilisées par les élèves pour aborder et résoudre les problèmes de comparaison. Les résultats obtenus montrent que la justesse des réponses au niveau du test de comparaison utilisé est de 16,34 %. Le raisonnement arithmétique est prépondérant à 97,54 % chez les sujets de notre échantillon et le registre développé est le numérique pour la totalité des productions obtenues.

La tendance des résultats serait-elle la même pour les mêmes élèves qui ont répondu à un test sur les problèmes de généralisation ? En effet, le raisonnement susceptible de faciliter la résolution des problèmes de généralisation serait le raisonnement algébrique. Ce raisonnement algébrique porte plus vers les praxéologies régionales modéliser et généraliser. Les résultats obtenus en analysant les raisonnements des élèves pour le test de comparaison et celui de généralisation feront l'objet d'une analyse au regard du contenu des manuels officiels et des pratiques déclarées des enseignants.

Références bibliographiques

Abouhanifa, S. et Squalli, H. (2019). *Les stratégies exprimées par les élèves dans la résolution d'un problème de généralisation algébrique*. Communication présentée au 4e Colloque de l'OIPA, L'enseignement et l'apprentissage de la pensée algébrique entre 5 et 14 ans. Les 6 et 7 mars 2019, Université de Liège, Belgique.

Adihou, A., Squalli, H., Saboya, M. et Tremblay, M. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves en lien avec différentes structures des problèmes de comparaison. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes EMF2015 - GT3.*

Adihou, A. (2020). Nature analytique des raisonnements d'élèves au début du secondaire : qu'en est-il lors de la résolution de problèmes visant le développement de la pensée algébrique? Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22 (1), 63–98. https://doi.org/10.7202/1070025ar

Bednarz, N. et Dufour-Janvier, B. (1996). Emergence and development of Algebra as a problem solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In Bednarz N., Kieran C. et Lee L. (Eds.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 115- 136). Dordrecht: Kluwer.

Hitt, F. et Passaro, V. (2007). De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées. *Actes de la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques (CIEAEM-59)* (p. 117-123). Dobogókő, Hongrie, juillet.

Jeannotte, D., Squalli, H., Robert, V. (2020). Mise à l'épreuve d'un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique par l'entremise d'une analyse du Programme de Formation de l'École Québécoise au primaire. *Actes du colloque GDM 2019 - À quoi ressemble aujourd'hui la recherche en didactique des mathématiques au Québec?*

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Peter Lang SA.

Squalli, H., Jeannotte, D., Koudogbo, J., et Robert, V. (2019). Analyse du potentiel du développement de la pensée algébrique dans le programme de formation de l'école québécoise. Communication présentée dans *Working group 3: Teaching for connections and understanding*. CIEAEM-71, Braga, 22 - 26 juillet.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. & Adihou, A. (2020) intitulé : Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation*, 22(1), 36–62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

Squalli, H., Oliveira, I., Bronner, A. et Larguier, M. (2020). Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. *Recherches et perspectives curriculaires. Québec : Livres en ligne du CRIRES*. En ligne : https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Vergnaud G. (1989) *La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.10 n°2-3*, pp.133-170, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Titre: La pensée fonctionnelle et ses interactions avec la pensée algébrique

Auteurs: ROBERT Virginie, SQUALLI Hassane et MARCHAND Patricia

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 334 - 348

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

La pensée fonctionnelle et ses interactions avec la pensée algébrique

ROBERT[1] Virginie – SQUALLI[2] Hassane – MARCHAND[3] Patricia

Résumé – Cette communication a pour objectif de discuter de la place de la pensée fonctionnelle dans le portrait des autres formes de la pensée mathématique. À la suite d'une proposition d'une définition opératoire de la pensée fonctionnelle s'inscrivant dans le cadre théorique de la théorie de l'objectivation de Radford (2011), nous discutons des limites des tâches axées sur la pensée algébrique pour le développement de la pensée fonctionnelle. Nous explorons ensuite les bénéfices de l'exploitation d'une tâche spécifiquement choisie pour la pensée fonctionnelle.

Mots-clefs : Pensée fonctionnelle, pensée mathématique, théorie de l'objectivation, activités fonctionnelles, fonctions.

Abstract – This communication aims to discuss the place of functional thinking in the realm of other forms of mathematical thinking. After the proposition of an operational definition of functional thinking within the theoretical framework of Radford's theory of objectification (2011), we reflect on the limits of tasks that promote algebraic thinking on the development of functional thinking. We also explore a task that shows the importance of engaging in tasks specifically chosen for functional thinking.

Keywords: Functional thinking, mathematical thinking, theory of objectification, functional activities, functions.

1. Université de Sherbrooke, Canada, virginie.robert2@usherbrooke.ca

2. Université de Sherbrooke, Canada, hassane.squalli@usherbrooke.ca

3. Université de Sherbrooke, Canada, patricia.marchand@usherbrooke.ca

L'objectif de cette communication est de montrer la place singulière de la pensée fonctionnelle parmi les autres formes de la pensée mathématique et de regarder comment elle interagit plus spécifiquement avec la pensée algébrique. Ce texte s'inscrit dans les réflexions issues de notre thèse en cours qui vise à décrire l'activité cognitive et affective de la classe au regard de la pensée fonctionnelle. Nous situant dans le cadre théorique de la théorie de l'objectivation de Radford (2011), nous définissons la pensée fonctionnelle comme des manières particulières d'agir et de réfléchir dans des activités mettant en jeu une ou des relations fonctionnelles. Dans les pages qui suivent, nous précisons une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle qui nous permet d'analyser le potentiel d'une tâche pour le déploiement d'une activité faisant intervenir la pensée fonctionnelle. Nous proposons ensuite une analyse critique de tâches de généralisation de suites de motifs géométriques croissants issues des recherches d'Early Algebra qui passent par la pensée fonctionnelle pour développer le raisonnement algébrique. Cette analyse nous amène à montrer la pertinence de proposer des tâches, comme la tâche des bouteilles qui est présentée, qui sont axées spécifiquement sur la pensée fonctionnelle en elle-même.

La pensée fonctionnelle comme forme de la pensée mathématique

Nous situons nos travaux en cours dans la théorie de l'objectivation (TO) qui s'inscrit dans un paradigme socioculturel de l'éducation (Radford, 2011 ; 2015 ; 2019). Du point de vue de la TO, l'apprentissage des mathématiques est un processus à la fois collectif, culturel et historique pendant lequel est visée la formation de citoyens critiques, réflexifs et éthiques à travers le développement d'une pensée mathématique. La pensée mathématique est définie comme une manière d'agir et de réfléchir en accord avec des formes mathématiques de pensées culturellement et historiquement constituées (Radford, 2011).

Dans les recherches en didactique des mathématiques et dans les programmes de formation comme celui du Québec, la pensée mathématique est souvent traitée et observée à travers l'une de ses formes. Or, ces formes se distinguent entres-elles par la nature des activités à travers lesquelles elles sont invoquées. Par exemple, la pensée algébrique entrera en jeu lors d'activités algébriques, c'est-à-dire des activités faisant intervenir des opérations en nombre fini (Squalli, 2000) alors que la pensée statistique se manifestera plutôt dans des activités portant sur la variabilité ou encore sur la compréhension et l'interprétation des différentes mesures de tendance centrales (et non pas seulement sur les nombres et les formules) (Gattuso et Ottaviani, 2011). Dans le cadre de nos travaux, nous nous intéressons plus particulièrement à l'une de ces formes : la pensée fonctionnelle que nous définissons comme des manières d'agir et de réfléchir dans des activités qui mettent en jeu une ou des relations fonctionnelles. L'intérêt pour la pensée fonctionnelle a récemment pris de l'ampleur, apparaissant dans les travaux de plusieurs chercheurs (p. ex. Ben Nejma, 2020; Carraher, Schliemann et Brizuela, 2000; Cooper et Warren, 2011; Moss et al., 2020; Robert, 2018; Robert et al., 2018 ; Stephens et al., 2017) qui ont permis de révéler son importance ainsi que certains enjeux relatifs à son

développement. Contrairement à la pensée fonctionnelle, la plupart des autres formes de la pensée mathématique se rattachent à des domaines de contenus alors que le concept de fonction est un concept central et unificateur du curriculum mathématique scolaire (Gülbagci Dede, Yilmaz, Akkoç et Tall, 2022; Denbel, 2015). Ce potentiel unificateur est aussi vrai pour les relations fonctionnelles, que nous plaçons au cœur de notre définition. La pensée fonctionnelle peut donc se déployer dès les premières années du primaire à travers différents domaines de contenus comme l'arithmétique (étude de suites et de régularité), la géométrie (calcul du périmètre et mesure d'angles) ou encore les statistiques (étude du marché boursier) puisque les relations fonctionnelles sont souvent utilisées pour une contextualisation des contenus riche et intéressante (Robert, 2018).

Cadre conceptuel de la pensée fonctionnelle

Avant de proposer une analyse de tâches, il importe de poser les balises théoriques et conceptuelles qui permettent de rendre compte de ce que nous entendons par pensée, de la manière dont celle-ci peut être opérationnalisée et donc être étudiée, et de la distinction que nous faisons entre l'activité et la tâche. Ces concepts seront rendus explicites à travers la caractérisation que nous faisons de la pensée fonctionnelle.

Distinguer la pensée « idéelle » de la pensée qui se déploie en activité

Dans le cadre de la théorie de l'objectivation (Radford, 2011), nous pouvons distinguer deux types différents de pensée : la pensée anthropologique et la pensée subjective. La pensée anthropologique correspond à une synthèse culturellement et historiquement constituée du travail humain (Radford, 2015). Elle n'est que pure possibilité : une manière toujours latente d'agir ou de réfléchir d'une certaine manière. Cette pensée, que nous pourrions aussi qualifier d'idéelle au sens où elle relève de l'idée et qu'elle est inatteignable, a un caractère général et continue d'évoluer alors que de nouvelles activités humaines l'enrichissent. Dans leur sens anthropologique, les différentes formes de la pensée mathématique coexistent puisqu'elles sont constitutives de la pensée mathématique historico-culturelle.

Le point d'ancrage de la théorie de l'objectivation est la praxis, c'est-à-dire l'activité sensible des individus. En effet, « c'est dans la praxis historico-sociale que la théorie de l'objectivation voit le lien entre l'individu, la pensée et la culture » (Radford 2020, p. 1). Ainsi, l'activité ne correspond pas à une simple série de problèmes à résoudre ou à une liste de tâches à exécuter. C'est un moment durant lequel des tâches (associées à des buts et des actions particulières) sont étudiées, des questions sont posées et dans laquelle des ressources culturelles sont mises à contribution afin d'atteindre l'objectif initial. C'est dans le cadre d'une activité, que s'objective la pensée subjective qui actualise la pensée anthropologique (Radford, 2011, 2015). La pensée subjective est donc ce qui apparait en activité. La pensée et l'activité sont donc étroitement liées (Radford, 2019) et même indissociables, comme deux faces d'une même médaille (Squalli, 2000 ; Robert et al., 2018). Par ailleurs, une conception non-mentaliste de la pensée est entendue ici (Radford, 2011). Les artefacts, les discours et le corps sont constitutifs

de la pensée et ils exercent un rôle sur celle-ci. Les signifiés culturels qui orientent l'activité affectent également la pensée subjective qui émerge ; la pensée est à la fois sensible et culturelle.

La tâche et l'activité

Nous l'avons mentionné précédemment, les formes de la pensée mathématique se distinguent par la nature des activités qui les font émerger. En ce sens, il importe de bien cerner la distinction que nous apportons entre l'activité et la tâche. Dans la TO, c'est dans une activité, souvent déclinée au moyen de tâches configurées de manière progressive dans le contexte scolaire, que les élèves rencontrent le savoir historico-culturel et donc qu'ils peuvent rencontrer une forme de pensée mathématique. L'activité est donc plus large que la tâche et c'est dans l'activité que peut être observée la pensée. Il est possible de planifier une tâche et des questions clés qui feront évoluer l'activité, mais il est impossible de la prévoir de manière précise. Par conséquent, la tâche peut faire l'objet d'une analyse a priori, alors que l'activité[4], peut être uniquement analysée *a posteriori*. Ainsi, pour tenter de définir ou pour mieux comprendre la pensée mathématique ou l'une de ses formes, nous n'avons d'autre choix que de considérer attentivement la tâche, mais surtout l'activité comme un ensemble.

La pensée fonctionnelle

Intégrant toutes les particularités issues du cadre théorique décrites brièvement ici, regardons maintenant comment se concrétisent ces distinctions au regard de la pensée fonctionnelle. La pensée fonctionnelle anthropologique se définie par son aspect idéel, incarnant toutes les manières potentielles d'agir et de réfléchir dans la multitude des activités mathématiques qui l'invoquent, c'est-à-dire des activités qui mettent en leur centre une relation fonctionnelle. La pensée fonctionnelle subjective est celle qui se déploie en une activité. Elle se distingue des autres formes de la pensée mathématique par la nature de cette activité qui rend explicite une relation fonctionnelle que ce soit par une tâche, une situation d'apprentissage ou encore dans une question posée à voix haute. Nous insistons ici sur l'attention explicite qui est portée à la relation fonctionnelle puisque bien qu'une telle relation puisse être invoquée dans une multitude de tâches, il n'est pas dit que la pensée fonctionnelle subjective émergera forcément dans l'activité. Nous dirons donc qu'une tâche qui comporte une relation fonctionnelle a un potentiel pour qu'émerge une pensée fonctionnelle subjective et que seule l'activité qui en découlera pourra révéler ou non ce potentiel.

4. Des précisions supplémentaires pourraient être apportées pour décortiquer encore plus finement l'activité, notamment en distinguant l'activité de la personne enseignante, l'activité de l'élève et l'activité d'enseignement-apprentissage. Toutefois, ces précisions ne sont pas nécessaires dans le cadre de cet article. Nous regroupons ici toutes ces déclinaisons sous l'appellation inclusive d'activité vue comme « un système dynamique qui est mis en mouvement collectivement par l'énergie et les efforts des individus quand ceux-ci se lancent à la recherche de quelque chose de commun » (Radford, 2019, p. 323).

L'élément essentiel de la pensée fonctionnelle : les relations fonctionnelles

Dans nos différents travaux, nous plaçons la relation fonctionnelle comme élément essentiel de notre définition de la pensée fonctionnelle. La place indispensable de la relation fonctionnelle s'explique notamment grâce au concept de fonction en lui-même puisqu'il traduit une relation entre au moins deux quantités variables covariantes et qu'il peut être défini par cette dite *relation* qui à chaque objet *y* fait correspondre au plus un objet *x*. Par ailleurs, le fait de définir la pensée fonctionnelle par les activités qui invoquent une relation fonctionnelle plutôt que le concept de fonction en lui-même, nous permet d'insister sur le fait que la pensée fonctionnelle ne se limite pas aux activités qui étudient explicitement le concept de fonction. C'est d'ailleurs ce même constat que nous pouvons faire en analysant le développement historique du concept de fonction puisque déjà, dans l'Antiquité, l'étude de l'interdépendance entre deux quantités variables était bien présente. En effet, alors que les premiers Pythagoriciens tentaient de déterminer les lois de l'acoustique en étudiant l'interdépendance entre la longueur d'une corde et la hauteur d'une note, les astronomes consignaient la position des corps en fonction du temps dans des tables (Hamzaoui et Najar, 2019; Youschkevitch, 1981). C'est ensuite l'étude du mouvement qui a permis une avancée considérable au regard de la variable dépendante alors qu'Oresme (1323-1382) a représenté les variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur et qu'il s'est intéressé aux variations dans les relations fonctionnelles (Hamzaoui et Najar, 2019 ; René de Cotret, 1988). Encore bien loin du concept de fonction tel qu'utilisé par Leibniz en 1692 ou par Bernoulli 1698, c'est en cherchant à comprendre et à documenter les relations fonctionnelles présentes notamment dans la nature ou dans les lois de la physique, qu'il semble possible d'inférer que les mathématiciens de ces époques mobilisaient ce que nous appelons la pensée fonctionnelle.

Les dimensions de la pensée fonctionnelle

Dans son sens anthropologique, la pensée fonctionnelle est une entité complexe qui ne peut être approchée dans son entièreté. Pour tenter de la décrire et l'approcher le plus fidèlement possible, nous n'avons d'autre choix que de la décliner sous une forme opératoire pour laquelle nous établissons trois principales manières d'agir et de réfléchir. D'abord, la pensée fonctionnelle fait appel à divers raisonnements qui peuvent être utilisés au cours d'une activité et qui sont issus de l'analyse épistémologique du concept de fonction, notamment le raisonnement covariationnel et le raisonnement par correspondance. Ensuite, la pensée fonctionnelle s'appuie nécessairement sur une manière particulière d'approcher certains concepts dans une activité portant sur les relations fonctionnelles et qui sont teintées d'une couleur particulière notamment les concepts de variable, de covariation, de dépendance et de correspondance. Finalement, penser de manière fonctionnelle nécessite d'invoquer un langage particulier. En plus d'inclure le langage naturel et le langage mathématique au sens large, cette composante réfère à tous les registres de représentations sémiotiques qui sont mobilisés à des fins de représentation, de conversion ou de traitement de relations fonctionnelles (Duval, 1995), notamment le registre tabulaire, le registre algébrique, le registre analytique et le registre graphique.

Ces registres peuvent être institutionnels ou personnels comme le langage naturel ou les représentations spontanées (Hitt et González-Martin, 2015).

Dans son sens subjectif, la pensée fonctionnelle se déploie par la mise en œuvre de ces trois manières d'agir et de réfléchir qui sont intimement liées dans l'activité. Mais en plus de celles-ci, elle est guidée par une dimension affective qui ne peut être négligée. Dans cette communication, comme nous discutons le potentiel de certaines tâches au regard de l'objectivation de la pensée fonctionnelle, nous nous concentrerons sur la pensée fonctionnelle en son sens anthropologique.

Analyse de tâche : entre pensée fonctionnelle et algébrique

Nous arrivons maintenant au second objectif de cette communication, c'est-à-dire de regarder comment la pensée fonctionnelle peut constituer une alliée pour enrichir des tâches axées sur le développement de la pensée algébrique, mais surtout comment elle doit aussi être travaillée pour elle-même en tant que finalité.

La pensée fonctionnelle et la pensée algébrique

Dans les dernières années, la pensée fonctionnelle a fait son entrée majoritairement dans les travaux de recherche et de développement curriculaire relevant du courant Early Algebra avec pour finalité l'approche de l'algèbre par l'introduction des concepts de variable et de fonction (Bednarz et al., 1996) plutôt que le développement de la pensée fonctionnelle en elle-même (Robert, 2018). La pensée algébrique étant définie par Squalli (2020) comme une manière de penser dans des activités dites algébriques qui, entre autres, traitent des quantités indéterminées ou approchent la généralisation de manière analytique, c'est donc la nature des activités qui est déterminante pour distinguer ce qui relève de la pensée algébrique et de la pensée fonctionnelle. Comme un chevauchement existe entre le concept de fonction et le domaine algébrique, ceci entraine nécessairement un chevauchement entre pensée algébrique et pensée fonctionnelle. En effet, généralement, dans les programmes de formation, l'étude des fonctions est incluse dans le domaine de l'algèbre. C'est notamment le cas du programme québécois (2016), des recommandations du NCTM de 2000 et du programme ontarien (2020). Ce choix pourrait entre autres relever du fait que traditionnellement, les premières fonctions enseignées sont algébriques, c'est-à-dire qu'elles peuvent être définies à l'aide d'une expression algébrique. Précisons que les fonctions polynomiales sont des fonctions algébriques alors que les fonctions sinusoïdales ou exponentielles ne sont pas algébriques dans le domaine des nombres réels (Squalli, 2000). Il existe ainsi une multitude de tâches qui sont à la fois fonctionnelles au sens où elles mettent en jeu une relation fonctionnelle et algébriques quand cette relation fonctionnelle peut être exprimée algébriquement.

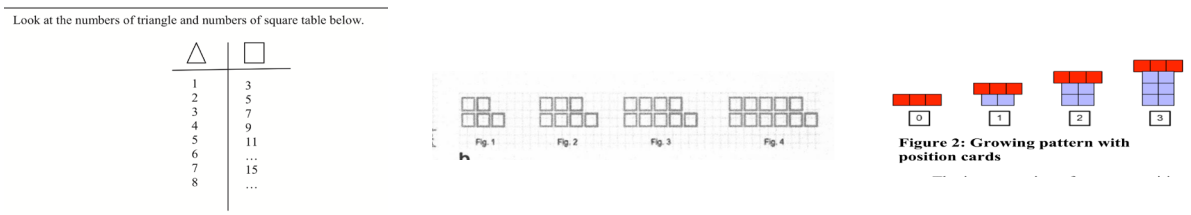
Ceci remet en lumière l'importance de nous attarder à l'activité qui découle de la tâche en question. En fonction de l'intention didactique qu'une personne enseignante insuffle à la tâche ou grâce à une question d'un.e élève, l'activité peut évoluer, bifurquer, passant d'une forme de pensée à une autre, selon que l'accent soit placé par exemple tantôt sur l'expression algébrique, tantôt sur la covariation entre les deux quantités variables. C'est donc dire qu'une activité invoquant la pensée fonctionnelle peut être bénéfique pour le développement de la pensée algébrique et vice-versa (Robert, 2018). Ces deux formes de pensée mathématique ne devraient pas être considérées de manière hiérarchique ou mutuellement exclusives ; elles devraient évoluer en concomitance (Robert, 2018).

Les recherches d'Early Algebra qui invoquent la pensée fonctionnelle se distinguent à différents niveaux en fonction des fondements qu'elles mobilisent, mais surtout par les tâches fonctionnelles exploitées. La majorité de ces dernières peuvent être classées en trois types de tâches : les tâches de généralisation de suites de motifs géométriques croissants, les tâches portant sur l'étude de suite non-numérique et à motifs non-géométriques ou encore les tâches qui invoquent une approche fonctionnelle pour la généralisation de situations contextualisées (Robert, 2020). Nous proposons dans les sections qui suivent de regarder deux types de tâches qui peuvent invoquer la pensée fonctionnelle à des niveaux différents.

La généralisation d'une suite de motifs géométriques croissants

Le premier exemple de type de tâches que nous proposons de discuter est celui de la généralisation d'une suite de motifs géométriques croissants qui est utilisé dans plusieurs recherches de Early Algebra pour favoriser le développement de la pensée fonctionnelle (p. ex. : Tanışlı, 2011 patterns represented by function tables are the tools which support the early development of functional thinking. In this regard, the aim of this study was to investigate the functional thinking ways in the early grades, particularly those of elementary school fifth grade students through linear function tables. The study data were collected via task-based interviews conducted with a total of four elementary school fifth graders. Consequently, it was found that the four fifth grade students thought on covariation while working with the linear function tables. It was further obtained that the students were able to discover the correspondence relationship and generalize this relationship. The results of the study also revealed information about the reasoning abilities of the students, in other words about their alternative ways of thinking in generalizing the correspondence relationship. [Copyright &y& Elsevier]»,»archive»:»eue»,»container-title»:»Journal of Mathematical Behavior»,»ISSN»:»07323123»,»issue»:»3»,»journalAbbreviation»:»Journal of Mathematical Behavior»,»page»:»206-223»,»source»:»EBSCOhost»,»title»:»Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students.»,»volume»:»30»,»author»:[{«family»:»Tanışlı»,»given»:»Dilek1»,»suffix»:»dtanisli@anadolu.edu.tr»}],»issued»:{«date-parts»:[[«2011»,9]]}}}],»schema»:»https://github.com/citation-style-language/schema/raw/master/csl-citation.json»} ; Warren et Cooper, 2006»archive»:»eue»,»container-title»:»Australian Primary Mathematics Classroom»,»ISSN»:»13260286»,»issue»:»1»,»journalAbbreviation»:»Australian Primary Mathematics Classroom»,»page»:»9-14»,»source»:»EBSCOhost»,»title»:»Using repeating patterns to explore

functional thinking.»,»volume»:»11»,»author»:[{«family»:»Warren»,»given»:»Elizabeth»},{«family»:»-Cooper»,»given»:»Tom»}],»issued»:{«date-parts»:[[«2006»,3]]}}}],»schema»:»https://github.com/citation-style-language/schema/raw/master/csl-citation.json»} ; Beatty et al., 2013 ; Ferrara et Sinclair, 2016 ; Moss et McNab, 2011 ; Warren et al., 2013self-talk (by students). Dans ces situations, les tâches de suites de motifs géométriques croissants sont présentées comme des tâches puissantes pour comprendre la relation de dépendance entre deux quantités (Tanışlı, 2011).



Tanışlı, 2011, p. 210 Ferrara et Sinclair, 2016, p. 6 Beatty et al., 2013, p. 103

Figure 1 - Tâches de généralisation de suites de motifs géométriques croissants

Dans la figure 1, trois tâches différentes sont présentées. D'abord, la tâche de Tanışlı (2011) se concentre sur l'observation et la recherche d'une régularité à partir de couples de données préalablement placées dans une table de valeurs. Le motif n'est pas présenté explicitement comme dans les autres exemples. Selon cette auteure, la pensée fonctionnelle entre en jeu dans cette tâche pour rendre explicite la relation fonctionnelle qui existe entre le nombre de triangles et le nombre de carrées. Ici, les quantités varient, mais ne réfèrent pas à des quantités variables habituellement rencontrées dans des phénomènes comme la distance, la hauteur, le temps, le prix, etc. Par ailleurs, il n'existe pas de lien de dépendance entre les quantités variables. Est-ce le nombre de carrés qui dépend du nombre de triangles ou plutôt le contraire ? L'accent qui est placée sur la relation fonctionnelle nous apparaît forcé et artificiel. Dans la deuxième tâche, celle de Ferrara et Sinclair (2016), une suite de motifs croissants est représentée de manière schématique par ses quatre premiers termes. Dans la recherche réalisée, l'intention de la tâche diffère selon le niveau scolaire : en deuxième année les élèves peuvent s'attarder seulement à la récursivité alors qu'en troisième année, la personne enseignante doit rendre explicite la relation entre le motif et le numéro de la figure. Encore une fois ici, le lien de dépendance est établi par défaut, le numéro de la figure agit en tant que variable indépendante. Le raisonnement par correspondance est mis de l'avant pour trouver l'expression algébrique qui exprime la régularité observée. De la même manière, Beatty et al., 2013 ont utilisé une suite de motifs croissants dans la troisième tâche présentée. En ajoutant des cartes de position sous les différents motifs, les auteurs cherchaient à vérifier si le passage vers le raisonnement par correspondance était plus intuitif pour les élèves.

Dans les trois exemples présentés, la finalité est de procéder à la généralisation de la suite en invoquant ou non le symbolisme algébrique. Or, il est vrai que la pensée fonctionnelle peut être invoquée puisqu'une relation fonctionnelle est bel et bien présente dans les tâches. Nous sommes aussi en accord avec le fait qu'en rendant explicite cette relation entre des quantités variables, un passage du

raisonnement récursif vers un raisonnement par correspondance peut être facilité. Toutefois, peut-on réellement dire que ces tâches sont optimales pour développer la pensée fonctionnelle? Cette dernière est-elle mise de l'avant ou plutôt subordonnée au développement de la pensée algébrique?

Selon nous, différentes limites peuvent être soulevées par rapport à la place donnée à la pensée fonctionnelle dans ces tâches. D'abord, les premiers termes d'une suite ne garantissent pas que la tendance se maintienne au-delà des termes présentés. Les couples choisis pourraient en effet être générés par une infinité de fonctions. Ensuite, nous l'avons mentionné, l'idée de fonction est née de questionnements sur des phénomènes de changements. Or, dans ces tâches, la variation n'est pas mise de l'avant. On cherche à exprimer une régularité en observant des instanciations d'une suite croissante. La croissance du motif est axée sur un ajout de quantité plutôt que sur la variation de la quantité. Il en est de même pour le rang (la position de la figure) qui n'est pas réellement une quantité variable. Une troisième critique revient aussi à un concept central de la pensée fonctionnelle : le lien de dépendance entre les quantités variables. Dans l'étude de suites à motifs croissants, il n'y a pas de choix à faire entre la variable dépendante et la variable indépendante. C'est une relation de dépendance qui est prédéterminée. Finalement, une dernière chose que nous voulons ajouter concerne le fait que les quantités ne peuvent qu'être discrètes. Le motif contient un nombre entier de pièces et le numéro de la figure est aussi entier. La modélisation de ces suites par une relation fonctionnelle se limite ainsi à des données discrètes. Évidemment, des phénomènes de changement ou des situations contextualisées pourraient ne présenter que des données discrètes aussi, pensons notamment à une relation telle que celle utilisée dans l'étude de Blanton et ses collaboratrices (2015) où les élèves devaient généraliser cette situation : déterminer le nombre pattes de chiens dans la pièce en fonction du nombre de chien dans la pièce. Puisqu'il ne peut y avoir 1,5 chien dans la pièce, la modélisation ne peut s'appliquer qu'à des données discrètes. Toutefois, une discussion peut être enclenchée par rapport au caractère continu de la fonction, enrichissant par le fait même l'activité fonctionnelle qui découle de la tâche. Les tâches présentées ici ont donc un potentiel pour le développement de la pensée fonctionnelle, mais celui-ci est plutôt faible. Elles nous apparaissent davantage bénéfiques pour le développement de la pensée algébrique.

La tâche des bouteilles : la pensée fonctionnelle mise à l'avant plan

Voici maintenant une tâche qui peut être utilisée pour mener une activité sur la pensée fonctionnelle en elle-même. Inspirée des travaux de Carlson (1998), regardons la tâche :

> *Observons le phénomène de remplissage de différentes bouteilles avec de l'eau qui s'écoule à débit constant. Tracer approximativement, sur un même repère graphique, les représentations de la hauteur de l'eau en fonction du volume d'eau dans les quatre bouteilles de même hauteur et de même diamètre de la base suivantes.*

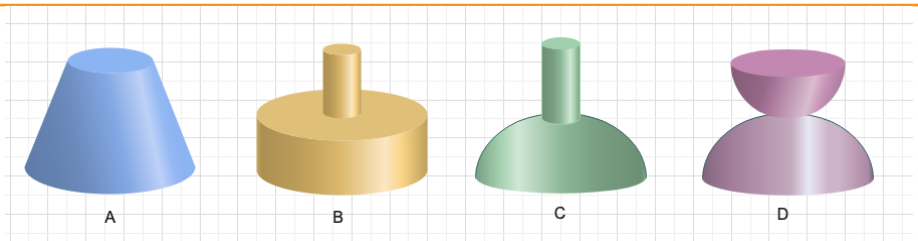


Figure 2 - La tâche des bouteilles

Dans une tâche comme celle-ci, plusieurs choses sont intéressantes pour le développement de la pensée fonctionnelle. D'abord, c'est le raisonnement covariationnel et la représentation graphique qui sont à l'honneur. Il faut nécessairement considérer la variation concomitante des deux grandeurs soient la hauteur de l'eau et le volume d'eau. Tout au long de la construction de la représentation graphique, les deux variables restent explicitement liées. D'ailleurs, puisque le volume d'eau dépend du temps écoulé, un second taux de variation est aussi travaillé de manière implicite. Or, non seulement un tel travail sur la covariation est-il nécessaire pour le développement du concept de fonction en soi, mais il devient très important pour préparer les élèves au calcul différentiel (Passaro, 2015). En plaçant les quatre représentations dans le même repère graphique, il est aussi possible et même essentiel de se questionner sur les points de croisements des courbes. Dans l'activité, faire l'approximation graphique de la covariation peut amener à diverses représentations graphiques et une confrontation de celles-ci peut être faite afin d'en arriver aux modélisations les plus adéquates possibles.

Un deuxième aspect intéressant de cette tâche est relatif au lien de dépendance entre les variables. Ici, la hauteur de l'eau doit être représentée en fonction du volume de l'eau. La variable indépendante est ainsi fixée et c'est la hauteur qui agit comme variable dépendante. Mais pourrait-on inverser les variables ? Quels seraient les impacts d'une telle inversion ? La dépendance étant essentielle dans la composante conceptuelle de la pensée fonctionnelle, il importe de développer à la fois la capacité des élèves à identifier les variables indépendante et dépendante, mais aussi à vérifier la possibilité de les inverser, c'est-à-dire de s'intéresser à la relation fonctionnelle réciproque.

Un troisième élément qu'il importe de discuter concerne la richesse de l'utilisation de la représentation graphique approximative. Puisqu'il faut représenter la variation de la hauteur en fonction de la variation du volume de l'eau dans la bouteille, il faut réfléchir à représenter adéquatement la covariation pour chaque différente partie de la bouteille. La représentation graphique est utilisée ici à des fins qui dépassent la simple visualisation. Il n'est pas question de placer des points d'abord et de tracer la courbe qui se rapproche le plus de la tendance observée, mais plutôt de raisonner directement avec et dans la représentation graphique. La graduation des axes, les points repères dégagés, les courbures peuvent notamment servir d'éléments de questionnement ou de relance pour enrichir l'activité à plusieurs niveaux.

Conclusion

En somme, nous avons d'abord voulu proposer ici une caractérisation opératoire de la pensée fonctionnelle qui s'ancre dans la théorie de l'objectivation de Radford (2011). En la définissant comme des manières d'agir et de réfléchir dans des activités qui mettent en jeu une relation fonctionnelle, nous plaçons l'accent sur cette dernière, mais aussi sur la pensée et son lien indissociable avec l'activité. Au-delà d'un simple argumentaire pour situer la pensée fonctionnelle et défendre son importance pour le développement de la pensée mathématique, nous souhaitions aussi explorer comment elle dépasse les frontières des tâches axées sur la pensée algébrique dans lesquelles elle est souvent restreinte. En discutant de la place de la pensée fonctionnelle dans les tâches de généralisation de suites de motifs géométriques croissants qui peuvent être considérées comme étant à la fois algébriques et fonctionnelles nous avons pu dégager les limites de ces tâches pour le développement de la pensée fonctionnelle. En effet, bien souvent à partir de telles tâches, la pensée fonctionnelle est subordonnée à la pensée algébrique et elle ne peut être déployée dans son plein potentiel. Selon nous, la pensée fonctionnelle peut servir à enrichir les tâches algébriques, mais elle ne devrait pas s'y limiter.

Dans la tâche des bouteilles, c'est la pensée fonctionnelle qui est mise à l'avant plan. Par la courte analyse présentée, nous avons pu mettre en valeur la pertinence de chercher des tâches qui ne relèvent pas nécessairement du domaine algébrique pour axer l'activité sur le lien de dépendance, la variation ou encore le raisonnement covariationnel. C'est donc dire qu'en ayant en tête à la fois le développement de la pensée algébrique et celui de la pensée fonctionnelle, il importe de chercher des tâches qui mettent réellement l'accent sur ces deux formes de pensée mathématique et de favoriser leur développement concomitant.

Références

Beatty, R., Day-Mauro, M. et Morris, K. (2013). Young Students' Explorations of Growing Patterns: Developing Early Functional Thinking and Awareness of Structure. In M. Martinez et A. Castro Superfine (Éds.), *Actes du colloque North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 103-110). Chicago.

Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (1996). Approaches to algebra: perspectives for research and teaching. In N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (Éds.), *Approaches to algebra : Perspectives for research and teaching* (Kluwer Academic Publishers). Dordrecht: The Netherlands.

Ben Nejma, S. (2020). Exploitation de l'histoire dans une analyse didactique du développement de la pensée fonctionnelle au début de l'enseignement secondaire tunisien. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 1, 38-69.

Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K. et Newman-Owens, A. (2015). A Learning Trajectory in 6-Year-Olds' Thinking About Generalizing Functional Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*(5), 511-558.

Carraher, D., Schliemann, A. et Brizuela, B. (2000). *Early Algebra, Early Arithmetic: Treating Operations as Functions*. In M. Fernandez (Éd.), Actes du colloque PME-NA XXII (p. 1-26). Tucson, AZ.

Cooper, T. et Warren, E. (2011). Years 2 to 6 Students' Ability to Generalise : Models, Representations and Theory for Teaching ans Learning. In J. Cai et E. Knuth (Éds.), *Early Algebraization : A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. Verlag Berlin Heidelberg : Springer.

Denbel, D. (2015). Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum. *Journal of Education and Practice, 6*(1), 77-81.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine: sémiotiques registres et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

Ferrara, F. et Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics, 92*(1), 1-19.

Gattuso, L. et Ottaviani, M. G. (2011) Complementing mathematical thinking and statistical thinking in school mathematics. In C. Batanero, G. Burrill, et C. Reading (Éds), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*. New ICMI Study Series, vol 14, Springer, Dordrecht.

Gouvernement du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise : éducation préscolaire, enseignement primaire* [avec mises à jour]. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Gouvernement de l'Ontario. (2020). *Le curriculum de l'Ontario de la première à la huitième année : Mathématiques*. Toronto : ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Gülbagci Dede, H. Yilmaz, Z., Akkoç, H. et Tall, D. (2022). Enhancing pre-service mathematics teachers' understanding of function ideas. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, doi : 10.1080/0020739X.2021.2022226

Hamzaoui, H. et Najar, R. (2019). Étude historique de la notion de fonction et caractérisation de la pensée fonctionnelle. In C. Corriveau, V. Martin, M. Thibault et A. Savard (Éds.), *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (p. 138-145) Québec : Université Laval.

Hitt, F. et González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics, 88*(2), 201-219.

Moss, D. L., Boyce, S. et Lamberg, T. (2020). Representations and Conceptions of Variables in Students' Early Understandings of Functions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(2). http://ezproxy.usherbrooke.ca/login?url=https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=eric&AN=EJ1235427&site=ehost-live

Moss, J. et McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and generalizing about functions and co-variation. Dans J. Cai et E. Knuth (Éds.), *Early Algebraization : A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. Verlag Berlin Heidelberg : Springer.

National Council of Teachers of Mathematics (dir.). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics.

Passaro, V. (2015). *Analyse du raisonnement covariationnel favorisant le passage de la fonction à la dérivée et des situations qui en sollicitent le déploiement chez des élèves de 15 à 18 ans*. Thèse de doctorat, Université de Montréal, Québec.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments*, 1, 53-87.

Radford, L. (2015). *La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation : actes du colloque Espace Mathématique Francophone (EMF) sur les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum*. Alger, Algérie : Université d'Alger.

Radford, L. (2019). Une théorie vygotskienne de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. In J. Pilet et C. Vendeira (Éds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM 2018* (p. 314-332). France : Université Diderot

Radford, L. (2020). Le concept de travail conjoint dans la théorie de l'objectivation. *Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz* (p. 1-19). Paris : IREM de Paris.

René De Cotret, S. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, 17, 5–27.

Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois: une analyse praxéologique*. (Mémoire de maîtrise). Université de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada.

Robert, V., Squalli, H. et Bronner, A. (2018). La pensée fonctionnelle : une analyse praxéologique de son développement précoce : *actes du colloque Espace Mathématique Francophone*. Paris, France : Éditions de l'IREM de Paris.

Robert, V. (2020) Examen de synthèse [document inédit]. Université de Sherbrooke.

Squalli, H. (2000). Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat, Université Laval, Québec.

Stephens, A., Fonger, N., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M., Knuth, E. et Murphy Gardiner, A. (2017). A Learning Progression for Elementary Students' Functional Thinking. *Mathematical Thinking and Learning: An International Journal, 19*(3), 143-166.

Tanışlı, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206-223.

Warren, E. et Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. *Australian Primary Mathematics Classroom, 11*(1), 9-14.

Warren, E., Miller, J. et Cooper, T. J. (2013). Exploring Young Students' Functional Thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

Youschekevitch, A. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19ème siècle. Fragments d'histoire des mathématiques. *Brochure APMEP*, (41), 7-68.

Titre: Le développement de la pensée algébrique comme fondement d'un cadre d'analyse de la transition arithmétique algèbre

Auteurs: SQUALLI Hassane, NAJAR Ridha et ADIHOU Adolphe

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 349 - 361

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Le développement de la pensée algébrique comme fondement d'un cadre d'analyse de la transition arithmétique algèbre

SQUALLI[1] Hassane – NAJAR[2] Ridha – ADIHOU[3] Adolphe

Résumé – Ce texte propose un cadre pour analyser la transition arithmétique-algèbre. L'élaboration de ce cadre articule le cadre du développement de la pensée algébrique, développé dans la perspective Early Algebra, avec le cadre d'analyse praxéologique de la TAD. Le cadre élaboré est ensuite utilisé pour étudier le potentiel de développement de la pensée algébrique que permet un programme d'étude ou des ressources d'enseignement lors du passage du primaire au collège.

Mots-clefs : Pensée Algébrique, Early Algebra, modèle praxéologique de référence, potentiel de développement de la pensée algébrique.

Abstract – This text proposes a framework for analyzing the arithmetic-algebra transition. The elaboration of this framework articulates the framework for the development of algebraic thinking, developed in the Early Algebra perspective, with the praxeological analysis framework of TAD. The developed framework is then used to study the potential for the development of algebraic thinking that a study program or teaching resources allows during the transition from primary to secondary school.

Keywords: Algebraic thinking, Early Algebra, reference praxeological model, development potential of algebraic thinking.

1. Université de Sherbrooke, Québec, Canada, hassane.squalli@usherbrooke.ca

2. Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue, Québec, Canada, ridha.najar@uqat.ca

3. Université de Sherbrooke, Québec, Canada, adolphe.adihou@usherbrooke.ca

Introduction

Cette recherche s'inscrit dans le cadre d'un projet du programme APPRENDRE mis en œuvre par l'Agence Universitaire de la Francophonie (AUF) répondant à l'Appel à projet d'avril 2019. Le projet vise à dresser un état de la situation de la transition entre l'enseignement de l'arithmétique au primaire et l'enseignement de l'algèbre au collège au Maroc, au Bénin et en Tunisie en vue de faire le point sur la manière dont le système d'enseignement de chacun des trois pays prépare ses élèves à l'entrée à l'algèbre. Le projet poursuit trois objectifs : (1) Faire une analyse du savoir à enseigner relativement au développement de la pensée algébrique dans les programmes et les manuels scolaires de chaque pays. (2) Documenter les raisonnements mobilisés par les élèves de la dernière année du primaire et de la première année du collège dans la résolution des problèmes de comparaison et de généralisation. (3) Documenter les pratiques déclarées des enseignants du primaire et du collège en regard d'activités de résolution des problèmes de comparaison et de généralisation.

L'objet de ce texte est de présenter le cadre et les outils théoriques sur lesquels nous nous sommes appuyés pour atteindre nos objectifs de recherche. Nous décrivons également la méthodologie adoptée pour atteindre notre premier objectif[4]. Nous appuyons notre travail par des exemples et résultats obtenus dans les analyses effectuées dans le cadre du projet de recherche. Des analyses plus fines et des résultats plus détaillés, concernant les études effectuées au Maroc, au Bénin et en Tunisie feront l'objet d'autres communications qui seront présentées dans ce colloque.

Problématique et contexte. Évolution de la stratégie d'introduction de l'algèbre dans les approches transitionnelles

Historiquement, l'algèbre, comme discipline mathématique, est venue après l'arithmétique. Aussi, l'idée que l'apprentissage de l'algèbre doit venir après celui de l'arithmétique a longtemps prévalu dans la communauté des éducateurs en mathématiques. Et, la stratégie d'introduction de l'algèbre encore dominante aujourd'hui, est basée sur une approche transitionnelle, considérant l'algèbre comme une arithmétique généralisée, ou, comme le rappelle Chevallard (1989), est basée sur une distinction fondamentale entre l'arithmétique et l'algèbre. Cette dernière étant considérée comme un outil de résolution de problèmes que l'arithmétique ne peut traiter.

Mais, pour les élèves, le passage d'un mode de Pensée Arithmétique (PAr) à un mode de Pensée Algébrique (PA) est loin d'être facile à réaliser et pose problème. Plusieurs auteurs n'hésitent pas à parler de rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre. Vergnaud (1986) évoque une double rupture : opposition des caractéristiques de la résolution arithmétique à celles de la résolution algébrique et opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut

4. Vu les limites qu'imposent les normes éditoriales, nous nous sommes limités dans ce texte au premier objectif dans la description de la méthodologie de recherche.

du signe d'égalité, des lettres, …), et des modes de contrôle dans la transformation des écritures. Pour sa part, Kieran (1992, 1994, cité dans Grugeon, 1997) adopte un point de vue proche de celui de Vergnaud et voit qu'entre l'arithmétique et l'algèbre résident à la fois de fausses continuités et des discontinuités. Selon elle, les fausses continuités résident dans l'utilisation des mêmes symboles et signes pour représenter le signe d'égalité et les opérations, mais avec des interprétations différentes. Quant aux discontinuités, elles sont reliées à la mise en œuvre de démarches de résolution distinctes, à l'utilisation de nouveaux objets, voire à la mise en jeu de conceptions structurales et non plus procédurales des objets (*Ibid.*).

L'insatisfaction face à l'état de l'enseignement de l'algèbre à l'école va alors conduire des chercheurs en didactique des mathématiques, depuis la fin des années 1980, à réfléchir à la réforme de l'enseignement de l'algèbre à l'école, ce qui a donné lieu au courant Early Algebra (EA). Ce courant met majoritairement l'accent sur le développement de la PA dès le primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre. Selon certains chercheurs de ce mouvement (Kaput 1998, Squalli, Mary & Marchand 2011), l'hypothèse actuelle concernant le courant EA est qu'il ne doit pas être perçu comme une version précoce de l'algèbre actuellement enseignée au secondaire, une pré-algèbre. Il est plutôt une stratégie pour enrichir les contenus mathématiques enseignés au primaire, en offrant aux élèves des opportunités pour développer la PA et approfondir davantage certaines notions et concepts mathématiques (comme les concepts d'opération, d'égalité, d'équation, de régularité, de variable, …). L'idée d'initier les élèves à la PA dès le primaire est une opportunité pour atténuer les difficultés des élèves résultantes de la transition entre l'arithmétique du primaire et l'algèbre du collège en apportant plus de profondeur et de cohérence aux programmes, sans ajouter de nouveaux contenus aux thèmes d'étude (Kaput 1998).

La perspective du développement précoce de la PA est devenue une préoccupation importante dans la communauté de recherche en didactique des mathématiques depuis la fin des années 1990. Depuis les années 2000, nous assistons, dans différents pays, à l'émergence de programmes de mathématiques qui visent, de manière explicite, le développement précoce de la PA depuis le début du primaire. C'est le cas par exemple du programme cadre de l'Ontario (Squalli, Mary & Marchand, 2011), mis en œuvre au début des années 2000, ainsi que le tout récent programme du Brésil (Oliveira, 2018). Plusieurs autres pays adoptent toujours une approche transitionnelle dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre. C'est le cas par exemple du Bénin, du Maroc et de la Tunisie. L'objectif de cette recherche est d'étudier le potentiel du développement de la pensée algébrique (PDPA) que pourrait renfermer les programmes et les manuels scolaires des trois pays, afin de rendre compte de la manière dont chacun de ces pays prépare ses élèves du primaire à l'algèbre du collège.

Assises conceptuelles et théoriques du cadre d'analyse

Le développement de *la pensée mathématique* à l'école vise une façon de penser selon les domaines (arithmétique, algèbre, géométrie, probabilité, …). Il permet aussi l'établissement de liens

entre les domaines et, qui plus est, la cohabitation et l'articulation des différentes pensées relatives aux domaines. Le développement de la PA repose aussi sur l'articulation *des dimensions arithmétique, algébrique, géométrique, probabiliste, et statistique* dans la perspective d'un développement et d'approfondissement des concepts mathématiques en algèbre. Il repose aussi sur divers registres, outils et objets. Ainsi,

> […] les interactions entre les contenus classiquement dénommés de type algébrique ou de type arithmétique cohabitent dans un espace ouvert. (Adihou et al. 2015; p.218).

La recherche que nous envisageons repose sur deux piliers conceptuels de la didactique des mathématiques :

Algèbre. Pensée algébrique

En considérant les mathématiques comme une activité humaine, l'algèbre peut être vue comme un ensemble d'activités mathématiques où interviennent des opérations (lois de composition, internes ou externes, binaires ou n-aires), pouvant être de nature quelconque (addition, multiplication, composition, etc.), mais répétées un nombre fini de fois (Squalli 2000). Ces activités sont marquées par une manière de penser, la PA. Sur le plan opératoire, cette pensée se déploie au moyen de :

1. Un ensemble de raisonnements particuliers (généraliser, raisonner de manière analytique, symboliser et opérer sur des symboles, raisonner sur des relations fonctionnelles, raisonner en termes de structures, etc.) ;

2. Des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques (voir l'égalité comme une relation d'équivalence, voir les opérations dans une expression numérique comme des objets en soi et non uniquement comme des instructions pour réaliser un calcul, etc.) ;

3. Des modes de représentation et des manières d'opérer sur ces représentations.

L'algèbre, ainsi renouvelée, fournit un cadre interprétatif d'une classe importante d'activités mathématiques des élèves de l'école primaire. De multiples occasions s'offrent à l'enseignant, qui possède une *lentille algébrique*, pour amener ses élèves à développer la PA dans la perspective de EA, et cela en enrichissant leur rapport à certains concepts mathématiques (comme par exemple, les notions d'opération, d'égalité, d'équation, de variable et l'idée de variation, de fonction), et en les initiant à raisonner de manière analytique[5].

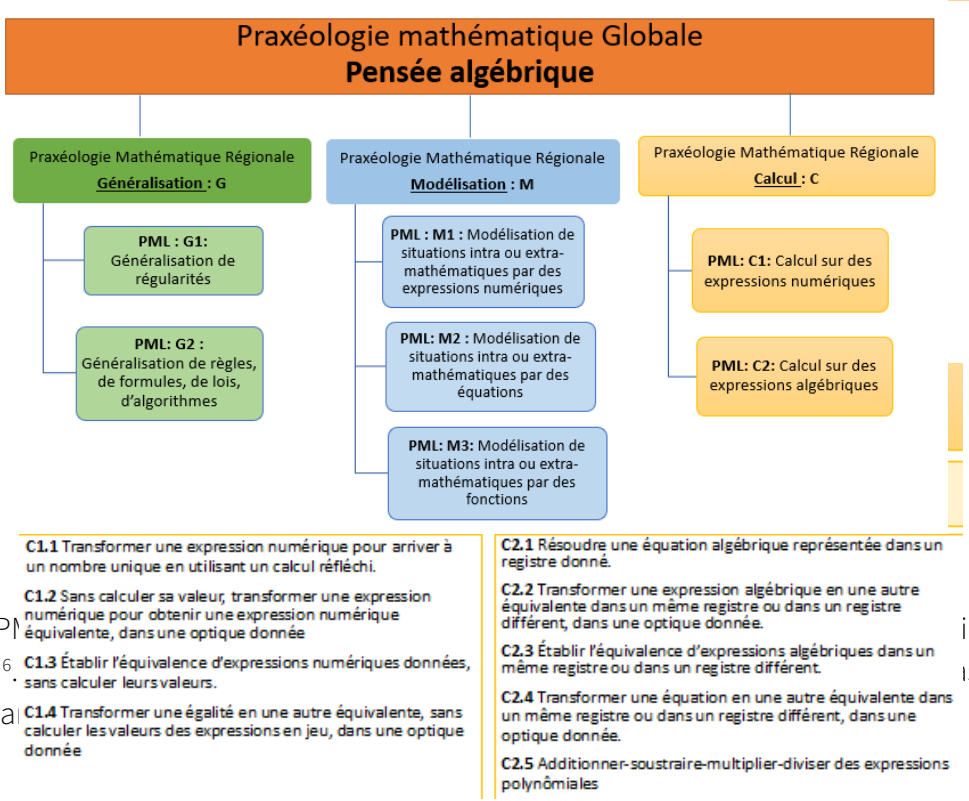
5. Dans le contexte de la résolution de problèmes, raisonner analytiquement consiste à opérer sur l'inconnue comme si c'était un nombre connu, procédant ainsi de l'inconnu vers le connu. En revanche, la pensée arithmétique est de nature non analytique. (Radford 2010, Squalli 2000)

TAD. Modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique

Pour mettre au jour le potentiel des curriculums et des ressources d'enseignement du Bénin, du Maroc et de la Tunisie à développer la PA, nous utilisons la modélisation de l'activité mathématique en termes de praxéologies que propose la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1998). Selon ce modèle, les pratiques et ressources institutionnelles, relatives à l'enseignement d'un savoir donné, peuvent être analysées par un découpage en un système de tâches (*t*), appartenant à des types de tâches (*T*), des techniques τ, décrivant des manières de réaliser les tâches *t*, des technologies θ, justifiant les techniques et des théories Θ, qui donnent les fondements sur lesquels reposent les technologies. Pour le besoin de certaines analyses, les types de tâches sont regroupés en des genres de tâches.

Dans une institution donnée *I*, si tous les éléments du quadruplet (*type de tâches, technique, technologie, théorie*) sont spécifiques à un unique type de tâche, la praxéologie correspondante est qualifiée de *ponctuelle*. Mais généralement, une théorie Θ répond de plusieurs technologies, dont chacune à son tour justifie plusieurs techniques correspondant à autant de types de tâches . Les praxéologies ponctuelles vont ainsi s'associer et s'intégrer, d'abord en *praxéologies locales*, centrées chacune sur une technologie θ déterminée. Ensuite, les praxéologies locales s'associent et s'intègrent en *praxéologies régionales*, formées autour d'une théorie Θ . Les praxéologies régionales s'intègrent à leur tour pour former une *praxéologie globale*.

L'analyse du savoir à enseigner, ou du savoir enseigné, suppose de s'appuyer sur un modèle de référence issue des recherches réalisées dans le domaine de ce savoir (Larguier & Bronner, 2015). Il s'agit, dans notre cas, de construire, en s'appuyant sur les résultats de la recherche, un modèle épistémologique, ou praxéologique, de référence de la préparation à l'entrée dans l'algèbre dès l'école primaire. Ce modèle, que nous désignons par *modèle praxéologique de référence de la* PA (MPRPA), s'appuie sur différents travaux de recherche de la PA (Lins & Kaput 2004 ; Carraher & Schliemann 2007, Radford 2010 et 2015, Squalli 2000 et 2015). Il nous servira comme une référence pour analyser le savoir à enseigner en lien avec le développement de la PA. Le modèle que nous décrivons ici était élaboré initialement par Jeannotte, Squalli et Robert (2020). Il a été affiné ensuite, par les chercheurs du présent projet, de manière à répondre aux objectifs des analyses envisagées. Ce modèle est structuré autour de trois praxéologies mathématiques régionales (PMR) : 1) Généralisation. 2) Modélisation et 3) Calcul. Chacune de ces PMR se décline en praxéologies mathématiques locales (PML). Le tableau 1 suivant résume l'architecture du MPRPA, que nous considérons également comme une praxéologie mathématique globale de la PA.



Pour toute PM iques ponctuelles (PMP)[6]. ssociés aux PMP composa

Tableau 2 – Genres de tâches de la PMR Calcul

Méthodologie d'analyse pour l'objectif 1

Pour atteindre notre premier objectif de recherche (cf. § I), nous avons adopté une méthodologie en quatre étapes pour l'étude du PDPA que renferment les ressources d'enseignement utilisées au Bénin, au Maroc et en Tunisie :

Étape 1 : Identifier le corpus des données à analyser dans les manuels scolaires de mathématiques des classes de 6e année du primaire et de 1e année du collège, et ce dans chacun des trois pays.

Étape 2 : Recueillir dans chaque corpus les données, tout en répartissant les tâches identifiées en genres et types de tâches selon les PML et les PMR correspondantes.

Étape 3 : Distinguer, dans les tâches recueillies, celles qui sont potentiellement algébriques et celles qui ne le sont pas (purement arithmétique).

Étape 4 : Dans les tâches potentiellement algébriques, indiquer le degré du potentiel algébrique de chaque tâche.

6. Voir en annexe, des exemples de tels découpages.

Le cadre d'analyse repose sur le postulat suivant : Le passage d'un mode de PAr à un mode de PA se réalise en activité, lorsque l'élève tente de résoudre une tâche. Les caractéristiques de la tâche sont donc importantes. Il s'agit donc de distinguer les tâches potentiellement algébriques des tâches qui ne le sont pas (purement arithmétique).

*Une tâche est **purement arithmétique** si les nombres qu'elle implique sont tous déterminés (comme 12 ou 234). Le raisonnement porte toujours sur la qualité nombrante des nombres (leurs valeurs). Le calcul et les opérations arithmétiques à exécuter reposent uniquement sur des nombres déterminés.*

Exemple1 : Vérifier par calcul que 4 (5+7). Ici, la tâche se limite à un calcul arithmétique portant sur les valeurs des nombres donnés. Elle est purement arithmétique.

*Une tâche est **potentiellement algébrique** si elle peut être résolue par une technique algébrique ne nécessitant pas un calcul arithmétique sur les valeurs des nombres en jeu.*

Exemple 2 : Justifier que 4 (5+7) = 4 5 + 4 7

Cette tâche est potentiellement algébrique, car elle peut être résolue par une technique algébrique ne nécessitant pas le calcul des valeurs des deux membres de l'égalité (technologie basée sur la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou par une égalité des aires). Elle relève du genre de tâche C1.1.

Si la tâche est purement arithmétique, nous dirons que son degré d'analycité est nul. Une tâche potentiellement algébrique peut être résolue par une technique arithmétique et une technique algébrique. Si l'énoncé de la tâche ne défavorise pas l'utilisation d'une technique arithmétique, ou si la technique algébrique est hors de portée de l'élève, nous dirons que *le degré du potentiel algébrique* (D°PA) *de la tâche est faible*. Dans le cas opposé, si l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique algébrique, ou si la technique algébrique est accessible à l'élève, nous dirons que *le* D°PA *de la tâche est fort*. Nous avons ainsi une échelle à trois degrés : **nul** (tâche purement arithmétique), **faible et fort**.

L'exemple 2 est celui d'une tâche dont le D°PA est faible, car l'énoncé de la tâche ne la défavorise pas l'utilisation d'une technique arithmétique au profit d'une technique sans calcul (utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition).

La tâche suivante a un D°PA faible, car la technique algébrique est hors de portée des élèves de 6e année du primaire.

> Chaque année, les parents de Said fêtent son anniversaire, ils préparent un gâteau avec autant de bougies que son âge. Ainsi à sa première année de naissance, ils ont soufflé une bougie,

puis deux à sa deuxième année, trois à sa troisième année et ainsi de suite. À la fin de la fête de cette année, la maman de Said lui dit :« depuis ta naissance, nous avons utilisé en tout 78 bougies ». Quel est l'âge de Said ? (Aljaid Fi Arriyadhiat, p.13).

Pour la résolution de cette tâche, une technique algébrique consiste à trouver la formule de la somme des entiers consécutifs de 1 à *n* (*n* étant l'âge de Said), soit . Puis résoudre l'équation : . Cette technique est considérée hors de portée des élèves de 6e année du primaire. Il s'ensuit que le DoPA de cette tâche sera considéré comme *faible*.

Le* DoPA *de la tâche est fort*, si l'énoncé de la tâche encourage l'utilisation d'une technique algébrique, ou si la technique algébrique est accessible à l'élève.*

Les problèmes de type déconnecté (Bednaz et Janvier, 1994, Squalli *et al.*, 2020) sont des exemples types des tâches dont le DoPA est fort. Il en est ainsi de la tâche suivante.

Exemple 3 : Sans aucun calcul, justifier que 4 (5+7) = 4 5 + 4 7.

En effet, l'énoncé de cette tâche défavorise le recours à une technique arithmétique, encourageant ainsi une technique algébrique.

Quelques résultats

En vue de montrer comment les éléments théoriques que nous venons de décrire permettent d'analyser et de comprendre la manière dont se fait la transition primaire-collège en termes de développement de la pensée algébrique, nous présentons ici les résultats de l'étude réalisée à ce propos relatif au système d'enseignement marocain[7].

Les analyses ont concerné le manuel Aljaid Fi Arriyadhiat (2020) pour la classe de 6e année du primaire, et le manuel Al Moufid (2020) pour la classe de 1ère année du collège. Elles ont porté sur toutes les tâches proposées dans les deux manuels dont la réalisation fait intervenir une ou plusieurs opérations de l'arithmétique ().

La classification des tâches selon les trois PMR et selon le DoPA est résumée dans les tableaux 3 et 4 suivants :

PMR	Généralisation	Modélisation	Calcul	Total
Fréquences	2,14% (24)	24,02% (269)	73,84% (872)	100% (1120)
Potentiel nul	8,33 % (2)	67,66 % (182)	57,32 % (474)	58,75%

7. L'équipe marocaine qui a réalisé cette étude est composé de : Said Abouhanifa (coordonnateur), Sabah Haddad, Belkassem Seddoug, Saadia Annassay, Hajar Mesouaki et Brahim Ennassiri

Potentiel faible	45,83 % (11)	12,64 % (34)	13,30 % (110)	13,84%
Potentiel fort	45,83 % (11)	19,70 % (53)	29,38 % (243)	27,41%

Tableau 3 – Répartition des tâches pour le manuel de 6e année du primaire

PMR	Généralisation	Modélisation	Calcul	Total
Fréquences	13,65% (83)	44,90% (273)	41,45% (252)	100,00% (608)
Potentiel nul	53,01% (44)	57,14% (156)	75,40% (190)	64,14% (390)
Potentiel faible	27,71% (23)	27,11% (74)	18,65% (47)	23,68% (144)
Potentiel fort	19,28% (16)	15,75% (43)	5,95% (15)	12,17% (74)

Tableau 4 – Répartition des tâches pour le manuel de 1e année du collège

Le tableau 3, montre que pour le manuel du primaire, ce sont les PMR *Calculer* et *Modéliser* qui recouvrent la quasi-totalité (97,86%) des tâches proposées, avec une proportion de 72,59% des tâches dont le potentiel est nul ou faible. Le tableau 4, donne des résultats presque similaires pour le collège, avec 86,35% des tâches pour les PMR *Calculer* et *Modéliser* et 87,82% des tâches dont le potentiel est nul ou faible. Ces résultats, et particulièrement l'importance de la PMR *Calculer* et la faible représentation de la PMR *Généraliser* dans les deux institutions, pourraient s'expliquer par le rapport de l'institution marocaine vis-à-vis l'introduction et l'entrée à l'algèbre au collège. Ce rapport considère l'algèbre comme une arithmétique généralisée, et donc, son introduction doit être fondée sur l'extension des systèmes de nombres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ et l'établissement du calcul algébrique sur ces domaines. Toutefois, les analyses effectuées montrent en même temps la présence d'une certaine potentialité de développement de la PA dans les activités proposées dans les deux manuels (41,25% au primaire et 35,85% au collège entre D°PA faible et fort). De telles activités pourraient mieux accommoder la transition primaire-collège en matière d'entrée à l'algèbre, si elles sont accompagnées d'une pratique enseignante appropriée, s'inscrivant dans une approche de développement de la PA.

Conclusion

Cette étude présente un cadre pour analyser la transition arithmétique-algèbre lors du passage du primaire au collège. Une certaine originalité marque l'approche adoptée dans cette étude. Il s'agit précisément d'articuler le cadre de développement de la PA avec l'analyse praxéologique de la TAD pour étudier la manière dont un programme d'étude ou des ressources d'enseignement assurent la transition arithmétique-algèbre, et ce, même dans des contextes qui ne prévoient pas le recours à EA pour l'entrée à l'algèbre. Cette articulation s'est particulièrement exprimée dans l'élaboration d'un MPRPA pour analyser des programmes et des ressources d'enseignement-apprentissage. Utilisé dans le cas du système scolaire marocain, qui adopte une approche transitionnelle dans le passage de l'arithmétique à l'algèbre, le cadre d'analyse élaboré a permis d'identifier certaines insuffisances qui caractérisent le curriculum et les ressources étudiées, pour la préparation des élèves du primaire à l'entrée à l'algèbre. L'étude a également permis de mettre en évidence le PDPA qui caractérise certaines situations d'apprentissage contenues dans les manuels scolaires analysés. Cette richesse du PDPA pourrait donner des occasions pour renforcer le développement de la PA chez les élèves et assurer une certaine continuité entre le primaire et le collège. Toutefois, cela reste tributaire aux pratiques enseignantes et au rapport institutionnel vis-à-vis la mise à profit du PDPA que renferment les différentes activités proposées dans les manuels. En guise de conclusion, ce travail montre que pour l'algèbre, ce ne sont pas tant les outils méthodologiques pour travailler l'algèbre qui posent souvent des problèmes, mais c'est surtout le rapport institutionnel et le rapport personnel des enseignants de ce qu'est l'algèbre.

Références

Adihou A., Squalli H., Saboya M., Tremblay M., Lapointe A. (2015) *Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison*. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 206-219.

Aljaid Fi Arriyadiat (2020). *Manuel scolaire de mathématiques du 6e primaire*. Ed. Librairie nationale, Maroc.

AL Moufid (2020). *Manuel scolaire de mathématiques du 1er collège*, Edition Dar Attakafa

Chevallard, Y. (1989). *Arithmétique, algèbre, modélisation*. Etapes d'une recherche, Publications de l'IREM d'Aix-Marseille, n° 16.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : L'approche anthropologique. Actes de l'université d'été de la rochelle, juillet 1998 (p. 1-29).

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, RDM, Vol.17.2. Grenoble, La pensée sauvage.

Jeannotte D., Squalli H., & Robert V. (2020) *Highlighting the potential for developing early algebraic thinking: a praxeological framework of reference*. Texte de communication au 14th International Congress of Mathematical Education. July 12-19, 2020, Shanghai, China.

Kaput J. J. (1998) Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «algebrafying» the K-12 curriculum. In *Proceedings of a National Symposium*, may 27 and 28, 1997. The Nature and Role of Algebra in the K-14 Curriculum (pp. 25-26). Washington, D.C. National Academy Press.

Kieran C. (1992) The learning and teaching of school algebra. In A. D. Grouws (dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 390-419). New York. National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran C. (1994) A functional approach to the introduction of algebra - Some pro and cons. In J. Ponte et J. F. Matos (dir.), *Proceedings of The 18th International Conference for the Psychology of Mathematical Education*. Vol. 1 (p. 157-175). Lisbonne : University of Lisbon.

Larguier M., & Bronner A. (2015) Première rencontre avec l'algèbre. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3*.

Lins R. C., & Kaput J. (2004) The early development of algebraic reasoning : The current state of the field. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference* (Vol. 1, pp. 47–70). The University of Melbourne, Australia.

Oliveira, I. (2018). Programme d'études du Brésil : comment est organisé l'arrimage entre l'avant et l'après lors de l'introduction de la lettre en termes de développement de la pensée algébrique? Communication présentée au Colloque de l'OIPA 3. Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires, Sherbrooke, Québec.

Radford L., (2010) Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

Squalli H. (2000) Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base. Thèse de doctorat inédite. Université Laval.

Squalli H. (2015) La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2015–Groupe travail 3*.

Squalli H., Mary C., & Marchand P. (2011) Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre: cas du Québec et de l'Ontario. *In Recherches et expertises pour l'enseignement scientifique*. Vol. 1 (pp. 65-78). De Boeck Supérieur.

Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A. & Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36–62. https://doi.org/10.7202/1070024ar

Vergnaud G. (1986) Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In, *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* (p. 189-199). Grenoble : La pensée sauvage.

Titre: La pensée algorithmique comme une manière mathématique de penser

Auteurs: ST-CYR Marie-Frédérick, SQUALLI Hassane, VENANT Fabienne

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 362 - 375

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

La pensée algorithmique comme une manière mathématique de penser

ST-CYR[1] Marie-Frédérick – SQUALLI[2] Hassane – VENANT[3] Fabienne

Résumé – Bien que l'arrivée de l'ordinateur ait donné un nouveau souffle à l'activité algorithmique, celle-ci fait partie de l'activité mathématique depuis plusieurs centaines d'années. Dans ce texte, nous présentons la manière dont nous étudions la pensée algorithmique comme une forme de mathématique en nous appuyant sur la théorie de l'objectivation. Après avoir présenté brièvement notre caractérisation de la pensée algorithmique, nous expliciterons l'originalité de notre travail en le comparant avec des travaux précédents.

Mots-clefs : Didactique des mathématiques, pensée mathématique, pensée algorithmique, activité algorithmique, théorie de l'objectivation

Abstract – Although the advent of the computer has given new life to algorithmic activity, it has been part of mathematical activity for several hundred years. In this paper, we present the way we study algorithmic thinking as a form of mathematics based on the theory of objectification. After briefly presenting our characterization of algorithmic thinking, we will explain the originality of our work by comparing it with previous works.

Keywords: Didactic of mathematic, mathematic thinking, algorithmic thinking, algorithmic activity, theory of objectivation

1. Université de Sherbrooke, Canada, marie-frederick.st-cyr@usherbrooke.ca

2. Université de Sherbrooke, Canada, hassane.squalli@usherbrooke.ca

3. Université du Québec à Montréal, Canada, venant.fabienne@uqam.ca

Introduction

Le développement de la pensée mathématique et de ses différentes formes est au cœur de plusieurs programmes de formation dans le monde et au cœur de discussions en didactique des mathématiques. Alors que de nombreuses recherches s'intéressent à des formes de pensée associées à des domaines de contenus (par exemple la pensée algébrique est associée au domaine de l'algèbre), nous nous intéressons à une pensée qui est rattachée à un concept : celui d'algorithme. Ce concept, comme celui de fonction (Robert, 2018), est transversal puisqu'il est présent dans tous les domaines de contenus mathématiques.

La pensée algorithmique qui tantôt est appelée pensée informatique et tantôt pensée computationnelle fait actuellement l'objet de plusieurs recherches en didactique de l'informatique et en didactique des mathématiques en plus de s'être taillée une place dans plusieurs milieux scolaires à travers le monde. Dans ce texte, nous présentons un bref aperçu de l'évolution du concept d'algorithme en mathématique dans le temps en montrant notamment les changements qu'a apporté l'arrivée de l'ordinateur sur l'activité algorithmique en mathématique. Ensuite, en nous appuyant sur la théorie de l'objectivation (Radford) nous présentons la manière dont nous définissons la pensée algorithmique en mathématique ainsi que les grandes lignes de notre caractérisation de cette même forme de pensée mathématique. Nous terminons par discuter de l'originalité de notre travail en le comparant avec quelques recherches antérieures ayant porté un regard sur la pensée algorithmique dans un contexte mathématique.

L'activité algorithmique en mathématique au fil du temps

Bien avant la conceptualisation de l'algorithme, nous pouvons retrouver des traces laissant entrevoir la présence d'activités algorithmiques. En effet, on retrace dès le 9e siècle, dans les travaux du mathématicien Al-Khwarizmi, des algorithmes décrits dans le langage usuel. Certains des algorithmes décrits s'adressaient à des mathématiciens ou à des personnes ayant des connaissances mathématiques avancées en décrivant des procédures permettant de résoudre rapidement des équations. D'autres algorithmes étaient destinés aux citoyens qui n'avaient pas de connaissances mathématiques avancées dans le but de leur permettre d'effectuer des calculs mathématiques quotidiens sans se tromper (ou du moins en faisant le moins d'erreurs possible). En effet, Al-Khwarizmi[4] a repéré des problèmes de la vie courante, dont des problèmes liés aux échanges commerciaux, des problèmes d'arpentages et des problèmes de succession, puis il a réussi, avec ses compétences à reconnaitre des régularités et à généraliser, à proposer des solutions générales ceux-ci. Il a ensuite rédigé un manuel décrivant, de manière précise, les procédures à suivre pour effectuer des calculs de base de manière sûre et efficace. Un exemple d'un tel algorithme est l'algorithme d'addition.

4. Le mot algorithme provient d'une déformation latine du nom d'Al-Khwarizmi.

Par la suite, le concept d'algorithme s'est formalisé et a conservé une place importante dans l'activité mathématique. Nous pouvons, en outre, reconnaitre l'activité algorithmique par le fait qu'elle ait en son centre la présence d'une procédure systématique qui permette de répondre de manière juste à une famille de problèmes (Modeste, 2012 ; Ross, 2019). Jusqu'au milieu du 20e siècle, les algorithmes conçus étaient destinés à des humains leur permettant d'économiser du temps pour trouver la solution de certains problèmes. Puis, avec l'apparition de l'ordinateur, l'activité algorithmique a vu ses potentialités se multiplier. À partir de ce moment, les algorithmes n'étaient plus uniquement destinés à des humains, mais ils pouvaient être exécutés par une machine qui est plus efficace et qui fait moins d'erreurs que les humains. Or, ce changement a ouvert la porte à de nouvelles activités mathématiques telles que la preuve automatisée, l'expérimentation sur plusieurs exemples ou encore la vérification de conjectures (Broley, 2015). De plus, l'activité informatique a amené l'importance d'étudier la complexité et l'efficacité d'un programme, donc d'un algorithme. Cette activité demande la mobilisation de concepts mathématiques avancés et est devenue une activité mathématique importante en informatique puisqu'elle permet de comparer des algorithmes et, ultimement, de les optimiser.

Si au départ l'objectif de la conception d'algorithmes était de répondre à un besoin social, en permettant aux individus d'effectuer des calculs quotidiens, et au besoin des mathématiciens d'avoir des procédures efficaces pour effectuer certaines tâches ; il est clair que ce besoin a évolué. En effet, l'omniprésence d'outils pour calculer (calculatrices, ordinateurs, cellulaire, etc.) rend moins pertinente la capacité à effectuer très rapidement et sans faire d'erreurs des calculs. Toutefois, des individus qui ont développé une manière de penser leur permettant de créer les algorithmes pour que les machines opèrent sont très recherchés. En ce sens, le système d'éducation, qui vise à répondre aux besoins d'une société à un moment donné, doit préparer les élèves aux besoins actuels et futurs (Squalli, 2000). Par conséquent, les élèves doivent développer leur pensée algorithmique dans différentes sphères, dont en mathématique où les algorithmes ont émergé. Deux questions se posent alors : Quelle est cette forme de pensée spécifique en mathématique ? Quelles sont les caractéristiques de cette forme de pensée mathématique ? Comment aider les élèves à la développer ?

Pour entamer la discussion, nous allons présenter notre manière d'approcher la pensée par l'activité pour ensuite présenter les principales activités algorithmiques en mathématiques et terminer par distinguer le travail que nous effectuons des travaux précédents qui traitent de la pensée algorithmique.

Notre vision de la pensée à travers la théorie de l'objectivation

En nous intéressant à la pensée algorithmique en mathématique, nous nous inscrivons dans les recherches qui s'intéressent aux différentes formes de pensée en mathématiques. Nous approchons la pensée algorithmique dans le cadre de la théorie de l'objectivation (TO) (Radford, 2011), une théorie socioculturelle d'origine vygotskienne. Dans la TO le processus d'enseignement-apprentissage est considéré comme un travail conjoint, entre l'enseignant et les élèves, de rencontre avec les savoirs

mathématiques chargés historiquement et culturellement. Afin de situer notre projet, nous précisons d'abord ce lien qu'unit la pensée et l'activité pour ensuite distinguer brièvement la pensée algorithmique dans son sens anthropologique et dans son sens subjectif en mettant l'accent sur la pensée anthropologique qui est au cœur de notre travail.

La pensée et l'activité algorithmique

Ce qui nous a permis de reconnaitre la pensée algorithmique dans le travail d'Al-Khwarizmi n'est pas la conceptualisation de l'algorithme ; ce sont les traces qu'il a laissées. Ces traces rendent compte d'une activité et d'un système sémiotique de significations culturelles qui « inclut des signifiés culturels tels que des conceptions autour des objets mathématiques [et algorithmiques] (leur nature, leur mode d'existence, leur relation avec le monde concret, etc.) et des modèles sociaux de production de signifiés » (Radford, 2011, p. 58). C'est donc dire que les algorithmes conçus par Al-Khwarizmi que nous pouvons retrouver aujourd'hui dans divers documents représentent beaucoup plus que la procédure permettant de calculer, par exemple, la somme de deux nombres; ils portent en eux une partie de la culture de l'époque et de l'activité, donc de la pensée, d'Al-Khwarizmi. En somme, la pensée se matérialise dans l'activité. La pensée et l'activité sont pour nous deux faces d'une même médaille.

La pensée au sens anthropologique et au sens subjectif

La pensée anthropologique relève d'une synthèse codifiée des pratiques sociales, culturelles et historiques (Radford, 2015). Elle s'est construite au fil du temps au travers de « l'agir des individus et [des] pratiques sociales à l'intérieur desquelles ces individus agissent » (Radford, 2015, p. 336). Cette synthèse résulte de la pratique sociale, les singularités des actions se voient *reflétées* dans ce qui devient reconnu comme une même manière d'agir et de réfléchir, se constituant ainsi en un prototype d'actions et de réflexions (Radford, 2015). La pensée est dès lors une capacité toujours latente d'agir ou de réfléchir d'une certaine manière. La pensée subjective, celle du sujet, est l'*actualisation*, la *concrétisation* ou la *matérialisation* de la pensée au sens anthropologique, d'une potentialité culturelle (Radford, 2015).

Pour l'instant, nous considérons uniquement la pensée anthropologique afin de décrire, le mieux possible, la pensée algorithmique en mathématique qui s'est construite au travers des cultures pendant plusieurs centaines d'années. Toutefois, nous ne pourrons présenter pleinement la pensée algorithmique dans son entièreté puisqu'elle ne peut être totalement saisie dans son tout. Nous la décomposerons donc pour la rendre accessible.

La pensée algorithmique et le concept d'algorithme

À la lumière de notre vision de la pensée, telle que la définit la TO, nous définissons *la pensée algorithmique en mathématique comme une manière d'agir et de réfléchir dans des activités mathématiques faisant intervenir au moins un algorithme*.

Un algorithme a trois caractéristiques essentielles : (1) une série d'instructions élémentaires opérationnelles pouvant inclure des actions répétées et des prises de décisions ou la sélection d'éléments menant à différentes suites d'actions (ces décisions et ces sélections sont basées sur des conditions) ; (2) doit se terminer en un nombre fini d'étapes (Modeste, 2012) et (3) lorsqu'exécuté correctement, donne la bonne réponse (Bråting et Kilhamn, 2021).

De plus, pour nous, le fait que l'algorithme soit adressé à un humain ou à une machine n'a pas d'importance. Cet aspect pourra influer la manière de le représenter, mais il n'en changera pas l'activité. Par conséquent, à l'instar de plusieurs chercheurs (Denning, 2017 ; Knuth, 1985 ; Modeste, 2012), nous incluons l'automatisation à notre conceptualisation de l'algorithme et donc, de la pensée algorithmique en mathématique.

Les classes d'activités algorithmiques en mathématique

Notre définition de la pensée algorithmique en mathématique s'appuie sur des activités algorithmiques en mathématiques. Or, quelles sont ces activités ? En nous appuyant sur notre définition, nous avons identifié deux critères pour identifier des classes essentielles d'activités algorithmiques en mathématiques : (1) il s'agit d'une activité mathématique et (2) l'activité fait intervenir au moins un algorithme.

En nous appuyant sur ces critères, nous avons identifié trois classes d'activités algorithmiques en mathématiques essentielles : la mobilisation d'un algorithme existant, la conception d'un algorithme et l'étude d'un algorithme. Ces trois classes d'activités algorithmiques en mathématiques, bien que présentées de manière distincte, sont interreliées les unes aux autres. Il est possible qu'à l'intérieur d'une même activité une personne conçoive tantôt un algorithme et qu'ensuite elle l'étudie et qu'elle le mobilise. Ces classes ne sont pas perméables, mais nous permettent de distinguer trois activités algorithmiques essentielles que nous décrirons tour à tour.

La mobilisation d'un algorithme existant

La mobilisation d'un algorithme existant se réfère aux activités mathématiques où une personne fait appel à un algorithme qui existe déjà pour réaliser une tâche ou résoudre un problème mathématique. Elle peut le transposer dans un langage différent (par exemple le transposer du langage mathématique vers un langage de programmation) ou elle peut l'utiliser de manière intentionnelle pour exécuter une tâche précise. Cette idée d'intention est importante pour que l'activité soit considérée comme algorithmique. C'est avec cette intention que la personne a le potentiel de rencontrer la pensée algorithmique.

Si nous remontons à l'époque d'Euclide (qui précède celle d'Al-Khwarizmi), nous retrouvons un algorithme qu'il a proposé pour calculer le plus grand commun diviseur de deux nombres naturels *a* et *b* (*a* > *b*). Voici cet algorithme écrit dans un langage mathématique actuel : *Soit* r_i *un entier le reste de la division euclidienne de a par b et* x_i *un entier tel que* $a=bx_1+r_1$. *Si* $r_1=0$, *alors pgcd(a,b)=b, sinon pgcd(a,b)= pgcd(b, r1). Alors, on reprend jusqu'à ce que* $r_n=0$ *comme suit :*$b= r_1x_2+r_2$; $r_1= r_2x_3+r_3$; *etc. Lorsque* $r_n=0$, *alors pgcd(a,b)=* $r_{(n-1)}$.

Une personne qui serait dans une activité de mobilisation d'un algorithme pourrait adapter cet algorithme dans un langage de programmation. Contrairement à une personne qui utiliserait machinalement l'algorithme sans réfléchir, en le transposant elle agirait de manière intentionnelle et entrerait alors dans une activité algorithmique. Par conséquent elle développerait sa pensée algorithmique.

La conception d'un algorithme

La conception d'un algorithme se réfère aux activités mathématiques dans lesquelles une d'un personne construit un algorithme en s'appuyant (ou non) sur un (ou de plusieurs) algorithme(s) existant(s). La conception d'un algorithme peut avoir diverses visées dont permettre de modéliser ou de tester une solution ou d'émettre une conjecture. Toutefois, peu importe l'objectif de l'activité, la personne qui conçoit l'algorithme est amenée à décomposer un problème et/ou une solution en étapes élémentaires, à identifier des régularités et à généraliser lorsque cela s'applique.

Dans l'exemple de l'algorithme d'Euclide, Euclide qui conçu cet algorithme, a identifié des opérations qui se répétaient ($b= r_1x_2+r_2$) jusqu'à obtenir un reste nul. Il a donc détaillé sa stratégie en décomposant les étapes de sorte qu'elles soient les plus simples possibles pour qu'elles soient facilement reproductibles et en généralisant sa solution à tous les calculs de pgcd possibles. Par ailleurs, une élève pourrait trouver le pgcd de deux nombres par recherche exhaustive pour arriver à identifier les deux grandes étapes : (1) lister les diviseurs de chacun des nombres et (2) déterminer le nombre commun le plus grand. Elle pourrait aussi choisir de réutiliser un algorithme informatisé qu'elle a déjà fait pour lister les diviseurs d'un nombre afin de le compléter et de l'adapter pour qu'il puisse

déterminer le plus grand diviseur commun aux deux nombres. Cette élève est alors dans une activité de conception dans laquelle elle a mobilisé et adapté un algorithme qui existait déjà.

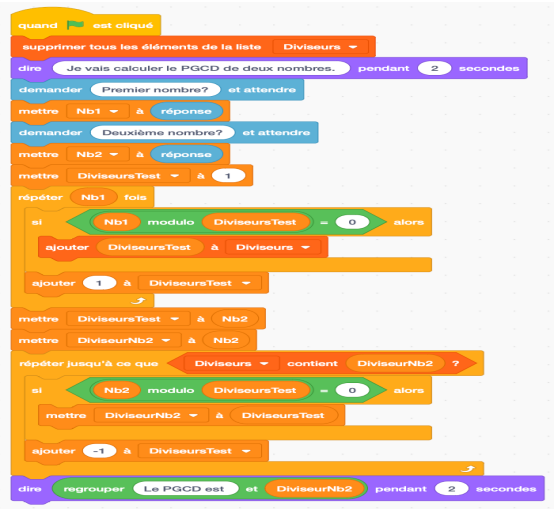


Figure 3 - Programme permettant de lister tous les diviseurs d'un nombre (encadré), puis adapté pour calculer le PGCD

L'étude d'un algorithme

L'étude d'un algorithme est l'activité mathématique dans laquelle une personne réfléchit à la structure de l'algorithme, à savoir notamment s'il répond bien au problème initial en un nombre fini d'étapes, tout en fournissant une réponse juste lorsqu'il est exécuté adéquatement. Cette activité peut aussi être une activité de comparaison des algorithmes entre eux en comparant leur structure, mais aussi en s'intéressant à leur complexité ou à leur efficacité[5]. La comparaison de l'algorithme de division tel qu'Euclide l'a proposé et l'algorithme par recherche exhaustive pourrait être une activité d'étude d'un algorithme. Ces deux algorithmes fonctionnent, mais il serait intéressant de comparer les processus et de faire ressortir leurs ressemblances et leurs différences. Nous pourrions aussi nous intéresser à savoir lequel est le plus efficace et dans quelle situation c'est bien le cas.

Ces trois classes d'activités, telles que présentées, peuvent apparaitre à des moments distincts, mais peuvent aussi apparaitre simultanément. En effet, dans une même activité, il est possible d'à la fois concevoir un algorithme et d'en faire l'étude pour essayer de le rendre plus efficace par exemple. Également, des sous-classes d'activités telles que la programmation et la généralisation peuvent apparaitre dans différentes classes d'activités. Or, pour distinguer les activités les unes des autres, nous allons nous appuyer sur trois dimensions.

5. Les notions de complexité et d'efficacité surviennent généralement lorsque l'algorithme est programmé. Or, l'activité nécessaire pour évaluer ces notions est une activité mathématique dans laquelle les propriétés des algorithmes sont étudiées.

Dimensions de la pensée algorithmique en mathématique

Bien que la définition de la pensée algorithmique en mathématique nous éclaire sur cette forme de pensée, elle n'est pas opératoire. Or, à l'instar de travaux sur la pensée algébrique (Squalli, 2015, 2020) et sur la pensée fonctionnelle (Robert, 2018), nous décrivons, de manière non exhaustive, la pensée algorithmique en mathématiques selon trois dimensions : les concepts en jeu et leur signification (opérateur, variable, symbole d'égalité, fonction), les raisonnements utilisés (séquentiel, itératif, récursif, conditionnel, analyse de l'erreur) et les modes de représentation et les manières d'opérer sur celles-ci (mathématique, informatique, pseudocode, passage d'un registre à l'autre). Nous décrivons globalement l'activité algorithmique en mathématique dans ce texte, mais nous pourrions également distinguer ces dimensions pour chacune des classes d'activités. Ce travail est prévu dans le cadre de notre projet de maitrise.

Originalité de notre travail

Le travail que nous avons entamé sur la pensée algorithmique en mathématique contribue aux réflexions sur la pensée algorithmique en mathématique et en informatique. Or, notre travail se distingue de ces travaux pour trois raisons principales : (1) nous considérons la pensée algorithmique comme une forme de pensée mathématique, (2) nous nous inscrivons dans une approche socioculturelle selon laquelle nous approchons la pensée par l'activité et (3) nous considérons trois dimensions pour décrire la pensée algorithmique dans son sens anthropologique. Nous présentons chacun de ces éléments qui rendent notre recherche originale en posant une réflexion critique sur certains travaux clés ainsi que sur notre propre projet.

La pensée algorithmique comme une forme de pensée mathématique

Nous regardons la pensée algorithmique comme une forme de pensée mathématique. Nous ne nions pas qu'elle existe dans d'autres sphères d'activités (notamment en sciences informatiques), mais nous nous intéressons spécifiquement à l'activité algorithmique qui a lieu dans des activités mathématiques. Par conséquent, notre travail ne vise pas à faire les contours de la pensée algorithmique en mathématique en la distinguant et en la liant à la pensée informatique comme l'ont fait Knuth (1985), Modeste (2012) et Shute (2017), mais simplement à décrire cette forme de pensée mathématique. Nous regardons alors la pensée algorithmique comme une forme de pensée mathématique. Cette posture est appuyée par l'histoire de l'activité algorithmique qui a débuté en mathématique et qui continue d'être au cœur de celle-ci.

Nous nous distinguons également de recherches qui visent à caractériser la pensée informatique ou computationnelle, pour ensuite identifier les caractéristiques qui sont aussi présentes en mathématiques. Un exemple d'une telle recherche a été menée par Kallia et son équipe (2021) qui ont fait

une revue de la littérature pour identifier les caractéristiques de la pensée informatique, puis qui ont, à l'aide d'une étude de Delphes, identifié celles qui étaient aussi présentes dans l'activité mathématique. Un second exemple est le travail de Weintrop et de son équipe (2016) qui ont identifié des activités computationnelles pertinentes pour les cours de mathématiques et de sciences. Ils ont notamment identifié la résolution de problèmes computationnels comme centrale à leur taxonomie de la pensée computationnelle pour les classes de mathématique et de science. Ces travaux permettent de mettre en lumière plusieurs caractéristiques de la pensée algorithmique en mathématique qui nous seront fort utiles, mais ne décrivent pas l'activité algorithmique comme une manière mathématique de penser.

Notre manière d'approcher la pensée par l'activité

En inscrivant notre travail dans la théorie de l'objectivation, nous soutenons que la pensée algorithmique en mathématique est une manière d'agir et de réfléchir dans des activités algorithmiques en mathématique. La pensée algorithmique, dans son sens anthropologique, est construite, et continue de se construire, par l'ensemble des interactions qui se sont déployées dans des activités algorithmiques. Nous croyons donc que c'est dans l'activité algorithmique en mathématique que la pensée algorithmique en mathématique prend forme.

En adoptant cette position, nous nous distinguons du travail de Modeste (2012) qui a identifié des problèmes fondamentaux pour l'algorithmique. Ces problèmes sont pertinents et ont probablement le potentiel de générer une activité algorithmique, mais ce n'est que dans l'activité que ce potentiel peut, ou non, s'actualiser. Par conséquent, nous soutenons que ces problèmes fondamentaux pour l'algorithmique ne sont pas tributaires d'une activité algorithmique réelle. Ils ont probablement le potentiel de générer cette activité, mais à eux seuls, ils ne peuvent pas être ou décrire l'activité algorithmique elle-même.

De plus, notre posture nous amène à décrire la pensée algorithmique et à la découper de manière différente. En effet, en identifiant des activités algorithmiques, nous ne décomposons pas la pensée selon des tâches ou selon des domaines mathématiques auxquels ces tâches peuvent appartenir ; nous la découpons selon des classes d'activités algorithmiques en mathématiques, selon les manières d'agir et de réfléchir dans ces activités. Ce choix nous permet d'inclure, contrairement à Knuth (1974), la complexité et l'opération d'affection dans l'activité algorithmique lorsque celle-ci s'inscrit dans une activité mathématique.

Les trois dimensions de la pensée

En décrivant la pensée algorithmique en mathématique selon trois dimensions, nous distinguons clairement les concepts, les raisonnements utilisés et les modes de représentation. Ce choix ressemble à celui fait par Brennan et Resnick (2012) qui, dans leur caractérisation de la pensée compu-

tationnelle, ont identifié des concepts, des pratiques (qui se rapprochent des raisonnements dans notre cas) et des perspectives. Les deux premières dimensions rejoignent les nôtres, alors que la troisième, bien qu'elle inclue le langage, inclut aussi le questionnement qui n'est pas un mode de représentation.

Par ailleurs, notre choix de distinguer trois dimensions se distingue de recherches qui proposent des caractérisations sans tenir compte du type de caractéristiques sélectionnées. Le travail de Kallia et de son équipe (2021) illustre bien cette différence. En effet, cette équipe a élaboré une caractérisation de la pensée computationnelle pour l'enseignement des mathématiques selon trois dimensions : (1) La résolution de problèmes est le but fondamental de l'enseignement des mathématiques dans laquelle la pensée computationnelle est incluse. (2) Les processus de pensée incluant (mais ne se limitant pas à) l'abstraction, la décomposition, la capacité à reconnaitre des régularités, la pensée algorithmique, la modélisation, la logique, la pensée analytique, la généralisation, l'évaluation de solutions et de stratégies. (3) L'écriture de solutions à des problèmes mathématiques de telle sorte qu'ils puissent être transférés et traités (transposés) par une autre personne ou par une machine.

Nous constatons que le premier et le troisième point présentent, séparément, les éléments clés de la définition proposée par Wing (2010). Elle définit la pensée computationnelle comme « the thought processes involved in formulating problems and their solutions so that the solutions are represented in a form that can be effectively carried out by an information-processing agent » (Wing, 2010, p.1). Le second point présente des processus de pensée. Certains sont des types de pensée (pensée algorithmique, pensée analytique), alors que d'autres se réfèrent à des processus généraux en mathématique (abstraction, généralisation). Bien que non opératoire, ce travail nous offre tout de même un éclairage sur les processus de pensée qui pourraient se retrouver dans notre caractérisation.

Une autre caractérisation qui ne tient pas compte du type de caractéristiques sélectionnées est celle de Weintrop et de son équipe (2016) qui ont proposé une taxonomie de la pensée computationnelle pour l'enseignement des sciences et des mathématiques. La taxonomie était divisée en quatre catégories. Ces catégories mettent de l'avant différents aspects de la pensée computationnelle et nous éclairerons dans notre travail, mais elles ne sont pas propres à l'activité mathématique et ne distinguent pas les idées qui relèvent du raisonnement, de celles qui relèvent des concepts ou des représentations. Deux des catégories sont liées à des activités (résolution de problème et modélisation), alors que l'une d'elles semble se référer aux représentations et aux manières d'opérer et de raisonner sur celles-ci. La quatrième catégorie se réfère aux pratiques de données (collecte, création, manipulation, analyse, visualisation) en faisant appel à des activités, des concepts, des raisonnements et des représentations.

Les deux exemples précédents montrent qu'en distinguant trois dimensions, notre caractérisation sera davantage opératoire et facilitera notre travail pour analyser des activités algorithmiques en mathématique par la suite.

Conclusion

En conclusion, nous avons présenté la place qu'a eu l'activité algorithmique dans l'activité mathématique au fil du temps et la place qu'elle continue d'avoir. Nous avons ensuite défini la pensée algorithmique en mathématique, en nous appuyant sur la TO, comme une manière d'agir et de réfléchir dans des activités mathématiques faisant intervenir au moins un algorithme. Puis, nous avons présenté trois activités algorithmiques essentielles, la mobilisation, la conception et l'étude d'un algorithme, ainsi que les concepts, les raisonnements et les modes de représentation qui permettent de décrire la pensée algorithmique. Finalement, nous avons mis en lumière l'originalité de notre travail par sa manière de considérer la pensée algorithmique comme une forme de pensée mathématique, d'approcher la pensée algorithmique par l'activité algorithmique et de la caractériser selon trois dimensions. Nous poursuivrons notre travail en détaillant notamment chacune des classes d'activités selon les trois dimensions opératoires de la pensée algorithmique en mathématique présentées.

Références

Bråting, K., et Kilhamn, C. (2021). Exploring the intersection of algebraic and computational thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *23*(2), 170-185. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1779012

Brennan, K. et Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. *Proceeding of the Annual american educational research association meeting 1*, 85-90.

Broaley, L. (2015). *La programmation informatique dans la recherche et la formation en mathématiques au niveau universitaire* [mémoire de maitrise, Université de Montréal]. Papyrus. https://papyrus.bib.umontreal.ca/xmlui/handle/1866/12574?locale-attribute=fr

Denning, P. J. (2017). Remaining trouble spots with computational thinking. *Communications of the ACM, 60*(6), 33-39. https://doi.org/10.1145/2998438

Kallia, M., van Borkulo, S. P., Drijvers, P., Barendsen, E. et Tolboom, J. (2021). Characterising computational thinking in mathematics education: a literature-informed Delphi study. *Research in Mathematics Education, Informa UK Limited, 1-29*. http://doi.org/10.1080/14794802.2020.1852104

Knuth, D. E. (1974). Computer programming as an art. *Communications of the ACM, 17*(12), 667–673. https://doi.org/10.1145/361604.361612

Knuth, D.E. (1985). Algorithmic thinking and mathematical thinking. *The American Mathematical Monthly, 92*(3), 170-181. https://doi.org/10.2307/2322871

Modeste, S. (2012). *Teaching algorithm, what for? Some new questions for mathematics and issues for proof learning*. Centre pour la communication scientifique directe. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00783294

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. *Éléments, (1)*, 1-27.

Radford, L. (2015). Pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Acte du colloque EMF2015* (p. 334-335). Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.

Robert, V. (2018). *Le développement de la pensée fonctionnelle dans les manuels scolaires du 3e cycle du primaire québécois : une analyse praxéologique* [thèse de doctorat, Université de Sherbrooke]. Savoirs UdeS. https://savoirs.usherbrooke.ca/handle/11143/12608

Ross, A. (2019). Algorithmes au cours de l'histoire. *Accromath, 14*(2).

Squalli, H. (2000). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base* [thèse de doctorat inédite]. Université Laval.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Acte du colloque EMF2015* (p. 334-335). Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene.

Squalli, H. (2020). Early algebra : genèse d'un domaine de recherche, évolution et perspectives. Dans H. Squalli, I. Oliveira, A. Bronner et M. Larguier (dir.), *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires* (p. 5-21). Livres en ligne du CRIRES. https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/le-developpement-de-la-pensee-algebrique-lecole-primaire-et-au-debut-du-secondaire-recherches

Shute, V. J., Sun, C. et Asbell-Clarke, J. (2017). Demystifying computational thinking. *Educational Research Review, 22*, 142-158. http://doi.10.1016/j.edurev.2017.09.003

Weintrop, D., Beheshti, E., Horn, M., Orton, K., Jona, K., Trouille, L. et Wilensky, U. (2016). Defining computational thinking for mathematics and science classrooms. *Journal of Science Education and Technology*, 25(1), 127-47. http://dx.doi.org/10.1007/s10956-015-9581-5

Wing, J. M. (2010). Computational thinking: What and why? *The Link*, 1-6. https://www.semanticscholar.org/paper/Computational-Thinking%3A-What-and-Why-Wing/d0dd04ea551f25af5ce4db87618ea386cb726195

Titre: Bilan du Groupe de travail GT3

Auteurs: VENANT Fabienne, ABOUHANIFA Saïd et GBAGUIDI Ahonankpon Florent

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 376 - 383

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Bilan du Groupe de travail nº 3

Responsables
VENANT[1] Fabienne – ABOUHANIFA Saïd[2] – GBAGUIDI Ahonankpon Florent[3]
Correspondante CS
DEMONTY[4] Isabelle

Introduction

L'étude des modes de pensées et de raisonnements dans l'enseignement des mathématiques est traditionnellement présente dans les discussions du colloque EMF. Initiée officiellement lors du colloque EMF2009, dans le GT10, « La pensée mathématique, son développement et son enseignement », la réflexion s'est poursuivie et développée lors des éditions suivantes, dans le GT3 du colloque EMF 2012 « les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum », dans le GT3 du colloque EMF2015 « Les différentes pensées mathématiques et leur développement dans le curriculum » et dans le GT2 du colloque EMF 2018 « Les différentes pensées mathématiques ».

Les travaux fondateurs ont mis en avant le caractère fondamentalement épistémologique de tout questionnement autour de la pensée mathématique. Au fil des ans, la réflexion s'est élargie autour de la pluralité de la pensée mathématique, ou du moins des modes selon lesquelles elle se manifeste (intuitive, conceptuelle, analytique, algébrique, géométrique..). Les réflexions se sont rapidement structurées selon trois axes, toujours d'actualité : épistémologique, didactique et curriculaire. L'axe épistémologique explore la pertinence de considérer cette pluralité et, le cas échéant, les distinctions explicites entre les différentes pensées mathématiques. L'axe didactique examine les manifestations de cette pluralité dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, du point de vue de l'histoire de l'enseignement, des différents ordres d'enseignements et des différents acteurs de l'enseignement. Cette (ou ces) pensée(s) se décline(nt) selon l'activité du sujet, la nature des objets qu'elle conceptualise et les méthodes mises en jeu par les élèves et les enseignants. L'axe curriculaire met au jour la prise en compte de cette pluralité dans les curriculums des différents pays de l'espace mathématique francophone et au-delà, dans les programmes, les manuels, les ressources pour les enseignants, dans les pratiques effectives des enseignants et leurs effets sur les apprentissages. Les objets mathématiques présents dans les documents officiels pourraient permettre de mettre en jeu différentes pensées mathématiques, même si elles ne sont que rarement explicitées. Dans le groupe de travail 2022, ces trois axes ont été abordés de façon transversale. Suivant les recommandations du

1. UQAM, Canada, venant.fabienne@uqam.ca
2. CRMEF CS, Maroc, saidabouhanifa@yahoo.fr
3. IMSP UAC, Bénin, florent.gbaguidi@imsp-uac.org
4. Université de Liège, Belgique, isabelle.demonty@uliege.be

dernier groupe de travail et du comité scientifique, la réflexion a été principalement orientée autour de la question de la pluralité des pensées mathématiques. Différentes pensées ont donc été abordées tout au long de la semaine

Déroulement

Le groupe a rassemblé 17 participants, originaires de cinq pays différents (Bénin 5, Canada 4, Maroc 2, France 5 et Tunisie 1).



Les communication proposées ont permis une réflexion portant sur 8 pensées différentes : algébrique, algorithmique, arithmétique, logique, mathématique, probabiliste, fonctionnelle, géométrique.

Pensée mathématique, pensée logique

La contribution de Jean-François Maheux, *Les mathématiques empiriques, la pensée mathématique et l'école* nous a permis d'aborder la question de la pensée mathématique à l'école à travers, d'une part, les liens qu'elle entretient avec la pensée algorithmique, et d'autres part la dimension expérimentale de l'activité mathématique scolaire. À travers ces questions, nous avons également discuté du rôle des ressources technologiques et de la formation des enseignants non seulement pour donner du sens à l'activité mathématique à l'école mais aussi pour établir un rapport dialectique entre activité mathématique empirique et axiomatique. La réflexion s'est poursuivie avec la contribution de Viviane Durand Guerrier, *La résolution des contradictions, un levier pour développer les compétences logiques*. La possibilité de tenir la résolution des contradictions comme un cadre conceptuel construit en articulant les dimensions syntaxique, sémantique et pragmatique a été discutée à partir de la présentation de pistes de résolution pour quatre exemples de contradiction. Nous avons exploré, en lien avec la contribution de Jean-François Maheux les possibilités de mettre ce travail au service de l'apprentissage, c'est-à-dire de mettre l'activité de la logique au service de l'activité mathématique. Le

lien avec l'algorithmique se fait naturellement à travers l'idée d'activité logico-mathématique mettant en jeu les trois dimensions : syntaxique, sémantique et pragmatique. La contribution d'Éric Laguerre, *Un sens intrinsèque et extrinsèque de l'enseignement des mathématiques*, nous a amenés vers la question de la modélisation et du rôle structurant que l'on peut faire jouer aux relations d'équivalence dans la construction du sens mathématique. Cette contribution a aussi été l'occasion d'explorer les cadre théoriques de la Didactique des Domaines d'Expériences et de la théorie anthropologique du didactique.

Pluralité des pensées

Nous avons d'abord abordé **la pensée algorithmique** avec la contribution de Marie-Frédérick St-Cyr *et al.*, *La pensée algorithmique comme une manière mathématique de penser*. En s'appuyant sur la théorie de l'objectivation (Radford, 2011), les auteurs étudient la pensée algorithmique comme une forme de pensée mathématique. Cette approche socio-culturelle permet d'aborder la pensée par l'activité. Quelques questions didactiques ont émergé durant la discussion comme celle des liens entre les problèmes algorithmiques et problèmes mathématiques. La contribution de Viktor Freiman et Alexei Volkov, *L'émergence des algorithmes et des outils de calcul dans l'histoire et l'enseignement des mathématiques : quelques exemples pour enrichir la discussion sur la pensée algorithmique* apporte un précieux éclairage sur ces questions. C'est aussi dans ce sens que va la proposition de Fabienne Venant *et al.*, *Pensée algébrique et pensée algorithmique : réflexion autour d'une tâche de généralisation* qui présente une analyse didactique de deux versions d'une même tâche, respectivement en didactique de l'algèbre et en programmation informatique, afin de mieux comprendre ces deux modes de pensée. Il a également été suggéré de recourir à la TAD afin de faire ressortir les techniques et les technologies relevant du type de tâches analysées, aussi bien au niveau mathématique qu'algorithmique. La **pensée probabiliste** a ensuite été abordée par Henri Dandjinou et Alain Bronner dans la contribution *Rapports originels à la notion de hasard dans le secondaire au Bénin*. Ce travail, s'intéresse au développement de la pensée probabiliste chez les élèves béninois des deux cycles de l'enseignement secondaire général. Un des plus grands écueils rencontrés est le biais d'équiprobabilité décrit par Gauvrit (2009). Le fait que cette problématique ne soit pas évoquée ni prise en considération dans les programmes officiels freine cette réflexion et son intégration dans les pratiques enseignantes. La contribution de Virginie Robert *et al.*, *La pensée fonctionnelle et ses interactions avec la pensée algébrique* nous a amenés à nous intéresser à la **pensée fonctionnelle**. Après avoir proposé une définition opératoire de la pensée fonctionnelle s'inscrivant dans le cadre théorique de la théorie de l'objectivation de Radford (2011), Virginie Robert a présenté et discuté des tâches axées sur la pensée algébrique pour le développement de la pensée fonctionnelle. Des questions ont émergé comme l'interaction, au sens anthropologique du terme, et les frontières entre les pensées algébrique et fonctionnelle, ou les processus curriculaires à mettre en place pour développer et combler l'interférence de ces pensées. Enfin, la contribution de Ahonankpon Florent Gbaguidi, *l'exploitation des transformations planes pour résoudre des problèmes de construction géométrique*, nous a emmenés vers **la pensée géométrique**. Ce travail cherche à faire vivre les transformations du

plan au collège, à travers la résolution des problèmes de construction géométrique. La proposition de l'auteur consiste à encourager l'heuristique dans des problèmes ouverts pour développer la pensée géométrique des élèves. C'est une pratique qui a disparu de certains systèmes scolaires dans lesquels on privilégie le travail sur des problèmes classiques. La discussion a porté sur la reproduction de figures géométriques artistiques réelles et le rôle de la figure dans la mobilisation d'un raisonnement d'analyse et de synthèse en géométrie.

Pensée algébrique

La pensée algébrique a été abordée dans plusieurs contributions. Hassane Squalli *et al.* ont proposé un cadre pour analyser la transition arithmétique-algèbre, dans lea contribution *Le développement de la pensée algébrique comme fondement d'un cadre d'analyse de la transition arithmétique algèbre*. L'élaboration de ce cadre articule le cadre du développement de la pensée algébrique, développé dans la perspective Early Algebra, avec le cadre d'analyse praxéologique de la TAD. Il a également été utilisé dans le travail proposé par Saïd Abouhanifa *et al. Raisonnements des élèves dans la résolution de problèmes algébriques à la transition primaire/collège au Maroc* et dans *Les problèmes de généralisation à la transition primaire/collège en Tunisie : quelles potentialités pour favoriser le développement de la pensée algébrique ?* par Sonia Ben Nejma *et al.* Ces travaux explorent respectivement les raisonnements des élèves selon leur degré d'analycité et la nature du registre de représentation sémiotique, et le potentiel des problèmes de généralisation proposées dans les manuels officiels de 6ème année primaire et de première année de collège en Tunisie. À travers ces présentations une discussion sur la distinction arithmétique/algèbre, ses fondements épistémologiques et l'idée de transition (vs, continuum) s'est initiée. Elle devra être poursuivie pour arriver à une référence commune. L'analyse du développement de la pensée algébrique chez les élèves s'est poursuivie dans la contribution *Analyse des raisonnements d'élèves de sixième sur des problèmes de comparaison : une étude de cas au Bénin*, par Gervais Marc A. Affognon *et al.* Les enjeux langagiers ainsi que la granularité de la catégorisation utilisée ont été discutés. Le mot de la fin a été donné par Jérôme-Ange Ciavaldini *et al.* dans la contribution *L'identification d'invariants - une entrée dans la pensée algébrique - un exemple au collège en France*, toujours sur l'entrée dans l'algèbre des élèves, analysée ici à travers l'identification d'invariants dans des activités mettant en jeu des nombres. Le but est d'amener l'algèbre comme un outil de preuve efficace.

Synthèse

Les travaux proposés dans cette session 2022 du groupe de travail ont montré une réelle ouverture vers la pluralité des pensées mathématiques. Des liens entre les différentes pensées sont esquissés (arithmétique/algébrique, algorithmique/algébrique…) mais doivent encore être approfondis. Nous recommandons de poursuivre les travaux en mettant les différentes pensées mathématiques dans l'enseignement et en cherchant à établir des indicateurs observables pour chaque mode de pensée

de l'activité mathématique, dans les domaines mathématiques, et ce, à travers des observations en classe. Nous encourageons l'approfondissement des réflexions curriculaire et didactique, sans perdre pour autant la richesse épistémologique actuelle. Les cadres théoriques et les éléments méthodologiques convoqués pourraient être choisis de façon à concevoir des interventions en classe permettant de solliciter les pensées probabilistes, statistiques, géométriques, fonctionnelles, algorithmiques, informatiques, et d'explorer leurs interactions. L'étude des rôles du langage et/ou de la logique dans le développement et la communication des pensées mathématiques pourrait constituer une exploration particulièrement intéressante et novatrice dans les travaux du groupe.

Références

Durand M., Dupont J. (2010) *De l'alignement des canetons jaunes dans le paysage cybernétique*. Paris : PUF.

Gauvrit, N. (2009). *From Borel's remarks to subjective probability studies*. Journal Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation. *Éléments, (1)*, 1-27

Annexe

Liste des textes du GT 3 par ordre alphabétique du premier auteur

Abouhanifa, S., Squalli, S., Seddoug, B., Haddad, S., Anassay, S., Ennassiri, B. et Mesouaki, H. *Raisonnements des élèves dans la résolution de problèmes algébriques à la transition primaire/collège au Maroc*.

Ben Nejma, S., Khaloufi-Mouha, F. et Adel. F. *Les problèmes de généralisation à la transition primaire/collège en Tunisie : quelles potentialités pour favoriser le développement de la pensée algébrique ?*

Ciavaldini, J.-A., Demailly, M.-C., Gravas, J., Le-Men, K., Sofonea, C., Boulais, P. et Durand-Guerrier, V. *L'identification d'invariants - une entrée dans la pensée algébrique - un exemple au collège en France*.

Dandjinou, H. et Bronner, A. *Rapports originels à la notion de hasard dans le secondaire au Bénin*.

Durand-Guerrier, V. *La résolution des contradictions un levier pour développer les compétences logiques*.

Freiman, V. et Volkov, A. *L'émergence des algorithmes et des outils de calcul dans l'histoire et l'enseignement des mathématiques : quelques exemples pour enrichir la discussion sur la pensée algorithmique*.

Gbaguidi, A. F. *L'exploitation des transformations planes pour résoudre des problèmes de construction géométrique*

Laguerre, E. *Un sens intrinsèque et extrinsèque de l'enseignement des mathématiques*.

Maheux, J.-F. *Les mathématiques empiriques, la pensée mathématique et l'école*.

Oké, S. E., Affognon, G. M. A. et Dossou Dossa, P. *Analyse des raisonnements d'élèves de sixième sur des problèmes de comparaison : une étude de cas au Bénin*.

Robert, V., Squalli, H. et Marchand, P. *La pensée fonctionnelle et ses interactions avec la pensée algébrique*.

Squalli H., Najar, R. et Adihou, A. *Le développement de la pensée algébrique comme fondement d'un cadre d'analyse de la transition arithmétique algèbre*.

St-Cyr, M.-F., Squalli, H. et Venant, F. *La pensée algorithmique comme une manière mathématique de penser*.

Venant, F., Jeannotte, D., Passaro, V, Saboya, M, Guillemette, D. et Knoll, E. *Pensée algébrique et pensée algorithmique : réflexion autour d'une tâche de généralisation*.

Titre: Enjeux sociaux et politiques de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques : réflexions sur la conception et la mise en action d'une perspective dialogique en recherche

Auteurs: BARWELL Richard, GUILLEMETTE David et ABTAHI Yasmine

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 384 - 396

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Enjeux sociaux et politiques de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques : réflexions sur la conception et la mise en action d'une perspective dialogique en recherche

BARWELL[1] Richard – GUILLEMETTE[2] David – ABTAHI[3] Yasmine

Résumé – Pour cette contribution, nous tâcherons de mettre en évidence les difficultés qui nous animent en tant que chercheurs dans la conception de nos recherches qui s'ancrent dans des perspectives socioculturelle et critique en éducation mathématique, ainsi que dans une perspective dialogique. À partir de la description de deux études participatives que nous menons présentement, nous décrivons les moyens concrets en termes méthodologiques que nous déployons, mais aussi les concepts clés, notamment issus du dialogisme Bakhtinien, qui nous permettront d'opérationnaliser nos approches théoriques. Nous terminons avec une réflexion qui concerne les enjeux et les défis que nous rencontrons ou que nous anticipons pour les deux projets.

Mots-clefs : milieux pluriculturels, justice sociale, dialogue, méthodologie, épistémologie, altérité

Abstract – For this contribution, we will try to highlight the difficulties that we encounter as researchers in the design of our research, which are anchored in sociocultural and critical perspectives in mathematics education, as well as in a dialogic perspective. From the descriptions of two participatory studies that we are currently conducting, we will describe the concrete means in methodological terms that we are deploying, but also some key concepts coming from the Bakhtinian dialogism, which will allow us to operationalize our theoretical approaches. We end with a reflection on the issues and challenges that we encounter or that we anticipate for the two projects.

Keywords: culturally diverse contexts, dialogue, methodology, epistemology, otherness

1. Université d'Ottawa, Canada, richard.barwell@uottawa.ca

2. Université du Québec à Montréal, Canada, guillemette.david@uqam.ca

3. Universitetet i Sørøst, Norge, Norway, yasmine.abtahi@usn.no

Introduction : quelques points de départ

Comme toute activité humaine, les mathématiques ont une dimension sociale et culturelle. Un regard attentif sur l'histoire des mathématiques nous amène à constater qu'elles sont pratiquées dans un contexte donné et s'accordent aux besoins des sociétés et des cultures qui médiatisent leurs orientations et leurs déploiements. Ainsi, à travers différentes pratiques mathématiques, comme la résolution de problème, la modélisation ou l'élaboration de preuve, sont convoquées tout un ensemble d'attitudes et de manières d'être dans le monde qui participent de l'incrustation des mathématiques au monde social et culturel. Ces attitudes et manières d'être dans le monde font, souvent implicitement, partie intégrante de l'enseignement et de l'apprentissage.

Les approches « socioculturelles » et « critiques » en éducation mathématique tentent de mettre en évidence ces dimensions des mathématiques et des pratiques éducatives en mathématiques et se proposent de penser et d'appuyer l'enseignement-apprentissage en ce sens (voir Adler et al., 2005 ; Radford, 2021 ; Skosmose, 2012). Elles sont dites « socioculturelles », car elles trouvent leurs fondements dans une perspective foncièrement sociale et culturelle de l'enseignement-apprentissage, mais aussi « critiques », car elles mettent au jour ou en évidence des formes de gouvernementalités, des dominations ou des dynamiques de pouvoirs aliénants ou déprédatrices dans le contexte de l'éducation mathématique. Plus spécifiquement, les enjeux qui apparaissent aujourd'hui les plus cruciaux sont ceux de justice sociale, d'équité, de diversité et d'inclusion, ainsi que ceux liés la protection de l'environnement (Subramanian, 2019).

Dans ce contexte théorique, notre conceptualisation de la salle de classe comme un lieu de rencontre entre plusieurs perspectives et pratiques socialement, culturellement et linguistiquement distinctes nous amène à une perspective dialogique (Abtahi et Barwell, 2019 ; Barwell, 2014, 2020 ; Guillemette, 2021). Cette perspective accorde une importance à la notion d'altérité. Puisque le sens n'est pas intrinsèque à une pratique ou à un mot, le sens ne peut survenir que par le contact avec les autres - d'autres pratiques, d'autres mots, etc. Ce contact se produit de manière synchrone à travers des rencontres qui ont lieu dans les classes de mathématiques, comme lorsque les élèves rencontrent une pratique mathématique pour la première fois, ou lorsqu'un enseignant rencontre les pratiques de ses élèves à un moment particulier. Elle survient également de façon diachronique à travers la rencontre historique des pratiques actuelles avec le passé, par exemple lorsque les pratiques antérieures sont réinterprétées à la lumière des rencontres actuelles (Guillemette, 2017). Dans les deux cas (synchroniques et diachroniques), il y a une rencontre avec Autrui dans laquelle différentes pratiques, voix et langues entrent en contact (Bakhtine, 1981).

Or, il est rare que la conceptualisation d'un projet de recherche tienne compte du fait que les chercheurs font eux-mêmes partie de ce croisement social, culturel et linguistique. Il nous apparait donc important d'esquisser les bases d'une approche théorique, méthodologique et épistémologique qui intègrent comme principe l'altérité intrinsèque à chaque rencontre entre chercheur et participant

(enseignant ou élève). Car à ces perspectives nouvelles et émergentes en éducation mathématique correspondent des besoins nouveaux et des défis inédits en termes méthodologiques. En effet, les exemples d'opérationnalisation de ces positionnements théoriques en recherche demeurent rares. Ainsi, ancrés dans ces perspectives dialogiques socioculturelles et critiques, nous nous donnons comme objectif, dans cette communication, de mettre en évidence les difficultés méthodologiques que nous vivons et escomptons concrètement dans le cadre de nos recherches actuelles, ainsi que quelques pistes de solution envisagées.

Pour y arriver, nous présentons deux projets ancrés dans une perspective dialogique. Le premier projet cherche à mieux comprendre les réflexions des enseignants de mathématiques au Québec quant aux enjeux sociaux, culturels et politiques en classe de mathématiques du secondaire. Le deuxième projet cherche à mieux saisir le vécu mathématique des élèves migrants, c'est-à-dire, des élèves qui sont arrivés dans une région du Canada après une expérience scolaire soit dans un autre pays, soit dans une autre région du Canada. Dans les deux cas, certains concepts seront présentés, ainsi qu'une description de la mise en action de ces concepts dans la méthodologie du projet. Nous terminons ce texte avec une réflexion sur les enjeux et les défis soulevés pour les deux projets en rapport avec notre question principale.

Un projet sur les enjeux sociaux et politiques de l'éducation mathématique[4]

Notre premier projet de recherche porte sur des dimensions souvent peu discutées (voire occultées) des mathématiques et de l'éducation mathématiques : leurs dimensions sociales et politiques. En effet, sous le couvert d'universalité et de neutralité, les mathématiques et l'éducation mathématiques ont tendance à se soustraire aux questions sociales et politiques. Du côté anglophone, et dans une certaine mesure en Europe du Nord, ces thématiques sont pourtant très largement répandues en recherches en éducation mathématiques. Dans cette mouvance, nous observons que trois thématiques principales peuvent être actuellement mises en évidence : (1) la justice sociale (2) l'équité-diversité-inclusion et (3) la protection de l'environnement. Pour plusieurs (p. ex. Abtahi et Wagner, 2016; Barwell, 2013; Gutstein, 2006), l'éducation mathématique n'est pas neutre quant à ces enjeux et les acteurs du milieu se doivent de penser à la manière dont elle peut contribuer à relever ces défis contemporains cruciaux. Plus largement, ceci implique la nécessité du développement d'une sensibilité pédagogique quant à la diversité des valeurs et manières d'être-dans-le-monde que les mathématiques peuvent convoquer.

4. Ce projet, intitule Enjeux sociaux et politiques de l'enseignement des mathématiques: une recherche paticipative auprès des enseignants du secondaire est financé par le Conseil de recherche en sciences humaines du Canada, mené par D. Guillemette, Y. Abtahi, R. Barwell et M. Saboya Mandico.

Ceci dit, plusieurs problèmes majeurs sont vécus quant à l'appropriation et à la valorisation de ces questions en classe de mathématiques. Comme nous le soulignions, dans la francophonie, les études de terrain qui ont cherché à rendre compte de la manière dont les enseignants répondent à ces enjeux sociaux et politiques sont rares (Guillemette et Nicol, 2016). Malgré la valeur de ces études, notre constat est qu'elles n'ont pas réussi à comprendre finement les défis auxquels font face les enseignants et les élèves, ainsi que les raisons et les manières dont ceux-ci prennent en compte les enjeux sociaux et politiques en classe de mathématiques. Dans l'optique à la fois de recherche et d'appui aux enseignants, notre étude exploratoire se donne pour objectifs de (1) documenter les réflexions pédagogiques et didactiques qu'entretiennent les enseignants du secondaire sur les enjeux sociaux et politiques (2) de rendre compte, par la production conjointe de situations d'apprentissage, des manières qu'ont les enseignants de développer des outils pédagogiques et didactiques par rapport à ces enjeux et (3) de décrire les contraintes et problématiques d'enseignement vécues et appréhendées en classe.

Notre approche s'ancre dans une perspective historico-culturelle de la didactique des mathématiques (Radford, 2011, 2021, Roth & Radford, 2011). Dans cette perspective, la classe est pensée comme le lieu de la rencontre entre le sujet et l'objet de savoir, et l'objectivation qui permet cette rencontre est un processus éminemment social. Or, à partir de la thématique de l'Altérité développée par Bakhtine et Levinas, la socialité du processus d'apprentissage ne veut pas simplement dire que l'apprentissage est fait de relations sociales, mais signifie la formation et la transformation de la conscience, qui est justement (con)science, c'est-à-dire « savoir en commun » ou « savoir-avec-d'autres » (Radford, 2011, p. 12). L'activité de classe, entendue ici comme forme de vie, ne peut donc pas être perçue comme un jeu de contrôle de variables dans l'optique d'une optimisation de ressources cognitives et matérielles. Notre perspective suggère plutôt que la classe offre « des manières d'être et de connaitre selon la façon dont les élèves s'engagent en groupe dans leur quête du savoir culturel visé » (Radford, 2011, p. 15). L'apprentissage des mathématiques est ainsi compris comme un processus social de prise de conscience graduelle d'un savoir historico-culturellement médiatisé à travers lequel la conscience des individus est formée et transformée.

Nos objectifs de recherche, qui pointent à la fois vers l'investigation des pratiques enseignantes et le développement d'appuis pour celles-ci, nous invitent à entreprendre une recherche de type participative. Les approches méthodologiques de ce type qui concernent la pratique enseignante, notamment la recherche collaborative en didactique des mathématiques (Desgagné, 2007), tiennent leurs ancrages et influences épistémologiques du socioconstructivisme et de l'ethnométhodologie. Or, il nous apparait nécessaire d'ajuster notre cadre méthodologique à notre positionnement en éducation mathématique qui ne coïncide pas ou, du moins, ne s'articule pas facilement avec ces ancrages. Comment alors opérationnaliser, dans le cadre d'une recherche participative, notre perspective socioculturelle où la rencontre avec Autrui, le dialogue émergent et les transformations des modes d'être qui s'en suivent sont l'objet même de la recherche?

Une première articulation sera envisagée en convoquant une perspective dialogique (Abtahi et Barwell, 2019 ; Barwell, 2014, 2020; Guillemette, 2021) pour la collecte et l'analyse des données. Celle-ci cherche à rendre compte de la multiplicité des vécus, réflexions et expériences des participants. Elle ne cherche pas à présenter « côte à côte » les témoignages, mais à décrire véritablement l'interaction dialogique qui émerge des rencontres, et ce, en incluant le chercheur. Cette perspective dialogique s'articule avec notre approche théorique qui accorde une importance aux interactions sociales, tout en épousant les assises de la recherche collaborative qui privilégie la voix de l'enseignant pour parler de la pratique.

Cette perspective dialogique, développée par Bakhtine (1981), souligne que chaque énoncé d'un discours est nécessairement une réponse à d'autres énoncés dans une sphère donnée de communication. Un discours est alors perçu comme incrusté dans un dialogue, mais ce dialogue n'est pas le simple enchainement d'énoncés constituant une forme d'échange ou de conversation. Ces aspects ne seraient que la manifestation superficielle du dialogisme. Très globalement, nous parlons ici de dialogues tant au niveau de la langue qu'au niveau des idées et des manières d'être. Pour Bakhtine, quand on parle, on s'investit subjectivement, aucun mot ne peut être prononcé sans un accent évaluatif, sans une attitude ou un mode d'être adopté à l'égard de ce dont on parle (accord, sympathie, objection, exécution, etc.). Il en est de même pour l'auditeur et sa réplique. Il en résulte que ce qui se dit se fait toujours dans un langage qui unit et divise à la fois, un langage qui est un tourbillon de forces divergentes et convergentes, car ce dernier est hétéroglossique (dépendante du contexte et de l'histoire) et monoglossique (soumise à la fois aux effets centripètes de la culture) (Bakhtine, 1981). Ce dialogue incarné, perpétuel et sans objet téléologique constitue le tissu même de l'horizon de sens qui nous anime. L'Autre fournit ici une perspective supplémentaire et externe (dite exotopique) nécessaire à la conceptualisation de nous-mêmes en tant que totalités qui avons cohésion et sens (et vice-versa). Cette interaction dialogique est capitale dans l'expérience intersubjective humaine et dans la formation d'une conscience proprement éthique.

Pour notre recherche, comme l'apprentissage signifie la formation et la transformation de la conscience, entendue comme savoir-avec-d'autres, il nous apparait approprié de chercher à rendre compte de la multiplicité des réflexions des enseignants participants, non seulement à partir de leur relation intentionnelle à l'objet de la recherche, mais aussi dans leur interaction dialogique. Comme nous envisageons une recherche participative, nous participerons de manière inhérente à cette interaction dialogique, et ce, sans que notre voix se trouve hégémonique ou directive, mais plutôt jointe de manière équipollente à la multiplicité des voix.

Ainsi, afin de bien penser et mettre en œuvre cette perspective, un concept Bakhtinien pourra nous venir en aide, celui de *polyphonie*. Pour Bakhtine, une œuvre (scientifique, littéraire ou philosophique) est dite polyphonique dans la mesure où elle offre une forte pluralité de discours et de compréhensions du monde. Afin de rendre compte des réflexions des participants sans les déraciner du contexte dialogique duquel elles émergent, nous tâcherons de fournir des récits dialogiques qui

présentent un fort aspect polyphonique. Bakhtine dirait que tout mouvement de conscience est lui-même dialogique, pénétré par et en dialogue avec ceux des autres, et ne peut donc être abordé en dehors des mouvements de conscience auxquels il répond, et qu'il permet en guise de réponse. Il s'agira donc de restituer, à travers l'écrit, le monde commun de sens (c'est-à-dire, un monde de sens toujours dialogique, tiraillé, contesté, fuyant) qui émergera lors des rencontres avec les participants, un monde dans lequel nous habitons aussi comme chercheur. Ces récits dialogiques permettront de présenter et de mettre en tension les postures des participants tout en préservant et en mettant de l'avant leur caractère dialogique. La narration polyphonique est un moyen de mettre en scène ce monde en commun que nous proposerons de vivre mathématiquement et qui fait écho au processus social de prise de conscience graduelle d'un savoir historico-culturellement médiatisé, qui est celui des mathématiques, à travers lequel la conscience des individus se forme et se transforme. Mais comment y arriver concrètement?

Un premier défi sera d'abord de susciter l'interaction dialogique. Comme nos objectifs visent à documenter les réflexions et pratiques des enseignants, nous considérons primordial de mettre les participants en action à partir de situations signifiantes par rapport à la thématique de l'étude. Des situations précises issues de la recherche ou de la pratique pourraient être partagées en guise de prétexte à la discussion et à l'élaboration de situation d'apprentissage pour la classe. Un second défi sera de saisir les voix des participants, non pas dans leur unicité ou dans leurs tendances grégaires, mais dans leur interaction vive et constitutive de sens pour le groupe. Il s'agit de saisir, non seulement ce qui est partagé, mais aussi ce qui est contesté, abandonné, rêvé, désiré, évité, répété, inattendu, etc. dans l'optique d'un récit qui ne culmine pas dans une thèse ou un discours stable et monologique. Une piste pour y arriver serait de mettre en évidence pour chaque prise de parole, lors de l'analyse, le sens littéral de l'énoncé, mais aussi son sens dialogique, c'est-à-dire sa position dans le dialogue (proposition, réponse, réponse à une réponse, etc.). Enfin, un troisième défi sera de mettre en récit, notamment en mettant en évidence une intrigue (ordonnancement temporel des significations), qui puisse être fidèle à l'interaction dialogique.

Un projet sur le vecu des eleves migrants en cours de mathematiques[5]

Chaque salle de classe est un lieu de rencontre d'élèves et d'enseignants d'origines diverses qui ont des pratiques culturelles, linguistiques et sociales variées et qui ont également des pratiques interprétatives variées. C'est particulièrement le cas au Canada, où nous observons une grande diversité dans la population scolaire en raison de la présence des premiers peuples du continent, l'historique colonial subséquent du Canada, ainsi que l'immigration récente et actuelle. Cela dit, les programmes

5. Ce projet, intitulé Migration in mathematics classrooms: promoting intercultural dialogue in school mathematics est financé par le Conseil de recherche en sciences humaines du Canada, mené par Y. Abtahi, R. Barwell, R. Kane et C. Suurtamm.

d'études en mathématiques et les programmes de formation à l'enseignement en mathématiques ne répondent pas bien à cette réalité.

Les études montrent que la présence d'élèves immigrants dans les classes de mathématiques crée des défis pour les élèves et les enseignants. Ces défis peuvent être attribués aux élèves et aux enseignants qui rencontrent des pratiques en classe de mathématiques et des façons de penser qu'ils ne connaissent pas (Abreu, 2005; Gutiérrez et Rogoff, 2003). La méconnaissance des pratiques mathématiques des uns et des autres peut limiter l'engagement des participants et l'utilisation de ressources culturelles qui font déjà partie de leur expérience (Gutiérrez & Rogoff, 2003). Les enseignants expriment souvent, par exemple, le désir d'en savoir davantage sur les antécédents de leurs élèves, mais ne savent pas comment le faire. On sait peu de choses sur la façon dont la nature de la relation entre les différentes cultures affecte l'apprentissage des mathématiques par les élèves et les approches des enseignants en matière d'enseignement des mathématiques.

Dans la pratique, ce sont généralement les étudiants migrants qui sont censés faire le passage entre différentes cultures (p. ex. : Abreu, Bishop & Presmeg, 2002) et construire des ponts entre leur propre culture et celle de leurs enseignants et de l'école. Même lorsque les expériences des élèves sont intégrées dans les activités de mathématiques (p. ex. : González, Moll et Amanti, 2005), l'objectif est généralement de leur permettre de franchir les frontières culturelles et d'adopter les pratiques de leur nouvelle société et école (Norén, 2015). De plus, malgré les efforts sincères des enseignants, il n'y a pas suffisamment de négociations et de dialogues entre, d'une part, les élèves, leurs parents et leurs communautés, et d'autre part, leurs enseignants (Nieto, 2015). Enfin, il y a peu de recherches sur les expériences de migration des élèves dans les classes de mathématiques, et en particulier, peu d'études qui donnent aux élèves l'occasion d'exprimer comment ils vivent l'enseignement des mathématiques dans ce contexte. Notre projet vise donc à (1) comprendre les expériences des élèves migrants et de leurs enseignants dans le contexte des classes de mathématiques des écoles primaires ; (2) promouvoir et observer le dialogue entre les élèves migrants et les enseignants dans ces salles de classe en utilisant des collages artistiques créés par les élèves comme stimulus pour les interactions élève-enseignant.

Dans la conception de ce projet, nous adoptons la notion de répertoire. Les répertoires culturels-historiques sont des moyens de s'engager dans des activités qui découlent d'horizons, d'expériences et d'intérêts individuels et collectifs. Les répertoires culturels-historiques se composent de collections fluides de discours, de voix et de langues (Busch, 2014), interprétées au sens large de manière à inclure des façons de parler, de gesticuler, de faire et d'interpréter (voir Blommaert, 2010; Blommaert et Rampton, 2010). La formation de ces répertoires est basée sur la participation à des pratiques culturelles (Gutiérrez & Rogoff, 2003). Au fil du temps, ces répertoires culturels-historiques changent par des rencontres dialogiques avec les répertoires des autres (c'est-à-dire qu'ils ont une dimension historique). Rappelons que la notion de dialogue dérive de l'épistémologie relationnelle de Bakhtine, dans laquelle tout sens est situé et lié aux déclarations ou actions précédentes, environnantes et

futures (Bakhtin, 1981, p. 279). La signification d'une pratique culturelle spécifique au sein d'un répertoire culturel-historique (p. ex : une méthode d'enseignement de la soustraction de fractions) découle de ses relations avec d'autres pratiques (par exemple, les expériences antérieures des fractions).

Un défi majeur pour notre recherche est qu'il est difficile de décrire « objectivement » les répertoires culturels-historiques des étudiants et des enseignants, car notre interprétation de ces répertoires est nécessairement en relation avec nos propres répertoires. Dans le même ordre d'idées, les pratiques des participants à l'étude sont toujours culturellement et historiquement situées, mais en tant que chercheurs, nous n'avons pas d'accès direct à l'histoire des étudiants ou des enseignants. Il est ainsi que l'altérité devient un enjeu méthodologique et épistémologique central. Qui plus est, des forces centripètes et centrifuges seront en jeu dans tout processus de collecte de données. C'est-à-dire que les forces institutionnelles, sociales et culturelles qui accordent à certaines pratiques une plus grande valeur que d'autres peuvent conduire à des expériences exprimées ou davantage soulignées si elles sont conformes aux attentes institutionnelles, sociales ou culturelles plus larges, y compris notre propre effet centripète sur toute interaction impliquant des étudiants ou des enseignants dans l'étude. Donc comment procédons-nous à une démarche de recherche dialogique ?

De tels défis ont été abordés par Tobin qui a développé une approche dialogique polyphonique (p. ex : 1989; Tobin, Hsueh et Karasawa, 2009), qui implique la création d'un dialogue conçu pour privilégier les perspectives et les voix des participants (et non pas ceux des chercheurs. Comme point de départ pour un dialogue continu « entre les praticiens et les chercheurs et entre les personnes de [...] différentes cultures », Tobin a enregistré sur vidéo des « jours typiques » dans les écoles maternelles de différentes cultures (Tobin, 1989, p. 176). En partageant les enregistrements vidéo des salles de classe avec d'autres enseignants, parents et administrateurs, ils ont progressivement ajouté des couches supplémentaires de voix au dialogue. Chacune de ces voix a réagi au texte précédent sans les remplacer ou les subsumer entièrement, révélant ainsi leurs perspectives et interprétations.

La conception des démarches pour cette étude suit une approche similaire à celle de Tobin pour faire créer des collages polyphoniques et dialogiquement structurés, basés sur les observations des élèves migrants de leurs classes de mathématiques différentes de l'école primaire. Puisque nous nous concentrons sur la voix des élèves et des enseignants, nous engagerons à la fois les élèves et les enseignants en tant que co-chercheurs. Selon Reimer (2015), la stratégie consistant à impliquer les participants en tant que co-chercheurs reflète deux valeurs importantes : (1) la nécessité d'impliquer et de donner une voix aux personnes les plus touchées dans une situation donnée (dans le cas de notre étude, les étudiants et les enseignants touchés par les expériences de migration); et (2) la reconnaissance du fait que le processus de recherche est aussi important que le produit final. En tant que co-chercheurs, les élèves et les enseignants recueilleront des données à divers moments de la recherche, comme prendre des notes sur les pratiques mathématiques de la salle de classe, ou recueillir des informations sur leur propre apprentissage passé ou l'enseignement des mathématiques, prendre des photos ou enregistrer leurs propres voix. Cette approche s'appuie sur la pratique

d'utiliser des journaux de bord pour saisir les expériences des participants de la vie quotidienne (Bolger, Davis et Rafaeli, 2003). Les étudiants participants sont par la suite invités à collaborer à la préparation d'un collage collectif basé sur les aspects de leurs expériences antérieures et actuelles des mathématiques et conçu pour synthétiser et communiquer sous forme fictive les aspects de ces expériences aux enseignants. Ces collages sont ensuite partagés auprès des groupes d'enseignants pour susciter une réflexion et des changements dans leurs pratiques d'enseignement. Cette évolution dans la pratique de l'enseignement des mathématiques sera également suivie par le biais entre autres des auto-observations effectuées par les enseignants eux-mêmes.

En résumé, la conception de ce projet vise à créer un dialogue entre élèves et enseignants des mathématiques, dans lequel les élèves effectuent leur propre collecte de données et leur propre analyse par le biais de la synthèse nécessitée par la création collective du collage. Par la suite, les enseignants recevraient le collage en guise de conscientisation de la réalité telle qu'elle est vécue par les élèves. La conjecture est que les enseignants feraient évoluer leurs pratiques d'enseignement des mathématiques à la lumière de cette conscientisation, évolution qu'ils traceraient eux-mêmes. Le rôle des chercheurs n'est donc pas d'interpréter directement les expériences des élèves ni celles des enseignants, mais plutôt de retracer le processus d'analyse et de rencontre dialogique entre les élèves et les enseignants.

Discussion

Les deux conceptions de projets que nous avons proposées adoptent quelques stratégies similiaires. Notamment, ils cherchent des moyens pour tisser de multiples voix dans des formes de dialogues polyphoniques, afin de faire avancer les connaissances de l'apprentissage et de l'enseignement des mathématiques d'une manière qui reconnait la diversité des expériences présentes dans n'importe quel groupe d'enseignants ou salle de classe. Il faut reconnaitre que les démarches proposées demeurent imbriquées dans les relations d'altérité. Dans les deux cas, les nouvelles connaissances se créent en premier lieu auprès des participants, tandis que celles des chercheurs se construisent en deuxième lieu et à un deuxième degré. Pendant que les élèves et/ou les enseignants découvrent de nouvelles perspectives à travers les interactions dialogiques entre eux, les chercheurs, eux, retracent les processus de construction de sens par ces mêmes participants. De cette perspective, il n'y a pas de méthode objective, ni de résultats généraux dans le sens de la recherche classique, car tous les résultats existent dans une relation avec l'autrui jusqu'à la relation entre le lecteur d'un article scientifique et le texte rédigé par les chercheurs.

L'un des défis que nous avons rencontrés jusqu'aujourd'hui vient du fait que notre recherche s'inscrit elle-même dans les structures sociales qui ont une organisation hiérarchique ou stratifiée. Par exemple, dans le deuxième projet, les langues proposées pour la recherche sont l'anglais ou le français, mais les élèves migrants sont souvent plus à l'aise à s'exprimer dans d'autres langues. Néanmoins l'anglais et le français ont une place privilégiée dans le projet. Qui plus est, sur la base de leurs propres

expériences et réflexions, étudiants et enseignants entretiennent des relations dynamiques et des interactions en constante évolution, entre eux, mais aussi avec les mathématiques elles-mêmes. Sans une reconnaissance de la diversité des répertoires culturels dans les interactions, nous pourrions, à contrecœur, valoriser des pratiques qui nous sont plus familières, et simplement ne pas remarquer des pratiques inconnues. D'où la marginalisation des actions et des savoirs d'un groupe d'élèves ou d'enseignants. Nous entreprenons ces deux études pour mieux entendre les voix de ceux dont les répertoires socioculturels sont différents des normes dominantes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Pour un deuxième exemple, notons la relation particulière entre chercheur universitaire et enseignant du système scolaire. Si les universitaires sont perçus (ou se comportent) comme des experts, le dialogue risque de ne pas apparaitre tel que souhaité. Nous entreprenons ces deux études pour mieux entendre les voix de ceux dont les répertoires socioculturels sont différents des normes dominantes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Pour réussir, un haut niveau de réflexion et d'attention s'avère nécessaire.

Références

Abreu, G. (2005). Cultural identities in the multiethnic mathematical classroom. In M. Bosch (Éd.), *Proceedings of the fourth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1131-1140). Sant Feliu de Guíxols, Espagne : FUNDEMI IQS, Universitat Ramon Llull.

Abreu, G. de, Bishop, A., & Presmeg, N. (Éds.). (2002). *Transitions between contexts of mathematical practices*. Dordrecht, Pays-Bas : Kluwer.

Abtahi, Y., & Barwell, R. (2019). Migration and dialogue in mathematics classrooms. In, J. Subramanian (Éd.), *Proceedings of the tenth international Mathematics Education and Society conference* (pp. 199-202). Hyderabad, Inde : MES.

Abtahi, Y., & Wagner, D. (2016). Violence in un-rooted mathematics. *For the learning of mathematics 36*(3), 38-40.

Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F-L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics 60*(3), 359-381.

Bakhtin, M. M. (1981). *The dialogic imagination: Four essays*. Houston, TX: University of Texas Press.

Barwell, R. (2013). The mathematical formatting of climate change: critical mathematics education and post-normal science. *Research in Mathematics Education 15*(1), 1-16

Barwell, R. (2014) Centripetal and centrifugal language forces in one elementary school second language mathematics classroom. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 46*(6), 911-922.

Barwell, R. (2020) Les textes mathématiques, l'altérité et l'appropriation du discours mathématique dans les classes de mathématiques en langue seconde. In G. Maheux, G. Pellerin, S. E. Quintriqueo Millán & L. Bacon (Éds.) *La décolonisation de la scolarisation des jeunes Inuit et des Premières Nations : sens et défis* (pp. 173-198). Ville de Québec : Presses de l'Université du Québec.

Blommaert, J. (2010). *The sociolinguistics of globalization*. Cambridge, Royaume-Uni : Cambridge University Press.

Blommaert, J., & Rampton, B. (2011). Language and superdiversity. *Diversities 13*(2), 1-21.

Bolger, N., Davis, A., & Rafaeli, E. (2003). Diary methods: Capturing life as it is lived. *Annual Review of Psychology 54*, 579-616.

Busch, B. (2014). Building on heterglossia and heterogeneity: The experience of a multilingual classroom. In A. Blackledge & A. Creese (Éds.), *Heteroglossia as practice and pedagogy* (pp. 21-40). Dordrecht, Pays-bas : Springer.

Desgagné, S. (2007). Le défi de coproduction de savoir en recherche collaborative : une démarche de reconstruction et d'analyse de récits de pratique enseignante. In M. Anadon (Éd.), *La recherche participative : multiples regards* (pp. 89-121). Ville de Québec : Presses de l'Université du Québec.

González, N., Moll, L., & Amanti, C. (Eds.) (2005). *Funds of knowledge: Theorizing practice in households, communities, and classrooms*. Mahwah, NJ : Lawrence Erlbaum.

Guillemette, D. (2017). History of mathematics in secondary school teachers' training: towards a nonviolent mathematics education. *Educational Studies in Mathematics 96*(3), 349-365.

Guillemette, D. (2021). Phenomenological approach and Bakhtinian dialogism: epistemological tensions and methodological responses. *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research 22*(1), Art. 11, http://dx.doi.org/10.17169/fqs-22.1.3544.

Guillemette, D., & Nicol, C. (2016). Mathematics education and social justice or learning to meet the Others in the classroom: a collective reflection. *For the learning of mathematics 36*(3), 38-45.

Gutiérrez, K. D., & Rogoff, B. (2003). Cultural ways of learning: Individual traits or repertoires of practice. *Educational researcher 32*(5), 19-25.

Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice*. New York, NY: Routledge.

Nieto, S. (2015). The light in their eyes: *Creating multicultural learning communities*. New York, NY: Teachers College Press.

Norén, E. (2015). Agency and positioning in a multilingual mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics 89*(2), 167-184.

Radford, L. (2011). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'Objectivation. *Éléments 1*, 1-27.

Radford, L. (2021). *The theory of objectification. A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Leiden, Pays-bas : Brill/Sense.

Reimer, K. E. (2015). *Restorative justice as a window into relationships: Student experiences of social control and social engagement in Scotland and Canada*. Université d'Ottawa : Thèse de doctorat.

Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A cultural historical perspective on teaching and learning*. Rotterdam, Pays-Bas : Sense Publishers.

Skovsmose, O. (2012) Towards a critical mathematics research programme? In O. Skovsmose & B. Greer (Éds.), *Opening the cage: critique and politics of mathematics education* (pp. 343-368). Rotterdam, Pays-Bas : Sense Publishers.

Tobin, J. (1989). Visual anthropology and multivocal ethnography: A dialogical approach to Japanese preschool class size. *Dialectical Anthropology 13*, 173-187.

Tobin, J., Hsueh, Y., & Karasawa, M. (2009). *Preschool in three cultures revisited: China, Japan, and the United States*. Chicago, IL : University of Chicago Press.

Titre: L'impact de la numération orale en Bamanankan (Bambara) sur l'addition à l'institut d'éducation populaire (IEP) de Kati Coulibaly

Auteurs: TOGORA Hawa Épouse et ALMOULOUD Saddo Ag

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 397 - 410

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

L'impact de la numération orale en Bamanankan (Bambara) sur l'addition à l'institut d'éducation populaire (IEP) de Kati Coulibaly

TOGORA[1] Hawa Épouse – ALMOULOUD[2] Saddo Ag

Résumé – Les nombres ont, en leur sein, une structure additive que les enfants ignorent. Un enseignement axé sur une telle structure leur permettrait d'accorder un sens aux résultats de l'addition. L'objectif de cette étude expérimentale est de vérifier l'impact de la numération en bamanankan sur les résultats de l'apprentissage de l'addition chez les élèves du niveau 2 (3ème et 4ème années) de l'enseignement fondamental au Mali.

Mots-clefs : numération, bamanankan (bambara), orale, addition, mathématiques

Abstract – Numbers have an additive structure within them that children are unaware of. Teaching based on this structuring would allow them to give meaning to the results of the addition. The objective of this experimental study is to verify the impact of counting in bamanankan on the results of addition among students of level 2 (3rd and 4th) of basic education in Mali.

Keywords: numeration, bamanankan (bambara), oral, addition, mathematics

1. Doctorante en didactique des mathématiques à l'Institut Pédagogique Universitaire (IPU), Mali, hawacoul64@gmail.com
2. Professeur, Université Fédérale de Bahia (UFBA), Brésil, saddoag@gmail.com

Introduction

De l'indépendance à nos jours, tous les gouvernants au Mali ont manifesté leur adhésion à la politique de l'utilisation de nos langues nationales dans le système éducatif. C'est ainsi que le décret N85PGRM du 26 Mai 1967 fixa l'alphabet pour la transcription des langues nationales. Le 8 Septembre de la même année, furent publiés les principes et les règles de transcription du bamanankan, du Songhaï et du Tamasheq. Le décret du 19 Juillet 1982 fut publié pour attribuer le statut de langue nationale à onze de nos langues parmi plusieurs autres. La Constitution de la République du Mali du 23 Février 1992, qui est en vigueur, consacre à son Article 25 du Titre 2, le principe de promotion des langues nationales (LN). Des évaluations internes et externes ont confirmé la pertinence de la démarche de la pédagogie convergente -PC- dont nous parlerons dans la suite de ce texte. Cette pédagogie touchait en 1997 six langues nationales (*bamanankan, fulfuldé, songhoy, tamacheq, dogon, soninké*) et concernait 153 écoles, 205 classes et 22 400 élèves. Le curriculum a commencé en 1999 pour fléchir en 2012 avec les perturbations politiques et sécuritaires qui ont touché tous les domaines de développement. En fin 2005, le curriculum a été appliqué dans 2550 écoles parmi lesquelles 2050 utilisant la PC et 500 écoles classiques.

Nous avons choisi le *bamanankan* pour la raison qu'elle est la langue la plus couramment parlée au Mali.

Problématique

Les règles de construction des nombres et leur addition en bamanankan ne sont pas dégagées dans le système d'enseignement classique ; celles du français sont systématiquement transposées en bamanankan dans les apprentissages. Or la langue a ses spécificités auxquelles nous devons tenir compte.

Traoré (2000) a donné une vue d'ensemble de la formation des maîtres de l'indépendance à nos jours. À cause de l'importance du français pour l'ascension sociale, il est communément supposé que les maîtres, comme les populations, sont hostiles à l'enseignement en langues nationales.

Tandis que Traoré indexe la formation des enseignants, Haïdara (1998), estime qu'au contraire, la majorité des maîtres à Bamako est favorable à cet enseignement. Le facteur décisif semble être le degré d'information concernant son utilité.

Kanouté (2000) a examiné l'enseignement des mathématiques selon la Pédagogie Convergente (PC). À la lumière des manuels de formation des maîtres et de la pratique dans les classes, il se penche en particulier sur la transition du *bamanankan* au français, qui a lieu en 4^{e} année.

Au cours des observations de classe, nous avons constaté que les apprenants réussissaient rarement les calculs. Nous nous sommes posé la question ; pourquoi les enfants ont-ils des difficultés en calcul ? Ces difficultés n'auront-elles pas une solution à travers la numération en bamanankan ?

Dans son ouvrage consacré à l'enseignement du calcul en langues nationales, Guegan (1983) soutient que « l'affirmation de l'identité culturelle d'un peuple passe par la revalorisation d'un ensemble complexe de son patrimoine ancestral par l'intermédiaire des langues nationales ».

L'objectif de cette étude est de vérifier l'impact de la numération en *bamanankan* sur les résultats de l'apprentissage de l'addition chez les élèves du niveau 2 (3ème et 4ème années) de l'enseignement fondamental à l'Institut pour l'Éducation Populaire de Kati au Mali. La question fondamentale est : la numération en *bamanankan* contribuera-t-elle à améliorer les résultats de l'apprentissage de l'addition chez les élèves de 3ème et 4ème année ?

Quelques repères théoriques

Plusieurs auteurs ont travaillé sur les concepts couramment utilisés au cours de l'introduction du bilinguisme dans le système éducatif malien, en particulier : la Pédagogie Convergente, le curriculum, le bamanankan.

La Pédagogie Convergente : Elle peut être définie comme une méthode éducative formelle consistant à introduire rationnellement les langues nationales dès les premières années de la scolarisation des apprenants à côté de la langue officielle.

Doumbia (1999) s'est rendu dans les classes pour les observer en 1998-1999. Voulant vérifier si les principes de l'éducation bilingue de la Pédagogie Convergente sont respectés dans l'enseignement des langues, il compare la didactique de la langue bamanankan à celle de la langue française et il dénonce les pratiques enseignantes relatives au bamanankan. L'auteur affirme que si la pédagogie active fonctionne bien, cela n'est guère le cas de la pédagogie de la langue bamanankan. Dumestre (1997) fait le diagnostic de l'école « souffrante » et demande de la part des autorités, plus de lucidité, et se préoccupe aussi du problème des langues nationales.

Hamers et Blanc (1984), en faisant le point de la situation de la bilingualité et du bilinguisme, supposent que l'éducation bilingue a des effets bénéfiques si les deux langues sont suffisamment valorisées. Les études, de Radahindwa réalisées dans la République Démocratique du Congo (ex-Zaïre), de Diarra (1983), de Calvet réalisées au Mali, ont abouti au constat suivant : les enfants apprenant dans leur langue maternelle ont de meilleures performances dans les disciplines scientifiques que leurs homologues des classes en français. Quant à l'étude de Diarra, qui portait sur les représentations des populations, elle a conclu que celles-ci rejetaient l'expérience d'utilisation des langues nationales dans l'enseignement. Ces différentes études, contradictoires sur certains points, font apparaître,

d'une part, que l'expérience mérite d'être soutenue, de l'autre, que les représentations sont plus ou moins favorables selon le contexte.

Kané (1999) les rejoint en ces termes « parmi les problèmes de l'école généralement mentionnés, se trouve le manque de matériel didactique ».

Le curriculum : il est défini comme l'ensemble des dispositifs (finalités, programmes, emploi de temps, matériels didactiques, méthode pédagogique, mode d'évaluation) qui dans le système scolaire et universitaire, permet d'assurer la formation des apprenants (loi n° 99046 du 28 décembre 1999 portant la loi d'orientation sur l'éducation). Le curriculum est la suite logique de la pédagogie convergente.

Le bamanankan : elle est l'une des langues de la grande famille linguistique mandingue qui est parlée par plus de dix millions de personnes en Afrique et principalement au Mali.

Au Mali, l'option actuelle vise la généralisation de l'utilisation des langues nationales au premier cycle de l'enseignement fondamental. Le bamanankan est la langue majoritaire du pays : elle occupe une place de choix, non seulement par l'importance numérique de ses locuteurs, mais aussi par son dynamisme économique et politique (langue de négoce et de communication, Kanouté, 1997). Transcrite officiellement en 1967, le bamanankan fut la première langue nationale utilisée dans l'alphabétisation des adultes. Ainsi, en 1979, le *bamanankan* fut introduit à titre expérimental au premier cycle de l'enseignement fondamental. En 1985, à la suite d'une évaluation de cette expérience, l'Institut Pédagogique National (IPN) pose la question du bon transfert en langue française des attitudes et des aptitudes acquises lors de l'apprentissage en langue maternelle.

Notre étude s'inscrit fortement dans la vision des auteurs qui prônent l'enseignement dans les langues nationales. L'enseignement a certes besoin d'un médium pour transmettre, mais l'acquisition de connaissances est son objectif premier. Dans ce qui suit, nous analysons le mode opératoire de la numération en langue *bamanankan*.

Comprendre le mécanisme fonctionnel de la numération bamanankan

Les premiers nombres qui expriment les chiffres sont : kelen (un), fila (deux), saba (trois), naani (quatre), duuru (cinq), wooro (six), wolonfila (sept), seegin/seguin (huit), kononton (neuf), tan (dix). La structure de la numération en *bamanankan* a un caractère additif, et un caractère multiplicatif.

Caractère additif : à partir de dix (tan), les nombres entre dix et vingt sont formés avec 10 et l'une des unités citées en haut : tan ni kelen (11), tan ni fila, tan ni saba, tan ni naani, tan ni duuru, …., tan ni kononton. La composition de la dizaine et de l'unité est apparente différemment du français ou dans onze, douze, jusqu'à dix-sept, dix et l'unité qui le suit ne sont pas entendus. Le coordinatif « ni » est additif même s'il n'est pas souvent sommatif tel qu'un mouton et deux bœufs ne feront ni trois

moutons ni trois bœufs. Mais son emploi fera découvrir aux apprenants l'addition avant même qu'elle n'apparaisse comme une opération. Tan ni kelen (littéralement se lit : dix et un) voudra dire onze.

Entre chaque dizaine, ce processus continue, le nombre de dizaine et un, le nombre de dizaine et deux…, jusqu'à cent (kèmè). Mugan (vingt) est une irrégularité de ce système. On ne dit pas tan ni tan (dix et dix), ni bi fila (dix fois 2), qui semble plus logique, bi tan et kèmè tan aussi ne se disent pas.

Caractère multiplicatif : à trente on dit bi saba, bi naani (quarante)… kèmè (cent), kèmè-fila (cent deux) pour exprimer deux cents, kèmè saba (cent trois) exprime trois cents, ba-kelen (mille un) désigne mille, ba-fila (mille deux) désigne deux mille… Donc les termes bi, kèmè et ba ou wa sont multiplicatifs et cela de façon régulière (régularité). De trente à quatre-vingt-dix, on utilise le préfixe bi suivi d'un numéral de 3 à 9. Il s'agit donc de relation multiplicative. Kèmè (100) est un numéral indécomposable. Ba ou waa kelen (1000) est un terme autonome (yèrèyeda) suivi d'un numéral.

Tous les autres nombres sont formés par addition ou par multiplication. En *bamanankan* bi seegin (80) c'est une dizaine fois huit (10x8) et en français quatre-vingt (80) c'est 4x20.

Une remarque est faite sur (tan) dix pour lequel on ne dit pas tan kelen; vingt (mugan) qu'on ne nomme pas mugan-kelen, cent (kèmè) qui ne se dit pas kèmè kelen contrairement à ba qui se dit ba-kelen.

L'addition se fait des plus grandes unités aux plus petites et mentalement chaque fois avec un retour quand la somme des unités inferieures atteint 10. La retenue est ajoutée à la somme des unités précédentes.

Par exemple : voici comment 184 + 376 s'effectue (Figure 1)

Etape 1 : la somme des centaines, 1 + 3 = 4 (je garde 400 en tête)

Etape 2 : la somme de dizaines, 80 + 70 = 150 (j'ajoute 100 à 400 pour avoir 500 et je suis à 550) ;

Etape 3 : la somme des unités, 4 + 6 = 10 (ce 10 est ajouté à 50 pour faire 60 et la somme obtenue est 560.

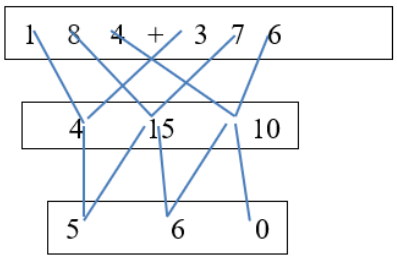


Figure 1 - Addition de 184 + 376 eb bamanankan

Cette structuration de la numération enseignée aux élèves leur permettra de faire le lien entre le nom d'un nombre et son cardinal, à avoir par exemple dans tan-ni duuru, le nom est tan ni duuru mais il s'aperçoit rapidement que c'est la somme de dix et de cinq. Cela l'aidera à comprendre le sens de la grandeur d'un nombre et impactera certainement les résultats de l'addition, quelle que soit la disposition verticale ou horizontale de l'opération, puisque l'élève disposera déjà d'un outil de calcul mental.

Hypothèse de recherche

La numération orale en *bamanankan* améliore les acquisitions de l'addition au premier cycle de l'enseignement fondamental.

Hypothèses spécifiques :

1. L'apprentissage de l'addition pose des difficultés aux élèves.
2. Les difficultés de l'apprentissage de l'addition sont dues à la retenue et à la disposition de l'opération.
3. Au premier cycle de l'enseignement fondamental, la numération orale en bamanankan attenue les difficultés liées à l'addition.

Méthodologie

Nous nous appuyons sur une démarche expérimentale qui, selon Bernard C (1856), consiste à « collecter des faits », pour en extraire des hypothèses qui vont ensuite être soumises à vérification (Anceaux F, Sockeel P, 2006). Ces auteurs affirment que « Ce qui la caractérise, c'est le souci primordial d'apporter la preuve et de valider de manière empirique et systématique les systèmes théoriques par le biais des hypothèses » (Anceaux, Sockeel, 2006, p. 68). Ainsi, pour évaluer l'impact de la numération en bamanankan sur les résultats d'addition, nous avons administré un test d'addition aux élèves, puis nous leur avons donné des cours sur la composition des nombres (la structure) et l'addition. Enfin un deuxième test sur les mêmes items leur a été administré afin de voir la différence entre les opérations au cours des deux tests.

Public cible : Les tests avant et après un cours ont été effectués aux deux niveaux : 3ème ,4ème. Le public cible est la classe à double division ($3^{ème}$ et $4^{ème}$). Les apprenants de cette classe sont formés en bamanankan dans les deux classes antérieures ($1^{ère}$ et $2^{ème}$).

Démarche suivie : Par souci d'objectivité, nous avons soumis ces élèves à des tests d'addition dans trois classes $4^{ème}$ et $3^{ème}$ de Ciwara, cela dans l'optique de répondre à la première question prioritairement posée, à savoir : les enfants ont-ils des difficultés en calcul ?

Ce test a été préparé en tenant compte des variables didactiques.

Variables didactiques : Elles sont au nombre de trois :

Toutes les additions ont seulement deux termes et aucun terme ne dépasse deux chiffres dans le souci de respecter la capacité de mémorisation des enfants de la 3ème et de la 4ème.

Désignons par V_i la variable didactique et par V_{ij} la valeur prise par V_i.

V_1 : Nombre de chiffre des termes

Soit a et b deux nombres à additionner :

$V_{1.1}$: les nombres a et b ont chacun 1 chiffre (avec ou sans retenue) ; on va du plus facile progressivement vers le plus difficile voire la formation de la dizaine.

$V_{1.2}$: les nombres a et b ont chacun 2 chiffres : à ce niveau on peut juger l'impact du nombre de chiffres ;

$V_{1.3}$: l'un des nombres a et b a 1 chiffre et l'autre a 2 chiffres.

Par exemple quand on pose

$$\begin{array}{r} 98 \\ +\ 9 \end{array}$$

les élèves seront-ils tentés d'ajouter 8 à 9 ou 9 à 9 ?

?

$$\begin{array}{r} 98 \\ +\ 9 \end{array}$$

V_2 : Existence d'une retenue. Il y a retenue quand la somme atteint ou dépasse dix.

$V_{1.2}$: Sans retenue

$V_{2.2}$: Une retenue. Les problèmes commencent à se poser devant la formation de la dizaine, de l'illustration de la retenue.

$V_{2.3}$. : Deux retenues. Le problème devient un peu plus complexe si la retenue est aux deux niveaux.

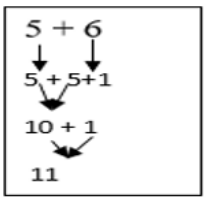
Il y a retenue quand la somme de deux nombres atteint 10 (supérieure ou égale à 10). C'est là que tous les problèmes réels de l'addition naissent. Que faire de cette retenue ? Certains la mettent sur la même ligne que la somme :

$$\begin{array}{r} 98 \\ +\ 33 \\ \hline 1211 \end{array}$$

Avant d'arriver à la formation des dizaines, l'enseignant peut travailler sur les doubles (somme des deux thèmes identiques) et les presque doubles qui sont les deux termes consécutifs.

L'apprenant découvre que 5+5=10 et pourra former la dizaine à partir de 6, de 7, de 8, de 9.

Exemple : Faire 5+6=11, dire qu'ils ajoutent 5 de 6 à 5 qui fera 10 et qu'ils écriront le restant 1 de 6 et auront 11 (Figure 2).



7+5=12 : que 3 est pris de 5 pour faire avec 7,10 et le reste 2 de 5 est ajouté à 10 pour avoir 12. Ou que 5 est pris de 7 pour faire avec 5, 10 et le reste 2 et 7 est ajouté à 10 pour avoir 12.

8+6=14 ; est prélevé de 6 pour compléter 8 à 10, le reste 4 de 6 en fait 14.

Figure 2 – 5+6=11

La langue ou plutôt la numération orale ne fait pas cas de cette retenue gardée à côté donc elle épargne l'enfant de cette difficulté parfois émanant des maîtres. Il s'agit entre autres de pourquoi 10 s'écrit avec 1 et 0 qui sont les plus petits des chiffres de la formation de la dizaine, de la retenue quand une addition est posée. Vellard (1982) montre qu'à partir d'un important travail de terrain, on trouve une bonne maîtrise du calcul mental chez des commerçants et des paysans analphabètes. L´auteur conclut : « Là encore, bien des préjugés s'effondrent, la plupart des auteurs affirmant qu'un système de numération uniquement oral est incapable de servir à des calculs un peu plus élaborés » Vellard (1982). Deledicq (1991) est l'un de ces auteurs, il stipule que « le sous-système des techniques opératoires est, sauf information complémentaire (que nous serions heureux de diffuser) pratiquement vide dans les civilisations où il n'y a pas d'expression écrite des nombres ; et, à la réflexion, cela n'est pas particulièrement étonnant ».

V3 : La disposition du calcul. Nous voulons identifier les cas où les enfants éprouvent le maximum de difficultés. Est-ce dans V3.1 (la disposition verticale), ou dans V3.2 (la disposition horizontale) ?

Résultats

Les taux de réussite passent respectivement de 0 à 35,25% pour $V_{1\text{-}2}$ et de 0 à 23,53% pour $V_{1\text{-}3}$ (Tableau 1). Ceci confirme la première hypothèse qui stipule que les élèves ont des difficultés en addition ainsi que la deuxième pour laquelle la numération en bamanankan atténue les difficultés liées à l'addition au premier cycle de l'enseignement fondamental.

La baisse du taux de réussite dans $V_{1\text{-}2}$ et $V_{1\text{-}3}$ par rapport à celle de $V_{1\text{-}1}$ dénote que les difficultés sont accrues quand les nombres de chiffres des termes sont différents (Tableau 2)

Tableau 1 – Taux de réussite et d'échec suivant la variable 1, nombre de chiffres des termes[3]

Niveau	Taux	V_{1-1}		V_{1-2}		V_{1-3}	
		Test 1	Test 2	Test 1	Test 2	Test 1	Test 2
3è année	Taux de réussite totale	70,59	94,12	0	35,29	0	23,53
	Taux de réussite partielle	23,53	5,88	64, 71	29,42	35,29	47,06
	Taux d'échec partiel			11,76	11,76	35,29	17,65
	Taux d'échec	5,88	0	23,53	23,53	29,42	11,76
	Total	100	100	100	100	100	100
4è année	Taux de réussite totale	57,14	64,29	14,29	21,43	21,49	64,29
	Taux de réussite partielle	42,85	35,71	42,86	64,29	35,71	21,43
	Taux d'échec partiel			7,14	14, 29	14, 29	0
	Taux d'échec	0	0	35, 71	0	24,57	14,29
	Total	100	100	100	100	100	100

Tableau 1 – Taux de réussite et d'échec suivant la variable 2, existence de retenue

Niveau / Taux	3è année						4è année					
	V_{2-1}		V_{2-2}		V_{2-3}		V_{2-1}		V_{2-2}		V_{2-3}	
	Test 1	Test 2	Test 1	Test 2	Test 1	Test 2	Test 1	Test 2	Test 1	Test 2	Test 1	Test 2
Réussite totale	82, 35	82, 35	0	29, 41	5,88	32,29	71,43	85,72	14,29	57,14	21,49	28,57
Réussite partielle	11, 76	11, 76	58,83	47,06	35,29	17,65	21,43	7,14	35,71	42,86	35,71	42,86
Échec partiel			11,76	17,65					21,49	0		
Échec	5,88	5,88	29,41	5,88	58,82	47,06	7,14	7,14	28,57	0	42,86	28,57
Total	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

Les opérations sans retenue ont été les mieux réussies. Dès l'apparition de la retenue, les difficultés ont été détectées avec Zéro réussite au test 1 et se sont accentuées avec les cas de deux retenues. Son passage de 0% à 29,41% de réussite atteste l'influence de la numération en *bamanankan* (Tableau 3).

Les opérations posées verticalement ont posé moins de difficultés aux élèves que celles posées horizontalement : Ce résultat peut être lié à l'enseignement. Quand les additions sont toujours posées verticalement, les élèves peuvent manquer d'initiative à poser verticalement une opération qui leur est présentée horizontalement et à porter le résultat, ou à calculer mentalement.

3. Lecture des tableaux :
Taux de réussite totale = pourcentage du nombre d'élèves n'ayant pas commis d'erreur (commis zéro erreur)
Taux de réussite partielle = pourcentage du nombre d'élèves ayant commis une ou deux erreurs selon le cas
Taux d'échec partiel = pourcentage du nombre d'élèves ayant commis deux erreurs ou quatre à 6 erreurs selon le cas
Taux d'échec = pourcentage du nombre d'élèves ayant commis plus de 2 erreurs ou 7 à 8 erreurs selon le cas

Tableau 2 – Taux de réussite et d'échec suivant la variable 3, disposition de l'opération

Niveaux / Taux	3è année				4è année			
	V_{3-1}		V_{3-2}		V_{3-1}		V_{3-2}	
	Test 1	Test 2	Test 1	Test 2	Test 1	Test 2	Test 1	Test 2
Réussite totale	28,57	50	7,14	50	35,29	47,06	0	29,41
Réussite partielle	28,57	35,71	21,43	35,71	29,41	35,29	14,28	23,53
Échec partiel	14,29	7,14	71,43	14,29	23,53	5,88	88,23	47,05
Échec	28,57	0			5,88	0		
Total	100	100	100	100	100	100	100	100

Conclusion

Au terme de notre étude sur la numération orale en bamanankan et de son impact sur la performance des élèves en addition, les résultats de recherche ont relevé l'importance de ce premier enseignement des mathématiques sur les compétences des élèves. Nos résultats de recherche ont montré que la numération en bamanankan joue un rôle indéniable dans l'augmentation du taux de réussite en addition. Elle permet de faciliter l'acquisition des opérations au premier cycle. Les résultats obtenus, l'attitude dynamique des apprenants pendant cet apprentissage témoignent de cette confirmation. Le nombre d'enfants qui mettaient la retenue dans le rang des résultats a beaucoup diminué. Par exemple les résultats comme 59+22 = 711 sont devenus rares dans le 2éme test par rapport au 1er test. L'augmentation du taux de réussite de 7,14% à 50% en 3ème et de 0% à 29,41 en 4ème année relativement à la disposition de l'opération confirme, parmi tant d'autres succès, notre hypothèse générale.

Références

Anceaux, F., Sockeel P. (2006) *Mise en place d'une méthodologie expérimentale : hypothèses et variables*. Revista Cairn info, p.66-83.

Calvet, L-J. (1988) *Evaluation des classes expérimentales en bambara dans la région de Ségou*. (Rapport). Bamako.

Diarra, M. (1983) *Problématique de l'enseignement des langues nationales au Mali*. Mémoire de maîtrise, ENSup, Bamako.

Doumbia, A T. (2000) L'enseignement du bambara selon la pédagogie convergente au Mali : théorie et pratiques *Nordic Journal of African Studies, 9*(3), 98–107.

Dumestre, G. (1997) De l'école au Mali. INALCO-CNRS, Paris, France, *Nordic Journal of African Studies*. 6 (2) : 31-52

Haïdara, M L. (1990) *Attitude des maîtres en service dans les écoles de Bamako face à l'introduction des langues nationales dans l'enseignement*. Mémoire de maîtrise, ENSup, Bamako.

Hamers, J. F. et M. B. (1984) *Bilingualité et bilinguisme*. Bruxelles, Pierre Mardaga, éd

Kané, S. (1999) Manuels utilisés dans l'enseignement de la langue dans les écoles à pédagogie convergente : Disponibilité et utilisation. *Nordic Journal of African Studies, 9*(3).

Kanoute, M. L. (2000) Mathématiques et langue nationale en milieu scolaire bambara. *Nordic Journal of African Studies* (80-97).

Radahindwa, C. (1985) *La langue d'instruction et ses incidences sur les performances scolaires et attitudes des écoliers zaïrois*. Une étude IIPE/CRIDE (Rapport). Paris, France : UNESCO.

Traoré, S. (2001) *La Pédagogie Convergente : Son Expérimentation Au Mali Et Son Impact Sur Le Système Éducatif*. Monographies Innodata–6, Unesco : Bureau International D'éducation.

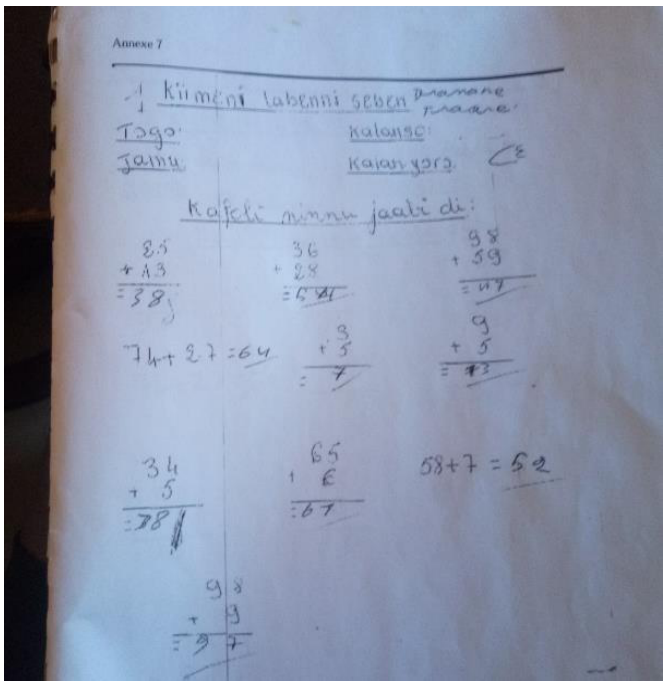
Vellard, D (1982) *Pratiques de calcul et opérations logiques en milieu traditionnel africain*. (Exemples maliens et rwandais). Paris, Université de Paris VII, UER de Didactiques des disciplines.

Annexes

Items par variable

Variables		Items
V_1	V_{1-1}	3 9 + 5 + 5
	V_{1-2}	25 36 98 + 13 + 28 + 59 74+27=
	V_{1-3}	34 65 98 + 5 + 6 + 9 58+7=
V_2	V_{2-1}	25 3 34 + 13 + 5 + 5
	V_{2-2}	36 9 65 + 28 + 5 + 6 58+7=
	V_{2-3}	98 98 + 59 + 9 74+27=
V_3	V_{3-1}	25 36 98 3 34 65 98 9 +13 +28 +59 +5 +5 + 6 + 9 +5
	V_{3-2}	74+27= 58 +7=

Traces



Titre: Comment comptons-nous dans nos langues ? Des particularités de la numération en certaines langues

Auteurs: MESQUITA Ana, CONCEIÇÃO Manuel Célio, ACHER-SPITALIER Safia, COULIBALY-TOGORA Hawa, FUMO Paulino, PATRONIS Tasos et PAVLOPOULOU Kallia

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 411 - 424

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Comment comptons-nous dans nos langues ? Des particularités de la numération en certaines langues

MESQUITA[1] Ana – CONCEIÇÃO[2] Manuel Célio –
ACHER-SPITALIER[3] Safia – COULIBALY-TOGORA[4] Hawa – FUMO[5] Paulino – PATRONIS[6] Tasos –
PAVLOPOULOU[7] Kallia

Résumé – Dans cette communication, nous nous centrons sur des aspects linguistiques, sémantiques et culturels de la numération, partie essentielle des mathématiques et de leur enseignement. Nous mettons en évidence des particularités et des régularités liées à la numération, en utilisant en particulier des systèmes sémiotiques de représentation. Nous en donnons des exemples, issus des langues suivantes : arabe, bamanankan (bambara), français, grec, portugais, ronga.

Mots-clefs : Numération, Comptage, Opérations arithmétiques, Registres de représentation sémiotique, Langues naturelles

Abstract – In this communication, we focus on linguistic, semantic and cultural aspects of numeration, an essential part of mathematics and its teaching. We highlight particularities and regularities related to counting, using in particular semiotic systems of representation. We give some examples, from the following languages: Arabic, Bamanankan (Bambara), French, Greek, Portuguese, Ronga.

Keywords: Numeration, Counting, Arithmetic operations, Registers of semiotic representation, Natural languages

1. IREM de Paris/Université de Paris Cité, France, alobomesquita2021@gmail.com
2. Université d'Algarve, CIAC, Portugal ,mconcei@ualg.pt
3. Association des Professionnels de l'Éducation et de l'Enseignement, France, safia.acher.spitalier@gmail.com
4. Institut Pédagogique Universitaire, Mali, hawacoul64@gmail.com
5. Université Pédagogique de Maputo, Mozambique, fumo.paulino62@gmail.com
6. Université de Patras, Département des Mathématiques (retraité), Grèce, mathematicianfriend@gmail.gr
7. Université Nationale de Technologie d'Athènes, Département des Mathématiques, Grèce, pavlopoulou@math.ntua.gr

La numération et le comptage constituent un sujet majeur au début de la scolarité en mathématiques. Les apprentissages se déroulent, dans de très nombreux cas, en des situations de plurilinguisme, où l'apprentissage a un recours à une pluralité de langues, dans un espace géographique donné.

Une première motivation pour notre réflexion est liée à une certaine réduction de la diversité linguistique et des langues locales et régionales en faveur de langues de circulation internationale. Un rétrécissement du nombre des unités lexicales est observé dans beaucoup de langues et « l'*érosion fonctionnelle* » dont parle Hagège (2000, p. 134) mène à l'appauvrissement de la langue et de la pensée dans cette langue. Les effets néfastes sur la conceptualisation, tendant à une simplification extrême, en sont la conséquence.

Nous avons des indices de ce rétrécissement, quand nous voyons la quantité de concepts qui n'ont plus de désignation en français – mais pas seulement en français. Ceci peut être observé dans le langage courant – il suffit de penser aux enseignes de magasins de la plupart des villes…Qu'il s'agisse de nouveaux ou d'anciens termes, ils sont pris tels quels directement, sans traduction, sans accommodation, par simple glissement. Même quand les termes existent dans la langue qui fait des emprunts : un cas flagrant est celui de 'modeling', en général préféré à 'modélisation', lequel existe bel et bien en français … Ou 'outsourcing' vs 'sous-traitance'…

La **théorie des registres sémiotiques** développée par Duval (1988, 1995) ainsi que les notions associées de congruence (et non-congruence), nous donnent un **cadre d'analyse** approprié, nous semble-t-il, pour aborder cette réflexion. Rappelons que, pour cet auteur, les registres sont des systèmes sémiotiques d›expression et de représentation des connaissances : le **langage naturel**, les **langages symboliques** (concernant des notations symboliques de divers ordres, systèmes variés d'écritures numériques, algébriques, logiques …), ainsi que des **images** (de différents types, des figures géométriques aux diagrammes, schémas, etc.) sont des exemples de tels registres (Duval, 1995).

L'information issue de ces différents systèmes peut exprimer des connaissances analogues – cas où on parle de **congruence** ; ou, au contraire, elles peuvent s'appuyer sur des connaissances différentes. Duval (1988) parle alors de **non-congruence**, laquelle amène à un besoin de conversion de l'information. Un exemple, le 95 - en français et en portugais : son énonciation orale : *'quatre''vingt(s)''quinze'*, en français (fr) ; *'noventa e cinco'*, en portugais (pt). L'écriture littérale est : *'quatre-vingts-quinze'* (fr), ou *'noventa e cinco'*(pt) ; son écriture chiffrée est 95, en chiffres arabes, ou XCV, en chiffres romains … Dans cet exemple, on peut parler de **congruence** entre l'énonciation orale et l'écriture littérale, dans le cas des deux langues. En revanche, entre l'écriture chiffrée et **l'écriture littérale**, en portugais, on observe une **congruence** entre ces écritures tandis qu'en français ces écritures sont **non congruentes**.

L'importance de la congruence ou de non-congruence est manifeste entre les différents aspects de la numération, d'une part, et dans le lien aux opérations arithmétiques. D'une façon plus générale, l'existence ou non de congruence est un facteur à avoir en considération quand on analyse la numération et ses liens au langage, d'une part, et aux opérations mathématiques sous-jacentes.

Dans ce contexte, nous avons voulu nous intéresser à des spécificités de la numération, dans chacune des langues retenues, en tenant compte des registres utilisés, en analysant les aspects liés à la congruence (ou non) entre registres, des liens entre le langage courant et les mots utilisés pour désigner les nombres d'une part (cas du bamanankan), ou des liens entre le langage courant et le langage scolaire (arabe), la signification ou la structuration des nombres dans certaines cultures (bamanankan ; grec), ou encore les liens entre la numération et les opérations arithmétiques (ronga). En annexe 1, on peut trouver d'autres informations sur les thématiques de notre groupe de réflexion.

Les mots arithmétiques grecs et l'interprétation des nombre à travers l'Histoire.

Les connaissances et les concepts mathématiques sont construits dans les langues naturelles, par des processus qui ont été émergés en contextes culturels suivant non seulement les besoins du calcul et de la communication, mais aussi les significations religieuses, philosophiques ou idéologiques. Dans cette communication nous nous occupons des nombres ordinaux et cardinaux dans deux cultures différentes, à travers l'histoire.

La culture de la vie quotidienne en Grèce, comprenant la mesure du temps et les échanges économiques jusqu'aujourd'hui

En Antiquité il y avait beaucoup d'activités commerciales entre les Grecs et les peuples du Moyen-Orient et autour de la Méditerranée. Les systèmes de numération (à base dix, à base soixante, etc.) étaient utilisés en général, avec des différences importantes au niveau de représentation. Par exemple, chez les Grecs, les nombres étaient représentés par des lettres de l'alphabet grec, tandis que les Babyloniens utilisaient des symboles totalement différents. La structure langagière concernant la numération (nombres ordinaux, ainsi que cardinaux) n'a pas beaucoup changé pendant les siècles. Les tableaux suivants présentent cette structure dans la langue grecque moderne.

Suivant le tableau 1, nous observons qu'en utilisant des nombres *cardinaux*, nous n'avons les trois genres que pour le nombre 1, et pour certains cas, nous avons deux genres.

Singulier/Pluriel	Genre	Exemple	
Ένα (un)	Masculin	**Ένας άνδρας** (Un homme)	3 genres
	Féminin	**Μία γυναίκα** (Une femme)	
	Neutre	**Ένα παιδί** (Un enfant)	
Δύο (deux)	Masculin	**Δύο άνδρες** (Deux hommes)	1 genre
	Féminin	**Δύο γυναίκες** (Deux femmes)	
	Neutre	**Δύο παιδιά** (Deux enfants)	
Τρία (trois)	Masculin	**Τρεις άνδρες** (Trois hommes)	2 genres
	Féminin	**Τρεις γυναίκες** (Trois femmes)	
	Neutre	**Τρία παιδιά** (Trois enfants)	
Πέντε (cinq)	Masculin	**Πέντε άνδρες** (Cinq hommes)	1 genre
	Féminin	**Πέντε γυναίκες** (Cinq femmes)	
	Neutre	**Πέντε παιδιά** (Cinq enfants)	
Δώδεκα (douze)			1 genre
Δεκατρία (treize)			2 genres

Tableau 1 – Exemples de numération en grec moderne (nombres cardinaux)

Singulier/Pluriel	Genre	Exemple	
Πρώτος (premier)	Masculin	**Πρώτος** άνδρας (premier homme)	3 genres
	Féminin	**Πρώτη** γυναίκα (première femme)	
	Neutre	**Πρώτο** παιδί (premier enfant)	
Δεύτερος (deuxième)	Masculin	**Δεύτερος** άνδρας (deuxième homme)	3 genres
	Féminin	**Δεύτερη** γυναίκα (deuxième femme)	
	Neutre	**Δεύτερο** παιδί (deuxième enfant)	

Tableau 2 – Exemples de numération en grec moderne (nombres ordinaux)

Le tableau 2 nous montre qu'en utilisant des nombres *ordinaux* nous avons toujours trois genres.

La culture des mathématiques et de la philosophie antique grecque et médiévale : interprétation de nombres dans la tradition géométrique grecque

Suivant Moukanos (1979), Ioannis Philoponos, dans un texte important, commentaire sur Aristote, *De l'Âme*, interprète en détail les quatre premiers nombres cardinaux (1, 2, 3 et 4) comme correspondants aux dimensions 0, 1, 2, 3 de figures géométriques :

- *L'unité* (<I monàs>, « Η **μονάς** ») correspond à l'entité géométrique d'un point, qui n'a pas de parties (<amerès>, « α**μερές** », selon Euclide), n'a pas de dimension, ou bien (en terminologie topologique moderne) il est "de dimension 0".

- *Le couple* (<I diàs>, « Η **δυάς** ») correspond à l'entité géométrique d'une *droite* (**évidemment** definie par 2 points) qui est « une longueur sans largeur » (« **μήκος απλατές** », selon Euclide) et donc il est "de dimension 1".

- *La trinité* (<l triàs>, « Η **τριάδα** ») **correspond à l'entité géométrique d'une** *surface plane* (p.ex. le triangle), donc elle est "de dimension 2".

- *Le quadruple* (<l tetràs>, « Η **τετράς** ») correspond à l'entité géométrique d'une *figure solide* (p.ex. le tétraèdre), donc il est "de dimension 3".

Ainsi, l'interprétation traditionnelle de nombres dans l'Antiquité grecque est surtout géométrique. Cette interprétation s'oppose à l'interprétation moderne ensembliste des nombres, comme cardinaux d'ensembles finis qui est totalement indépendante de la forme géométrique (Cf. tableau 3).

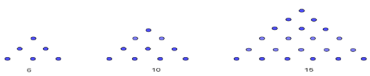
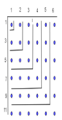
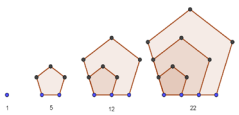
Exemple 1: Nombres pairs et impairs	Exemple 2 : Nombres triangulaires
	
Exemple 3 : Nombres carrés	**Exemple 4 : Nombres pentagonales**
	

Tableau 3 – Exemples de l'interprétation géométrique des nombres (Note : Pour les exemples 2 et 3 voir par exemple Katz (1998) p. 49 - À l'exemple 3 les nombres carrés sont construits par addition, chaque fois d'un "gnomon", c.-à-d., d'un nombre impair).

Les opérations mathématiques comme fait de lagague : Comment compte-t-on en ronga?

La nécessité d'éviter une quantité trop importante de symboles dans les systèmes de comptage a conduit différentes langues à adopter le système de composition de nouveaux nombres basé, par exemple, sur les opérations d'addition et de multiplication. Cette contribution vise à présenter et expliquer le système de comptage en ronga (une langue bantoue parlée au Mozambique), en cherchant à mettre en évidence comment les opérations mathématiques d'addition et de multiplication sont impliquées dans le comptage dans cette langue, ce qui peut avoir un impact sur l'enseignement des mathématiques, notamment dans les premières années.

En ronga, les noms de nombres cardinaux sont simples et composés et on utilise particulièrement les chiffres arabes. Cette langue a un système de comptage où le 5 joue un rôle structurant. Les nombres cardinaux simples sont 1, 2, 3, 4, 5, 10 100, 1000, respectivement, *-n'we* "un", *-bidri* "deux",

-rharhu “trois”, *mune* “quatre”, *ntlhanu* “cinq”, *khume* “dix”, *drana* “cent”, *gidi* “mille”. Les nombres restants sont composés à partir de ceux-ci (Cf. tableau 4).

Dans cette langue, la numérotation a un caractère additif en ce qui concerne les nombres inférieurs à vingt (par exemple, 6 = 5 + 1 ; 7 = 5 + 2 ; 15 = 10 + 5 ; 17 = 10 + 5 + 2) et multiplicatif et additif (mixte), à partir de dix : 21 = 2 10 + 1 ; 27 = 2 10 + 5 + 2, par exemple, comme nous le voyons dans le tableau 5, en prenant comme exemple le nom « **mbuti** » (chèvre, en français) sachant que « (**N**)**mbuti** » [classe 9] est le singulier « chèvre » et « ***ti*mbuti** » [classe 10] est le pluriel « chèvres ».

Numérotation additive			**Numérotation mixte (additive et multiplicative)**		
Écriture chiffrée	**Opération**	**Énonciation orale**	**Écriture chiffrée**	**Opération**	**Énonciation orale**
6	5+1	Ntlhanu dra timbuti na yin’we “cinq chèvres et une”	20	10 2	Makume mabidri ya timbuti “dizaines deux chèvres”
11	10+1	Khume dra timbuti na yin’we “dix chèvres et une”	22	10 2 + 2	Makume mabidri ya timbuti na tibidri “dizaines deux chèvres et deux”
16	10+5+1	Khume dra timbuti na ntlhanu na yin’we “dix chèvres et cinq et une”	24	10 2 + 4	Makume mabidri ya timbuti na mune “dizaines deux chèvres et quatre”

Tableau 4 – Caractères additif et mixte de la numérotation en ronga

 Mbuti yin’we	 Timbuti tibidri	 Timbuti tirharhu	 Mune wa timbuti	 Ntlhanu wa timbuti	 Ntlhanu wa timbuti na yin’we	 Ntlhanu wa timbuti na tibidri
Chèvre une	Chèvres deux	Chèvres trois	Quatre chèvres	Cinq chèvres	Six chèvres	Sept chèvres

Tableau 5 – L’accord de nombres avec le nom « mbuti » / chèvre

Comme nous le savons, les langues bantoues sont des langues avec un système de préfixes nominaux, c’est-à-dire que tous les noms sont intégrés dans des classes nominales qui varient de 10 à 20, environ. Les préfixes nominaux déclenchent un système d’accord dans les mots dépendant du nom en question, comme c’est le cas avec les adjectifs. Cette caractéristique se manifeste également dans le système de comptage, notamment dans les trois premiers chiffres (1, 2, 3), où la numérotation nécessite obligatoirement la présence du préfixe du nom auquel elle se rapporte, comme illustré dans le tableau 5, où les nombres figurent en bleu et les préfixes en rouge.

Compte tenu des exemples mentionnés, il ne semble plus nécessaire d’expliquer davantage l’utilisation des opérations mathématiques dans le système de comptage en ronga. Très tôt, le système de comptage de cette langue amène l’élève à gérer des opérations mathématiques complexes (notamment l’addition et la multiplication). Cependant, la logique de comptage ne coïncide pas toujours avec la logique suivie dans l’enseignement des opérations mathématiques à l’école. Dans ce cadre,

quand il est demandé à un élève d'effectuer l'opération 10 + 8, puisque dans la logique de sa langue, le mot-nombre associé à 8 a son énonciation verbale composée de 5 + 3, 10 + 8 veut dire 10 + 5 + 3. Dans la pratique, l'élève doit tenir compte des opérations derrière les désignations, peut-être plus – c'est une hypothèse qui serait intéressante d'analyser didactiquement – que des enfants dont leur système de numération a un mot-nombre pour chaque élément de la base. Par conséquent, il nous semble que l'enseignement des mathématiques doit être pensé en tenant compte des aspects et des logiques du fonctionnement de la société.

Évolution de la numération en Bamanankan

Rappel des règles principales

Notons qu'en bamanankan, la numération peut être vue comme étant de type ordinal[8], dans laquelle l'ordre utilisé est lié à la suite de noms d'enfants dans une fratrie, et non pas à l'aspect cardinal (nombre d'enfants). Après avoir eu un aperçu des nombres dans 'Comment compte-t-on en bamanankan',[9] nous présentons ici les règles d'écriture des dizaines, des nombres composés, des centaines, des milliers et au-delà.

Les chiffres de un à neuf sont exprimés par des mots-nombres dits autonomes : *kelen* (1), *fila* (2), *saba* (3), *naani* (4), *duuru* (5), *wɔɔrɔ* (6), *wolonwula* (7), *seegin* (8) et *kɔ̀nɔntɔn* (9).

Les dizaines de trente à quatre-vingt-dix se construisent à l'aide du multiplicateur *bi* et du numéral correspondant : *bi saba* (30), *bi naani* (40), *bi duuru* (50), *bi wɔɔrɔ* (60), *bi wolonfila* (70), *bi seegin* (80) et *bi kɔ̀nɔntɔn* (90). Dix et vingt ont quant à eux des noms particuliers : *tan* (10) et *mugan* (20).

Les centaines sont exprimées à l'aide du multiplicateur ***kɛmɛ*** suivi du numéral correspondant. Nous obtenons ainsi *kɛmɛ* (100), *kɛmɛ fila* (200), *kɛmɛ saba* (300), *kɛmɛ naani* (400), *kɛmɛ duuru* (500), *kɛmɛ wɔɔrɔ* (600) …

Les milliers et les millions se forment en mettant l'un des multiplicateurs, *wa* ***ou*** *ba* pour mille ***et*** *milyion* qui est un emprunt pour le million suivi du numéral correspondant. *wa kelen* (1000), *wa fila* (2000), *wa saba* (3000), *wa naani* (4000)…et *milyɔn kelen* (1 000 000)…, *miliyɔn duuru* (5 000 000) …

8. Dans certaines civilisations, c'est le corps humain qui est à la base de l'ordre utilisé. Dorier (2021, pp. 92–93) donne un exemple de numération ordinale, chez les aborigènes du sud-est de l'Australie, où la suite des nombres peut être obtenue à partir de la désignation successive de parties du corps humain.

9. 'Comment compte-t-on en bamanankan?', fait partie d'une communication orale proposée au colloque ADIMA3, intitulée 'Les Mathématiques sont aussi des faits de langue(s). Comment comptons-nous dans nos langues ?' (Cf. Mesquita et al., à paraître).

Chaque groupe de nombres est relié par la conjonction de coordination *ni* (et), les dizaines et les unités, mais aussi les centaines et les dizaines, et *ani* s'il s'agit d'une classe de nombres à une autre classe de nombres, les milliers et les centaines… (exemple : *mugan ni saba* (23), *kɛmɛ ni bi duuru* (150), *wa kelen ani kɛmɛ saba ni bi saba ni naani* (1 334).

Les mots utilisés pour exprimer les nombres viennent des mots du langage courant, le mot *tan* a plusieurs significations**,** *tan* pour dire « comme cela », (en braquant les dix doigts des deux mains), donc *tan***,** **(**dix, 10), est souvent utilisé aussi pour dire ce qui est complet «*o ye tan ye, kelen t'a jɛ*» (c'est dix, Pas un seul de moins). *Tan* exprime aussi la vérité «*Tan fô a ye*» (dis-lui la vérité). Notons que les lettres non latines *ɛ, ɔ, ŋ, ɲ* appartiennent à l'alphabet bamanankan.

Les grands nombres : du langage naturel aux désignations de nombres

Quand les achats et les ventes se sont développés, d'autres termes sont intervenus. Le *bi* est survenu à propos du décompte de la cola. Le bruit d'une poignée de cola fait « bi », et équivalent de dix colas. Ainsi, à chaque dizaine on dit *bi*, sauf exceptionnellement à dix lui-même et à vingt qui sont aussi des termes autonomes. C'est à partir de trente que *bi* est introduit : *bi saba*, *bi naani*, *bi duuru bi saba* est venue à la place de *mugan ni*, *tan bi naani* à la place de *dɛbɛ*, *bi duuru* remplaça *dɛbɛ ni tan*, *manin- kɛmɛ* est devenu «*bi wɔɔro*» et *bamanan kɛmɛ* est *bi-seeguin*. Le multiplicateur *bi* précède simplement les premiers termes autonomes, qui sont après *kelen* (1) et *fila* (2), *saba* (3), *naani* (4), *duuru* (5), *wɔɔrɔ* (6), *wolonfila* (7), *seegin* (8), *kɔnɔntɔn* (9) tous issus de noms d'enfants dans la famille. Cette historique est développée dans la communication présentée à ADIMA3.

Quand le commerce a évolué, les termes *ba kelen* et *wa kelen* ont vu le jour. « *ba kelen* » était l'équivalent de 800 chez les bamanan. Le panier destiné au commerce de colas se remplissait à 1000 colas et cette unité a été appelé *waga kelen* dont le raccourci fait « wa kelen ».

Manin kɛmɛ veut dire *kɛmɛ* des malinkés, qui était l'équivalent de 60. À tous les 60, ils avaient une centaine. Dans cette communauté, 600 était exprimés par *ba kelen*. Tandis que chez les bamanan, 80 était *kɛmɛ*, bamanan nan *kɛmɛ* ou tous les 80 constituaient une centaine également. En effet *ba kelen* équivalait à 800 dans ces zones bamanan. C'est quand *silameya kɛmɛ* a fait son apparition dans les comptes que tous les *ba kelen* (*ba kelen* des malinkés, 600, et *ba kelen* des bamanan, 800) ont été harmonisés à *ba kelen* tout cours (1000) ou wa kelen.

Numération et pratiques sociales en Algérie : un lieu d'ethnomathématique

Depuis la plus haute Antiquité, et grâce à son excellente situation géographique, l'Algérie a vu la présence de différentes civilisations et multiples cultures. En effet, en plus des diverses variétés des parlers amazighs, appelés aujourd'hui tamazight, déjà parlées par les Algériens, ses derniers ont été

en contact avec diverses langues comme le punique, le latin, l'arabe, l'espagnol, l'italien ou encore le turc et le français. Produit de cette histoire, le contexte linguistique en Algérie se caractérise par la coexistence de nombreuses variétés langagières – coexistence qui a d'une part vivifié et dynamisé les pratiques et les conduites des locuteurs, par l'appropriation de besoins, de situations et de contextes donnés. D'autre part, elle a mis en contraste, en altérité et en tension nombre de ces variétés.

Nul doute que le français fut et demeure la langue qui a le plus influencé les pratiques, bousculé l'environnement linguistique et même culturel algérien. Une des traces manifeste de cette influence et de ce chamboulement dans la sphère sociale est celle du rapport que les Algériens ont pour l'ancienne devise française : l'ancien franc, en vigueur jusqu'à 1960 (pour rappel, 1 nouveau franc = 100 anciens francs, le nouveau franc étant celui qui a précédé l'euro, c'est-à-dire en vigueur jusqu'à 2002). En effet, toutes leurs transactions quotidiennes sont prononcées (oralement) en anciens francs qui pourtant n'existent plus tout en manipulant la devise actuelle, le dinar algérien. Un véritable décalage « mental » entre le réel et le souvenir ! Par exemple, vingt dinars algériens (20 D.A.) se prononce deux mille francs ou deux mille tout simplement, et s'écrit 2 000. Certes 1 D.A. = 100 centimes, cependant il est question de 'franc' et non de 'centimes'. En effet, pour 10 Dinars, les Algériens disent « alf frenk » (traduction : mille francs) ; pour 5 dinars « khams m'yet frenk » (traduction : cinq cent francs). Au-delà de 20 Dinars, le terme 'franc' est sous-entendu.

Aucun commerçant ne vous dira que le total de vos courses est de 300 dinars, mais vous dira plutôt, ça vous fait 30 000. Cette double « notion » a engendré des difficultés non négligeables en particulier auprès des banques. Nous illustrons nos propos par les exemples suivants (Cf. figure 1 ci-dessous, figures A et B en annexe).

Nous n'avons pas de statistique sur l'impact de ce « va et vient » entre la notion et/ou la terminologie et la prononciation de cette devise à la fois à l'école et dans la société.

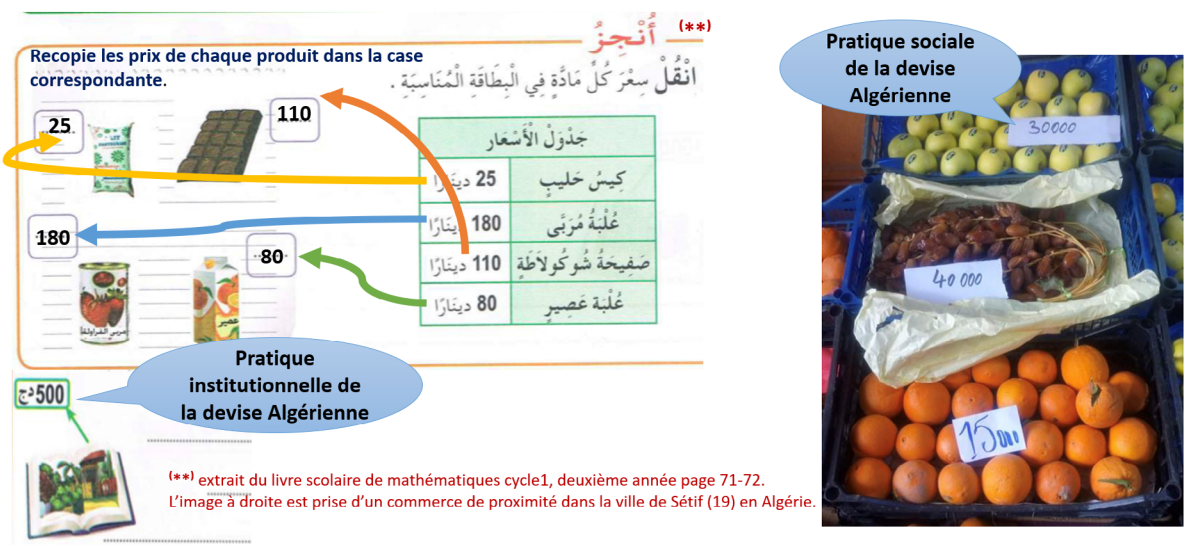


Figure 1 – Pratiques institutionnelles et sociales de la devise algérienne

Il serait très intéressant de regarder de près pour savoir/comprendre quels sont les moyens cognitifs mis en place par les apprenants pour gérer le passage d'une pratique à l'autre sachant que cette problématique n'est pas prise en charge par l'enseignant et non mentionnée dans le manuel scolaire officiel en vigueur.

Synthèse et perspectives

Les présentations ci-dessus montrent bien comment des catégorisations qui sembleraient être généralisées ne sont en fait que conditionnées par des cultures, des structures sociales et des structures linguistiques (dont les procédures de verbalisation en sont des exemples). La manutention de la diversité linguistique peut être le garant d'une pluralité de visions du monde et en particulier de la manutention des façons de compter et de la numération.

La reconnaissance de ces différents aspects dans les domaines des mathématiques est un point de départ pour le succès des apprentissages, qui se font dans des systèmes scolaires de plus en plus complexes, multiculturels et multilingues. Le fait que dans chacune des langues ci-dessus citées (comme dans beaucoup d'autres) les entités mathématiques écrites par des chiffres (presque universels) se verbalisent sous différents systèmes a bien montré l'impérieux besoin de recherche conjointe entre les mathématiques et les langues.

Ce texte n'est que le début de cette recherche qui veut répondre à la question : quelles spécificités du comptage dans nos langues ? En quoi ces spécificités constituent-elles, d'un point de vue didactique, des obstacles ou des facilitateurs de l'apprentissage de la numération ? Ces aspects seraient sûrement à analyser dans les réflexions futures. Un exemple qui nous semble porteur consisterait à élargir les réflexions sur les numérations dans d'autres langues, afin d'en faire un ouvrage tout en analysant les convergences, les divergences, en termes de bases (base dix, base cinq, base six…), de terminologies, avec l'objectif de les mettre au service des enseignants.

Références

Conceição, M. C. (2016). Terminologies et politiques linguistiques : Déclaration de Milan 2012. In M.T. Zanola, M. C. Conceição & P. Guasco (Éds), *Terminologie e politiche linguistiche* (p.155). Milano : EDUCatt - Ente per il Diritto allo Studio Universitario dell'Università Cattolica.

Dorier, J.-L. (2021). *S'il te plait, compte-moi les moutons !* Carnets des sciences de l'éducation. Genève : Université de Genève.

Duval, R. (1988). Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 1*, 7–25. Strasbourg : IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Hagège, C. (2000). *Halte à la mort des langues*. Paris : Éditions Odile Jacob.

Katz, V. (1998). *A history of mathematics. An introduction*. Boston, MA : Addison-Wesley.

Mesquita, A., Conceição, M. C, Acher-Spitalier, S., Coulibaly-Togora, H., Fumo, P., Patronis, T., & Pavlopoulou, K. (à paraître). Les mathématiques sont aussi des faits de langue(s). Comment comptons-nous dans nos langues ? Communication acceptée, ADIMA3, 2022.

Moukanos. D. (1979). *La manière d'être des objets mathématiques selon Platon et Aristote*. (Thèse de doctorat, en grec).

Office National des Publications Scolaires (ONPS, 2016) *Manuel de Mathématiques*. Alger : Ministère de l'Éducation Nationale.

Annexes

À PROPOS DES THÉMATIQUES DE TRAVAIL DE NOTRE GROUPE DE RÉFLEXION

Un but important visé par les auteurs est lié à une réflexion sur la question de terminologies appropriées dans le domaine de la numération. C'est dans ce sens que la Déclaration de Milan, rédigée par Conceição (2012), a été approuvée en assemblée de linguistes, dans leur XIV[e] Assemblée générale de leur association professionnelle. Dans cette Déclaration, on encourage la promotion de la diversité linguistique dans tous les domaines et on prône la nécessité de création terminologique dans toutes les langues. Ce travail est nécessairement interdisciplinaire, entre linguistes (dans notre cas : du CIAC, Centro de Investigação em Artes e Comunicação / Centre de Recherche en Arts et en Communication de l'Université d'Algarve, et de l'Université pédagogique de Maputo) et didacticiens des mathématiques ou mathématiciens, issus de groupes de recherche en Grèce (Université Nationale de Technologie d'Athènes et Université de Patras) et de groupes de travail comme GREMA (Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques en Afrique) de l'IREM de Paris Cité, ou de la Commission Internationale InterIREM.

À PROPOS DE LA DEVISE ALGÉRIENNE

Exemple 1 :

Quantité	Devise algérienne et pratique à l'école		Devise algérienne et pratique sociale		
1 dinar 	دينار	واحد	فرنك		منة
	dinar	wahad	frenck		m'yat
	(*) ←	←	←		←
	Dinar	un	Francs		cent
5 dinars 	دنانير	خمسة	فرنك	منة	خمس
	dananir	khamsatou	frenck	m'yat	kham's
	←	←	←	←	←
	Dinars	cinq	Francs	cent	cinq
10 dinars 	دنانير	عشرة	فرنك		ألف
	dananir	achratou	frenck		alf
	←	←	←		←
	Dinars	dix	Francs		mille

(*) La flèche indique le sens de l'écriture.

Figure A – Différentes désignations de la devise algérienne, à l'école et dans la société

Exemple 2 : Annonces de prix, en deux étals de maraîchers - l'un (Étal 1) vient d'un commerce de proximité, l'autre (Étal 2) est extrait du livre scolaire cycle 1 première année intitulé : "Les mathématiques dans notre vie de tous les jours" (ONPS, 2016, p. 91, traduction littérale) mettant en lumière la devise algérienne en problématisant la situation : "Combien donne la dame pour l'achat d'un kilogramme de tomates ? …. dinars".



Étal 1 : prix en anciens francs



Étal 2 : prix en dinars

(Traduction de l'arabe : Combien donne la dame pour l'achat d'un kilogramme de tomates ? …. dinars)

Figure B – Comparaison d'annonces de prix

Titre: Bilan du Groupe de travail 4 – Dimensions historique, culturelle et langagière dans l'enseignement des mathématiques responsables

Auteur: BARWELL Richard

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 425 - 431

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Bilan du Groupe de travail nº 4

Dimensions historique, culturelle et langagière dans l'enseignement des mathématiques responsables

BARWELL[1] Richard
Correspondant CS
KOUKI[2] Rahim

GT4 - Dimensions historique, culturelle et langagière dans l'enseignement des mathématiques

Participation

Le travail du GT4 portait sur les dimensions historique, culturelle et langagière dans l'enseignement des mathématiques. Le groupe est issu d'une fusion de deux groupes tenus pendant les colloques de l'EMF du passé. Huit personnes se sont réunies afin de discuter de trois textes. Ont été soumis d'autres textes, mais les auteur.es n'étaient pas en mesure de venir. Les membres du groupe ont représenté quatre pays :

- Le Mali : Hawa Coulibaly, Ousmane Alpha
- Le Sénégal : Elhadj Dia, Lam Ndiaye
- Le Canada : Richard, David
- La France : Hombeline Languereau, Anne Cortella

De plus, Jean Jacques Salone de la Maillote a participé à deux séances du groupe.

Compte rendu

Le texte de cadrage dessinait quelques notions pour orienter les soumissions :

> Il est notamment rappelé que l'activité mathématique est de manière fondamentale une activité humaine. Dans ce sens, elle n'est pas figée ni absolue, mais « évolue en interaction avec

1. Faculté d'éducation, Université d'Ottawa, Canada
2. Université de Tunis El Manar, Tunisie

> le contexte scientifique et culturel et elle est donc localement et temporellement située ». Les dimensions historique, culturelle et langagière participent de ses variations et de ses évolutions à travers le temps et l'espace et jouent nécessairement un rôle dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, ainsi que dans la formation des enseignants.
>
> Les mathématiques et les processus de diffusion des savoirs mathématiques ne sont pas historiquement, culturellement, langagièrement ou discursivement neutres. Il incombe que toute analyse ou théorisation de l'enseignement ou la didactique des mathématiques doit prendre en considération l'influence de ces différentes dimensions. Nous prenons comme acquis que ces dimensions soient toujours multiples et en constante évolution.

Les trois textes avaient comme fils conducteurs des questions d'ordre linguistique, de justice sociale et dialogique, avec une attention pour les dimensions diachroniques et synchroniques.

Le premier texte intitulé « Comment comptons-nous dans nos langues ? Des particularités de la numération en certaines langues » furent présentées par Hawa Coulibaly comme représentante d'une grande équipe internationale (Ana Mesquita, Manuel Célio Conceição, Safia Acher-Spitalier, Hawa Coulibaly épouse Togora, Paulino Fumo, Tasos Patronis et Kallia Pavlopoulou). Elle a partagé les analyses des systèmes de numérotation dans plusieurs langues, allant du grec ancien aux langues de nos jours, souvent mélangées dans des milieux plurilingues. Nous étions particulièrement interpellés par l'historique de la langue Bamanankan du Mali et les origines de nombres dans, entre autres, les enfants nés au sein d'une famille, ainsi que l'exemple des pratiques monétaires très divergentes en Algérie au milieu scolaire et dans le marché.

Le texte intitulé « Enjeux sociaux et politiques de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques : réflexions sur la conception et la mise en action d'une perspective dialogique en recherche » par Richard Barwell, David Guillemette et Yasmine Abtahi, présenté par les deux premiers auteurs, ouvrait des questions méthodologiques en lien avec les recherches sur des enjeux sociopolitiques en didactique des mathématiques, et ce d'une perspective dialogique. Nous avons discuté des enjeux comme le manque de personnel enseignant qualifié, le rôle des écoles privées dans nos différents pays, et les effets d'exclusion engendrés par des programmes d'études en mathématiques qui reflètent une perspective d'élite ou de la classe favorisée dans la société, ce qui exclut les perspectives des élèves provenant des classes moins favorisées. Ils ont noté que ces enjeux soulèvent des questions d'altérités multiples dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et dans les politiques qui y sont rattachées. Ces exclusions sont à l'origine du besoin d'une approche dialogique et du défi d'organiser les projets de recherche si, au fond, le chercheur ne peut jamais tout à fait comprendre ni le contexte ni le vécu d'autrui. Ils ont alors présenté en résumé deux tentatives de conception de projet pour répondre à ce défi.

Pour le troisième texte intitulé «L'impact de la numération orale en bamanankan (bambara) sur l'addition à l'institut d'éducation populaire (iep) de kati » par Hawa Coulibaly épouse Togora et Saddo Ag Almouloud, Hawa Coulibaly a présenté son projet d'expérimentation des interventions pour vérifier l'impact de la numération en bamanankan sur les résultats de l'apprentissage de l'addition chez les élèves de l'élémentaire. La numération dans cette langue a une structure autre que celle de la langue française qui est à la fois additive et multiplicative. Le projet cherchait à faire valoir cette structure dans l'enseignement des mathématiques pour faciliter l'apprentissage de l'addition chez les élèves. Selon les résultats de l'expérience, l'intégration de cette structure a eu un impact positif sur le taux de réussite.

De plus, dans un exposé ad hoc Hombeline Languereau a présenté la ressource « Publimath » dont elle a la responsabilité avec Michèle Bechler (APMEP, régionale de Lorraine). Cette base de ressources pour l'enseignement des mathématiques offerte sous les augées du réseau des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) de la France et de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP) propose un accès à des milliers d'articles, de textes, de résumé de livres, etc. dont la thématique est d'une pertinence pour l'enseignement des mathématiques, et ce dans un seul site : https://publimath.univ-irem.fr/

En ont suivi une discussion et un débat de la meilleure façon de répondre au plurilinguisme présent dans la majorité des écoles de nos pays respectifs. Est-ce qu'on emprunte des termes d'autres langues ? Est-ce qu'on emprunte des mots d'une langue colonisatrice ? Comment gérer l'écart entre le langage du quotidien des élèves et le registre formel des mathématiques classiques ? Nous avons dit « classique », car nous avons reconnu autres mathématiques, telles que la notion d'un « cent variable » dans le contexte malien.

Nos discussions nous ont amenés à peut-être deux conclusions de synthèse. Premièrement, nos échanges nous ont montré l'importance d'une perspective dialogique, car, au sein de nos propres échanges, nous voyions à quel point il est difficile de saisir la perspective d'autrui, étant donné les dimensions synchroniques et diachroniques de chacune. Parfois, même, les notions tacites sous-jacentes de nos questions ne passaient pas. Nous nous sommes rendu compte que notre compréhension d'une notion donnée sur le plan individuel dépendait des affinités et orientations provenant du milieu culturel, linguistique et historique de chacune et chacun. Lors de nos échanges en nous mettant en relation nous vivions les défis dialogiques que nous abordions dans nos textes. Deuxièmement, nous sommes venus à un consensus provisoire qu'il n'existe pas de solution générale et uniforme au défi du plurilinguisme (défi didactique, bien sûr, car le plurilinguisme est une richesse). Selon notre consensus, nous devons plutôt chercher des solutions qui sont locales et situées, en travaillant avec les dialogues entre langues, pratiques, types de mathématiques, didactiques, etc. tout en veillant sur l'impact des stratégies adoptées qui pourront engendrer des effets pervers et même néfastes, comme des exclusions ou le renforcement des inégalités sociales. Enfin il faut se méfier même de cette position pour qu'elle ne soit pas figée, sans critique réflexive.

Témoignages

Des participants nous proposent leur témoignage personnel.

David Guillemette écrit : Le GT4 a réuni des chercheurs et éducateurs souhaitant échanger et développer leurs observations, réflexions et sensibilités autour, je pense, de certaines formes de diversités dans l'enseignement des mathématiques. Cette diversité peut être de nature épistémologique, culturelle ou langagière par exemple. Mon impression est que les participants souhaitaient rendre compte des manières d'accueillir cette diversité dans différents contextes éducatifs, de mettre en évidence (parfois de confronter) les pratiques actuelles ou usuelles dans l'enseignement des mathématiques au regard de cette diversité, de raffiner la réflexion sur la nature même des mathématiques à travers l'histoire et les cultures ou encore de mettre en évidence les aspects sociaux et politiques de l'enseignement des mathématiques. Plus précisément, plusieurs exemples concrets et précis de pratiques mathématiques qui illustrent cette diversité ont été présentés. Je pense aux différentes manières de nommer, de représenter ou de manipuler les nombres, voire de les fréquenter, au sein de différents groupes linguistiques comme l'arabe, le bamanankan, le français, le grec, le portugais ou le ronga.

J'ai été impressionné par des rencontres concrètes et crues avec cette diversité vivante, ainsi qu'avec les problèmes qu'elle porte parfois pour les acteurs des milieux de l'éducation (de la simple conciliation, à l'adaptation, jusqu'à l'aliénation et le déracinement). Tout compte fait, il s'agit de savoir si cette diversité est en elle-même problématique. En effet, à la suite de nos discussions, je suis maintenant fortement habité par l'idée que cette diversité n'est, d'une certaine manière, pas un problème en soi, mais qu'elle fasse partie intégrante de la vie sociale et culturelle et qu'elle doive être accueillie et préservée. Pointent alors des aspects politiques, dans le sens où des formes d'homogénéisation se doublent de formes de gouvernementalités qui menacent cette diversité. Enfin, il ne s'agit pas d'être pour ou contre, mais de possiblement mettre en évidence l'idée d'une éducation mathématique davantage éthique, c'est-à-dire une éducation mathématique ou l'expérience de l'autre et la réflexion sur l'autrui est centrale.

Hawa Coulibaly écrit : À la suite d'échanges fructueux, nous avons retenu en substance les observations suivantes :

- les nombres grecs (les nombres triangulaires, les nombres pentagones), n'étant pas applicables à tous les nombres, semblent être compliqués pour leur compréhension selon certains membres du groupe, et pour d'autres, ils sont les œuvres de savants et ne sont pas les représentations ou les perceptions des nombres. Des clarifications sur ces points sembleraient nécessaires ;

- la question du cadre dans lequel, le travail peut être classé n'a pas eu de réponse satisfaisante.

Certains participants ont fait des propositions de l'ethnomathématique et de l'anthropologie qui n'ont pas fait d'unanimité.

Le travail a été apprécié dans l'ensemble avec une impression positive du fait que les nombres représentent des objets dans certains des cas et des personnes dans d'autres cas. Ces aspects culturels sont à approfondir dans les réflexions futures. Il a été proposé de solliciter les numérations dans d'autres langues afin d'en faire un livre tout en analysant les convergences, en termes de bases (bases dix, bases 5, ou 6…), de terminologies et les divergences, dans l'objectif de les mettre au service des enseignants.

Mot de la fin

En conclusion, nos discussions furent riches, dynamiques et respectaient un esprit de dialogue. Nous sommes venus à la conclusion, dans le même sens de la Discussion programmée sur le thématique du plurilinguisme en mathématiques, qu'il serait important d'assurer une plus grande place aux questions linguistiques – et surtout plurilinguistiques – aux programmes des colloques au futur.

Je tiens à remercier les participants du groupe de leur aimable participation. Je reconnais la contribution de Djamil Aissani et Aurélie Chenais dans l'organisation du GT4 à titre de coresponsables et qui malheureusement n'ont pas été en mesure d'assister au colloque à Coutonou.

Annexe

BARWELL, R., GUILLEMETTE, D., ABTAHI, A. *Enjeux sociaux et politiques de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques : réflexions sur la conception et la mise en action d'une perspective dialogique en recherche*.

COULIBALY Épouse TOGORA, H., ALMOULOUD, S. A. *L'impact de la numération orale en bamanankan (bambara) sur l'addition à l'institut d'éducation populaire (iep) de kati*.

MESQUITA, A., CONCEIÇÃO, M. C., ACHER-SPITALIER, S., COULIBALY ÉPOUSE TOGORA, H., FUMO, P., PATRONIS, T., PAVLOPOULOU, K. *Comment comptons-nous dans nos langues ? Des particularités de la numération en certaines langues*.

Titre: Analyse des erreurs des élèves de la Seconde C à propos des outils mathématiques en physique

Auteur: AKOUA DAHOUESSA Assiba Thérèse

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 432 - 445

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Analyse des erreurs des élèves de la Seconde C à propos des outils mathématiques en physique

AKOUA DAHOUESSA[1] Assiba Thérèse

Résumé – L'enseignement de la physique décrit les phénomènes naturels par la modélisation. Notre étude s'intéresse à la mise en œuvre des savoirs d'ordre mathématique en tant qu'outils de modélisation dans l'apprentissage de la physique en classe de la seconde C. Les données ont été recueillies à l'aide d'une grille d'analyse de la consigne d'une évaluation et des productions des apprenants. Les résultats montrent que les erreurs commises par les apprenants sont liées à la modélisation mathématique des concepts de la physique.

Mots-clefs : erreur, évaluation, modélisation, aides didactiques, outils mathématiques

Abstract – Physics education describes natural phenomena through modelling. Our study focuses on the implementation of mathematical knowledge as modelling tools in the learning of physics in the second C class. The data was collected using a grid analysis of the instructions for an assessment and the productions of the learners. The results show that the errors made by the learners are related to the mathematical modelling of the concepts of physics.

Keywords: error, evaluation, modelling, teaching aids, mathematical tools.

1. Laboratoire de Recherche en Didactique LAREDI-ENS, Côte d'Ivoire, glitherapp@yahoo.fr

Introduction

Dans son évolution le système éducatif ivoirien a adopté l'Approche Par les Compétences (APC) en 2002. Dans l'adaptation des curricula, les progressions officielles ont connu des changements ; les espaces nommés « semaines tampons » ont été dans un premier temps transformés en « séances de régulation » et par la suite « remédiation ». Cet activité didactique est placée après les évaluations ou couplée avec celles-ci afin d'amener chaque apprenant à la réussite. Cependant en tant qu'enseignant nous avons été interpellés par la désaffection de la physique chez les élèves suite aux évaluations portant sur les moments d'une force. En effet la construction des savoirs liés à cette séquence nécessite la représentation dans le plan des phénomènes naturels de l'espace à trois dimensions. Cela paraît complexe et pas toujours perceptible même par l'enseignant pour une bonne transposition didactique. Confrontés à des difficultés liées à la modélisation faisant appel au langage mathématique, les apprenants considèrent la physique comme une discipline difficile à comprendre. À l›issue de cette classe, certains élèves devant le choix d'une orientation scolaire n'envisagent pas poursuivre dans les filières scientifiques. Cet article se propose d'analyser les erreurs des élèves liées aux savoirs mathématiques en tant qu'outil privilégié de modélisation des situations de la vie quotidienne dans l'enseignement de la physique. Notre objectif principal est d'analyser l'impact de la modélisation mathématique sur les productions des élèves dans le cas de la détermination des moments d'une force en classe de seconde C. Comme objectifs spécifiques nous voulons examiner les consignes d'une épreuve d'évaluation et les productions des apprenants soumis à cette évaluation en vue de nous pencher sur la question délicate du rapport entre le concret et l'abstrait (Martinand, 2010). Comme hypothèse, nous postulons que la plupart les erreurs des apprenants provient de la modélisation mathématique des concepts de la physique.

Cadre conceptuel

Les conceptions socioconstructivistes de l'erreur

Les socioconstructivistes soutiennent que l'apprentissage passe obligatoirement par des phases de difficultés face auxquelles les élèves doivent remplacer leurs anciennes conceptions erronées par de nouvelles connaissances. Bachelard (1938) précise que la connaissance scientifique ne peut se construire qu'après avoir surmonté un certain nombre d'obstacles épistémologiques. Brousseau (1983) définit le concept d'obstacle didactique comme une représentation de la tâche, induite par un apprentissage antérieur, cause d'erreurs systématiques et faisant obstacle à l'apprentissage actuel. Quant à Roditi (2005), il désigne par erreur toute réponse qui n'est pas conforme à celle qui est manifestement attendue en fonction de la tâche.

Astolfi (2009) qualifiant l'erreur d'outil pour enseigner identifie huit types de causes d'erreurs. Cet auteur précise que l'erreur prend la dimension d'indicateur d'analyse du niveau d'apprentissage des

élèves, de repérage de leurs difficultés et pourrait servir à l'enseignement, à partir de l'instant où elle serait traitée en classe.

Les erreurs relevant de la compréhension des consignes	Les erreurs portant sur les démarches adoptées
Les erreurs résultant d'habitudes scolaires	Les erreurs liées à une charge cognitive trop importante
Les erreurs témoignant de conceptions ou représentations	Les erreurs ayant leur origine dans une autre discipline
Les erreurs liées aux opérations intellectuelles impliquées	Les erreurs causées par la complexité du contenu

Typologie d'erreur selon Astolfi (2009)

À la suite de ces différentes acceptions de l'erreur, nous nous intéressons à l'évaluation dans le sens des aides didactiques.

De la fonction formative de l'évaluation à sa fonction certificative

Selon Hadji (2015) l'évaluation est un outil formidable de formation et une aide précieuse face aux apprentissages. Selon l'auteur, l'évaluation recouvre d'une part l'action de calculer, de mesurer ; à savoir associer des symboles à des objets, à des événements ou à des productions des personnes selon des règles précises. Soutenant cette conception de l'évaluation prise comme une aide didactique, nous recenserons certaines acceptions de l'évaluation au cœur du processus enseignement-apprentissage pour en déterminer les principales formes. Pour De Vecchi (2014), évaluer c'est faire apparaitre de la valeur, c'est valoriser. Selon Nebout Arkhurst (2017), l'évaluation apparait comme une démarche d'observation et d'interprétation des effets de l'enseignement, visant à guider les décisions nécessaires au bon fonctionnement de l'école. Toute évaluation se construit avec l'idée de sa fonction et la phase d'intervention au cœur du processus d'enseignement-apprentissage. Sur la base de ces deux paramètres, trois sortes d'évaluations sont distinguées: l'évaluation diagnostique, l'évaluation formative et l'évaluation sommative à fonction certificative. Courtillot et Ruffenach (2004) décrivent l'évaluation dans un processus d'enseignement rythmé par des actions correctives et des actions de progrès dans une démarche d'amélioration continue qu'ils nomment démarche de performance. Dans une logique de résultat, la démarche de performance propose de fixer un objectif (la réussite pour tous les élèves) et des indicateurs pour vérifier le succès de l'objectif. L'adoption de cette démarche de performance dans le processus enseignement-apprentissage présente quatre phases : la planification, l'enseignement (mise en œuvre de la planification), l'évaluation (comparer les résultats aux objectifs avec les indicateurs), et enfin la remédiation. Ces auteurs soutiennent qu'une évaluation sommative ne peut se limiter à une simple constatation du niveau des acquis des élèves. Elle doit être aussi à la base d'une démarche de remédiation et d'amélioration de la production de l'élève. L'évaluation des acquis scolaires dans ce cadre met l'accent sur la mesure du décalage entre les objectifs fixés avant l'enseignement et les performances atteintes après l'enseignement. Le pilotage de l'enseignant

consiste à adopter des stratégies pédagogiques et didactiques qui permettent aux élèves de mieux construire leurs connaissances. L'évaluation sommative sanctionnée par une note doit être l'aboutissement du processus enseignement-apprentissage dont la cohérence nécessite une culture de régulation basée sur une logique de résultat. L'objectif de l'évaluation sommative certificative est de permettre aux enseignants d'apporter un regard professionnel sur la pertinence du choix de l'orientation scolaire des apprenants. De cette logique de performance nous pouvons représenter le passage de l'évaluation de sa fonction formative à la fonction certificative par le schéma ci-après.

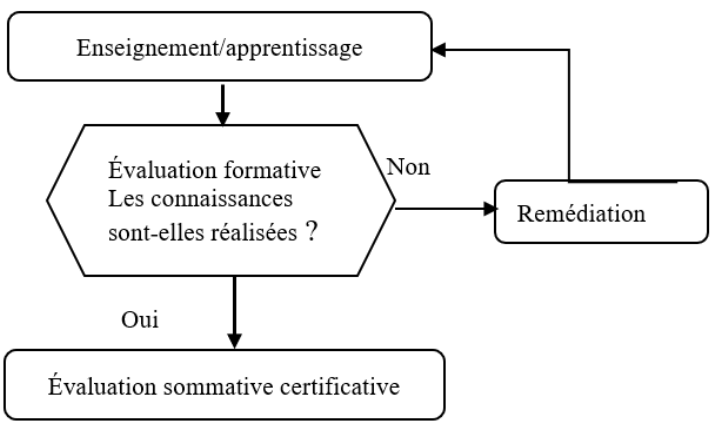


Figure 1 : Schéma didactique de réalisation d'une évaluation sommative (Source : notre étude 2022)

La consigne scolaire, outil d'évaluation

Pour Zakhartchouk (1999) la consigne, injonction donnée aux élèves pour effectuer une tâche s'appuie sur un énoncé où les données nécessaires pour effectuer la tâche sont parfois implicites, d'où la nécessité d'un décodage. Il précise que ces données implicites correspondent au contrat didactique qui admet certaines conditions. La tâche est-elle réalisable ? Les élèves ont-ils les « outils » nécessaires, le temps suffisant pour exécuter la consigne ? Les conditions de réalisation de la tâche et le degré d'exigence sont-ils précisés ou implicites ? Tout se joue dans le « face à face » solitaire de l'apprenant et de la consigne, note Zakhartchouk (1996). Ce qu'elle représente pour lui, le sens qu'elle lui donne et qui ne correspond pas forcément aux intentions de l'enseignant. Il est nécessaire de nous interroger davantage sur ce qui peut constituer des difficultés à la compréhension des consignes. L'élève est appelé à décoder le sens exact du message, c'est-à-dire décrypter les attentes de l'enseignant, identifier la tâche à effectuer et la ou les opération(s) intellectuelle(s) nécessaire(s) à sa réalisation. Il arrive que des élèves se retrouvent démunis et bloqués face à une consigne. Cela peut entraîner un stress qui peut faire perdre du temps aux élèves, voire les paralyser. Quant à Nebout Arkhurst (2017), elle

atteste que la notion de consigne doit dépasser le sens de technique pédagogique pour privilégier un rôle fonctionnel d'indicateur de stratégies didactiques. L'auteure souligne la nécessité d'inscrire la consigne comme un élément déterminant dans la gestion du contrat didactique. Pour Mettoudi et Yaïche (1996) les consignes complexes contenant, dans une seule phrase, plusieurs tâches scolaires peuvent empiéter sur le temps de leur réalisation et la rendre difficile.

La modélisation mathématique dans l'enseignement de la physique

Tiberghien et Vince (2011) décrivent l'activité de modélisation en physique comme la mise en relation entre deux « mondes » différents : le monde des objets, des évènements du champ expérimental des objets et le monde des théories et des modèles. Morge et Doly (2013) attestent que les sciences physiques visant l'intelligibilité de la nature ont recours, à côté des théories et des lois, à la modélisation. Pour Gaidioz et Tiberghien (2003), l'une des caractéristiques essentielles de la physique est de proposer des théories et des modèles qui permettent d'analyser ou d'interpréter des situations matérielles qui constituent leur champ de validité; dans certains cas ces modèles permettent aussi de faire des prévisions de certains événements. Duval (1993) relève l'existence de facettes procédurales associées à la modélisation en physique. Hestenes (2010), didacticien de la physique, soutient que les modèles dans l'enseignement de la physique s'articulent autour d'une double structure. Une structure physique, qui fait référence à une intuition physique et relevant des objets et des évènements du monde réel et une structure mathématique, qui fait référence à une intuition mathématique et relevant des représentations symboliques. La modélisation de la force par le vecteur a été illustrée par Ernst Mach (1904) en mécanique, quand il dégage les attributs essentiels de cette grandeur physique. Aussi, Ba (2007) a montré dans sa thèse que l'introduction du vecteur pour modéliser les grandeurs physiques sujet à nombreux débats rentre toujours en concurrence avec les aspects expérimentaux notamment son usage dans l'enseignement de la physique pour modéliser les forces. L'auteur précise que les programmes de la physique en classe de seconde C contiennent plusieurs objets d'enseignement faisant recours à la représentation vectorielle des forces. Dans cette veine, la construction des savoirs du concept des moments d'une force passe par une modélisation analytique et géométrique des forces à l'aide des vecteurs pour établir une relation entre les grandeurs physiques. Cela nécessite une mobilisation des savoirs de la géométrie des curricula des mathématiques du premier cycle et du chapitre sur les droites et plans de l'espace du programme de la seconde C. Par ailleurs, le chapitre sur « les droites et plans de l'espace » du programme ivoirien des mathématiques en seconde C est planifié de la quatrième semaine du mois de novembre aux deux première semaines de décembre et celui de la physique planifie le chapitre sur « équilibre d'un solide mobile autour d'un axe fixe » aux deux premières semaines de décembre, c'est-à-dire pratiquement à la même période. Ce qui nécessite une vigilance didactique au regard de la modélisation mathématique dans l'enseignement de la physique. Bachelard (1979) précise que si le modèle permet de décrire et d'interpréter le monde matériel à l'aide d'éléments théoriques, il ne peut pas décrire toutes les propriétés du réel. En se référant au livre officiel « mon cahier d'habilités » 2nde C, nous constatons que dans les énoncés des exercices sur les moments d'une force, tout comme dans les exercices rencontrés dans les autres

ouvrages, le symbolisme de l'axe (Δ) de rotation du système, reconnu comme une droite, le matérialise par un point ou un rond. Cet axe de rotation (Δ) invisible sur la représentation est désigné par une droite passant par un seul point visible. Pourtant l'élève a appris en mathématiques que par un point il passe une infinité de droites. Ainsi présentée, la modélisation spatiale adoptée de l'axe de rotation n'est pas toujours perceptible par les élèves. Comme l'écrit Martinand (2010), pour ceux que préoccupe l'éducation scientifique des jeunes, la question des rapports entre concret et abstrait ou encore l'articulation entre expérimental et théorique, nécessite un intérêt particulier. Nous voulons nous pencher dans ce travail sur la question ci-après: comment faciliter la mobilisation des outils mathématiques dans l'apprentissage des moments d'une force en classe de seconde C?

Méthodologie de la recherche

Le terrain est constitué du Lycée Moderne 1 de Daloa avec une population des élèves de la 2nde C1 de l'année scolaire 2022/2023. L'échantillon issu de cette population se compose de 37 élèves qui ont déjà participé à la séance du cours sur « l'équilibre d'un solide mobile autour d'un axe fixe » et ont été évalués sur cette séquence. Notre instrument de recherche est constitué d'une grille d'analyse des productions des élèves, selon la théorie des erreurs de Roditi (2005) et la typologie des erreurs d'Astolfi (2009). Nous avons analysé dans un premier temps la consigne de l'évaluation en question (cf. annexe) sur « l'équilibre d'un solide mobile autour d'un axe fixe » et ensuite analysé les productions des élèves.

Résultats

Analyse de la consigne d'évaluation

L'épreuve proposée aux apprenants comporte deux exercices. Le premier est une partie de vérification des connaissances déclaratives notée sur 7 points. Le deuxième est constitué d'une situation d'évaluation notée sur 13 points.

La résolution du deuxième nécessite des connaissances procédurales associant la modélisation géométrique et analytique (cf. annexe). Selon le corrigé, l'élève doit dans un premier temps faire une modélisation géométrique des forces, $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ et $\mathbf{R}$ par des vecteurs et déterminer leurs coordonnées dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Ensuite par une modélisation analytique, il est amené à exprimer le moment de chacune des forces appliquées au pied-de-biche suivant un sens positif choisi. Le moment est positif quand la force tend à faire tourner le solide dans le sens choisi; il est négatif dans le cas contraire. Et la mise en équation des expressions des différents moments lui permettra de trouver la valeur $\mathbf{F}_A$ de la force $\mathbf{F}_A$. Aussi l'élève a recours à l'expression mathématique des coordonnées de la somme de deux vecteurs ainsi que celle de sa valeur à partir de ses coordonnées pour la détermination de la valeur $\mathbf{R}$ de la force $\mathbf{R}$. La deuxième partie de l'épreuve repose essentiellement sur la représentation

des forces par des vecteurs et la mise en œuvre des savoirs et savoir-faire mathématiques relatifs aux grandeurs vectorielles. Aussi, l'exécution de certaines consignes requiert la réalisation de plusieurs tâches successives. Selon Mettoudi et Yaïche (1996) une consigne qui contient dans une seule phrase, plusieurs sous-consignes est complexe. Nebout Arkhurst (2017) souligne que la consigne « fermée » est celle qui précise à l'apprenant une directive dans l'exécution de la tâche. Elle sert à l'accompagner et lui permettre de mieux exploiter ses acquis.

Analyse du corrigé de l'évaluation

Objet d'enseignement : équilibre d'un solide mobile autour d'un axe fixe				
Parties de l'épreuve	**Types de connaissances**	**Tâches**	**Résultats attendus**	**Points**
Exercice 1	Savoirs déclaratifs	Reconnaître et identifier les savoirs théoriques liés au contenu d'enseignement sur l'équilibre d'un solide mobile autour d'un axe fixe.		07
Exercice 2	Savoirs déclaratifs	Rappeler les conditions d'équilibre d'un solide mobile autour d'un axe fixe dans un contexte	$\sum \mathcal{M}\Delta(Fext) = 0$	13
			$\sum (Fext) = 0$	
	Savoirs conditionnels	Traduire les conditions d'équilibre d'un solide mobile autour d'un axe fixe dans un contexte nouveau.	$M\Delta (FA) + M\Delta (R) + M\Delta (FB) = 0$	
			$FA + R + FB = 0$	
		Traduire la condition de l'effet de rotation d'une force ; une force est sans effet lorsque sa droite d'action rencontre l'axe de rotation	$M\Delta (R) = 0$	
	Savoirs procéduraux	Cibler et représenter chaque force agissant sur le pied-de biche par un vecteur (aspect symbolique de la modélisation)	FA ; R ; FB	
		Représentation géométrique de chaque force par un vecteur dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$	point d'application, direction et sens corrects de chaque force.	
		Exprimer les coordonnées des vecteurs forces dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$	$FA\ (0, -FA)$; $FB\ (FB ; 0)$; $R(x,y)$;	
		Appliquer les conditions d'équilibre d'un solide mobile autour d'un axe fixe dans un contexte nouveau et la condition de l'effet de rotation d'une force	$M\Delta (FA) + M\Delta (FB) = 0$	
		Identifier le bras de levier et établir l'expression du moment des forces FA et FB	$-FA.OA + FB.OB = 0$	
		Déduire l'expression et calculer la valeur de la force FA	$FA = FB.OB / OA$	
		Appliquer la condition d'équilibre du principe d'inertie	$FA + R + FB = 0$	
		Mobiliser et Appliquer les savoirs mathématiques de calcul des coordonnées de la somme de deux vecteurs et sa norme.	$R = -(FA + FB)$	
Total				20

Tableau 1 : Fiche d'analyse du corrigé de l'évaluation (Source : notre étude 2022)

	Effectif (Ni) des élèves ayant des notes appartenant aux classes ci-après					Total (Ni)
Classe de notes	] 0-3.5 [	[3.5- 6.5 [	[6.5- 8[	[8 - 10[	[10 - 12[	
1ère partie sur 7 points	05	18	14	00	00	37
2ème partie sur 13 points	35	02	00	00	00	37
Note totale sur 20	01	10	14	5	7	37

Tableau 2 : Notes de l'évaluation

De ce tableau nous relevons que :

- Au niveau de l'exercice 1, 32 élèves sur 37 ont obtenu au moins 3.5/7, soit la moitié des points réservés à cet exercice de vérification des connaissances déclaratives. Et 14 sur 37 élèves ont obtenu au moins 6.5/7, pratiquement la totalité des points de l'exercice correspondant à la mémorisation, la restitution des savoirs théoriques liés au concept des moments.

- Quant à l'exercice 2, aucun élève sur les 37 n'a obtenu au moins 6.5/13 correspondant à la moitié des points réservés à cet exercice nécessitant la mise en œuvre des connaissances procédurales associant la modélisation par la mobilisation et l'intégration des savoirs et savoir-faire géométriques des vecteurs. Uniquement 02 sur 37 élèves ont obtenu au moins 3.5/13 et la grande majorité 35 sur 37 élèves ont obtenu une note inférieure à 3.5/13.

Interprétation et discussion

Ces résultats confirment notre hypothèse selon laquelle la plupart des difficultés des apprenants provient de la modélisation mathématique des concepts de la physique. En effet, les productions des élèves montrent que la quasi-totalité (32/37) des apprenants évalués connait au moins la moitié des savoirs théoriques liés au concept du moment d'une force ; plus de la moitié (14/37) en maitrise pratiquement la totalité. Et moins d'un septième (5/37) des apprenants évalués éprouve des difficultés à reconnaître et identifier les savoirs théoriques liés au concept des moments d'une force. Par contre, la totalité des apprenants évalués éprouve des difficultés à mettre en œuvre savoirs procéduraux associant la modélisation géométrique et analytique. La majorité (35/37) des élèves ont obtenu une note inférieure à 3.5/13 à l'exercice 2. Ce résultat montre que ces élèves ont eu des difficultés à réaliser les tâches des consignes de l'exercice 2. Ils ont eu des difficultés à faire la représentation symbolique et modélisation géométrique dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ des forces $\vec{F_A}, \vec{F_B}$ et $\vec{R}$, appliquées au pied-de-biche par des vecteurs et à déterminer leurs coordonnées. Ces apprenants sont ainsi bloqués dans le traitement de cet exercice qui repose essentiellement sur la représentation des forces par des vecteurs et la mise en œuvre des savoirs et savoir-faire mathématiques relatifs aux grandeurs vectorielles afin d'établir des relations entre les grandeurs physiques. La modélisation mathématique dans l'appren-

tissage de la physique crée donc des obstacles aux apprenants lors du transfert des connaissances mathématiques à la physique.

Conclusion

La modélisation de certains phénomènes, nécessaire à l'établissement des relations entre les grandeurs physiques par des équations mathématiques, peut être vécue comme une source de difficultés par les élèves par rapport à l'apprentissage de la physique. La modélisation mathématique a une place importante dans le processus enseignement-apprentissage des sciences physiques dans le secondaire. Dans une perspective de permettre une meilleure mobilisation des outils mathématiques, il conviendrait d'analyser les savoirs mathématiques en jeu dans l'enseignement d'un concept de la physique comme objet d'enseignement pour assurer une bonne construction des prérequis, par la mise en œuvre du rôle de la dialectique outil-objet des savoirs mathématiques (Douady, 1984). Il nous semble pertinent d'envisager par une approche introduisant dans les contenus de la mécanique, divers outils mathématiques nécessaires à l'appropriation de ses concepts.

Références

Astolfi J.-P. (2009) *L'erreur, un outil pour enseigner*. Paris : ESF

Ba C. (2007) *Étude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique–lien entre mouvement de translation et translation mathématique*. HAL Id: tel-00192241 https://theses.hal.science/tel-00192241

Bachelard G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Éd. Vrin.

Bachelard S. (1979) *Quelques aspects historiques des notions de modèle et de justification des modèles*. Paris : Maloine Editions.

Brousseau G. (1983) *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques*. Recherches En Didactique Des Mathématiques, 4(2), 165–198. https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques.

Courtillot D., Ruffenach M. (2009) *Enseigner les Sciences physiques : l'enseignement par compétences*. Paris : Bordas.

Douady R. (1984) *Jeux de cadres et dialectique outil-objet*. Cahier de Didactique n°3. Paris : IREM.

De Vecchi G. (2014) *Évaluer sans dévaluer*. Paris : Hachette éducation.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives 5*, 37-65.

Gaidioz P., Tiberghien A. (2003) Un outil d'enseignement privilégiant la modélisation. *Bulletin de l'union des physiciens, 97*(850), 71–83.

Hadji C. (2015) *L'évaluation à l'école. Pour la réussite de tous les élèves*. Paris: Nathan.

Hestenes D. (2010) *Modeling theory for math and science education*. Dans R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Éd.). *Modeling students' mathematical modeling competencies*. p. 13 - 41. New York: Springer Press.

Mach E. (1904) *La mécanique : exposé historique et critique de son développement*. Paris : Hermann. IISBN 2-87647-006-3.

Martinand J.-L. (2010) *Introduction à la modélisation*. Microsoft Word - modelisa.doc (inrp.fr)

Mettoudi C., Yaïche A. (1996) *Travailler avec méthode*. Paris : Hachette.

Morge L., Doly A.-M. (2013) *L'enseignement de notion de modèle: quels modèles pour faire comprendre la distinction entre modèle et réalité ?* Spirale - Revue de recherches en éducation 52(1).

Nebout Arkhurst P. (2017) *L'évaluation des apprentissages : évaluer, oui mais comment ?* Abidjan : Maylis édition.

Roditi E. (2005) *Les pratiques enseignantes en mathématiques : Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan.

Tiberghien A., Vince J. (2004). Études de l'activité des élèves de lycée en situation d'enseignement de la physique. Pluralité des langues et des supports: Descriptions et considérations pédagogiques. http://www.inrp.fr/colloques/seminaires/2004/semin_didac/andree_tiberghien_2.pdf.

Zakhartchouk J.-M. (1996) Consignes : Aider les élèves à décoder. *Pratiques 90*, pp. 11-12.

Programmes éducatifs et guides d'exécution Physique Chimie 2nde C (2012) Côte d'Ivoire p.6. https://dpfc-ci.net/wp-content/uploads/dpfc_fichiers/2019-Guide%20d%27Ex%C3%A9cution%202nde%20C.pdf

Mali-livret_4. Évaluation des apprentissages scolaires (2016) https://www.ifadem.org/fr/ressources-educatives/2017/02/08/livret-4-evaluation-des-apprentissages-scolaires

Annexe (épreuve corrigée et quelques productions des élèves)

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION — ANNÉE SCOLAIRE : 2022 – 2023

DRENA DALOA

LYCEE MODERNE 1

DEVOIR DE PHYSIQUE 2ndeC1

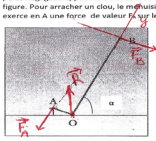
Nom : Corrigé		Note : 20/20	
Prénoms		Observations :	
Date :	Durée : 45mn	Visa des parents :	

Exercice 1: pour chacune des propositions du tableau suivant mets une croix dans la case qui convient (+)

N°	Propositions	vrai	faux
1	Une force de droite d'action parallèle à l'axe de rotation produire un effet de rotation d'un solide autour de cet axe.		+
2	Le moment d'une force par rapport à un axe traduit son efficacité à produire un effet de rotation du solide autour de cet axe.	+	
3	Une force a un effet de rotation sur un solide mobile autour d'un axe fixe si sa droite d'action ne rencontre pas l'axe de rotation.	+	
4	Le moment d'une force dépend des caractéristiques de la force et de la distance issue de l'axe de rotation perpendiculaire à la droite d'action de cette force.	+	
5	Le moment d'une force peut être négatif	+	
6	Le bras de levier est la distance perpendiculaire à la droite d'action de la force issue de l'axe de rotation.	+	
7	Le moment d'une force est une grandeur algébrique.	+	

Exercice 2 : (à faire au verso de la feuille) 13

Pendant les congés un élève de 2ndeC1 du Lycée Moderne 1 de Daloa travaillant comme aide maçon, observe sur son chantier un menuisier qui arrache des clous d'une planche avec un levier coudé appelé pieds-de-biche. Le levier de poids négligeable, peut tourner autour d'un axe fixe passant par le point d'appui O et perpendiculaire au plan de la figure. Pour arracher un clou, le menuisier exerce en B une force perpendiculaire à OB de valeur F_B = 200N. Le clou exerce en A une force de valeur F_A sur le levier supposé perpendiculaire à OA.



Données : OA = 10 cm ; OB = 70 cm ; α = 30° ; OA perpendiculaire à OB.
Tu es désigné par tes camarades pour déterminer les forces qui s'appliquent sur le pied-de-biche en équilibre.

1- Faire l'inventaire des forces appliquées au levier et représente-les en précisant le nom de chacune d'elles sur le schéma.
2- Enoncer les conditions d'équilibre d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.
3- Ecrire les conditions d'équilibre du levier mobile autour de l'axe fixe passant par le point O.
4- Déterminer la valeur de F_A
5- Déterminer la valeur R de la réaction de la planche au point.

1,5

1

Résolution de l'exercice 2

1- Système : le levier
* Inventaire des forces appliquées au levier
0,25 - le poids du levier : $\vec{P}$ (négligeable)
0,25 - la force exercée par le clou : $\vec{F_A}$
0,25 - la force exercée par le menuisier $\vec{F_B}$
0,25 - la réaction de la planche $\vec{R}$
* Représentation (voir la figure)

2 - l'équilibre d'un solide en rotation autour d'un axe fixe nécessite que :
- la somme vectorielle des forces extérieures appliquées à ce solide soit nulle : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ 1
- la somme algébrique des moments des forces extérieures appliquées soit nulle : $\sum M_\Delta(\vec{F}_{ext}) = 0$ 1

3 - conditions d'équilibre du levier mobile autour de l'axe (Δ)
$\vec{F_A} + \vec{F_B} + \vec{R} = \vec{0}$ et $M_\Delta(\vec{F_A}) + M_\Delta(\vec{F_B}) + M_\Delta(\vec{R}) = 0$ 1

4 - Déterminons la valeur de $\vec{F_A}$
$0,5\ M_\Delta(\vec{F_A}) = -F_A \cdot OA$ ⇒ $-F_A \cdot OA = -F_B \cdot OB$ ⇒ $F_A = \frac{OB}{OA} F_B$
$F_A = \frac{0,7}{0,1} 200N$
$F_A = 1400N$ 1
$0,5\ M_\Delta(\vec{F_B}) = F_B \times OB$
$0,5\ M_\Delta(\vec{R}) = 0$ car la droite d'action de $\vec{R}$ rencontre (Δ) 0,5

5 - Valeur de $\vec{R}$: $\vec{F_A} + \vec{F_B} + \vec{R} = \vec{0}$ ⇒ $\vec{R} = -(\vec{F_A} + \vec{F_B})$
$\vec{R}\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix}$ 0,5 $\vec{F_A}\begin{pmatrix} 0 \\ -F_A \end{pmatrix}$ 0,5 $\vec{F_B}\begin{pmatrix} F_B \\ 0 \end{pmatrix}$ 0,5 ⇒ $R_x = -F_B$ 0,5 et $R_y = F_A$ 0,5
$R = \sqrt{(-F_B)^2 + F_A^2} = \sqrt{(200)^2 + (1400)^2} = 1414,2N$
$R = 1414,2\ N$ 1

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE L'ALPHABETISATION — ANNÉE SCOLAIRE : 2022 – 2023

DRENA DALOA

LYCEE MODERNE 1

DEVOIR DE PHYSIQUE 2ndeC1

Nom : DIAGONÉ Ri		Note : 05/20	
Prénoms BAH BORGÉ		Observations :	
Date : 10/03/2023	Durée : 45mn	Visa des parents :	

Exercice 1: pour chacune des propositions du tableau suivant mets une croix dans la case qui convient

N°	Propositions	vrai	faux
1	Une force de droite d'action parallèle à l'axe de rotation produire un effet de rotation d'un solide autour de cet axe.	X	
2	Le moment d'une force par rapport à un axe traduit son efficacité à produire un effet de rotation du solide autour de cet axe.		X
3	Une force a un effet de rotation sur un solide mobile autour d'un axe fixe si sa droite d'action ne rencontre pas l'axe de rotation.	X	
4	Le moment d'une force dépend des caractéristiques de la force et de la distance issue de l'axe de rotation perpendiculaire à la droite d'action de cette force.		X
5	Le moment d'une force peut être négatif	X	
6	Le bras de levier est la distance perpendiculaire à la droite d'action de la force issue de l'axe de rotation.	X	
7	Le moment d'une force est une grandeur algébrique.	X	

5/7

Exercice 2 : (à faire au verso de la feuille)

Pendant les congés un élève de 2ndeC1 du Lycée Moderne 1 de Daloa travaillant comme aide maçon, observe sur son chantier un menuisier qui arrache des clous d'une planche avec un levier coudé appelé pieds-de-biche. Le levier de poids négligeable, peut tourner autour d'un axe fixe passant par le point d'appui O et perpendiculaire au plan de la figure. Pour arracher un clou, le menuisier exerce en B une force perpendiculaire à OB de valeur F_B = 200N. Le clou exerce en A une force de valeur F_A sur le levier supposé perpendiculaire à OA.



Données : OA = 10 cm ; OB = 70 cm ; α = 30° ; OA perpendiculaire à OB.
Tu es désigné par tes camarades pour déterminer les forces qui s'appliquent sur le pied-de-biche en équilibre.

1- Faire l'inventaire des forces appliquées au levier et représente-les en précisant le nom de chacune d'elles sur le schéma.
2- Enoncer les conditions d'équilibre d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.
3- Ecrire les conditions d'équilibre du levier mobile autour de l'axe fixe passant par le point O.
4- Déterminer la valeur de F_A
5- Déterminer la valeur R de la réaction de la planche au point.

1

1) Système : la planche

bilan des forces :
$-\vec{R}$: réaction de la planche : P/P
$-\vec{P}$: poids de la planche

2) la somme vectorielle des deux forces ~~dont elle~~ nulle est
$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$

3) $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \vec{0}$; $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

4) $M_{\Delta}(\vec{F}) = F \times d$
$M_{\Delta}(\vec{F_A}) = F_{AN} \times d \times$
$= 10 \times \sin 30°$
$M_{\Delta}(\vec{F}) = 5\ N$

5)

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
ET DE L'ALPHABETISATION

DIRENA GALOA

ANNEE SCOLAIRE : 2022 – 2023

LYCEE MODERNE 1

DEVOIR DE PHYSIQUE 2ndeC:

Nom : BOUAZO	Note : 06/20
Prénoms : NOËLLE	Observations :
Date : 10/03/2023 Durée : 45mn	Visa des parents :

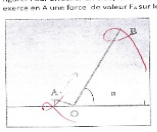
Exercice 1: pour chacune des propositions du tableau suivant mets une croix dans la case qui convient

N°	Propositions	vrai	faux
1	Une force de droite d'action parallèle à l'axe de rotation produire un effet de rotation d'un solide autour de cet axe.		X
2	Le moment d'une force par rapport à un axe traduit son efficacité à produire un effet de rotation du solide autour de cet axe.	X	
3	Une force a un effet de rotation sur un solide mobile autour d'un axe fixe si sa droite d'action ne rencontre pas l'axe de rotation.	X	X
4	Le moment d'une force dépend des caractéristiques de la force et de la distance issue de l'axe de rotation perpendiculaire à la droite d'action de cette force.	X	
5	Le moment d'une force peut être négatif	X	
6	Le bras de levier est la distance perpendiculaire à la droite d'action de la force issue de l'axe de rotation.	X	
7	Le moment d'une force est une grandeur algébrique.	X	

6/7

Exercice 2 : (à faire au verso de la feuille)

Pendant les congés un élève de 2ndeC du Lycée Moderne 1 de Daloa travaillant comme aide maçon, observe sur son chantier, un menuisier qui arrache des clous d'une planche avec un levier coudé appelé pieds-de-biche. Le levier de poids négligeable, peut tourner autour d'un axe fixe passant par le point d'appui O et perpendiculaire au plan de la figure. Pour arracher un clou, le menuisier exerce en B une force perpendiculaire à OB de valeur I_F = 200N. Le clou exerce en A une force de valeur F_A sur le levier supposé perpendiculaire à OA.



Données : OA = 10 cm ; OB = 70 cm ; α = 30° ; OA perpendiculaire à OB.

Tu es désigné par tes camarades pour déterminer les forces qui s'appliquent sur le pied-de-biche en équilibre.

1- Faire l'inventaire des forces appliquées au levier et représente-les en précisant le nom de chacune d'elles sur le schéma.
2- Enoncer les conditions d'équilibre d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.
3- Ecrire les conditions d'équilibre du levier mobile autour de l'axe fixe passant par le point O.
4- Déterminer la valeur de F_A.
5- Déterminer la valeur R de la réaction de la planche au point.

1

1) ~~Bilan des forces~~
~~Système le pied de biche~~
$\vec{R_0}$ = ~~La réaction de la planche par rapport au pied de biche~~

1) Bilan des forces
Système la réaction sur le pied de biche
$\vec{R_0}$ = la réaction de la ~~planche~~ par rapport ~~de pied de biche~~
$\vec{R_1}$ =

Exercice 2

a) système le pied de biche

1) Bilan des forces eterieurs
$\vec{F}$ la réaction de la sur le pied de biche
$\vec{R_0}$ la réaction de la planche par rapport au pied de biche
$\vec{R_1}$ = la réaction sur le coude

2) $\sum M_0 = 0$

Titre: Connexions entre Espaces de Travail : une étude entre probabilités et algorithmique

Auteurs: LAVAL Dominique et TRUNKENWALD Jannick

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 446 - 462

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Connexions entre Espaces de Travail : une étude entre probabilités et algorithmique

LAVAL Dominique[1] – TRUNKENWALD Jannick[2]

Résumé – En 10e année (classe de 2nde), l'apprenant découvre la fluctuation de l'échantillonnage. Notre attention se porte sur l'apport des algorithmes à la compréhension de l'intervalle de prédiction dans le domaine des probabilités. Une approche algorithmique de simulation d'échantillonnage est proposée aux enseignants du Lycée Français d'Alger (Algérie) dans le cadre d'un travail de formation. Ce travail est analysé dans sa genèse sémiotique, discursive et instrumentale, au sein des différents champs concernés.

Mots-clefs : algorithmique, espace de travail, simulation, fréquence, modélisation.

Abstract – In grade 10, learner discovers sampling fluctuation. Our attention focuses on the contribution of algorithms to the understanding of prediction interval in the field of probabilities. An algorithmic approach of sampling simulation is proposed to teachers at the French High School of Algiers (Algeria) as part of a training work. The work is analyzed in its semiotic, discursive and instrumental genesis, within the different fields involved.

Keywords: algorithmic, workspace, simulation, frequency, modelling.

1. CY Cergy Paris Université, INSPE Académie de Versailles, France, dominique.laval@cyu.fr

2. Université Paris Cité, LDAR, France, jannick.trunkenwald@yahoo.fr

Introduction

Bien que ce ne soit pas la partie la plus abstraite du programme de mathématiques en 2nde, les statistiques, depuis plus de trois décennies s'introduisent partout et il est indispensable que les élèves et leurs enseignants connaissent les mécanismes de base qui se cachent derrière les nombres dont nous sommes quotidiennement abreuvés. Dès la 2nde, la notion d'intervalle de confiance est abordée. Néanmoins, nous observons l'absence d'un référentiel théorique conséquent dans le domaine des probabilités qui soit à disposition des élèves. Nous faisons alors l'hypothèse qu'une utilisation de l'outil informatique dans le cadre d'une approche expérimentale va permettre une autre forme de validation des notions abordées. Nous situant dans la continuité des travaux de Trunkenwald et Laval (2019) sur une formation visant l'introduction en classe d'une simulation algorithmique d'un lancer de dés, une nouvelle expérimentation est proposée auprès de professeurs de mathématiques du lycée français d'Alger. Nous faisons le choix d'exposer ici une situation dans le domaine des probabilités associée à une situation géométrique à laquelle les enseignants sont confrontés. Seules des considérations d'ordre didactique guident notre réflexion lors du choix de la tâche, ainsi que sur les analyses faites du travail mathématique et algorithmique en jeu.

Une tâche pour aborder l'approche fréquentiste

Un objectif

Selon le document « Ressources pour la classe de seconde, Probabilités et statistiques » (2009) :

> […] On peut, par expérimentation et simulation, faire observer aux élèves que les échantillons de taille n obtenus à partir d'un modèle de Bernoulli ont, pour environ 95 % d'entre eux, des fréquences d'apparition du nombre 1 qui fluctuent dans un intervalle centré en p et d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$

Nous précisons au passage que les bornes de cet intervalle peuvent être rigoureusement déterminées à l'aide d'une table décrivant une loi binomiale de paramètres n et p. Cependant, cette approche probabiliste, liée aussi au domaine combinatoire, ne constitue pas l'objet de la présente réflexion. Par conséquent, elle ne sera pas décrite dans cette communication. Ainsi, cette prise de conscience de la variabilité naturelle d'un phénomène, due au seul hasard, peut permettre la méthode statistique en aidant l'apprenant à définir la « confiance » à accorder aux estimations. Une approche « fréquentiste » à travers des observations de fréquences relatives de caractères représentatifs de ces phénomènes, peut favoriser la compréhension de la notion de fréquence théorique d'un événement (Laval, 2018). Parzysz (2009) considère que l'introduction de l'intervalle de confiance au niveau de la 2nde se fait sans justification formelle.

> « L'accès à la notion de modèle […] peut être préparé par l'étude et la simulation d'expériences aléatoires diverses correspondants au même modèle probabiliste. La comparaison des procédures, des tableaux et des hypothèses sous-jacentes doit permettre aux élèves de se convaincre de l'analogie que présentent ces expériences sous leurs apparences diverses, et de déboucher sur la notion de schéma d'expérience, constituant en quelque sorte une classe d'équivalence d'expériences aléatoires. » Parzysz (2009, p. 102)

Par ailleurs, Laval (2018, p. 448) observe que « […] les probabilités dans le secondaire, associées aux statistiques, constituent un domaine où des situations extra-mathématiques jouent un rôle fondamental pour l'introduction de l'aléatoire. » Ainsi, la simulation sur ordinateur de phénomènes aléatoires est un moyen utile pour « obtenir des séries statistiques de taille suffisante pour observer la convergence des fréquences relatives et des moyennes statistiques » (Ibid.). Selon Laval (2018), la simulation d'un phénomène aléatoire suppose l'utilisation d'une modélisation de la situation. Dans la continuité du cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005), complété par Nechache (2016) pour un modèle probabiliste de type numérique, nous adaptons celui-ci à l'apport des spécificités de l'algorithmique[3] (Figure 1).

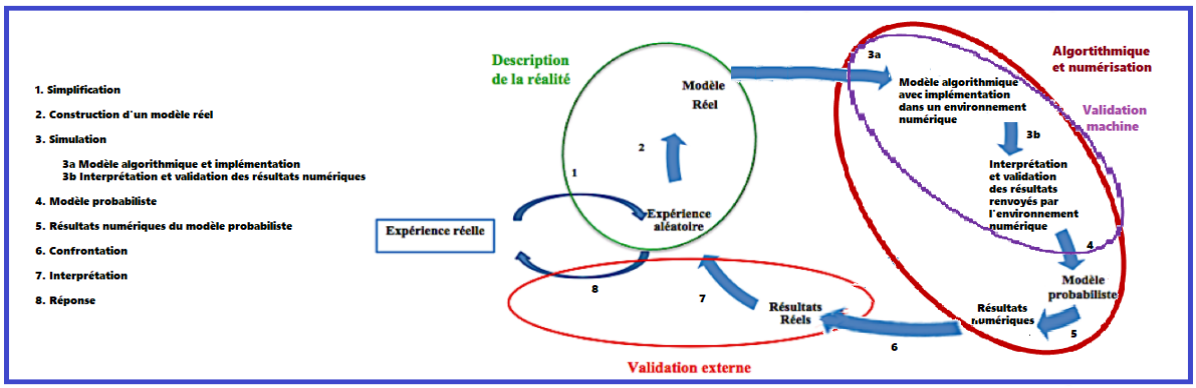


Fig. 1 : Cycle de modélisation avec un modèle probabiliste de type algorithmique

À la suite des travaux de Parzysz (2009) et de Nechache (2016), Trunkenwald (2018) explicite l'interaction entre les domaines statistique et probabiliste lorsque l'expérience réelle est simplifiée sous forme d'une expérience aléatoire permettant d'envisager un premier modèle probabiliste réel. Celui-ci est alors traduit en un premier modèle algorithmique associé à la simulation pour passer ensuite à un modèle probabiliste numérique. L'implémentation et l'exécution de l'algorithme de simulation donne des résultats numériques que doit interpréter l'utilisateur. Ces résultats sont d'abord vus par rapport au modèle réel, puis interprétés en regard de l'expérience aléatoire. Cette dernière peut être ajustée suivant l'information apportée par l'expérience réelle. Trunkenwald observe qu'« un nouveau modèle réel peut aussi être envisagé pour affiner la compréhension de l'expérience réelle (ce qui

3. L'algorithmique est la science des algorithmes. Un algorithme est une suite finie et ordonnée d'instructions successives qui manipulent diverses données pour réaliser une tâche précise par son utilisateur. Par ailleurs, lorsque l'on définit un algorithme, celui-ci ne doit contenir que des instructions compréhensibles par celui qui devra l'exécuter (machine ou humain).

correspond alors à un nouveau cycle) ». Par ailleurs, tenant compte de Lagrange et Laval (2019) sur les connexions entre espaces de travail, nous faisons l'hypothèse que l'introduction de l'algorithmique et d'un environnement numérique dans le processus de modélisation va aider l'apprenant à surmonter le coût en nombre de manipulations et permettre une démarche empirique satisfaisante. Mais exploiter cet environnement informatique nécessite d'enclencher un nouveau processus de modélisation spécifique. Nous souhaitons aborder cette problématique spécifique de réalisation d'algorithmes de simulation qui, une fois implémentés dans un environnement numérique, serait conjointe à une exploitation d'un point de vue probabiliste des résultats obtenus. Nous formulons l'hypothèse que les connexions entre modèle algorithmique et modèle probabiliste final simulant la fluctuation d'échantillonnage peuvent être élaborés dans de meilleures conditions si on fait subir, au modèle algorithmique, plusieurs cycles de modélisations au sens de Trunkenwald (2018). La nature de ces cycles fait l'objet de cet article.

Vers le choix d'une tâche et son expérimentation avec les premières analyses

Le programme de 2nde conduit à la découverte de la fluctuation d'échantillonnage avec la propriété suivante : « Soit p la probabilité de succès, et soit n le nombre d'expériences aléatoires répétées. Toute fréquence f de succès vérifie $f \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec un niveau de confiance d'au moins 95 % ». A ce niveau, le processus de découverte de cet intervalle reste expérimental et basé sur l'observation d'échantillons qui ont la même taille. Chaque valeur de fréquence correspond à un échantillon obtenu lui-même en répétant l'expérience aléatoire considérée. Il s'agit d'une approche empirique basée sur un raisonnement inductif. De plus, le « coût en temps » correspondant à la nécessité de répéter la même expérience un grand nombre de fois entraîne un besoin d'automatisation. Cette idée est facilitée par l'utilisation d'un calcul basé sur une opération de générateur pseudo-aléatoire. Par ailleurs, l'approche fréquentiste peut nécessiter de considérer plusieurs domaines, tant mathématiques qu'informatique. En effet, un environnement numérique associé à l'implémentation d'un algorithme permet de réduire le temps passé à répéter l'expérience aléatoire. Cependant, des compétences spécifiques sont nécessaires au domaine algorithmique : reconnaissance des variables informatiques, des instructions conditionnelles et des structures de boucles, syntaxe du langage machine, interface utilisateur, etc., et le manque d'expertise en informatique peut entraîner des difficultés supplémentaires pour les apprenants. Cela peut également causer une préoccupation métacognitive (voire cognitive) aux enseignants. L'utilisation du champ numérique permet d'automatiser un protocole expérimental qui nécessite l'utilisation de gestes, d'une syntaxe et des modes de pensée spécifiques. Nous pouvons aussi nous interroger sur l'utilisation d'une méthode algorithmique implémentable dans un environnement numérique, pour une meilleure compréhension de l'approche fréquentiste, d'un point de vue mathématique. Nous pensons que l'écriture d'algorithmes de simulation correspond à une étape de formalisation plus élevée pour les différents protocoles statistiques impliqués, et que le rôle du « langage » prend une importance particulière dans ce sens. Une formation sur la simulation de fluctuation d'échantillonnage en 2nde est réalisée lors d'un stage au Lycée Français d'Alger en 2018. Cinq groupes (A, B, C, D et E) de trois enseignants doivent résoudre le problème :

Quelle est la probabilité que la distance entre deux points choisis au hasard le long d'un S-segment de droite, soit supérieure à la moitié de la longueur du S-segment ?

Nous considérons cette tâche comme représentative des attentes institutionnelles d'une approche fréquentiste. En effet, il est possible d'explorer la fluctuation de l'échantillonnage avec une répétition réelle de l'expérience aléatoire, comme les segmentations de ficelles aux ciseaux, mais compte tenu de la temporalité de ce processus aléatoire lors d'une approche manuelle de la situation, nous faisons l'hypothèse que les enseignants proposent un modèle algorithmique de simulation avec un générateur pseudo-aléatoire de type Alea() fournissant un nombre aléatoire situé entre 0 et 1 simulant mathématiquement le hasard. Ici, Alea() va retourner un nombre aléatoire entre 0 et 1 simulant la position d'un point choisi au hasard sur le S-segment. Le travail de modélisation, mettant en évidence les fluctuations d'échantillonnage, peut trouver ainsi son expression formalisée, à travers une simulation algorithmique. L'expérience aléatoire fournissant la distance entre deux points sélectionnés peut être simulée par un calcul de type |Alea() – Alea()|. Nous considérons une telle instruction de calcul comme un algorithme de niveau A0. Il est appelé à chaque simulation de l'expérience aléatoire. Cependant, pour une plus grande automatisation, nous construisons un second algorithme, de niveau A1, à partir de l'algorithme précédent où nous avons une répétition automatisée par la machine de l'expérience aléatoire pour obtenir directement une fréquence de réussite simulée (Cf. figure 3a des annexes). Par ailleurs, le fait d'exécuter plusieurs fois l'algorithme de niveau A1 permet de générer une liste de fréquences, qui peut être représentée sous la forme d'un nuage de points. A cet effet, une troisième étape est envisagée dans le domaine algorithmique avec la construction et l'implémentation en machine d'un algorithme de niveau A2 (Cf. les algorithmes des niveaux A1 et A2 écrits en langage pseudo-code des figures 3a et 3b des annexes) permettant l'automatisation de l'agencement du nuage de points. L'algorithme de niveau A2 est construit à partir de l'algorithme de niveau A1, en répétant la fréquence de réussite simulée pour tracer directement le nuage de points.

Dans le cadre de notre observation, nous faisons le choix que les groupes de travail n'aient accès à aucun fichier préexistant pour accomplir la tâche. Nous observons que les groupes parviennent plus ou moins facilement, avec l'aide du formateur quand cela s'avère nécessaire, à réaliser un modèle algorithmique pour la simulation d'un calcul de fréquence. Ne parvenant pas à construire un algorithme en langage pseudo-code, nous observons que le groupe E fait le choix d'utiliser alors le tableur. Par ailleurs, nous constatons que seul le groupe C parvient à finaliser l'algorithme de niveau A2. Le passage du niveau A1 au niveau A2 correspond à une étape délicate, en particulier une écriture algorithmique d'un *protocole statistique* qui consiste à exploiter les résultats fournis par l'algorithme de niveau A1. Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit d'un obstacle épistémologique lié à l'encapsulation d'un algorithme dans un autre, au sens d'un sous-programme, afin d'automatiser l'exécution du premier. D'autres difficultés aux connections des champs des statistiques et de l'algorithmique sont identifiées au cours de la formation (un extrait des échanges entre le formateur et le groupe B, sur l'introduction d'un compteur dans l'algorithme de niveau A1 est présentée ci-après (Figure 2)).

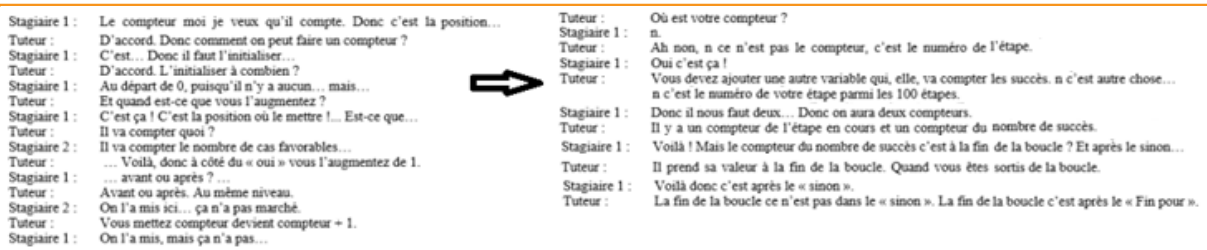


Fig. 2 : Echanges entre le formateur et des enseignants du groupe B

Dans cet extrait, nous constatons que la prise en compte d'un compteur avec son initialisation, son incrémentation conditionnée et son exploitation finale apparaît comme une construction complexe, pour certains stagiaires. Sa rédaction est intégrée dans trois niveaux du script de l'algorithme, en tenant compte des autres instructions. Ces stagiaires essaient de repérer une position précise qui n'existe pas vraiment pour le compteur. Nous observons ainsi une confusion entre « compteur de réussite » et « compteur de pas de simulation ». Le « compteur de pas » est un processus naturel en statistique qui devient une difficulté sur le plan algorithmique. Enfin, une difficulté similaire apparaît lors d'une confusion entre les consignes « valeur résultat » fournies par le compteur, et « incrémentation » des valeurs intermédiaires utilisées pour son calcul. Nous observons également une confusion entre le champ des probabilités et celui des statistiques. L'enseignant (stagiaire 2) parle de « cas favorable » au lieu de « succès obtenu ». De plus, les transcriptions de la session montrent des difficultés qui sont aussi liées à la modélisation de l'expérience aléatoire. Nous pensons qu'une analyse plus poussée des travaux dans les domaines mathématiques et de l'algorithmique avec une étude de leurs connexions, peut nous aider à affiner notre compréhension de certaines difficultés rencontrées par les enseignants (stagiaires).

Le choix d'un cadre théorique et la question de recherche

Nous faisons l'hypothèse que les activités impliquant une tâche mathématique associée à plusieurs domaines peuvent être analysées en considérant que les entités impliquées dans la tâche apparaissent sous différentes représentations sémiotiques, instrumentales et discursives. Duval (1993) nomme « registres » les représentations organisées en systèmes sémiotiques. Des processus de manipulations et de conversions se situent à l'intérieur et entre ces registres, et cette description est également complétée par la notion d'« instruments » dans l'activité mathématique de l'apprenant. Dans une « approche instrumental », Rabardel (1995) décrit l'utilisation des technologies numériques pour enseigner et apprendre les mathématiques dans différents contextes. Un tel cadre composé d'« objets » issus des champs mathématiques avec des relations entre eux, et différentes expressions ou images mentales associées, a été abordé par Douady (1986). Les savoirs instrumentaux sont indissociables des savoirs mathématiques. Dans le cadre des *Espaces de Travail* (Kuzniak, 2011), nous souhaitons prendre en compte les relations induites par les signes instrumentaux et mathématiques. Nous émettons l'hypothèse que la coordination de l'activité dans plusieurs domaines peut apporter

des réponses dans ce sens. En effet, en algorithmique, l'activité peut se situer dans une approche instrumentale de résolution de la tâche mathématique, avec un système de signes spécifiques à l'informatique. En revanche, dans le domaine des mathématiques, l'activité consiste à résoudre la tâche d'un point de vue mathématique et à utiliser des signes permettant de comprendre et de justifier. Nous souhaitons alors choisir un cadre théorique approprié qui peut donner du sens au travail de l'apprenant lors d'une activité impliquant plusieurs champs avec leurs connexions, compte tenu des genèses sémiotiques, instrumentales et discursives propres à chaque champ. Nous supposons que les articulations entre les *Espaces de Travail Mathématique Spécifique* (ETM_s) (Kuzniak & Richard, 2014) et les *Espaces de Travail Algorithmique* (ETA) (Laval, 2018), peuvent permettre d'étudier les différentes genèses des representamen[4] et des processus, du point de vue des ETM_S et ETA idoines des apprenants, mais aussi d'aborder les interactions entre les probabilités/statistiques et l'algorithmique. Par ailleurs, de nombreux travaux de recherche récents et en cours, réalisés dans divers champs mathématiques (analyse, théorie élémentaire des nombres, probabilités discrètes) et informatique sur les modèles des ETM_s/ETA, ont permis de prendre conscience des connexions possibles entre les *Espaces de Travail* (Laval, 2018 ; Lagrange & Laval, 2019). Ci-après, nous présentons brièvement ce cadre théorique des *Espaces de Travail*. La question de recherche consiste alors, à savoir comment ce cadre permet d'analyser le travail d'un apprenant impliquant une activité algorithmique et de programmation dans une approche fréquentiste de l'intervalle de fluctuation.

Un cadre théorique – Les premières analyses

Les Espaces de Travails de référence

Dans la continuité des travaux de Laval (2021), « nous faisons l'hypothèse de ne pas réduire l'algorithmique à un simple sous-domaine des mathématiques ». En effet, nous voyons l'algorithmique comme une discipline à part entière qui peut être en interaction avec des ETM_s. Par conséquent, il s'avère de construire et de justifier l'existence d'un ETA comme *Espace de Travail* à part entière. Par ailleurs, afin d'étudier plus finement le travail des enseignants (stagiaires) dans des champs issus des mathématiques et dans un domaine non nécessairement mathématique (l'algorithmique est vue ici comme une discipline à part entière) où cependant, les objets mathématiques peuvent avoir du sens, nous nous référons aux *Espaces de Travail Connectés* (ETC) (Lagrange & Laval, 2019), « en tenant toujours compte de manière exhaustive des dimensions [genèses] sémiotique, discursive et instrumentale » (Laval, 2021). Pour finir, nous nous questionnons sur l'utilité des ETC en lien avec des $ETM_{analyse}$, $ETM_{statistique}$ et des ETA pour relever le défi posé par des activités algorithmiques et de programmation lors de l'introduction des intervalles de fluctuation en Seconde. Par ailleurs, la tâche considérée ici implique plusieurs champs disciplinaires. Pour chacun de ces champs, nous avons un *Espace de Travail*. Ainsi, le cadre des ETC est introduit afin de rendre compte de la façon dont les

4. Au sens sémiotique, les representamen sont des objet ayant la possibilité de signifier.

connexions entre les *Espaces de Travail* donnent du sens aux concepts impliqués. Ce que nous attendons de ce cadre est d'aider à construire et à analyser des situations sur un sujet donné impliquant un domaine mathématique et un connexe, en identifiant les trois genèses dans les *Espaces de Travail* correspondants, en les contrastant et en recherchant des possibilités de connexion. Le cadre des ETM permet de caractériser la façon dont les concepts vont prendre du sens dans un contexte de travail donné. Selon Kuzniak & Richard (2014), le travail dans un ETM s'organise autour de trois genèses : (GS) *Sémiotique*, avec une utilisation de symboles, de graphismes, d'objets concrets compris comme des signes ; (GI) *Instrumental*, avec des constructions faites à partir d'artefacts, comme tableaux, graphes, programme de calculs, arbres, etc. ; (GD) *Discursif*, où se situent les aspects de preuve et de justification avec l'utilisation d'un référentiel théorique. Ces trois genèses (GS, GI et GD) génèrent chacune une relation dynamique entre un plan épistémologique et un plan cognitif (Cf. figure 1 des annexes). Les outils technologiques (artefacts), sémiotiques (representamen) et théoriques (référentiels) du plan épistémologique peuvent être exploités à l'aide de schémas appropriés. Dans ce cas, on se réfère respectivement à une genèse instrumentale, sémiotique et discursive, qui produisent respectivement des construits, des visualisations et des preuves dans le plan cognitif. L'activation de deux genèses peut entraîner une circulation entre les genèses qui les portent, ce qui peut parfois être assimilé à une idée de modélisation (Laval, 2018). Nous appelons « projection » des ETM ou ETA (Trunkenwald & Laval, 2019), la restriction à un champ spécifique de ce que nous analysons dans l'*Espace de Travail* considéré. Nous écrivons respectivement $ETM_{probabilité}$ et $ETM_{statistique}$, les « projections » dans les ETM sur les champs de probabilités et de statistiques (Cf. figure 2 des annexes).

Les premières analyses

Afin d'éviter une surcharge visuelle, nous faisons le choix de présenter des schémas de ces « projections » avec une vue de dessus (Cf. figures 2, 3a et 3b des annexes). Les points et les traits gras représentent les différentes genèses discursives (GD), instrumentales (GI) et sémiotiques (GS), ainsi que les circulations dans les plans situés entre les axes de ces genèses. La principale connexion entre ETM et ETA est liée à l'utilisation d'un générateur pseudo-aléatoire. Cet artefact est d'abord instrumentalisé au sein d'un ETA pour construire un modèle algorithmique d'une simulation de l'expérience aléatoire. Le lien entre cette construction et la formulation associée provoque une circulation « Instrumentale – Discursive » (I-D) et débouche sur une genèse discursive enrichissant le référentiel ETA. Selon Laval (2018, 2021), les travaux de conception algorithmique présentent une triple dimension instrumentale, sémiotique et discursive au sein des ETA. Nous associons cette dimension discursive à l'idée de « langage ». En effet, les algorithmes de niveaux A0, A1 et A2 sont des écritures formalisées de protocoles expérimentaux. Les expressions algorithmiques en langage naturel, avec leurs trois structures encapsulées, constituent alors une formulation explicite de la marche à suivre dans le domaine statistique pour effectuer une approche fréquentiste de l'intervalle de fluctuation. Nous faisons l'hypothèse que cette explication peut être associée à l'idée de preuve. Cette considération nous ramène à la genèse discursive qui, selon Laval (2018), se confirme lorsque le programme est capable de tourner (à un premier niveau de paradigme correspondant à une vision intuitive de l'algorithme).

Bien que nous ayons fait le choix de ne pas présenter une analyse de la tâche autour d'une utilisation du tableur, nous notons que la dimension discursive des ETA a tendance à s'estomper dans le plan « Sémiotico – Instrumental » (S-I), lorsqu'on travaille avec un tableur. En effet, dans le cas du tableur, les aspects syntaxiques sont plus liés à la nature des artefacts, même si la dimension discursive est encore activée dans le plan cognitif pour mobiliser les outils du référentiel dans l'ETA. Une construction complexe avec un tableur peut aussi réduire la « visualisation cognitive » d'un phénomène et donc la genèse sémiotique, pour se limiter à une genèse instrumentale. Enfin, l'ETA peut perdre toute sa pertinence lorsque l'algorithme implémenté dans un environnement numérique est fourni aux stagiaires pour être exécuté et utilisé sans aucun travail de modification attendu dans sa propre structure. En effet, dans ce cas, l'algorithme se trouve réduit à un artefact prêt à être instrumentalisé en « projection » d'un ETM sur un autre champ. Les « programmes de simulation » sont très actifs dans la dimension instrumentale des ETM, en dehors des ETA. Ils sont instrumentalisés comme des outils pour construire une observation statistique, au sein d'$ETM_{statistique}$ et au sein d'$ETM_{probabilité}$, si la tâche présente des propriétés issues du hasard.

Les analyses : cas des algorithmes A0, A1 et A2 écrits en pseudo-code

L'algorithme de niveau A2 vise à reprendre le protocole expérimental autour du dessin d'un nuage de points. Nous attendons des enseignants (stagiaires) qu'ils automatisent le nuage de points des fréquences en améliorant l'algorithme de niveau A1 donnant la simulation d'une fréquence. Ensuite, la mise en œuvre de l'algorithme de niveau A2 permet d'observer différents nuages, et de conjecturer la propriété de l'intervalle de fluctuation. Nous proposons une série de figures (Cf. figures 3a et 3b en annexes) illustrant le schéma éclaté (vue de dessus des ETMs et ETA) correspondant aux conceptions et exécutions de chaque niveau des algorithmes. Plus précisément, en ce qui concerne les interactions entre probabilités et statistiques, une description plus détaillée est présentée par Trunkenwald (2018) pour la tâche choisie. Au niveau A0, nous observons que dans l'ETA, l'algorithme est conçu dans une genèse instrumentale de l'artefact du générateur pseudo-aléatoire. Celui-ci simule une distance entre deux points choisis au hasard le long du S-segment. Cette modélisation algorithmique génère une validation discursive de la simulation expérimentale aléatoire, à travers une genèse discursive dans l'ETA. Pour rappel, l'algorithme de niveau A0 est ensuite utilisé comme outil technologique dans l'$ETM_{statistique}$ à travers une genèse instrumentale dans ce même $ETM_{statistique}$. On active ainsi la dimension discursive en mobilisant la fréquence, et la dimension sémiotique en mobilisant un type de gestion des données. Un protocole expérimental de calcul d'une fréquence est alors construit en exécutant plusieurs fois l'algorithme de niveau A0. Au niveau A1 (Cf. figure 3a des annexes), le protocole de simulation de fréquences est totalement automatisé. Ici, le travail algorithmique génère une circulation complète dans l'ETA. L'algorithme de niveau A1, correspondant à un nouvel algorithme de simulation de fréquences, est ensuite utilisé comme outil technologique dans l'$ETM_{statistique}$ à travers une genèse instrumentale, avec une activation de la dimension discursive en mobilisant un système de coordonnées cartésiennes. Ce nouveau protocole permet de construire un nuage de points des fréquences, en exécutant plusieurs fois, de manière automatisée, l'algorithme de niveau

A1. Nous observons que ce travail génère une genèse sémiotique dans l'$ETM_{statistique}$ en visualisant les fluctuations de l'échantillon. Nous appuyant sur cette nouvelle connexion de type sémiotique entre les concepts de fréquence et de probabilité, nous observons que dans l'$ETM_{statistique}$, la genèse sémiotique débouche sur une genèse sémiotique dans l'$ETM_{probabilité}$. Nous interprétons cela comme une « visualisation cognitive » des fluctuations du hasard. Au niveau A2 (Cf. figure 3b des annexes), le protocole de construction du nuage de points des fréquences est ici complétement automatisé. Le travail algorithmique génère à nouveau une circulation complète dans l'ETA. Cet algorithme de niveau A2, qui permet de construire le nuage de points (Cf. figure 3b des annexes), est ensuite utilisé comme outil technologique dans l'$ETM_{statistique}$ à travers une genèse instrumentale. Cette construction d'un nouveau protocole conduit ainsi à une circulation complète dans l'$ETM_{statistique}$ permettant de construire une conjecture des expressions des bornes de l'intervalle de fluctuation à l'aide d'un raisonnement inductif. Ce travail génère une genèse discursive dans l'$ETM_{statistique}$ avec cette nouvelle compréhension du rôle de l'intervalle, à la lumière des fluctuations de l'échantillon. Appuyée sur ce nouveau lien discursif entre fréquence et probabilité, la genèse discursive dans l'$ETM_{statistique}$ débouche sur une genèse discursive dans l'$ETM_{probabilité}$, avec une compréhension du sens des formules des bornes de l'intervalle de fluctuation, à la lumière de l'approche fréquentiste de la probabilité. Dans le cas de l'algorithme de niveau A2, nous pouvons compléter l'analyse faite précédemment en faisant le lien entre le travail dans les ETM/ETA et le cycle de modélisation modifié (Cf. figure 4 des annexes).

Conclusion

Les trois phases algorithmiques (A0, A1 et A2) décrites précédemment permettent une construction par encapsulations successives de l'algorithme de simulation. Ces trois étapes algorithmiques entrent également en résonance avec les phases expérimentales du protocole statistique. Cette congruence sémantique trouve son expression dans un certain aspect du travail algorithmique : une organisation de procédures de type « sous-programmes » en blocs. Dans l'$ETM_{statistique}$, nous mettons en évidence les connexions entre les trois domaines considérés : l'algorithme A0 conçu en connexion entre la dimension instrumentale des ETM_s et ETA. Ensuite, cet algorithme A0 est exécuté afin de construire un nouveau protocole expérimental. L'algorithme A0 est ainsi considéré comme un outil technologique à travers une genèse instrumentale dans l'$ETM_{statistique}$. Puis cet algorithme, pris comme outil théorique dans une genèse discursive de l'ETA, est utilisé comme un nouvel objet algorithmique visant à automatiser un nouveau protocole expérimental, à travers l'algorithme A1. Deux nouveaux cycles identiques entre $ETM_{statistique}$ et ETA connectés peuvent alors être générés successivement. Nous construisons ainsi l'algorithme A2, qui permet d'établir une conjecture pour encadrer les fluctuations. Ensuite, cette conjecture permet de visualiser dans une genèse sémiotique de l'$ETM_{probabilité}$ les bornes de l'intervalle de fluctuation, afin d'activer la genèse discursive de l'$ETM_{probabilité}$. Nous enrichissons ainsi le référentiel théorique sur la propriété de l'intervalle de fluctuation. Par ailleurs, afin de mettre en évidence la dialectique des cycles des connexions évolutives entre les trois domaines (probabi-

lités, statistiques et algorithmique), notre analyse peut être utilisée pour concevoir un prototype de formation des enseignants de lycée, mais aussi une activité pour des élèves de 2nde. L'objectif serait d'éviter de confronter les apprenants aux difficultés simultanées dans les différents domaines concernés. De même, un tel prototype peut également être utilisé comme outil de remédiation.

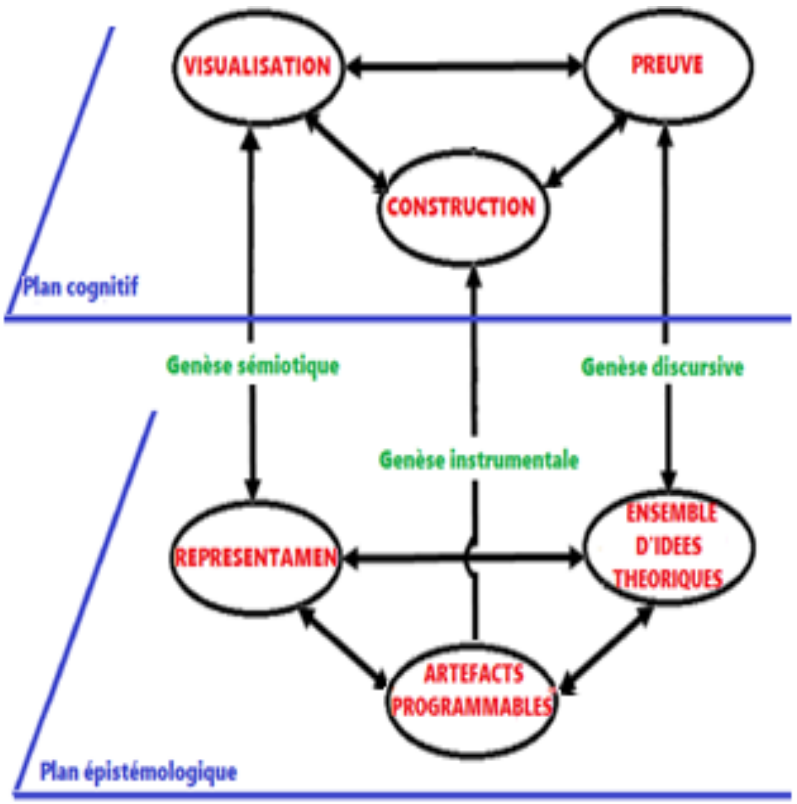


Fig. 1 : Représentations des ETA (Laval, 2018)

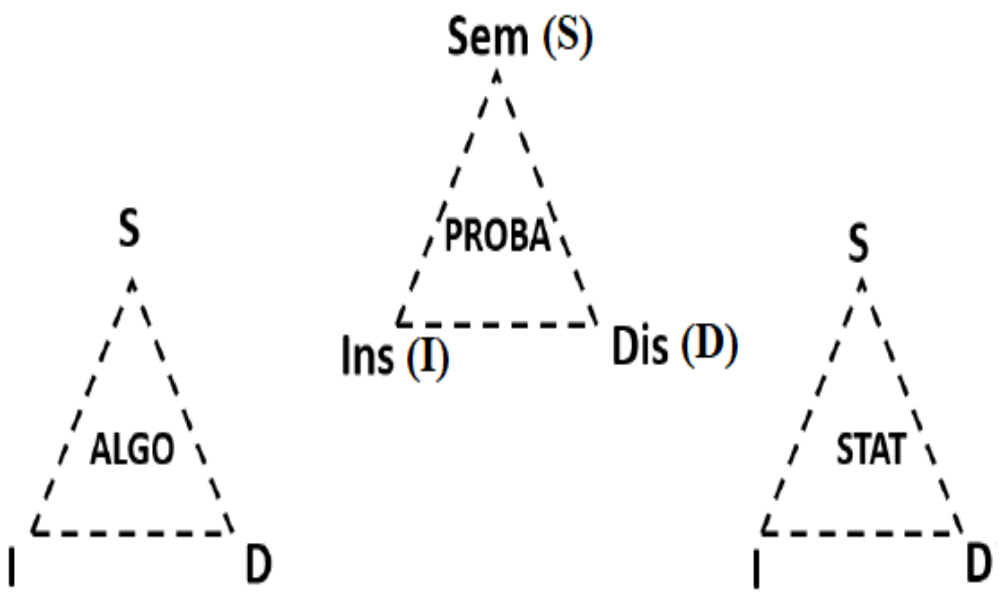
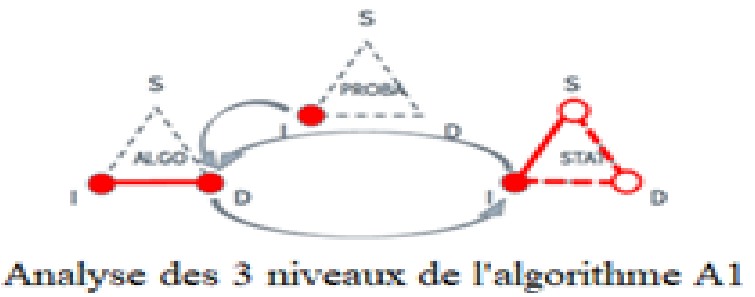


Fig. 2 : Vue de dessus des « projections » dans les ETM et ETA

```
DÉBUT
  TEST ← 0
    SUCCES ← 0
    TANTQUE TEST ≤ 400 FAIRE
      TEST ← TEST + 1
      SI ABS(ALEA() – ALEA()) > 0,5 ALORS
        SUCCES ← SUCCES + 1
      FINSI
    FINTANTQUE
    FREQUENCE ← SUCCES/400
    AFFICHER FREQUENCE
FIN
```

Algorithme de niveau A1

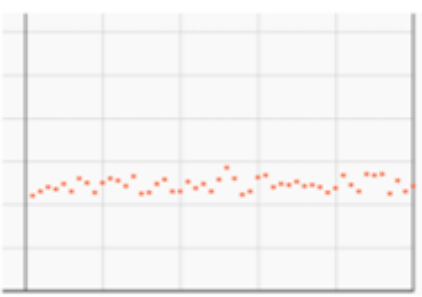


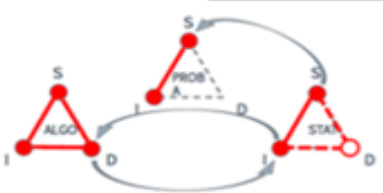
Analyse des 3 niveaux de l'algorithme A1

Fig. 3a : Algorithme de niveau A1

```
DÉBUT
  K ← 0
  TANTQUE k ≤ 50 FAIRE
    EXÉCUTER PROGRAMME NIVEAU A1
    k ← k + 1
    TRACER_POINT (k ; FREQUENCE)
  FINTANTQUE
FIN
```

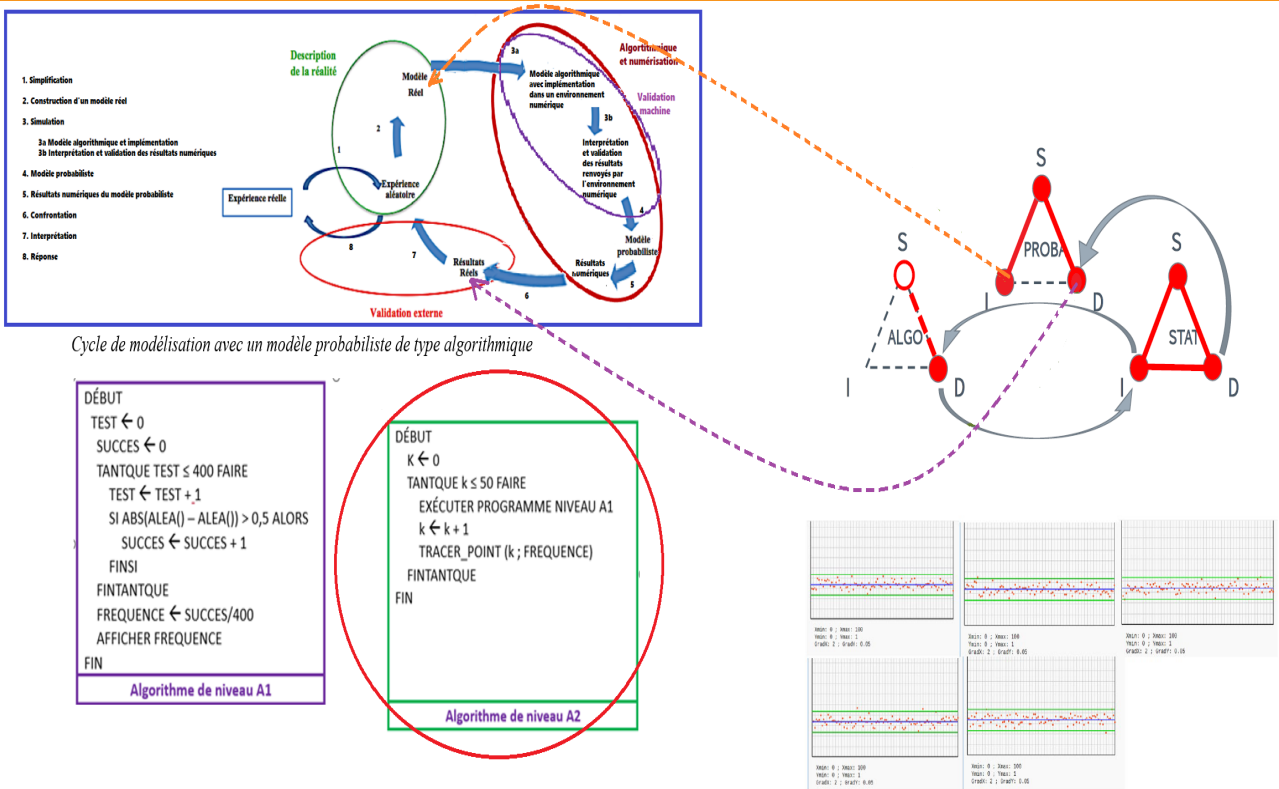
Algorithme de niveau A2





Analyse des 3 niveaux de l'algorithme A2

Fig. 3b : Algorithme de niveau A2 après implémentation dans un environnement numérique



Cycle de modélisation avec un modèle probabiliste de type algorithmique

Figure 4: Lien entre les projections ETM/ETA et le cycle de modélisation avec modèle probabiliste de type algorithmique

Références

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 7*(2), 5–31.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37–65.

Kuzniak A. (2011) L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16*, 9–24.

Kuzniak A., & Richard P. (2014) Spaces for mathematical work: Viewpoints and perspectives. *Relime, 17*(4.1), 17–26.

Lagrange J.-B. & Laval D. (2019) Connected Working Spaces: the case of computer programming in mathematics education. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, Netherlands. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02418181 (Consulté le 29/05/2023)

Laval D. (2018) L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques. Thèse de Doctorat. Université Sorbonne Paris Cité.

Laval D. (2021) Les Espaces de Travail Mathématique et Algorithmique connectés. Étude d'une activité algorithmique comme objet d'apprentissage de savoirs spécifiques et d'usage : Cas d'une ingénierie « dichotomie continue ». In A. Chesnais, H. Sabra (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2020* (p.88-114). IREM de Paris - Université de Paris. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03545511/ (Consulté le 29/05/2023)

Nechache A. (2016) La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire. Thèse de doctorat. Université Denis Diderot Paris 7.

Parzysz B. (2009) Des expériences au modèle, via la simulation. In *Repères-IREM*, (74) : 91–103.

Rabardel P. (1995). Les hommes et les technologies ; approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin, pp.239. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462 (Consulté le 29/05/2023)

Trunkenwald J. (2018) L'Espace de Travail Mathématique : Une respiration pour analyser la fluctuation d'une simulation d'échantillonnage. *Mathematical Working Space, Proceedings Sixth MWS Symposium*. Valparaiso, Chili. New submission ETM 6.

Trunkenwald J. & Laval D. (2019) Algorithms as a discovery process in frequentist approach to prediction interval. *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)*, Utrecht, Netherlands. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02412851 (Consulté le 29/05/2023)

Eduscol – Mathématiques Lycée. (2009) Ressources pour la classe de seconde, Probabilités et statistiques. https://maths.ac-noumea.nc/IMG/pdf/Probabilite_s_et_statistiques_1.pdf (Consulté le 29/05/2023)

Titre: Modélisation mathématique : outil efficace d'enseignement-apprentissage des mathématiques et de résolution de problèmes

Auteurs: NDIAYE Faguèye et BA Cissé

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 463 - 476

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Modélisation mathématique : outil efficace d'enseignement-apprentissage des mathématiques et de résolution de problèmes

NDIAYE[1] Faguèye - BA[2] Cissé

Résumé – Dans ce papier, nous avons mis en exergue l'efficacité de la modélisation mathématique dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques et dans la résolution de problèmes en s'appuyant sur toutes disciplines enseignées dans les classes. L'objectif visé est de faire développer chez l'élève des automatismes d'une démarche mathématique face à une situation complexe.

Mots-clefs : Modélisation, mathématiques, enseignement, apprentissage, interdisciplinarité.

Abstract – In this paper, we have highlighted the effectiveness of mathematical modelling in the teaching-learning of mathematics and in the problem solving based on all disciplines taught in the classroom. The aim is to develop automatic mathematical approaches to complex situations.

Keywords: Modelling, mathematics, teaching, learning, interdisciplinarity.

1. FASTEF/UCAD, Sénégal, fagueye.ndiaye@ucad.edu.sn

2. FASTEF/UCAD, Sénégal, cisse.ba@ucad.edu.sn

Introduction

De nos jours, l'enseignement-apprentissage des mathématiques reste un sujet majeur et est devenu l'un des volets les plus importants de nos systèmes éducatifs. Au Sénégal, il est dit dans le rapport général des assises de l'éducation nationale que, depuis 1991, le pays s'est engagé dans un processus de refondation de son système éducatif en adoptant l'approche par les compétences comme l'ont recommandé les états généraux de l'Éducation et de la Formation. Ainsi, les orientations du Programme d'Amélioration de la Qualité, de l'Équité et de la Transparence-Éducation/Formation (PAQUET-EF), pour la période 2018-2030, visent en priorité : « la rénovation de l'apprentissage des mathématiques, des sciences et de la technologie : réforme des curricula et de la pédagogie et création d'un environnement incitatif et motivant afin de renforcer leur place et leur attractivité, la clarification de leurs liens avec les problématiques de la vie courante et leur compréhension conceptuelle » et elles sont renforcées par la réforme du Baccalauréat UEMOA[3] avec une redéfinition du profil de l'élève sortant de l'enseignement secondaire. Ces orientations sont opérationnalisées entre autres, par la Lettre de Politique Générale pour le Secteur de l'Éducation et de la Formation (LPGSEF) en son chapitre III relatif aux principes, valeurs et axes stratégiques d'action du secteur par « la mise en œuvre des réformes curriculaires et pédagogiques ainsi que la création d'un environnement propice et de fortes incitations aussi bien pour l'attractivité et la réussite des apprentissages en mathématiques, sciences et technologie ....»

L'approche par les compétences, largement promue dans de nombreux systèmes éducatifs, vise à rendre les élèves capables de mobiliser leurs savoirs et savoir-faire pour résoudre des situations-problèmes et fait aussi appel à une pédagogie de l'intégration ; un principe déjà introduit dans le système éducatif sénégalais plus précisément dans les programmes du cycle élémentaire. Ce processus qui devrait être continué depuis 2009 au moyen-secondaire tarde à y être implanté.

Problématique et cadre conceptuel

Il est bien vrai que la pédagogie de l'intégration, selon De Ketele (2000), est une approche qui « cherche à développer la possibilité par les apprenants de mobiliser un ensemble intégré de ressources pour résoudre une situation-problème appartenant à une famille de situations ». En revanche, les situations d'apprentissage ne prennent pas en considération systématiquement des situations-problèmes liées à la vie quotidienne, familiale, environnementale faisant intervenir l'exploitation d'un ou de plusieurs supports nécessitant d'identifier un problème de la vie courante et de le résoudre. Une situation d'apprentissage est une situation didactique au sens de Brousseau qui est l'ensemble des circonstances dans lesquelles l'apprenant se trouve, et des relations qui l'unissent à son milieu. Prendre comme objet d'études les circonstances qui président à la diffusion et à l'acquisi-

3. Union Economique et Monétaire Ouest Africaine

tion des connaissances conduit à s'intéresser aux situations. Dans ce texte, nous considérons que la situation est un outil d'enseignement et/ou de contrôle de son acquisition.

Cependant, s'intéresser à des situations complexes liées à des problèmes de la vie semble essentiel pour la formation de l'élève dans la mesure où nous pensons qu'elles lui permettent de mobiliser des outils faisant appel à plusieurs disciplines comme les sciences physiques, la chimie, les sciences de la vie et de la terre, la géographie, le français, les mathématiques, etc. pour apporter des réponses à la fois qualitatives mais aussi quantitatives. Mais aussi d'avoir un regard critique et de pouvoir prendre des décisions face à des situations du monde qui se présenteront à lui : c'est la modélisation mathématique.

Selon Allaire (2007), la modélisation mathématique d'une manière générale, traite des sujets essentiels en mathématiques appliquées. Pour lui, dire que les mathématiques appliquées sont des mathématiques tournées vers les applications serait une tautologie et une fausse caractérisation. L'avènement des ordinateurs au lendemain de la seconde guerre mondiale, plus que pour tout autre discipline, a été une révolution pour les mathématiques. Il a ouvert la voie à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Ces progrès ont aussi permis aux mathématiques de jouer un rôle crucial à la résolution de problèmes concrets et complexes à caractères scientifiques ou industriels, auxquels elles ont apporté des réponses à la fois qualitatives mais aussi quantitatives.

De ce point de vue, les mathématiques appliquées se situent à l'intersection de plusieurs disciplines scientifiques : mathématiques, calcul informatique, sciences physiques, chimiques, mécaniques, biologiques, économiques, et sciences de l'ingénieur (sous ce dernier vocable on regroupe usuellement les différents domaines d'applications industrielles comme l'aéronautique, la production d'énergie, etc.). Le mathématicien Joseph Keller (2004) affirmait sous forme de boutade que les mathématiques appliquées sont « la science dont les mathématiques pures sont juste une branche ». Il voulait ainsi mettre en relief le caractère pluridisciplinaire des mathématiques appliquées.

Ces spécialistes ont démontré qu'à partir des expériences tirées de la vie courante, les mathématiques en plus d'être abstraites sont aussi présentes dans la société (médecine, nature, construction ...) et concernent pratiquement tous les secteurs de la société. Elles permettent de résoudre des situations liées au vécu quotidien de l'élève, en ce sens qu'elles se présentent comme un art, une activité créatrice, un produit de l'imagination, de beauté et d'harmonie. Son enseignement contribue donc à entrainer les élèves à la pratique d›une démarche scientifique.

L'un des objectifs pour l'enseignement des mathématiques est de mobiliser ses acquis de base pour résoudre, avec une documentation toujours actualisée, des problèmes concrets de la vie.

Trois principes guideront l'action de l'enseignant :

- le principe de la participation active de l'apprenant à son apprentissage fondé sur entre autres :
    - la manipulation et l'expérimentation ;
    - la verbalisation ;
    - l'abstraction ;
- le principe de l'ancrage du processus de résolution de problèmes à toutes les étapes du système enseignement-apprentissage en donnant la place à la notion de preuve ;
- le principe du décloisonnement des connaissances mathématiques, d'abord au niveau interne et ensuite au niveau des autres disciplines et de la technologie :
    - en privilégiant la menée de front de plusieurs domaines au niveau de la progression ;
    - en mettant en pratique l'interdisciplinarité à travers des activités (problèmes, projets, ...) faisant intervenir plusieurs disciplines.

A cet effet, l'élève doit être initié à la modélisation. L'enseignement et l'apprentissage de la modélisation, selon Hankeln et Hersant (2020) et leurs références, ont fait l'objet d'études dès les premiers travaux didactiques en France (Chevallard, 1989) et en Allemagne (Klein, 1907 ; Freudenthal, 1978 ; Winter, 1981). Mais le problèmes de modélisation trouvent toute leur place dans la démarche d'investigation (Artigue & Blomhoj, 2013).

Cependant, le niveau de performance des élèves en mathématiques et le déséquilibre entre les filières scientifiques (30%) et les filières littéraires (70%) au Sénégal, nous font penser que, face à ces situations, les élèves sont désarmés, démunis de stratégie, et peut-être baissent- ils très vite les bras et se résignent en pensant ne pas posséder les compétences requises pour exécuter la tâche. D'où l'idée de notre réflexion sur la « ***Modélisation mathématique : outil efficace d'enseignement-apprentissage des mathématiques et de résolution de problèmes*** ».

C'est pourquoi nous allons essayer de répondre à ces trois questions :

- Quelle place et quel rôle, les mathématiques peuvent-elles et doivent-elles jouer comme outil de modélisation ?
- Comment ce rôle peut-il être traduit dans l'enseignement et la formation pour donner un réel statut à l'interdisciplinarité à l'école ?
- Comment enseigner la modélisation en tant qu'outil de pensée et non d'apprentissage de modèles tout faits ?

Place et rôle des mathématiques comme outil de modélisation de situations

De tout temps les mathématiciens ont été inspirés par des problèmes pratiques qu'ils ont essayé de modéliser et de résoudre. La modélisation mathématique est alors l'art de représenter ou de transformer une réalité physique en des modèles abstraits accessibles à l'analyse et au calcul.

En effet, le modèle doit représenter la réalité le mieux possible. Il doit être correct du point de vue des mathématiques ce qui risque de l'éloigner un tout petit peu de la réalité à représenter. Il doit être utile pour des applications concrètes donc ne doit pas être trop éloigné de la réalité qu'il représente. Il y a donc un enjeu parfois difficile à remplir quand on établit un modèle d'une situation concrète.

Le modèle comprend trois éléments : des hypothèses, des principes fondamentaux et des relations mathématiques entre les variables. Il est fondamental de faire l'analyse mathématique des modèles pour qu'ils soient significatifs, motivants, pertinents et pour que le résultat attendu dans l'exploitation de ce modèle soit observé.

Ainsi, le modèle choisi permet de poser un problème qui admet au moins une solution : c'est le minimum quand le modèle est censé représenter une réalité. Ensuite, pour des critères bien définis et identifiés il faut que la solution soit unique. Enfin, il faut que la solution dépende continûment des données, c'est-à-dire si les paramètres changent la solution change aussi. C'est dire que le problème doit être bien posé au sens de Hadamard (1923) ; il s'agit d'un problème dont :

- La solution existe ;
- Elle est unique ;
- Elle dépend continûment des données.

Dans de nombreux cas le modèle mathématique n'est pas tout fait, ou il faut en sélectionner un pertinent parmi plusieurs disponibles, ou bien il faut simplifier des modèles connus mais trop complexes, ou encore il faut être capable d'en créer. Néanmoins, il est important de prendre conscience de l'importance de cette démarche de modélisation. Il faut commencer par choisir le moment, l'objectif visé et le contexte. Il y a des modèles pour introduire un objet mathématique, d'autres orientés et motivants dans le sens de sensibiliser sur un phénomène qui peut être nuisible à la santé, à l'environnement, de sensibiliser sur la bonne gouvernance ou pour gérer des situations de conflits, etc. Dans la plupart du temps le modèle a une fonction sociale. Cet exemple que nous présentons en est une illustration :

Pour contribuer à la lutte contre la pollution atmosphérique, un industriel décide de ramener progressivement la quantité de rejet en gaz toxique de son entreprise qui était de 60000 tonnes par an jusqu'en 2007 à une valeur inférieure ou égale 30000 tonnes en 2017 au plus tard. Il s'est engagé à

réduire chaque année la quantité de rejet de 5% à partir de 2007. A l'aide des outils mathématiques au programme de terminale L2[4], réponds aux questions suivantes :

1. En 2009 la quantité de rejet de son entreprise était de 55000 tonnes, avait-il respecté ses engagements ?

2. Une réduction annuelle de 10% de la quantité de rejet lui permettrait-il de respecter ses engagements au bout de 10 ans ?

Ainsi, ces modèles doivent prendre niche dans des contextes familiers aux élèves ou tout au moins connus par ces derniers, à savoir : les sciences physiques, chimiques, les questions environnementales, l'histoire, la géographie, la biologie, bref dans toute discipline enseignée aux élèves. Ces types de modèles qui sont des situations d'intégration sont présentés à l'élève pour lui apprendre à réinvestir ses acquis, à les transférer, et pour vérifier s'il est compétent pour les réinvestir. Les autres modèles qui lui sont présentés pour mener un nouvel apprentissage sont des situations didactiques au sens de Brousseau. Dans le paragraphe qui suit nous présentons deux exemples de situations. La **situation 1** est un exemple de situation didactique et la **situation 2** est une situation d'intégration.

Quelques illustrations de modélisation mathématique.

Situation 1 :

Abdoulaye et Jeanne sont envoyés au supermarché pour effectuer des achats. En dépensant au plus 5000f, ils doivent acheter des boites de conserve de bœuf et de sardinelles. La boîte de conserve de bœuf est à 400f l'unité, celle de sardinelles est à 600f l'unité. Abdoulaye propose d'acheter 5 boites de conserve de bœuf et 6 boites de conserve de sardinelles. Jeanne propose d'acheter 7 boites de conserve de bœuf et 3 boites de conserve de sardinelles. Leurs propositions sont-elles bonnes ?

Cette situation est pour introduire la leçon sur l'inéquation à deux inconnues.

Elle a une fonction didactique pour de nouveaux apprentissages. Les objectifs visés sont les suivants :

- L'élève de 3ème doit être capable de mettre en inéquation une situation complexe.
- L'élève de 3ème doit être capable de vérifier qu'un couple de réels est solution ou non d'une inéquation à 2 inconnues du type indiqué.

4. Sciences sociales et humaines

La démarche attendue est la suivante :

- Choisir la variable x représentant le nombre de boîtes de conserve de bœuf et y celle représentant le nombre de boîtes de sardinelles.
- Traduire cette situation au modèle : $400x + 600y \leq 5000$.
- Donner la *réponse attendue après vérification* : « la proposition de Jeanne est la bonne ».

Toute la difficulté des élèves dans cette situation est le choix des inconnues et la relation entre elles. Des élèves choisissent au hasard un nombre pour les boîtes de conserve de bœuf et un autre pour les boîtes de conserve de sardinelles et puis faire des calculs sans être sûr de la validité des résultats obtenus. D'autres attendent que l'enseignant leur donne plus d'indications pour savoir par où commencer. Cette situation n'est donc pas uniquement de l'ordre du geste, ne se limite pas à une tâche élémentaire (comme par exemple aller faire une course en ville) : elle nécessite une mobilisation cognitive, gestuelle et /ou socio-affective de plusieurs acquis de l'élève.

Le rôle de l'enseignant dans cette phase est déterminant pour susciter la réflexion de l'élève afin qu'il expérimente et verbalise dans un premier temps, et puis qu'il énonce une règle dans un second temps.

Situation 2

A l'hôpital Abass NDAO de Dakar, un médecin a relevé pour un groupe de 10 patients l'âge et la tension artérielle. Il a obtenu les résultats consignés dans le tableau ci-dessous.

Âge	30	28	35	42	51	42	63	32	70	67
Tension artérielle	11,5	11,3	12,3	13,5	14,6	13	16,6	12	16,9	

Ce médecin a lu dans la revue scientifique spécialisée en biologie NATURE, que : « la tension artérielle d'un être vivant dont l'âge est compris entre 30 à 70 ans, est fortement liée à son âge ». Consigne : En utilisant les informations données dans le tableau ci-dessus aide le médecin à vérifier l'assertion de la revue scientifique spécialisée.

La situation 2 est proposée aux élèves de Terminale S2[5] au Baccalauréat blanc UEMOA. Elle a une fonction d'intégration des acquis et une fonction d'évaluation.

Cette situation d'intégration est une situation complexe qui nécessite d'articuler plusieurs ressources. La complexité réside dans l'articulation d'opérations cognitives, de savoirs, de savoir-faire, et non pas dans le niveau de difficulté.

5. Sciences expérimentales

L'élève à qui est proposé cette situation est familiarisé en classe à la modélisation mathématique, suite à l'organisation de séances d'intégration.

La démarche attendue de lui est la suivante :

- Choisir $\mathcal{X}$ la variable statistique représentant l'âge du patient et $\boldsymbol{y}$ celle représentant sa tension artérielle.
- Traduire cette situation en **modèle** mathématique en posant le coefficient de corrélation linéaire $\boldsymbol{\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\rho_X \rho_Y}}$ où $Cov(X, Y)$ est la covariance entre X et Y, ρx l'écart-type de X et ρy l'écart-type de Y.
- Calculer la valeur de ρxy, la comparer à 1 et puis donner un jugement.

Ces deux exemples illustrent à bien des égards la place primordiale et le rôle important que jouent les mathématiques dans l'acquisition des savoirs et dans l'intégration des savoirs acquis. C'est pourquoi, il est impératif d'en tenir compte dans l'enseignement et dans la formation des enseignants.

Comment ce rôle peut-il être traduit dans l'enseignement et la formation pour donner un réel statut à l'interdisciplinarité à l'école ?

Ne dit-on pas qu'enseigner, c'est inventer les conditions dans lesquelles les connaissances de l'élève vont être appelées à fonctionner ; c'est articuler l'apprentissage autour de leurs stratégies, de leurs conceptions, pour essayer de les faire progresser dans la construction d'un concept donné. C'est pourquoi, dans les options méthodologiques de nos programmes de mathématiques, un des trois principes majeurs qui guidera notre action c'est le décloisonnement des connaissances mathématiques, d'abord au niveau interne et ensuite au niveau des autres disciplines et de la technologie. Ceci en mettant en pratique l'interdisciplinarité à travers des activités (problèmes, projets, ...) faisant intervenir plusieurs disciplines.

En outre, dans la réforme du Baccalauréat en cours dans la zone UEMOA, en mathématiques, on doit chercher à développer chez l'élève le profil de citoyen critique. Celui pour qui les mathématiques constituent une dimension importante de la formation générale, notamment dans sa dimension humaniste, conscient des limites et des pouvoirs des mathématiques, capable d'une réflexion épistémologique à leur propos, qui peut les utiliser de façon critique, qui peut les situer d'un point de vue historique, voire anthropologique ; c'est aussi celui qui peut décrypter et problématiser les contextes et/ou les situations-problèmes du monde qui nous entoure ; les épreuves d'évaluation seront des situations-problèmes qui tendront davantage vers l'interdisciplinarité et le recul critique.

A cet effet, la modélisation nécessite une connaissance approfondie, non seulement des objets mathématiques, mais aussi de la discipline à laquelle elle s'appuie. Dans la formation initiale et continue des enseignants de mathématiques il est alors impératif de faire des échanges, de travailler en équipe, de mutualiser et capitaliser des savoirs et des compétences avec les enseignants des autres disciplines. Cela leur permettrait d'apprendre à évaluer leurs besoins de formation et à les compléter, à développer des compétences nouvelles, à avoir accès à des informations et données mises à jour, à la richesse des supports où et quand ils veulent, et aux banques de données spécialisées. Ce renforcement de capacités des enseignants leur permet d'avoir des éclairages, des orientations à prendre en mathématiques pour amener les élèves à être compétents à résoudre des problèmes concrets. Mais la difficulté de cette approche sera le manque de temps auquel seront confrontés les formateurs pour préparer et mettre en œuvre cette mutualisation, et de l'institutionnaliser dans la formation.

Ainsi, l'école et les structures de formation des enseignants doivent initier les futurs enseignants à l'élaboration et à la résolution de situations complexes afin que, plus tard, ils puissent familiarisés leurs élèves à la mobilisation des connaissances acquises et des compétences développées par le plus haut degré de réinvestissement possible. Et que celles-ci soient transférables dans la résolution de problèmes concrets. C'est dans ce sens que l'on dira que l'élève est compétent.

Selon Jacques Tardif, « le transfert fait essentiellement référence au mécanisme cognitif qui consiste à utiliser dans une tâche cible une connaissance construite ou une compétence développée dans une tâche source » (Tardif, 1999, p. 58). Nnang (2015), quant à lui rappelle que « Le concept de compétence ne renvoie pas uniquement aux savoirs et savoir-faire, il implique aussi la capacité à répondre à des exigences complexes et à pouvoir mobiliser et exploiter des ressources psychosociales (dont des savoir-faire et des attitudes) dans un contexte particulier ».

Quelques approches de l'intégration de l'interdisciplinarité dans la modélisation mathématique.

Modèle pour la formation :

Les formateurs (Inspecteurs de l'enseignement-Moyen et Conseillers pédagogiques Itinérants) sont initiés à l'élaboration et la résolution de situations complexes ; ils démultiplient la formation dans leurs académies respectives afin que tous les professeurs de mathématiques soient formés à leur tour. Ils feront le suivi de la formation en faisant des visites de classes. Au bout de quelques mois de pratique, des situations complexes sont proposées dans les épreuves d'évaluation (BFEM[6], Bac blanc UEMOA). L'exploitation des résultats des élèves dans les évaluations, en analysant leurs notes puis en comparant leurs performances quand ils sont en face d'exercices classiques et quand ils sont en face de situations complexes, permet de faire une évaluation de cette approche.

6. Brevet de Fin d'Etudes Moyennes

Dans les structures de formation initiale, des modules de production et de résolution de situations complexes doivent être intégrés dans chaque élément constitutif d'une unité d'enseignement ou au bout de quelques semaines de formation. Même si dans la pratique, des élèves-professeurs en stage dans les établissements scolaires proposent des situations complexes dans les apprentissages de ressources, ils doivent apprendre à en proposer en évaluation de ressources. Il est à noter qu'à la Faculté des Sciences et Technologies de l'Éducation et de la Formation (FASTEF) des sujets de recherche portant sur l'intégration des situations complexes sont donnés à des élèves professeurs pour leur mémoire de fin de formation. Ainsi, l'introduction des modules de production et de résolution de situations complexes renforcerait la capacité des futurs professeurs à tenir compte de l'interdisciplinarité dans leurs pratiques de classes.

Modèle pour l'enseignement :

A l'issue de la formation des enseignants sur l'élaboration de situations complexes, les élèves doivent, à leur tour, être formés et familiarisés à la modélisation et à la résolution de situations complexes, plus précisément de situations d'intégration. L'approche consiste à organiser les apprentissages de manière à développer différents types de ressources (savoirs, savoir-faire, savoir-être, capacités méthodologiques, mise en projet, etc.) pendant une période de cinq ou six semaines et amener ensuite les élèves à mobiliser ces ressources dans des situations d'intégration, que l'élève est invité à résoudre individuellement. Cette période d'apprentissage d'intégration s'étend sur une durée d'une, de deux ou de plusieurs semaines, selon le contexte. Ces situations d'intégrations doivent être choisies afin d'apprendre aux élèves à mobiliser des ressources interdisciplinaires pour résoudre des problèmes. C'est l'approche par l'intégration des acquis, ou encore la pédagogie de l'intégration (De Ketele, 2000; Roegiers, 2000). Cette approche curriculaire rencontre les exigences du complexe, tant dans les situations d'intégration que dans les apprentissages de ressources.

Comment enseigner la modélisation en tant qu'outil de pensée et non d'apprentissage de modèles tout faits ?

Les Japonais ont leurs Jukus (des centres d'entraînement après l'école), une longue tradition d'étude de la leçon et une forte concentration de l'enseignement sur la résolution de problèmes. A Singapour, il existe des contenus scolaires excellents et les élèves, comparés à d'autres à l'équivalent du cours préparatoire, ont une meilleure connaissance des nombres et de l'arithmétique de base, alors que certains concepts mathématiques sont introduits bien plus tôt qu'ailleurs. Mais il faut aussi noter que les conditions de travail sont propices à la réussite de l'élève ; les parents donnent le primat à l'excellence et à la réussite, et les apprentissages se font en silence en classe, dans la discipline avec l'idée que l'on peut apprendre sans parler tout en étant engagé dans l'activité.

A cette pratique singapourienne, il faut ajouter la façon dont les professeurs de plusieurs disciplines doivent travailler ensemble. Ils doivent concevoir ensemble des activités de recherche en s'impliquant dans la modélisation mathématique de situations, en s'observant mutuellement et en échangeant sur leurs pratiques de classe.

Dans ces conditions, pour enseigner la modélisation en tant qu'outil de pensée on pourrait, en distinguant plusieurs étapes, amener l'élève à

- faire des hypothèses sur la situation à étudier. Les hypothèses sont traduites mathématiquement en un modèle;
- étudier le modèle mathématique en résolvant le problème posé. Il en tire des conséquences qualitatives ou quantitatives et fait des prévisions;
- comparer les prévisions aux réalités expérimentales;
- revenir éventuellement sur les hypothèses pour modifier le modèle, et le cycle continue.

Conclusion

La modélisation mathématique est un outil privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs compétences et donner statut à l'interdisciplinarité. Dans les structures de formation initiale, le travail collaboratif entre les élèves-professeurs des différents départements leur permettrait de se familiariser à la production des modèles pertinents, significatifs et motivants et de les résoudre. Cela les aiderait, sur le terrain, à familiariser les élèves à la résolution de situations complexes.

La formation à l'élaboration et la résolution de situations complexes des formateurs (Inspecteurs de l'enseignement Moyen-Secondaire et des Conseillers Pédagogiques itinérants), de quelques enseignants sur le terrain tenant des classes de Terminales et les notes obtenues par les élèves au cours des évaluations aux baccalauréats blancs UEMOA (**sources :** les notes de mathématiques en série L2 comprises généralement entre 00/20 et 12/20 dans les épreuves classiques, et comprises entre 02/20 et 20/20 au Bac blanc UEMOA 2019) au Sénégal ont montré l'importance et l'efficacité de la modélisation mathématique dans l'enseignement et l'acquisition des savoirs. A cet effet, les élèves sont attentifs et motivés quand ils sont invités à résoudre une situation concrète d'apprentissage ; l'exploitation pertinente des résultats par l'enseignant afin de leur permettre de découvrir de nouveaux concepts suscite leur intérêt aux savoirs mathématiques. L'élève doit donc disposer d'automatismes pour prendre des initiatives, proposer un modèle, le valider ou l'invalider, imaginer des pistes de solution, s'y engager sans s'égarer et communiquer un résultat. Ces automatismes facilitent en effet le travail intellectuel de l'élève en l'amenant à prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique. Cela est important dans la définition de son devenir.

Références

Allaire G. (2007) *Numerical analysis and optimization: an introduction to mathematical modelling and numerical simulation*. OUP Oxford.

Artigue M. & Blomhoj M. (2013) Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM, 45*(6), 797-810.

Assises de l'éducation du Sénégal. Rapport général. (2014). http://ekladata.com/VsEYubtB_tfL25iiSwpfrX-x4o0/Rapport-Final-des-Assises.pdf

Chevallard Y. (1989) *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation*. Petit x, n° 19, 45-75.

De Ketele J-M. (2000) *Approche socio-historique des compétences dans l'enseignement*, in Ch. Bosman, F-M. Gérard, X. Roegiers (éds.), *Quel avenir pour les compétences ?* (83-92). Bruxelles: De Boeck Université.

Freudenthal H. (1978) *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht*. München : Oldenbourg.

Hadamard J. (1923) *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press.

Hankeln C. & Hersant M. (2020) Processus de modélisation et processus de problématisation en mathématiques à la fin du lycée, *Éducation et didactique. 14*-3, 39-67.

Keller J. (2004) Interview with Joseph Keller. *Notices of the American Mathematical Society 51*, 751-760.

Klein F. (1907) *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen*. Teil 1. Leipzig, Teubner.

Lettre de politique générale pour le secteur de l'éducation et de la formation (LPGE-EF) (2018) Sénégal. http://www.formation.gouv.sn/?page_id=2184

Manuel de référence pour l'harmonisation progressive des épreuves du baccalauréat dans les États Membres de l'UEMOA (2014) Ouagadougou, Décembre 2014. http://www.examens-concours.net/pdf/Bac%20UEMOA%20-%20Manuel%20de%20reference.pdf

Nnang E. (2015) *L'approche par les compétences dans les pays en voie de développement*, https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-01103705.

Programme d'amélioration de la qualité, de l'équité et de la transparence 2018-2030. Sénégal (PAQUET-EF) (2019) Sénégal. https://www.globalpartnership.org/fr/content/programme-damelioration-de-la-qualite-de-lequite-et-de-la-transparence-2018-2030-senegal#:~:text=Le%20plan%20sectoriel%20de%20l,durable%204%20sur%20l'%C3%A9ducation.

Roegiers X. (2000) *Une pédagogie de l'intégration : Compétences et intégration des acquis dans l'enseignement*. Bruxelles : De Boeck.

Tardif J. (1999) *Le transfert des apprentissages*. Montréal : Éditions Logiques

Winter H. (1981) Der didaktische Stellenwert des Sachrechnens im Mathematikunterricht der Grund- und Hauptschule. Pädagogische Welt 35, 666-674.

Titre: Bilan du groupe de travail n. 5

Auteurs: WEISS Laura, MALONGA, Fernando et BARRY Souleymane

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 477 - 485

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Bilan du Groupe de travail nº 5

Responsables
WEISS[1] Laura – MALONGA[2] Fernando – BARRY[3] Souleymane
Correspondant CS
BA[4] Cissé

Préambule

Le faible nombre des contributions reçues et acceptées et celui des participants présents à Cotonou (Bénin) du 13 au 17 décembre 2022 pour le GT5 *Modélisation, interdisciplinarité et complexité* (3 communications) et pour le SPÉ2 *La démarche d'investigation et la résolution de problèmes dans la classe de mathématiques* (2 communications) a amené les organisateurs à regrouper ces deux groupes de travail. Cela s'est révélé un ajustement intéressant qui a permis de trouver des synergies dans les deux thèmes et de donner plus de place aux discussions des textes. De plus, les débats ont été d'autant plus riches que les personnes présentes étaient toutes très impliquées.

Introduction

Le Groupe de Travail GT5 *Modélisation, interdisciplinarité et complexité* s'intéresse au rôle des mathématiques en tant qu'outil privilégié de *modélisation* des situations relevant ou non de la vie quotidienne, des situations singulières dans leurs manifestations ou communes à une catégorie donnée. Dans le domaine savant, la *modélisation* ne prend vraiment sens que dans *l'interdisciplinarité* entre les différents domaines d'étude qui contribuent à appréhender les comportements des êtres vivants, des groupes sociaux, ainsi que les phénomènes naturels ou artificiels. La *modélisation* peut alors être considérée comme un processus central en mathématiques (Barry & Saboya, 2015). Ces modèles, plus ou moins élaborés, tout en dépendant des ressources mobilisées pour les générer, constituent des outils puissants de compréhension, de prévision, de décision, pour ne donner que quelques exemples, comme le montre Mawhin (2017). Déjà Galilée pressentait l'efficacité des mathématiques pour expliquer le monde avec sa célèbre phrase « l'univers est écrit en langage mathématique » (Chauviré et al., 1979).

1. Université de Genève, Suisse, laura.weiss@unige.ch
2. Ecole Normale Supérieure, Université Marien Ngouabi, Congo Brazzaville, malongaf@gmail.com
3. Université du Québec à Chicoutimi, Canada, souleymane_barry@uqac.ca
4. FASTEF/UCAD, Sénégal, cisse.ba@ucad.edu.sn

Les questions auxquelles les auteurs des contributions à ce GT5 pourront répondre sont :

- Quelle place et quel rôle, les mathématiques peuvent-elles et doivent-elles jouer comme outil de modélisation de situations ?
- Comment ce rôle peut-il être traduit dans l'enseignement et la formation pour donner un réel statut à l'interdisciplinarité à l'école ?
- Comment enseigner la modélisation en tant qu'outil de pensée et non d'apprentissage de modèles tout faits ?

Concernant le SPE2, qui a travaillé de façon conjointe au GT5, la démarche d'investigation (DI) a été discutée pour la première fois lors de la rencontre EMF en 2012 (voir Matheron, Morselli, René de Cotret & Schneider, 2012) et a fait l'objet d'un numéro spécial dans Springer en 2013, *Implementation of Inquiry-Based Learning in Day-to-Day Teaching*. Cette thématique a été débattue par la suite dans le groupe de travail 10 en 2015 (voir Gandit, Morselli & Sokona Bekaye, 2015) et 2018 (voir Mansour, Burgermeister & Ouvrier-Buffet, 2018) et elle s'insère dans la continuité des travaux conduits dans les cadres de l'IBE (Inquiry-Based Education), de l'IBL (Inquiry-Based Learning) et de l'IBSME (Inquiry-Based Science and Mathematics Education) au niveau international. Dans les écrits scientifiques, la DI est considérée soit comme une approche d'enseignement, soit comme un processus, ou soit comme un objet d'apprentissage (Aulls et Shore, 2008). Une définition généralement acceptée présente la DI comme une approche pédagogique centrée sur l'élève (Chichekian, Savard, & Shore, 2012). Celui-ci explore une situation, la questionne et expérimente en utilisant sa propre solution, il argumente et justifie (Maass & Artigue, 2013).

Compte tenu de cette riche littérature, les responsables ont inscrit la thématique de la résolution de problèmes et de la démarche d'investigation dans trois axes : l'opérationnalisation en classe de la DI, les aspects épistémologiques de la DI en mathématiques et la formation des enseignants et des formateurs des enseignants.

Organisation et thématiques abordées

Le groupe de travail GT5 comptait 4 participants présents : Assiba Thérèse Akoua Dahouessa (Côte d'Ivoire), Faguèye Ndiaye et Cissé Ba (Sénégal) et Jannick Trunkenwald (France). Malheureusement d'autres contributeurs n'ont pas pu venir au colloque.

Leurs communications figurent dans les actes et répondent principalement à la première et à la deuxième question. En particulier, Assiba Thérèse Akoua Dahouessa apporte une contribution aux questions sur la modélisation et l'interdisciplinarité en proposant : "Analyse des erreurs des élèves de la seconde C à propos des outils mathématiques en physique", alors que Faguèye Ndiaye et Cissé Ba traitent du problème de l'interdisciplinarité à l'école et en formation d'enseignants à travers "Modélisation mathématique : outil efficace d'enseignement-apprentissage des mathématiques et

de résolution de problèmes". Quant à Jannick Trunkenwald, il a réfléchi avec son collègue Dominique Laval à la question de la complexité en présentant un article dont le titre est "Connexions entre espaces de travail : une étude entre probabilités et algorithmique".

Le groupe spécial SPÉ2 a vu la présence de Gilles Aldon, Antoine Guise et Miriam Di Francia (France) et Marina De Simone (Suisse). On trouve leurs communications dans les actes, à savoir "Fonder son enseignement sur des problèmes de recherche en mathématiques : quels impacts sur les élèves ?" pour les trois premiers et "L'évolution dans la construction du concept de fonction des élèves dans des activités de résolution de problèmes : une étude de cas".

Malgré le titre du groupe spécial et les axes proposés dans le texte de cadrage, les deux contributions ont porté sur la résolution de problèmes en mathématiques ce qui correspond à la deuxième partie de l'intitulé du groupe. C'est pour cette raison que les trois axes proposés qui concernaient la démarche d'investigation (DI) n'ont pas été investis. En effet, les deux contributions reçues s'intéressent à la résolution de problèmes. Pour la première, les contributeurs ont conçu un dispositif s'étalant tout au long de l'année scolaire où la résolution de problèmes joue le rôle tant d'objet que d'outil d'apprentissage des mathématiques. La deuxième contribution analyse les effets d'une ingénierie didactique basée sur la résolution de problèmes pour l'enseignement-apprentissage du concept de fonction. Dans ce cas, la résolution de problème a un statut d'outil d'enseignement-apprentissage.

A partir des deux textes de cadrage, il s'est agi de trouver des synergies entre les thèmes des deux groupes. Pour cela, les participants ont été invités à constituer une carte conceptuelle autour des termes "modélisation" et/ou "modéliser" initialement, puis à propos de la "résolution de problèmes" et de la "démarche d'investigation".

En effet, il nous a semblé que les premiers termes qui concernent surtout le GT5 pouvaient jouer un rôle d'introduction à une réflexion sur la résolution de problèmes car pour résoudre le problème une modélisation est nécessaire, que ce soit pour un problème issu de la vie quotidienne ou de différentes disciplines scientifiques ou même intra-mathématique.

Concernant les productions des participants et la discussion qui s'en est suivie à propos du terme "modélisation", elles font ressortir le concept de "va et vient" entre le monde réel (à gauche dans la fig.1) et le modèle (à droite dans la fig. 1), ce "va et vient" étant décrit par tous les mots apparaissant en bas de la figure 1.

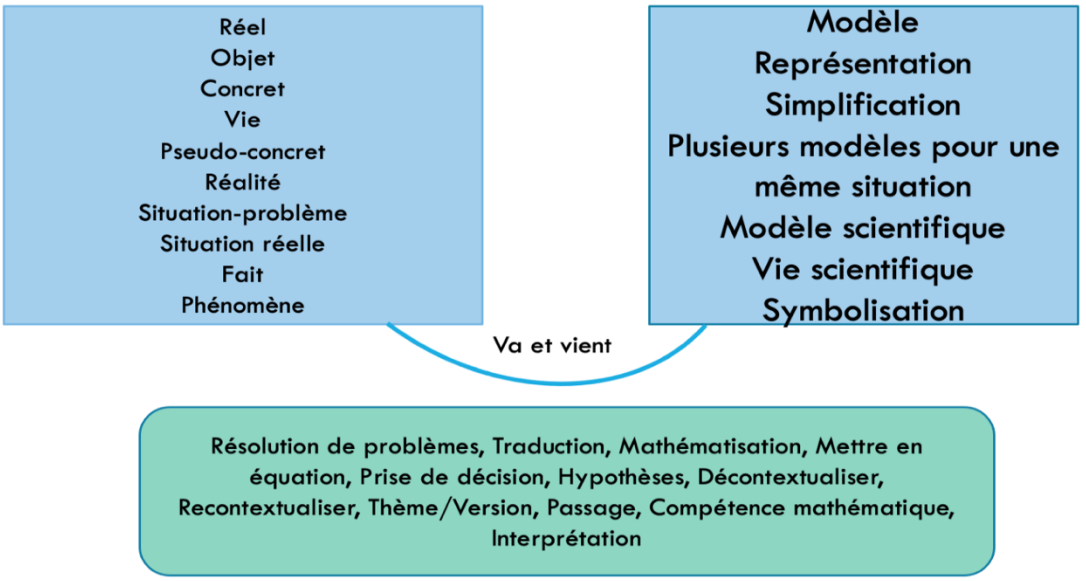


Figure 1 – Synthèse des cartes conceptuelles des participants

Pour mettre en évidence la fréquence relative des différents mots proposés par les participants, nous avons créé un nuage des mots (fig. 2). La fréquence importante des mots ”modèle”, ”modélisation” et ”résoudre” fait bien apparaitre le lien prévu entre modélisation et résolution de problèmes.

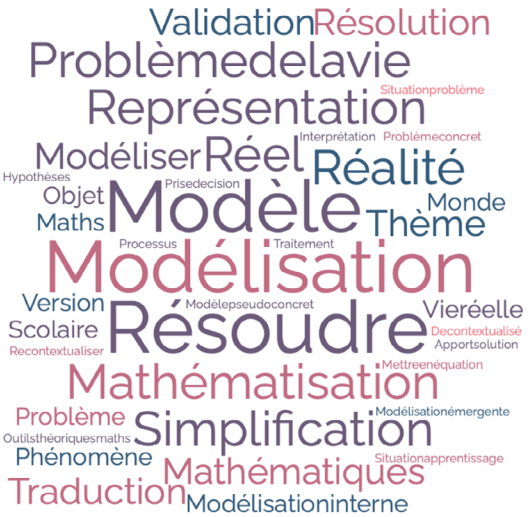


Figure 2 – Nuage de mots issu des cartes conceptuelles des participants autour des termes “modéliser” et “modélisation”

Le même exercice de nuage de points à partir des cartes conceptuelles des participants à propos de la résolution de problèmes (RP) et de la démarche d’investigation (DI) a produit le nuage de mots de la figure 3. Comme dans la figure 2, la relation entre DI, RP et modélisation apparait fortement.



Figure 3 – Nuage de mots issu des cartes conceptuelles des participants autour des termes “résolution de problèmes” et “démarche d’investigation”.

Résumé des discussions

Le lien entre les 2 groupes GT5 et SPE2 s’est fait facilement, car les présents se sont accordés sur le fait que pour résoudre des problèmes, mais aussi pour résoudre une situation scientifique, on modélise. Toutefois, quand il met en place une situation-problème l’enseignant doit se garder d’influencer les élèves avec le modèle qu’il a anticipé. Le rôle essentiel du choix des variables didactiques a alors été souligné.

Un débat a aussi porté sur la distinction à faire entre modèle et modélisation, ce deuxième terme décrivant le processus alors que le premier correspond au produit. Cependant reste en discussion si l’application d’un modèle enseigné préalablement participe à la modélisation : il semble que l’application du modèle général à la situation particulière doive être aussi considéré comme de la modélisation. D’un point de vue plus particulier, un domaine des mathématiques qui se sert de la modélisation sont les probabilités comme cela a été montré par une des contributions au GT5.

En ce qui concerne la résolution des problèmes, nous avons discuté de ses trois finalités ; la résolution de problèmes vue comme

- moyen (outil) d’introduire des nouvelles connaissances mathématiques ;
- objet d’enseignement-apprentissage (apprendre des stratégies, des procédures, des démarches, des modes de raisonnement, etc.) ;
- évaluation de l’enseignement-apprentissage des concepts et notions mathématiques.

Nous avons aussi convenu que la résolution de problèmes pourrait permettre de faire émerger et rendre « disponible » le travail dans différents registres sémiotiques, si le problème est conçu de manière suffisamment riche à permettre différentes approches de résolution qui convoquent et coordonnent différents registres de représentation.

En ce qui concerne la démarche d'investigation, les participants ont provisoirement conclu qu'elle concerne plutôt les sciences expérimentales (modélisation horizontale) alors que la résolution de problèmes est souvent interne aux mathématiques (modélisation verticale).

Conclusion et perspectives

Contrairement au groupe correspondant de l'Espace mathématique francophone 2018 (GT10), le groupe SPE2 de 2022 a vu cette année une faible participation. Faut-il imputer cette relative désaffection à une diminution d'intérêt des chercheurs et des enseignants pour la démarche d'investigation, comme si, depuis qu'elle est étudiée, on en avait fait le tour ? Symbolique pour cela le fait que les deux communications présentées portent sur la résolution de problèmes qui est peut-être plus spécifique à la discipline des mathématiques par opposition à d'autres disciplines scientifiques. Toutefois la réunion des deux groupes SPE2 et GT5, portant entre autres sur la modélisation et l'interdisciplinarité, a permis lors des riches discussions d'intégrer le lien avec les sciences et leur rôle comme source de problèmes mathématiques. Il est donc licite de se demander si pour un EMF futur ces deux thématiques importantes dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques à l'école et dans la formation des enseignants ne pourraient pas à nouveau être réunies.

Références

Aulls M. W., & Shore B. M. (2008) *Inquiry in education (Vol. I): The conceptual foundations for research as a curricular imperative*. New-York, NY : Erlbaum.

Barry S., & Saboya M., (2015) Un éclairage sur l'étape de co-situation de la recherche collaborative à travers une analyse comparative de deux études en didactique des mathématiques. *Recherches Qualitatives,* 34, 49-73.

Chauviré C., Guiducci M., & Chauviré C. (1979) *L'Essayeur de Galilée*. Les Belles Lettres.

Chichekian T., Savard A., & Shore B. M., (2012) Les troncs communs et les trajectoires divergentes dans les langues françaises et anglaises de l'approche par démarche d'investigation. *Grand N*, *90*, 33-48.

Mahwin J., (2017) *Les modèles mathématiques sont-ils des modèles à suivre ?* Bruxelles : l'Académie en poche.

Gandit M., Morselli F., & Sokona Bekaye S., (2015) Rôles et responsabilités des professeurs et des élèves dans les démarches d'investigation et dans la résolution de problèmes. In L. Theis (Ed.), *Actes du colloque Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (pp. 829-836). Alger : Université d'Alger.

Maass K., &, Artigue M., (2013) Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: A synthesis. *ZDM : The International Journal on Mathematics Education, 45*(6), 779-795.

Mansour A., Burgermeister P.F. & Ouvrier-Buffet, C. (2018) Analyse des démarches d'enquête et d'investigation. In M. Abboud (Eds.), *Actes du colloque Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines* (pp. 1079-1084). Paris : Gennvilliers.

Matheron Y., Morselli F., René de Cotret S., & Schneider M., (2012) La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques, fondements et méthodes In J.-L. Dorier &, S. Coutat (Eds.), *Actes du colloque Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* (pp. 1259-1281). Genève : Université de Genève.

Annexe

AKOUA DAHOUESSA A. T., *Analyse des erreurs des élèves de la seconde C à propos des outils mathématiques en physique*

LAVAL D. & TRUNKENWALD J., *Connexions entre espaces de travail : une étude entre probabilités et algorithmique*.

NDIAYE F. & BA C., *Modélisation mathématique : outil efficace d'enseignement-apprentissage des mathématiques et de résolution de problèmes*

Titre: Le raisonnement par l'absurde a l'entrée à l'université

Auteur: BATTIE Véronique

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 486 - 498

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Le raisonnement par l'absurde a l'entrée à l'université

BATTIE[1] Véronique

Résumé – Comment le raisonnement par l'absurde est-il institutionnalisé à l'entrée à l'Université et quelles difficultés sont rencontrées par les étudiants dans sa mise en oeuvre ? C'est à ces questions que nous tentons d'apporter des éléments de réponse tant en appui sur nos recherches en didactique des mathématiques qu'en écho à notre pratique enseignante.

Mots-clefs : raisonnement par l'absurde, transition secondaire-supérieur, arithmétique, preuve, dimensions organisatrice et opératoire.

Abstract – How *reductio ad absurdum* is presented to students at the beginning of University ? What are the difficulties of undergraduates in the *reductio ad absurdum* process ? In this presentation we study those didactical issues thanks to our researches in didactic of mathematics and our teaching practice.

Keywords: *reductio ad absurdum*, secondary-tertiary transition, number theory, proof, organizing and operative dimensions.

1. Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, Département de mathématiques, S2HEP UR 4148, F-69622, Lyon, France, vbattie@univ-lyon1.fr

On ne peut parler de la transition Secondaire-Supérieur (Gueudet et Thomas, 2020) sans évoquer les nombreuses difficultés rencontrées par les étudiants (Gueudet et Vandebrouck, 2019). Notre pratique enseignante à l'Université nous amène au constat d'une accentuation de ces difficultés accompagnée de la nécessité d'accueillir un public de plus en plus hétérogène en termes de parcours d'études et de formation mathématique. Depuis quelques années, un parcours dit aménagé (la première année de Licence est aménagée sur deux années d'enseignement) a été créé pour tenter de répondre aux besoins de formation de tout étudiant inscrit dans le Portail Maths-Informatique et nous y intervenons depuis sa création.

Dans nos recherches en didactique des mathématiques, nous étudions les questions d'enseignement et d'apprentissage relatives à la preuve et au raisonnement (Hanna, 2020) en exploitant de façon privilégiée les spécificités et potentialités de l'arithmétique (Battie, 2003). Pour outiller épistémologiquement nos analyses, tant *a priori* qu'*a posteriori*, nous distinguons dans le raisonnement deux dimensions complémentaires et en interaction. La dimension organisatrice s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée. Cette dimension organise et structure les différentes étapes du raisonnement. Outre les figures usuelles du raisonnement mathématique, en particulier le raisonnement par l'absurde sur lequel nous centrons cette présentation, on identifie au niveau de cette dimension le raisonnement par récurrence (et autres formes d'exploitation de la propriété de bon ordre de l'ensemble $\mathbb{N}$), la réduction à l'étude d'un nombre fini de cas (telle la disjonction de cas) et le jeu d'extension-réduction (propre aux anneaux factoriels). La dimension opératoire quant à elle est relative à tout ce qui relève des manipulations de calcul (au sens le plus large) opérées sur les objets en jeu et qui permettent la mise en œuvre des différentes étapes du raisonnement global suivi (dimension organisatrice). Nous identifions par exemple les formes de représentation choisies pour les objets (telle la décomposition unique en produit de nombres premiers en appui sur le théorème fondamental de l'arithmétique, les congruences), l'utilisation de théorèmes, les manipulations algébriques et l'ensemble des traitements relatifs à l'articulation entre l'ordre divisibilité (anneau $\mathbb{Z}$) et l'ordre naturel (ensemble bien ordonné $\mathbb{N}$).

Après avoir étudié l'institutionnalisation du raisonnement par l'absurde dans différents cours magistraux (CM), nous étudierons sa mise en œuvre par les étudiants via l'analyse d'une soixantaine de copies issues d'une évaluation au sein du parcours aménagé.

Le raisonnement par l'absurde en cours magistral

Le raisonnement par l'absurde est une dimension organisatrice qui repose à la fois sur le principe de tiers exclu et celui de non contradiction, comme le rappelle Bernard et al. (2018). Adopter cette dimension organisatrice pour démontrer qu'une proposition *A* est vraie :

C'est démontrer que *(non A)* est fausse en exhibant une proposition *C* telle que :

(1) [(*nonA*)$\Longrightarrow$*C*] vraie et *C* fausse

(2) [(*non A*)$\Longrightarrow$(*C* et (*non C*))] vraie (Bernard et *al.*, 2018)

Dans le cas où l'assertion est une implication notée , la négation de cette implication étant (et *non Q*), démontrer par l'absurde c'est :

Établir que (et *non Q*) est fausse en trouvant une proposition *C* telle que :

(1) [*(P et (non Q))*$\Longrightarrow$*C*] vraie et *C* fausse

(2) [*(P et (non Q))*$\Longrightarrow$(*C* et *(non C))*] (Bernard et *al.*, 2018)

Dans notre Université, le raisonnement par l'absurde est au programme de la première UE (Unité d'Enseignement) de mathématiques de la Licence du Portail Mathématiques-Informatique. Son habitat[2] privilégié par ce programme est « Bases de logique : quantificateurs, équivalence, contraposée, négation, raisonnement par récurrence, par l'absurde. Ensembles. Inclusion, intersection, réunion, complémentaire, parties d'un ensemble E, produit cartésien.», chapitre qui apparaît en troisième position après les chapitres « calculs algébriques » et « nombres complexes » (dans la maquette 2022-2023, cet habitat devient le chapitre « Logique » en deuxième position après « calculs algébriques »). Les CM sont faits par des enseignants du Département de mathématiques différents suivant le parcours (classique ou aménagé) et la mention visée (mathématiques ou informatique). Nous abordons ci-après la question de l'institutionnalisation de cet objet dans ces différents CM en étudiant sa présence dans les polycopiés/notes de cours rédigés par les enseignants à destination des étudiants ainsi que l'ouvrage de référence[3] indiqué aux étudiants par tous ces enseignants.

Dans le CM mention mathématiques (parcours classique), l'habitat indiqué par le programme apparaît sous l'intitulé « Logique » (après les chapitres « Calculs algébriques » et « Ensembles et applications », l'ordre des chapitres indiqué par la programme n'étant pas respecté) et parmi les « techniques de preuve » retenues par l'enseignant(e) le raisonnement par l'absurde n'est pas présenté. Si on regarde l'ensemble du polycopié, on a confirmation que le raisonnement par l'absurde n'est pas institutionnalisé. Il est néanmoins utilisé quatre fois sous l'appellation « par l'absurde » dans les habitats « Calculs algébriques », « Suites réelles » et « Limites et continuité » avec pour niche :

2. Nous nous référons à l'approche écologique des savoirs (Artaud, 1998) qui définit les habitats d'un objet de savoir comme les différents lieux où on le trouve et les objets avec lesquels il entre en association. Et en chacun de ses habitats, la niche écologique qu'il occupe est la fonction avec laquelle il y vit.

3. Soyeur, A., Capaces, F., Vieillard-Baron, E. (2011) *Cours de Mathématiques Sup MPSI PCSI PTSI TSI*. Sésamath & les-mathematiques.net

prouver un résultat du cours. L'unique commentaire centré sur cette dimension organisatrice est fait dans le chapitre « Logique » lors de l'institutionnalisation du raisonnement dit ensembliste :

On a encore un avatar de la démonstration par l'absurde. Pour montrer $A \subset B$, on peut montrer que $(E - B) \subset (E - A)$:

Figure 0 - Extrait du CM mention mathématiques

Ce qui est doublement problématique : d'une part le mot « encore » ne fait écho à aucun commentaire dans ce qui précède et d'autre part il s'agit là d'un raisonnement par contraposée. A noter que nous avions aussi identifié cette confusion entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée dans les documents d'accompagnement des programmes du Lycée (Battie, à paraître).

Dans le CM mention informatique (parcours classique), on a l'extrait suivant dans l'habitat prévu :

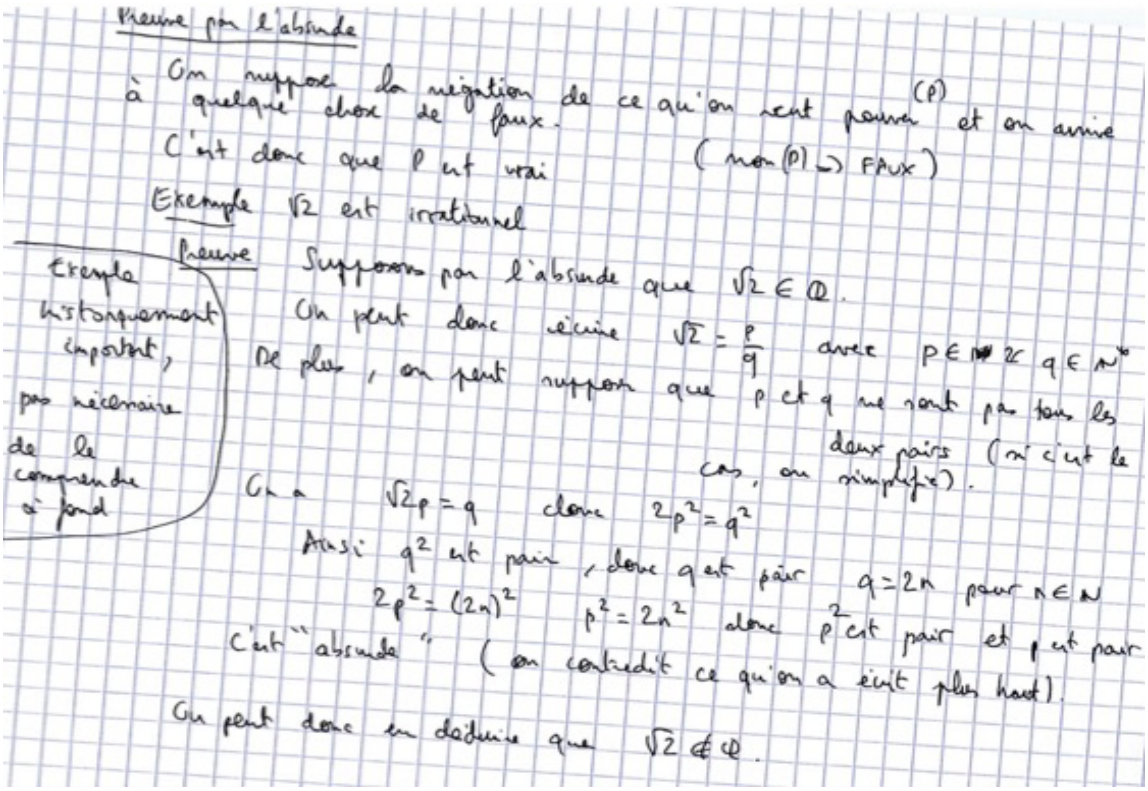


Figure 1 - Extrait du CM mention Informatique (parcours classique)

Le cas particulier d'une implication est laissé à la charge de l'étudiant(e) et, à travers l'exemple de la preuve communément dite d'Euclide, c'est exclusivement une dimension organisatrice de type 2 qui est présentée. Quant au commentaire « exemple historiquement important, pas nécessaire de le comprendre à fond », il nous laisse perplexe : la compréhension est-elle attendue exclusivement du côté de la dimension organisatrice ? La compréhension en termes de dimension opératoire et, de façon essentielle, d'interactions entre ces dimensions en écho à l'institutionnalisation en jeu serait-elle

laissée à la charge de l'étudiant(e) ? Pour approfondir l'étude, le discours accompagnant cet écrit serait éclairant.

Dans le CM parcours aménagé, on a l'extrait suivant :

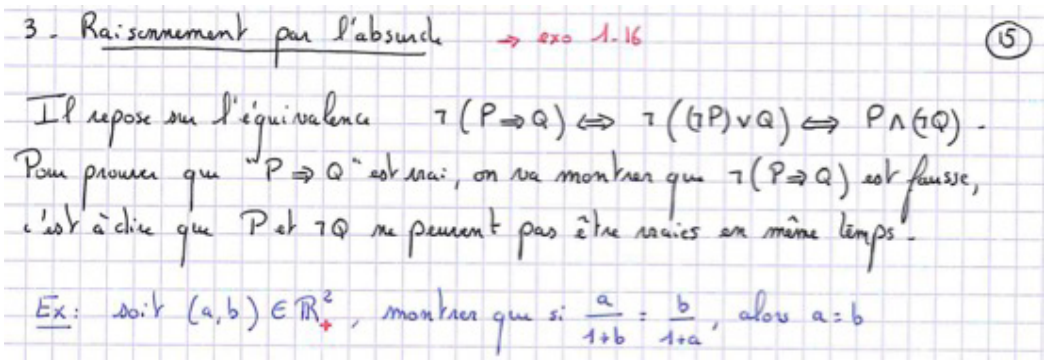


Figure 2 - Extrait du CM parcours aménagé

C'est à travers le cas particulier d'une implication que le raisonnement par l'absurde est institutionnalisé. Et avec la preuve de l'exemple choisi (non reproduite ici), c'est exclusivement une dimension organisatrice de type 2 qui est présentée. L'exercice mentionné fait référence à la feuille de travaux dirigés (TD) :

> « Sur une île, on trouve deux sortes de personnes : les sincères, qui disent toujours la vérité, et les menteurs, qui mentent toujours. Question 1 : Jules et Jim sont deux habitants de cette île. Jules déclare : « L'un d'entre nous deux au moins est un menteur ». En raisonnant par l'absurde, démontrer que Jules est sincère. Qu'en est-il de Jim ? Question 2 : Anne, Émilie et Charlotte sont trois habitantes. Anne déclare : « Nous sommes toutes menteuses ». Émilie dit : « Une et une seule d'entre nous est sincère ». En raisonnant par l'absurde, démontrer qu'Anne est une menteuse, puis qu'Émilie est sincère. Qu'en est-il de Charlotte ? »

On constate une double rupture par rapport au CM : cet exercice n'est pas formulé dans le domaine mathématique avec son langage spécifique, et il ne s'agit pas du cas particulier d'une implication pour la proposition à prouver. Soulignons que l'enseignant(e) propose le chapitre « Bases de logique » en premier chapitre.

Dans l'ouvrage de référence cité dans les trois CM, nous trouvons dans l'annexe « Techniques de démonstration », après l'institutionnalisation du raisonnement par contraposée, l'extrait suivant :

Remarque 1.3 On utilise souvent le *raisonnement par l'absurde* en mathématiques. On veut montrer qu'une proposition Q est vraie. On suppose Q fausse et on aboutit à une absurdité.
Formellement, on utilise une suite d'implications $\neg Q \implies Q_1, Q_1 \implies Q_2, \ldots, Q_{n-1} \implies Q_n$ toutes vraies, avec la proposition Q_n qui est fausse.

Exemple 1.3 Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On suppose par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel : il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = p/q$. En élevant au carré, $2q^2 = p^2$, mais alors 2 apparaîtrait à une puissance paire dans la décomposition en facteurs premiers de $2q^2$, alors qu'il apparaît avec une puissance paire dans la décomposition de p^2. On aboutit à une contradiction avec l'unicité de la décomposition en facteurs premiers d'un entier(voir le théorème 20.18 page 757). On généralise cette preuve pour montrer que si un nombre p est premier, le réel $\sqrt{p}$ est irrationnel.

Figure 3 - Extrait de l'ouvrage de référence commun aux CM

Le raisonnement par l'absurde est institutionnalisé dans le cas général et, de façon cohérente, l'exemple met en scène cette dimension organisatrice sous le type 1. A noter qu'une erreur apparaît dans la preuve, il faut lire « mais alors 2 apparaîtrait à une puissance impaire dans la décomposition en facteurs premiers de $2q^2$ ». La proposition Q_n s'identifie ici à « il existe un nombre impair égal à un nombre pair » ou encore « $1 \equiv 0 mod 2$ » en utilisant le langage des congruences. Il s'agit là de la preuve que nous qualifions de preuve fondamentale (Battie, 2007). Il est toutefois étonnant que l'institutionnalisation soit faite dans un paragraphe dédié à l'implication et qu'il reste à la charge de l'étudiant(e) de savoir mettre en oeuvre cette dimension organisatrice dans ce cas particulier.

Cette étude institutionnelle a mis à jour une diversité certaine dans les choix didactiques pour l'institutionnalisation du raisonnement par l'absurde au programme commun aux différents CM étudiés. L'éventail recouvre une non-institutionnalisation et des institutionnalisations diverses, plus ou moins réductrices d'un point de vue mathématique et épistémologique, ce qui donne à voir ce qui reste à la charge des étudiants. Les niches identifiées sont « être une technique de preuve » et « prouver un résultat du CM » et chacune d'elle est présente dans chaque élément du corpus. Il est à souligner que cette étude est exploratoire au sens où elle reste à approfondir notamment en analysant les « moments d'exposition des connaissances » (Bridoux et al., 2016). L'analyse du discours des enseignants qui accompagne les éléments écrits serait particulièrement éclairante, même si au-delà de l'étude l'institutionnelle et à la lumière des résultats propres aux pratiques des étudiants entrant à l'Université (Gueudet et Vandebrouck, 2019), cette voie méthodologique serait de moindre intérêt : tant l'assiduité des étudiants aux CM que l'impact du discours de l'enseignant(e) sur leurs apprentissages sont analysés au mieux comme faibles. Cette étude exploratoire du côté des CM pourrait être complétée lors du colloque de l'EMF en présentant les résultats de l'analyse d'un corpus élargi : feuilles des TD et sujets d'examens.

Analyse de copies d'étudiants

Nous analysons à présent une soixantaine de copies d'étudiants inscrits en 2021-2022 dans le parcours aménagé où nous intervenions comme chargée de TD. A l'issue de chaque chapitre, un test de 30 minutes a lieu et sa conception vise à situer les étudiants quant aux compétences-clefs du chapitre à travers des exercices considérés par l'équipe pédagogique comme applications relativement directes du CM et reprenant ce qui a été traité en TD. On se centre sur l'exercice suivant issu du premier test relatif au chapitre « Bases de logique » :

> En suivant un raisonnement par l'absurde, démontrer le résultat suivant : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Et une preuve attendue est la suivante :

> On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que n est le carré d'un entier et que $2n$ est le carré d'un entier. Il existe donc deux entiers non nuls k et m tels que $2n=m^2$ et 2. On obtient alors $2k^2=m^2$ d'où $2 = \frac{m^2}{k^2}$. En conclusion, il existe deux entiers non nuls m et k tels que $\sqrt{2} = \frac{|m|}{|k|}$, ce qui contredit l'irrationalité de . Le résultat mentionné dans l'énoncé de l'exercice est donc démontré.

Dans le prolongement du CM, la proposition à démontrer est formulée sous forme d'implication. Et en rupture avec l'exemple donné en CM, d'une part une quantification universelle apparaît[4] et c'est le type 1 (avec pour proposition C « $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel ») qui est à développer du côté de la dimension organisatrice. Deux premiers éléments-clefs de la dimension opératoire sont d'une part la double traduction opératoire de la propriété être un carré via l'existence de deux entiers à introduire dans la preuve et d'autre part le passage à la racine qui conduit à la sortie du domaine propre à l'arithmétique. Le résultat de la non-rationalité de $\sqrt{2}$ est au coeur des interactions entre dimensions organisatrice et opératoire : il est porteur de la mise à jour de la contradiction visée dans le raisonnement par l'absurde.

Dans le cadre de l'analyse *a priori*, nous donnons ci-après les exercices traités dans les quatre groupes de TD en lien avec le raisonnement par l'absurde, auxquels s'ajoute l'exercice cité précédemment dans l'étude institutionnelle :

> *Exercice 1-15* (principe des tiroirs). Soit n un nombre entier, $n \geq 1$. Démontrer que, si vous rangez $n + 1$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes. *Application* : un fichier contient 500 000 mots formés d'au plus quatre lettres de l'alphabet latin. Peuvent-ils être tous distincts ?

4. Le cas d'implications quantifiées universellement par une variable est une voie privilégiée pour travailler la distinction entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée.

Exercice 1-17. En mettant en œuvre un raisonnement par l'absurde, démontrer que le nombre réel $\sqrt{2}$ est irrationnel. On rappelle qu'un nombre x est rationnel si et seulement s'il existe deux entiers *p* et *q*, avec *q* non nul, tels que $x = \frac{p}{q}$.

Exercice 1-18. Soit $n \geq 1$ un nombre entier naturel. On se donne $n + 1$ nombres réels x_0, x_1 dans [0, 1] tels que $x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n$. On veut démontrer par l'absurde la propriété (P) suivante : il existe deux de ces nombres qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$ (inégalité large).

1. Écrire à l'aide de quantificateurs et de l'expression $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété (P).
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (P) (pour cela, on pourra chercher à prouver $x_n - x_0 > 1$).
4. Donner une nouvelle preuve de la propriété (P) en utilisant cette fois le principe des tiroirs.

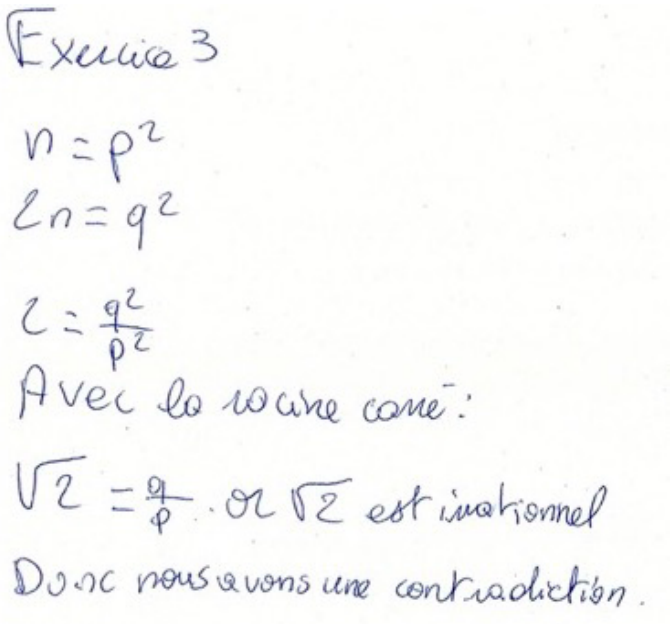
Ainsi, dans le prolongement du CM, la dimension organisatrice en jeu est abordée dans la diversité pointée dans le rappel mathématique et épistémologique précédent : proposition à démontrer non exclusivement sous la forme d'une implication et les types 1 et 2 pour le raisonnement par l'absurde sont en jeu (quelque soit la preuve privilégiée par les chargés de TD pour l'exercice 1-17). Dans le groupe que nous encadrions (groupe A), les exercices avaient été commentés de façon transversale en décontextualisant et spécifiant pour chaque exercice la dimension organisatrice en pointant les interactions avec la dimension opératoire

A posteriori, sur la base d'une soixantaine de copies analysées, seulement deux étudiants maitrisent la mise en œuvre complète du raisonnement par l'absurde. Et cinq d'entre eux savent comment démarrer (à la fois que *n* est un carré et *2n* aussi). Parmi les 7 copies où des points sont accordés, 4 sont celles d'étudiants du groupe A.

Il est à souligner que dans 15 copies des exemples sont mentionnés en guise de tentative de preuve. Le *théorème-en-acte*[5] « un ou plusieurs exemples suffisent à démontrer une proposition avec quantification universelle » est à l'origine de ces productions et, en référence à notre pratique enseignante, très résistant chez les étudiants de ce parcours. Enfin, 15 autres étudiants n'ont pas traité l'exercice.

Nous avons sélectionné certaines copies et en reproduisons trois ci-après. Dans la copie ci-dessous, les éléments-clefs du côté opératoire sont explicités (double traduction d'être un carré avec deux entiers distincts, passage à la racine et résultat de l'irrationalité de) mais seul le mot « contradiction » fait intervenir explicitement la dimension organisatrice :

5. « Un théorème-en-acte est une proposition tenue pour vraie dans l'activité […] » (Vergnaud, 2007). Il peut être vrai ou faux en référence au savoir savant (Chevallard, 1985).


Exercice 3

$n = p^2$

$2n = q^2$

$2 = \frac{q^2}{p^2}$

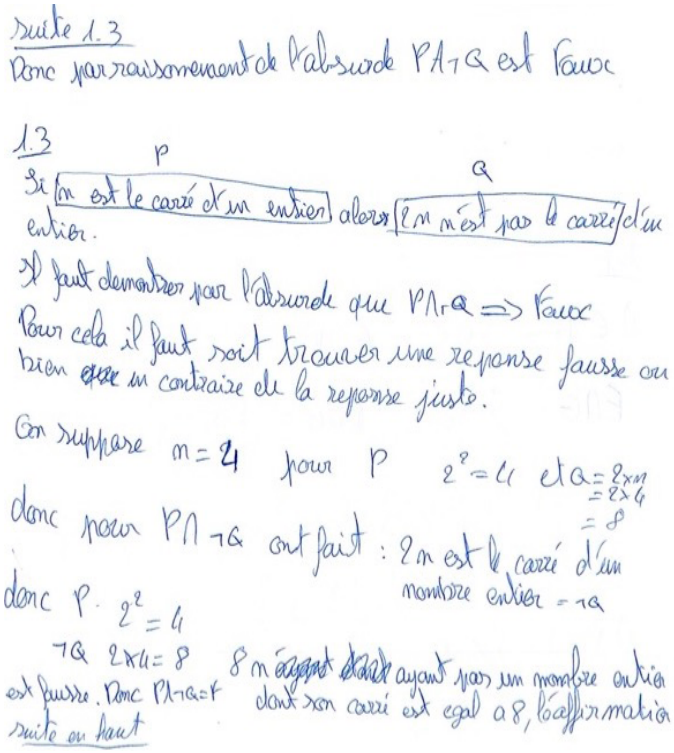
Avec la racine carré :

$\sqrt{2} = \frac{q}{p}$. or $\sqrt{2}$ est irrationnel

Donc nous avons une contradiction.

Figure 4 - Copie 1 (groupe B)

Toute quantification est absente tant du côté opératoire que du raisonnement par l'absurde. Ci-après, une autre copie :


Suite 1.3

Donc par raisonnement de l'absurde P∧¬Q est faux

1.3

P Q

Si n est le carré d'un entier alors 2n n'est pas le carré d'un entier.

Il faut démontrer par l'absurde que P∧¬Q ⇒ Faux

Pour cela il faut soit trouver une reponse fausse ou bien un contraire de la reponse juste.

On suppose $n = 4$ pour P $2^2 = 4$ et $Q = 2 \times n = 2 \times 4 = 8$

donc pour P∧¬Q ont fait : 2n est le carré d'un nombre entier ¬Q

donc P. $2^2 = 4$

¬Q $2 \times 4 = 8$ 8 n'ayant pas un nombre entier dont son carré est egal a 8, l'affirmation est fausse. Donc P∧¬Q=F

suite en haut

Figure 5 - Copie 2 (groupe A)

Est illustrée ici une mise en oeuvre du raisonnement par l'absurde parasitée du côté opératoire par le théorème-en-acte faux mentionné précédemment. Et c'est la dimension organisatrice qui guide prioritairement l'opératoire (erroné) développé par l'étudiant(e) ; ce phénomène avait été analysé dans (Battie, 2015). On retrouve le problème de la non prise en compte de la quantification en jeu pour l'objet *n*. Nous reproduisons une dernière copie :

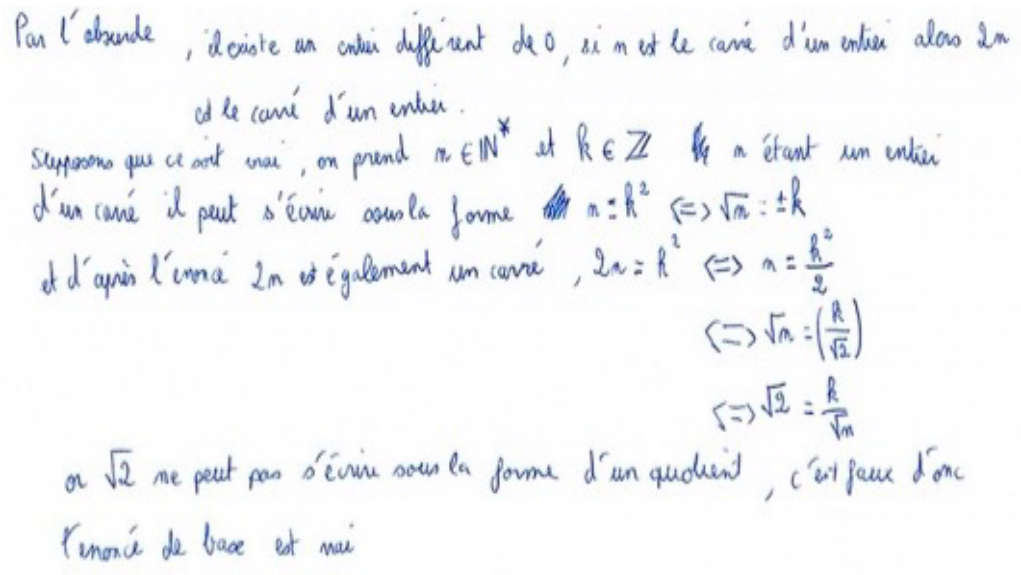


Figure 6 - Copie 3 (groupe C)

Du côté de la dimension organisatrice, la négation de l'implication est formulée sous forme d'une implication (et non d'une conjonction) alors qu'au sein de la dimension opératoire, les propositions « *n* est un carré » et « 2*n* est un carré » interviennent au titre d'hypothèses. On propose d'interpréter cela en termes de rupture entre la conceptualisation du raisonnement par l'absurde et sa mise en pratique par l'étudiant(e). Le passage à la racine et le résultat de non-rationalité apparaissent mais la double traduction opératoire de « être un carré » est problématique car les entiers en jeu sont supposés égaux.

Remarques conclusives

Avant la réforme du Lycée en France, il semblait déjà que « la première année ne permette pas le développement souhaitable des modes de raisonnement » (Gueudet et Vandebrouck, 2019). Il est à craindre que la faible prise en compte de la réalité des nouveaux publics entrant à l'Université n'aide pas à une amélioration de cette situation. De plus, dans le cadre des échanges avec les collègues au sujet de la nouvelle maquette universitaire (rentrée 2022-2023) une position extrême a été mise à jour : « en niveau 1, il faut bannir tout raisonnement ». En appui sur nos travaux en didactique des mathématiques articulés avec notre pratique enseignante, nous pensons bien au contraire qu'il faut amorcer ce travail dès que possible. L'enjeu est que progressivement les étudiants gagnent en

contrôle dans le développement à la fois des dimensions organisatrice et opératoire en étant outillés pour exploiter leurs spécificités respectives et, de façon essentielle, d'une claire conscience des interactions entre ces deux dimensions dans l'élaboration d'une preuve en appui sur les connaissances nécessaires sur la logique et la quantification articulées avec les concepts mathématiques.

Références

Artaud, M. (1998). Introduction à l'approche écologique du didactique – L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la neuvième école d'été de didactique des mathématiques*.

Battie, V. (2003). Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique. Université Paris 7 - Denis Diderot.

Battie, V. (2007). Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse des raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques, *Recherches en didactique des mathématiques, 27*(1).

Battie, V. (2015). Arithmétique et raisonnement mathématique en classe de terminale C&E au Gabon. *Revue africaine de didactique des sciences et des mathématiques*, 12.

Battie, V. (à paraître). Pouvoir générique d'une preuve. *Actes du XXVII^{ème} colloque CORFEM*.

Bridoux, S., Grenier-Boley N., Hache, C., Robert, A. (2016) Anciennes et nouvelles questions sur l'enseignement supérieur, un exemple de recherches actuelles sur l'exposition des connaissances. *Actes du séminaire national de l'ARDM*.

Bernard, D., Gardes D., Gardes M.-L., Grenier D. (2018). Une étude didactique du raisonnement par l'absurde pour le Lycée. *Petit x*, 108, 5-40.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.

Gueudet G., Thomas, M.O.J. (2020) Secondary-Tertiary transition in Mathematics Education. In Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer.

Gueudet, G., & Vandebrouck, F. (2019). *Entrée dans l'enseignement supérieur, éclairages en didactique des mathématiques*. CNESCO.

Hanna, G., Knipping, C. (2020) Proof in mathematics education, 1980-2020: An Overview. *Journal of Educational Research in Mathematics*, Special Issue.

Vergnaud, G. (2007) Représentation et activité : deux concepts étroitement associés. *Recherches en Education* 4.

Titre: Premiers pas dans l'élaboration d'une séquence visant la propriété de complétude de l'ensemble des nombres réels

Auteurs: BERGÉ Analia, TANGUAY Denis et BARALLOBRES Gustavo

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 499 - 513

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Premiers pas dans l'élaboration d'une séquence visant la propriété de complétude de l'ensemble des nombres réels

BERGÉ[1] Analia – TANGUAY[2] Denis – BARALLOBRES[3] Gustavo

Résumé – Nous présentons une séquence d'enseignement visant à problématiser la non-complétude de / et la complétude de γ. Nous rendons compte d'une expérimentation de la première phase de la séquence, durant laquelle deux étudiants devaient trouver une paire de suites adjacentes rationnelles qui ne convergent pas. Les étudiants sont incités à montrer la non-convergence des deux suites qu'ils proposent « en restant dans / ». Ils ne comprennent pas bien la finalité de cette exigence, qui est discutée.

Mots-clefs : incomplétude des rationnels, complétude des réels, suites adjacentes, convergence.

Abstract – We present a teaching sequence aimed at problematizing the non-completeness of / and the completeness of γ. We report on an experiment of the first phase of the sequence, during which two students had to find a pair of rational adjacent sequences that do not converge. The students are asked to show the non-convergence of the two sequences they propose "without getting out of /". They don't understand well the purpose of this requirement, which is discussed.

Keywords: incompleteness of the rationals, completeness of the reals, adjacent sequences, convergence.

1. Université du Québec à Rimouski (UQAR), Québec, analia_berge@uqar.ca

2. Université du Québec à Montréal (UQAM), Québec, tanguay.denis@uqam.ca

3. Université du Québec à Montréal (UQAM), Québec, barallobres.gustavo@uqam.ca

Objet d'étude

Nous faisons l'hypothèse qu'une bonne compréhension de l'ensemble des nombres réels est nécessaire pour travailler avec des suites et des fonctions au niveau post-secondaire. Nous tenons pour acquis que l'un des aspects à considérer est l'apprentissage de la propriété de complétude de ce corps ordonné. Rappelons que, puisque γ est complet, on est assuré que l'intersection de toute suite d'intervalles fermés emboîtés dont les longueurs tendent vers zéro est un nombre ; que tout ensemble non vide et majoré possède un supremum ; que le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) est vérifié ; que toute suite fondamentale (ou « de Cauchy ») possède une limite de même que toute suite croissante majorée ou que toute suite décroissante minorée ; que tout développement décimal fini ou infini, périodique ou non, est un réel bien défini. Tous ces énoncés sont utilisés en *Analyse réelle* pour prouver l'existence de nombres sous certaines conditions, ils y sont donc mis en jeu à l'intérieur d'un cours où une bonne partie du travail est axé sur les définitions et les preuves. Aucun de ces énoncés n'est valable dans un sous-corps de γ non complet tel que /, le corps des rationnels. Dans un premier temps, deux éléments nous sont apparus importants à retenir pour plonger dans le travail didactique :

1. la compréhension d'au moins l'un de ces énoncés (à quoi ils servent, d'où ils viennent, sur quoi ils informent, ce qui se passe quand ils ne sont pas vérifiés...),

2. la possibilité que ces énoncés soient compris comme équivalents par quelqu'un qui apprend, comme une étape dans l'apprentissage des démonstrations d'équivalences.

Nous avons avancé à propos du premier de ces deux éléments.

Éléments contextuels

Nous avons en tête les étudiants universitaires en sciences ou en formation des enseignants, en mathématiques. De toutes les expressions de la complétude de ¡ mentionnées plus haut, nous évaluons que les plus proches des étudiants, les plus facilement accessibles à l'intuition, sont : « toute suite croissante majorée converge » et « Le TVI est vérifié ». Il nous a donc semblé souhaitable d'élaborer des situations d'apprentissage qui viseraient d'abord ces énoncés. En outre, le premier permet de donner un sens mieux justifié théoriquement qu'à tout développement décimal, même infini non périodique, correspond un nombre, nombre qu'on peut définir comme la limite de la suite (croissante majorée) des développements tronqués. Ce sens permet à son tour de justifier plus rigoureusement l'égalité 0,9999... = 1, si épineuse pour de nombreux étudiants (cf. Vivier, 2015).

Comprendre la complétude de γ, c'est d'abord prendre acte de l'incomplétude de /, autrement dit comprendre qu'il manque à / quelque chose que γ possède. Pour les étudiants, il est clair que ce qui manque à / ce sont les irrationnels, quoique ces derniers sont généralement considérés *individuellement* ou par *sous-ensembles* ($\sqrt{2}$, π, e, les racines non entières, les zéros de certains polynômes...) :

voir par exemple Vergnac et Durand-Guerrier (2014), Bergé (2008), Bronner (1997)... Or, la complétude n'est pas nécessairement en jeu si l'on considère les irrationnels ainsi ; par exemple, le corps des nombres algébriques n'est pas complet. Compléter γ, c'est ajouter tous les irrationnels ; il devient alors nécessaire de les définir d'une façon ou d'une autre, autrement que par des énoncés vagues et circulaires du style « γ c'est l'ensemble de tous les nombres », et « les irrationnels sont les réels qui ne sont pas rationnels ». Il faut alors les considérer par le biais d'une *propriété* qui distinguera γ de /, en tant que corps ordonnés. La description circulaire peut convenir jusqu'à un certain stade de la scolarité, mais doit être défaite si l'on veut avancer dans la conceptualisation des ensembles numériques. Selon le niveau de scolarité considéré, d'autres descriptions de γ ont cours, par exemple celles qui renvoient à « l'ensemble des nombres en bijection avec les points de la droite », ou à l'ensemble de « toutes les longueurs possibles, chacune avec son opposée ». Elles reposent sur l'objet *droite numérique*, dont la définition partage les mêmes enjeux que ceux de définir γ, et où par ailleurs la complétude n'est pas « visible », γ et / ne se distinguant pas graphiquement (Durand-Guerrier, 2016). En outre, le recours aux représentations graphiques peut donner lieu à des conceptions qui se posent en obstacle à une conceptualisation numériquement adéquate des réels : voir par exemple Tanguay, Bergé et Barallobres (2020).

L'histoire des mathématiques nous laisse savoir que le travail en analyse s'est longtemps accompli sans prendre appui sur une définition (formelle) de γ, la définition de γ comme corps ordonné complet datant du dernier tiers du 19e siècle. Les premières explicitations de la complétude trouvent leur origine précisément dans la nécessité de disposer d'un domaine numérique bien défini, afin d'asseoir le travail sur des bases solides, par exemple pour démontrer (rigoureusement, autrement que par le recours à l'évidence perceptive) le TVI et s'assurer de la convergence des suites fondamentales (Bergé et Sessa, 2018).

D'un point de vue didactique, cela place devant un défi : pour que la définition de γ ait un sens aux yeux des étudiants, il est nécessaire de générer son besoin. Le besoin que nous visons n'est pas celui de pouvoir compter sur les irrationnels, mais d'avoir un système numérique dans lequel le travail en analyse puisse être validé ; notamment par la *preuve*.

Premiers pas dans l'élaboration d'une séquence

Nous avons élaboré des séquences d'enseignement à partir des prémisses exposées ci-dessus. Celle que nous nous apprêtons à décrire prévoit deux phases. Nous voulons y susciter la prise de conscience que le TVI nécessite un domaine numérique complet pour être valable. Pour suggérer l'idée qu'ajouter des nombres « à la pièce » pourrait être inopérant, que c'est bien plutôt une ***propriété*** de γ non valable dans / qui donne accès au zéro suggéré par la représentation graphique, nous avons choisi pour zéro un irrationnel aussi éloigné que possible de ceux que les étudiants conçoivent spontanément, un zéro qui ne s'exprime pas comme une combinaison finie de racines, de rationnels et des nombres transcendants usuels, en l'occurrence le zéro de $g(x) = 30x^5 + x + 13$. La **2e phase de**

la séquence consiste donc à montrer, à partir des arguments « classiques » de divisibilité conduits sur les coefficients, que la fonction g n'a pas de zéro rationnel. On demande ensuite d'expliquer « comment construire le développement décimal du zéro par approximations successives », à partir de deux suites adjacentes. La construction attendue se fait en considérant des paires de développements finis de plus en plus rapprochés, entre lesquels *g* change de signe. Les suites adjacentes ne constituant pas un concept familier des étudiants auprès de qui nous comptions expérimenter, elles faisaient, justement, l'objet de la **1re phase de la séquence**. La voici :

Dans les tâches qui suivent, on travaille dans /. On appelle *suites adjacentes rationnelles* deux suites $(u_n)_{n\in\infty}$ et $(v_n)_{n\in\infty}$ de rationnels, satisfaisant :

a) la suite $(u_n)_{n\in\infty}$ est croissante c'est-à-dire que pour tout $n\in\infty$, $u_n \leq u_{n+1}$,

b) la suite $(v_n)_{n\in\infty}$ est décroissante c'est-à-dire que pour tout $n\in\infty$, $v_{n+1} \leq v_n$,

c) la suite $(v_n - u_n)_{n\in\infty}$ converge vers 0.

1. Soit $(u_n)_{n\in\infty}$ et $(v_n)_{n\in\infty}$ deux suites adjacentes de rationnels. Montrez que pour tout $n\in\infty$, pour tout $m\in\infty$, $u_n \leq v_m$. *Indice :* preuve par contradiction.
2. Trouvez $(u_n)_{n\in\infty}$ et $(v_n)_{n\in\infty}$, deux suites adjacentes de rationnels, qui convergent dans /. Vous devez donner une règle de formation ou un algorithme qui permettent de calculer explicitement chacun des termes de ces suites (aussi grand en soit le rang). Attention, tous les termes de ces suites doivent être dans /.
3. a) Est-il possible d'avoir deux suites adjacentes de rationnels dont l'une converge (dans /) et l'autre pas ? b) Est-il possible d'avoir deux suites adjacentes de rationnels qui convergent (dans /) vers deux limites distinctes ? Justifiez vos réponses.
4. Trouvez $(u_n)_{n\in\infty}$ et $(v_n)_{n\in\infty}$ deux suites adjacentes de rationnels qui ne convergent pas dans /. Vous devez donner une règle de formation ou un algorithme qui permet de calculer explicitement chacun des termes de ces suites, et prouver que les suites ne convergent pas dans /, c'est-à-dire qui soient telles que quel que soit $q\in$, q n'est pas la limite de ces suites.

En plus de familiariser les étudiants avec les suites adjacentes, la première phase permet un premier abord de l'incomplétude de / : il y a dans / des suites adjacentes qui ne convergent pas (tâche 4). Des étudiants bien allumés qui répondent correctement aux tâches 1 et 4 peuvent également déduire qu'il y a dans / des suites croissantes majorées, et décroissantes minorées, qui ne convergent pas. En effet par la tâche 1, $(u_n)_{n\in\infty}$ croissante est majorée par n'importe quel des vi, et $(v_n)_{n\in\infty}$ décroissante est

minorée par n'importe quel des u_j, les deux suites adjacentes à trouver en 4 illustrent donc chacune ces autres formes de l'incomplétude (de /).

Dû au manque d'espace, nous nous restreignons à la 1re phase de la séquence, et n'entrerons pas dans l'analyse détaillée de chaque tâche. Nous nous contenterons des éléments centraux, et nous attacherons plus longuement à la tâche 4, qui porte directement sur l'incomplétude de /.

La preuve par contradiction attendue à la tâche 1 consiste à supposer qu'il existe n_0 et m_0 tels que $u_{n_0} > v_{m_0}$. Puisque $(u_n)_{n\in\infty}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\infty}$ décroissante, on aurait, pour tout $n \geq \max\{n_0, m_0\}$, que $u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{m_0} > 0$, si bien que la condition $|u_n - v_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, équivalente à la condition c) de la définition, ne peut être satisfaite. Pour être rédigé formellement, ce dernier élément de preuve nécessite de travailler avec la négation de la définition de limite, ce qui peut être ardu pour les étudiants. L'intention n'est pas ici d'insister sur les preuves formelles, l'objectif est plutôt de mieux faire comprendre ce qu'est une paire de suites adjacentes.

C'est aussi l'objectif de la tâche 2, des exemples simples étant relativement faciles à trouver, par exemple $u_n = q$ (suite constante, avec $q\in\square$) et $v_n = q + \frac{1}{n}$. Pour montrer que $(v_n - u_n)_{n\in\infty}$ converge vers 0, on peut se contenter ici aussi d'une preuve informelle.

La tâche 3 cherche à amener les étudiants à creuser la question de la convergence de deux suites adjacentes sans énoncer explicitement que dans P, de telles suites sont forcément convergentes. Il est bien sûr impossible d'avoir deux suites adjacentes qui convergent vers des limites distinctes. La preuve par contradiction demande cependant une assez bonne maîtrise des arguments ε-*N*, sans parler des inégalités (dont celle du triangle) et de la valeur absolue.

La 2e question de la tâche 3 peut mettre sur la piste d'une preuve plus accessible et qui en fait, montre les deux résultats en même temps. Si l'une des deux suites converge, disons (u_n) vers $L \in \square$, alors l'autre converge forcément vers la même limite. L'argument en ε-*N*, plus facile, peut aller comme suit, aux détails près :

$$|v_n - L| = |v_n - u_n + u_n - L| \leq |v_n - u_n| + |u_n - L| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Cette tâche 3 sert de « préalable » à la tâche 4, et chacune des deux sous-questions pourrait intervenir dans le raisonnement escompté en 4.

Pour la tâche 4, nous attendons des étudiants qu'ils proposent une solution du style : (u_n) et (v_n) sont les approximations décimales successives à l'ordre *n*, respectivement par défaut et par excès, de $\sqrt{2}$ ou de tout autre irrationnel. Dans l'énoncé, la directive sur l'algorithme vient de l'intérêt de faire produire la paire de suites adjacentes *sans utiliser explicitement un développement décimal* déjà

donné, par exemple celui de l'affichage d'une calculatrice. L'idée est de plonger l'étudiant dans un monde où les réels ne sont pas disponibles *a priori*, et où ces suites adjacentes non convergentes se construisent *sans sortir des rationnels*.

La construction attendue, par exemple à partir de $\sqrt{2}$, est relativement standard. On part avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ (puisque $1^2 < 2$ et $2^2 > 2$), on poursuit avec $u_1 = 1{,}4$ et $v_1 = 1{,}5$ (puisque $(1{,}4)^2 < 2$ et $(1{,}5)^2 > 2$), suivi de $u_2 = 1{,}41$ et $v_2 = 1{,}42$ (puisque...), etc. On n'a à l'étape n que neuf essais à faire, un pour chacune des décimales possibles à l'ordre n. Clairement par construction, $v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$. Le fait que (u_n) est croissante est immédiat (une décimale s'ajoute), celui que (v_n) est décroissante l'est un peu moins. Mais la difficulté est surtout de montrer, sans utiliser explicitement le nombre $\sqrt{2}$, que $(u_n)_{n\varepsilon\infty}$ et $(v_n)_{n\varepsilon\infty}$ ne convergent pas en tant que suites de $\mathbf{\Theta}$.

La feuille des résultats que nous avions prévu donner aux étudiants en guise de rappel (voir Annexe) visait en particulier à donner des outils pour mener à bien cette preuve. Supposons qu'au contraire, l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) converge dans $\mathbf{\Theta}$. La conclusion de la tâche 3 permet de déduire que les deux suites convergeront vers la même limite $L\varepsilon\mathbf{\Theta}$. Or par construction, $u_n^2 < 2 < v_n^2$ (*), et

$|v_n - u_n| = v_n - u_n = \frac{1}{10^n} \Rightarrow v_n^2 - u_n^2 = (v_n + u_n)(v_n - u_n) \leq \frac{4}{10^n}$ (ni u_n ni v_n ne dépassant 2),

si bien que par (*) on peut écrire, $\left|u_n^2 - 2\right| = 2 - u_n^2 < v_n^2 - u_n^2 \leq \frac{4}{10^n}$, ce qui implique que (u_n^2) a

pour limite 2. Si (u_n) avait pour limite $L\varepsilon\mathbf{\Theta}$, alors (u_n^2) aurait pour limite L^2 (résultat 8 de l'annexe) et comme la limite d'une suite est unique (résultat 9 de l'annexe), on aurait $L^2 = 2$ ce qui est impossible, sachant qu'aucun rationnel n'a pour carré 2. Bien entendu, nous sommes conscients que les étudiants risquent de se contenter de l'argument : « par construction, la distance de u_n à $\sqrt{2}$ est inférieure à 10^{-n} puisque $\sqrt{2}\varepsilon\ ]\, u_n\, ,\, v_n\, [$, donc (u_n) converge vers $\sqrt{2} \notin \mathbf{\Theta}$ et n'est pas convergente dans $\mathbf{\Theta}$ ». Nous reviendrons sur ce point dans les sections suivantes.

Rester dans Θ pour définir γ

Revenons sur cette idée d'éviter l'utilisation explicite du nombre $\sqrt{2}$ (ou de tout autre irrationnel en jeu) pour la tâche 4. L'intention est ici de mettre en évidence qu'un énoncé — comme la convergence des suites adjacentes — dont la validité doit être assurée pour bien développer l'analyse, n'est pas vrai si l'on est cantonné à □ . On peut penser qu'un étudiant qui justifie sa réponse en arguant simplement que la limite est (un irrationnel) hors de □ n'aurait pas saisi cette intention de la tâche. Selon sa compréhension, il n'y a pas de manque, et il n'y a pas de problème : les suites adjacentes ont été construites de sorte qu'elles convergent vers un irrationnel, il est donc clair pour l'étudiant qu'elles ne convergent pas dans □ ! Mais alors il pourrait s'interroger sur cette directive relative à l'algorithme à produire, alors que pour lui il suffit d'effectuer des troncatures directement sur l'expansion décimale de l'irrationnel en cause.

Tenir pour acquis l'existence de cette limite revient à tenir pour acquis que □ est plongé dans □, la réunion des rationnels et des irrationnels ; mettant ainsi bien en évidence la définition des nombres réels que les étudiants ont en tête. La question « pourquoi et comment compléter □ ? » est alors éludée, □ étant disponible. Le problème, c'est qu'on ne peut éviter que la solution soit pensée à partir de cette prémisse — les deux suites convergent vers un irrationnel —sans quoi on n'arrive tout simplement pas à trouver une solution à la tâche 4.

Bien sûr, les constructions de γ, conduites pendant la 2e moitié du 19e siècle, se sont toutes élaborées *à partir* des rationnels. Les mathématiciens qui ont ainsi défini γ — Cantor, Dedekind et d'autres — se trouvaient en mode « validation du travail mathématique », la question en était une de *fondements*. Mais ce n'est généralement pas le mode de travail d'un étudiant qui fait face à un problème proposé par son enseignant. Nous faisons l'hypothèse que des interventions de l'enseignant devront complémenter les tâches afin de favoriser l'accès à la non-complétude de □ et à la complétude de γ, en tant que propriétés intrinsèques. Nous avons expérimenté la séquence pour, entre autres, avancer sur cette hypothèse.

La situation expérimentée en laboratoire

Nous avons proposé la séquence à deux étudiants[4], en laboratoire (hors cours), pendant l'été. Le travail s'est déroulé en deux séances, la 1re d'une durée de trois heures, la 2e de deux heures. Il s'agissait de deux étudiants à la maîtrise en didactique des mathématiques. Les séances ont été filmées et à chaque séance, deux chercheurs étaient présents. Comme nous l'avons déjà mentionné, une feuille de rappels était fournie. Il s'agissait d'un répertoire de résultats en principe déjà connus des étudiants — chacun avait suivi un cours d'analyse dans sa scolarité de 1er cycle — et qui pourraient leur être utiles dans la résolution.

Pour cet écrit, nous nous attachons principalement à la résolution de la tâche 4, phase 1. Dans ce qui suit, les deux étudiants sont désignés par E_1 et E_2.

Les étudiants ont proposé des solutions valables, bien qu'un peu approximatives du point de vue du formalisme, aux trois premières tâches. Ils attaquent la tâche 4 et demandent s'ils peuvent construire deux suites adjacentes qui convergent vers un irrationnel puisque dans ce cas, étant donné l'unicité de la limite, ces suites ne seront pas convergentes dans □ :

E_1 : « OK, mais est-ce que pour montrer ça... on peut montrer que c'est... Parce que si la limite est unique [référence au point 9 de la feuille des rappels], ... et puis, que la limite est dans les irrationnels, nécessairement, il en n'existe pas [de limite]... dans les rationnels... Est-ce que ça fonctionne ? »

4. Le masculin est utilisé pour alléger le texte, tant pour les étudiants que pour les chercheurs.

Il est clair pour E1 que les suites adjacentes ayant une telle limite ne convergeront pas dans □. La restriction de rester dans □ n'est pas considérée pour l'instant par les étudiants. Les chercheurs avaient convenu de « ramener les étudiants à □ » si une question de la sorte émergeait. L'un des chercheurs souligne que l'énoncé d'unicité du point 9 porte sur les suites réelles et que la tâche porte sur des suites rationnelles. Les étudiants acquiescent et se lancent dans des essais. Ils considèrent d'abord $\left(\sqrt{2}-\frac{1}{n}\right)$, mais E2 repère rapidement que les termes ne seront pas rationnels. Ensuite, ils veulent « construire » un irrationnel en considérant des séries, ils envisagent $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$ pour s'assurer qu'il n'y ait pas de période, mais ne voient pas comment mener l'argument à bien et l'abandonnent. Ils proposent de se donner une suite qui converge à 2 et de prendre la racine carrée de chaque terme, mais E_2 soulève à nouveau le problème de la rationalité de chaque terme. E_2 dira : « j'ai de la difficulté à voir comment on peut avoir une suite de rationnels qui tende vers un irrationnel, ... sans avoir d'irrationnels dans les termes. »

L'un des chercheurs répond : « Que vous utilisiez √2 pour penser, c'est pas grave, mais ensuite il faut montrer que ces deux suites ne convergent pas en □, pas en présupposant qu'il existe d'autres nombres... » Le chercheur suggère que pour contourner le problème, on peut penser à « élever au carré » plutôt que de « prendre la racine carrée ». E1 propose de construire une suite rationnelle croissante à partir de 1,4 en ajoutant successivement les décimales de √2 ; l'un des chercheurs mentionne qu'ils ne connaissent pas d'emblée toutes les décimales de √2, et les invite à penser la question en termes d'un algorithme ou d'une règle formation tel que mentionné dans l'énoncé de la tâche, en restant dans □. Après quelques essais les étudiants en viennent à proposer une construction récursive de u_n en testant une à une chacune des décimales possibles à ajouter à u_{n-1}, vérifiant à chaque fois que le carré est bien en dessous de 2. La suite (v_n) n'est pour l'instant pas considérée, mais E_1 dira aux chercheurs : « Là, on a juste travaillé sur *u* ». E_2 ajoute aussitôt : « mais c'est le même principe pour *v*, il faut juste qu'elle aille de l'autre sens [geste descendant de droite à gauche]. »

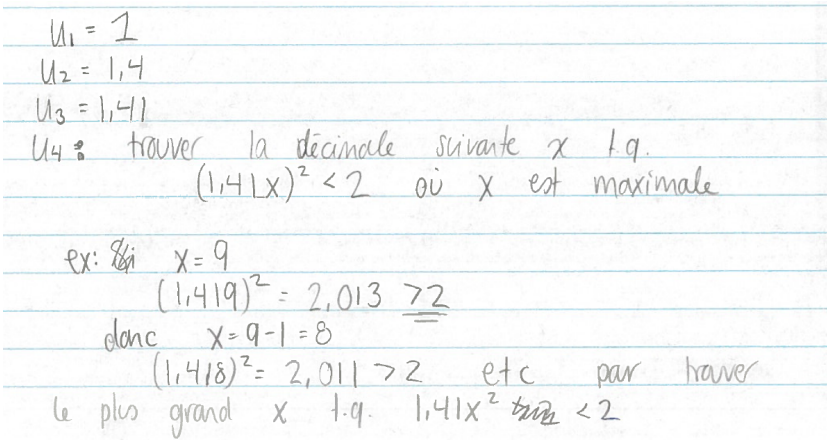


Figure 1 – Les étudiants trouvent un algorithme

Les étudiants expliquent leur algorithme et ils sont fiers de leur travail. À la question d'un des chercheurs, « comment êtes vous certains que ces suites ne convergent pas dans □ ? », E2 répond : « Par la

construction qu'on fait, les deux suites convergent vers √2, parce qu'on les construit comme ça. Donc forcément elles vont converger... en dehors de □ . » Un chercheur revient sur la question de ne pas s'appuyer sur l'existence de √2 pour la justification : « Le problème c'est, si on accepte cet argument, on sort de □ . [...] Dès que tu nommes √2, on est sorti de □ … » Les étudiants sont perplexes ; cette restriction ne semble pas avoir de sens pour eux. E_1 dira, après un temps : « il faut prouver, ... chaque fois qu'on pense que ça converge, c'est pas un rationnel, ... je sais pas comment mieux l'expliquer. » E_1 et E_2 cherchent ardemment dans le répertoire de résultats, évoquent la propriété d'Archimède, repèrent l'énoncé 8 dans cette feuille. E_2 : « On a basé notre argument sur le carré de la limite, est-ce qu'on est capable de faire le chemin inverse de cet argument-là ? » Ils ont l'impression que les implications intégrées à l'énoncé 8 ne vont pas dans le bon sens. E_1 pense à haute voix à une preuve par contradiction. Devant l'hésitation de E_1 et E_2, l'un des chercheurs va amorcer le raisonnement : « Elles [les suites construites] ne convergent pas dans □ . Si elles convergeaient dans □ , alors... » Ça y est, E1 a un « flash » et complète correctement le raisonnement par l'absurde basé sur l'énoncé 8, sachant que le carré de la limite rationnelle alléguée serait de 2, alors qu'aucun rationnel n'a son carré égal à 2. C'est l'heure du midi, le bilan sera fait au début de la séance de l'après-midi.

Et la complétude de γ ?

Nous avons pu constater, à plusieurs reprises, la mention de √2 par les étudiants et l'insistance des chercheurs pour ne pas faire appel à ce nombre dans l'argumentation. La condition de rester dans □ semble artificielle pour les étudiants. Est-il possible de « légitimer » cette situation sans qu'elle soit perçue comme un caprice des chercheurs ou des enseignants ?

Au retour en après-midi, les chercheurs demandent : « quelles conclusions pouvez-vous tirer du travail accompli ? » Les réponses des étudiants tournent d'abord autour des suites adjacentes, un concept nouveau pour eux. Ils mentionnent rapidement le fait que les suites adjacentes pourraient ne pas converger dans □ . La question est soulevée de savoir si « intuitivement », elles « devraient » converger [sous-entendu « dans les réels »]. *E2* : « j'ai de la difficulté à voir deux suites qui divergent [dans les réels], et qui répondent quand même au critère c) [de la définition]. » Il a peut-être pensé à deux suites divergentes dans le sens usuel du terme, c'est-à-dire de limite infinie. L'un des chercheurs veut préciser la question initiale et demande : « si l'on pense qu'on a conçu ces activités pour enseigner quelque chose avec ces 4 tâches, d'après vous ce serait quoi ? » E_1 est hésitant, n'est pas sûr de ce que nous attendons, et mentionne : « les définitions de limite, mais on les savait donc elles seraient comme, 'déjà enseignées'. » E_2 : « Oui, il y a plusieurs propriétés qui sont, ... réinvesties, dont la 8 [cf. feuille en annexe], qu'on a utilisée dans le dernier numéro. ... Puis aussi, de construire des suites, qui convergent, qui divergent... ».

L'un des chercheurs intervient : « Vous avez construit une suite, ... qui divergeait, c'est-à-dire..., qui *ne convergeait pas*, disons ; elle n'allait pas à l'infini, la suite... Cette partie-là de la tâche, qu'est-ce qu'elle a évoqué en vous ? » E_2 : « Bien déjà, qu'il y ait une suite de nombres rationnels qui converge vers un

nombre irrationnel, je trouvais ça intéressant, ça m'a même déstabilisé, peut-être... [Il précise :] C'est la façon de faire qui m'a déstabilisé, de construire √2 comme on l'a fait. » E_1 : « oui, *sans parler* de √2. Et aussi l'importance de, dans quoi la suite converge, moi le 4 [la tâche 4], c'est surtout ça qui m'a mis au défi. C'est pas que la suite converge jamais, c'est qu'elle converge pas *dans*... les rationnels. Elle peut converger... ailleurs. » L'autre chercheur demande si le fait de ne pas converger dans les rationnels poserait problème ; il ne semble pas poser problème pour eux que deux suites adjacentes rationnelles ne convergent pas dans tant que **γ** est là.

Après hésitations et discussions, notamment sur la nécessité ou non, pour une paire de suites adjacentes, de converger, un chercheur relance avec la question : « Si on avait posé exactement le même problème, mais en plongeant tout dans **γ**, est-ce que vos conclusions auraient été les mêmes ? » *E1* : « Je pense que le 4 aurait pas été possible. Parce que deux suites qui convergent pas, dans **γ**… leur différence peut pas converger vers 0… C'est dur de s'imaginer le comportement d'une suite qui ne converge pas… » L'idée de non-convergence dans **γ** semble déstabilisante, difficile à concilier avec la notion de suites adjacentes. Après un moment, l'un des chercheurs pose la question : « D'une certaine façon, est-ce qu'on ne peut pas dire que... [...] est-ce qu'il n'y a pas derrière ça un travail sur la structure de , et de **γ** ; [de] en comparaison de la structure de **γ** ? » E_2 mentionne : « On l'a remarqué un peu dans la question 4, quand on était limité aux rationnels... je ne sais pas… je ne sais pas si j'ai remarqué un travail... sur la compréhension de la construction des deux ensembles, mais... les contraintes que ça a amené, ça a amené un travail différent dans la résolution de la tâche, je pense. Si on plongeait tout dans les réels, les contraintes auraient agi différemment [...] mais je ne sais pas si j'aurais réfléchi sur la *construction* des ensembles. » L'idée de faire une distinction entre les structures de et de **γ** ne semble pas émerger pour eux du travail effectué. Leurs hésitations montrent que le problème de la différence entre et ¡ ne se pose pas en termes clairs, et qu'ils ne savent pas à quel niveau faire cette distinction.

Un chercheur redemande s'il aurait été possible d'obtenir deux suites adjacentes réelles qui ne convergent pas dans **γ** ; E1, hésitant, parlera de la construction d'une suite réelle « ... qui converge, mais dans les 'irréels' », et ajoute du même souffle ne pas trop savoir ce que ça voudrait dire. E_2 mentionne qu'on peut refaire le travail, mais cette fois avec deux suites adjacentes réelles qui approcheraient un « irréel ». Les complexes (et le nombre *i*) sont évoqués. Les chercheurs mentionnent qu'il n'y a pas d'ordre dans les complexes, ils attirent l'attention sur la distinction entre la droite (réelle) et le plan (complexe), et sur le fait que les suites adjacentes qui seraient à considérer vivraient sur une droite. E_1 finira par dire : « c'est ça, les suites adjacentes sont sur la droite, sur la droite il n'y a pas 'd'irréels', les irréels [qu'il a entre-temps associés aux complexes] sont *autour.* » E_2 ajoutera : « ...donc elles vont forcément converger dans **γ**. » Le chercheur ajoute aussitôt : « Ça porte un nom, cette propriété-là [les suites adjacentes convergent] ». Dans la discussion qui suit, il est question de *densité*, des « trous » dans , E_1 dira : « *les rationnels sont partout*, mettons, mais laissent des trous », et mentionnera le mot « continu » au sujet des réels. E_2 finit par se rappeler du mot « complet » qu'il a sans doute entendu en cours et qu'il propose. Le chercheur reprendra le mot en parlant de la « complétude de **γ**. »

Ensuite E_1 réfléchit à propos des « trous » :

E_1 : « Mais le parler comme ça c'est comme s'il y avait les trous... dans □ , mais c'est □ quand on le place dans **γ**, que là il y a des trous. [...] C'est ça qui est mêlant, souvent on dit 'dans □ il y a des trous', mais... *non*... □ il ne le sait pas, lui, qu'il y a des trous... » Un chercheur reprend ce commentaire au bond : « Une façon de le dire, c'est dire qu'il y a des suites adjacentes, dans □ , qui n'ont pas de limite ». Et peu après : « Pour ne pas faire référence à quelque chose qu'on ne peut pas nommer, pour la même raison que tu mentionnes, que ce n'est pas correct de dire 'il y a des trous' (c'est des trous par rapport à quoi ?), si on veut rester dans □ , on peut dire 'il y a dans □ des suites adjacentes qui n'ont pas de limite' ». E_1 ajoutera peu après : « Parce que des suites [adjacentes] qui ne convergent pas, dans **γ**, il n'y en a aucune qui fait ça [converger à l'extérieur de **γ**]. » Et le chercheur : « Non parce que **γ** *est* [appuyé] complet, justement ». Suit une discussion sur ce qu'il faut ajouter à □ pour compléter **γ**. E_1 dit qu'on ne peut pas ajouter les irrationnels un à un et les chercheurs proposent d'essayer de caractériser ce qu'il faut ajouter. Après quelques détours, il sera question d'ajouter les développements décimaux non périodiques. Plus tard, en institutionnalisation de la phase 2, on reviendra sur les *propriétés* qu'il faut ajouter à □ pour avoir **γ**.

En guise de conclusion

Les chercheurs veulent amener les étudiants sur des questions de fondements, de validation, et voudraient pour cela que l'ensemble des rationnels soit considéré pour lui-même, en dehors des réels, afin de comprendre la propriété de complétude que les rationnels ne possèdent pas, à la différence des réels. La complétude y devient alors une propriété à ajouter à celles qui définissent les rationnels. Mais cette posture n'est pas naturelle, encore moins spontanée, chez et pour les étudiants. E_2 a compris que ce sont les contraintes sur les ensembles de référence qui influent sur la résolution de la tâche 4, mais il dira : « Je ne sais pas si j'aurais réfléchi sur la construction des ensembles. » Pour les étudiants, les différents ensembles sont là (de toute éternité ?), emboîtés, et il n'y a pas de raison pour que l'un d'eux ne soit pas disponible. Chercher à le reconstruire est un problème qui ne se pose pas, et considérer l'un comme si l'autre n'y était pas est une démarche dont ils ne perçoivent pas bien la finalité.

Ainsi, ils prennent acte que / ne vérifie pas cette propriété de complétude, mais il n'y a pour eux aucune raison d'en faire la propriété qui distingue ¡ de / et donc, aucune raison de prime abord pour qu'on ne puisse pas avoir dans ¡ des pathologies analogues. L'irrationnel qui a permis de révéler l'incomplétude de / est certes dans **γ**, mais il y a peut-être des « irréels » qui sont aux réels ce que les irrationnels sont aux rationnels ; pas de raison, donc, pour que **γ** soit complet, et le travail dans la première phase ne mène pas pour eux à cette conclusion. C'est seulement en discutant avec les deux chercheurs, lors de l'institutionnalisation en fin de phase 1, avec les représentations de **γ** et ≤ respectivement comme droite et plan proposées par les chercheurs, que l'image (quasi métaphorique) d'une nécessaire convergence à l'intérieur de la droite émergera. Il nous apparaît donc qu'une

intervention des chercheurs (ou des enseignants le cas échéant) a un rôle crucial à jouer, et le besoin de préciser une propriété telle que la complétude ne peut émerger par lui-même du seul engagement des étudiants dans les tâches. Par ailleurs, cette intervention est entendue et fait son chemin, atteint au moins en partie ses objectifs d'enseignement, comme le laisse penser cette remarque de E_1 : « Souvent on dit 'dans il y a des trous', mais... non... il ne le sait pas, lui, qu'il y a des trous... »

Références

Bergé, A., & Sessa, C. (2018). Complétude et continuité à travers 23 siècles : contributions à une recherche en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 38*(2), 157-205.

Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), pp. 217-235.

Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée ». *Recherches en Didactique des Mathématiques, 17*(3), pp. 55-80.

Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the Continuum, an Educational Challenge for Undergraduate Students. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, pp. 338-361.

Tanguay, D., Bergé, A., Barallobres, G. (2020). Une situation qui problématise les passages discret-dense-continu. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, (20), 42-57.

Vergnac, M. et Durand-Guerrier, V. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université, un objet problématique. Petit x, 96, pp. 7-28.

Vivier, L. (2015). *Sur la route des réels, Points de vue sémiotique, praxéologique, mathématique*. Thèse d'habilitation à diriger les recherches (HDR). Université Paris Diderot – Paris 7.

Appendice

La feuille des résultats préalables donnée au début de la séquence

1. L'ensemble / des nombres rationnels est formé des quotients d'entiers relatifs. Le développement décimal d'un nombre rationnel est toujours périodique à partir d'une certaine décimale (incluant les développements finis comme périodiques de période 0). Réciproquement, si un nombre possède un développement décimal périodique, alors c'est un nombre rationnel.
2. Critère d'inégalité et d'égalité dans /: deux nombres sont distincts dans / si et seulement si la distance entre les deux est strictement positive. Un raisonnement par l'absurde permet d'inférer que si deux nombres sont tels que pour tout $k \in \infty$, leur distance est inférieure à 10^{-k}, alors ces deux nombres sont forcément égaux.
3. On note Δ l'ensemble des décimaux, c'est-à-dire l'ensemble des nombres rationnels qui admettent un développement décimal fini ; de façon équivalente, qui peuvent s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^k}$, avec $a \in \square$ et $k \in \square$.
4. L'ensemble / vérifie la Propriété d'Archimède : $\forall b \in \square,\ b > 0,\ \exists n \in \square$ tel que $0 < \frac{1}{n} < b$.
5. Une définition de la convergence d'une suite : $(s_n)_{n\in\square}$ une suite réelle converge (dans Υ) si et seulement si
$$\exists L \in \square,\ \forall \varepsilon \in \square_+^*,\ \exists N \in \square \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \square,\ n \geq N \Rightarrow |L - s_n| < \varepsilon.$$
6. Une définition de la convergence d'une suite dans/: $(u_n)_{n\in\square}$ une suite d'éléments de /converge dans/si et seulement si
$$\exists L \in \square,\ \forall \varepsilon \in \square_+^*,\ \exists N \in \square \quad \text{tel que} \quad \forall n \in \square,\ n \geq N \Rightarrow |L - u_n| < \varepsilon.$$

7. Si une suite $(u_n)_{n\in\square}$ d'éléments de/converge dans/, alors elle converge dans Υ.
8. Si une suite $(u_n)_{n\in\square}$ d'éléments de/converge dans/vers une limite L, alors la suite $(u_n{}^2)_{n\in\square}$ converge vers L^2.
9. Si une suite réelle $(s_n)_{n\in\square}$ converge, alors sa limite est unique.
10. Si une suite réelle $(s_n)_{n\in\square}$ converge vers L et si $\forall n \in \square,\ s_n \geq K$, K une constante réelle, alors forcément $L \geq K$. (Attention, si $\forall n \in \square,\ s_n > K$, on peut conclure que $L \geq K$ mais pas que $L > K$.) En particulier, si deux suites $(u_n)_{n\in\square}$ et $(v_n)_{n\in\square}$ convergent vers la même limite L et si les termes de l'une sont tous positifs et les termes de l'autre tous négatifs, alors forcément $L = 0$.
11. Une fonction f continue « préserve la convergence des suites » : f est continue sur $]a\,;b[$ si et seulement si pour toute suite $(s_n)_{n\in\square}$ de termes de $]a\,;b[$ convergeant vers $L \in]a\,;b[$,
$$\lim_{n\to\infty} f(s_n) = f(\lim_{n\to\infty} s_n) = f(L).$$

Titre: Situations de recherche pour faciliter l'accès aux concepts mathématiques à l'entrée à l'université

Auteurs: GIBEL Patrick et BLOCH Isabelle

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 514 - 527

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Situations de recherche pour faciliter l'accès aux concepts mathématiques à l'entrée à l'université

GIBEL[1] Patrick – BLOCH[2] Isabelle

Résumé – Cet article présente un dispositif mis en place à l'université de Pau afin d'aider les étudiants de première année de Licence à surmonter les difficultés d'adaptation aux mathématiques du niveau supérieur, et à s›impliquer dans la recherche de problèmes mathématiques. Le dispositif aide les étudiants à mieux comprendre les attendus des enseignants du supérieur et à questionner le sens des concepts, donc à s'insérer dans la logique mathématique de niveau supérieur.

Mots-clefs : Situations de recherche à l'Université, concepts mathématiques, outils sémiotiques, disponibilité des savoirs et des signes.

Abstract – This article presents a system set up at the University of Pau to help first year undergraduates overcome difficulties in adapting to higher level mathematics and to become involved in the search for mathematical problems. The system helps students to understand the expectations of teachers and to question the meaning of concepts, and thus to integrate themselves into the mathematical logic of the higher level.

Keywords: Situations of investigation at the University, mathematical concepts, semiotic tools, availability of knowledge and signs.

1. Laboratoire Lab-E3D, Université de Bordeaux, France, patrick.gibel@u-bordeaux.fr

2. Laboratoire Lab-E3D, Université de Bordeaux, France, isabelle.bloch@u-bordeaux.fr

Introduction

La volonté politique de l'UPPA[3] d'expérimenter des dispositifs innovants pour lutter contre l'échec en première année de Licence (L1) de mathématiques et de licence MIASHS[4] a conduit des enseignants-chercheurs intervenant en L1 et les didacticiens de l'INSPE[5] de l'académie de Bordeaux, site de Pau, à se concerter pour élaborer la mise en œuvre d'un « projet pédagogique innovant ». Les interactions entre enseignants-chercheurs en mathématiques et ont conduit certains collègues de mathématiques de l'UPPA à vouloir diversifier leurs méthodes d'enseignement, suite au constat du manque manifeste d'investissement des étudiants de L1 dans l'étude approfondie des cours dispensés en CM et dans la recherche des activités proposées en amont des séances de TD, et donc de leur échec fréquent. Un objectif de ce dispositif est donc de diminuer le nombre trop important d'abandons de ce cursus universitaire.

Dans cet écrit, reprenant certains éléments formulés dans (Bloch et Gibel, 2022) nous présentons le dispositif élaboré puis mis en œuvre en première année de Licence de 2018 à 2021, puis présentons la première situation de recherche proposée aux étudiants. C'est ce qu'on appelle des *situations à dimension adidactique* (Mercier, 1995), (Bloch, 1999) : elles comportent une dimension de recherche de problème dévolue aux étudiants, et mobilisant leurs savoirs anciens.

Les situations proposées ont donc permis de mettre à jour les difficultés conceptuelles de ces étudiants, et de leur faire travailler la nature des objets mathématiques ainsi que les raisonnements nécessaires pour résoudre le problème posé. Les productions des étudiants nous permettent d'analyser leurs difficultés à maitriser les raisonnements : au secondaire, l'autonomie à utiliser les théorèmes enseignés n'est que peu travaillée, et les démonstrations sont souvent prescrites étape par étape. Ce fonctionnement induit chez ces étudiants un manque de confiance et un blocage à faire des choix de raisonnement, notamment par déduction.

Par ailleurs les programmes du secondaire n'indiquent pas que les concepts mathématiques de l'Analyse doivent être introduits comme des outils permettant de résoudre des situations mathématiques ; de plus le sens de ces concepts dans la construction d'une théorie de l'Analyse n'est pas toujours explicité en cours de mathématiques. Ceci conduit à des défauts dans l'interprétation des propriétés – notamment un manque de lien entre les propriétés numériques et les concepts d'Analyse, comme le décrit par exemple Bergé (2016).

Cet état de fait produit des difficultés qui deviennent manifestes à l'entrée à l'université, à un niveau où les concepts de base sont assez évidents pour les enseignants, mais où les étudiants entrants risquent d'être désorientés. C'est ce qui nous a conduits à élaborer une UE (Unité d'Enseignement)

3. Université de Pau et des Pays de l'Adour
4. MIASHS : Mathématiques et Informatique appliquées aux Sciences Humaines et Sociales
5. INSPE : Institut National Supérieur du Professorat et de l'Education

spécifique conjointement avec nos collègues de mathématiques du collège STEE de l'UPPA, afin d'aider ces étudiants à mieux comprendre et maîtriser les exigences nouvelles du niveau L1.

Caractérisation du dispositif pédagogique

L'élaboration du projet

Le souhait des enseignants de l'UPPA était donc de mettre en place un dispositif pédagogique spécifique ciblant les difficultés des étudiants et visant à augmenter leur compréhension des savoirs mathématiques en jeu, en vue de permettre une plus grande responsabilisation de ces étudiants de L1 et de favoriser leur implication dans les activités de résolution de problèmes, notamment en les faisant travailler en groupes. La volonté de privilégier les échanges au sein de groupes d'étudiants et de permettre des travaux en trinômes a reposé sur une méthode : il a été décidé d'aménager un effectif réduit de 24 étudiants.

A l'issue d'une phase de recherche du problème posé (où les étudiants en groupe de TD sont initialement accompagnés par les enseignants présents puis prolongent leur recherche de façon autonome), un trinôme[6] présente sa solution au groupe-classe, répond ensuite aux questions du jury composé de trois autres étudiants. Puis un autre trinôme est chargé de rédiger la solution présentée ; cette dernière est évaluée et commentée par l'enseignant et conduit, si l'enseignant le juge nécessaire, à une réécriture de la solution.

Étude didactique de situations mathématiques

Le but du projet est donc de motiver et responsabiliser chaque trinôme d'étudiants, en leur dévoluant une situation mathématique proche d'une situation adidactique ou à dimension adidactique au sens de la théorie des situations didactiques, c'est-à-dire une situation comportant une dimension de recherche. Les situations présentées ont pour but de faire approfondir les connaissances présentées notamment durant les CM et les TD classiques dispensés en L1.

Rappelons qu'une situation à dimension adidactique est en quelque sorte un problème ouvert – donc sollicitant la recherche autonome de solution par les étudiants – mais visant un savoir particulier, par exemple le concept de fonction associée à une variable et la différence entre fonction et graphique (situation 1).

Ces situations sont documentées dans les recherches sur la TSD (Théorie des Situations Didactiques) dans l'enseignement secondaire et supérieur : voir par exemple (Bloch & Gibel, 2011) ; (Bergé, 2016). Elles comportent une phase de recherche de la solution du problème (milieu heuristique), puis

6. Tiré au sort par l'enseignant

une étape d'exposé de ces solutions et d'interaction avec les étudiants et le professeur (milieu de formulation) et enfin une synthèse (institutionnalisation des savoirs) effectuée par le professeur, mais en se basant sur les productions des étudiants. Les raisonnements produits sont aussi analysés ; pour approfondir cette approche, on peut consulter Bloch & Gibel (2011) et Gibel (2018 et 2020).

Nous précisons maintenant quelles sont les difficultés qu'éprouvent les étudiants à surmonter le décalage entre les mathématiques du secondaire et du supérieur.

Nature des difficultés des étudiants constatées en L1

Connaissances mathématiques du secondaire versus supérieur

Le décalage de connaissances et de pratiques mathématiques observé lors de la transition secondaire/supérieur s'avère particulièrement difficile à gérer pour les étudiants ; en effet, le contrat didactique évolue, conduisant les étudiants à une plus grande responsabilisation liée aux choix :

- des connaissances et des savoirs qu'il convient de mobiliser pour répondre à la situation de recherche dévolue par l'enseignant ;
- du cadre (numérique, géométrique, algébrique, graphique…) qui est le plus adéquat pour répondre à la question posée ;
- du mode de raisonnement qu'il faut mobiliser (inductif, déductif, abductif[7]) et de la forme de raisonnement associée : raisonnement par l'absurde, raisonnement par récurrence, raisonnement « direct » ou par contraposée pour élaborer la solution ;
- de l'interprétation et de l'usage des signes mathématiques (Bloch et Gibel, 2019), signes dont le niveau de complexité est levé, par exemple les quantificateurs.

Les nombreuses études menées en didactique sur la transition secondaire-supérieur mettent en évidence un attendu spécifique en L1, à savoir une pratique maîtrisée du raisonnement au travers de ses différentes fonctions (Bloch et Gibel, 2016 ; Kidron & Tall, 2015 ; Pedemonte, 2007 ; Grenier-Boley et al., 2012 ; Borji & Martínez-Planell, 2019). Parmi les attendus du raisonnement on peut citer (Gibel, 2018) : organiser sa recherche, chercher, décider des savoirs à mobiliser, décider de la nature du raisonnement à utiliser pour conjecturer, expliquer, justifier, prouver, démontrer, valider, invalider, réfuter.

Les précédentes recherches en didactique montrent des déficiences importantes des étudiants dans la prise d'initiative quant aux connaissances et savoirs à mobiliser pour résoudre un problème et élaborer une procédure de résolution. Au lycée, les connaissances mobilisées dans le cadre des

7. Un raisonnement abductif consiste à mettre en relation une question posée avec une situation antérieure mobilisant une connaissance, et donc à adopter intuitivement la procédure précédemment utilisée pour tenter de résoudre le problème posé (Everaert-Desmedt, 1990), voir également Lalaude-Labayle (2019) ainsi que le tableau.

activités de résolution de problèmes sont le plus souvent en lien direct avec la notion mathématique étudiée précédemment, et ne nécessitent que la mise en œuvre de procédures enseignées et répertoriées directement lors du cours sur la notion étudiée, voire explicitement indiquées dans l'énoncé du problème. A l'université, les étudiants doivent être capables d'élaborer, puis de rédiger et communiquer une preuve mathématique de façon autonome en articulant les dimensions sémantiques et syntaxiques.

Ces points d'achoppement ont été étudiés dans la thèse de Praslon (2000) : il signale que le problème de la transition n'est pas uniquement le passage du pragmatique au formel, mais, lors du premier semestre universitaire, une accumulation de micro ruptures de contrat que les enseignants universitaires ne décèlent pas (Bridoux, De Hosson & Nihoul, 2020).

Ainsi, la conjonction de cette demande de plus de définitions et de démonstrations crée un décalage important, mais les professeurs de l'université n'en sont généralement que peu conscients. Ce que nous visons dans le dispositif décrit et mis en œuvre, c'est de faciliter cette transition par des tâches qui s'appuient sur les connaissances du secondaire mais permettent un accès aux nouvelles exigences des mathématiques du supérieur : notre objectif est donc précisément de proposer aux étudiants des situations « compatibles » avec leurs savoirs, et leur permettant d'accéder aux pratiques et savoirs essentiels du niveau universitaire.

Nature des difficultés

Nous pouvons alors classer les difficultés généralement observées chez les étudiants débutants (et documentées dans les études citées), en lien avec leur(s) origine(s) potentielles :

- Un contrat didactique spécifique au supérieur, reposant sur une responsabilisation des étudiants inhérente à l'étude approfondie des contenus des cours et des TD, et donc un contrat nouveau pour les étudiants ;
- Une capacité à travailler : effectuer un changement de points de vue sur les concepts mathématiques (ponctuel/local/global) dans le domaine de l'Analyse (Vandebrouck, 2011) ;
- La complexité des signes relevant de plusieurs registres sémiotiques et la maîtrise du développement et l''articulation des registres sémiotiques (Gibel, 2020 ; Bloch & Gibel, 2011 ; Kidron & Tall, 2015).
- Le choix du cadre le mieux adapté pour élaborer et formaliser une preuve, puisque les preuves sont devenues un élément essentiel de la pratique (Lalaude-Labayle, 2019) ;
- La maîtrise – à acquérir – des formes de raisonnements et la prise de conscience de leurs différentes fonctions.

Les grandes lignes du dispositif et le contrat didactique

La mise en œuvre du dispositif décrit précédemment repose donc sur un contrat didactique universitaire *et* spécifique qu'il nous semble important de définir. Ainsi, les principales responsabilités dévolues aux étudiants sont :

- L'implication dans la recherche, l'élaboration de raisonnements en réponses aux questions de l'énoncé, la formulation de questions en vue de surmonter certains obstacles, ainsi que la rédaction d'une solution reposant sur la mise en œuvre d'un mode de raisonnement adéquat et sur l'usage conforme des signes mathématiques.

- La présentation au groupe, par le trinôme tiré au sort, du raisonnement mathématique produit en réponse à chacune des questions de la situation de recherche.

- Le questionnement, par les trois étudiants constituant le jury, des raisonnements et des réponses produites par le trinôme exposant son travail.

- La rédaction[8] d'une solution intégrant les commentaires et les remarques effectués par les étudiants et l'enseignant suite à la présentation.

Intéressons-nous à présent aux responsabilités de l'enseignant relatives à la préparation de chacune des séances du dispositif. Ces responsabilités comprennent notamment une analyse *a priori* rigoureuse de la situation proposée, afin d'être en mesure d'anticiper les procédures des étudiants et les difficultés qu'ils peuvent rencontrer. Il s'agit pour l'enseignant de considérer la dimension heuristique de l'activité dévolue aux étudiants comme « première ». Ce processus de dévolution nécessite que les enseignants aient construit une réflexion didactique qui conduise donc à une analyse *a priori* de la situation. Cette dernière nécessite que l'enseignant ait envisagé en amont de la séance précisément :

- La ou les procédures de résolution de la situation en précisant le cadre (ou les cadres) qu'il convient de privilégier pour élaborer la procédure ou les nécessaires changements de registres dans la construction de la solution ;

- Les principales variables didactiques de la situation ;

- Les principales difficultés auxquelles les étudiants peuvent être confrontés dans l'appropriation de la situation objective et l'élaboration de la procédure de résolution

- La nature des aides qu'il pourra leur apporter en liens avec les ressources dont disposent les étudiants sur le plan des connaissances et des savoirs mathématiques (antérieures et actuelles : lycée et semestre 1 de la L1) ainsi que sur le plan des modes de raisonnements.

- Les ressources numériques et les TICE qui pourront jouer un rôle dans l'appropriation de la situation et le contrôle de la validité des procédures.

8. Par un trinôme n'ayant pas présenté son travail.

- Les moyens de contrôle et de validation que les étudiants pourront mobiliser de façon autonome pour déterminer la vraisemblance et la validité de leurs résultats.

Lors de la mise en œuvre de la séance, les principales responsabilités qui incombent à l'enseignant sont les suivantes :

- Observer les interactions au sein de chaque trinôme pour identifier leurs difficultés, les accompagner dans la résolution en apportant des éléments de réponses à leur questionnement.
- Identifier précisément la nature et l'origine des difficultés des étudiants en analysant les différents types d'erreurs produites lors de l'exposé de leurs travaux.
- En fin de questionnement par le jury, choisir de revenir sur certains éléments de la solution en vue de lever le doute sur certaines interrogations quant aux savoirs en jeu, à l'adéquation des signes mobilisés et à la pertinence des réponses proposées.
- A l'issue des questions, décider des connaissances et des savoirs qu'il convient d'institutionnaliser : identification des objets mathématiques qui définissent la situation objective, nature et forme des signes et des raisonnements mobilisés lors de l'étude, liens entre les procédures distinctes mises en œuvre par différents groupes.
- Commenter et questionner l'écrit de synthèse produit par le trinôme – en charge de produire la mémoire de la situation de recherche – en vue d'une réécriture valide sur le plan sémantique et syntaxique.

Ce contrat spécifique est exposé en début d'année aux étudiants inscrits dans cette unité d'enseignement ; une situation de recherche « initiale » leur est proposée et à l'issue de la phase de recherche, l'enseignant gère la mise en commun des procédures des étudiants et rédige ensuite au tableau la solution afin de mettre en évidence les attendus de la restitution des situations. Cette situation, appelée Situation 1, est détaillée ci-dessous. Puis, au fil des séances, les sept ou huit situations de recherche à résoudre en trinômes leur sont proposées.

Situation de recherche « initiale »

L'expérimentation a été menée de 2018 à 2021 dans cinq groupes de travaux dirigés au premier semestre de la première année de Licence de Mathématiques, d'autres licences scientifiques, et en licence MIASHS[9]. Les étudiants ont choisi de suivre cette Unité d'Enseignement intitulée « Outils de méthodologie pour comprendre les mathématiques ».

Le choix et la formulation des situations : importance de la situation 1 ou comment permettre l'appropriation de ce dispositif en précisant le contrat. Ainsi, dans cet article, nous présentons la situation d'introduction du dispositif (situation 1).

9. Mathématiques et Informatique appliquées aux Sciences Humaines et Sociales

Bartolini-Bussi (2009) pose un certain nombre de critères et de modalités qui lui paraissent conditionner l'entrée des élèves dans le processus souhaité[10]. Bien que son étude ait été faite dans le cadre de situations du primaire, les considérations invoquées nous paraissent pertinentes pour les situations à dimension adidactique à tous les niveaux. Ainsi :

- - la situation ne doit pas mener trop rapidement à la production de conjecture : les élèves/étudiants doivent avoir un délai de réflexion et de recherche non ciblée afin de définir l'objet adéquat de la conjecture et de la preuve ;
- - la situation doit permettre de cibler la procédure de recherche sur la façon générique d'obtenir le résultat, et non sur le résultat directement, ainsi que le remarque aussi Pedemonte (2007) : il peut exister, dit aussi cette auteure, une continuité structurelle entre la production de la conjecture et la construction de la preuve ;
- - le fait de guider trop la recherche peut amener des dérives dans le travail des étudiants, celui-ci se limitant à une suite de tâches à effectuer, sans en percevoir les véritables raisons ni même la logique de construction.
- Le but des situations, en général, est de faire comprendre aux étudiants que l'objectif des mathématiques n'est pas que de « faire des calculs » : il s'agit d'identifier les objets mathématiques « utiles », les concepts pertinents, et de raisonner sur ces objets pour en déduire des propriétés (cf. Bloch, 2015).

Présentation de la situation 1

L'objectif de cette situation initiale est que les étudiants donnent du sens au concept de fonction en le reliant à sa signification : dans cette première situation, il s'agit de déterminer et d'étudier l'aire d'une surface en fonction d'une variable identifiée. Certes, ce concept d'aire variable est introduit au lycée, mais proposer de calculer une aire en choisissant de considérer deux variables différentes n'est pas usuel au niveau du secondaire. Cela vise un recul sur les notions d'aire et de fonction.

Nous attendons des étudiants qu'ils pratiquent une lecture active et raisonnée de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique).

La particularité de cette mise en activité est donc que – suite à la présentation du problème dans sa globalité – les étudiants sont partagés en deux groupes : l'un d'eux calcule l'aire en fonction de la variable « angle », l'autre en fonction de l'abscisse d'un point. Ceci conduit chaque groupe à étudier une fonction différente. Le but de cette situation est de comprendre que les propriétés qui résultent de l'étude de chacune de ces fonctions conduisent aux mêmes conclusions sur la variation de l'aire, et donc, une aire n'est pas associée de façon automatique à une unique fonction. La finalité est aussi d'amener les étudiants à mobiliser tour à tour différents registres (algébrique, numérique, graphique

10. Il s'agit du processus de preuve.

et géométrique) lors de l'étude de chaque fonction et ainsi de percevoir les propriétés de chacune des fonctions dans différents registres sémiotiques.

Nous donnons ci-dessous le schéma de cette situation 1.

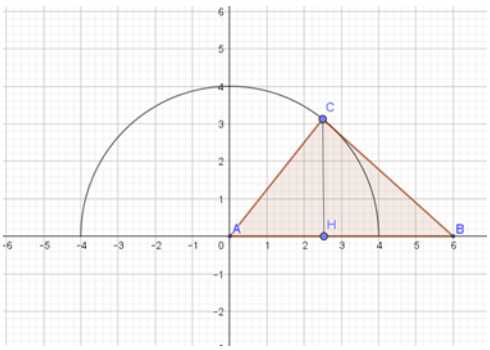


Figure 1. L'aire du triangle ABC

On considère (cf. Figure 1) un triangle déformable ABC constitué d'un segment fixe [AB] de 6 centimètres de longueur, et du segment [AC] de 4 centimètres de longueur, pivotant autour de A dans l'un des deux demi-plans de frontière (AB). On désigne par H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et par (Γ) le demi-cercle décrit par le point C. On se propose d'étudier, de deux façons, les variations de l'aire du triangle ABC en fonction de la position du segment [AC].

La première façon consiste à calculer l'aire en fonction de l'angle $\widehat{BAC}$; la deuxième, en utilisant l'abscisse *x* du point C. Donc il s'agit de la variation d'une aire de triangle dont un sommet varie selon deux variables possibles : l'abscisse $\boldsymbol{x}$ du point variable ou la mesure α de l'angle $\widehat{BAC}$.

La formulation du contrat didactique est incluse dans la consigne donnée aux étudiants :

Consigne : On va traiter un même problème de deux façons différentes. Quatre groupes travailleront sur la partie 1 du problème, quatre groupes travailleront sur la partie 2 du problème. On va se donner 40 minutes pour que chaque groupe résolve le problème. Lors de la mise en commun chacun va présenter sa méthode de résolution et on va essayer de comprendre pourquoi chaque méthode conduit au même résultat alors qu'on a l'impression au départ que ce sont des fonctions différentes.

L'aire du triangle déformable ABC, en fonction de $\boldsymbol{x}$, est donnée par la formule

$\boldsymbol{A(x) = 3\sqrt{16 - x^2}}$ avec $\boldsymbol{x}$ qui varie de -4 à 4.

L'aire du triangle déformable ABC, en fonction de α, s'exprime sous la forme

$\boldsymbol{A(\alpha) = 12 \sin \alpha}$ avec α, en degré, variant de 0 à 180.

Cette deuxième expression algébrique de l'aire peut paraître plus simple à étudier pour les élèves.

Lors de la mise en commun, les étudiants sont amenés à calculer les variations de ces fonctions, et à construire des graphiques : x varie de - 4 à + 4, et α de 0 à 180 ; néanmoins, les courbes se ressemblent beaucoup, et notamment le maximum de l'aire du triangle correspondant.

Après la phase de recherche, l'enseignant a lui-même effectué la mise en commun des procédures, il a ensuite rédigé la solution pour expliciter la forme de l'écrit attendu lors de la restitution ainsi que le niveau de justification idoine. Puis il a répondu aux questions posées par un trinôme d'étudiants tiré au sort, constituant le jury. L'enseignant a enfin institutionnalisé les connaissances et les savoirs en jeu dans la situation étudiée : distinction entre fonction de x ou α et variation d'aire étudiée, étude des fonctions et représentation graphique, etc. La question de la cohérence des résultats, obtenus par chacune des deux études menées distinctement pour chacune des fonctions, a été soulignée. Les propriétés de la variation de l'aire – en fonction du déplacement du point sur le demi-cercle – sont similaires indépendamment de la variable choisie et il existe une relation qui lie ces 2 variables. On peut donc en conclure qu'étudier une grandeur ne conduit pas à la représenter par une unique fonction

Synthèse de l'expérimentation des situations

L'expérimentation a donc permis de confronter les étudiants à des problèmes à chercher, avec une attente de preuve mathématique à apporter dans des formulations adaptées. Les observations confirment que les étudiants de L1 ne sont pas habitués à ces exigences. Un résultat positif de ces mises en œuvre est cependant qu'ils ont une certaine expertise du calcul algébrique – ce n'est pas ce point qui les met le plus en difficulté. La première situation a conduit aux calculs d'aire sans peine. Les raisonnements et les signes qui les supportent se sont établis être la plus grande source de difficultés, ce qui n'a rien d'étonnant car cette expertise n'est que peu travaillée au secondaire, comme nous le disions.

Conclusion

Le dispositif expérimenté a confirmé que les étudiants ne sont pas habitués à vérifier si un calcul conduit à un argument recevable puis à une preuve : pour eux, le but serait juste de « faire un calcul ». Cependant, ce dispositif a permis une véritable implication des étudiants dans la recherche et la formulation des situations proposées. La problématique a mis en lumière la nature des obstacles des étudiants concernant l'identification des objets mathématiques, et leur formulation par des signes mathématiques adaptés. Nous avons aussi constaté leur difficulté quant au choix raisonné des procédures de preuve, et leur manque de discernement quant à la forme adéquate du raisonnement adapté au problème posé. L'étude didactique menée montre donc que ce dispositif s'avère complémentaire par rapport au cursus classique de licence, et peut aider les étudiants à comprendre et à réussir ce cursus.

Du point de vue des raisonnements, la mise en œuvre de cette expérimentation a permis aux étudiants non seulement de produire des raisonnements de différentes formes (raisonnement par récurrence, raisonnement par l'absurde, raisonnement par contraposée, etc.) mais encore de prendre conscience de leurs multiples fonctions en lien avec les conditions de leur élaboration : décider de l'utilisation d'une connaissance mais également du cadre adéquat de sa mise en œuvre, conjecturer, justifier, prouver, communiquer les étapes d'un raisonnement, argumenter et démontrer.

Contrairement aux études qualitatives souvent menées sur l'enseignement des mathématiques au supérieur, notre recherche vise à analyser l'implémentation réelle de situations à dimension adidactique à ce niveau et les connaissances générées par ces situations – connaissances « théoriques » sur les concepts en jeu et connaissances pratiques de raisonnement et de méthodes de calcul et démonstration. Cela implique d'étudier les conditions réelles de mise en œuvre de la situation et son fonctionnement, lors des phases organisées : dévolution, recherche des solutions par groupes, et institutionnalisation par l'enseignant après restitution des groupes.

Références

Bartolini-Bussi, M. (2009). Proof and proving in Primary school: An experimental approach. In Lin F.-L., Hsieh F.-J., Hanna G., de Villiers M. (Eds.) *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* Vol.1 (pp.53–58).

Bergé, A. (2016). Le rôle de la borne supérieure (ou supremum) dans l'apprentissage du système des nombres réels. *Proceedings of INDRUM 2016, First conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. Nardi E., WinslØw C. & Hausberger T. editors.

Bloch, I (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 135-193.

Bloch, I. (2015). Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques : Quelques réflexions sur l'épistémologie et la didactique. *Petit x, 97*, 71-79. hal-02525717

Bloch, I., Gibel, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 31*(1), 191-227.

Bloch, I., Gibel, P. (2016). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course. *Communication to INDRUM*, 43-52 Université de Montpellier, ISSN: 2496-1027.

Bloch, I., Gibel, P. (2019). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course – presentation and examples, *Annales de didactique et de sciences cognitives. 24*, 183-205.

Bloch, I., Gibel, P. (2022). Situations de recherche pour l'accès aux concepts mathématiques à l'entrée à l'université. *Revue EpiDEMES, Épijournal de Didactique et Epistémologie des Mathématiques pour l'Enseignement Supérieur*. Numéro spécial.

Borji, V., Martínez-Planell, R. (2019). What does 'y is defined as an implicit function of x' mean?: An application of APOS-ACE. *The Journal of Mathematical Behavior 56*.

Bridoux, S., De Hosson, C., Nihoul, C., (2020). Pratiques in situ d'enseignants universitaires et confrontation avec le vécu des étudiants. In *Proceedings of INDRUM 2020, Bizerte, Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*, (pp. 187-196). DOI: 10.4324/9780429346859-16

Chorlay, R. (2019). A Pathway to a Student-Word definition of Limits at the Secondary-Tertiary transition. IJRUME, https://link.springer.com/article/10.1007/s40753-019-00094-5

Ghedamsi, I., Fattoum, F. (2018). Étude de l'évolution des images de la convergence de suites lors d'un enseignement ordinaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 38*(2), 207–259.

Gibel, P. (2018). *Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques*. HDR, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Gibel, P. (2020). Analyse en théorie des situations didactiques d'une ingénierie visant une première approche de la notion de limite finie d'une suite. *Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques, 1*, 153-189.

Kidron, I., & Tall, D. (2015). The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process. *Educational Studies in Mathematics 88*(2),183-199. Springer.

Lalaude-Labayle, M. (2019). Un regard épistémologique sur l'évolution historique des notions de preuve et d'axiomatique. *Petit x, 110/111*, 5-26.

Mercier, A. (1995). Les effets de l'intervention enseignante dans le milieu des situations adidactiques. In Margolinas C. (Ed.) *Les débats de didactique de mathématiques* (pp.157-168). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Pedemonte, B. (2007). Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation et démonstration. *Recherches en Didactique des mathématiques, 25*(3), 315–348.

Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG-Sciences en Analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse, Université Paris Diderot – Paris 7.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 16*, 149-185.

Titre: L'influence des la figure et ses dessus sur la définitions des étudiants de triangles congruents

Auteurs: TCHONANG YOUKAP Patrick, AMBOMO Nicole Aimée et NJOMGANG Judith

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 528 - 541

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

L'influence des la figure et ses dessus sur la définitions des étudiants de triangles congruents

TCHONANG YOUKAP[1] Patrick, AMBOMO[2] Nicole Aimée, NJOMGANG[3] Judith

Résumé – Cet article a pour objectif d'explorer l'influence de la figure et ses dessins sur la construction par les étudiants d'une définition de deux triangles congruents. Les données de cette étude sont constituées des réponses des étudiants à un questionnaire ainsi que des retranscriptions de leurs discussions. Le modèle de Vinner : concept-image concept-définition ainsi que les paradigmes en géométrie ont servi de cadre théorique pour cette étude. Il en résulte que les difficultés des étudiants pour construire une définition acceptable proviendraient d'un concept-image incohérent sur les figures, leurs images mentales semblent prendre le dessus sur les propriétés conceptuelles de ces figures. Les erreurs récurrentes sont dues à des traductions abusives des dessins.

Mots clé : figure ; dessins; concept-image ; construction de la définition ; paradigme géométrique

Abstract – This paper aims to explore the influence of the figure and its drawings on students' construction of a definition of two congruent triangles. The data for this study comes from students' responses to a questionnaire and the transcripts of their discussions. The Vinner's model, concept image concept definition and the paradigms in geometry were used as the theoretical framework for this study. It result that students' difficulties in constructing an acceptable definition are due to an inconsistent concept image of the figures; their mental images seem to predominate over the conceptual properties of the figures. The recurrent errors are due to abusive translations of the drawings properties.

Key words: figure; drawing; concept image; definition construction; geometric paradigm.

1. École Normal supérieur de Yaoundé, Cameroun
2. École Normal supérieur de Yaoundé, Cameroun
3. École Normal supérieur de Yaoundé, Cameroun

Introduction

Les objets étudiés en géométrie au début du secondaire sont constitués des figures et des transformations du plan. Les élèves étudient les éléments de la théorie (définition, théorème, etc.) sur la figure en manipulant leur représentation. La figure géométrique est perçue comme un objet géométrique sur lequel repose le raisonnement, c'est un objet abstrait, un objet idéel. Le dessin quant à lui est la trace laissée sur un support de représentation que symbolise l'écran dans l'environnement informatique (Laborde, 1994 ; Parzysz, 1988)but pupils (even sixth graders. D'après Fischbein et Nachlieli (1998), la figure géométrique a deux propriétés fondamentales : une propriété conceptuelle et une propriété sensorielle (constitué des images mentales qui lui sont associées). La définition de la figure est une composante de la propriété conceptuelle. De notre point de vue, avoir une bonne compréhension de la figure c'est savoir établir des connexions cohérentes entre ses composantes conceptuelles et sensorielles.

Les programmes de mathématiques du secondaire au Cameroun recommandent d'impliquer les élèves dans la construction des éléments de la théorie sur les objets géométriques étudiés. Toutefois, les définitions des figures géométriques sont proposées de façons axiomatiques, d'autres figures ne sont pas définies, leurs dessins sont montrés aux étudiants (Tchonang, Njomgang, Tieudjo, & Pedemonte, 2020). On pourrait penser que les élèves mémorisent les définitions qui leur sont présentées et construisent leurs définitions en interprétant les dessins qu'ils rencontrent au cours de leur expérience avec la figure. On peut donc craindre que cette façon de procéder ait des répercussions sur la compréhension des figures par les élèves, ce qui pourrait résister après leur étude secondaire.

Des recherches antérieures se sont intéressées à la définition en mathématiques (De Villiers, 1998 ; Fischbein & Nachlieli, 1998 ; Tchonang, 2021). De Villiers (1998) et Vinner (1991) rapportent que, lorsque la définition est donnée de façon axiomatique aux élèves, celle-ci peut être oubliée ou encore, les élèves peuvent construire des définitions personnelles qui sont en contradiction avec la définition formelle. De Villiers (1998) pense que les élèves devraient être impliqués activement dans le processus de construction des définitions des objets géométriques. Vodušek et Lipovec (2014) ont exploré les connaissances que les enseignants du primaire en formation mobilisent sur le carré pour résoudre un problème en géométrie. D'après eux, les réflexions des enseignants se limitent à l'image visuelle du carré. Les formes du carré contenues dans leur image mentale dominent sur l'élément conceptuel de cet objet. Noirfaliste (1991) observe que certaines figures sont mentalement plus prégnantes que d'autres. Elles agissent quelques fois comme des obstacles dans la résolution des problèmes, il les appelle « figures prototypes ». L'auteur a étudié l'influence du dessin sur la rédaction de la démonstration. D'après lui, les élèves sont incapables de faire abstraction des particularités des « formes prototypes ». Le dessin est utilisé comme support du raisonnement des élèves au détriment de la figure. Les travaux de Parzysz (1988)but pupils (even sixth graders et Duval (1988) montrent que le dessin joue un rôle de premier plan dans la construction des connaissances en géométrie au début du collège et peuvent induire de fausses conceptions chez les élèves.

Les travaux précédents montrent que la manipulation du dessin et les connaissances sur la figure peuvent induire des difficultés chez les élèves au secondaire. Cependant, on ne sait pas suffisamment les appréhensions qu'ont les étudiants ayant terminé leur cursus secondaire des dessins ainsi que les connaissances qu'ils mobilisent sur les figures pour résoudre des tâches en géométrie euclidienne. En particulier, lorsqu'il s'agit de construire la définition d'un objet géométrique. La question de recherche de cette étude s'énonce comme suit : *quelles connaissances sur la figure et ses dessins sont mobilisées par les étudiants en situation d'exécution des tâches conduisant à la construction d'une définition d'un objet géométrique ?*

Le cadre théorique de cette étude est constitué des paradigmes en géométrie (Houdement & Kuzniak, 2006) et du modèle *concept-image* et *concept-définition* (Vinner, 1983 ; Vinner & Hershkowitz, 1980). Les étudiants pour interpréter les propriétés du dessin mobilisent des modes de pensée qui les situent dans un paradigme particulier. Ceux-ci mobilisent leurs connaissances sur la figure et ses dessins pour résoudre les tâches qui leur sont prescrites. Le concept-image concept-définition est un cadre théorique qui peut guider le professeur et le chercheur dans la compréhension du processus mental de l'étudiant associé à un concept. D'après Vinner, la structure cognitive associée à un concept donné est constituée de deux cellules à savoir : le concept-image et le concept-définition. Les étudiants qui interprètent les dessins et décrivent une figure géométrique mobilisent les éléments de leur concept-image sur cette figure. On dira à cet effet que les règles de traduction qui permettent à ces étudiants de faire le lien entre la figure et ses dessins sont des composantes de leur concept-image sur la figure manipulée.

Méthodologie

Pour apporter des éléments de réponse à notre question de recherche, nous avons mené une étude qualitative de type exploratoire.

Population de l'étude

La population de cette étude est constituée de 60 étudiants volontaires des Classes Scientifiques Spéciales (CSS) de l'École Normale Supérieure (ENS) de Yaoundé[4]. Il s'agit d'une structure qui prépare les jeunes bacheliers pendant une année pour affronter les concours des grandes écoles scientifiques. La géométrie euclidienne fait partie des contenus étudiés par nos participants au secondaire. Ces derniers ont eu à étudier les définitions des figures géométriques ainsi que leurs propriétés. Ils ont eu à représenter les dessins des triangles et des quadrilatères et à interpréter les codes sur ces dessins. Les participants à cette étude ont l'habitude de travailler en groupe et ont déjà eu à participer aux recherches que ce soit dans le cadre d'une enquête ou d'une expérimentation.

4. Le niveau des étudiants correspond à ceux de licence1 mathématiques

Collecte des données

Les données de cette étude sont des productions des étudiants à un questionnaire et à une expérimentation. Le questionnaire était constitué de trois exercices, pour cet article nous analysons les réponses pour un exercice. Cet exercice correspond à une activité de construction d'une définition en géométrie (De Villiers, 1998). Ce questionnaire a été passé en décembre 2021 pendant les heures de cours durant une période de 1 heure. Nous avons recueilli les productions écrites des étudiants dans un premier temps. Ensuite, nous avons constitué 4 binômes parmi ces participants pour une expérimentation, nous avons enregistré leurs discussions. Ces étudiants ont été choisis en raison de leur réponse au questionnaire. En effet, parmi ces étudiants, certains ont proposé des propriétés ambiguës à la première question, d'autres ont produits un concept-définition personnel incohérent. Les discussions des participants ont été transcrites pour analyses. Cette analyse permettra de mieux comprendre les éléments de leur concept-image sur la figure qui sont évoqués dans leurs discussions, mais qui ne figurent pas sur leur copie. On pourra ainsi identifier les paradigmes géométriques dans lesquels ces derniers se situent. Dans cette étude, nous analysons les réponses des étudiants aux questions suivantes.

Les dessins de chaque figure ci-dessous représentent deux triangles congruents

Figure 1

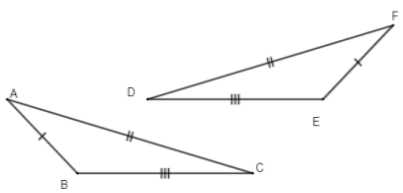


Figure 2

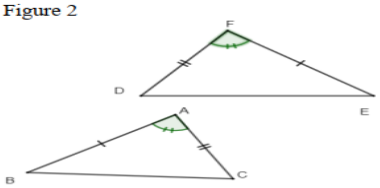
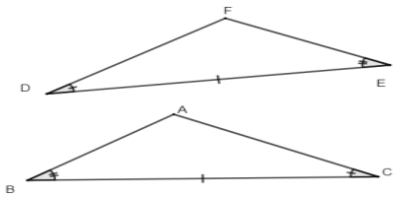


Figure 3



1. Fais la liste des propriétés communes aux couples de triangles des figures ci-dessus.

2. Comment peux-tu expliquer le plus simplement possible ce que sont deux triangles congruents à quelqu'un qui ne le sait pas ?

3. Analyse a priori

L'exercice précédent est constitué de trois couples de dessins codés représentant des triangles congruents suivis de deux questions. La première question invite les étudiants à produire la liste des propriétés codées sur chaque couple de dessins. On s'attend à ce que les participants se limitent à la traduction des codes sur les dessins. Dans ce cas, ceux-ci se situent en géométrie axiomatique naturelle et expriment un concept-image cohérent sur la figure. Par ailleurs, on peut également s'attendre

à ce que ces étudiants listent des propriétés visuelles (forme des dessins et disposition spatiale). De plus, ils peuvent également évoquer des informations géométriquement signifiantes non codées sur les dessins. En particulier, les étudiants peuvent évoquer l'égalité des mesures des angles sans que ces informations ne soient codées sur les dessins. De ce fait, on peut penser que ces étudiants ont un concept-image incohérent sur la figure et ces derniers se situent en géométrie naturelle.

À la deuxième question, il est demandé aux étudiants de produire une description de deux triangles congruents, en d'autres termes de produire un concept-définition de ces objets. On s'attend à ce que les étudiants expriment leur concept-image en évoquant l'égalité des longueurs des côtés homologues des deux triangles ou encore l'égalité des longueurs des côtés et des mesures des angles homologues des deux triangles. Il pourrait s'agir des définitions économiques ou non économiques. Par ailleurs, on peut également s'attendre à ce que les productions soient des définitions ambiguës, qui donnent lieu à plusieurs interprétations par exemple « les deux triangles ont les mêmes côtés ». Les étudiants pourraient également produire des définitions liées aux représentations des deux triangles. Par exemple, évocation des formes des dessins ou encore des dispositions spatiales des deux triangles. Dans ces cas, ces étudiants expriment un concept-image incohérent sur la figure et se situent en géométrie naturelle.

Analyse des données

Pour chacune des questions du questionnaire, nous commençons par analyser les productions écrites des 60 participants. Ensuite, nous analysons les extraits des retranscriptions des discussions de deux binômes d'étudiants.

Interprétation des propriétés sur le dessin

Les productions des étudiants ont été classées en catégorie et regroupées dans le tableau qui suit. Ces étudiants ont effectué un travail d'interprétations des dessins et ont retenu des informations qui leur semblent pertinentes pour ce genre de tâche.

Informations retenues par les étudiants	Effectif des étudiants
Informations codées sur les dessins	23,33%
Informations sur la forme des dessins	8.33%
Informations spatiales	8.33%
Informations non codées sur les dessins	51,66%
Autres	13,33%

Tableau 1-Informations évoquées par les étudiants sur les dessins des figures

Le tableau précédent permet de constater que 51,66% des étudiants ont évoqué des propriétés géométriquement signifiantes non codées sur les dessins. Par exemple, certains ont évoqué l'égalité des trois côtés homologues des triangles dans chacune des figures. Une tentative d'explication pourrait être la suivante : les étudiants ont déduit l'égalité des côtés non codés ou encore ils ont effectué un contrôle visuel. On note que 23,33 % des étudiants se sont limités à l'interprétation des codes représentés sur les dessins tels qu'attendus à l'analyse a priori. Toutefois, les productions des étudiants ont mis en lumière des difficultés sur l'utilisation les symboles qui permettent de représenter les objets géométriques. Plus précisément, on observe des confusions entre longueur et segment ; entre longueur et droite, ce qui peut rendre ambiguë la lecture des propriétés. En outre, 8 % des étudiants ont évoqué des informations sur la forme des dessins, 8 % ont évoqué la disposition spatiale des dessins. Ces résultats concordent avec ceux attendus à l'analyse a priori. Cela permet de les situer en géométrie naturelle. Par ailleurs, les 13,33 % restants ont produits des réponses que nous n'avons pas pu analyser. Les précédents résultats nous permettent d'inférer que les propriétés sensorielles des figures semblent dominer les propriétés conceptuelles de ses figures dans le concept-image des étudiants lorsqu'il s'agit d'interpréter les dessins. On peut supposer qu'au sortir du secondaire ces étudiants n'ont pas toujours un concept-image cohérent sur les objets géométriques étudiés.

Cas 1 : Analyse des discussions des étudiants DAMI « DA » et EDINGA « ED»

Les discussions des étudiants permettent de constater que ces derniers traduisent de façon abusive les propriétés visuelles des dessins. En effet, les informations évoquées ne sont pas associées aux propriétés géométriques de l'objet. L'extrait qui suit illustre les descriptions des étudiants.

ED : c'est quoi deux triangles congruents ? *DA : deux triangles congruents sont deux triangles quelconque et en même temps isocèle où on retrouve deux côtés égaux.* *ED : lorsqu'on regarde, ça ne peut pas avoir deux côtés égaux parce que ça la forme deux triangles rectangles.*	Les propriétés qui émergent des discussions des étudiants sont les suivants : « Être un triangle quelconque et en même temps isocèle ». On peut penser que le concept-image de l'étudiant sur les triangles est incohérent. En effet, il inclut des contradictions internes, un triangle isocèle est un triangle particulier et ne peut être quelconque. On observe que les étudiants évoquent le contrôle visuel pour comparer les longueurs des côtés.

L'extrait ci-dessus permet d'observer que les étudiants obtenus certaines informations par vérification expérimentale. En effet, les étudiants utilisent un contrôle visuel et instrumenté pour comparer les longueurs des côtés et les mesures des angles sur les dessins. De plus, les côtés non codés sur les dessins des deux triangles ont également fait l'objet d'une comparaison. L'extrait des discussions des étudiants ci-dessous permet de l'illustrer.

ED : AB égale à FE, AC égale à DF et BC égale à EF. Dans la figure 1, l'angle A est égale à l'angle F ; *DA [figure1] ici [angle en E] c'est 120 et 123 pour ceci [angle en B], regardes aussi. DA : mesure les angles des triangles dans la figure 2 ; on doit comparer tous les trois angles.*	On observe que les étudiants évoquent une relation superflue dans la figure 1. Aucune information ne permet d'affirmer que les mesures des angles sont égales. On pourrait penser qu'ils ont déduit ces égalités ou encore qu'ils aient procédé par un contrôle visuel. Les mesures des angles qu'évoque l'un des étudiants ne sont pas contenues dans l'énoncé du problème.

Les productions écrites révèlent que pour chaque figure, les étudiants ont exprimé l'égalité entre les côtés homologues dans chaque couple de triangles. On observe que ces derniers ont évoqué les relations d'égalité entre les angles homologues pour chaque couple de triangles représentés dans chacune des figures. On observe des confusions des relations entre les figures manipulées. Des difficultés ont émergé lorsque les étudiants ont exprimé les relations entre les objets géométriques, en l'occurrence l'égalité entre les segments au lieu des longueurs des segments ou encore l'égalité entre les angles au lieu des mesures des angles. En se référant au système sémiotique enseigné au secondaire au Cameroun, au lieu de noter $[AB] = [FE]$ il est préférable d'écrire $AB = FE$ pour signifier qu'il s'agit des longueurs qui sont égales. Il en est de même pour les angles on écrit $\widehat{ABC} = Mes\ \widehat{DEF}$ au lieu de $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$.

Les productions orales et écrites des étudiants de ce binôme permettent de constater que les règles de traduction qui leur permettent de faire le lien entre la figure et ses dessins en géométrie ne sont pas cohérentes. On peut penser que cela est dû à un conflit dans leur concept-image sur les figures qu'ils manipulent dans l'exécution des tâches qui leur sont prescrites. En particulier, il semble ne pas exister des liens cohérents entre les images mentales des étudiants sur la figure manipulée et ses propriétés. Le fait que les étudiants aient procédé par vérification expérimentale sur les dessins permet d'inférer que ces étudiants se situent dans le paradigme de la géométrique naturelle.

Cas 2 : Analyse des discussions des étudiants AMBA « AM » et KENEKA « KEN ».

Dans leur dialogue, ceux-ci ont exprimé des difficultés dans la compréhension de la relation entre la figure et ses dessins. Leur production montre qu'ils ont pris en compte les formes des dessins parmi les propriétés des figures. En effet, les étudiants identifient la nature de certains triangles à partir de la forme des dessins. De plus, ceux-ci contrôlent visuellement la relation d'égalité entre les côtés d'un même triangle :

AM : le triangle DEF à deux côtés égaux; *KE : je t'écoute;* *AM : l'autre triangle à un côté égal avec l'angle;* *KE : c'est bizarre comment ? L'angle peut être égal avec le côté ?* *AM : c'est bizarre;* *KE : on dit faite la liste des relations entre les triangles ABC et EFD ci-dessous;* *AM : DEF a deux côtés égaux, figure 2;* *AM : hein oui c'est vrai, l'autre c'est un triangle isocèle;* *KE : ABC est un triangle isocèle;* *AM : Figure 2, le triangle EFD, l'angle est égal avec le côté parce qu'ils ont les mêmes codes;* *Figure trois l'angle est égale avec un côté et l'autre est différent;*	AMBA relève le fait que le triangle DEF a deux côtés égaux, ce qui fait de ce triangle un triangle isocèle. Cependant, aucun code sur ces dessins ne permet de valider leur affirmation. On peut supposer que cela provient d'un contrôle visuel sur le dessin. Il évoque chez l'étudiant un exemple de triangle ayant deux côtés égaux contenus dans son image mentale. De notre point de vue, il pourrait s'agir d'une «forme prototype». On constate que AMBA compare l'angle et le côté du triangle. C'est une erreur, car ces objets n'appartiennent pas à la même classe d'objets. Cela serait dû à une mauvaise interprétation des codes représentés sur le dessin. En effet, le même signe est utilisé pour coder le côté et l'angle du triangle.

Parmi les propriétés proposées par les étudiants, on retrouve des informations qui font référence à la disposition spatiale des dessins. En effet, ces derniers décrivent la façon dont les dessins sont positionnés sur la feuille. L'extrait qui suit permet de l'illustrer :

AM : on va dire que les deux triangles ont les mêmes côtés et chacun… ; *KE : on peut aussi dire qu'ils sont disposés de différente manière ;* *AM : et chacun d'eux a de différentes mesures ;* *KE : leurs côtés sont différents ;* *AM : les triangles là sont égaux non ?*	On constate que la propriété évoquée par AMBA est ambiguë. Il pourrait s'agir des triangles confondus ou des triangles équilatéraux. La propriété évoquée par KENEKA est une information spatiale qui n'est pas géométriquement signifiante. Les étudiants évoquent le fait que les côtés des triangles sont différents, on peut supposer qu'ils veulent parler des longueurs différentes.

On constate que les étudiants procèdent par vérification expérimentale pour identifier les propriétés sur les différents dessins. Cela permet de les situer en géométrie naturelle. Les relations d'égalité entre les côtés d'un triangle sont contrôlées visuellement sur les dessins. Les dessins évoquent chez les étudiants des exemples de figures contenus dans leur image mentale qui leur sert de référence dans l'exécution des tâches. De plus, les informations spatiales font partie des éléments du concept-image des étudiants sur la figure manipulée. On peut également noter les difficultés d'interprétation des codes représentés sur les dessins. Ces phénomènes permettent de penser que les règles de traduction qui permettent aux étudiants de connecter la figure à ses représentations dans leur concept-image n'ont pas atteint leur maturité.

Description de deux triangles congruents

Les étudiants ont proposé une caractérisation de deux triangles congruents. Ces derniers ont mobilisé les termes contenus dans leur concept-définition pour exprimer leur concept-image sur de deux triangles congruents. Le tableau qui suit indique le type de description produite par les étudiants.

Caractéristique de l'objet	**Effectif des étudiants**
Définition ambiguë	55 %
Définition empirique	38,33 %
Évocation des transformations	5 %
Autres propriétés	5 %

Tableau 2 — caractérisation des descriptions des étudiants de deux triangles congruents

Le tableau précédent permet de constater que 55 % des étudiants ont proposé des descriptions ambiguës de deux triangles congruents. En effet, il s'agit des descriptions qui peuvent donner lieu à plusieurs interprétations. Par exemple, « deux triangles sont congruents si les côtés du triangle de l'un sont égaux à ceux de l'autre et leurs angles sont égaux deux à deux ». Par ailleurs, 38,33 % des étudiants ont proposé des descriptions empiriques de deux triangles congruents qui correspondent à celles attendues à l'analyse a priori. Ce sont des descriptions qui sont liées aux représentations de ces triangles. Par exemple « si l'un est le reflet de l'autre dans un miroir ». Ces étudiants se situent dans la géométrie naturelle. Pour ces derniers, les objets manipulés semblent être des objets sensibles. On

note également que 5 % des étudiants ont évoqué le fait qu'il s'agit de deux triangles isométriques, ce qui est un synonyme de deux triangles congruents. Enfin, 5 % des étudiants ont évoqué des informations non pertinentes pour la tâche par exemple, l'hypoténuse des triangles représentée. On peut noter que les dessins de la première question représentent des triangles quelconques et non des triangles rectangles. Une tentative d'explication à cela serait que ces étudiants n'ont pas un concept-image cohérent sur les figures manipulées.

Cas 1

Les étudiants de ce binôme ont donné une description non conforme à celle qui peut être acceptée en géométrie au secondaire. Cette description est ambigüe. En effet, les propriétés évoquées par les étudiants peuvent donner lieu à plusieurs interprétations. Le tableau qui suit donne un extrait des discussions des étudiants.

ED : deux triangles congruents sont deux triangles ayant les mêmes côtés et les mêmes angles souvent codés de la même manière ;	Les propriétés contenues dans l'énoncé de cet étudiant peuvent donner lieu à plusieurs interprétations. On pourrait penser qu'il s'agit des triangles équilatéraux ou à deux triangles confondus.
ED : s'ils sont égaux, ça veut dire qu'ils sont complémentaires l'un de l'autre ; DA : explique-toi, complémentaire ? ED : je sais ce que je dis c'est-à-dire leurs angles sont complémentaires leurs côtés sont complémentaires ; ED : il s'agit de deux triangles ayant les mêmes côtés DA : quand tu dis ça, cela veut dire que tout ça est égal à tout ça ; c'est-à-dire tous les côtés se ressemblent ; cela veut dire que ce sont des triangles équilatéraux ;	On constate que les étudiants parlent de triangles complémentaires, ce qui n'a pas de sens en géométrie. Cependant, ils expliquent cette propriété en évoquant à nouveau, les côtés complémentaires. Lorsque nous les avons interrogés à ce sujet, ils disent qu'il s'agit des triangles superposables et des côtés de même longueur. On constate également que les étudiants évoquent les côtés qui se ressemblent, cela laisse penser qu'il s'agit d'une constatation visuelle.

On constate à travers cet extrait que les étudiants ont des difficultés à trouver des termes appropriés pour spécifier leur concept-image. Les descriptions qu'ils proposent ne concordent pas à celles qui peuvent être acceptées au secondaire. De plus, on constate qu'il existe un lien réel entre les productions des étudiants à cette question et ceux de la première question. On peut dire que les règles de traduction qui leur permettent de faire le lien entre les triangles congruents et ses dessins n'ont pas atteint leur maturité dans leur concept-image.

Cas 2

Les étudiants ont proposé un synonyme à deux triangles congruents, leur description intègre les propriétés spatiales des dessins ainsi que les formes des dessins. L'extrait qui suit en donne une illustration.

KE : on peut dire que deux triangles congruents c'est deux triangles qui ont la même forme, mais de dispositions différentes. Non, c'est deux triangles qui ont différentes formes, mais de mêmes dispositions. AM : je pense plutôt que c'est deux triangles sont égaux, mais placés de différentes manières, parce que le sommet du triangle regarde par ici alors que le sommet du triangle la regarde par là. On va dire qu'il s'agit de deux triangles égaux, mais disposés de manière différente.	On constate que les étudiants parlent de triangles égaux, il s'agit d'un synonyme de triangles congruents. Les étudiants évoquent les propriétés telles que : « avoir la même forme » et « être disposé des différentes manières » qui n'ont pas de sens en géométrie axiomatique naturelle.

On constate que les descriptions des étudiants intègrent les propriétés qui proviennent des interprétations abusives des dessins. On observe également que les éléments de leur concept-image sur les figures manipulées ne sont pas cohérents. L'évocation des formes et des propriétés spatiales permet de situer les étudiants en géométrie naturelle.

Les productions des étudiants permettent d'inférer que leur concept-image sur deux triangles congruents n'est pas suffisamment développé. Leurs définitions sont ambiguës et liées aux dessins. Les termes utilisés pour les décrire ne sont pas appropriés.

Conclusion et discussions

L'objectif de cet article était de mettre en lumière l'influence de la figure et ses dessins sur la construction d'une définition de deux triangles congruents par les étudiants. Pour ce faire, nous avons passé un questionnaire et conduit une expérimentation au cours de laquelle les discussions des élèves ont été enregistrées et retranscrites.

Les productions des étudiants font émerger des difficultés dans l'interprétation des propriétés des dessins associés au problème. On observe que les étudiants font des interprétations abusives des dessins. Certaines informations retenues proviennent d'un contrôle visuel ou instrumenté sur les dessins. Des propriétés spatiales sont également retenues comme caractéristiques de deux triangles congruents. Ces résultats permettent de situer ces étudiants en géométrie naturelle. On peut supposer que leurs concepts-images évoqués sur les figures manipulées ne sont pas suffisamment développés. Ces résultats convergents avec ceux de Coppé, Dorier, & Moreau (2005), Laborde (1994), Walter (2001) qui ont également observé que certaines difficultés des élèves en géométrie proviennent de l'utilisation des informations visuelles qui parfois n'ont pas de sens en géométries. Les formes des dessins font également partie des informations relevées par les étudiants pour caractériser la figure. Ce fait pourrait indiquer que ces derniers ont mobilisé les formes prototypes dans leur image mentale. Cette observation concorde avec les résultats de Noirfaliste (1991) qui a mis en évidence l'existence des formes auxquelles les étudiants se réfèrent pour exécuter des tâches en géométrie. Ces formes sont à l'origine des difficultés des étudiants tels que le rapportent les travaux de Tchonang et al. (2019). Ces résultats viennent compléter ceux de Vodušek et Lipovec (2014) qui ont observé que les enseignants en formation se limitaient aux formes du carré pour résoudre des problèmes. De notre point de vue, ses enseignants n'ont pas achevé leur transition vers la géométrie axiomatique naturelle. Les résultats montrent que les étudiants ont des difficultés pour représenter les symboles

des figures géométriques. On peut considérer au sens de Fischbein et Nachlieli (1998) qu'il n'y a pas fusion entre les propriétés conceptuelles et sensorielles de la figure géométrique.

Les résultats de cette étude montrent que l'évolution dans la scolarité n'améliore pas toujours l'interprétation des dessins et ne permet pas toujours à l'élève de construire un concept-image cohérent sur la figure en géométrie. La compréhension des élèves de la relation entre la figure et ses dessins a des répercussions sur la construction d'une définition acceptable en géométrie euclidienne. Ces résultats rejoignent ceux de Fischbein et Nachlieli (1998) qui montrent que l'évolution dans la scolarité n'améliore pas le contrôle des composantes conceptuelles sur l'interprétation des figures contrairement à ce que l'on pourrait penser.

Cette étude présente des limites. Tout d'abord, les résultats ne peuvent être généralisés en raison du faible nombre de participants. Ensuite, on pourrait réduire la subjectivité des résultats en analysant également les données vidéo qui vont permettre de voir comment les étudiants utilisent les instruments de géométrie pour collecter leurs informations sur les dessins. Des études futures pourraient consister à explorer les appréhensions des dessins dans les pratiques enseignantes.

Références

Coppé, S., Dorier, J.-L., & Moreau, V. (2005). Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5ème. *Petit X*, (68), 8–37.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 2*(July), 248–255.

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en terme de congruence. *Anale de Didactique et Des Sciences Cognitives, 1*, 57–74. Retrieved from IREM de Strasbourg

Fischbein, E., & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education, 20*(10), 1193–1211. https://doi.org/10.1080/0950069980201003

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 11, pp. 175–193).

Laborde, C. (1994). Enseigner la géométrie : Permanence et révolution. *Bulletin APMEP, 523–548*, 523–548.

Noirfalise, R. (1991). Figures prégnantes en géométrie. *Repères-IREM, 2*, 51–58.

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics, 19*(1), 79–92. https://doi.org/10.1007/BF00428386

Tchonang, P. (2021). Student Comprehension of The Concept of a Geometrical Figure : The Case of Straight Lines and Parallel Line. *Journal of Mathematics Education, 6*(2), 149–158. https://doi.org/http://doi.org/10.31327/jme.v6i2.1408

Tchonang, P., Njomgang, J., Tieudjo, D., & Nchian, L. (2019). Influence of Drawing and Figures on Secondary School Students' Argumentation and Proof: An investigation on Parallelogram. *Acta Didactica Napocensia*. https://doi.org/10.24193/adn.12.2.10

Tchonang, P., Njomgang, J., Tieudjo, D., & Pedemonte, B. (2020). The Introduction of Proof at the Secondary School in Cameroun: A First Approach trough the Study of Quadrilaterals and Triangles in the Textbook. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 15*(3), em0599. https://doi.org/10.29333/iejme/8404

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293–305. https://doi.org/10.1080/0020739830140305

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *Advanced Mathematical Thinking*, 65–81.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In *Proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education* (pp. 177–184).

Vodušek, H. B., & Lipovec, A. (2014). The square as a figural concept. *Bolema - Mathematics Education Bulletin, 28*(48), 430–448. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a21

Walter, A. (2001). Quelle géométrie pour l'enseignement en collège? *Petit X, 54*, 31–49.

Titre: Enseignement des mathématiques au post-secondaire, au supérieur et dans les filières professionnelles

Auteurs: GIBEL Patrick et BERGE Analia

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 542 - 550

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Présentation et Bilan du Groupe de travail n° 6

Enseignement des mathématiques au post-secondaire, au supérieur et dans les filières professionnelles

Responsables du GT6
GIBEL[1] Patrick et BERGE[2] Analia
Correspondante Comité Scientifique :
CHERIKH[3] Ouahiba

Le groupe de travail n°6, désigné par GT6 dans la suite de cet écrit, porte sur l'enseignement des mathématiques au post-secondaire, au supérieur et dans les filières professionnelles. Nous avons été surpris de ne pas recevoir de propositions inhérentes aux mathématiques dans les filières professionnelles, nous souhaitons vivement que, lors du prochain colloque Espace mathématique Francophone, cette composante donne lieu à plusieurs propositions de communications.

En tant que responsables du GT6, nous avons reçu au total six propositions de communications relatives à l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement supérieur. Ce nombre de propositions est relativement faible ; cette période de sortie de la crise sanitaire (COVID) semble avoir créé de réelles incertitudes quant à la forme de cette manifestation scientifique et rendu difficile le déplacement de certains collègues. De ce fait, deux communicants n'ont hélas pas pu participer au colloque ; quatre textes portant sur les enseignements mathématiques, durant les trois premières années universitaires, ont été présentés et discutés par l'ensemble des participants au GT6, ce dernier ayant réuni au total 16 participants. La dernière séance de bilan a permis de discuter plus globalement des préoccupations et des perspectives communes aux participants concernant l'enseignement des mathématiques au supérieur.

Thématiques abordées dans le Groupe de Travail

Les questions liées à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques au postsecondaire, au supérieur et dans les filières professionnelles, concernent tant les interrogations autour des pratiques d'enseignement à ces niveaux que les enjeux liés aux mathématiques de plus en plus sophistiquées qui requièrent la pratique du raisonnement et l'usage d'un formalisme accru. Dans un sens large, les

1. Laboratoire Lab-E3D, Université de Bordeaux, France, patrick.gibel@u-bordeaux.fr
2. Université du Québec à Rimouski (UQAR), Canada, analia_berge@uqar.ca
3. Université des sciences et de la technologie Houari-Boumédiène USTHB, Algérie, ouahiba_cherikh@yahoo.fr

difficultés liées à la transition entre niveaux d'enseignement sont aussi concernées notamment en lien avec la formation et l'encadrement d'étudiants de la première année dans une nouvelle institution.

La question de l'enseignement au post-secondaire et l'université dans les précédents colloque EMF

Les activités du GT6 ont été organisées dans la continuité des précédents groupes de travail sur l'enseignement des mathématiques aux niveaux post-secondaire et universitaire lors des colloques EMF à Genève (2012-GT7), à Alger (2015-GT7) et à Gennevilliers (2018-GT5), on a aussi repris des éléments des projets spéciaux en transitions en ce qui touche à la transition secondaire -post-secondaire (2015-Spé3).

Les activités du GT6 sont organisées dans la continuité des précédents groupes de travail sur l'enseignement des mathématiques aux niveaux post-secondaire et universitaire lors des colloques EMF à Genève (2012-GT7), à Alger (2015-GT7) et à Gennevilliers (2018-GT5).

Les questionnements relatifs à notre Groupe de Travail

La thématique du huitième colloque EMF vise notamment à interroger « en quoi les contextes scientifiques et technologiques ne cessent d'avoir des effets sur l'activité mathématique ? ». Elle met en lumière que « l'utilisation grandissante du numérique et de l'intelligence artificielle dans différents domaines de l'activité humaine n'est pas sans conséquence sur la définition ou la redéfinition même de l'activité mathématique, dans les laboratoires de recherche mais aussi dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques en classe. »

Nous avons porté une attention particulière aux recherches permettant d'approfondir les organisations mathématiques dans ces niveaux et leurs conséquences sur l'apprentissage. Nous avons pris pour objet(s) d'étude(s) :

- Les difficultés liées à la transition dans un sens large : transition entre des niveaux d'enseignement (Gueudet et al., 2016), transition entre des domaines mathématiques, rôle et usage de l'algorithmique dans l'enseignement des mathématiques ;
- Les difficultés liées aux pratiques des enseignants, par exemple le fait qu'elles prennent en partie pour référence les pratiques « expertes » des mathématiciens professionnels ;
- Les difficultés liées à la pratique du raisonnement (Bloch et Gibel, 2019), au formalisme notamment à l'usage des symboles, rencontrées depuis les premières années du secondaire et dans le supérieur ;

Ces différents axes de recherche se particularisent lorsque nous pensons aux différents types de formations offertes dans l'enseignement supérieur. Ainsi, avons invité les participants à proposer des articles qui s'inscrivent dans les axes précédents, ou sur les sujets suivants, dont la liste n'est pas exhaustive :

- Les recherches portant sur la conception d'ingénieries didactiques et la mise en œuvre de dispositifs pédagogiques innovants (Bloch et Gibel, 2020) expérimentés en vue de permettre aux étudiants de dépasser certaines difficultés et certains obstacles épistémologiques et didactiques (Brousseau, 1998). Les recherches peuvent conduire à l'étude des enjeux didactiques de leur implémentation effective et durable ainsi qu'à analyser leurs effets sur l'épistémologie de l'enseignant et l'évolution des pratiques enseignantes.

- Les collaborations effectives entre mathématiciens et didacticiens des mathématiques (Bloch et Gibel, 2022).

Pour aborder ces thèmes, et d'autres liés à l'enseignement-apprentissage des mathématiques aux niveaux post-secondaire, supérieur et dans les filières professionnelles, nous avons invité les enseignants de mathématiques au lycée et à l'université, les personnes voulant s'initier à la recherche en didactique des mathématiques et les chercheurs expérimentés dans ces niveaux d'enseignement, à participer à ce groupe de travail.

Les contributions au Groupe de Travail 6

La variété des contributions au GT6

Notre groupe de travail a reçu 6 contributions concernant l'enseignement des mathématiques universitaires, que ce soit dans le cadre de la première année d'études, dans les années subséquentes ou dans le cadre de la formation d'enseignants. Les contributions sont synthétisées, par ordre alphabétique des auteurs, dans le tableau 1.

	Auteurs	Contexte	Thème mathématique	Mots descriptifs
1.	Akrouti, I.	Première année universitaire	Analyse – calcul intégral	Étude exploratoire.
2.	Battie, V.	Première année universitaire	Raisonnement par l'absurde	Analyses personnelles et institutionnelle.
3.	Bergé, A, Tanguay, D et Barallobres, G.	Formation à l'enseignement- 3e année universitaire	Analyse – nombres réels	Exploration en laboratoire.
4.	El M'Hamedi, Z.	Non spécifié	Test statistiques	Revue bibliographique
5.	Gibel, P. et Bloch, I.	Première année universitaire	Analyse	Expérimentation en classe dans le contexte d'une Unité d'Enseignement
6	Tchonang, P., Ambono, N. et Njomgang, J.	Entrée à l'université	Géométrie	Expérimentation en classe

Tableau 1 – Contributions au GT 6

Les contributions 2, 3, 5 et 6 ont été présentées lors des différentes sessions de notre groupe de travail par un ou plusieurs de leurs auteur-e-s durant 45 minutes et ont ensuite donné lieu à des discussions et des débats auxquels l'ensemble des participants au groupe de travail ont pris part.

Les contributions présentées lors des différentes sessions du GT6

Véronique Battie étudie les questions d'enseignement et d'apprentissage relatives à la preuve et au raisonnement en exploitant de façon privilégiée les spécificités et potentialités de l'arithmétique. Pour outiller épistémologiquement les analyses réalisées, tant *a priori* qu'*a posteriori* elle distingue dans le raisonnement deux dimensions complémentaires et en interaction : la dimension organisatrice et la dimension opératoire. La dimension organisatrice s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée. La dimension opératoire quant à elle est relative à tout ce qui relève des manipulations de calcul (au sens le plus large) opérées sur les objets en jeu et qui permettent la mise en œuvre des différentes étapes du raisonnement global suivi (dimension organisatrice). Après avoir étudié l'institutionnalisation du raisonnement par l'absurde dans différents cours magistraux (CM), Véronique Battie étudie sa mise en œuvre par les étudiants via l'analyse d'une soixantaine de copies issues d'une évaluation au sein du parcours aménagé. Les principales questions auquel le texte de Battie s'efforce d'apporter des éléments de réponses sont : Comment le raisonnement par l'absurde est-il institutionnalisé à l'entrée à l'Université et quelles difficultés sont rencontrées par les étudiants lors de sa mise en œuvre ? C'est à ces questions que nous tentons d'apporter des éléments de réponse tant en appui sur nos recherches en didactique des mathématiques qu'en écho à notre pratique enseignante.

Situé dans le champ de la didactique de l'analyse, le texte de Bergé, Tanguay et Barallobres concerne la problématisation de la distinction entre es ensembles R et Q. Lors de leur présentation, les auteurs ont précisé qu'ils ne cherchaient pas à mettre en évidence cette distinction en termes d'éléments appartenant à R et non à Q (ce que les étudiants savent déjà !) mais plutôt en termes d'une propriété que R possède et que Q ne possède pas. Les étudiants ciblés étaient ceux en études avancées en mathématiques ou en formation à l'enseignement au secondaire. Les auteurs ont proposé à deux étudiants, en laboratoire, une séquence d'enseignement et d'apprentissage dans laquelle ils ont cherché à 1) installer qu'en Analyse il est nécessaire de travailler dans un domaine numérique dans lequel la convergence de chaque paire de suites adjointes soit assurée, 2) faire construire aux étudiants une paire de suites adjointes rationnelles non convergentes et 3) faire conclure aux étudiants qu'une telle propriété n'est pas valable en Q. Lors de la présentation au GT6, les auteurs ont mentionné que l'analyse des productions et échanges entre les étudiants et entre les étudiants et les chercheurs, a montré que la condition de rester en Q pour accomplir le travail est perçue comme artificielle et est mal comprise par les étudiants, qui n'auraient pas saisi qu'il s'agissait de distinguer les corps Q et R sans l'intervention des chercheurs. Les échanges entre les participants au GT 6 ont renforcé l'idée que les interventions des enseignants ont un rôle crucial à jouer et que ces interventions s'avèrent significatives si elles sont appuyées sur un travail déjà accompli par les étudiants. Les participants étaient tous d'accord sur le fait que le cours magistral est la modalité souvent privilégiée dans les études universitaires et postsecondaires en général. Une discussion sur la place de l'exposé magistral en classe universitaire et sur l'autonomie des étudiants a eu lieu lors des échanges en groupe de travail.

L'article de Gibel et Bloch présente un dispositif pédagogique innovant, mis en place à l'Université de Pau et des Pays de l'Adour de septembre 2028 à juin 2021, afin d'aider les étudiants de première année de Licence de mathématiques et de licence (MIASHS Mathématiques et Informatiques appliquées aux sciences humaines et sociales) à surmonter les difficultés d'adaptation aux mathématiques du niveau supérieur, et à s'impliquer dans la recherche de problèmes mathématiques. Les auteurs présentent les spécificités de ce projet innovant ainsi que le contrat didactique qui lie les enseignants du département mathématiques et les étudiants de première année de Licence. Gibel et Bloch explicitent les conditions réunies afin de permettre sa mise en œuvre et nous justifions en quoi ce projet a permis de rendre accessible aux étudiants les attendus des enseignants inhérents à la pratique des mathématiques à l'Université, limitant ainsi le fossé existant entre les mathématiques du secondaire et celles du Supérieur. Les auteurs détaillent *également* une situation mathématique sur l'étude de deux fonctions (associées à deux variables distinctes) visant à étudier l'évolution d'une même grandeur, en proposant une analyse a priori détaillée permettant de justifier son intérêt pour l'apprentissage du concept de fonction. Le dispositif aide à questionner le sens des concepts et donc à s'insérer dans la logique mathématique de niveau supérieur.

Suivant le modèle de Vinner : *concept-image, concept-définition, les auteurs* Tchonang, Ambomo et Njomgang s'intéressent à la construction de définitions géométriques par des étudiants. Dans le texte présenté au GT6, il a été question de la définition de congruence de triangles. Les auteurs mènent une étude auprès de 60 étudiants, tous bacheliers, qui se préparent pour affronter les concours des grandes écoles scientifiques. Les auteurs analysent des discussions des étudiants en binômes et ils concluent que les étudiants « surinterprètent » *les dessins géométriques et confondent la figure géométrique et le dessin. Les participants du GT 6 ont posé des questions sur la méthodologie utilisée pour compléter cette recherche et sur les difficultés rencontrées par les étudiants*.

Discussions au sein du groupe avec l'ensemble des participants

La discussion entre co-responsables du GT6 en vue de favoriser les interactions entre participants (enseignants, enseignants-chercheurs, formateurs, inspecteurs, etc) a débouché sur une idée originale : nommer réacteur principal et réacteur secondaire des participants du GT6 pour impulser les échanges et le questionnement des présentateurs en vue d'introduire la discussion, le débat. Nous avons souhaité créer une communauté dans laquelle chacun puisse trouver sa place et interroger l'enjeu et la pertinence de la recherche présentée, mais également questionner la possibilité de transposer et éventuellement d'adapter le questionnement et le dispositif de recherche à un environnement culturel différent. Le nombre assez restreint de participants (11 participants) au GT6 a permis ce fonctionnement « privilégié ». Les échanges, nourris par des communication variées et consistantes, ont donné lieu à des sessions vivantes auxquelles les participants – communicants et non communicants – ont, semble-t-il trouvé leur place et ont apporté une véritable dynamique dans les échanges.

Nous souhaitons expliciter les principaux thèmes qui ont été objets de discussions et de débats lors des différentes sessions et lors du bilan global effectué lors de la dernière séance de travail :

- L'adéquation du cadre ou de l'outillage théorique à la mise en œuvre de la recherche ;
- La pertinence de la méthodologie utilisée pour conduire la recherche ;
- Les questionnements relatifs à des possibles transferts de la question de recherche à d'autres institutions, dans d'autres pays ;
- Le traitement des résultats obtenus et leurs interprétations selon les curricula des différents pays ;
- Les ressemblances et les différences dans les programmes de formation à l'enseignement en mathématiques au secondaire.

Perspectives

Les principales perspectives de notre groupe de travail visent à développer davantage la vulgarisation et la diffusion des travaux de recherche en didactique des mathématiques

- auprès des enseignants du secondaire et du supérieur
- auprès du GREMA, Groupe de Recherche en Enseignement des Mathématiques en Afrique.

Nous souhaitons également réfléchir aux différentes possibilités de développer davantage de projets de collaboration Nord-Sud à propos de l'enseignement supérieur.

Références

Artigue, M. (2004). Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques. *Actes du premier congrès franco-canadien de sciences mathématiques*, Toulouse.

Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post- secondary level. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning : a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 1011-1049). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Bloch, I., Gibel, P. (2022). Situations de recherche pour l'accès aux concepts mathématiques à l'entrée à l'université. *Revue EpiDEMES, Épijournal de Didactique et Epistémologie des Mathématiques pour l'Enseignement Supérieur*. Numéro spécial.

Bloch, I., Gibel, P. (2020). Analyse des effets d'un dispositif pédagogique innovant sur l'évolution des représentations des étudiants en première année de Licence de mathématiques. In (Eds.), *Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2020, 12 Septembre-19 september)*: Université de Carthage, University of Montpellier and INDRUM. Virtual colloque on cyberspace.

Bloch, I., Gibel, P. (2019). A model to analyze the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course – presentation and examples, *Annales de didactique et de sciences cognitives. 24,* 183-205.

Brousseau, G. (1998). La théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.

González-Martín A.S., Bridoux S., Ghedamsi I., Grenier-Boley N. (2015). Enseignement des mathématiques aux niveaux post-secondaire et supérieur - Compte-rendu du Groupe de Travail n°7. In Theis L. (Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT7* (pp. 640-649). Alger, Algérie: Université d'Alger.

Gueudet, G. (2017). University Teachers' Resources Systems and Documents. I*nternational Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education 3*(1), 198-224.

Gueudet, G., Bosch, M., di Sessa, A., Kwon, O.-N., Verschaffel (2016). *Transitions in mathematics education*. ICME13 Topical survey series. New York, NY: Springer.

Winsløw, C., Matheron, Y., & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics, 83*(2), 267- 284. doi: 10.1007/s10649-012-9453-3.

Titre: La formation continue à distance des enseignants de mathématiques au primaire

Auteurs: EL IDRISSI Abdellah, ROUAN Omar et AIT OUNEJJAR Lahoussaine

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 551 - 565

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

La formation continue à distance des enseignants de mathématiques au primaire

EL IDRISSI[1] Abdellah - ROUAN[2] Omar- AIT OUNEJJAR[3] Lahoussaine

Résumé. Ce texte a un double objectif. D'abord, il vise à questionner l'exploitation des TIC dans le contexte marocain bien avant (et pendant) la période de COVID_19. En deuxième lieu, il ambitionne à travers un exemple d'illustrer une exploitation optimale des TIC, notamment une plateforme dans la formation continue des enseignants, en pointant, du moins pour le contexte marocain les critères minimaux pour une mise en place intégrée de tout projet ambitieux d'objectif similaire. Les propos avancés s'appuient sur le développement d'une formation continue à distance au bénéfice des enseignants de mathématiques au primaire. Cette formation porte sur la notion d'aire. Elle sera l'occasion d'analyser et questionner la « transformation » qui permet de rendre disponible à distance une formation dispensée en présentiel.

Mots-clés : Présentiel, Elearning, Ingénierie, Formation continue, Calcul d'aire.

Abstract. This paper has a dual purpose. Firstly, it aims to question the use of ICTs in the Moroccan context long before (and during) the period of COVID_19. Secondly, it aims through an example to illustrate an optimal use of ICT, namely a platform of the in service training of teachers, by pointing out, at least for the Moroccan context, the minimum criteria for an integrated and adequate implementation of any similar project. The comments made are based on the development of an in service e-learning training of the primary school mathematics teachers. This training focuses on the concept of area. It will be an opportunity to analyze and question the process makes it possible to move from « a face to face » into an Elearning training.

Keywords : Face-to-face, Elearning, Engineering, In service training, Area measurement.

1. *ENS, UCA, Marrakech, Maroc, abdellah_elidrissi@yahoo.fr

2. **ENS, UCA, Marrakech, Maroc, omarrouan@gmail.com

3. ***ENS, UCA, Marrakech, Maroc, laitounejjar@hotmail.com

Introduction

L'intérêt pour l'utilisation des technologies de l'information et de communication (TIC) à des fins pédagogiques au Maroc date de plus de deux décennies. Cette utilisation est toutefois centrée sur les élèves, et hormis quelques essais isolés et d'envergure réduite peu d'attention est prêtée à la formation des enseignants. Or, si pour l'enseignement ou la formation ordinaires tout semblait « aller de soit » l'utilisation adéquate des TIC pour l'enseignement ou la formation nécessite une planification rigoureuse et sensible à une multitude de paramètres. L'étude de ces paramètres et leur adaptation et coordination a fait l'objet de plusieurs études qui ont abouti à l'élaboration de schémas ou de modèles, rebaptisés comme ingénieries « pédagogiques » ou ingénieries de « la formation » et lorsque des outils technologiques TIC sont sollicités on évoque alors des ingénieries « de technologies éducatives » (Kemp et col, 1996 ; Dessus, 2006 ; Alessi et col, 2001 ; Bajracharya, 2019).

Ingénierie pour les systèmes d'apprentissage : le modèle ADDIE.

Dans cette étude nous nous inspirons d'un modèle d'ingénierie pédagogique qui définit les phases nécessaires pour l'élaboration d'un système d'enseignement depuis « l'idée mobilisatrice » jusqu'à « l'évaluation », c'est le modèle ADDIE (Peterson, 2003, Aldoobie, 2015). Ce dernier est conçu en cinq phases qui se complètent et s'imbriquent déterminant un processus reproductible et générique susceptible d'assurer l'efficacité et l'efficience du système établi. Les phases du modèle sont : 1) Analyse, 2) Design, 3) Développement, 4) Implémentation et 5) Evaluation. Ainsi, tout projet de formation et avant sa mise en place et son exécution, il nécessite une analyse et une planification. Cette analyse est encore plus indispensable et exigeante lorsqu'il s'agit de formation à distance, où en plus des dimensions curriculaire et humaine, il faut considérer ou reconsidérer les dimensions technologique, environnementale et humaine.

Nous présentons ici le contexte, l'analyse primaire, la conception et le développement d'une formation continue à distance adressée aux enseignants de mathématiques au primaire. Il s'agit donc des trois premières phases, Analyse, Design et Développement (ADD) du modèle adopté ADDIE. L'implantation et l'évaluation pourront être réalisées ultérieurement et feront l'objet d'un autre texte.

Mise en contexte : la formation et les TICE au Maroc

La formation continue des enseignants de mathématiques

Le Maroc après son indépendance, a hérité de différents systèmes d'enseignement : moderne, traditionnel, informel, originel, etc. et beaucoup d'efforts ont été investis afin de les unifier et les réformer. Très tôt et préoccupé par des considérations identitaires et économiques, le Maroc a procédé à la marocanisation des cadres de l'enseignement sans trop se soucier des aspects qualitatifs et avec peu

d'intérêt pour la formation continue des enseignants. Il a, certes, aussi procédé à quelques tentatives de structuration en vue de se doter d'un système de formation continue des enseignants, formation qui soit efficace, bien adapté à ses propres besoins et qui s'appuie sur les ressources humaines nationales. Ces tentatives, en dépit de la bonne foi qui les anime se sont avérées vaines.

La déficience de ce système de formation continue s'est faite dénoncer et sentie à plusieurs occasions, notamment avec les évaluations internationales telles que PISA, TIMMS et PIERLS ou le Maroc occupe les derniers rangs (Ourahay, 2015). Ces résultats sont également corroborés par des évaluations nationales organisées par le conseil supérieur de l'éducation (CSE) et qui aboutissent à des résultats similaires. Le conseil pointe, entre autres, la formation des enseignants comme facteur principal responsable de la faiblesse des résultats constatés au niveau des performances des élèves (CSE, 2012).

Une réforme instaurée au début des années 2000 (COSEF, 1999) a permis de constater des difficultés qu'ont les enseignants à interpréter et à opérationnaliser les nouvelles approches préconisées et en faire bénéficier les apprenants. Ce projet a été poursuivi par deux autres actions de grande envergure : 1) un « Programme d'Urgence » 2009 – 2012 qui devrait accélérer la mise en place des recommandations dictées par la réforme précédente (COSEF, 1999 ; El Idrissi, 2013) et 2) une « Vision Stratégique » devant orienter le système éducatif et de formation durant les années 2015-2030 (CSE, 2015). Dans chacun de ses projets, les textes consacrent une attention particulière à la formation continue des enseignants et à l'usage des TICE dans l'enseignement et dans la formation.

A l'heure actuelle, au-delà des slogans et hormis quelques actions éparses et peu planifiées, le système éducatif marocain se retrouve sans structure, sans programme et sans visibilité au niveau de la formation continue des enseignants. Un programme de formation continue pour l'enseignement secondaire est toutefois en cours de mise en place, avec l'appui financier et logistique de l'USAID et une maitrise d'ouvrage Belgo-Française. Son impact devra être visible dans quatre ou cinq ans, espère-t-on.

Exploitation des TICE et développement des usages

La charte (COSEF, 1999) consacre une section (un levier) aux technologies de l'information et de la communication en incitant à leur exploitation en vue de parer aux difficultés dues à l'éloignement et à l'enclavement des apprenants ou des enseignants dans des milieux isolés et avancer vers l'égalité des chances quant à l'accès à la technologie d'une part et aux ressources documentaires de l'autre.

> *Afin d'optimiser l'emploi des ressources éducatives et de tirer le meilleur parti des technologies modernes, il sera fait recours aux nouvelles technologies de l'information et de la communication (NTIC) et principalement en matière de formation continue.*

Pour accélérer l'introduction des TICE dans l'enseignement un programme national a été mis en place en 2005, le programme GENIE ; il devait assurer la généralisation des TICE dans l'enseignement, assurer l'égalité des chances quant à l'accès aux TIC et minimiser les effets de la fracture numérique, disait-on. Malheureusement, dans ce programme, conçu initialement pour trois ou quatre ans et qui fonctionne encore de nos jours, l'emphase à été mise sur les infrastructures et équipements informatiques. Des milliers d'écoles, collèges et lycées ont été équipés et le sont toujours par différents types de matériels : salles multimédia, chariots mobiles, valises multimédias, coins informatiques en salles, etc. Ces équipements sont devenus désuets après trois ou quatre ans d'utilisation, utilisation d'ailleurs à minima.

Pour la formation, un schéma dit « en cascades » a été conçu pour la démultiplication des modules de formation des enseignants aux TICE.

C'est un schéma dont l'exécution n'a pas pu dépasser les deux premières étapes puisqu'il exige comme préalables un système de formation continue fluide et fonctionnel, une organisation logistique et chronologique stricte et des ressources humaines avec des profils très spécifiques (Alj et Benjelloun, 2013). Au niveau des ressources numériques, il y eu l'acquisition, l'adaptation et la mise à disposition sur le plan national de ressources importantes et un laboratoire pour attester la conformité des ressources acquises, produites par différents partenaires public ou privé a aussi été créé.

Les évaluations réalisées ont révélé la nécessité de réorientations des objectifs et des stratégies adoptées pour ce programme ; ces réorientations ont eu pour but de doter la formation des enseignants, le développement des usages et la conception de ressources numériques d'une place plus importante (Benfares et col, 2016).

Nous avons présenté dans la section précédente une vision macroscopique de l'état de la l'utilisation des technologies de l'enseignement et de la formation à distance. Il en ressort que les expériences tentées sont inefficaces et impertinentes, notamment puisqu'on y considère que les difficultés d'enseignement en présentiel sont identiques aux difficultés attendues dans les formations à distance et qu'on y tient à « faire à distance » ce qu'on a l'habitude de « faire en présentiel ». Dans la section suivante, nous allons tenter de montrer à travers un exemple qu'il n'en est rien. Nous sommes plutôt dans un changement important de perspective, si ce n'est dans un changement de paradigme de formation.

Une formation à l'enseignement de la notion d'aire

La formation que nous présentons peut-être considérée comme l'adaptation au « distantiel » d'une formation dispensée en « présentiel ». Le thème proposé, « la notion d'aire » est bien important mais nous le considérons davantage comme un exemple, un prétexte que comme un modèle à suivre.

Éléments d'analyse conceptuelle de la notion d'aire

Nous donnons une analyse conceptuelle notamment des éléments de la notion d'aire ayant servi comme référentiel à la formation ainsi qu'une description de ses principales étapes.

Selon les textes officiels, la notion d'aire fait partie du domaine de « la mesure » mais, ces connexions avec « les nombres » et avec « la géométrie » ne sont pas à justifier. De même, la notion d'aire est omniprésente dans le vécu des apprenants que ce soit à l'école ou dans leur vie quotidienne à l'extérieur de l'école. À l'école, on les initié très tôt au coloriage, au jeu de Tangram, aux pavages, à l'agrandissement de figures, etc. Toutes ces activités, intra et extra scolaires sont liées à la notion d'aire et permettent aux élèves de se construire des idées à son propos. Parfois, ces idées sont fausses et se manifestent sous forme de mis-conceptions ou même d'obstacles.

Le premier enseignement de la notion d'aire est programmé en quatrième année du primaire. Deux à trois leçons lui sont consacrées selon les manuels scolaires (MEN, 2020). Même si la connaissance de ce que sont les objets « surface » et « aire » et la distinction entre « aire » et « périmètre » sont des objectifs, on constate que ses éléments sont relativement ignorés dans les activités et les approches adoptées dans les manuels scolaires marocains. Les auteurs de manuels se précipitent vers le calcul des aires, les unités de mesures d'aires, les conversions et les formules de calcul d'aire de surface usuelles. Or, plusieurs recherches montrent que lorsque les élèves ne se construisent pas une vision et une conception spécifique sur la notion d'aire, ils ont des difficultés dans la résolution de problèmes (Douady, 1989). Ceci, malgré le fait qu'ils peuvent réussir des exercices traitant de chacun de ses aspects, considéré isolément. En effet, à titre illustratif on peut noter que toutes les activités d'introduction de la notion d'aire sont faites sur du papier quadrillé et visent à focaliser l'attention des élèves sur le calcul d'aire en ayant recourt aux carreaux de la feuille ou au demi carreau (Baiz, 2020).

A la lumière des observations précédentes, il nous apparaît judicieux de bien circonscrire le contenu de la formation proposée en distantiel et de l'orienter vers la sensibilisation des enseignants :

1. Au « quadrillage », son importance et ses inconvénients dans la construction de la notion d'aire par l'enfant,

2. A la nature psycho-didactique de la persistance chez les élèves à confondre les notions d'aire et de périmètre d'une surface donnée.

La formation en présentiel

L'unité de formation proposée s'insère dans un module consacré à l'enseignement des mathématiques au primaire et structuré en quatre unités principales : 1) approches socioconstructivistes de l'enseignement des mathématiques, 2) les nombres décimaux, 3) la notion d'aire et 4) la division euclidienne.

Les trois notions traitées dans la formation peuvent changer d'une année à l'autre, mais au moins l'une des notions traitée relève du domaine numérique. L'évaluation pédagogique est faite à travers deux travaux de groupes et un examen en présentiel de deux heures. Le seul outil technologique utilisé est « le mail », il sert à échanger et à communiquer les informations organisationnelles nécessaires pour la formation et à mettre les ressources à la disposition des participants. Ces ressources, aussi disponibles sous forme de papier, sont principalement partagées en format PDF ou DOC.

L'unité consacrée à la notion d'aire s'étale sur trois semaines à raison de deux heures en présentiel et près de deux autres heures sous forme de devoirs ou travaux en petits groupes chaque semaine. Nous y traitons des aspects didactiques, pédagogiques, épistémologiques et curriculaires de la notion d'aire en focalisant sur l'introduction de cette notion, programmée pour la quatrième année primaire (CM1, 4ème année).

Voici brièvement le contenu de chaque séance :

Séance1 : La formation est entamée par une comparaison orientée en petits groupes de deux méthodes d'introduction de la notion d'aire proposées par deux manuels scolaires, dont l'un au moins est marocain. Les fiches du guide de l'enseignant correspondantes sont disponibles pour les enseignants. Cette séance se termine par la présentation des bilans de quelques groupes que nous auront identifiés lors de nos discussions avec les groupes.

Séance 2 : discussion à travers des documents et des extraits de manuels des difficultés de la notion d'aire comme mesure. Nous y évoquons la confusion avec la notion de périmètre, la distinction aire et surface, l'utilisation des quadrillages, les formules de calcul d'aire et les conversions. Nous procédons aussi à une analyse du paradoxe de Lewis Carol sur les aires (un carré d'aire 64 carreaux transformé en un rectangle d'aire 65 carreaux)

Nous discutons les objectifs de l'enseignement de la notion d'aire en attirant l'attention sur la distinction entre la compréhension de la notion d'aire et le calcul d'aire proprement dit, la notion d'aire d'un point de vue géométrique et du point de vue de la mesure.

Séance 3 : à caractère synthétique, cette séance vise à re-situer la notion d'aire entre les domaines du nombre, de la géométrie et de la mesure et à dégager quelques principes à considérer dans tout choix d'approche ou de progression d'enseignement de la notion d'aire.

Approche pédagogique adoptée pour la formation en présentiel

Sur le plan pédagogique et en termes de référents épistémologiques nous nous adossons au courant socio constructiviste de la connaissance. Nous considérons que la connaissance est une construction adaptative de l'apprenant dans laquelle la dimension sociale est importante en tant que moteur et élément de motivation. L'interaction avec les paires est aussi importante puisque l'apprentissage doit

nous apprendre à vivre avec l'autre et la communication acquiert une place capitale (Jonnaert, 2012). Ainsi, la formation est illustrée et enrichie par une multitude de documents : images, figures, productions d'élèves, extraits d'articles, extraits de manuels, extrait des historiques. Tous ces documents, de deux ou trois pages sont mis à la disposition des étudiants sous format papier et numérique et ces derniers sont généralement encouragée à les consulter et à les étudier.

Les activités qui animent cette formation sont diverses et nous sollicitons continuellement l'activité mentale des participants à travers des travaux de groupes, des études de textes, des analyses de productions d'élèves, des exposés interactifs, des discussions, des exercices didactiques ou mathématiques, des études historiques ou épistémologiques, etc.

Nous tentons à mettre les participants dans des situations de collaboration, de confrontation ou de conflits avec leurs paires ou avec d'autres auteurs et nous privilégions constamment la recherche du sens au dépens des aspects calculatoires.

Le developpement des scénarios d'apprentissage

Pour la formation à distance, nous avons maintenu nos choix épistémologiques et pédagogiques comme pour la formation en présentiel. Il nous faut donc faire un montage pédagogique qui fasse « embarquer » les participants dans des « scènes » significatives et constructives, qui suscitent chez eux une activité mentale et qui rappellent potentiellement les difficultés que peuvent rencontrer les élèves dans leur apprentissage.

De prime abord, il faut déterminer « l'environnement numérique de travail », la plateforme ou le LMS à adopter comme « espace de formation ». Dans un deuxième temps, nous présenterons les différentes activités qui composent la formation, chacune avec les supports multimédias et les interfaces correspondants.

L'environnement de travail : l'embarras du choix

Il est devenu de coutume voire une nécessité pratique de faire supporter chaque formation à distance par une plate forme spécifique, un ''Learning Management System'', LMS ou Système de gestion des apprentissages. Un LMS est un espace virtuel qui constitue la composante principale de l'environnement technique dans lequel se déroule la formation. Il en existe quelques dizaines et de différents types. Pour des nécessités pratiques, le LMS ou la plate forme que nous adoptons est Moodle, qui est un LMS des plus utilisées, notamment dans le milieu universitaire. Moodle possède deux types de fonctionnalités principales les activités et les ressources.

Le corps de la formation est structuré en deux étapes, une première introductive ; elle a pour objectif de préparer les participants et les familiariser avec l'environnement de travail. Nous y faisons faire aux participants une activité pédagogique générale. La deuxième partie est la principale ; elle comporte le contenu visé dans sa forme structurée et scénarisée.

Étape 1 : accès et familiarisation (une semaine)

Trois activités composent cette étape, un mailing, un chat et un devoir.

i) Message de bienvenue : un mailing

Le lancement de la formation se fait par un message / mail dans lequel nous expliquons les objectifs de la formation, la nature de activités qui seront proposées, une description détaillée de l'activité de familiarisation ainsi que les logins et mots de passe pour accéder à la plate forme.

ii) Rencontre synchrone de présentation et mise au point : chat (1)

Après le lancement de l'activité 1 (Devoir), nous organisons une première rencontre synchrone dans le but de clarifier les objectifs de la formation, présenter les participants les uns aux autres et répondre aux éventuels questionnements aussi bien techniques que conceptuels soulevés par la formation. Elle doit durer environ une heure. Au delà de ces objectifs annoncés, la rencontre doit permettre de former un « groupe classe » et d'initier un climat de collaboration entre les participants.

iii) Activité techno-pédagogique à propos de *« programme équilibré »* : devoir (1)

Ensuite, nous proposons une activité « devoir » à caractère techno-pédagogique où nous soumettons un texte qui propose neuf « phénomènes pédagogiques » relatifs au programme de l'enseignement des mathématiques au primaire dont il faut observer « un équilibre » si l'on veut que le dit programme soit efficace. Le document compte une centaine de pages mais l'activité proposée en couvre trois seulement (35 - 37). Voici trois exemples de phénomènes :1) les activités individuelles et les activités de groupes, 2) l'acquisition d'habiletés et la compréhension de concepts et 3) les activités de recherche et les activités dirigées (Experts, 2010).

Nous demandons aux participants de faire le choix de deux conditions parmi les neufs proposées et en faire une analyse très brève. L'activité proposée ne comporte donc pas de défi d'ordre pédagogique mais elle demeure intéressante d'un point de vue pédagogique et nécessite une consultation des trois pages proposées. Néanmoins, les critères d'évaluation retenus sont d'ordre typiquement technique : 1) retrouver la ressource «Les Maths au Primaire», 2) faire une lecture des pages spécifiées, 3) accéder aux consignes, 4) répondre aux questions posées dans la consigne, 5) déposer la réponse à l'endroit réservé aux dépôts sur la plate forme et 6) respecter les délais.

Étape 2 : la formation à la notion d'aire (deux semaines)

La deuxième étape de la formation s'étale sur deux semaines et se déroule à travers trois types d'activités, un forum, une rencontre synchrone et un devoir. Une documentation adaptée à la thématique traitée est sélectionnée et mises à la disposition des participants.

i) Échanges et partages autour de deux difficultés : forums

Afin de fructifier les échanges entre les participants, nous proposons un forum de discussion. Articulé en deux questions relatives à la notion d'aire, la participation au forum est individuelle. Nous exigeons que chaque participant fasse au moins deux interventions dans la chaine de chaque question, une première intervention libre et une seconde qui s'appuie sur l'intervention d'un collègue ou sur une ressource qu'il est demandé de nommer. Les deux questions du forum sont :

Forum 1 : Papier quadrillé / papier blanc

Comment les quadrillages (ou le papier quadrillé) empêchent de constater quelques caractéristiques de la notion d'aire ? Ou encore,

Forum 2 : Concept d'aire / concept de périmètre

Quels sont les facteurs qui amènent les apprenants à confondre les notions d'aire et de Rencontre Synchrone : chat (2)

La rencontre synchrone est planifiée pour prolonger les réflexions des participants, d'apporter les clarifications nécessaires, techniques et conceptuelles. Elle se situe au milieu du forum et doit en principe jouer un rôle organisationnel et de motivation important.

i) Travail collaboratif à travers une analyse d'approches : devoir 2

Le couronnement des différentes activités est un deuxième devoir qui vise l'intégration des connaissances construites lors des activités précédentes enrichies par les ressources proposées. Le « devoir » est certes planifié comme élément d'évaluation, mais il se veut surtout formateur, d'autant plus qu'il s'appuie sur un travail collaboratif entre les membres de chaque équipe et qu'il impose l'exploration des ressources proposées.

Pour ce devoir, il est demandé aux participants de réaliser, en groupe de deux, une comparaison entre deux approches de la notion d'aire en s'appuyant sur la discussion entamée au forum et sur les documents mis à leur disposition. Nous proposons que les comparaisons soient faites, de préférence dans un tableau qui explicite les avantages et les inconvénients ou plutôt les points forts et les points faibles de chaque approche. Les approches sont extraites chacune de deux manuels scolaire

différents, l'un édité au Maroc et l'autre en France. Un texte détaillé avec des consignes très claires à propos des activités est fourni avec les ressources.

Les ressources

Afin de permettre aux participants de se ''ressourcer'', nous avons proposé un ensemble de documents très variés mais très succincts. En ce qui concerne la deuxième unité de formation, comme nous le soulignons, les ressources sont de plusieurs types.

1. Lettre de bienvenue
2. Extrait présentant les 9 phénomènes pédagogiques pour un « programme équilibré »
3. Extraits d'études ou de recherches à propos de la notion d'aire,
4. Extraits de manuels scolaires, notamment les leçons sur lesquelles devra porter la comparaison objet du travail collaboratif,
5. Textes à caractère historique et épistémologique ayant trait à la notion d'aire et les difficultés qu'elle peut poser dans les raisonnements mathématiques,
6. Adresses de sites Internet destinés à l'enseignement des mathématiques au primaire et/ou à l'introduction de la notion d'aire,
7. Les documents officiels décrivant les orientations pédagogiques et les programmes.
8. Un texte explicatif global de toute la deuxième partie de la formation,
9. Différents tutoriels visant à faciliter la navigation dans la plate forme.

Ces ressources, en plus de toutes les consignes doivent en principe accompagner les activités auxquelles elles correspondent. Cependant, il est préférable de les rendre également disponibles par différentes voies, notamment avec les « ressources » de Moodle mais aussi via une messagerie et sous des formats accessibles sur PC ou sur mobile.

Discussion et conclusion

Dans ce qui précède, nous avons présenté les activités qui constituent la formation telle que nous l'avons conçue. La mise en place imposera probablement des modifications et des adaptations diverses nécessaires au bon déroulement de la formation. Nous devons être disposés à apporter ces adaptations en tachant à ce qu'elles n'induisent pas de transformations dans les objectifs conceptuels de la formation.

La discussion qui suit portera sur deux aspects complémentaires de la formation, l'aspect technologique et l'aspect conceptuel.

Sur le plan technologique

Le découpage séquentiel présenté dans la section précédente doit être accompagné de manière synchrone par des démarches techniques et techno-pédagogiques nécessaires pour assurer l'accès permanent et aisé aux consignes, aux activités, aux ressources et aux différents espaces du LMS. Il est primordial d'assurer un accès permanent aux activités et ressources en cas de difficultés de connexion à l'Internet. Il faut également être proactif et garantir une disponibilité totale auprès des participants en vue de répondre dans l'immédiat à toute demande d'assistance qu'elle soit technique ou d'ordre conceptuel. Cette assistance peut être enrichie et au besoin comblée par des tutos circonstanciés sous formes de fichiers textes illustrés ou de vidéos.

La formation décrite est adressée à un milieu ou la formation continue des enseignants est peu fréquente et encore moins la formation à distance. La familiarité avec les TIC et surtout avec les plate-formes de formation est à son minimum. Peu d'enseignants ont vécu l'expérience réelle et substantielle d'apprendre à travers un LMS. Les expériences de e-learning que les universités ou les instituts de formations offrent sont des accès permanents à des « cours magistraux filmés » et des documents aux formats PDF, DOC ou PPT. Il n'existe pas à notre connaissance un seul « module consistant » ou un seul « MOOC académique » dispensés à distance et qui respecte les normes et les standards universitaires reconnus dans le domaine de FOAD.

Si l'on désire dépasser cette situation et sortir la formation à distance de son amateurisme, il est nécessaire de rendre disponible et obligatoire en e-learning, au moins deux modules par année de formation universitaire (e-module). L'engagement de se conformer à cette exigence créera sans doute une dynamique de développement de e-modules et occasionnera une réflexion pédagogique à l'université, dynamique et réflexion combien manquantes, auxquelles pourront s'associer différentes universités du pays.

Sur le plan pédagogique et conceptuel

L'apparition de la pandémie du COVID-19 a accéléré et imposé le recours aux TIC dans tous les secteurs de l'activité humaine, économique et sociale. Pour l'éducation au Maroc et plusieurs autres pays, elle a révélé l'insuffisance et l'inadaptation des stratégies et des démarches adoptées dans le domaine des TICE. Afin d'assurer « la continuité pédagogique » il a été postulé dans la précipitation qu'il suffit de faire à distance ce que l'on a l'habitude de faire en présentiel (CSE, 2021). Or, l'expérience a montré que ceci est impossible. Les méthodes, techniques et artéfacts utilisés en présentiel ne peuvent avoir les mêmes effets en distanciel. Il s'agit donc de re-conceptualiser et de reconstruire les activités de la formation en vue d'aboutir aux mêmes fins, dans la limite du possible, mais sans nécessairement passer par les mêmes cheminements cognitifs.

Et encore !

En fait, on n'est même pas certain de pouvoir arriver aux mêmes fins. A titre d'exemple, dans la pratique du e-learning l'effort personnel et le travail collaboratif entre paires sont sollicités davantage que pour l'enseignement traditionnel. De même, les activités d'apprentissage passent par l'écrit davantage que par l'oral. Les feedbacks sont souvent instantanés en présentiel alors qu'ils sont principalement différés en e-learning.

Dans le cas ici concerné, il s'avère qu'il n'est pas judicieux de s'efforcer à dispenser « à distance » la formation dispensée en présentiel, mais de s'appuyer sur l'expérience acquise à travers le présentiel pour élaborer les scénarii d'une formation à distance.

Les objectifs des deux formations se recoupent certes mais ne se confondent pas. Nous n'avons pas à procéder à une adaptation élément par élément ; mais créer un parcours, un itinéraire cognitif différent avec l'ambition de circonscrire et par suite faire construire, « des éléments conceptuels communs et pertinents » relatifs à la notion d'aire.

Références

Ahaji, K., El Hajjami, A., Ajana, I., El Mokri, A. Chikhaoui, A. (2008) La politique d'intégration des TIC dans le système éducatif marocain. *EPINET, 104*. http://www.epi.asso.fr (le 12 juin 2022.)

Aldoobie n., (2015) ADDIE model, *American International Journal of Contemporary Research* vol. 5, no. 6 ; (pp:68- 72) décembre 2015.

Alessi, Stephen. M. & Trolop, Stanley. R., (2001) *Multimedia for Learning* (3ème éd), Person Allyn & Bacon, ISBN 0-205-27691-1

Alj O., et Benjelloun N., (2013) Intégration des TIC dans l'enseignement des sciences physiques au Maroc dans le cadre du programme GENIE : difficultés et obstacles. *Revue Internationale des Technologies en Pédagogie Universitaire*, volume 10, numéro 2, 2013 (pp: 49-65)

Baiz S. et col. *Aljayyid (« le qualifié » en mathématiques)*, Librairie Papeterie Nationale, Casablanca, 128 pages, en arabe.

Bajracharya, J. R. (2019). Instructional design and models: ASSURE and Kemp [Editorial]. *Journal of Education and Research, 9*(2), 1-8. https://doi.org/10.3126/jer.v9i2.30459

Benfares S. Alami A., Zaki M., Elazami M. Chikhaoui A., (2016) Utilisation des TICE par les enseignants du secondaire qualifiants des SVT : quel résultat après le lancement du programme national GENIE. In actes de « *1ère édition du workshop international sur les approches pédagogiques & e-learning* » http://www.est-usmba.ac.ma/ conferences/apel2015/proceeding/docs/e15c48.pdf (le 12 juin 2022).

COSEF Maroc, (1999) *"la charte nationale de l'éducation et de formation"* Commission Spéciale pour l'Education et la Formation).

CSE (Instance Nationale d'Évaluation auprès du CSE), (2021) *L'enseignement au Maroc au temps du COVID*, Sous la direction de Bourqia R. Rapport thématique, Novembre.

Dessus Philippe, (2006) Quelle idée sur l'enseignement nous révèlent les modèles d'Instructional Design ? Revue Suisse des Sciences de l'éducation 5

Douady R. (1989) Un processus d'enseignement du concept d'aire de surface plane. *Educational studies in mathematics 20*, pp : 387-424.

El Idrissi A. (2013) *Conception et mise à l'essai d'un dispositif de formation à distance : la formation continue à l'enseignement des mathématiques au primaire*, Mémoire de master, en Ingénierie des Technologies Educatives, U Cergy Pontoise, France.

El Idrissi A., Rouan O. (2006) La formation continue des enseignants : analyses et éléments pour un plan d'action, in Bel Lakhdar, A, *Actes du colloque « la formation des enseignants : un enjeu sociétal*, organisé à l'ENS de Meknès, novembre 2005.

Idrissi A. N. (2020) *Les TICE au Maroc : entre usage et gestion, cas de l'enseignement du français dans le cycle collégial à Agadir*, Sēmēion MED, (4), pp 64-73. https://revues. Imist.ma/index.php/SEMEION_MED/article/view/22281/11960 (le 12 juin 2022).

Jonnaert, Ph. (2012) *Compétences et socioconstructivisme: un cadre théorique*, Edition De BOECK, Collection Perspectives en éducation et formation, 95 pages.

Kemp, J.E., Morrison, G.R., & Ross, S.M. (1996). *Designing Effective Instruction*, 2nd Edition. Upper Saddle River, NJ : Prentice-Hall.

MENFCRS (2021) *Curriculum scolaire pour l'enseignement primaire*, Direction de curricula, juillet 2021, 554 pages.

Ourahay M., El Gharras S., Rouan O. (2015) Essai d'explication du niveau faible des performances mathématiques des élèves marocains des cycles primaire et secondaire collégial. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* – Spé4, (pp. 1028-1041). Alger: Université d'Alger.

Peterson C. (2003) Bringing ADDIE to life: instructional design at its best. *Jl. of Educational Multimedia and Hypermedia 12*(3), 2003 (pp : 227-241).

Titre: Évolution du travail documentaire d'un enseignant du primaire lors de l'usage d'une ressource technologique pour l'enseignement de la géométrie

Auteurs: KHALLOUFI-MOUHA Faten et BRINI Mohamed

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 566 - 578

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Évolution du travail documentaire d'un enseignant du primaire lors de l'usage d'une ressource technologique pour l'enseignement de la géométrie

KHALLOUFI-MOUHA[1] Faten – BRINI[2] Mohamed

Résumé – En se plaçant dans le cadre de l'approche documentaire et en utilisant la notion d'orchestration instrumentale, nous étudions le développement du travail documentaire d'un enseignant du primaire utilisant la ressource technologique GeoGebra pour enseigner les propriétés des parallélogrammes à des élèves de 6ème (11-12 ans). Les résultats des analyses font apparaitre l'importance de l'impact de l'utilisation de cette ressource technologique sur le développement des pratiques de l'enseignant.

Mots-clefs : Ressource technologique, Genèse documentaire, enseignement primaire, orchestration expérimentale, Pratiques de l'enseignant

Abstract – Using the documentational approach and the notion of instrumental orchestration, we explore the documentation work of an elementary school teacher using the technological resource GeoGebra to introduce the properties of parallelograms to 6th grade students (11-12 years old). Findings show the importance of the impact of the new resource on the teacher's practice.

Keywords: digital resources, documentational genesis, Primary school, Instrumental orchestration, Teacher's practices.

1. *Université de Carthage, Tunisie, faten.khalloufi@fsb.u-carthage.tn ou fkhalloufi@yahoo.fr

2. **Université Virtuelle de Tunis, Tunisie, brinimohamed83@gmail.com

Introduction

Lors des dernières années, l'importante évolution au niveau du nombre et des types de ressources disponibles pour l'enseignant en général et pour l'enseignant des mathématiques en particulier, a soulevé la question de leurs utilisations et leurs appropriations, notamment lorsqu'il s'agit d'une ressource technologique comme les logiciels de géométrie dynamique. Le terme ressource est utilisé selon la définition de Adler (2000) comme tout ce qui peut re-sourcer l'activité de l'enseignant. Adler (2000) propose "think of a resource as the verb resource, to source again or differently" (p. 207). L'utilisation des différents types de ressources dans l'enseignement n'est pas une problématique récente, mais elle reste centrale dans les travaux de recherches en didactique des mathématiques (Pepin, Gueudet et Trouche, 2013). Les travaux focalisant sur l'utilisation des ressources technologiques, s'accordent sur l'importance de leurs impacts sur les activités choisies ou élaborées lors de la phase de la préparation du cours, sur les pratiques de l'enseignant lors de leur mise en œuvre en classe, sur le contenu mathématique proposé en classe et sur l'apprentissage des élèves (Khalloufi-Mouha, 2014, 2022).

Dans notre travail, nous nous plaçons dans la lignée des travaux explorant la dimension professionnelle du travail de l'enseignant en lien avec l'évolution rapide des nouvelles technologies (Khalloufi-Mouha et Brini, 2022). Ainsi, en adoptant le cadre de l'approche documentaire du didactique et en s'appuyant sur la notion d'orchestration instrumentale, nous cherchons à explorer le développement des pratiques de l'enseignant du point de vue de son interaction avec la ressource technologique utilisée, lors des différentes phases de son travail.

Cadre théorique

L'approche documentaire du didactique

L'approche documentaire, introduite à travers les travaux de Trouche et Gueudet (Gueudet et Trouche 2008, 2009 ; Gueudet 2019), a pour objet d'explorer l'apprentissage professionnel et le travail de l'enseignant à travers son interaction avec les ressources curriculaires. Cette approche « propose ainsi d'analyser le travail des professeurs en se centrant sur les « ressources » pour et dans l'enseignement : ce qu'elles préparent pour nourrir leurs pratiques de classe, et ce qui est continuellement renouvelé par ces pratiques. » (Trouche, Gueudet et Pepin, 2020, p.3). En s'appuyant sur la distinction entre artefact et instrument, l'approche documentaire introduit la distinction entre ressource et document. Les ressources comportent tous les types de ressources numériques et technologiques ou traditionnelles (programmes, manuels, guides) développées et utilisées par l'enseignant et les élèves dans la classe et en dehors de la classe (Gueudet et Trouche, 2008). Le document est défini comme étant une entité mixte composée des ressources et de leurs schèmes d'usage. La notion de schème est utilisée en accord avec la définition de Vergnaud (1996), comme une organisation invariante de

l'activité, caractérisée par les quatre composantes suivantes : le but de l'activité, les actions stables et reproductibles qui organisent l'activité nommées règles d'action, des invariants opératoires formés par des théorèmes en acte (des propositions considérées comme vraies mais pouvant être vraies ou fausses) et des concepts en actes (des fonctions propositionnelles nécessaires pour l'élaboration des propositions et qui ne sont pas susceptibles d'être vraies ou fausses.). La quatrième composante étant la possibilité d'inférence à la variété des situations. Le processus d'élaboration et de développement d'un document est désigné par le processus de la genèse documentaire (Gueudet et Trouche, 2009).

La notion d'orchestration instrumentale

Dans l'objectif d'éclairer l'évolution du processus de la genèse documentaire de l'enseignant, nous avons choisi de faire appel à la notion d'orchestration instrumentale (Trouche, 2005). L'apport de cette notion d'orchestration instrumentale à notre travail revient à éclairer la façon dont l'enseignant exploite les potentialités de la ressource technologique et l'articule avec les autres ressources disponibles pour mettre en œuvre son projet d'enseignement. La notion d'orchestration instrumentale est définie comme étant « l'agencement systématique par un agent intentionnel des éléments (artefacts et humains) d'un environnement en vue de mettre en œuvre une situation donnée et, plus généralement, de guider les apprenants dans les genèses instrumentales et dans l'évolution et l'équilibrage de leurs systèmes d'instruments » (Trouche, 2005, p. 126). Drijvers (2011) a étendu les travaux de Trouche pour définir une typologie des orchestrations instrumentales en prenant en considération les intentions didactiques, les configurations et les modes d'exploitation. Dans notre travail nous considérons que l'étude des types d'orchestrations utilisées et les modes de leurs exploitations, nous permet d'identifier certaines caractéristiques des schèmes d'usage de la ressource technologique. Cela permet ainsi, d'éclairer l'analyse du développement du processus de la genèse documentaire de l'enseignant. Dans nos analyses, les orchestrations sont considérées comme la partie perceptible du document, permettant de décrire les ressources utilisées et les règles d'action. Nous partageons ainsi l'idée de Besnier (2019) qui considère que « la mise en place régulière de certaines orchestrations témoigne de règles d'actions, pilotées par des invariants opératoires » (p.122). Notre travail est guidé par les questions de recherches suivantes :

1. Quelles sont les caractéristiques des documents développés par l'enseignant lors de l'utilisation de la ressource technologique Geogebra ?

2. Comment évolue le processus de la genèse documentaire à la suite de plusieurs mises en œuvre en classe ?

Méthodologie

Présentation de l'enseignant

L'enseignant participant à l'expérimentation est un professeur des écoles primaires ayant 31 ans de service. Lors du premier interview, l'enseignant a déclaré que les ressources consultées pour l'élaboration de ses cours de mathématiques sont limitées. Il s'appuie essentiellement sur sa longue expérience pour la sélection des activités à proposer aux élèves. Ces activités sont essentiellement extraites du manuel scolaire, du guide du maître, du fichier de classe[3] et des livres parascolaires. Il accède rarement aux sites internet pour télécharger des situations d'apprentissage pour sa classe. Il n'a jamais utilisé une ressource numérique en classe pour enseigner les mathématiques. L'enseignant a découvert le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra à travers les discussions avec un collègue (second auteur). Convaincu par ses apports (la manipulation directe, la visualisation, l'expérimentation…) et dans l'objectif de développer ses pratiques professionnelles, il s'est porté volontaire pour participer à expérimenter l'utilisation et l'intégration de ce logiciel dans sa classe.

Le contexte de notre expérimentation

Les deux séances de mise en œuvre en classe, enregistrées par vidéo, ont eu lieu dans une salle d'informatique qui comporte sept ordinateurs placés en forme de U, d'un vidéoprojecteur et d'un tableau blanc. L'expérimentation a eu lieu lors de la période où les classes sont subdivisées en deux groupes pour des raisons sanitaires liées à la pandémie du COVID19. La ressource a été implémentée pour chacun des deux groupes qui forment la classe mais le travail avec un seul groupe (une demi-classe) a été enregistré par vidéo pendant les deux séances. Pour cela, dans chacune des deux séances, dix élèves ont assisté à la mise en œuvre en classe. Ces élèves ont été placés par binôme (deux élèves devant un ordinateur). L'objectif de la première séance est d'introduire les propriétés du parallélogramme à travers une activité extraite du manuel solaire et adaptée par l'enseignant dans l'objectif d'utiliser GeoGebra. La deuxième séance enregistrée est une séance de synthèse où les élèves ont été appelés à investir les nouvelles connaissances en rapport avec les parallélogrammes dans une situation de construction géométrique.

3. Le fichier de classe est un document fourni par le centre national pédagogique. Ce document contient des fiches d'introduction des leçons, des fiches d'intégration et des fiches pour la remédiation.

Dispositif de suivi dans le cadre de la méthodologie d'investigation réflexive

Dans notre étude, le travail de documentaire de l'enseignant a été suivi sur une période de trois mois. Les données collectées sont composées de :

- quatre entretiens qui se sont déroulés à l'école primaire. Les entretiens ont été enregistrés et retranscrits. Deux entretiens pré-mise en œuvre qui portent sur la préparation de la leçon. L'objectif de ces entretiens était d'identifier à travers les déclarations de l'enseignant comment il a sélectionné, utilisé et transformé des ressources existantes pour concevoir une nouvelle ressource selon son projet didactique personnel. Ils ont également porté sur la méthodologie prévue pour la mise en œuvre de la leçon en classe. Les deux entretiens post-mise en œuvre visent à permettre à l'enseignant, à la suite de la visualisation de la vidéo de la séance, de réfléchir et d'évaluer son travail.

- Un compte-rendu de trois séances d'initiation des élèves à l'utilisation des outils GeoGebra dans les constructions géométriques. Les trois séances ont été assurées par l›enseignant et le chercheur (deuxième auteur). Ces sessions n'ont pas été enregistrées mais elles sont supposées être des ressources pour l'enseignant qui expérimente pour la première fois avec ses élèves l'utilisation de GeoGebra en salle informatique.

- Deux séances de mise en œuvre en classe, espacées de cinq semaines, ont été enregistrées par vidéo.

- Le journal de classe du professeur où le professeur décrit le scénario de chaque séance avec les activités proposées et l'organisation de la classe.

Méthodologie de l'analyse des données recueillies

Selon l'approche documentaire, étudier le processus de la genèse documentaire d'un enseignant utilisant une ressource dans un objectif d'enseignement, nécessite l'exploration des schèmes d'usage développés à travers l'utilisation de cette ressource et par conséquent l'identification de leurs quatre composantes : objectifs, règles d'action, invariants opératoires ainsi que les inférences. Pour cela notre analyse porte sur les objectifs prévus par l'enseignant lors des phases d'élaboration des séances d'enseignement, ainsi que les objectifs identifiés lors des phases de mise en œuvre en classe. A chaque objectif sont associées les ressources utilisées ainsi que les actions prévues par l'enseignant et les actions mises en œuvre en classe, relatives à l'utilisation de la ressource. Nous avons également identifié les connaissances professionnelles qui justifient ces actions et qui sont interprétées comme des invariants opératoires. Cela nous a amené à élaborer une version adaptée des tableaux documents (Gueudet, 2017) permettant de caractériser les différents documents élaborés par l'enseignant. Dans ces tableaux nous ne prétendons pas fournir une caractérisation du système documentaire de l'enseignant, nous nous limitons à la caractérisation de certains documents en lien avec les types d'orchestrations utilisés. La confrontation entre le tableau document relatif à la mise en œuvre en classe de chacune des deux séances observées, nous permet d'identifier l'évolution du processus de la genèse documentaire à travers l'évolution des documents identifiés. L'étude du déve-

loppement des documents est liée à la possibilité des adaptations et des régulations apportées aux documents en réponse aux évolutions des caractéristiques des situations auxquelles l'enseignant se trouve confronté lors de l'utilisation de la ressource technologique. Nous considérons que ces adaptations et régulations se traduisent essentiellement par des changements aux niveaux des actions et des règles d'actions ainsi qu'au niveau des invariants opératoires. Ils peuvent également se traduire par l'émergence de nouveaux objectifs ce qui correspond à ce que Monaghan (2004) désigne par « emergent goal ».

Analyse du développement de la genèse documentaire

Analyse des documents relatifs à la première séance

L'analyse du tableau documents relatif à la première séance fait apparaitre l'importance des modifications et des adaptations apportées par l'enseignant lors de la mise en œuvre en classe du projet de sa leçon de point de vue de l'utilisation de la ressource GeoGebra et ainsi aux différents documents élaborés. Cela s'est traduit à travers l'éclatement du scénario global élaboré par l'enseignant autour de cinq objectifs initiaux (Introduire la leçon, mettre en place une phase de travail par binômes, mettre en place une phase de travail collectif, mettre en place une phase de conclusion et mettre en place une phase d'institutionnalisation) en des scénarios locaux relatifs à chaque question de l'activité proposée. Cela permet à l'enseignant d'avoir un contrôle plus étroit du travail des élèves lors des différentes phases. Le document relatif à l'objectif de mettre en place une phase d'investigation à travers un travail par binômes pour explorer chaque question a été associé à l'utilisation d'une orchestration émergente qui est une orchestration hybride combinant le travail collectif et le travail par binômes. Ainsi, l'enseignant circule entre les élèves qui travaillent par binômes et lorsqu'il repère une difficulté chez l'un des binômes, il intervient publiquement pour prévenir les autres binômes et donner la stratégie adéquate. En cas de difficulté d'ordre instrumentale, l'enseignant prend parfois en charge l'exécution de la tâche demandée à la place des élèves en difficulté. Nous considérons que l'invariant opératoire qui engendre ces pratiques de l'enseignant relève d'un théorème en acte « il faut que tous les élèves arrivent à accomplir l'activité, à identifier la connaissance mathématique visée à travers une procédure appropriée. » Lors de l'entretien post-mise en œuvre et à la suite de la visualisation de la vidéo de la séance, l'enseignant admet qu'il a trop guidé les élèves lors de cette phase en justifiant ses pratiques par la variation au niveau du rythme de travail des élèves et au niveau de la maitrise de l'utilisation du logiciel. Il déclare lors de l'entretien *« Pendant la séance, j'ai été vraiment gêné par le fait que le travail des élèves n'avance pas à un même rythme. Il y a des élèves plus rapides que d'autres et le niveau de maîtrise de l'utilisation du logiciel diffère d'un élève à l'autre. Ceci m'a obligé à faire plusieurs interventions pour faire avancer leur travail et gagner du temps. En plus, les manipulations fausses des élèves entraînent parfois un blocage du travail à cause des problèmes techniques comme la perte de la figure géométrique et dans certains cas, je n'arrive pas à corriger ces problèmes.»* Cela est en accord avec l'idée de Drijvers (2011) qui considère la nécessite de compétences élevées de

diagnostique pour identifier les difficultés des élèves lors de ce type d'orchestration et ce qui n'est pas le cas de notre enseignant qui utilise cette ressource technologique pour la première fois en classe.

Le document relatif à l'objectif de mettre en place une phase de travail collectif s'est traduit à travers des pratiques spécifiques qui ont émergé lorsque l'enseignant s'est adressé à toute la classe pour expliquer une stratégie de résolution ou pour apporter une interprétation mathématique de l'activité avec l'artefact. Ces actions ont été identifiées essentiellement lors de l'émergence d'une orchestration qui combine la configuration de de « l'élève Sherpa » avec celle de « explain the screen ». En plus de cette configuration, l'objectif de mettre en place une phase de travail collectif s'est traduit lors de la séance, à travers l'utilisation des orchestrations « explain the screen » et « link screen board » où l'enseignant s'adresse à toute la classe. Il explique, en utilisant comme support la projection de l'écran de l'ordinateur, des aspects techniques (le mode de fonctionnement de l'outil « relation ») ou un contenu mathématique (la somme des angles complémentaires). Nous avons considéré que ces différentes pratiques sont guidées par l'invariant opératoire « le travail collectif permet de s'accorder sur une même stratégie et d'apprendre le même contenu mathématique visé. ».

Le document relatif à l'objectif de mettre en place des phases de conclusions devrait faire partie de la phase d'institutionnalisation selon le scénario prévu par l'enseignant. Il constitue un document émergent comme conséquence de l'éclatement du scénario global en des scénarios locaux en fonction des différentes questions de l'activité proposée. Les phases de conclusions sont initiées par l'enseignant, à la suite de la phase de travail collectif, à travers l'utilisation de questions fermées et très ciblées. Pour la formulation des conclusions, l'enseignant ne laisse pas l'initiative aux élèves, il les guide vers la formulation souhaitée par des questions nécessitant une réponse par oui ou non comme la question suivante « est-ce que les diagonales sont égales ? ». Nos analyses nous amènent à considérer que les actions de l'enseignant associées à cette phase sont gérées par l'invariant opératoire « les élèves peuvent avoir des difficultés à donner une interprétation mathématique de leur activité avec l'artefact » pour cela il cherche à les guider d'une façon très étroite.

L'étude du document relatif à l'objectif de mettre en place une phase d'institutionnalisation fait apparaitre l'utilisation de l'orchestration Not-use-tech. Lors de cette phase, l'enseignant prend en charge l'interprétation mathématique de l'activité en proposant une formulation mathématique des différentes propriétés identifiées et en éliminant toute référence à l'activité et à l'utilisation de GeoGebra. Ainsi, l'enseignant dicte les propriétés des parallélogrammes et les élèves se contentent d'écrire sur leurs fiches, sans participer à la formulation de ces propriétés. L'insistance de l'enseignant pour que les élèves gardent une trace écrite atteste l'importance des liens avec les pratiques traditionnelles. Nous supposons que ces pratiques sont engendrées par le théorème en acte « Il faut proposer aux élèves une formulation mathématique du savoir en jeu utilisable lors de la résolution des problèmes. » Les ressources caractérisant cette phase de travail, sont essentiellement les conclusions déjà élaborées lors des différentes phases intermédiaires de conclusions.

Développement des documents lors de la deuxième séance

La deuxième séance observée est une séance de synthèse dont l'objectif est d'amener les élèves à investir les connaissances étudiées lors du chapitre sur les propriétés des parallélogrammes, dans des situations de construction. Pour élaborer les activités de cette séance, l'enseignant a sélectionné, modifié et combiné des situations extraites du manuel scolaire et du fichier de classe. Ce travail, lui a permis d'élaborer une nouvelle ressource qu'il a exploité en classe. Les adaptations et les modifications réalisées visent d'une part, l'exploitation des potentialités du logiciel GeoGebra, notamment, l'outil « déplacement » et d'autre part, l'établissement du lien entre le travail dans l'environnement technologique et le travail dans l'environnement papier-crayon. Cette nouvelle ressource conçue à partir de plusieurs ressources, pour répondre aux différents objectifs de l'enseignant, constitue une manifestation de l'évolution du rôle de son rôle en tant que concepteur qui adapte les ressources à son projet d'enseignement pour élaborer sa propre ressource. Les analyses font également apparaître que l'enseignant reste toujours fidèle à son système routinier de ressources notamment le manuel scolaire, considéré comme la ressource principale pour son enseignement.

La confrontation entre les deux tableaux documents relatifs aux deux séances de mise en œuvre, fait apparaitre certaines continuités dans les pratiques de l'enseignant, mais également une évolution qui s'est traduite par plusieurs adaptations en lien avec l'utilisation de la ressource GeoGebra et ainsi aux différents documents élaborés. La continuité s'est traduite par la subdivision du scénario global élaboré par l'enseignant autour de quatre objectifs initiaux (Introduire la leçon, mettre en place une phase de travail par binômes, mettre en place une phase de travail collectif et mettre en place une phase d'institutionnalisation), en deux scénarios locaux, relatifs à chacune des deux parties de la situation proposée. Cela revient à la volonté de l'enseignant d'imposer un même rythme d'avancement et de contrôler de plus près le travail des élèves lors des différentes phases. En plus, l'enseignant considère que cette décomposition permet aux élèves en difficultés de réguler leurs stratégies de résolution et de réussir leurs constructions pour arriver à obtenir des parallélogrammes particuliers et à faire des conjectures. Il considère également que l'échec de certains élèves tout au long de l'activité pourrait perturber leur attention et leur apprentissage.

Les analyses font également apparaitre une évolution au niveau de l'utilisation des orchestrations instrumentales. En fait, lors de la phase de travail par binômes, les élèves collaborent et travaillent d'une façon autonome. L'enseignant circule, repère les difficultés et intervient individuellement à la demande de l'élève. Nous constatons que l'enseignant développe de nouvelles pratiques à la suite à des utilisations successives[4] de cette ressource.

4. L'enseignant a réutilisé la ressource en classe avec le deuxième groupe de la classe. Il a également réutilisé la ressource dans d'autres séances non programmées dans l'expérimentation qui ont été réalisée à l'initiative de l'enseignant dans l'objectif de développer ses compétences.

Le document relatif à l'objectif de mettre en place un travail collectif fait apparaitre l'émergence de nouvelles actions chez l'enseignant qui n'ont pas été repérées lors de la première séance. L'enseignant invite des élèves ayant rencontrés des difficultés lors de la phase de travail par binôme pour jouer le rôle de Sherpa. Ainsi, l'élève propose une résolution de la tâche demandée devant toute la classe. Ce choix atteste l'évolution de l'appropriation de la ressource par l'enseignant par rapport à sa première utilisation lors de la première séance. En fait, il n'essaie plus d'éviter l'émergence des situations imprévues, plutôt, il choisit de mettre en commun les stratégies erronées pour favoriser les interactions entre les élèves afin d'améliorer la genèse instrumentale collective. A titre d'exemple, les interactions entre l'élève Sherpa et un autre élève a abouti à la construction de la deuxième diagonale en utilisant tout d'abord l'outil « droite » puis l'outil « segment » car l'utilisation de ce dernier outil seulement (la proposition de l'élève Sherpa), donne une figure qui ne résiste pas au déplacement. Ce mode d'exploitation proposé par l'enseignant vise à exploiter les erreurs et les échanges des élèves pour une co-élaboration d'une stratégie adéquate. L'enseignant gère les interactions en posant des questions et en demandant toujours à l'élève de justifier sa résolution. Nous notons que les élèves se servent de l'outil « déplacement » pour valider leurs constructions. Ce qui marque également une évolution dans l'instrumentation collective. Le changement au niveau des pratiques de l'enseignant relève de l'invariant opératoire suivante : « La discussion de différentes stratégies élaborées par les élèves (erronées ou adéquates) favorise le processus de la genèse instrumentale et l'apprentissage des élèves ». Lors de l'interview, l'enseignant déclare qu'il a cherché à mettre en place des discussions collectives relatives aux stratégies élaborées par les élèves, même les stratégies erronées. Il considère que cela est susceptible de favoriser le processus d'apprentissage des élèves, puisqu'il est convaincu que l'erreur est une source d'apprentissage.

Le document relatif à la mise en place d'une phase d'institutionnalisation, fait apparaitre une évolution au niveau des actions de l'enseignant par rapport à ce que nous avons noté lors de la première séance. En fait, L'enseignant s'est limité à l'utilisation de l'orchestration « Link-screen-boarde ». De plus, Il n'a pas pris en charge l'énoncé des conclusions mais, il a plutôt aidé ses élèves à élaborer des formulations qui synthétisent les différentes relations entre les quadrilatères réguliers avec un vocabulaire mathématiques. Ainsi, il accorde un rôle plus actif aux élèves. A travers l'interview réalisé avec l'enseignant, nous considérons que l'invariant opératoire justifiant ses actions est le théorème-en-acte « la participation de l'élève à la construction des connaissances mathématiques permet d'améliorer son apprentissage »

L'analyse de la deuxième séance nous a également permis d'identifier une continuité au niveau des certaines pratiques, notamment, l'importance que l'enseignant accorde à la formulation commune des résultats au tableau. Ainsi, il transcrit les étapes de construction et les conjectures des élèves sur le tableau et demande aux élèves de prendre des notes.

Discussion et conclusion

L'enseignant s'appuie sur son système de ressource routinier pour élaborer un nouveau document. Le travail documentaire qui consiste à sélectionner, modifier, combiner et adapter un ensemble de ressource engendre un document adapté aux objectifs de l'enseignant et aux objectifs de l'utilisation du logiciel de géométrie dynamique. Ainsi, nous remarquons un changement au niveau du rôle de l'enseignant. Il devient un concepteur qui adapte un ensemble de ressources à ses objectifs. Les deux processus d'instrumentation et d'instrumentalisation ainsi que les orchestrations observées lors de la mise en œuvre en classe font apparaitre un développement au niveau des pratiques de l'enseignant à travers l'émergence de nouveaux invariants opératoires. Cependant, nous constatons que ce changement dans les pratiques enseignantes nécessite encore plus de temps pour que l'enseignant se familiarise avec ce type de ressource. Dans la même perspective, Artigue (1998) affirme que l'intégration des TICE nécessite non seulement une maîtrise technique des outils informatiques, mais surtout un renouvellement des pratiques professionnelles qui ne peut s'inscrire que dans la durée, car l'introduction de ces outils dans la classe modifie profondément le rôle de l'enseignant. La formation continue des professeurs a sur ce point une importance décisive.

Références

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 205–224. https://doi.org/10.1023/A:1009903206236

Artigue, M. (1998). Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies. In *Information and Communications Technologies in School Mathematics: IFIP TC3/WG3. 1 Working Conference on Secondary School Mathematics in the World of Communication Technology: Learning, Teaching and the Curriculum, 26–31 October 1997*, Grenoble, France (pp. 121-129). Springer US.

Besnier, S. (2019). Travail documentaire des professeurs et ressources technologiques : le cas de l'enseignement du nombre à l'école maternelle. *Education didactique, 13*(2), 119-153. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.4206

Drijvers P. (2011). Teachers Transforming Resources into Orchestrations. In: Gueudet G., Pepin B., Trouche L. (eds) *From Text to 'Lived' Resources. Mathematics Teacher Education*, vol 7. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1966-8_14

Gueudet G. (2019) Studying Teachers' Documentation Work: Emergence of a Theoretical Approach. In: Trouche L., Gueudet G., Pepin B. (eds) *The 'Resource' Approach to Mathematics Education. Advances in Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20393-1_2

Gueudet, G. (2017). University Teachers' Resources Systems and Documents. *International Journal ofResearch in Undergraduate Mathematics Education, 3*(1). DOI:10.1007/s40753-016-0034-1

Gueudet, G., & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés : Le cas des mathématiques. *Éducation et didactique, 2*(3), 7-33. DOI : 10.4000/educationdidactique.342

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers ? *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 199218. DOI : 10.1007/s10649-008-9159-8.

Khalloufi-Mouha, F. (2014). Étude de l'évolution des signes langagiers lors d'une séquence d'enseignement intégrant un artefact technologique. *Spirale-Revue de recherches en éducation, 54*(1), 49-63.

Khalloufi-Mouha, F. (2022). Une stratégie de réseautage pour une analyse sémiotique et discursive des pratiques langagières de l'enseignant lors d'une discussion collective dans une séance intégrant un environnement informatique. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 22*(1), 150-169.

Khalloufi-Mouha, F., & Brini, M. (2022). Rôles des interactions enseignant-élèves dans l'intégration d'un logiciel de géométrie dynamique: le cas d'un enseignant du primaire en Tunisie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 22*(4), 835-855.

Monaghan, J. (2004). Teachers' Activities in Technology-Based Mathematics Lessons. *Int J Comput Math Learning 9*, 327 https://doi.org/10.1007/s10758-004-3467-6

Pepin, B., Gueudet, G., &Trouche, L. (2013). Re-sourcing teachers' work and interactions: A collective perspective on resources, their use and transformation. *ZDM, 45*(7), 929-943.

Trouche, L. (2005). Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques. In *Le calcul sous toutes ses formes*. Académie de Clermont-Ferrand.

Trouche, L., Gueudet, G., & Pepin, B. (2020). *The documentational approach to didactics*. arXiv:2003.01392

Vergnaud, G. (1996). Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation. Dans R. Noirfalise& M.-J. Perrin Glorian (dir.), *Actes de la VIIIe École d'été de didactiquedes mathématiques*, (p. 174-185). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

Titre: La double transposition de la méthode d'Euler dans un environnement informatique et son impact sur les pratiques des étudiants à l'Université

Auteurs: BRINSI Lamjed et BEN NEJMA Sonia

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 579 - 592

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

La double transposition de la méthode d'Euler dans un environnement informatique et son impact sur les pratiques des étudiants à l'Université

BRINSI[1] Lamjed – BEN NEJMA[2] Sonia

Résumé – Dans cette intervention nous présentons les résultats d'une analyse didactique portant sur les pratiques des étudiants de première année universitaire lors de la résolution numérique des équations différentielles par la méthode d'Euler dans l'environnement informatique Maple. Cette étude s'inscrit dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique nourrie par d'autres approches, notamment, le modèle de la double transposition didactique et informatique, l'approche sémiotique en termes de registres et l'approche instrumentale. Ces considérations théoriques permettant de mettre en lumière les enjeux épistémologiques et didactiques relatives à la mise en œuvre de cette méthode numérique et les effets de son intégration dans le cadre des travaux pratiques de mathématiques appliquées.

Mots-clefs : Double transposition- méthode d'Euler-pratiques- environnement informatique

Abstract – In this paper we present the results of a didactic analysis of the practices of first year university students when solving differential equations numerically by Euler's method in the Maple computer environment. This study is part of the anthropological theory of didactics, which is nourished by other approaches, in particular the model of the double didactic and computer transposition, the semiotic approach in terms of registers and the instrumental approach. These theoretical considerations allow us to highlight the epistemological and didactic stakes relative to the implementation of this numerical method and the effects of its integration in the framework of practical work in applied mathematics.

Keywords: Double transposition - Euler's method - practices - computer environment

1. Université virtuelle de Tunis, ISEFC, ISET Jendouba, Tunisie, lamjedbrinsi72@gmail.com

2. Université de Carthage, Laboratoire Larina, Faculté des sciences de Bizerte, Tunisie, sonia.bennejma@fsb.u-carthage.tn

Introduction et problématique

L'enseignement des mathématiques dans les institutions d'études technologiques tunisiennes (ISET) est intégré au contexte général d'un enseignement technique à vocation professionnelle. Il s'agit essentiellement des notions de base utiles dans l'enseignement des disciplines techniques. Certaines institutions ont introduit depuis quelques années, dans le cadre des licences appliquées, un élément constitutif des unités d'enseignements en mathématiques intitulé : « *Ateliers de Mathématiques Appliquées* ». Ce module d'enseignement est destiné aux étudiants de 1ère année de licence et apparait comme un moyen de renforcer l'enseignement de certaines notions mathématiques rencontrées au cours des séances de cours intégrés par le biais de logiciels de calculs symboliques et numériques tels que « Maple et Matlab ». Il s'agit d'un environnement hybride à l'interface des mathématiques et de l'informatique qui se présente comme des « travaux pratiques spécialisés en mathématiques ». Dans ce contexte particulier, nous nous intéressons aux pratiques des étudiants dans l'environnement Maple, comment s'approprient-ils cet instrument au cours du processus de transposition informatique (Balacheff, 1994 ; Bronner & Briant, 2015), de quelle façon l'utilisation de cet artefact technologique impacte-t-elle la conceptualisation des notions liées aux équations différentielles (variable, fonction, dérivé, primitive…) ? Dans quelle mesure contribue-t-elle à développer une certaine flexibilité entre les environnements d'enseignement (papier crayon et informatique) ? Comment les étudiants mobilisent-ils des connaissances acquises autour des équations différentielles pour modéliser des problèmes dans l'environnement Maple ? Quelles difficultés rencontrent-ils pour passer d'une résolution mathématique à son exécution sur machine ?

Pour aborder cette problématique qui s'inscrit dans le cadre du master de recherche en didactique des mathématiques du premier auteur, (Brinsi, 2020) nous avons fait le choix d'une notion mathématique particulière suggérée par les programmes officiels relatifs à cette institution universitaire autour des équations différentielles linéaires (ED). Nous nous sommes focalisés sur la résolution numérique par la méthode d'Euler. Cette notion présente l'intérêt d'articuler plusieurs registres de représentation sémiotique (Duval, 1996) et d'être exploitée dans un environnement informatique. De plus, elle se caractérise par son aspect « unificateur » dans la mesure où elle met en jeu plusieurs concepts et objets mathématiques de l'analyse (variable, équations, fonction, primitive, graphique…) qui interviennent dans les techniques de résolution algébrique, numérique et graphique. L'environnement technologique qu'offrent les ateliers de mathématiques nous semble un lieu privilégié permettant de renforcer les acquis des étudiants autour des techniques de résolution mais également une occasion pour l'enseignant d'analyser le fonctionnement des connaissances des étudiants lorsqu'ils passent d'une résolution mathématique à une résolution informatique.

Ainsi, les questions de recherche ayant guidé cette étude sont les suivantes. Quelles sont les caractéristiques de la méthode d'Euler dans l'environnement papier crayon ? Comment se caractérise le passage de l'environnement classique à l'environnement technologique ? Quelles difficultés particu-

lières peuvent être rencontrées par les étudiants lors de la résolution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler ?

Dans cette intervention, nous présentons les outils théoriques qui ont étayé cette étude et la méthodologie suivie puis nous livrons les principaux résultats autour des pratiques des étudiants lors de la résolution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler avant de conclure.

Cadre théorique

Nous faisons référence dans cette étude à la théorie anthropologique du didactique (TAD, chevallard, 1999) enrichie par d'autres approches en didactique des mathématiques, l'approche instrumentale (Rabardel, 1995), l'approche sémiotique (Duval, 1993) et le modèle de la double transposition didactique et informatique (Briant & Bronner, 2015). Ces théories fournissent des outils permettant d'analyser des aspects épistémologiques et didactiques relatifs au savoir à enseigner et les pratiques des étudiants. En effet, la modélisation des choix institutionnels et des connaissances des étudiants renvoie à une description des praxéologies mathématiques et didactiques développées dans une activité mathématique, dans notre cas, la résolution numérique des équations différentielles. Cette modélisation met l'accent sur les techniques mobilisées pour accomplir ce type de tâches et se focalise sur la fonction technologique du savoir (fonctions de production, de justification et d'intelligibilité des techniques) qui mettent en évidence un système de conditions et de contraintes qui agissent sur la présence ou l'absence d'une technique, en une institution donnée. Par exemple la tâche du type T : « concevoir un programme pour résoudre un problème mathématique » exige l'accomplissement de deux sous types de taches, T1 : « créer un algorithme informatique » ou « adapter un algorithme mathématique » à partir de la résolution mathématique du problème en question dans l'environnement « classique » papier/crayon. Ceci renvoie à une transposition algorithmique et T2 : « adapter l'algorithme informatisé en un programme informatique, implanté sur un système informatique donné. Les sous types de taches ne sont pas forcément séquentiels, des aller-et-retour peuvent survenir. Par ailleurs, la prise en compte des ostensifs et des non-ostensifs dans l'analyse praxéologique d'une activité mathématique est un élément essentiel dans la mesure où leur co-activation est omniprésente à tous les niveaux d'une praxéologie mathématique, aussi bien technique que technologico-théorique. « La mise en œuvre d'une technique se traduit par une manipulation d'ostensifs réglée par des non ostensifs » (Bosch & Chevallard 1999, p. 87) et la technologie consiste en des idées, des concepts des notions qui renvoient à des non ostensifs. Par exemple une technique algébrique de résolution d'une équation différentielle (ED) homogène du premier ordre fait appel à des ostensifs qui renvoient à la fonction primitive constituant ingrédient de la technologie qui la justifie. La dimension sémiotique du travail algébrique peut être abordée en termes de registres (Duval, 1993). Un registre de représentation sémiotique assure les trois activités cognitives : formation, traitement et conversion formant un système sémiotique. Dans le cas de la technique d'Euler plusieurs registres peuvent être mis en avant, le registre numérique, le registre algébrique, le registre du tableau et le registre graphique qui permet de visualiser les solutions approchées d'une ED ou la solution exacte selon sa nature. Considérant

ainsi une technique comme une manipulation régulée de représentations sémiotiques ou d'objets ostensifs, Rabardel (1995) les ramène à leur nature matérielle ou symbolique : des artefacts. Ainsi nous pouvons considérer qu'une technique n'est autre qu'une manière d'articuler des artefacts qui suppose la mobilisation de schèmes d'utilisation, ce qui en fait des instruments. Par conséquent un objet ostensif pourra être considéré comme un instrument possible de l'activité humaine, c'est-à-dire comme une entité qui permet, en association avec d'autres, de conformer des techniques permettant d'accomplir certaines tâches. Cette distinction entre artefact et instrument permet à son tour de modéliser deux processus croisés et imbriqués dans une activité mathématique : l'instrumentalisation et l'instrumentation. Le premier est relatif à la personnalisation de l'artefact par le sujet et le second est lié aux schèmes d'utilisation chez le sujet. Béguin et Rabardel (2001) distinguent trois types de schèmes d'utilisation, les schèmes d'usage renvoyant à l'interaction du sujet avec l'artefact, les schèmes d'action instrumentés dirigés vers l'objet de l'activité et convoquant les schèmes d'usages pour atteindre les buts poursuivis et les schèmes d'action collectives instrumentées, en référence à l'utilisation d'artefacts par plusieurs sujets, simultanément ou conjointement. Dans notre étude, cette diversité d'approche apporte une contribution à la fois théorique et empirique permettant d'éclairer le développement de cette praxéologie selon le type d'environnement d'enseignement : papier crayon et informatique. La prise en compte de l'hybridation des deux environnements, dans le cas particulier de travaux pratiques de mathématiques, nous a conduit à prendre en compte l'aspect algorithmique dans le passage d'un environnement à l'autre lors de la mise en œuvre de cette technique numérique. Les travaux de Briant et Bronner, (2015) qui mettent en avant la distance qui sépare l'activité initiale de résolution d'un problème mathématique dans l'environnement habituel (papier/crayon), de sa programmation apportent une distinction supplémentaire entre algorithme informatisé (le langage « pseudo-code ») et « programme informatique » (en langage informatique). En effet, « lorsqu'une tâche de type « concevoir un programme pour résoudre un problème » est donnée, nous voyons émerger une double transposition, associée à des techniques différentes, justifiées par des technologies relevant du domaine mathématique, du domaine informatique, ou des deux conjointement » (Briant & Bronner, 2015, p. 236). Trois types de résolution sont définis dans le processus de la double transposition, la résolution mathématique engagée dans l'environnement classique papier-crayon qui donnera lieu à un premier algorithme (algorithme mathématique), la résolution algorithmique qui consiste à transposer l'algorithme mathématique en un algorithme informatique, écrit en pseudo-code (1ère transposition) et la résolution informatique qui consiste à transposer l'algorithme informatisé en un programme via un langage informatique adapté au logiciel (2^{e} transposition).

Nous émettons l'hypothèse selon laquelle, l'introduction de l'approche numérique de résolution des ED par la méthode d'Euler, dans un environnement hybride permet de mettre en évidence, chez les étudiants, des conceptualisations erronées que l'environnement informatique permet de déceler.

Analyse épistémologique

La méthode d'Euler dans le savoir à enseigner

La méthode d'Euler est une occasion de développer chez les étudiants des compétences en rapport avec la résolution numérique. On ramène l'équation différentielle du premier ordre à la forme : (E) :y'=f(x,y) où f est une fonction numérique à deux variables réelles. La solution lorsqu'elle existe sur un intervalle I représente une fonction u dérivable sur I et vérifiant : $\forall x \in I$, u'(x)= f(x,u(x)). La mise en œuvre d'une telle technique met en avant une solution approchée qui se présente sous forme d'une fonction affine par morceaux sur I. Ainsi, l'étudiant manipule des ostensifs qui renvoient à des fonctions de nature différentes : la fonction numérique y de la variable x, la fonction numérique f à deux variables réelles (x, y), la fonction affine par morceaux (solution d'Euler) et la fonction solution exacte dans le cas d'un problème de Cauchy, accessible avec les techniques algébriques. Il s'agit ainsi d'une procédure qui permet d'approcher la solution d'une EDL du premier ordre connaissant une condition initiale présentée sous la forme suivante $\begin{cases} y' = f(x,y), x_0 \le x \le x_0 + T \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ (problème de Cauchy). Les objets mathématiques et les relations en jeu sont en général accessibles pour des étudiants de première année universitaire, de plus cette méthode a un caractère algorithmique et programmable ce qui justifie la raison d'être de cette approche dans les programmes de cette institution universitaire. C'est une méthode approximative basée sur la discrétisation de la variable x. L'intervalle $[x_0, x_0+T]$ est divisé en un nombre N de subdivisions de même longueur $h = \frac{T}{N}$, finalement la méthode d'Euler renvoie la liste $(y_0,y_1,\ldots,y_N)$ des valeurs approchées des $y(x_i)$ où x_i=x0+ih et y désigne la solution « exacte » de l'ED. La courbe (d'Euler) polygonale reliant les points M_i (x_i,y_i), est une approximation graphique de la solution « exacte ». Elle offre une vision approximative du comportement de la fonction y(t) solution « exacte » sur l'intervalle $[x_0, x_0+T]$. Ainsi, si l'on souhaite que cette vision soit bonne, le choix du pas de discrétisation h doit être suffisamment petit, et par conséquent le nombre N des itérations (le nombre de valeurs à calculer) peut devenir important. Cela impose une certaine économie, une rapidité de calcul et une mémorisation importante d'où la nécessité de l'outil informatique. La méthode d'Euler suppose que la solution visée y du problème de Cauchy existe et pour une valeur raisonnablement petite de h et $x \in [x_0,x_0+T[$, l'expression y(x)+h.f(x ,y(x)) est une bonne approximation de y(x+h). C'est à dire $y(x+h) \approx y(x)+h.f(x ,y(x))$ (formule d'Euler). Cette formule peut être obtenue en supposant que la solution visée y est dérivable et par suite admet un développement limité au moins à l'ordre 1 au voisinage de tout point x de l'intervalle $[x_0 , x_0+T[$. On peut donc écrire que : y(x+h)=y(x)+h.y' (x)+o(h) , ou en supposant simplement la dérivabilité de la solution visée en tout point $x \in [x_0,x_0+T[$ c'est à dire $\lim_{h\to 0}\left(\frac{y(x+h)-y(x)}{h}\right) = y'(x)$ et alors pour h≈0 on a : $\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx y'(x) = f(x,y)$ ou encore en intégrant l'équation sur l'intervalle $[x, x+h]$ $y(x+h)-y(x) = \int_x^{x+h} y'(s)ds = \int_x^{x+h} f(s,y(s))ds \approx h.f(x,y)$, pour h assez petit, comme l'illustre le graphique suivant.

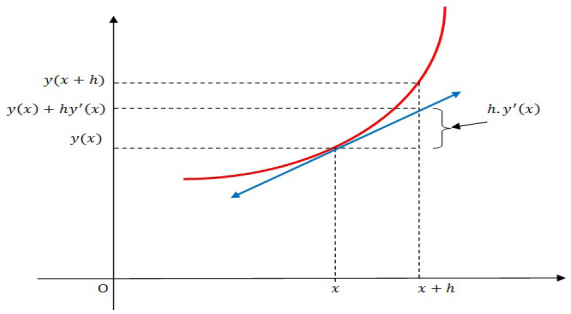


Figure 1– Illustration graphique de la méthode d'Euler

Les enjeux sémiotiques de l'application de la méthode d'Euler dans les environnements papier-crayon et Maple

La mise en œuvre de la méthode d'Euler passe par trois étapes. La première consiste à construire une suite de points à partir de l'équation différentielle ; il s'agit d'un passage du continu au discret. La deuxième consiste en la détermination d'une liste ou d'une table de valeurs numériques. La dernière renvoie à un passage du discret au continu permettant d'obtenir la construction graphique. Chaque étape requière un changement de registre de représentation sémiotique (Duval, 1996) que nous utilisons dans notre analyse pour différencier ces deux aspects. Nous résumons les registres convoqués dans la résolution des ED par la méthode d'Euler et les caractéristiques marquantes dans le passage d'une étape à l'autre selon l'environnement de travail dans le tableau 1.

Environnement papier- crayon		Environnement Maple	
Etape1		Etape2	Etape3
Registre algébrique continu →	Registre algébrique discret →	Registre numérique →	Registre graphique
Equation différentielle $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y' = f(x,y) \end{cases}$	Suites numériques $x_k = x_0 + k.h$; $y_{k+1} = y_k + h.f(x_k, y_k)$	Liste des valeurs numériques approchées des x_k et des y_k	Courbe des points isolés discrets $M_k(x_k, y_k)$ ↓ Courbe polygonale reliant les points $M_k(x_k, y_k)$

Tableau 1 – Les registres de représentations sémiotiques impliqués dans la méthode d'Euler dans les environnements classiques et informatiques (Ben Nejma & Brinsi, 2021, 2022)

Pour déterminer la liste (ou le tableau) des valeurs approchées des termes de la suite d'Euler, les étudiants ont recours au logiciel Maple suggéré par le programme officiel de l'ISET. Ce logiciel permet d'effectuer les calculs des valeurs numériques des termes de la suite, de construire une ou plusieurs

courbes approchées (courbes d'Euler) et de les superposer dans un même repère. Il permet aussi la détermination de la solution exacte dans le cas où une telle équation est accessible avec une technique algébrique. En superposant la courbe « exacte » avec des courbes approchées obtenues avec différentes valeurs du pas h, puis en considérant l'écart entre les différentes courbes et la courbe exacte, on pourra constater l'effet du pas choisi (ou du nombre de subdivisions de l'intervalle d'étude). Comme l'illustre la figure suivante :

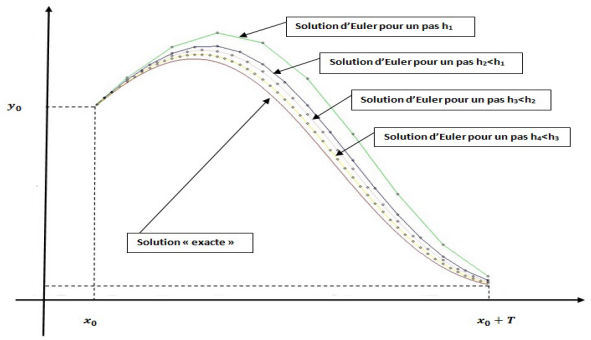


Figure 2– L'usage de Maple dans l'approximation des solutions d'une EDL par la méthode d'Euler

Cadre d'analyse et méthodologie

Une adaptation du modèle de la double transposition à la méthode d'Euler

En s'inspirant du modèle de la double transposition développé par Briant et Bronner (2015), nous avons d'abord procédé à une description des techniques de résolution mathématique, algorithmique et informatique impliquées dans la méthode d'Euler que nous proposons de développer.

- La résolution mathématique consiste en la résolution du problème dans le cadre classique de l'environnement papier-crayon. Cette résolution peut donner lieu à un premier algorithme : « algorithme mathématique ».

- La résolution algorithmique : une fois la résolution mathématique achevée, une première transposition aura lieu pour déterminer un algorithme informatisé, écrit en pseudo-code. Dans certains cas l'algorithme mathématique, utilisé habituellement dans l'environnement papier-crayon, nécessite des connaissances relatives à l'objet mathématique en question, qui ne sont pas généralement implantées de base dans un logiciel quelconque de programmation. Si le cas se présente, il est exigé d'en chercher d'autres qui tiennent compte des actions élémentaires réalisables par la machine ou le logiciel de programmation intégré. C'est ce que les auteurs (2015) nomment « algorithme informatisé ».

- La résolution informatique : elle correspond à l'opération qui aboutit à l'écriture du programme avec un langage informatique adéquat au logiciel en jeu, à la suite de la première transposition. Nous synthétisons ces caractéristiques dans le tableau suivant en adaptant ce modèle à la méthode d'Euler (Ben Nejma & Brinsi, 2021 ; 2022).

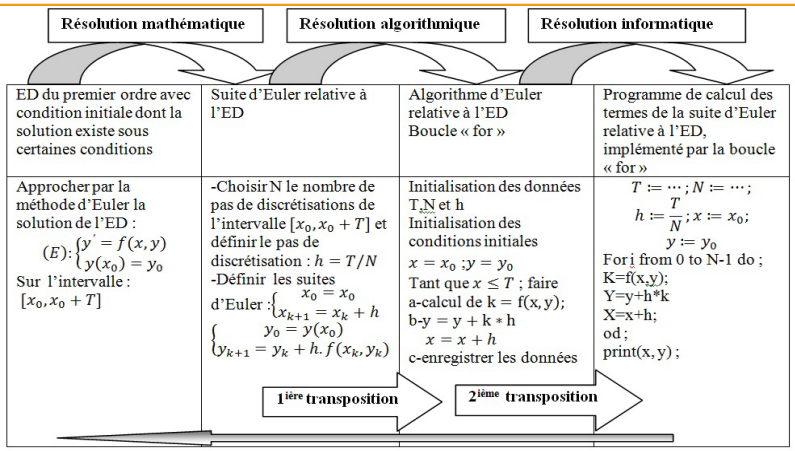


Tableau 2 – La double transposition dans la résolution numérique d'une EDL par la méthode d'Euler (Ben Nejma & Brinsi, 2021, 2022)

La première transposition « *transposition algorithmique* » se fait à différents niveaux. Au *niveau du langage* : il s'agit de passer d'un langage mathématique, c'est-à-dire *le langage utilisé usuellement par les écrits mathématiques* (Modeste 2012, p. 62) à un langage en *pseudo-code* semblable au langage de programmation, débarrassé de ses problèmes de syntaxe. *Au niveau des techniques*, elles différent d'un algorithme à un autre, de même les technologies-théories sous-jacentes s'en trouvent alors modifiées. La seconde transposition : « *transposition informatique* » se fait à son tour à deux niveaux. Celui *du langage* où il s'agit de passer du langage en pseudo-code de l'algorithme à un langage informatique, c'est-à-dire un langage de programmation. Cela nécessite une reformulation pour donner un équivalent qui soit compréhensible par la machine, selon sa structure interne et dans son langage. La transposition se fait aussi au *niveau des variables*. Les variables mathématiques utilisées dans les algorithmes vont céder la place aux variables informatiques dans le programme informatique. Ces variables font partie de la technologie des praxéologies informatiques. L'existence de la transposition algorithmique est un aspect didactique important pour comprendre certains phénomènes liés à l'apprentissage des mathématiques en général. Ce concept est intimement lié, comme nous l'avons déjà évoqué, aux organisations mathématiques mises en œuvre au niveau des pratiques d'apprentissage. Nous souhaitons recueillir des informations sur la manière dont les étudiants gèrent ces deux environnements pour accomplir les tâches proposées. Comment organisent-ils le travail mathématique, algorithmique et informatique dans l'environnement EIAH ? Quelles sont les difficultés inhérentes à la transposition informatique ?

Contexte de l'expérimentation et recueil de données

Notre expérimentation s'est déroulée au dernier trimestre de l'année universitaire 2018- 2019 avec des étudiants de première année universitaire, section génie électrique. Nous nous intéressons aux pratiques des étudiants autour de la résolution des EDL, notamment par la méthode d'Euler dans les environnements papier-crayon et « Maple ». Nous analysons les productions écrites et numérisées en

réponse à un test de contrôle (Situation1) proposé par le professeur de mathématiques qui assure l'enseignement au sein des ateliers. Ce problème comporte deux parties. Une « partie théorique », à accomplir dans l'environnement papier- crayon, a pour objectif d'évaluer les compétences des étudiants à résoudre des équations différentielles linéaires du premier ordre avec données initiales. Une « partie pratique » a pour objectif d'analyser les apprentissages des étudiants autour de la résolution algébrique et numérique via Maple. Nous soulignons le fait que la plupart des étudiants en cette période de l'année universitaire se sont familiarisés avec ce logiciel en manipulant des fonctionnalités prédéfinies et en appliquant des programmes concernant les notions de fonctions, dérivées, primitives, intégrales, suites…. De plus, la passation du test a lieu en salle informatique équipée d'ordinateurs. Les étudiants du groupe sont répartis en 4 binômes qui sont autorisés à accéder sans restriction à la manipulation de cet artefact. Les binômes d'étudiants sont amenés à présenter leurs productions en fin de la séance (dont la durée est de 1h30), composées de comptes rendus écrits et de fichiers numériques comportant le travail accompli dans l'environnement informatique « Maple » et enregistré sur machines. Nous analysons ces productions en confrontant les traces écrites sur papier avec les résultats obtenus avec Maple, en tenant compte des trois phases de résolution. Pour chaque étape de la transposition, il s'agit d'identifier les techniques mobilisées par les étudiants et de repérer les erreurs commises ou les schèmes développés. L'approche numérique via la méthode d'Euler va solliciter la coordination des schèmes liés au graphique et des schèmes algébriques et éventuellement analytiques liés ou non à l'environnement Maple. Nous restituons la façon dont ces schèmes sont activés par les étudiants lors de ce processus. Ces schèmes peuvent se manifester dans le registre de représentation (discursif, graphique, algébrique, analytique) et avoir différentes fonctions (Trouche, 2005) : *une fonction heuristique* (contrôle, organisation de l'action), une *fonction pragmatique* (action, transformation) et *une fonction épistémique* (prise d'information, compréhension).

Méthodologie

Une analyse a priori de la situation a été conduite en référence aux outils théoriques en considérant deux organisations mathématiques locales dans l'environnement p/c relatives à : (RA) Résolution algébrique et (RG) représentation graphique de l'allure de la courbe de la solution. Nous faisons l'hypothèse que, dans l'environnement Maple, le processus d'instrumentation modifie en partie ces deux organisations mathématiques locales, les techniques et les procédures de réalisation ne fonctionnant pas de la même manière que dans l'environnement papier/crayon. Nous identifions les stratégies possibles attachées aux processus d'instrumentation pouvant permettre la modélisation du problème dans Maple. Nous mettons en avant deux organisations mathématiques locales, RGI : représentation graphique de la solution et RGE : représentation graphique de la solution par la méthode d'Euler. Quatre critères relatifs à RGE sont identifiés :

C1 : Le programme est correctement appliqué, la courbe est tracée et le développement des calculs est pertinent.

C2 : La représentation graphique est minimale ou approximative et les calculs algébriques pertinents.

C3 : La représentation graphique est minimale et les calculs algébriques ne sont pas pertinents.

C4 : La représentation graphique est présentée sans développement de calcul associé.

Notons que le degré d'élaboration de la représentation graphique par la méthode d'Euler est l'aboutissement d'un programme de calcul ou d'un algorithme de résolution appliqué correctement. L'interprétation de la courbe, la résolution numérique de l'équation différentielle et l'approche de certaines valeurs numériques renvoient à l'enjeu que le graphique représente par rapport à la résolution du problème. Si les étudiants font une courbe relativement vague ou erronée, celui-ci ne peut être qu'une entrée dans le problème de façon intuitive, cette courbe ne sert alors à rien dans la mise en place de la résolution numérique de l'équation différentielle ou encore dans l'interprétation de la résolution algébrique. Lorsque la courbe est élaborée correctement, cela renvoie à une application correcte du programme de résolution par la méthode d'Euler et une maitrise des commandes de Maple. L'interprétation du graphique sera l'indice de l'interaction qu'il peut y avoir entre la représentation graphique et la résolution algébrique ou numérique de l'ED en jeu.

Principaux résultats relatifs aux pratiques des étudiants

L'analyse des productions des étudiants a permis de dégager des éléments importants pour notre problématique.

Dans l'environnement papier-crayon

- Une mise en œuvre de techniques algébriques automatisées sans prise en compte des informations qui figurent dans l'énoncé (nature de l'ED, condition initiale), ce qui engage les étudiants dans des démarches dépourvues de sens.

- Un travail dans le registre graphique pauvre et non outillé par des éléments technologiques explicites dans l'environnement papier-crayon moyennant un travail mathématique autour de l'étude de la fonction solution.

- Les étudiants semblent recourir à une résolution informatique pour avoir l'allure de la courbe solution de l'EDL sans se soucier du travail mathématique convoqué par la question dans l'environnement papier-crayon. Ils développement ainsi un schème graphique de nature heuristique en confrontant ce qu'ils perçoivent sur l'écran avec la fonction solution.

- Le quart des étudiants concernés semblent maitriser la résolution algébrique de l'ED, bien qu'il s'agisse dans cette situation d'une EDL du premier ordre homogène. Les étudiants se mettent à la recherche d'une solution particulière en mobilisant la technique de la variation de la constante. Le schème développé par la plupart est que « toute EDL du premier ordre possède une solution particulière obtenue par la méthode de la variation de la constante ».

- Les traces retrouvées dans les copies des étudiants concernant l'algorithme d'Euler montrent une maitrise insuffisante de la technique mathématique et des confusions dans l'emploi des variables mathématiques et informatiques. Ces constats sont soutenus par les ostensifs employés à plusieurs étapes de la résolution algorithmique entamée.

- On ne retrouve aucune trace écrite d'un contrôle des résultats erronés, ce qui confirme les difficultés des étudiants à identifier certains objets mathématiques dans un même registre ou à percevoir les changements de registres sémiotiques convoqués par l'énoncé.

- Quant à l'interprétation de la courbe d'Euler en tant qu'approximation de la solution exacte, en termes d'amplitude du pas et d'erreurs d'estimation, on ne trouve aucune trace dans la production des étudiants. Il semble que ceux-ci ne perçoivent pas l'algorithme d'Euler comme méthode de résolution numérique approchée d'EDL.

Dans l'environnement technologique

L'analyse du travail accompli par les étudiants à partir des enregistrements et des traces écrites dans les comptes rendus des travaux pratiques a permis d'apporter quelques éléments de réponse à nos questions de recherche.

- Les étudiants rencontrent plusieurs difficultés pour produire correctement l'algorithme relatif à la méthode d'Euler. En effet, de nombreuses erreurs ont été relevées par rapport aux ostensifs employés, renvoyant à des non ostensifs de nature différentes : fonction affine par morceaux d'Euler relative à l'ED, fonction à deux variables qu'exige la mise en équation relative au problème de Cauchy, fonction y inconnue, et fonction solution exacte de l'équation différentielle.

- Le passage du cadre numérique (discret) au cadre algébrique (continue), source de difficultés dans l'environnement papier crayon, persiste dans l'environnement informatisé et se donne à voir au niveau de la transposition algorithmique. En effet nous trouvons des confusions chez les étudiants dans l'emploi des variables, en particulier celle en rapport avec le compteur i « discret » et la variable x « continue ».

- La plupart des erreurs retrouvées au niveau des productions ou des fichiers informatisés semblent de nature cognitive : des confusions dans la résolution algorithmique apparaissent notamment entre les objets de savoirs : équation, fonction, courbe, expression algébrique de la fonction… L'illusion de

transparence, phénomène didactique mis en avant dans les travaux de Artigue (1995) est renforcé par les analyses conduites dans le cadre de cette recherche.

Conclusion et discussion

À la lumière des analyses réalisées dans le cadre de ces ateliers de mathématiques prescrits par l'institution universitaire (ISET), il a été possible d'identifier des constats intéressants pour la poursuite de la recherche. La plupart des schèmes développés par les étudiants semblent renvoyer à une maitrise insuffisante de la technique numérique de résolution des ED et des concepts mathématiques sous-jacents à la méthode d'Euler. Par ailleurs, l'analyse du processus de la double transposition didactique et informatique témoigne des difficultés rencontrées par les étudiants pour réaliser un traitement adapté à chaque registre (numérique, graphique, algébrique, algorithmique) puis pour convertir les représentations sémiotiques d'un environnement de travail à un autre. Les pratiques des étudiants semblent répondre, en partie, à des choix d'enseignement qui privilégient le traitement algébrique au détriment des dimensions algorithmique et informatique. La technique algébrique est, en effet, celle qui fait l'objet d'enseignement explicite et se limite au registre algébrique. Le travail graphique est rarement présent voire absent des praxéologies mathématiques développées autour de la résolution des équations différentielles. La méthode d'Euler nous semble ainsi une occasion de convoquer plusieurs registres sémiotiques en vue de renforcer l'appréhension des concepts mathématiques en jeu. Les outils de programmation numériques seraient, de ce fait, un moyen de réaliser cette flexibilité entre registres.

Références

Artigue, M. (1995) Un regard didactique sur l'utilisation d'outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques. *Repères IREM, 19*, 77–108

Balacheff N. (1994) Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques 14*(1), 9-42.

Ben Nejma, S & Brinsi, L. (2022). La résolution des équations différentielles dans un environnement informatique. *Mathematice Revue Sesamath. Vol 78* Article 1472-http://revue.sesamath.net/spip.php.

Brinsi, L. (2020) *La résolution numérique des équations différentielles dans un environnement informatique en première année d'université : pratiques enseignantes et genèse instrumentale des étudiants* [mémoire de master, ISEFC-Université virtuelle de Tunis].

Briant, N. & Bronner, A. (2015). Étude d'une transposition didactique de l'algorithmique au lycée : une pensée algorithmique comme un versant de la pensée mathématique. In Theis L. (Ed.) Actes du colloque EMF2015 – GT3 : *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage*, (pp. 231-246).

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné, *La pensée sauvage*, Grenoble.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en didactique des mathématiques, 19* (2), 221-266. La pensée Sauvage.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives 5*. 37-65. IREM de Strasbourg.

Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* [Thèse de doctorat- Université de Grenoble].

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

Titre: Typologie de messages écrits pour communiquer un trajet dans une ville virtuelle

Auteurs: FRAUCHIGER Thomas, MATRI Sabrina, COUTAT Sylvia et DORIER Jean-Luc

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 593 - 607

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Typologie de messages écrits pour communiquer un trajet dans une ville virtuelle

FRAUCHIGER[1] Thomas – MATRI[2] Sabrina – COUTAT[3] Sylvia – DORIER[4] Jean-Luc

Résumé – Le développement de tâches de navigation dans un macro-espace est un défi pour les classes de primaire. L'utilisation d'une ville virtuelle associée à des tâches de communication/reproduction de trajet permet l'étude des connaissances spatiales. Nous présentons l'analyse de deux séances impliquant la production de messages écrits. Cette utilisation conjointe d'un environnement virtuel et de messages écrits nous renseigne sur les éléments spécifiquement pris en compte par les élèves lors de taches de navigation.

Mots-clefs : connaissances spatiales, environnement virtuel, macro-espace, point de repère, situation de communication

Abstract – The development of navigation tasks in a macro-space is a challenge for primary school classes. The use of a virtual city associated with route communication/reproduction tasks allows the study of spatial knowledge. We present the analysis of two sessions involving the production of written messages. This joint use of a virtual environment and written messages informs us about the specific elements taken into account by the students during navigation tasks.

Keywords: spatial knowledge, virtual environment, macro-space, landmark, communication situation

1. Equipe DiMaGe, Univeristé de Genève, Suisse, thomas.frauchiger@etu.unige.ch

2. Equipe DiMaGe, Univeristé de Genève, Suisse, sabrina.matri@unige.ch

3. Equipe DiMaGe, Univeristé de Genève, Suisse, sylvia.coutat@unige.ch

4. Equipe DiMaGe, Univeristé de Genève, Suisse, jean-luc.dorier@unige.ch

Présentation du projet

Le travail présenté ici s'inscrit dans un projet de recherche SPAGEO[5], qui associe trois équipes de la Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation de l'université de Genève : l'une d'elle en psychologie cognitive s'intéresse à l'orientation spatiale, une autre, TECFA est spécialiste des technologies éducatives et la nôtre, DiMaGe, de didactique des mathématiques.

En mathématiques, à la fin de l'école primaire, en Suisse romande, on attend de l'élève qu'il sache tracer un parcours sur un plan à partir de consignes ; situer sur un plan des positions relatives d'objets et utiliser un système d'axes orthonormé pour placer un point ou pour communiquer sa position (CIIP, 2010).

Un élément crucial qui émerge de nombreuses recherches en didactique comme en psychologie est la malléabilité des connaissances spatiales et le fait qu'elles commencent à apparaître avant même la scolarisation de l'enfant, dans ses expériences avec l'espace qui l'environne (Newcombe & Frick, 2010). Or, comme l'ont souligné Berthelot et Salin (1992), un point important mais non suffisamment pris en compte dans l'enseignement est de partir des expériences directes sur l'environnement avant d'aborder les représentations graphiques ou mentales d'un espace donné. Plus généralement, il s'agit d'opérer un va-et-vient entre action réelle sur l'espace sensible et action intériorisée (Piaget & Inhelder, 1948). Par ailleurs, des études montrent que de nombreux adultes sont en difficulté quant à la représentation d'un espace sur un plan et à l'orientation, notamment dans le cadre des métiers du bâtiment (Bessot, Deprez, Eberhard & Gomas, 1992), mais aussi dans leurs déplacements dans des espaces nouveaux, comme dans des villes lors de voyages. Or, comme il est impossible d'emmener des élèves dans des villes qui leur sont étrangères, les activités de classe permettant de travailler cette problématique sont souvent limitées à l'espace de la cour, ou, tout au plus, du quartier.

Par ailleurs, il est indéniable que depuis quelques années, notre relation à l'espace et certains de nos comportements spatiaux sont de plus en plus impactés par de nouvelles technologies et systèmes d'information. Ainsi, les environnements virtuels et les services de cartographie (GPS, Google Maps) complètent, voire supplantent les lectures statiques de cartes en deux dimensions (Duroisin, 2015). Pour les jeunes générations ces changements interviennent très tôt par les nombreux jeux-vidéo intégrant des réalités virtuelles tridimensionnelles dynamiques et de fait modifient les conditions de leur apprentissage spatial.

Il existe par ailleurs, une littérature importante en psychologie cognitive sur la question de l'orientation dans l'espace –voir Denis (2016), pour une vue d'ensemble, que les travaux de didactique des mathématiques n'exploitent pas toujours.

5. *Rethinking the links between spatial knowledge and geometry in primary education through virtual environment*, soutenu par le Fonds National Suisse pour la recherche FNS requête no 100019_188947 qui a commencé lors de l'année scolaire 2020/2021 pour 4 ans - Co-requérants Roland Maurer, Mireille Bétrancourt et Jean-Luc Dorier.

C'est sur la base de ces différents constats, que notre projet s'est construit, sur trois volets :

1. Un volet psychologique vise ainsi à évaluer sur une population d'enfants de 7 à 10 ans les habiletés spatiales, en tentant de les corréler avec leur usage des technologies.

2. Un volet technologique, où l'équipe du TECFA a construit et développé une ville virtuelle sur ordinateur (voir présentation plus bas).

3. Un volet didactique qui consiste à concevoir et expérimenter des ingénieries didactiques permettant l'utilisation en classe de l'environnement virtuel précédent pour entraîner le repérage spatial dans des espaces plus larges que ceux habituellement accessibles dans le contexte scolaire.

La centaine d'élèves participant à cette recherche est suivie sur trois ans de la 4P à la 6P[6] (7 à 10 ans). Pour chaque année, une ingénierie didactique d'environ six à huit séances de 1h à 1h30 chacune, a été (ou va être pour la dernière) conçue et expérimentée dans cinq classes de deux écoles.

Dans ce texte, après avoir présenté les grandes lignes du projet, nous allons analyser deux séances destinées aux élèves de 4P, où la même tâche a été donnée en séances 3 et 6. Nous pourrons ainsi mesurer les évolutions éventuelles des élèves, sur un plan individuel et collectif.

Description de la ville

La ville virtuelle est implémentée sur ordinateur, elle utilise un modèle de ville nord-américaine, où toutes les rues sont parallèles ou perpendiculaires les unes aux autres, avec des blocs de tailles identiques. Le développement des connaissances du repérage spatial visé par l'ingénierie didactique s'appuie notamment sur la mise en œuvre de différentes procédures dans des tâches de navigation. Selon Cohen et Schuepfer (1980) les points de repère sont des éléments de l'environnement largement utilisés par les enfants de 8 à 12 ans dans des tâches de navigation. Ils sont utilisés au cours des différentes étapes de la navigation pouvant indiquer des changements de direction ou confirmer une position (Golledge, 1999). Il est aussi possible d'utiliser des stratégies sans point de repère en comptant les intersections et en indiquant les directions à prendre, comme : « Tourner à droite au 3e carrefour » (Duroisin, 2015). Les points de repère constituent ainsi une variable didactique essentielle pour les tâches de navigation. Le développement de la ville a pris en compte les différentes valeurs de cette variable (l'unicité ou non de points de repère, leur présence ou non) pour définir différentes zones de la ville. Certains points de repère se répètent dans ce qui définit le centre-ville (passages piétons, panneaux de signalisation, arrêts de bus, …), qui s'oppose au quartier résidentiel (illustration en annexe 1), dénuée de ces points de repère locaux (Gardony & al., 2011). Ces points de repères locaux qui se répètent sont les seuls disponibles dans certaines zones comme la vieille ville. Pour d'autres zones, comme les rues commerçantes ou du quartier d'affaire, ils sont complétés par des points de repère uniques comme des magasins ou des grandes tours. Des points de repère globaux

6. En Suisse romande, la 4P correspond au grade 2 (CE1 en France, élèves de 7 ans).

sont visibles depuis différents endroits de la ville, comme à l'est de la ville des montagnes, au sud du centre-ville une étendue d'eau (mer ou lac) avec le soleil au-dessus.

Description de l'ingénierie de 4P

La séquence didactique débute par l'action exploratoire simple, permettant aux élèves de se familiariser avec l'environnement virtuel et la manette de jeu. Dans la suite, les élèves ont un trajet à suivre, marqué au sol au milieu des rues par une large ligne de couleur et orientée par des chevrons ajourés sur la ligne (annexe 1). L'activité suivante se fait par deux en miroir (cf. annexe 2), chaque élève avec son ordinateur, l'élève émetteur-rice voit la ligne au sol, alors que l'élève récepteur-rice est placé-e au point de départ du trajet de son ou sa camarade orienté-e dans le bon sens, mais n'a pas de ligne (annexe 1). Il ou elle doit tenter de reproduire le trajet à l'aide des informations données oralement en direct par l'élève émetteur-rice. Cette activité permet de faire le lien entre l'action et la communication. Les quatre séances suivantes mettent en jeu des communications écrites selon différentes variables didactiques (création ou utilisation d'un message seul ou en groupe, utilisation de son message ou de celui d'autrui). Ces activités de communication permettent de questionner la nature du codage à utiliser lorsque l'on s'adresse à un autre que soi-même. Dans la phase en groupe, la sollicitation des pairs va permettre de se mettre d'accord sur un code universel, du moins compréhensible de la majorité.

Le fait de penser également une progression de l'oral (communication directe où le codage et le décodage se font quasiment simultanément) vers l'écrit (qui est différé) permet aux élèves de s'outiller petit à petit afin d'adopter des stratégies de codage efficaces. La figure 1 présente l'enchainement des six séances d'enseignement en précisant pour chacune les points de repère utilisés et la modalité de travail.

No des séances	Type de communication – Modalité de travail	Points de repère
Séance 1	Familiarisation à l'environnement, Individuel	Locaux
Séance 2	Communication orale à autrui en direct, Binôme	Locaux + globaux
Séance 3	Auto-communication écrite immédiate, Individuel	Locaux + globaux
Séance 4	a) Auto-communication écrite différée, b) Communication à autrui Individuel (a) puis binôme (b)	Locaux + globaux
Séance 5	Communication écrite à autrui, En groupe	Locaux + globaux
Séance 6	a) Communication écrite à autrui, b) Communication orale à autrui en direct, Binôme (a et b)	Locaux + globaux (a) Globaux (b)

Tableau 1 – récapitulatif de l'ingénierie de 4P

Les premières séances se situent dans le centre-ville. Le fait de privilégier dans un premier temps, cette zone riche en points de repère a pour but de soutenir le repérage spatial, afin que les élèves puissent se référer à un maximum de points de repère. La séquence se termine autour d'une communication dans le quartier résidentiel, pour voir comment les élèves arrivent à élaborer un codage simple et efficace, sans recours aux points de repère locaux. En effet, le fait de confronter les élèves à des maisons toutes identiques, sans avoir de comparaison possible, devrait les inciter à opter pour un codage adapté à l'environnement (comme compter le nombre d'intersections par exemple).

Dans la suite nous allons nous focaliser sur les séances 3 et 6-a) et plus précisément sur les descriptions écrites des trajets produites par les élèves dans ces deux temps de l'ingénierie.

Annalyse des descriptions écrites d'un trajet

Description des séances 3 et 6

Lors des deux séances 3 et 6, les élèves ont à suivre un chemin dans la section urbaine et doivent écrire les informations qu'ils jugent nécessaires sur une feuille A4 blanche, pour pouvoir ensuite reproduire le même chemin sans la ligne orientée à partir du point de départ.

Dans la séance 3, il y a deux trajets différents donnés chacun à une moitié de la classe (annexe 3). En effet dans la séance 4, qui se déroule deux semaines plus tard, les élèves reprendront leurs notes pour tenter de reproduire le même trajet. Ils pourront alors améliorer leur message. Puis leur message éventuellement amélioré sera donné à un autre élève ayant eu l'autre trajet. Faute de place, nous ne rendons pas compte ici de ce dispositif, ni de l'étape de validation des messages. Dans la séance 6, il n'y a qu'un seul trajet et il n'y a pas d'amélioration ni d'échange (annexe 3). Les trajets ont des caractéristiques communes. Les trois trajets se situent dans la section urbaine et passent devant des points de repère uniques (station de bus, police, pizzeria, …). Les trajets de la séance 3 sont translatés l'un par rapport à l'autre. Cela permet d'avoir le même enchainement de changements de direction (tourner à droite, tourner à droite, tourner à gauche, tourner à gauche, tourner à droite, tourner à droite) et les mêmes portions de ligne droite (2 carrefours, 2 carrefours, 3 carrefours, 1 carrefour, 1 carrefour, 1 carrefour) entre les changements de direction. Le trajet de la séance 6 ne possède que quatre changements de direction (tourner à droite, tourner à gauche, tourner à gauche, tourner à gauche) et des portions de lignes droites de longueurs variables (2 carrefours, 2 carrefours, 3 carrefours, 1 carrefour, 1 carrefour). Les points de repère aux changements de direction sont différents pour chacun des trois trajets mais on retrouve trois changements de direction avec un point de repère unique et les autres sans point de repère unique.

Méthodologie de codage et catégorisation

A chacune des séances 3 et 6, nous avons récolté une centaine de messages. Dans un premier temps, nous avons classé les messages selon trois types qui semble correspondre à la façon dont les élèves se représentent le trajet.

Cette séparation en trois registres de représentation sémiotique fonctionne bien pour catégoriser les messages sur le plan de la forme. Par contre, elle ne suffit pas dans le sens où elle ne rend pas compte de la fonctionnalité de ces messages, de ce qu'ils traduisent sur la perception du trajet par les élèves et des éléments qu'ils jugent importants pour le décrire et le reproduire et donc sur leur représentation du trajet. Nous avons alors complété cette catégorisation par un autre découpage en trois types, selon ces fonctionnalités.

Le type 1 (*intersections*) correspond aux messages qui utilisent les intersections comme unité de référence et donnent quasi systématiquement les indications correspondant au choix à faire à chaque carrefour. Souvent ces messages ne prennent pas en compte les éléments particuliers de la ville permettant de se repérer. En effet, dans une ville nord-américaine comme la nôtre, cela peut être tout à fait efficace. En particulier, cela pourra s'avérer très utile, voire indispensable, dans la banlieue de la ville où tous les carrefours sont identiques avec des maisons toutes semblables les unes aux autres.

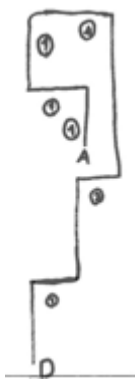
Le type 2 (*changement de direction*) correspond aux messages qui désignent (plus ou moins systématiquement) des points de repère visibles pour indiquer les endroits où il faut tourner. Dans ce type, nous retrouvons des messages tels que : « tourne à droite après la pizzeria », « juste après le musée, va à gauche ». Nous avons donc chaque fois un point de repère (pizzeria, musée, ...) qui indique le prochain endroit où il faut opérer un changement de direction. Il est alors sous-entendu qu'entre deux de ces informations il faut continuer tout droit. Parfois quand une partie du trajet sans changement de direction est longue, il peut être utile de donner quelques informations de position, comme : « tu passes devant l'épicerie », ce que l'on appel des informations confirmatoires (Golledge, 1999).

Enfin le type 3 (*lieux de passage*) correspond aux messages qui n'indiquent pas les changements de direction mais énumèrent les lieux par lesquels on passe, ce qu'on voit autour de soi. Ces messages sont souvent moins efficaces. Il est en effet difficile de donner de bonnes indications sans jamais indiquer de changement de direction.

En complément de ces types, nous avons ensuite séparé les messages en trois catégories selon les registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) utilisés par les élèves. La première catégorie regroupe tous les messages écrits sous forme d'un texte, la deuxième, ceux correspondant à des schémas (ou des dessins) et la troisième ceux qui représentent un plan (même sommaire) de la ville. Dans les textes, il n'y a que des mots de la langue française (plus ou moins bien orthographiés). Les élèves de cet âge n'utilisent généralement pas de raccourcis typographiques qui les auraient conduits à introduire des symboles au milieu du texte comme peuvent le faire des adultes ou des élèves plus âgés.

Cette première catégorie est donc facile à identifier. La séparation entre ce que nous appelons des schémas et des plans est plus délicate. Dans les deux cas les signes disposés sur la feuille n'utilisent pas de façon majoritaire des mots de la langue écrite, mais il peut y en avoir quelques-uns. Ils ne sont toutefois pas disposés dans des phrases, mais utilisés comme étiquettes : à droite, tout droit, police, etc. Les autres signes comportent des dessins plus ou moins schématiques ou au contraire réalistes, de lieux et d'objets de la ville (passages piétons, marchand de hot dog, boutique, etc.) soit de routes et de croisements ou de carrefours. Ils peuvent comporter également des flèches qui indiquent des directions, ou des relations spatiales entre les objets de la feuille (par exemple pour indiquer l'ordre de succession de deux objets dans le déplacement).

Pour distinguer les schémas des plans, il s'agit de voir si l'organisation spatiale des signes sur la feuille tente de reproduire de façon réduite et partielle (sur l'espace connexe au trajet) l'organisation spatiale des objets dans la ville. Cela nécessite forcément que les rues aient été représentées même par de simples traits, avec des bifurcations à angle droit et une prise en compte au moins approximative des rapports de distance. Comme les élèves ne disposent d'aucun instrument de mesure ou même de tracé, il est évident que ces plans sont faits à main levée et donc de type croquis. Pour rendre compte des rapports de distance, on peut soit noter toutes les intersections, soit essayer de rendre compte de la longueur des trajets rectilignes, comme dans la production ci-contre, qui est pour nous l'exemple le plus épuré des 'plans' que nous avons eu dans nos expérimentations.



Tout ce qui n'est pas que du texte et ne correspond pas aux critères que nous venons de décrire pour caractériser un plan, a été classé dans la catégorie des schémas. Il s'agit de messages comprenant des dessins d'objets de la ville avec éventuellement des flèches et même parfois quelques mots. L'organisation des signes sur la feuille suit le plus souvent les règles de la lecture de gauche à droite et de haut en bas, ou dans certains cas ils sont disposés sans organisation, et éventuellement numérotés pour ordonner la lecture.

En croisant les trois registres et les trois types, on obtient théoriquement une catégorisation en neuf genres de messages. Toutefois les messages de type 3 ne peuvent se trouver sous la forme d'un plan, cela n'aurait pas de sens car un plan donne nécessairement des informations sur les changements de direction, ce qui est exclu dans le type 3. Il nous reste donc huit genres, que nous illustrons chacun par un exemple en annexe 4.

Quelques résultats

Tableau 1, présente la répartition par genres aux deux séances simultanément. Comme les élèves étaient respectivement 91 et 89 à chacune de séance, c'est tout à fait comparable.

	Texte		Schéma		Plan		Total	
	Séance 3	Séance 6	Séance 3	Séance 6	Séance 3	Séance 6	Séance 3	Séance 6
Type 1	12	7	13	11	12	13	37	31
Type 2	26	36	7	10	4	8	37	54
Type 3	4	1	14	7			18	8
Total	42	44	34	28	16	21	92	93

Tableau 2 – Répartition par genres des messages dans la séance 3 / séance 6

Nous avons relevé quelques messages « mixtes » qui se retrouvent dans deux catégories distinctes. Pour la séance 3, il y en a un et pour la séance 6, il y en a quatre, c'est ce qui explique les totaux de 92 et 93 du tableau alors que nous avons obtenu respectivement 91 et 89 messages aux séances 3 et 6.

Ce double tableau met en évidence différents éléments intéressants pour l'analyse. Tout d'abord, les messages sous formes de textes sont les messages les plus utilisés, en particulier les textes de type 2 et cette tendance s'accentue entre les deux séances. En effet, ils étaient déjà majoritaires après la séance 3 (plus du quart) et ils le sont encore plus après la séance 6 (plus du tiers).

Dans les deux séances, le plan est la catégorie la moins représentée. Bien que l'on observe une légère augmentation dans la séance 6, cette catégorie reste toutefois en retrait par rapport aux deux autres. C'est un résultat intéressant car dans le programme de mathématiques de Suisse romande, les plans ne sont abordés qu'en 5P. D'ailleurs notre ingénierie de 5P les utilise fortement. Il sera intéressant de voir si plus d'élèves choisiront cette façon de procéder, lorsque nous proposerons une activité semblable à celle que nous analysons ici en fin de séquence de 5P (ceci est prévu en mai 2022, nous aurons donc la réponse pour le colloque).

Le type 3 a diminué de plus de la moitié entre les deux séances. Cela signifie que plusieurs élèves se sont rendu compte que ce procédé n'était pas efficace.

Les deux tableaux suivants récapitulent les changements de nature des messages qui ont été produits entre les deux séances 3 et 6. Nous avons exclu de ces tableaux les 6 élèves qui n'étaient présents qu'à une des deux séances.

Plusieurs éléments sont à relever. Tout d'abord, les élèves ayant choisi le registre textuel pour la séance 3 ont majoritairement gardé ce registre. Parmi les élèves qui ont changé de registre, le plus grand nombre de changements est également en faveur du registre textuel. Le même constat peut être effectué pour les élèves ayant choisi le type 2. Beaucoup ont gardé cette méthode (28 élèves), beaucoup l'ont opté lors de la séance 6 (22 élèves) et très peu l'ont abandonné (8 élèves). Précédem-

ment, nous avons remarqué que les textes de type 2 était les plus utilisés, ces résultats ne sont donc pas étonnants.

	Texte		**Schéma**		**Plan**	
Registres similaires en S3 et S6	26		18		9	
	Texte en S3		Schéma en S3		Plan en S3	
Changement de registre entre S3 et S6	14		14		5	
	Schéma en S6 : 7	Plan en S6 : 7	Texte en S6 : 10	Plan en S6 : 4	Texte en S6 : 4	Schéma en S6 : 1

Tableau 3 – Variation de registre entre les séances 3 et 6

	Type 1		**Type 2**		**Type 3**	
Type similaire en S3 et S6	16		28		6	
	Type 1 en S3		Type 2 en S3		Type 3 en S3	
Changement de type entre S3 et S6	17		8		11	
	Type 2 en S6 : 17	Type 3 en S6 : 0	Type 1 en S6 : 7	Type 3 en S6 : 1	Type 1 en S6 : 5	Type 2 en S6 : 6

Tableau 4 – Variation de type entre les séances 3 et 6

Le type 3 (désignation de lieux de passage) est, comme nous l'avons déjà dit, la méthode la moins efficace. Or, dans le tableau 3, nous pouvons constater que plusieurs élèves ont justement abandonné ce type. Environ deux tiers des élèves ont privilégié une autre sous-catégorie pour la séance 6. Seulement 6 élèves ont persisté et gardé cette méthode lors de la séance 6, contre 11 qui ont opté pour un autre type de message. Dans l'autre sens, un·e seul·e élève a changé de type pour adopter le type 3.

Conclusion

Les points de repère sont au centre de l'attention des élèves de 8 à 12 ans (Cohen & Schuepfer 1980) dans les tâches de navigation. Leur présence ou non, leur caractère unique ou non, ont été particulièrement pris en compte dans le développement de la ville et la conception de la séquence didactique. Nos résultats démontrent une augmentation de l'utilisation de ces points de repère lors de la dernière séance de production de messages écrits. En effet, les messages qui utilisent des points de repères pour indiquer des lieux de changement de direction ou des lieux de passage augmentent significativement. Les élèves qui les utilisaient dès la séance 3 les ont, pour la grande majorité, conservés lors de la séance 6. De nombreux élèves qui ne les utilisaient pas dans la séance 3 les ont finalement utilisés dans la séance 6. On peut cependant questionner l'efficacité des points de repère choisis. Par exemple nombreux sont les messages utilisant les passages-piétons pour désigner un lieu de changement de direction ou pour confirmer une position, aussi bien dans les messages écrits, que dans

les plans ou les schémas. Or, ils se retrouvent presque à chaque carrefour. Aussi ne représentent-ils pas un marqueur de changement de direction efficace, si on ne les compte pas.

Par ailleurs, une difficulté lors de la conception d'un message concerne ce qui touche à l'évaluation des distances à parcourir avant de changer de direction. Par exemple, certains élèves ont compté le nombre de chevrons présents sur la ligne verte indiquant le chemin à suivre et ont dessiné ce nombre de chevron dans leur message. Cette technique est non seulement coûteuse et sujette à des erreurs fréquentes de comptage mais surtout elle est totalement inefficace car, au moment de reproduire le chemin, la ligne verte n'est plus présente, ainsi les marqueurs de distance choisis deviennent inefficaces. Cette façon de coder une distance n'est quasiment pas présente dans les messages de la séance 6, ce qui montre que les élèves en ont compris l'inefficacité.

En utilisant une ville virtuelle, les informations proprioceptives et sensori-motrices ne sont pas disponibles, contrairement à un déplacement physique. Bien que ces informations soient perdues lors du passage au virtuel, les élèves parviennent tout de même à mobiliser un codage spécifique des distances dans l'environnement virtuel. De plus, selon Jansen-Osmann (2002) les informations visuelles sont suffisantes pour qu'un individu se construise une représentation spatiale au cours de l'exploration d'un environnement virtuel. La présence de la ligne verte a induit une autre erreur. Sur la route, elle prend la place de la ligne blanche séparant les voies de gauche et de droite (voir annexe 1). Cela a engendré des messages de la sorte : « Aux petites lignes blanches, tournent à droite ». Comment savoir à quel moment tourner à droite car la ligne blanche sera continue une fois la flèche verte disparue ? Ces différentes limites de l'environnement ont pu être, pour certaines, dépassées par les modalités de travail. La poursuite de nos observations de ces élèves sur deux années supplémentaires devrait confirmer nos premières analyses.

Références

Bessot, A., Deprez, S., Eberhard, M., & Gomas, B. (1992). Le sens des graphismes techniques dans la formation professionnelle de base pour les travailleurs du bâtiment : une approche didactique. *Éducation Permanente*, 111, 87-105.

Berthelot, R., & Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse de doctorat en mathématiques, Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1983). Étude des questions d'enseignement, un exemple : La géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, 45*, 183-226.

CIIP (2010). *Plan d'étude romand*. https://www.plandetudes.ch

Cohen, R. & Schuepfer, T. (1980). The representation of landmarks and routes. *Child Dev. 51*(4), 1065–1071

Denis, M. (2016). *Petit traité de l'espace : Un parcours pluridisciplinaire*. Bruxelles : Éditions Mardaga.

Duroisin, N. (2015). *Quelle place pour les apprentissages spatiaux à l'école ? Etude expérimentale du développement des compétences spatiales des élèves âgés de 6 à 15 ans*. Thèse de doctorat en psychologie cognitive, Université de Mons (Belgique).

Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et des sciences cognitive, 5*, 37-65.

Gardony, A., Brunyé, T. T., Mahoney, C. R., & Taylor, H. A. (2011). Affective states influence spatial cue utilization during navigation. *Presence: Teleoperators and Virtual Environments, 20*(3), 223-240

Golledge, R. (1999). Human wayfinding and cognitive map. In R. G. Golledge (Ed.), *Wayfing behavior: Cognitive mapping and other spatial processes* (pp. 5-45). Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press.

Jansen-Osmann, P. (2002). Using desktop virtual environments to investigate the role of landmarks. *Computers in Human Behavior, 18*, 427-436.

Newcombe, N. S., & Frick, A. (2010). Early Education for Spatial Intelligence: Why, What, and How. *Mind, Brain, and Education, 4*(3), 102-111.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant* (1ère éd.). Paris : Presses Universitaires de France.

Annexes

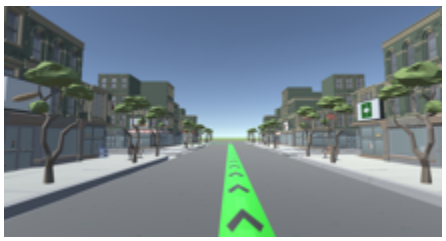
Annexe 1 – Prises de vue dans la ville :



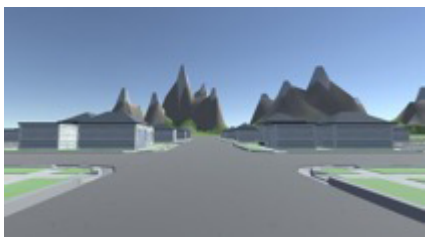
Séance 3, élève émetteur



Séance 3, élève récepteur



Séance 6, élève émetteur



Vue du quartier résidentiel/ banlieue

Annexe 2 – Disposition des binômes lors des activités en miroir et de groupe

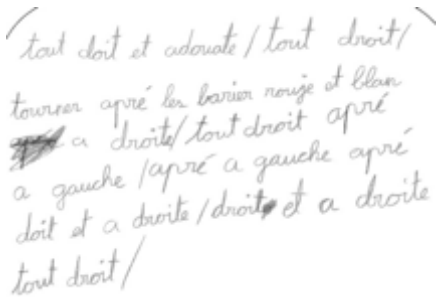




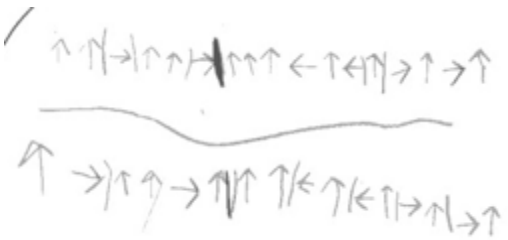
Annexe 3 - Plan de la ville avec les trajets de la séance 3 (rouge et bleu) et le trajet de la séance 6 (ligne verte) :



Annexe 4 - Exemples de messages selon les 8 genres :



Intersections -Texte



Intersections - Schéma



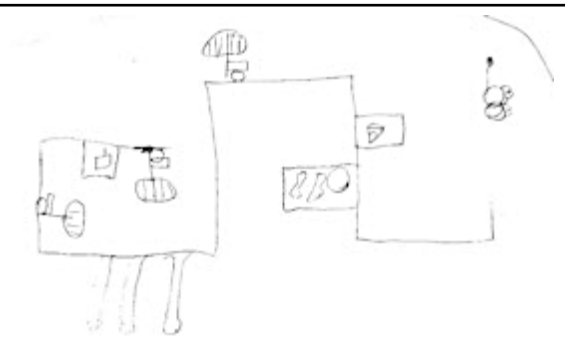
Intersections – Plan



Changement direction - Texte



Changement de direction - Schéma



Changement de direction - Plan



Lieux de passage - Texte



Lieux de passage - Schéma

Titre: Rapprochement inépuisable en géométrie dynamique : étude de la conceptualisation de la notion de tangente comme position limite chez un lycéen au Cameroun

Auteur: NGUEMBOU NANA Giscard

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 608 - 621

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Rapprochement inépuisable en géométrie dynamique : étude de la conceptualisation de la notion de tangente comme position limite chez un lycéen au Cameroun

NGUEMBOU NANA[1] Giscard

Résumé – Ce travail montre comment le lycéen peut prendre appui sur le rapprochement inépuisable pour appréhender la droite tangente comme étant une position limite. La construction de connaissances opératoires et prédicatives relatives au concept de droite tangente est rendue possible grâce à la coordination des fonctionnalités déplacement et zoom d'un environnement de géométrie dynamique. En effet, ils permettent de rapprocher sans cesse et autant que l'on veut la droite sécante de la droite tangente.

Mots-clés : rapprochement inépuisable, position limite, droite tangente, connaissance opératoire, connaissance prédicative.

Summary - this work shows how the high school student relies on the concept of inexhaustible rapprochement to apprehend the tangent line as a limit position. The construction of operational and predicative knowledge on this concept occurs, thanks to the coordination of the displacement and zoom functionalities of the dynamic geometry environment, with a view to bringing the secant line closer to the straight line as much as desired tangent.

Keywords: endless rapprochement, limit position, tangent line, operating knowledge, predicative knowledge

1. Université de Yaoundé 1, Cameroun, giscardnana@yahoo.fr

L'idée de rapprochement inépuisable dans le concept de limite

Dans le cadre de ce travail, nous entendons par vision dynamique de la limite, celle-là qui intègre l'idée du rapprochement sans cesse, dans la **technique** mise en œuvre pour *déterminer la limite*, comme par exemple, la vision de la limite présente dans la définition proposée par d'Alembert :

> On dit qu'une grandeur est une limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite que l'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche : En quelque sorte que la différence d'une pareille quantité à la limite est absolument inassignable. […) A proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra. (L'article LIMITE de l'encyclopédie de Diderot et d'Alembert).

La formulation ci-dessus, peut laisser sous-entendre que la limite est toujours non atteignable. Pourtant, dans certains cas, la technique mise en œuvre pour déterminer la limite montre qu'elle est bel et bien atteignable, comme nous le verrons ci-dessous avec l'expérience de (Cornu, 1983). Plus loin, nous allons tenter de reformuler cette définition pour le lycéen, dans le but de lui faire travailler sur la notion de droite tangente avec une vision dynamique et en cherchant à lui faire comprendre que, la technique mise en œuvre pour rapprocher, peut laisser percevoir la droite tangente comme étant une position limite.

Plusieurs chercheurs proposent un sens à la notion de droite tangente en s'appuyant sur l'idée de rapprochement. Ainsi Cornu (1983), par exemple, a conduit une expérience, qui consiste en un dispositif matériel constitué d'une règle appuyée contre 2 clous, l'un, A, planté dans une feuille sur laquelle est tracée une courbe et l'autre, M, pouvant se déplacer vers le premier. Le chercheur observe les difficultés des apprenants à interpréter en termes de limite ce qui se passe lorsque le clou en mouvement arrive à la position du clou fixe :

> « Tous les élèves font allusion au mouvement de la règle. […] Mais beaucoup ne font pas allusion à ce qui se passe lorsque **le point M arrive en A**. Et, parmi ceux qui font allusion beaucoup **n'ont pas vu la notion de limite** » (Cornu, 1983, p. 244).

Cette expérience qui consiste à rapprocher le présentant d'un point M pour le superposer à celui d'un point A et obtenir une intersection double (entre la sécante (AM) et la courbe) correspond à une vision statique de la limite associée à la notion de droite tangente. En effet, la technique mise en œuvre pour rapprocher le point M vers le point A, ne vise pas à faire émerger chez le lycéen l'idée de rapprochement sans cesse entre la sécante et la tangente. Aussi, la classe se focalise davantage sur ce qui se passe lorsque le point M arrive en A. Elle pourrait alors, aboutir à une définition de la limite, suivant une vision statique, comme celle proposée par Vivier (2010, p. 187) lorsqu'il dit :

« une tangente est une sécante qui forme une intersection d'ordre de multiplicité au moins 2 avec la courbe »

En plus, L'arrivée du point M en A, marque le passage de la droite sécante à sa position limite qui correspond à la droite tangente. Ce qui laisse clairement entendre que la limite (la droite tangente) est bel et bien atteignable. Ainsi, la vision statique de la limite, intègre dans la technique mise en œuvre pour déterminer la limite, l'idée que celle-ci est atteignable, pendant que la vision dynamique peut laisser sous-entendre que la limite est non atteignable. En cela, Dufour (2019) soutient qu'il possible pour le lycéen « d'hésiter sur le caractère *accessible ou non* de la limite » (p.73).

Les travaux de Cornu (1983) montrent que la limite, appréhendée de façon statique, aurait un faible potentiel pour faire émerger l'idée de position limite chez le lycéen, en particulier dans le cas de la droite tangente. C'est, sans doute, ce que note Schneider lorsqu'elle déclare : « Cette définition est, elle aussi, purement géométrique, en ce sens qu'elle ne suppose aucun détour par les pentes, mais contrairement à la perception des élèves, elle évoque plus une possibilité *de dépassement* qu'une réalisation effective » (1992, p. 327). Dès lors, trouver une technique géométrique dont la mise en œuvre est susceptible de faire percevoir la droite tangente comme étant une position limite nous semble être une piste de travail avec les élèves. Ainsi, nous reprenons de la définition de d'Alembert, que nous adaptons pour le lycéen et que nous précisons pour le cadre géométrique afin de proposer une définition de la limite, suivant une vision dynamique : *un objet géométrique du plan (A) est limite ou position limite d'un objet de même nature (B), si l'on peut trouver une* ***technique*** *permettant rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, l'objet (B) de l'objet (A), sans jamais l'atteindre, ni le surpasser*. Cette définition repose, entre autres, sur le rapprochement toujours possible, sans jamais atteindre la limite, que nous proposons de nommer « **rapprochement inépuisable** ». Nous faisons l'hypothèse que le rapprochement inépuisable pourrait permettre au lycéen de percevoir la droite tangente comme étant une position limite, dès lors qu'il est possible de proposer une **technique** permettant d'opérer un tel rapprochement.

Une technique opératoire de construction de la droite tangente vue sous le prisme de la position limite

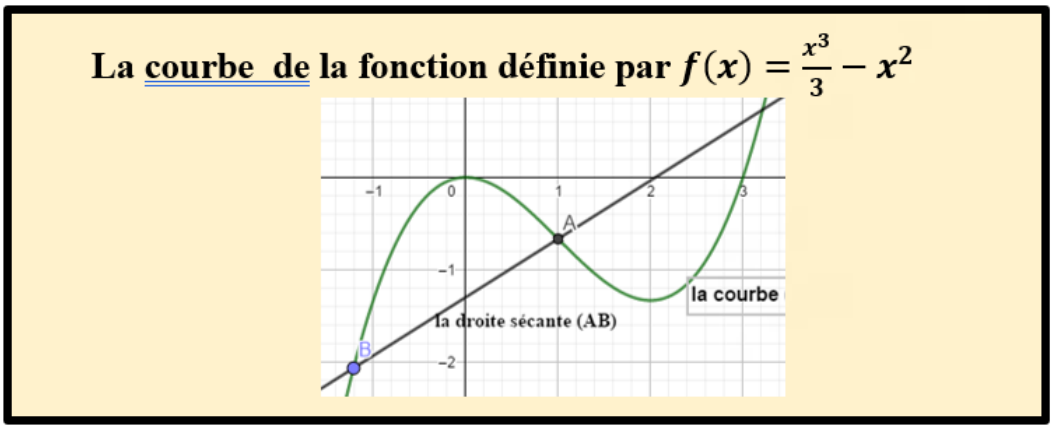


Figure 1. – B le point mobile sur la courbe (c) ; A un point fixe de (c) ; échelle sur les axes : 1/1

Une technique pour travailler le concept de tangente comme étant une position limite est possible en utilisant la géométrie dynamique. Dans le cas d'une droite tangente à une courbe (c) en un point A, elle consiste à construire le point A fixe sur la courbe (c), un point B sur la courbe, la droite sécante à (c) passant par les points A et B. De cette façon, le déplacement du point B vers le point A (voir la figure 1) en convoquant une technique adéquate, peut permettre de faire émerger l'idée d'un rapprochement inépuisable de la droite sécante vers la droite tangente.

L'idée rapprochement inépuisable obtenue par la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement

Suite à ce premier travail, la construction se poursuit en rapprochant le point B à proximité du point A à l'aide de la fonctionnalité déplacement. La fonctionnalité zoom est ensuite mobilisée pour agrandir la représentation à l'écran de la distance entre le point B et le point A. Par la suite, on rapproche comme précédemment le point B à proximité du point A. On réitère le processus de rapprochement autant que nécessaire. On choisit de s'arrêter lorsque la figure a atteint un point de saturation. Autrement dit, lorsqu'une portion de la courbe (c) et une portion de la droite sécante (AB) se confondent, en formant à l'écran une image semblable à un segment de droite, avec les points A et B bien distincts à l'écran dans la fenêtre géométrie (la figure 2).

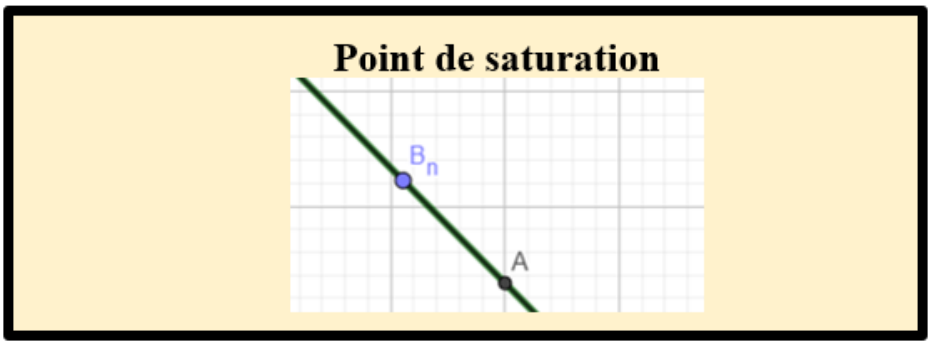


Figure 2. – La courbe (c) et la droite sécante (AB) sont confondues à l'écran. Échelle : 0,001 x 0,001

Chaque rapprochement du point B vers le point A, rapproche la sécante de la tangente. Ainsi, avec la géométrie dynamique et la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement, on met évidence un moyen de rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, la sécante de la tangente, ce qui caractérise le *rapprochement inépuisable*. Notre hypothèse est que cette technique de rapprochement permet de mobiliser une vision dynamique de la limite.

Le passage de la droite sécante à sa position limite

Au point de saturation, les représentants des points A et B sont bien distincts à l'écran. Une possibilité pour les faire coïncider, consiste à utiliser la fonctionnalité zoom inverse. Dans la pratique, on effectue des zooms inverses consécutifs entre les représentants des points A et B jusqu'à ce qu'ils se superposent à l'écran. En ce moment-là, la droite sécante passe à sa position limite qui correspond à la droite tangente (voir la figure 3).

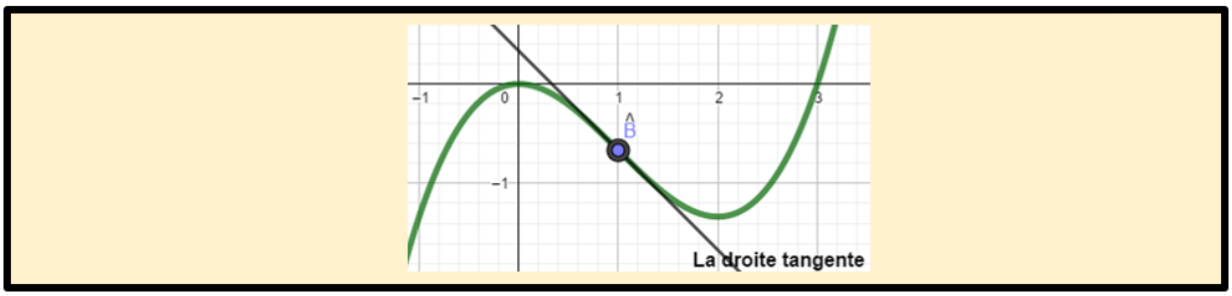


Figure 3. – Les zooms inverses permettent de faire passer la droite sécante à sa position limite.

La poursuite de zooms inverses renforce l'image de superposition du représentant du point B avec celui du point A. Dès lors, la droite et la courbe forment une intersection dont l'ordre de multiplicité est au moins 2 (une vision statique de la limite).

La conceptualisation dans l'action : un moyen pour construire des sens associés au concept de position limite

À propos du concept de limite, nous avons une distinction entre vision statique et vision dynamique et une technique permettant de rapprocher de façon inépuisable la sécante vers la tangente. Or, nous nous intéressons aux sens mathématiques que les lycéens peuvent construire à propos du concept de position limite en particulier en utilisant cette technique. La théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 2001) indique un moyen permettant de construire des sens sur un concept mathématique. Elle propose la conceptualisation dans l'action. Or, lors de la mise en œuvre de la technique géométrique sus-décrite le participant est bel et bien dans l'action. Il peut donc avoir conceptualisation sur la notion de position limite pendant cette période. Un indicateur de cette conceptualisation est la construction des *connaissances prédicatives*. En effet, la théorie sus-évoquée reconnait deux formes de connaissances : la forme prédicative « celle qui prend la forme de textes, d'énoncés, de traités et de manuels » (Vergnaud, 2001, p. 1) et la forme opératoire, celle qui permet de faire et de réussir. La connaissance opératoire est d'abord une compétence procédurale, comme le soutient Vergnaud à travers l'exemple suivant relatif au travail d'un porcher :

> Or, ce porcher avait développé des schèmes très subtils pour détecter des porcs présentant des signes de souffrance […] il n'était guère à mesure d'expliquer les indices qu'il prenait, ni les raisons des différents gestes qu'il savait faire pour calmer les porcs stressés. (2001, p. 17).

Le chercheur ajoute que : « Ce décalage entre les connaissances opératoires et leur formulation est un phénomène très général » (2001, p. 17). Par cet exemple l'auteur montre que : « la conceptualisation est une condition de l'énonciation » (2001, p. 12). Ainsi la construction des connaissances prédicatives, à partir des connaissances opératoires, suppose qu'il a eu conceptualisation dans l'action. Nous faisons alors le choix, de faire en sorte que les participants acquièrent les connaissances sur la notion de position limite, d'abord sous la forme opératoire. C'est-à-dire en leurs donnant des moyens de construire la droite tangente suivant une vision dynamique de la limite, dans l'environnement GéoGebra, à l'aide de la technique géométrique sus-décrite. Visant, ainsi la construction des connaissances prédicatives par les participants eux-mêmes, en situation. Avec éventuellement la médiation de l'enseignant. Autrement dit, nous visons la conceptualisation dans l'action sur la notion de position limite. Par adaptation des schèmes, lors de la construction de la droite tangente. Notamment à travers le développement des composantes invariants opératoires, règle d'action, prise d'information et la composante inférence du schème.

Effet d'une séquence d'enseignement avec géométrie dynamique sur la conceptualisatin de la notion de tangente

Nous avons conçu une situation d'enseignement de la notion de tangente à une courbe que nous avons menée auprès d'un public de lycéens au Cameroun. La technique de collecte de données que nous avons retenue est le *Teaching Expériment* (Dufour, 2019). Il s'agit d'une technique de collecte de données propre à la didactique des mathématiques. Elle a principalement été développée à l'école Russe et plus récemment aux États-Unis par, entre autres, Steffe et Thompson (2000). Elle consiste en des séances d'enseignement orchestrées par **un enseignant-chercheur** qui a ainsi la possibilité d'interagir avec les apprenants et d'intervenir dans les interactions entre les apprenants en vue d'évaluer, d'orienter et de réguler les connaissances construites. Ceci a pour but de s'assurer que les apprenants surmontent la difficulté annoncée par la recherche et surtout de comprendre et d'expliquer comment ils y parviennent. Dans un *Teaching Expériment*, outre l'enseignant chercheur, il y a un chercheur-témoin et des participants. Le chercheur-témoin participe à l'élaboration des tâches à proposer aux participants et donne son avis sur l'interprétation des données, dans le but de renforcer l'objectivité du chercheur-enseignant. Dans notre *teaching experiment*, le rôle d'enseignant-chercheur a été tenu par l'auteur de l'article, celui de chercheur-témoin par un enseignant de lycée. Les participants sont quatre volontaires d'une classe de l'enseignant, choisis en collaboration entre le chercheur et l'enseignant. Ils avaient des genèses d'usage développées par rapport à la géométrie dynamique, ceci dans le but de faciliter l'instrumentalisation des fonctionnalités nécessaires à la construction dynamique de la droite tangente. **Les outils de collecte de données étaient :** une caméra à chaque poste, les cahiers des participants, un journal de bord pour des prises de notes avant, pendant et après les séances. **Les instruments de collecte de données étaient :** un guide d'observation utilisé pendant les séances et un guide d'entretien avec l'élève après les séances.

Les situations d'apprentissage de la tangente

Deux situations ont été proposées aux participants. La première est dans le cadre géométrique, la seconde dans le cadre de l'analyse.

1. Situation 1 : construction et déplacement d'une droite sécante à une courbe

On considère la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = \cos(x)$, le point $A = (\frac{\pi}{2}, 0)$ et B un point sur la courbe (c) distinct du point A

Le but de ce travail est de proposer une définition de la droite tangente suivant une vision dynamique de la limite.

1. Dans l'environnement de GéoGebra, construire la courbe (c), le point A et le point B.
2. A l'aide de la fonctionnalité « tangente » du logiciel construire la droite tangente (T) à la courbe (c) au point A.
3. Utilise la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement, pour rapprocher le point B du point A jusqu'à ce que la courbe (c), la droite sécante (AB) et la tangente (T) se confondent à l'écran et apparaissent comme un segment de droite, avec les points A et B bien distincts dans la fenêtre géométrie.
4. Propose alors une définition de la droite tangente
5. Utiliser les zooms inverses pour faire coïncider les points A et B

2. Situation 2 : production d'une équation algébrique de la droite en la regardant comme une position limite.

On considère la courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x) = \cos(x)$, le point $A = (\frac{\pi}{2}, 0)$ et B un point sur la courbe (c) distinct du point A.

En prenant appui sur la définition proposée ci-dessus, écrire une équation algébrique de la droite tangente à (c) en A. Désigner par n le n ième rapprochement du point B vers le point A et par B_n la n^{ième} position occupée par le point B dans le cadre d'un rapprochement sans cesse de ce point, vers le futur point de tangence A.

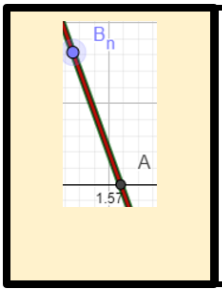
3. Le choix des productions à analyser

La séance, décrite et analysée en partie, s'inscrit dans une séquence d'enseignement visant à faire évoluer les conceptions actuelles de quatre lycéens sur la notion de tangente. Nous nous sommes rendus à la 10^{e} séance sur les 13 séances prévues. Le participant X est celui qui a assisté à toutes les séances faites. Deux participants ont abandonné après la 5^{e} séance. Le participant Y était présent lors de la 10^{e} séance, mais était absent pendant 4 séances successives. Raisons pour lesquelles nous faisons le choix de présenter et d'analyser les productions du participant X. Suites à des phases de formulation et d'institutionnalisation au cours des neuf premières séances, il a aussi acquis un nouveau langage ou vocabulaire consistant et ne figurant pas dans les manuels scolaires. Le but de cette séquence d'enseignement est de proposer au Ministère des Enseignements Secondaires (MINESEC) du Cameroun, une organisation praxéologique centrée l'utilisation de la géométrie dynamique et susceptible de faire de la droite tangente et du cercle tangent de véritables objets d'étude en classe de première ou de terminale.

Les productions du participant X

Construction de sens géométrique et dynamique sur le concept de droite tangente grâce à une technique permettant de mettre en œuvre un rapprochement inépuisable

Les productions graphiques du participant X (Figure 4 ci-dessous), montrent que ce dernier est arrivé à rapprocher le point B du point A jusqu'à saturation. Au cours de ce rapprochement le participant X agit matériellement sur les représentants des objets en jeu. Il constate, dans l'action, que la technique mise en œuvre lui indique un moyen de poursuivre sans cesse le rapprochement entre ces deux points. Ce premier rapprochement du point B vers le point A en implique un autre, celui de la sécante vers la tangente. Ce second rapprochement, n'est pas de même nature que le précédent et se manifeste par la réduction de l'écart angulaire entre la tangente et la sécante. Dans l'action, le participant a constaté que la technique mise en œuvre lui indique un moyen pour réduire sans cesse et autant qu'il veut cet écart angulaire. Autrement dit, il a constaté que le second rapprochement est lui aussi un rapprochement inépuisable.



Connaissances opératoires (1) du participant X

Le point de saturation est atteint grâce à la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement.

La courbe (c) en couleur verte ; la droite tangente en couleur noire et la droite sécante en couleur rouge. Les points A et B sont bien distincts à l'écran.

Figure 4. – Les productions du participant X relatives à la tâche (3) de la situation (1) : confusion à l'écran de la sécante (AB) et de la droite tangente

Nous faisons l'hypothèse que la composante concept-en-acte du schème du participant lui a permis de sélectionner ces informations comme importantes pour définir la droite tangente. Et que la composante inférence lui a permis de relier et de transformer les informations sélectionnées en connaissances prédicatives sur la notion de position limite, en articulant les notions de droite sécante (AB), technique, fonction et la notion de rapprochement inépuisable. Pour valider ou invalider ces hypothèses nous analysons ses productions relatives à la tâche (4) de la situation (1).

Les productions du participant X relatives à la tâche (4) de la situation (1)

Connaissances prédicatives (1) du participants X

Une droite (T) est tangente en A à une courbe (c), s'ils existent un point B et une technique permettant de rapprocher sans cesse et autant que l'on veut le point B du point A, sans jamais l'atteindre, ni le surpasser.

En effet, par la même occasion, la technique permet de rapprocher sans cesse et

Figure 5. – Les productions du participant X relatives à la tâche (4) de la situation (1)

La droite tangente : une position limite induite par la mise en œuvre du rapprochement inépuisable

Les connaissances prédicatives (1) ci-dessus encadrées, montrent que le participant X a construit, dans l'action, deux sens géométriques et dynamiques relativement au rapprochement inépuisable, lors de la mise en œuvre de la technique géométrique centrée sur la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement, l'un, entre les points et l'autre, entre les deux droites. La construction des sens sus-évoqués a permis au participant de percevoir la droite tangente comme étant une position limite, ici, entendue, comme une position inatteignable. Car, il décrit la droite tangente comme une position inatteignable relativement à la technique mise en œuvre. Il prend appui sur le fait que, les représentants des points A et B restaient toujours bien distincts à l'écran, pour conclure que la droite sécante et la droite tangente restaient aussi bien distinctes, au cours du rapprochement. Ainsi, la coordination des fonctionnalités zoom et déplacement a permis au participant de construire, dans l'action, des connaissances prédicatives sur le concept de rapprochement inépuisable. Et ces connaissances lui ont permis de décrire ou de présenter la droite tangente comme étant une position limite.

La technique donne au rapprochement le statut de rapprochement inépuisable

Toujours, dans la même définition de la droite tangente proposée par le participant X et encadrée ci-dessus, il octroie une place prépondérante à la notion de **technique**. Ce qui nous invite à soutenir que, dans l'action ce dernier a bel et bien compris que, c'est la technique mise en œuvre pour rapprocher, qui a donné au rapprochement, le statut de **rapprochement inépuisable**. Et que c'est, ce rapprochement inépuisable qui permet de percevoir ou de décrire la droite tangente comme étant une position limite. Dans le cas de l'espèce, cette technique correspond à la coordination des fonctionnalités déplacement et zoom. Pour éprouver la pertinence des connaissances prédicatives (1), analysons ses productions relatives à la tâche (1) de la situation (2).

Les productions du participant X relatives à la (1) de la situation (2)

Connaissances opératoires et prédicatives (2) du participant X

A=$\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}\\0\end{pmatrix}$;B=$\begin{pmatrix}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\\\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)\end{pmatrix}$; AB_n: $y_n = \left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}y = 0.$

AB_n: $y_n = \left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}y = 0$, donc AB_n: $y_n = \left(-x+\frac{\pi}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} - y = 0.$

$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n} v_n = 1$, on peut donc rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, le terme v_n du réel 1, sans jamais l'atteindre, ni le surpasser, en donnant à n des valeurs de plus en plus grandes. Par suite, on peut rapprocher sans cesse et autant que l'on veut, la droite sécante (AB_n) de la droite T :$\left(-x+\frac{\pi}{2}\right) - y = 0$, sans jamais l'atteindre, ni la surpasser, en donnant à n des valeurs de plus en plus grandes. Par conséquence, la droite (T) est limite de la suite de droites sécantes $(AB_n)_n$. Donc la droite (T) est tangente à la courbe (c) au point A.

Figure 6. – Les productions du participant X relatives à la tâche (1) de la situation (2)

Construction d'un sens algébrique associé au rapprochement inépuisable

Le nombre $\boldsymbol{n}$ est un entier naturel non nul, donc le point B_n est bien défini. En lui donnant des valeurs de plus en plus grandes, le participant a trouvé une technique, lui permettant de rapprocher sans cesse le point B_n du point A, sans jamais l'atteindre ni le surpasser. De plus $\lim_{n\to+\infty} x(B_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} = x(A)$ et $\lim_{n\to+\infty} y(B_n) = \lim_{n\to+\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right) = 0 = y(A)$. Il a donc construit, dans le cadre analytique, une technique lui ayant permis de rapprocher de façon inépuisable le point vers le futur point de tangence A. Dans ce nouveau cadre, le participant exprime le rapprochement inépuisable en donnant à , des valeurs de plus en plus grandes. Puisque l'ensemble IN est inépuisable, nous soutenons que le participant X a donné un sens algébrique au rapprochement inépuisable entre les deux points. Ce premier rapprochement, implique un second entre la sécante et la droite tangente. Nous soutenons alors que le participant a donné un sens algébrique au rapprochement inépuisable entre les deux droites. Ce qui confirme que, ce dernier a bel et bien compris que, c'est la technique mise en œuvre pour rapprocher, qui donne ou pas, au rapprochement le statut de rapprochement inépuisable. Et que, c'est ce rapprochement inépuisable qui permet de percevoir ou de décrire ou de présenter la droite tangente comme étant une position limite.

Les mêmes connaissances opératoires et prédicatives du participant X, ci-dessus encadrées (Figure 6), montrent aussi que, ce dernier est arrivé à décrire la droite tangente comme une position limite de la suite $(AB_n)_n$ des droites sécantes. Elles montrent également que, pour y arriver, il prend appui, sur le rapprochement inépuisable construit dans le registre analytique entre les points A et B. Cela nous invite à soutenir que, la coordination des fonctionnalités déplacement et zoom est une technique géométrique permettant de faire émerger l'idée de rapprochement inépuisable qui permet la construction d'une vision dynamique de droite tangente. Nous pouvons aussi avancer l'hypothèse que cette technique est transférable dans le cadre algébrique, et permet de présenter et de décrire la droite tangente comme étant une position limite dans un registre symbolique.

Conclusion

Nous sommes partis du constat selon lequel certains lycéens ont des difficultés à percevoir la droite tangente comme étant une position limite. Les travaux de certains chercheurs, à l'instar de (Balhan et *al.*, 2015; Cornu, 1983), soutiennent que la vision statique de la limite a un faible potentiel pour faire en sorte que le lycéen perçoive la droite tangente comme étant une position limite. La recherche d'une situation favorisant l'émergence d'une vision dynamique de la limite nous a orienté vers l'élaboration de situations d'enseignement utilisant la géométrie dynamique. Dans ce travail nous avons proposé une situation centrée sur une technique ayant permis de faire émerger l'idée de rapprocher sans cesse et autant que l'on veut deux objets géométriques, rapprochement que nous avons qualifié de rapprochement inépuisable. La technique géométrique est centrée sur la coordination des fonctionnalités déplacement et zoom de l'environnement GéoGebra. Notre hypothèse a été qu'une telle technique doit permettre aux lycéens de percevoir la droite tangente comme étant une position limite dans l'environnement de géométrie dynamique. La conversion de cette technique géométrique en une technique analytique permet de décrire la tangente comme étant une position limite et d'en produire une équation algébrique.

Les productions d'un lycéen, observées dans le cadre d'un *teaching experiment* dans lequel nous avons joué le double rôle de l'enseignant et du chercheur, nous a permis d'émettre les premières hypothèses. D'une part, la coordination des fonctionnalités déplacement et zoom avec la géométrie dynamique semble avoir un potentiel élevé pour la construction d'une vision dynamique de la notion de tangente dans le cadre géométrique. Cette vision, accessible au lycéen, a également un potentiel élevé pour faire en sorte qu'il perçoive la droite tangente comme une position limite. D'autre part, les connaissances opératoires et prédicatives construites en situation à partir de la technique géométrique mise en œuvre, nous permettent d'envisager que cette vision dynamique de la limite est transférable au-delà de la géométrie, dans le cadre analytique, permettant de donner du sens à la définition de la tangente à une courbe à partir de son équation.

Références

Balhan, K., Krysinska, M., & Schneider-Gilot, M. (2015). Quelle définition du concept de tangente ? Pour quelles raisons ? *Repères: Revue des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, 101*. https://orbi.uliege.be/handle/2268/178081

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions et obstacles*. [Thèse de doctorat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble].

Dufour, S. (2019). *Des processus de compréhension sous l'angle des représentations: Un Teaching Experiment autour de la dérivée*. [Thèse de doctorat non publiée, Université du Québec à Montréal].

Schneider, M. (1992). A propos de l'apprentissage du taux de variation instantane (On Learning the Rate of Instantaneous Change). *Educational Studies in Mathematics, 23*(4), 317-350.

Steffe, L. P., Thompson, P. W. (2000) Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Erlbaum.

Vergnaud, G. (2001). *Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance*. [Conférence publiée dans les Actes du Colloque GDM-2001]

Vivier, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, volume 15*. 173-199.

Titre: Une approche expérimentale des fonctions numériques avec le logiciel de la géométrie dynamique Geogerba au Niger

Auteurs: NOUHOU Abdoul Massalabi et LECORRE Thomas

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 622 - 635

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Une approche expérimentale des fonctions numériques avec le logiciel de la géométrie dynamique Geogerba au Niger

NOUHOU[1] Abdoul Massalabi – LECORRE[2] Thomas

Résumé – Cette contribution se situe dans le cadre de l'étude de l'usage d'un logiciel de la géométrie dynamique pour l'apprentissage des mathématiques au lycée. Les analyses se focalisent sur les stratégies mobilisées au cours de résolutions des problèmes sur les fonctions numériques et les difficultés rencontrées par les élèves. Les résultats montrent que l'utilisation de GeoGebra a provoqué une diversification des stratégies en termes des registres de représentation des fonctions numériques à une variable réelle.

Mots clé : Fonctions, représentations sémiotique, GeoGebra, résolution de problèmes, lycée.

Abstract – This contribution is within the study of the use of dynamic geometry software for learning mathematics in the higher secondary school. The analyzes focus on the strategies used in the problems solving on numerical functions and the difficulties encountered by the students. The results show that the use of GeoGebra in learning process causes a diversification of strategies in terms of semiotic registers of numerical functions.

Keywords: Functions, semiotic representations, GeoGebra, problems solving, higher secondary school.

1. Université Djibo Hamani de Tahoua, Niger, nouhou.abdoulmassalabi@udh.edu.ne

2. CY Cergy Paris Université, France, thomas.lecorre@cyu.fr

Introduction et problématique

L'étude des fonctions numériques est centrale dans les programmes d'enseignement de mathématiques au lycée (Nachit et al., 2012), plus particulièrement au Niger. La maîtrise du concept des fonctions et des notions connexes est décisive pour effectuer des études supérieures dans les domaines des mathématiques, de l'ingénierie et des sciences (Oehrtman et al., 2008). Le programme de mathématique du lycée au Niger vise l'étude des fonctions numériques tout au long de ce cycle (MES, 2015). Le concept de fonction est introduit en seconde à partir de l'étude des fonctions élémentaires (fonctions affines par intervalles, fonctions carrées, fonctions cubiques etc.) et des propriétés générales des fonctions numériques. En première, ce sont les propriétés générales qui sont approfondies et l'étude des notions de comparaisons de deux fonctions, de limites et de continuité des fonctions de références, puis toutes ces notions sont consolidées en terminale avec des activités d'étude des fonctions de références. L'objectif de l'enseignement des fonctions numériques est d'amener les élèves à appréhender ce concept à travers les différents registres de représentation (Duval, 1993 ; 2006) : langue naturelle, algébrique, symbolique, numérique. Les recherches en didactiques de mathématiques ont montré que la plus part des élèves du lycée rencontrent malheureusement des difficultés avec l'apprentissage des fonctions (Artigue, 2009 ; Duffour, 2011 ; Duval, 2017 ; Hitt, 1998 ; Gagatsis & Monoyiou, 2013). Ces difficultés, comme le souligne Hitt (1998), sont dues aux obstacles extrinsèques de type didactique (les approches d'enseignement des fonctions au lycée) et aux obstacles intrinsèques au sens où les élèves éprouvent des difficultés à mobiliser de manière cohérente les différents registres de représentation des fonctions. Artigue (2009) souligne que la compréhension du concept de fonction n'est pas simple pour les élèves du lycée et les étudiants du début universitaire. Selon elle, les élèves du lycée éprouvent des difficultés à la fin du second cycle et même au début universitaire à détacher la fonction de ses représentations notamment les représentations algébriques qui sont les plus utilisées dans l'enseignement de la notion de fonction (Ibid., 2009, p. 24). Les élèves du lycée ont besoin de travailler sur les registres en les articulant de manière cohérente pour appréhender ce concept et plus tard travailler sur la fonction comme objet de l'analyse à l'université. Les recherches en didactique des mathématiques sur les registres de représentations des objets mathématiques ont montré que l'apprentissage des fonctions par les élèves du lycée se construit peu à peu par le travail sur les registres de représentations sémiotiques (Duval, 2006). Pour apprendre, les élèves ont besoin d'un enseignement leur permettant de mobiliser de manière cohérente les différents registres de représentation de la fonction numérique (Hitt, 1998). D'autres recherches (Bloch, 2005) proposent une approche par les conversions de registres. Elle souligne que de nombreuses tâches disponibles sur les registres de représentation de la fonction ne sont pas investies dans l'enseignement secondaire. L'utilisation des conversions de registres offre des possibilités de travailler sur des tâches non routinières. L'apprentissage des fonctions au lycée doit prendre en compte des tâches disponibles sur les registres qui ne figurent pas dans les tâches routinières, mobilisables pour élargir la place du travail mathématiques des élèves sur l'objet fonction. Cette approche suscite un intérêt pour les pratiques des enseignants en mettant en évidence l'importance de la mise en fonctionnement des

connaissances sur les traitements et les conversions entre registres de représentation des fonctions numériques dans un processus d'apprentissage. La nécessité et les raisons invoquées par ces différentes recherches, qui pourraient être classés comme théoriques et pratiques, sont à l'origine de notre intention d'analyser les stratégies de résolution de problème et les difficultés des élèves du lycée pour apprendre les fonctions numériques dans un environnent numérique particulier. L'objectif de cette recherche est d'étudier le travail des élèves du lycée sur les fonctions numériques dans un environnement dynamique d'apprentissage des mathématiques basé sur GeoGebra™. L'hypothèse est qu'il est possible, pour les élèves, de travailler sur les multiples représentations sémiotiques des fonctions en utilisant GeoGebraTM lors de processus de résolution de problème. La question qui guide cette recherche est : dans une classe ordinaire, l'utilisation de GeoGebra dans l'apprentissage des fonctions numériques au lycée provoque-t-elle une diversification des stratégies de résolution de tâches sur les fonctions numériques en termes de registres et quel rôle pour le professeur dans ce processus ?

Fonctions et régistres de représentation sémiotique

Évolution des représentations sémiotiques de la notion de fonction

Les premières utilisations de la dépendance de deux grandeurs remontent à l'époque des babyloniens (vers 1800 av. J. C.). Elle leur permettait d'exécuter des calculs difficiles comme la table de calcul du carré d'un nombre ou la table astronomique pour déterminer les jours (Kiem, 2011). Les traces des fonctions sont apparues en Inde antique. À cette époque, la relation de dépendance entre deux grandeurs permettait d'étudier la table de valeurs de cordes d'un cercle pour déterminer l'équivalent des tables de sinus. Les traces des fonctions sont ensuite apparues en Grèce antique (Gilbert & Schlomiuk, 2007). Les mathématiciens grecs, notamment les Pythagoriciens, utilisaient le tableau de valeurs pour rendre compte de la dépendance entre deux grandeurs afin de modéliser les phénomènes naturels ou de schématiser des lieux géométriques. En ces périodes de l'antiquité, chaque cas de dépendance entre deux quantités est défini par un tableau, ce qui marque aussi l'introduction de la représentation des tableaux de correspondance.

La civilisation musulmane (vers 800 après J. C.) a permis l'introduction du mot « algèbre » dans le langage mathématique, grâce aux travaux du mathématicien Al-Khwarizmi (780-850). L'algèbre désignait l'étude des opérations mathématiques ainsi que la résolution des équations de type $ax^2 = bx + c$. Les résolutions d'Al-Khwarizmi sont exprimées par des phrases qui peuvent se traduire dans le langage moderne de l'algèbre par des expressions canoniques telles que $x^2 + ax = (x + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$. Ces travaux ont marqué la naissance de l'algèbre moderne et de l'expression algébrique sous forme de phrases, puis sous formes des lettres, de chiffres et de symboles. C'est au Moyen Âge, que les mathématiciens européens ont fait émerger la relation de dépendance entre deux quantités variables explicites définies sous la forme d'une description verbale ou graphique (Tran Kiem, 2012). La relation de dépendance

définie a alors permis d'étudier et d'analyser des phénomènes physiques par le calcul de dépendance entre deux quantités. Cette période a permis le développement du savoir sur les quantités variables explicites pour modéliser des problèmes. À la fin du Moyen Âge, chaque cas concret de dépendance entre deux grandeurs est défini par une description verbale ou par un graphe. C'est le début de l'introduction des représentations graphiques, en plus des tableaux de correspondances et des expressions langagières.

Mais il a fallu attendre les travaux des mathématiciens européens du 16e et de la fin du 17e siècle, pour qu'il y ait introduction de l'algèbre moderne par Viète (1540 – 1603) et de la géométrie analytique par Descartes (1596 – 1650). Cela a permis d'étudier des mouvements et des phénomènes physiques par la coordination des différents modes de représentations : courbe, tableau de correspondance, formule algébrique et expression analytique. En introduisant la géométrie cartésienne, Descartes a donné également les perspectives pour l'utilisation du cadre numérique en géométrie. Le terme « fonction » a été introduit explicitement par Leibniz (1646 – 1716) pour représenter une relation entre variables (Kiem, 2011). Les travaux des mathématiciens du 19e siècle à nos jours ont permis d'introduire des expressions algébriques et la théorie des fonctions La fonction est alors représentée sur toutes les formes que nous connaissons aujourd'hui.

L'élaboration progressive du concept de fonction s'est donc réalisée avec le développement progressif et complexe des registres de représentation sémiotique associés.

GeoGebra : un environnement à multiples représentations sémiotiques

GeoGebra est un logiciel qui permet de travailler sur les multiples représentations sémiotiques de l'objet fonction. Il peut être utilisé comme un environnement d'exploration active des fonctions à l'aide de représentations multiples (Freiman et al., 2009). Geogebra peut également être un moyen de visualisation multi référentielle de l'objet mathématique, permettant ainsi d'établir des liens entre les multiples représentations sémiotiques de la fonction (Ibid, p. 45). La ligne de saisie permet d'écrire les expressions algébriques et symboliques d'une fonction. La fenêtre algébrique permet de faire apparaître des écritures algébriques, numériques ou formelles. La fenêtre de géométrie dynamique permet de faire apparaître la représentation graphique de la fonction (la courbe et le graphe). La fenêtre de calcul formel permet de saisir des expressions symboliques de la fonction et d'effectuer les calculs usuels de l'analyse fonctionnelle (résolution d'une équation ou inéquation, calcul des limites, calcul de la dérivée, calcul d'intégrales etc.). La fenêtre du tableur permet de saisir des nombres, des coordonnées, des fonctions ou des commandes et d'établir un tableau de correspondance ($x\,;\,y$).

Éléments théoriques du cadre de l'étude

Aspects sémiotiques dans l'activité mathématique

Dans le cadre général de la sémiotique, Duval (1993) s'intéresse à la sémiotique dans l'activité mathématique et au fonctionnement cognitif de la pensée mathématique. Il souligne ainsi *le paradoxe cognitif de la pensée mathématique* qui tient au fait que les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles par la perception, mais seulement à travers des représentants et que, seule la distinction entre un objet mathématique et sa représentation peut garantir son appréhension qui ne peut être que conceptuel (Yavuz, 2005, p. 12). Il introduit ainsi les notions de *sémiosis* et de *noésis* pour désigner respectivement l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique et l'appréhension conceptuelle d'un objet mathématique. Il affirme que « la noésis est inséparable de la sémiosis » pour favoriser un apprentissage. Pour Duval (2017), il n'y a pas de noèse sans sémiosis c'est-à-dire il n'y a pas de pensée mathématique sans transformation des représentations sémiotiques quelles qu'elles soient (Duval, 2017). Il souligne que l'enseignement mathématique doit être organisé de façon à prendre en compte la forte liaison entre sémiosis et noésis.

Ainsi Duval (1993) propose de placer les élèves dans des conditions qui permettent cette prise de conscience plus globale, et pour cela, de leur proposer des tâches spécifiques. Il propose ainsi trois types de tâches :

- *Des tâches de variations comparatives relatives à la signifiance des représentations* : ces tâches concernent l'appréhension des représentations sémiotiques. En faisant varier systématiquement les représentations, on change le contenu représenté : le choix, parmi plusieurs représentations possibles dans le registre d'arrivée, de celle qui correspond à la représentation modifiée dans le registre de départ permet ainsi d'identifier les variations des unités signifiantes dans chaque registre de représentation.

- *Des tâches de couplage et de découplage entre des traitements non-sémiotiques comme des représentations visuelles constructibles instrumentalement (la figure géométrique par exemple) et des traitements sémiotiques* : elles concernent l'apprentissage des traitements propres à une certaine catégorie de registres. Duval précise que l'enseignement des mathématiques fait une grande place à l'apprentissage des traitements de registres seulement dans le cas où les traitements sont de type calcul, mais beaucoup moins à ceux où les traitements ne sont pas de type calcul.

- *Des tâches de double production pour les représentations sémiotiques complexes* : elles concernent le mode de production des représentations complexes. Duval appelle représentation complexe toute représentation qui « expose une démarche », comme un calcul comprenant plusieurs étapes. Il est essentiel, selon toujours Duval, lorsque ces productions soient faites dans un registre où l'organisation est linéaire, de demander préalablement une production dans un registre où l'organisation n'est

pas linéaire (graphe, schéma…) et demander ensuite la production dans le registre à organisation linéaire comme une description de la première production. Ces tâches de double production se révèlent décisives pour l'apprentissage des élèves.

Dans la perspective de l'analyse d'une situation d'apprentissage des fonctions numériques au lycée, la sémiotique nous permettra d'analyser les stratégies de traitement et de conversion des registres *utilisés dans le processus d'acquissions des connaissances*.

L'approche des fonctions et les registres de représentation sémiotique

La conceptualisation de la fonction par les élèves passe par trois stades : la formation des représentations de la fonction dans différents registres, le traitement de ces représentations dans chaque registre et la conversion entre ces représentations d'un registre à un autre (Duval, 2002). Les fonctions usuelles peuvent ainsi acquérir dans ce processus le statut d'objet puis peu à peu d'objet abstrait ou concept de fonction (Anderson, 2015).

Prenons par exemple, la fonction numérique de la variable réelle $f(x)$ = x2 = 2x-1. Elle a plusieurs représentations, issues de différents systèmes sémiotiques : le type f polynômiale, la courbe de la fonction f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, la courbe parabolique de la fonction f, le tableau de correspondance des couples de réels $(x;f(x))$. Selon Coppé, Dorier et Yavuz (2007) six principaux registres sont susceptibles d'intervenir dans l'étude d'une fonction numérique : le registre de la langue naturelle (Rl), le registre algébrique des formules (Ra), le registre graphique de courbes (Rg), le registre numérique des tableaux de valeurs (Rn), le registre graphique des tableaux de variation (Rtv) et le registre symbolique intrinsèque (Rs). Le traitement d'une représentation s'effectue en lien avec des règles de traitement propres au registre. Il est interne à chaque registre. Les traitements spécifiques aux registres de représentation des fonctions numériques au lycée sont : définition d'une fonction, d'une notion connexe ou une propriété d'une fonction par une formulation verbale (Tl), calcul algébrique (Ta), calcul numérique (Tn), résolution algébrique d'équations (Ta), résolution graphique d'équation (Tg), construction du graphe (Tg), lecture de graphes (Tg) pour ne citer que ceux-là. Chacun des registres de représentation de la fonction numérique à une variable réelle n'explicite pas les mêmes aspects de l'objet (Pavlopoulou, 1993 p. 68). Les différentes représentations sémiotiques de la fonction ne sont pas évoquées pour l'objet fonction ou pour communiquer, elles sont évoquées pour faire des traitements c'est-à-dire des calculs, des raisonnements, etc. Autrement dit, les représentations sémiotiques de la fonction ne sont importantes que dans la mesure où elles peuvent être transformées en d'autres représentations. La conversion des registres est une transformation externe d'un registre à un autre registre. Par exemple, le passage de l'expression $f(x)$=0 (Ra) aux valeurs de correspondance sur le tableau de valeur de $f(x;0)$ (Rn) ou sur la courbe de f au point $A(x;0)$ à appartenant à la courbe de la fonction f (Rg) permet de définir deux types de conversion distinctes, que l'on peut respectivement noter par Can et Cag. Dans un environnement numérique, il est nécessaire de prendre en compte de la présentation de l'objet mathématique telle qu'elle se présente sur l'outil

(Hitt, 2006). Les traitements et les conversions entre registres de la fonction numérique à variable réelle à l'aide de GeoGebra impliquent la prise en compte des représentations de l'objet fonction telles qu'elles se présentent sur l'outil.

Le point fondamental de l'activité mathématique sur la fonction n'est pas l'utilisation nécessaire des différentes représentations sémiotiques mais la capacité de faire la conversion. L'apprentissage du concept de fonction au lycée implique une articulation cohérente des différents registres de représentation sémiotique entrant en jeu dans la résolution d'un problème lié à ce concept (Hitt, 1998).

Éléments méthodologiques

Le contexte de l'expérimentation

L'expérimentation s'est déroulée dans un fonctionnement régulier de l'enseignement des fonctions numériques à une variable réelle au lycée avec toutes les interférences que l'utilisation de GeoGebra peut entrainer dans le système éducatif du Niger.

- Les séances pré-expérimentales, réalisées au cours de l'année scolaire 2016-2017, ont permis de tisser une relation professionnelle étroite et un sentiment de confiance entre le chercheur et les deux enseignants et ont permis le contrôle de certains biais.

- Les séances expérimentales ont été réalisées au cours de l'année scolaire 2017-2018. Deux classes ordinaires de première (élèves de 17 à 18 ans) tenues par ces deux enseignants ont été choisies. L'enseignant 1 (Ens1) est intervenu dans une classe de mathématiques de première de 45 élèves alors que l'enseignant 2 (Ens2) dans une classe de mathématiques de première de 31 élèves.

- Des observations vidéographiques ont été réalisées à l'aide de trois caméras : la première fixée en fond de classe, la deuxième fixée devant et la troisième fixée sur un groupe d'élève. Le nombre d'élèves par groupe de travail varie entre 4 et 6.

Présentation des problèmes

Le problème 1 a été choisi par les professeurs selon le programme en vigueur. Cela entre dans le cadre du choix d'une expérimentation classe ordinaire de mathématiques pour l'introduction de la notion de comparaison de deux fonctions du chapitre intitulé « les généralités sur les fonctions numériques ». Selon le programme de mathématiques, l'objectif était de « comparer deux fonctions (algébriquement et graphiquement) ». Le problème 2, a été proposé aux élèves par l'enseignant lors de l'introduction de la notion de limite de fonction en un point du chapitre « limites et continuité ». Toujours selon le programme, l'objectif était d'« établir le comportement des fonctions de références ».

Problème 1 : On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$. C_f et C_g sont les courbes représentatives de f et g.

a) Représenter graphiquement les fonctions f et g à l'aide du logiciel GeoGebra.

b) Compléter à l'aide de GeoGebra le tableau des valeurs suivant.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							

c) Identifier dans le tableau les points où f et g sont égales.

d) Comparer graphiquement les fonctions f et g sur l'intervalle [-3 ; 3].

e) Déterminer les points d'intersection de C_f et C_g avec l'axe des abscisses.

Problème 2 :

1. Compléter le tableau ci-dessous. On donnera les résultats sous forme d'une puissance de 10.

x	-1000	-100	-10		10	100	1000
x^2							
x^3							
$\sqrt{x}$							
$\frac{1}{x}$							
$\frac{1}{x^2}$							

2. a. Que devient x^2 lorsque x devient indéfiniment grand ?
   b. Lorsque x devient « indéfiniment grand », on convient de dire que x tend vers $+\infty$. Remplacer alors les pointillés par $+\infty$.
   Lorsque x tend vers ..... ; x^2 tend vers .....

3. Remplacer alors les pointillés par $+\infty$, $-\infty$ ou 0.
   a. Lorsque x tend vers $+\infty$; x^3 tend vers .....
   b. Lorsque x tend vers $+\infty$; $\sqrt{x}$ tend vers .....
   c. Lorsque x tend vers $+\infty$; $\frac{1}{x}$ tend vers .....
   d. Lorsque x tend vers $+\infty$; $\frac{1}{x^2}$ tend vers .....
   e. Lorsque x tend vers $-\infty$; x^2 tend vers .....
   f. Lorsque x tend vers $-\infty$; x^3 tend vers .....
   g. Lorsque x tend vers $-\infty$; $\frac{1}{x}$ tend vers .....
   h. Lorsque x tend vers $-\infty$; $\frac{1}{x^2}$ tend vers .....

Une analyse a priori de ces problèmes nous a permis de faire le diagnostic des registres de représentation des fonctions numériques disponibles avec GeoGebra, les traitements et les conversions possibles à mobiliser au cours du processus de résolution du problème.

Analyse des résultats

Les stratégies en termes de registres mobilisées par les élèves

Dans le tableau 3, nous avons résumé les stratégies mobilisées par les élèves au sein des groupes de travail pour résoudre les tâches proposées par l'enseignant.

Tableau 3 – Synthèse du problème 1

Numéro de la question (registres concernés)	Stratégies de résolution	Stratégies mobilisées
Question a (Ra)	Cag, Ta7	Stratégie algébrique : Cag, Ta7
Question b (Ra et Rg)	Stratégie 1 : Can, Ta7 Stratégie 2 : Cgn, Tg10	Stratégie algébrique : Can, Ta7
Question c (Rn et Rg)	Stratégie 1 : Csn, Ts5 Stratégie 2 : Cna, Tn1 Stratégie 3 : Cga, Tg1	Stratégie numérique : Cna, Tn1 Stratégie graphique : Cga, Tg1
Question d (Rg et Rn)	Stratégie 1 : Cla, Tl4 Stratégie 2 : Cgl, Tg6 Stratégie 3 : Cnl, Tn1 Stratégie 4 : Cng, Tn1	Stratégie graphique : Cgl, Tg6
Question e (Rg, Ra et Rn)	Stratégie 1 : Csn, Ts5 Stratégie 2 : Cgn, Tg1 Stratégie 3 : Cng, Tn1 Stratégie 4 : Cga, Tg1 Stratégie 5 : Cag, Ta2 Stratégie 6 : Can, Ta2	Stratégie graphique : Cgn, Tg1

Pour répondre la question a), les élèves ont mobilisé la stratégie Cag, Ta7. L'outil de ***saisi*** a facilité pour les élèves l'écriture des formules algébriques et l'outil graphe la lecture des deux graphes de manière distincte. L'enseignant a vérifié que le processus de traitement de la formule algébrique en algorithme par les élèves était approprié ; ils sont parvenus à saisir les formules sur l'outil de GeoGebra. Il a aidé les élèves en difficultés à faire ce traitement.

Pour répondre à la question b), les élèves ont procédé à l'utilisation de la stratégie 1. L'outil de saisi a facilité le calcul de chaque image par les élèves et l'outil ***algèbre*** a permis la lecture de la valeur de l'image obtenue. L'enseignant n'a pas réorienté l'activité des élèves vers la stratégie 2, utilisant le ***tableur***, mais il a aidé les élèves en difficulté à effectuer le calcul algébrique.

Pour répondre à la question c), les élèves ont utilisé une stratégie numérique (stratégie 4). Mais ils se sont heurtés à des difficultés de conversion algébrique sans passer par le graphique. L'outil Graphe a facilité ce passage du numérique au graphique. Même si l'énoncé à explicitement demandé l'introduction numérique, c'est l'enseignant est intervenu pour guider les élèves vers cette stratégie.

Pour répondre à la question d), les élèves ont procédé à l'utilisation de la Stratégie 2 (Cgl, Tg6). Le traitement graphique par ***zoom*** a été d'un grand apport. Il a ainsi permis aux élèves de bien repérer l'intervalle d'étude de cette comparaison graphique. L'enseignant est particulièrement intervenu pour compléter le travail des élèves à l'aide de la stratégie 1 (Cla, Tl4).

Pour répondre à la question e), les élèves n'ont pas tous procédé avec la même stratégie. Certains ont adapté la stratégie (Can, Ta2) et d'autres la stratégie 6 (Cga, Tg1). Les élèves ayant choisi la résolution algébrique de l'équation y sont parvenus sans aide de l'enseignant. L'outil algèbre leur a été utile pour le calcul. Par contre ceux ayant choisi la résolution graphique ont bénéficié de l'aide de l'enseignant, notamment pour placer le point à partir de l'outil ***intersection***.

Tableau 4 - Synthèse du problème 2

Numéro de la question (registre concernés)	Stratégies de résolution	Stratégies mobilisées
Question 1 (Ra et Rg)	Stratégie 1 : Can, Tn3 Stratégie 1 :Cgn, Tn1	Stratégie algébrique
Question 2a (Rn, Ra, Rg et Rl)	Stratégie 1 : Cnl, Tn2 Stratégie 2 : Cal, Ta2 Stratégie 3 : Cgl, Tg9	Stratégie numérique
Question 2b (Rl, Rn, Rg et Ra)	Stratégie 1 : Cls, Tl3 Stratégie 2 : Cgl, Tg9	Stratégie langagière
Question 3 (Rl, Rn, Ra, Rg et Rs)	Stratégie 1 : Cls, Tl3 Stratégie 2 : Cls, Tle4 Stratégie 3 : Cgl, Tg9	Stratégie langagière Stratégie graphique

Dans le tableau 4, nous avons résumé les stratégies mobilisées par les élèves au sein des groupes de travail pour résoudre les tâches proposées par l'enseignant.

Pour répondre la question 1., les élèves ont mobilisé la stratégie algébrique (Can, Tn3)**.** Les élèves ont débuté à chaque fois par la saisie de la fonction de référence puis ont procédé au calcul des images directes à l'aide de l'outil *algèbre* avant d'établir le tableau de correspondances. Pour les fonctions de références x^2 et x^3, les élèves n'ont pas eu de difficultés à se rappeler les expressions algébriques en algorithme approprié pour GeoGebra. Par contre pour saisir de manière appropriée les fonctions de références . $\sqrt{x}$; $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ dans la barre de saisie de GeoGebra, il a fallu l'intervention de l'enseignant. Pour calculer les images directes et remplir le tableau de correspondance, les élèves n'ont pas éprouvé beaucoup de difficultés. Pour répondre la question 2.a, les élèves ont mobilisé la stratégie numérique (Stratégie 1 : Cnl, Tn2). À partir du tableau de valeurs x^2, ils sont parvenus à interpréter la tendance des valeurs de x lorsque les valeurs devient infiniment grand c'est-à-dire « *lorsque* x *devient infiniment grand,* x^2 *devient infiniment grand* **».** Pour répondre la question 2.b, les élèves ont mobilisé la formulation verbale des tendances des valeurs (Cls, Tl3). Sans beaucoup de difficultés, ils sont parvenus à interpréter en langue pour déduire le signe « $+\infty$ » qui convient pour une expression langagière convenable en mathématiques. Pour répondre à la question 3., les élèves ont mobilisé la formulation verbale des tendances des valeurs (Cls, Tl3). Ils ont établi une correspondance en interprétation verbale (et écrite) vers une expression langagière convenable en mathématiques et déduire le signe qui convient. Les élèves ont eu recours à la stratégie graphique lorsqu'ils ont rencontré des difficultés d'interprétation plutôt que de faire appel à l'aide de l'enseignant.

Au cours du processus de résolution de ces deux problèmes, l'enseignant a aidé les élèves en difficultés à saisir des fonctions $f(x)=x^2$ et $g(x)=x^3$ sur GeoGebra. Pour réaliser les tâches de transformation d'expressions algébriques de f et g en $f(x)=x$^2 et $g(x)=x$^3, ils eu du mal à réconcilier leurs représentations des fonctions numériques et les représentations telles qu'elles doivent se présenter sur GeoGebra. Des interventions similaires par l'enseignant ont été observées lors de l'introduction des fonctions $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ nécessitant des transformations algébriques en *sqrt(x)* ,1/(x) et 1/(x^2) adaptées à l'outil GeoGebra. L'enseignant a joué donc un rôle pour l'introduction des registres relatifs à la fonction numérique qui ne sont pas familiers aux élèves. L'intervention de l'enseignant a permis aux élèves de surmonter les difficultés liées aux calculs des images à partir des expressions algébriques des fonctions sur l'outil algèbre de GeoGebra, à la détermination des coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives de f et g sur la fenêtre graphique en utilisant les outils appropriés. L'utilisation de l'outil zoom, pour visualiser les graphes de fonctions et émettre des conjectures, n'a pas été possible sans l'aide de l'enseignant. L'enseignant a joué un rôle pour l'utilisation de certains registres de représentations de la fonction par les élèves sur GeoGebra.

Ces différentes interventions de l'enseignant mettent en évidence les difficultés des élèves dans le contrôle des tâches d'introduction ou de mobilisation des registres de représentations des fonctions numériques à une variable réelle, étudiées dans l'environnement GeoGebra.

Conclusion

Au regard du cadre théorique de cette recherche, l'utilisation des outils de GeoGebra pour l'apprentissage des fonctions numérique au lycée a provoqué une diversification des stratégies de résolution des tâches en termes de registres (Duval, 2006). Il ressort des résultats que plusieurs registres de représentations des fonctions numériques sont concernés par le processus de résolution de problème avec GeoGebra. Il ressort également que l'utilisation de cet outil numérique a provoqué une évolution dans la diversification des stratégies mobilisables. La comparaison entre les stratégies de résolution possibles et les stratégies effectivement mobilisées révèle que les élèves ont eu des difficultés à mobiliser tout le potentiel de GeoGebra tel qu'a été identifié à priori. Les élèves ont éprouvé des difficultés à prendre le contrôle les modes d'expression qui sont externes au système de représentation sémiotique classique des fonctions numériques au lycée (Artigue, 2002). Il ressort des résultats que le rôle du professeur a plutôt consisté à aider les élèves à réconcilier leurs représentations des fonctions numériques et les représentations telles qu'elles se présentent sur GeoGebra que d'aider les élèves à progresser dans leur apprentissage. L'utilisation de GeoGebra pour l'apprentissage des fonctions numériques au lycée nécessite de la part des élèves le besoin a priori de contrôler certaines tâches, en particulier des tâches plus complexes. Suite à ces résultats une autre étude a été menée qui prend en compte a priori le contrôle de l'utilisation de GeoGebra.

Références

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment : The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274.

Artigue, M. (2009). L'enseignement des fonctions à la transition lycée–université. *Actes du XV^e Colloque CORFEM, 2008*, 25-44.

Bloch, I. (2005). Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Educação Matemática Pesquisa, 7*(1), 31-62.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXII^e colloque COPIRELEM*, 67-89.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing, 1st ed. 2017

Freiman, V., Martinovic, D., & Karadag, Z. (2009). Decouvrir le potentiel´educatif du logiciel dynamique GeoGebra : Communaute de collaboration et de partage. *Bulletin AMQ Association Mathematique du Quebec, 49*(4), 34-49.

Gagatsis, A., & Monoyiou, A. (2013). Les stratégies des futurs instituteurs dans la résolution de tâches sur les fonctions. Approche ponctuelle ou approche coordonnée ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 18*, 115-137.

Gilbert, H., & Schlomiuk, N. H. (2007). *Sur les propriétés des fonctions réelles arbitraires de variable réelle : Une approche historique*. Rapport de l'Université de Montréal CRM 32-45

Hitt, F. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. In *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 6*(1), 7-26.

Hitt, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of limit. In *Annales de didactique et de sciences cognitives, 11*, 253-268.

Kiem, M. T. (2011). *Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel : Situations d'apprentissage et genèse instrumentale des élèves*. [Thèse de Doctorat, Université Paris VII]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00658680

Nachit, B., Namir, A., Bahra, M., Kasour, R., & Talbi, M. (2012). *Une approche 3D du concept de fonction d'une variable réelle. MathémaTICE, 32, article 447*.

Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. W. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics education, 27*, 42. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Pavlopoulou, K. (1993). Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. In *Annales de didactique et de Sciences cognitives, 5*, 67-93.

Tran Kiem, M. (2012). Une approche expérimentale des fonctions au lycée avec le logiciel Casyopée. *Petit x*, 88, 49-74.

Trouche, L. (2004). Environnements Informatisés et Mathématiques: Quels usages pour quels apprentissages ? *Educational Studies in Mathematics, 55*(1), 181-197.

Yavuz, I. (2005). *Evolutions récentes de l'enseignement de la notion de fonction en France en classe de seconde. Utilisation des tableaux de valeurs et de variations*. [Thèse de doctorat, Université Lumière-Lyon II].

Titre: Bilan des Groupes de travail 7 et 8

Auteurs: SOURY-LAVERGNE Sophie, ANAGO Didier et EMPRIN Fabien

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 636 - 645

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Bilan des Groupes de travail nº 7 et nº 8

Responsables GT7
SAWADOGO[1] Timbila (responsable 1) - DAINA[2] Audrey (responsable 2)
HAYFA[3] Nina (responsable 3)
Correspondant CS
IDRISSI[4] Abdellah

Responsables GT8
SOURY-LAVERGNE[5] Sophie (responsable 1) – ANAGO[6] Didier (responsable 2)
EMPRIN[7] Fabien (responsable 3)
Correspondante CS
ABBOUD[8] Maha

Cadrage initial de l'appel à contributions du GT8

Le groupe de travail n°8 avait lancé son appel à contribution en mettant l'accent sur l'évolution des recherches sur les Technologies numériques pour l'apprentissage, l'enseignement et la formation sous l'influence de plusieurs facteurs. En effet, alors que les études pionnières adoptaient plutôt comme point d'entrée les logiciels eux-mêmes, les études plus récentes semblent tenir compte à la fois des domaines mathématiques, des processus de conception des logiciels, des besoins des enseignants, des spécificités des contextes institutionnels nationaux ou locaux et de l'articulation des technologies numériques avec d'autres types de ressources matérielles (Soury-Lavergne, 2021). Le GT8 a donc délimité un certain nombre de points qu'il souhaitait voir abordés à travers les travaux retenus.

La dépendance de la technologie aux tâches mathématiques

L'impact des technologies pour l'apprentissage est dépendant des tâches mathématiques proposées (Leung & Bolite-Frant 2013). Certains chercheurs mettent d'ailleurs l'accent sur de la conception

1. École Normale Supérieure, Burkina Faso, sawtimbs@yahoo.fr
2. Haute école pédagogique de Vaud, Suisse, audrey.daina@hepl.ch
3. Université de Liban, Liban, ninhay@yahoo.fr
4. ENS, UCA, Marrakech, Maroc, abdellah_elidrissi@yahoo.fr
5. S2HEP Lyon 1 et Université Grenoble Alpes, France, sophie.soury-lavergne@univ-grenoble-alpes.fr
6. École Polytechnique IMHOTEP, Benin, d_anago@yahoo.com
7. Université de Reims Champagne Ardennes, France, fabien.emprin@univ-reims.fr
8. CY Cergy Paris Université, France, maha.abboud-blanchard@u-cergy.fr

des tâches avec les technologies comme approche prometteuse pour enrichir l'apprentissage des mathématiques (Komatsu & Jones, 2019). Cela amène à analyser les technologies numériques à l'échelle de la situation d'apprentissage et à engager l'ensemble des acteurs à la fois dans le processus de conception des logiciels, mais aussi dans les scénarios d'enseignement-apprentissage autour d'une notion mathématique spécifique (Venant *et al.*, 2018).

La nécessaire prise en compte du contexte de la recherche

Quand on s'intéresse à des recherches didactiques à propos d'environnements numériques, la prise en compte des contextes dans lesquels une recherche est réalisée est une condition nécessaire pour assurer une validité des résultats obtenus (Lagrange, 2013). Le colloque EMF est une opportunité pour considérer des contextes recherche très variés dans le monde francophone, que ce soit du point de vue des mathématiques en jeu, des pratiques enseignantes des traditions de recherche et d'enseignement des pays, des conditions institutionnelles, et bien évidemment du point de vue des organisations pédagogiques considérées et de l'accès aux équipements informatiques et aux ressources.

Le focus sur les pratiques enseignantes

Années après années, la question des pratiques enseignantes avec les technologies reste prégnante. Comprendre les pratiques enseignantes (Abboud & Rogalski, 2018), analyser les connaissances et les savoirs qu'ils mobilisent ou dont ils ont besoin, les ressources qu'ils utilisent (Gueudet et Trouche, 2010) s'avère un challenge important pour comprendre la place des technologies dans l'enseignement. Certains matériels sont maintenant présents dans de nombreuses classes comme les tableaux numériques et les tablettes alors même que leur impact sur les pratiques n'est pas nécessairement à la hauteur des attentes (Soury-Lavergne, 2020). Cette relation matériel – pratique a pris une nouvelle importance à l'occasion de la crise sanitaire liée à la Covid 19 quand les systèmes éducatifs ont eu à développer, dans l'urgence, de nouvelles stratégies d'enseignement dans lesquelles l'enseignement à distance a pris une place importante (McDougall, 2020 ; Bonnéry, 2020).

La formation et le développement professionnel des enseignants

La question des pratiques enseignantes pose aussi celle des pratiques de formation et du développement professionnel des enseignants. Le groupe de travail a souhaité les aborder pour avancer sur la compréhension des contextes spécifiques à la formation, des ressources, logiciels, matériels et dispositifs de formation en présence ou à distance. L'identification de savoir spécifiques à la formation serait une avancée (Emprin, 2019) et pose aussi celle des cadres théoriques à mobiliser.

Dans l'appel à contribution du GT8, nous avions aussi évoqué l'intérêt qu'il y aurait à traiter de thèmes particuliers, comme celui de l'Intelligence Artificielle, avec les questions éthiques et métho-

dologiques associées, ou celui de l'accompagnement du handicap avec la technologie (Emprin & Petitfour, 2020). Mais ces deux thèmes n'ont pas été repris dans les contributions.

Les contributions retenues et le déroulement des travaux

Le GT8 a accepté six contributions venant de pays différents et abordant une variété de notions mathématiques et de technologies numériques. Deux présentations n'ont pas eu lieu car leurs auteurs n'ont pas pu se rendre présents au colloque. Ce sont donc quatre présentations qui ont été discutées (cf. annexe). Pendant le colloque, le groupe de travail n°8 s'est associé au groupe de travail n°7 consacré aux ressources pour rassembler dix-sept participants venant de huit pays : Bénin, Burkina-Faso, Cameroun, France, Marco, Niger, Tunisie et Suisse. Les six présentations retenues pour les deux groupes de travail ont pu être abondamment discutées.

Nous revenons ci-dessous sur quelques éléments issus du croisement des propos présentés et discutés.

Les niveaux scolaires, les mathématiques et les ressources et technologies traitées

Les technologies permettent de rassembler des travaux de recherche qui concernent des niveaux scolaires très étendus, avec des problématiques de conception ou d'analyse qui se recoupent d'un niveau à l'autre. Nous avons eu des présentations concernant l'école primaire, le collège, le lycée et l'enseignement supérieur.

Les savoirs mathématiques en jeu ont été explicites dans toutes les présentations, avec un retour à des problématiques d'apprentissage d'une notion mathématique donnée : les aires, le repérage spatial, les quadrilatères, les fonctions, la tangente à une courbe et les équations différentielles.

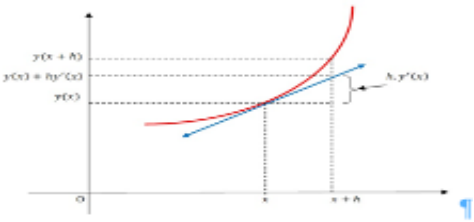


Figure 2– Illustration graphique de la méthode d'Euler

Figure 1 – Illustration graphique de la méthode d'Euler avec Mapple (Brinsi & Ben Nejma, 2022)

Enfin, les ressources et les environnements technologiques ont pu être au centre des présentations mais jamais sans associer précisément les tâches proposées aux élèves et des éléments d'analyse de ces tâches. Une seule technologie généraliste, Moodle, a été discutée, de façon minoritaire face aux technologies spécifiques aux mathématiques comme Maple, Matlab ou Geogebra (Figure 3) et un environnement conçu spécifiquement pour l'apprentissage du repérage spatial : Spageo City (Figure 2).



Figure 2 – Image écran de l'environnement Spaego City (Frauchiger et al., 2022)

Mais les ressources, dans ce groupe associé au GT7 ne se réduisent pas à la technologie. Nous avons aussi considéré comme ressource les manuels scolaires et les interactions entre les enseignants et les élèves.

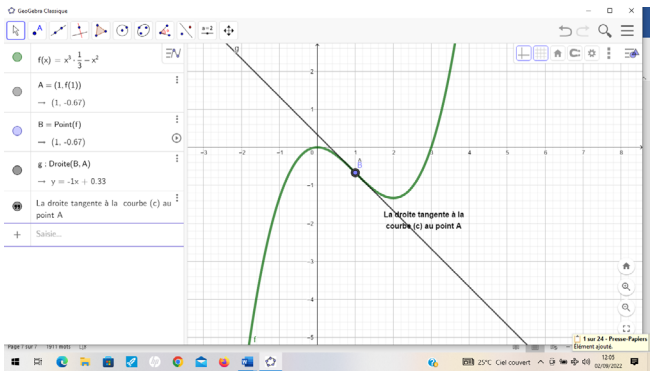


Figure 3 – La géométrie dynamique utilisée pour travailler le concept de tangence (Ngembou Nana, 2022)

Les problématiques abordées et les cadres théoriques mobilisés

Les problématiques abordées à travers les présentations des GT7 et GT8 reprennent bien les trois dimensions de l'appel à contribution à propos de l'apprentissage, l'enseignement et la formation.

Les quatre présentations du GT8 ont concerné l'apprentissage, chacune à un niveau scolaire différent : premier degré, second degré et université. Avec Spageocity, Frautiger et ses collègues ont conçu un nouvel environnement de type jeu pour l'apprentissage du repérage spatial (Figure 2), ce qui est assez rare pour être signalé. La discussion a porté sur la conception conjointe de l'environnement et des situations d'apprentissage et sur le rapport entre représentations mentales chez l'élève et représentations sémiotiques. Nguembou Nana a présenté une analyse des conceptions d'élèves de lycée au Cameroun relatives à la notion de tangence, en étudiant l'articulation entre cadre géométrique et cadre analytique avec la géométrie dynamique. Toujours pour les élèves de lycée, Abdoul et Thomas ont étudié le rôle des changements de registres sémiotiques (Duval, 2018) rendus possibles grâce à l'environnement de mathématique dynamique GeoGebra dans l'apprentissage des fonctions. Enfin, les pratiques des étudiants d'université relative à la méthode d'Euler pour résoudre des équations

différentielles ont été analysées par Brinsi & Ben Nejma du point de vue du rôle joué par un environnement hybride, faisant appel à Maple. Leur constat est que l'environnement agit comme un révélateur des conceptualisations erronées des étudiants.

Le point de vue de l'enseignement a été abordé par une présentation du GT7 relative aux ressources des enseignants (étude du cas d'un enseignant expert qui débute sur l'intégration de la géométrie dynamique avec des élèves de fin de primaire). Enfin, la question de la formation et du développement professionnel des enseignants a aussi été traité par une présentation du GT7, celle de El Idrissi, relative à l'usage de moodle pour la formation à distance.

Les cadres théoriques mobilisés dans les travaux sont largement partagés et issus de travaux et déjà anciens. Cependant, les questions des participants ont montré que la présentation et l'explicitation des concepts principaux mobilisés par ces cadres restaient nécessaires. Ce qui a été fait à plusieurs reprises pour les théories suivantes :

- La transposition informatique (Chevallard, 1991)
- Les registres sémiotiques, traitement et conversion de Duval (1995 ; 2018)
- Les champs conceptuels (Vergnaud, 1990)
- L'approche documentaire (Trouche et al., 2018) et les orchestrations (Drijvers et al., 2010)

De façon plus surprenante, aucun des travaux présentés n'a fait appel à l'approche instrumentale (Rabardel, 1995) et au concept de genèse instrumentale. Or c'est le cadre tout à fait adapté à l'analyse des difficultés résistantes dans les pratiques des élèves et des enseignants, difficultés clairement identifiées par les participants des deux groupes de travail.

Bilan synthétique et perspectives

Ce bilan, revient d'une façon synthétique sur les contraintes et les points de résistance identifiées dans les travaux du groupe de travail et propose quelques opportunités pour des travaux à venir.

Des contraintes pesant sur les travaux relatifs aux technologies sont apparues dans les discussions de façon récurrente, concernant à la fois les pratiques auxquelles il était fait référence et les analyses à conduire :

- nécessité d'une transposition des savoirs à prendre en compte pour concevoir les environnements et les situations, puis lors des analyses ;
- importance d'une initiation et d'un accompagnement des usages des élèves et des enseignants.

Des points de résistance dans les pratiques sur le terrain sont toujours d'actualité :

- le « coût » toujours important d'intégration des technologies dans les pratiques enseignantes rend nécessaire un fort investissement de la part de ces derniers et donc nécessite un accompagnement, pas toujours présent ;
- les processus de transposition des savoirs et des situations sont différents selon que l'on utilise ou pas la technologie, ce qui reste encore parfois mal pris en compte ;
- le constat d'une absence de situations d'apprentissage avec environnement technologique dans certains manuels scolaires, notamment les manuels officiels lorsqu'ils existent.

Mais nous souhaitons conclure sur les opportunités offertes par les technologies numériques qui ont été identifiées. L'introduction de ces technologies numériques permet :

- de concevoir et rendre utilisables par les élèves et les enseignants des situations inaccessibles sans la technologie, comme par exemple parcourir une ville inconnue avec une classe de 25 très jeunes élèves, ou bien se former à distance ou encore développer des techniques spécifiques pour un concept donné ;
- de faire fonctionner les connaissances mathématiques comme des outils de résolution de problème et pas seulement les présenter sous la forme d'énoncés déclaratifs ;
- de révéler le niveau de conceptualisation mathématique et de favoriser un travail qualitatif, orienté vers un objectif de compréhension articulé aux techniques et aux calculs ;
- de favoriser le développement professionnel des enseignants.

Ainsi, même si peu nombreuses, les communications présentées et discutées ont permis de donner un regard objectif et critique sur l'évolution des questions d'enseignement, d'apprentissage et de formation avec les technologies numériques, et de proposer des pistes de pour les recherches à venir.

Références

Abboud, M. & Rogalski, J. (2018). Concepts et méthodes pour analyser l'activité de l'enseignant utilisant des technologies. In J. Pilet & C. Vendeira (Eds.), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques*. ARDM, Paris

Bonnéry, S. (2020). L'école et la COVID-19. *La Pensée, 402*(2), 177-186.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique : Du savoir savant au savoir enseigné* (2d édition). La Pensée Sauvage.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*(2), 213-234.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. P. Lang.

Duval, R. (2018). La conversion des représentations : Un des processus fondamentaux de la pensée. In *Séminaire Du mot au concept. Conversion*, Grenoble (9-45). Presses Universitaire de Grenoble.

Emprin, F. (2019). *La question des savoirs dans la formation des enseignants aux mathématiques. De l'analyse des pratiques de formation à la simulation informatique en formation* [Note de synthèse pour l'HDR, Université de Reims Champagne Ardenne].

Emprin, F. & Petitfour, É. (2020). Using a Simulator to Help Students with Dyspraxia Learn Geometry. *Digital Experiences in Mathematics Education. 7* (1), 99-121.

Gueudet, G. & Trouche, L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In G. Gueudet & L. Trouche (Eds.) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes et INRP, 57-74.

Komatsu, K. & jones, K. (2019). Task design principles for heuristic refutation in dynamic geometry environments. *IJSME, 17*, 801-824

Lagrange, J.-B. (dir.). (2013). *Les technologies numériques pour l'enseignement. Usages, dispositifs et genèses*. Toulouse : Octares

Leung, A. & Bolite-Frant, J. (2015). Designing Mathematics Tasks: The Role of Tools. In A. Watson & M. Ohtani (Eds.), *Task Design In Mathematics Education* (pp. 191–225). Cham: Springer International Publishing.

McDougall, D. (2020). Construction des savoirs en ces temps de distanciation sociale. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1–4.

Rabardel, P. (1995). Les hommes & les technologies : Approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin.

Soury-Lavergne, S. (2020). La géométrie dynamique pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Paris : Cnesco.

Soury-Lavergne, S. (2021). Duos of Digital and Tangible Artefacts in Didactical Situations. *Digital Experiences in Mathematics Education, 7*(1), 1-21.

Trouche, L., Gueudet, G. & Pepin, B. (2018). Documentational Approach to Didactics. In S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of mathematics education*. Springer

Venant, F., Richard, P. R., Gagnon, M. & Henríquez Rivas, C. (2018). Enjeux sémiotiques dans la conception d'une aide à la résolution de problème de preuve. *Espace mathématique francophone 2018*, 33.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2.3), 133170.

Annexe

BRINSI L. & BEN NEJMA S.

La double transposition de la méthode d'Euler dans un environnement informatique et son impact sur les pratiques des étudiants à l'université

FRAUCHIGER T., MATRI S., COUTAT S. & DORIER J.-L.

Typologie de messages écrits pour communiquer un trajet dans une ville virtuelle

NGUEMBOU NANA G.

Rapprochement inépuisable en géométrie dynamique : étude de la conceptualisation de la notion de tangente comme position limite chez un lycéen au Cameroun

NOUHOU A. M. & LECORRE T.

Une approche expérimentale des fonctions numériques avec le logiciel de géométrie dynamique Geogebra au Niger

Titre: Résolution de problèmes déconnectés de partage inéquitable par des élèves français de fin de primaire et de début de secondaire et lien avec l'enseignement reçu

Auteurs: ALLARD Cécile, HOROKS Julie, JEANNOTTE Doris et PILET Julia

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 646 - 660

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Résolution de problèmes déconnectés de partage inéquitable par des élèves français de fin de primaire et de début de secondaire et lien avec l'enseignement reçu

ALLARD[1] Cécile – HOROKS[2] Julie – JEANNOTTE[3] Doris – PILET[4] Julia

Résumé – Cette communication contribue à étudier la nature des raisonnements mobilisés par les élèves français de fin de primaire et de début de collège pour résoudre des problèmes déconnectés de partage inéquitable reconnus pour développer la pensée algébrique avant l'introduction au symbolisme. Nous portons également un regard sémiotique sur les écrits des élèves en analysant les registres de représentation qu'ils utilisent. Nous mettons les résultats en perspective de leur niveau de classe et de l'enseignement qu'ils ont reçu.

Mots-clefs : Pensée algébrique, problèmes de partage inéquitable, problèmes déconnectés, schéma, registre de représentation sémiotique

Abstract – This paper contributes to study the nature of the reasoning mobilized by French students at the end of primary and beginning of secondary school to solve disconnected problems of inequitable sharing recognized to develop algebraic thinking before the introduction of symbolism. We also take a semiotic approach to the students' writing by analyzing the registers of representation they use. We put the results in perspective of their class level and the instruction they received.

Keywords: Algebraic thinking, inequitable sharing problems, disconnected problems, diagram, semiotic representation register

1. Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010, Creteil, France, cecile.allard@u-pec.fr

2. Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010, Creteil, France, julie.horoks@u-pec.fr

3. Université du Québec à Montréal, Canada, doris.jeannotte@uqam.ca

4. Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010, Creteil, France, julia.pilet@u-pec.fr

Introduction

Cette communication[5] contribue à établir des liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages des élèves autour de la résolution de problèmes de partage inéquitable déconnectés. Bednarz et Janvier (1996) ont étudié ces problèmes afin de déterminer ceux qui aideraient le passage à l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. Les problèmes de partage inéquitable déconnectés sont des problèmes où il est impossible de mettre en œuvre un raisonnement synthétique (du connu vers l'inconnue) à partir des relations explicitement données contrairement à un problème connecté où un tel raisonnement est possible. Historiquement, ces problèmes se retrouvent autant en arithmétique qu'en algèbre puisque ces derniers peuvent être résolus par divers raisonnements, certains étant associés à une pensée algébrique, d'autres non. Ces problèmes ont été repris dans plusieurs recherches en contexte québécois (voir par exemple Squalli et al (2020), Adihou *et al* (2015), Oliviera *et al*, 2017) dans le but d'étudier les types de raisonnement des élèves mais aussi les registres de représentation utilisés par les élèves. Nous revenons sur leurs caractéristiques au fur et à mesure du texte.

Dans cette communication, nous nous intéressons aux problèmes de partage inéquitable déconnectés dans l'enseignement français selon deux axes de réflexion. Premièrement, nous souhaitons contribuer à leurs intérêts pour le développement de la pensée algébrique en questionnant davantage la façon dont les élèves représentent les relations du problème. Ces problèmes reposent sur des relations de comparaison reconnues difficiles pour les élèves.

Deuxièmement, une autre fonction jouée par ces problèmes, qui reste assez peu explorée, serait de contribuer à déconstruire des croyances présentes chez les élèves et les enseignants, notamment au primaire au sujet de la résolution de problèmes. D'après beaucoup d'enseignants, une des raisons pour lesquelles les élèves français seraient en échec tient au fait que ces derniers n'appliqueraient pas « la bonne méthodologie ». C'est ainsi que toutes sortes d'aides dites « méthodologiques » leur sont proposées comme souligner les données utiles, entourer la question, trouver la bonne opération, qui risquent de renforcer des croyances fortes chez les élèves, comme le fait que chercher se fait dans sa tête sans avoir droit à l'erreur et qu'il faut trouver du premier coup la réponse juste. En fin de primaire, les problèmes déconnectés pourraient mettre à défaut ces croyances parce qu'ils nécessitent l'écrit pour organiser les différents essais et faire apparaître certaines relations entre les données. C'est pourquoi nous apportons un nouveau regard, de nature sémiotique, sur les écrits produits par les élèves sur ces problèmes.

D'après Adihou et al. (2015) et Oliveira et Rhéaume (2014), les élèves québécois de 6e et 1e secondaire peuvent résoudre ces problèmes avant toute introduction de l'algèbre mais qu'en est-il des élèves

5. Cette communication s'inscrit dans le projet de recherche franco-québécois intitulé « *Croisement des perspectives didactiques et praticiennes pour favoriser le développement de la pensée algébrique chez les élèves du primaire et du début du secondaire* », subventionné par le programme Samuel-de-Champlain.

français et des caractéristiques de leurs raisonnements, en particulier ceux de nature algébrique ? Sont-elles spécifiques au niveau scolaire des élèves et à l'enseignement qu'ils ont reçu ? Quels sont les signes et symboles mobilisés par les élèves dans leurs écrits pour mettre en relation les données ? Dans quelle mesure contribuent-ils à l'avancée de la résolution de ces problèmes ? Après la présentation de nos appuis théoriques et de notre méthodologie, nous analysons des productions d'élèves de fin de primaire et de début de collège sur un même problème, puis nous ouvrirons la discussion vers des pratiques potentiellement porteuses de l'enrichissement des écrits et des raisonnements.

Les problèmes déconnectés de partage inéquitable et la pensée algébrique

La pensée algébrique se déploie au moyen de raisonnements particuliers, de manières d'approcher les concepts ainsi que de modes de représentation et d'opérer sur ces dernières (Squalli, 2015). Un élément essentiel de la pensée algébrique est son caractère analytique (Radford (2010), Squalli (2015)). Un raisonnement est dit analytique s'il considère les valeurs inconnues recherchées comme des objets de pensée en opérant sur ces dernières comme si elles étaient connues. Squalli *et al* (2020) et Adihou *et al* (2015) ont élaboré une catégorisation des raisonnements déployés par les élèves selon leur degré d'analycité. Les raisonnements dits *analytiques* utilisent un symbolisme algébrique institutionnalisé ou non. Les raisonnements dits *analytique-parts* sont un bon exemple de raisonnements analytiques qui n'utilisent pas un symbolisme algébrique institutionnalisé. Les élèves qui mettent en œuvre un tel raisonnement s'appuient sur les relations du problème pour déterminer le nombre de parts associés aux relations multiplicatives après avoir ajusté le total en fonction des relations additives s'il y a lieu. Les raisonnements dits *à tendance analytique* font référence aux raisonnements comme celui de *fausse position* qui attribue une valeur fictive à l'inconnue pour opérer sur cette dernière. Enfin, les raisonnements *non analytiques* sont ceux davantage associés à l'arithmétique et aux raisonnements dits synthétiques (du connu vers l'inconnue) tels que les raisonnements par essais-ajustements (Favier, 2022). Les raisonnements dits *jeu de nombres*, c'est-à-dire les raisonnements qui utilisent les informations du problème sans lien avec la structure du problème sont aussi des raisonnements non analytiques.

Regard sémiotique sur les écrits des élèves en résolution de problèmes numériques

Une catégorisation des écrits heuristiques produits par les élèves

L'écrit en mathématique constitue une trace sur laquelle l'élève peut s'appuyer pour effectuer un retour réflexif sur sa démarche de résolution. Le brouillon, support de cet écrit, représente un outil incontournable pour produire un texte. En mathématique, son utilisation est trop souvent réduite à l'effectuation de calculs, alors qu'il pourrait constituer une aide pour s'approprier et mettre en rela-

tion les données du problème afin de se construire une représentation du problème au sens de Julo (1996). En classe, les consignes du type « *Explique comment tu as fait* », « *Fais un dessin ou un schéma* », formulées par les enseignants pour solliciter leurs élèves à passer par l'écrit, amènent ces derniers à produire différents écrits regroupés en trois catégories (Allard & Cavelier, 2020 ; Allard et Moussy, 2022).

La première catégorie est constituée des dessins figuratifs sans mise en relation des données. Ces dessins peuvent être utiles en début de scolarité parce qu'ils constituent un support pour soutenir la mémoire et raconter une histoire, mais, ils présentent peu d'intérêt dans la résolution d'un problème et ne sont plus attendus à partir de la fin de primaire. Des élèves, souvent « faibles », continuent pourtant de les produire pour répondre à un contrat didactique ou pour montrer qu'ils sont en activité. La deuxième catégorie, que nous appelons des dessins MER, pour « dessin avec des Mises En Relation de données », sont des écrits qui utilisent des signes graphiques empruntés à différents registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) et qui pourraient être un support à la pensée algébrique (Hitt, 2004). Le registre graphique, mobilisé par les élèves, est souvent peu conventionnel, ils entourent par exemple des nombres (nombres dans des bulles) ou mettent en relation des nombres grâce à des flèches au-dessus desquelles figurent parfois une relation (+5, x7, etc.). Toutefois, ces signes peuvent être interprétés par un élève ou une classe sans l'être par d'autres. Ces signes, qui ne sont pas le résultat d'un apprentissage spécifique, résultent d'une rencontre en dehors du système scolaire ou d'une utilisation fréquente par certains enseignants. Ils sont alors reconnus par certains élèves comme des outils pouvant être mobilisés dans des situations différentes de celles dans laquelle ils ont été rencontrés. La troisième catégorie est composée de dessins de MER conventionnels, c'est-à-dire avec des règles d'usage, et partagés par une plus grande communauté que la classe, l'établissement, le système scolaire. Les schémas en barre en sont un bon exemple (Clivaz & Dindyal, 2021).

Aide potentielle des dessins MER conventionnels

Une question vive, au moins en France, est celle du rôle des schémas conventionnels comme moyen d'aide à la résolution de problèmes. Vergnaud (1983 a, 1983 b, 1991) ont fourni une représentation schématique des problèmes relevant du champ additif en précisant que leur utilisation pouvait être une aide pour comprendre les structures sémantiques chez les élèves en difficulté mais que ces schémas n'avaient pas à être enseignés. D'après eux, leur statut devait d'être transitoire « *en tant que support pour les problèmes, ces diagrammes sont faits pour être oubliés au fur et à mesure de la maîtrise de ces problèmes* » (*ibid*, p. 34). Récemment, Ducharme et Polotskaia, (2008, 2009, 2010) ont développé différents scénarios de mise en œuvre d'utilisation du schéma en barre. Même si ces schématisations ont l'avantage d'être adaptables à des problèmes de structures sémantiques différentes, elles nécessitent, d'après nous, un apprentissage et par conséquent un accompagnement des enseignants dans la construction des séances d'apprentissage relatives à cette représentation. L'utilisation de la schématisation requiert de savoir utiliser à bon escient les signes et symboles mobilisés tels que les segments, les accolades, les pointillés ou le point d'interrogation. Comme tout apprentissage, il

est sûrement nécessaire d'automatiser chez les élèves de tels usages pour qu'ils les mobilisent et les adaptent à d'autres problèmes.

Nous allons enquêter ce point dans nos expérimentations, en présentant des schémas, notamment en barre, mais pas uniquement, à des élèves de 9 à 12 ans, et chercher à évaluer s'ils les mobilisent dans des problèmes déconnectés de partage inéquitable. Quels types d'écrits produisent-ils ?

Méthodologie

Présentation des données

Des élèves (de 9 à 12 ans), de fin primaire et début de collège, issus de niveaux de classes et d'établissements différents, ont résolu le même problème déconnecté de partage inéquitable, appelé « problème des Pokémon » (voir figure 1) avec une variation sur le total de cartes qui ne change pas l'analyse *a priori* du problème. Ils ont reçu un enseignement sur ces problèmes différents et n'ont pas rencontré le symbolisme algébrique avant. Nous résumons les données recueillies dans le tableau 1.

Problème : Trois amis comptent leurs nombres de cartes Pokémon. Lucile a 2 fois plus de cartes que Malik. Pierre a 4 fois plus de cartes que Malik. Malik, Lucile et Pierre ont ensemble 189 cartes. Combien de cartes ont Malik, Lucile et Pierre ?
Problème bis : même énoncé mais Malik, Lucile et Pierre ont ensemble 91 cartes.

Figure 1 - Le problème des Pokémon.

Le fait que les élèves soient dans des niveaux de classe différents nous permet d'étudier les évolutions éventuelles, d'un niveau de classe à l'autre, sur les raisonnements et les types d'écrits qu'ils utilisent. Le fait qu'il y ait des variations dans l'enseignement reçu avant le problème de Pokémon, notamment sur les schémas en barre, permet d'interroger les effets de certaines pratiques sur les raisonnements et les écrits des élèves pour ce type de problème.

Dans toutes les classes, sauf celle de 5e, le schéma en barre a été présenté à partir de problèmes de comparaison additifs et multiplicatifs (relations du type "x de moins/de plus que", "x fois moins/fois plus que" dans des problèmes où on cherche la troisième donnée connaissant les deux autres). Soulignons que les élèves ont été amenés à interpréter des schémas en barre mais pas forcément à en produire.

Dans les classes de primaire, les enseignantes ont présenté d'autres dessins de types MER que les schémas en barre, par exemple, pour isoler les données par les bulles et les mettre en relation avec des flèches. De plus, les élèves ont résolu le problème des Pokémon après avoir fréquenté quelques (pas plus de cinq) problèmes déconnectés de partage inéquitable avec des variations sur les relations et sur le nombre total. À l'issue de chaque problème, une affiche présentant une rédaction possible de la réponse et un dessin MER possible a été réalisée (Allard et Cavelier, 2020).

Enseignant	Établissement	Classe	Élèves (total 171)	Total de cartes Pokémon	Présentation et utilisation des schémas en barre avant le problème des Pokémon	Problèmes de partage fréquentés avant celui des Pokémon
M	Primaire	CM1	19	91	Oui et autres MER	Oui
An	Primaire	CM1	9	91	Oui et autres MER	Oui
Ca	Primaire	CM2	8	189	Oui et autres MER	Oui
D	Collège	6e	44	189	Oui	Non
A	Collège	6e	36	189	Oui	Non
D	Collège	5e	55	189	Non	Non

Tableau 1 - Présentation synthétique des données récoltées

Dans toutes les classes, les élèves ont eu à résoudre individuellement le problème et avaient un brouillon à leur disposition. Les consignes préalables et les modalités qui ont suivi ce temps de résolution diffèrent d'une classe à l'autre.

Au collège, le problème a été donné à l'écrit. En primaire, il a été présenté à l'oral et les élèves ont eu comme consigne de représenter les relations entre les données du problème à l'aide de différents signes et symboles. Au collège, dans les classes de 6e et de 5e, les élèves ont résolu individuellement pendant une quinzaine de minutes le problème. Les enseignants A et Ca évoquent les schémas en barre rencontrés préalablement.

Analyse a priori du problème

Le problème des Pokémon est de type source avec deux relations multiplicatives. Un problème source (Bednarz et Janvier, 1996) est un problème énoncé de manière à ce qu'une des inconnues génère les deux autres directement. Pour le problème des Pokémon, la source est le nombre de cartes de Malik puisque l'énoncé stipule que Lucile a 2 fois plus de cartes que Malik et que Pierre a deux fois plus de cartes que Malik.

Les élèves peuvent mobiliser un raisonnement analytique – parts, mettant en jeu l'analycité, qui consiste dans les Pokemon, à identifier les 7 parts qui forment le tout, et à diviser le total par 7. Ils peuvent également raisonner par essais et ajustements. Les nombres en jeu dans le problème ont été choisis afin de détecter différents raisonnements qui s'appuient sur des éléments superficiels du problème. En effet, dans un problème source à deux relations multiplicatives, si le nombre de parts est équivalent à la multiplication des deux relations en jeu, le raisonnement incorrect de type « jeu de nombres » consistant à diviser par le produit des relations fournit la bonne réponse. Par exemple, si les relations du problème de la figure 1 étaient x2 et x3, un élève pourrait réussir à résoudre le problème en divisant par 6, non pas parce qu'il est en mesure de repérer que 6 parts sont nécessaires pour former le tout (raisonnement analytique-parts correct), mais plutôt parce que 6 c'est 2 fois 3 (raisonnement incorrect de type jeu de nombres). Or, les traces ne permettent pas toujours de distinguer les deux types de raisonnement. Le choix de « x2 » et « x4 » permet d'éviter cet écueil.

De plus, le total de cartes a été choisi de sorte que l'élève ne puisse pas s'appuyer sur la décomposition positionnelle du nombre. Par exemple, si le total avait été plutôt de 175, une décomposition en 100 + 75 permet de s'appuyer sur des faits numériques familiers pour reconnaitre que 100 c'est 4x25 et donc que Malik a 25, Lucile 50 et Pierre 100. Quoique ce raisonnement soit intéressant, il a un champ d'application très limitée.

Comme les élèves n'avaient pas été introduits à l'algèbre, il est improbable qu'ils utilisent le symbolisme algébrique conventionnel dans un raisonnement algébrique. Toutefois, selon les résultats de Oliveira et Rhéaume (2014), l'utilisation de lettres et d'une écriture proto-algébrique est possible. Puisque l'utilisation de calculs est essentielle à la résolution de ces problèmes sans algèbre, des traces dans le registre numérique sont attendues. L'utilisation du langage naturel est aussi attendu, notamment en primaire puisque les énoncés des problèmes sont lus à haute voix. De plus, étant donné l'enseignement reçu, nous anticipions aussi de retrouver les traces de schémas en barre, des bulles et des flèches dans certaines classes.

Démarche et critères d'analyse

Notre analyse s'est centrée sur deux principaux aspects : les types de raisonnements utilisés par les élèves pour résoudre le problème et les types d'écrits qu'ils produisent.

Selon l'analyse *a priori* et la partie II, les raisonnements sont distingués selon qu'ils mettent en jeu ou non l'analycité : des raisonnements analytiques (algébrique, analytique-parts) et des raisonnements non analytiques (essais et ajustements, jeux de nombres comme diviser par 2, 4 ou 6, ou diviser par 3 avec ou sans ajustements, ou encore effectuer d'autres calculs qui ne s'appuient pas sur la structure du problème).

Nous identifions *a priori* quatre types d'écrits : (1) ceux qui mobilisent des éléments du registre graphique et qui mettent en relation des données dans des dessins MER non conventionnels (utilisation de bulles, de flèches, d'accolades, de signes de ponctuation (« ? », « … », etc.)), (2) ceux qui mobilisent des éléments similaires dans des dessins MER conventionnels (segments, tableaux), (3) ceux qui mobilisent des éléments du registre numérique ou algébrique, (4) ceux qui mobilisent des éléments du registre naturel.

Par exemple, dans la figure de l'annexe, l'élève utilise les quatre types d'écrits. En effet, il utilise des bulles, des traits obliques et mots pour représenter la structure du problème. Il représente la relation additive dans le registre algébrique (en haut à gauche), les relations additives et multiplicatives à l'aide d'un schéma en barre, qui lui permet certainement d'obtenir les 7 parts et de mobiliser un raisonnement analytique-parts qui se retrouve dans le registre numérique avec une division par 7.

Résultats

Les tableaux 2 et 3 informent sur la validité des réponses des élèves et les raisonnements des élèves selon le niveau de classe. Pour chaque élève, nous avons identifié le raisonnement qui a abouti. Dans le tableau 2, sur les 171 copies analysées, 21% montrent des réponses correctes, 19% des réponses fausses et 60% n'ont pas abouti (dont 22 copies étaient sans traces de raisonnement, outre une réécriture d'une partie du problème). Ces pourcentages évoluent lorsqu'on les étudie selon le niveau de classe. Les élèves de primaire, ayant reçu un apprentissage plus conséquent sur les problèmes de partage, réussissent davantage (70%), n'ont pas de réponse erronée et restent moins sans réponse (30%).

Validité	Primaire CM1-CM2	Collège 6e	Collège 5e	Total
Correcte	25 (70%)	1 (1%)	10 (18%)	36 (21%)
Incorrecte	0 (0%)	15 (19%)	17 (31%)	32 (19%)
Non réponse	11 (30%)	64 (80%)	28 (51%)	103 (60%)
Total	36 (100%)	80 (100%)	55 (100%)	171(100%)

Tableau 2 - Validité de la réponse selon le niveau de classe

Raisonnement	Primaire CM1-CM2	Collège 6e	Collège 5e	Total
Algébrique			1 (2%)	1 (1%)
Analytique - parts	6 (17%)	1 (1%)	6 (11%)	13 (8%)
Essais et ajustements	25 (69%)	3 (4%)	5 (9%)	32 (20%)
Jeux de nombres	2(6%)	44 (55%)	32 (58%)	78 (46%)
Jeux de nombres, division par 2 et 4 ou par 6		15 (19%)	9 (16%)	24 (14%)
Pas de raisonnement	3 (8%)	17 (21%)	2 (4%)	22 (13%)
Total	36 (100%)	80 (100%)	55 (100%)	171 (100%)

Tableau 3 - Raisonnements mobilisés par les élèves selon le niveau de classe

Dans l'ensemble (Tableau 3), les élèves déploient très peu de raisonnements analytiques (1 algébrique et 13 analytique-parts) mais lorsqu'ils le font, cela les conduit à un résultat correct. Ceux qui les mobilisent sont d'une part, les élèves de 5e, les plus âgés, et, d'autre part, les élèves de primaire, plus accompagnés par l'enseignement qu'ils ont reçus sur les problèmes de partage inéquitables. Concernant les raisonnements non analytiques, les élèves de primaire procèdent davantage par essais et ajustements que les élèves de collège qui utilisent en grande majorité des jeux de nombres.

Raisonnement	Réponse correcte	Réponse incorrecte	Non réponse	Total
Algébrique	1			1
Analytique/parts	12		1	13
EE	23	3	7	33
Jeux de nombres		29	73	102
Pas de raisonnement			22	22
Total	36	32	103	171

Tableau 4 - Raisonnements mobilisés par les élèves selon la validité de la réponse

Selon les résultats présentés dans le tableau 4, les raisonnements avec essais et ajustements aboutissent en majorité à une réponse correcte (23/33). Les jeux de nombres conduisent tous à une réponse incorrecte (29/102) ou à une absence de réponse (73/102). L'âge, dans une certaine mesure, et l'accompagnement semblent donc des facteurs en faveur de l'utilisation de raisonnements à caractère analytique et au recours à des essais et ajustements et à l'abandon de jeux de nombres. Les résultats des classes de 6ème et de primaire, ayant reçu une présentation des schémas en barre, semblent tendre vers le fait qu'avoir fréquenté des schémas en barre sur quelques séances (de 3 à 5 séances) n'est pas suffisant pour engager les élèves dans un raisonnement analytique.

Type d'écrit	Primaire CM1-CM2	Collège 6e	Collège 5e	Total
Bulles-flèches	26	20	7	53
Schémas en barre	10	8	0	18
Tableau	5	0	1	6
Écritures numériques	36	64	53	149
Algébrique	17	6	5	28
Langage naturel	27	12	5	44

Tableau 5 – Types d'écrits utilisés par les élèves selon leur niveau de classe

Le tableau 5 présente les types d'écrits utilisés par les élèves selon leur niveau de classe. Dans ce tableau, nous prenons en compte qu'un élève peut utiliser plusieurs registres de représentation. C'est pourquoi le total par colonne n'est pas celui de l'effectif de chaque niveau de classe.

Tous les élèves qui produisent un écrit utilisent les écritures numériques (149/171). Par ordre décroissant d'utilisation, les élèves utilisent ensuite des MER non conventionnels de type bulles et flèches (53/171), puis le registre du langage naturel (44/171), le registre des écritures algébriques (28/171), des MER conventionnels de type schémas en barre (18/171) et enfin de type tabulaire (6/171). Soulignons que les élèves de collège (27/135) utilisent des bulles et des flèches sans enseignement explicite. Cela nous questionne, certaines représentations graphiques seraient-elles plus utilisées que d'autres par les élèves parce qu'elles sont montrées sans être explicitement enseignées ? Y aurait-il une spécificité française sur cette utilisation des flèches et des bulles ?

Les MER conventionnels de type schémas en barre sont utilisés par seulement 18 élèves sur les 116 élèves qui ont rencontré ces schémas préalablement. Les 55 élèves de 5e qui n'ont pas rencontré ce type de schéma n'en produisent pas. Sur ces 18 élèves, 8 produisent un schéma en barre pour représenter la relation additive (total des parts), 12 pour représenter les relations multiplicatives entre les parts et 8 pour représenter d'autres relations erronées. 17 de ces 18 élèves utilisent également des éléments du registre graphique qui mettent en relation des données dans des dessins MER non conventionnels ce qui questionne l'apprentissage d'un dessin MER conventionnel. Sur ces 18 élèves, 6 s'engagent dans un raisonnement analytique-parts (5 réponses correctes et une non-réponse), 4 dans des essais et ajustements, 5 dans des jeux de nombres et 3 ne vont pas au-delà de la production du schéma.

En bilan, il nous semble que parmi les signes utilisés par les élèves, peu semblent véritablement opérationnels, hormis le registre des écritures numériques pour écrire les calculs. Les écrits de type MER non conventionnels, qui reposent sur des flèches et des bulles, semblent être une représentation plus proche des élèves, qui permet de représenter facilement les relations mais ne faisant pas apparaître le nombre de parts, elle ne permet pas d'opérer sur l'inconnue et donc ne conduit pas à un raisonnement analytique.

Elle rend alors possible l'organisation des essais et ajustements (certains brouillons montrent des essais sous les bulles qui sont barrés). Rappelons que Bednarz et Janvier (1996) ont introduits des représentations proches pour catégoriser les problèmes en formation des maîtres mais pas comme objet d'enseignement. Quant au schéma en barre qui présente l'intérêt de donner le nombre de parts, il semble éloigné des élèves français qui s'en emparent peu même lorsqu'il leur a été présenté préalablement. Ce schéma nécessite certainement un apprentissage plus que celui reçu, notamment pour expliciter ses conventions de représentation des données et des relations (respects des proportions, lien avec les fractions, etc.).

Discussion et Conclusion

Cette étude vient compléter celles déjà menées sur les problèmes déconnectés de partage inéquitable. Du côté des raisonnements, les résultats contrastent avec ceux des élèves d'âges similaires au Québec. En effet, si les élèves québécois de 6e et 1e secondaire réussissent un problème similaire à respectivement 48 % et 61 % (Oliveira et Rhéaume, 2014), seuls 21 % de l'échantillon des élèves français produisent une réponse valide. Toutefois, les taux de réussite québécois sont certainement à être discutés notamment parce que, dans l'étude citée, il n'est pas possible de détecter des raisonnements erronés liés aux choix des nombres. Le problème résolu par les élèves québécois met en effet en relation deux relations multiplicatives (x2 et x3) pour lesquelles diviser le total par 2 puis par 3 fournit l'équivalent de la part contrairement aux relations choisies ici.

Les résultats des élèves français montrent l'importance de travailler les relations mathématiques, notamment dans des problèmes déconnectés de partage inéquitable, quasiment absentes de l'enseignement français avant l'introduction du symbolisme algébrique, afin de développer l'activité numérico-algébrique en jeu à la transition entre le primaire et le secondaire (Pilet & Grugeon-Allys, 2021). Une enquête à mener serait de comparer la place du travail et des modes de représentation sur les relations mathématiques entre les enseignements français et québécois.

Par ailleurs, combiner une analyse des raisonnements avec celle du type d'écrit utilisé par les élèves nous semble enrichir les résultats sur les problèmes déconnectés de partage inéquitable. Même si les élèves prennent en compte les données et les relations dans leurs écrits, les signes qu'ils utilisent ne leur permettent pas d'opérer sur l'inconnue et de tendre vers un raisonnement analytique. Les élèves se tournent vers des raisonnements arithmétiques portés par des calculs, de type essais et ajustements, pour les élèves les plus accompagnés (primaire), et jeu de nombre pour les autres (collège). D'une part, cela interroge sur la place du raisonnement essais et ajustement dans l'enseignement français. D'autre part, selon nous, les résultats viennent nourrir l'existence de connaissances cachées (Houdement, 2011) et socialement différenciatrices pour les élèves liées à l'usage de signes et de symboles de type MER conventionnels ou non, pour outiller la pensée.

Références

Adihou, A., Squalli, H., Saboya, M., Tremblay, M., et Lapointe, A. (2015). Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. Dans *Actes du colloque EMF-2015 Pluralités culturelles et universalité des mathématiques: enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (pp. 1-16).

Allard, C. et Cavelier, S. (2020). *Résoudre des problèmes mathématiques*. Paris : Nathan.

Allard, C. et Moussy, C. (2022). LéA 2 territoires en mathématiques : résoudre des problèmes complexes au cycle 3: exemple d'un dispositif de travail collaboratif. *Actes du 47ème colloque de la Copirelem, Grenoble en distanciel*.

Bednarz, N., et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C Kieran et L. Lee (dir.). *Approaches to algebra* (pp. 115-136). Springer.

Clivaz, S. et Dindyal, J. (2021). Représentations graphiques et résolution de problèmes : le cas de Singapour. *Grand N, 108*, 5-25.

Ducharme, M. et Polotskaia, E. (2008). Développement du raisonnement algébrique par résolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) 1. *Envol, GRMS, 145*, 21-27.

Ducharme, M. et Polotskaia, E. (2009). Développement du raisonnement algébrique par résolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) 2. *Envol, GRMS, 146*, 33-38.

Ducharme, M., et Polotskaia, E. (2010). Two Scenarios for Problem Solving and Pro-algebraic Reasoning Development in Primary School Children. *Petroleum-Gas University of Ploiesti Bulletin, Educational Sciences Series, 62*(1B), 170-184.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*(1), 37-65.

Favier, S. (2022). Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève. Thèse Université de Genève. doi: 10.13097/archive-ouverte/unige:159466 https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159466

Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans la démarche heuristique. *Revue des sciences de l'éducation, 30*(2), 329–354.

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Paris (IREM), 16*, 67-96.

Oliveira, I., et Rhéaume, S. (2014). Comment s'y prennent-ils ? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l'algèbre. *Revue Canadienne d'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 14*(4), 404-423.

Pilet, J. et Grugeon-Allys, B. (2021). L'activité numérico-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre ». *Éducation et didactique, 15*(2), 9-26, mis en ligne le 02 janvier 2023, consulté le 30 mai 2022. URL : http://journals.openedition.org/educationdidactique/8580 ; DOI : https://doi.org/10.4000/educationdidactique.8580

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

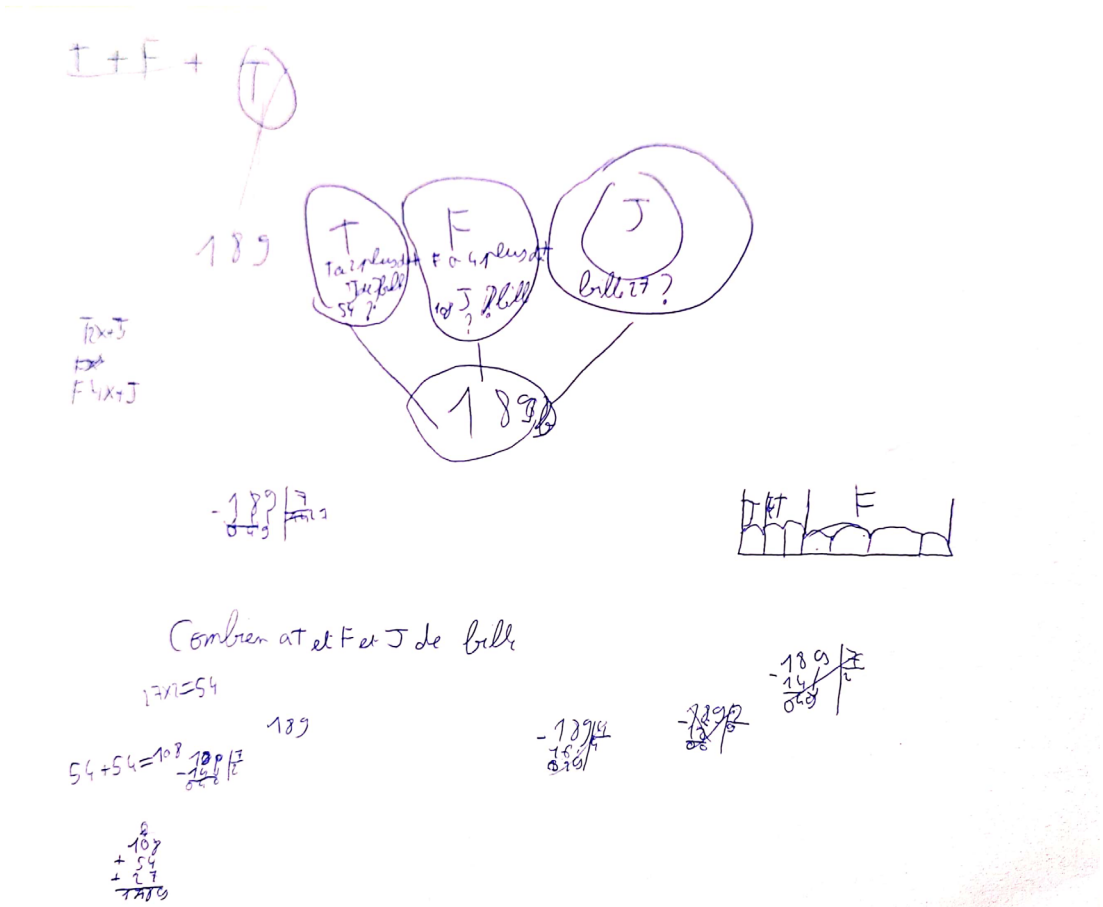
Squalli, H., Larguier, M., Bronner, A., et Adihou, A. (2020). Cadre d'analyse des raisonnements dans la résolution de problèmes algébriques de type partage inéquitable. *Nouveaux cahiers de la recherche en éducation, 22*(1), 36-62.

Vergnaud, G. (1983 a). A classification of cognitive task and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser, & T.A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction : a cognitive perspective*. Hillsdale : Erlbaum.

Vergnaud, G. (1983 b). Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174). Academie Press : New York.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*, 2.3, 135-169.

Annexe : Traces d'un élève de primaire



Titre: Interactions entre un enseignant et ses élèves lors des situations faisant intervenir les fractions et les proportions dans le calcul de la concentration en science et technologie

Auteur: BENRHERBAL Abderrahmane

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 661 - 675

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Interactions entre un enseignant et ses élèves lors des situations faisant intervenir les fractions et les proportions dans le calcul de la concentration en science et technologie

BENRHERBAL Abderrahmane[1]

Résumé – Cette recherche s'intéresse aux interactions didactiques enseignant-élèves reliées aux fractions/proportions dans le contexte du calcul de la concentration en science et technologie. Elle s'inscrit dans un paradigme interprétatif qualitatif dans une perspective interdisciplinaire. Nos résultats indiquent que la mobilisation et l'utilisation des fractions/proportions ne vont pas de soi pour les élèves et influencent les interactions didactiques lors de l'enseignement et l'apprentissage.

Mots-clefs : Interactions didactiques - Fractions et proportions- Incidents didactiques - Types de proximité - Effets de contrat

Abstract – This research focuses on didactic teacher-student interactions related to fractions/proportions in the context of calculating concentration in science and technology. It is part of a qualitative interpretative paradigm in an interdisciplinary perspective. Our results indicate that the mobilization and use of fractions/proportions are not self-evident for students and influence didactic interactions during teaching and learning.

Keywords: Didactic interactions, Fractions and proportions, Didactic incidents, Types of proximity, Contract effects.

1. Université Mohammed VI Polytechnique. Maroc, abderrahmane.benrherbal@um6p.ma

Introduction

Une compréhension conceptuelle de la fraction et de la proportion est essentielle en raison des liens interdisciplinaires et intra disciplinaires. Cette diversité d'utilisation rend ces concepts et leur construction fondamentale. Toutefois, leur développement exige un saut conceptuel de situations situées dans le champ des structures additives à des situations situées dans le champ à structures multiplicatives. La compréhension et le développement de la fraction s'appuient sur la coordination des cinq sens que peut prendre ce concept (Kieren, 1980). Cet apprentissage est donc complexe comme le soulignent plusieurs recherches (Kieren, 1988; Brousseau, 1981). Notre étude s'intéresse aux interactions entre l'enseignant et les élèves en relation avec le milieu didactique dans le contexte du cours sur la concentration en science et technologie. Cette recherche a pour objectif de comprendre comment l'utilisation des concepts de fraction et de proportion peuvent avoir des incidences sur l'apprentissage et l'enseignement de la concentration. Dans les sections qui suivent, nous décrivons la problématique au cœur de cette recherche, laquelle fait état des difficultés éprouvées par les élèves en lien avec les concepts de fraction et de proportion. Après avoir formulé notre question de recherche, nous poursuivons en présentant notre cadre conceptuel, lequel opérationnalise les concepts qui nous permettent d'analyser les interactions didactiques. Cette analyse nous permet d'identifier la nature des interactions entre l'enseignant, les élèves et la tâche à réaliser pour qualifier le type des interventions des enseignants et les aides procurées aux élèves selon l'approche de proximités (Bridoux & al., 2015) et identifier les ruptures du contrat didactique (Brousseau, 2003). Nous formulons, par la suite, nos objectifs spécifiques de recherche et dans la section suivante, nous donnons des indications sur la méthodologie utilisée pour atteindre ces objectifs. Nous présentons enfin nos résultats et en discutons avant de conclure.

Problématique

Les concepts de fraction et de proportion occupent une place importante dans le programme de formation de l'école secondaire québécoise (MEQ, 2001). Que ce soit au premier ou au deuxième cycle, ces concepts sont mobilisés tant dans un contexte intra disciplinaire (la trigonométrie, la probabilité, etc.) qu'interdisciplinaire (en sciences et technologie, en chimie, etc.). Cette diversité d'usages hisse ces concepts au statut d'apprentissages fondamentaux, en ce sens que les élèves doivent les maîtriser pour traiter un grand nombre de situations, issues des mathématiques (l'homothétie, la loi des sinus, le théorème de Thalès, ...etc.) ou d'une autre discipline (la stœchiométrie, le rendement énergétique, la réflexion en optique, …etc.).

L'examen de la littérature portant sur l'enseignement et l'apprentissage de ces concepts permet de mieux comprendre leur origine. Premièrement, l'élaboration des connaissances sur les nombres rationnels exige un changement en profondeur de la conception du nombre développée à partir d'activités sur les nombres naturels. Comme le signalent plusieurs chercheurs (Behr *et al*., 1983 ; Kie-

ren, 1988), l'apprentissage des nombres naturels crée des obstacles dans le développement d'une compréhension adéquate des nombres rationnels. Les chercheurs affirment que les différences fondamentales entre ces deux types de nombres ne sont pas toujours prises en compte par les élèves. En effet, les nombres naturels sont consécutifs alors que les nombres rationnels sont denses. Ainsi, les opérations avec les nombres fractionnaires résultent de l'extension inappropriée des procédures relatives aux opérations entre les nombres naturels. Cela conduit, par exemple, à des erreurs typiques dans des tâches d'addition de fractions (1/4 + 1/2 = 2/6) ou de comparaison de fractions (1/5 > 1/3). Deuxièmement, il est possible de relier les difficultés éprouvées au champ conceptuel à l'intérieur duquel se situe la fraction (Kieren, 1980). En effet, la compréhension du concept de fraction est étroitement liée à la coordination de cinq sous-constructions (partie-tout, mesure, rapport, quotient et opérateur), lesquelles impliquent une réinterprétation des deux membres de la fraction et de la fraction elle-même (Kieren,1980). Par exemple considérée sous l'égide du sens partie-tout, la fraction ¾ pourra présenter une relation entre le nombre d'objets considérés (3) et le nombre total d'objets d'une collection (4). Cependant, considérée sous l'égide du sens mesure, la fraction ¾ représentera plutôt l'expression d'une mesure qui résulte du triple report de l'unité ¼. Troisièmement, il peut être difficile, pour les élèves, de conférer un sens aux opérations sur les fractions, en raison de la façon suivant laquelle ces opérations sont enseignées. Desjardins et Hétu (1974) soutenaient que l'enseignement était en partie responsable des difficultés éprouvées puisqu'il introduisait les algorithmes liés aux opérations sur les fractions avant même que les élèves aient atteint le niveau de la fraction-relation, c'est-à-dire avant qu'ils aient compris que la fraction représente non seulement une quantité, mais aussi une relation entre deux termes. Dans la même veine, un examen du traitement des opérations dans les manuels scolaires québécois du primaire et du secondaire révèle que « la conceptualisation des opérations est réduite à l'apprentissage de l'algorithme de calcul » (Barallobres & Lemoyne, 2006, p. 185). Ce constat est préoccupant puisque l'élève est susceptible de demeurer prisonnier d'une pensée algorithmique, laquelle peut potentiellement l'empêcher d'appréhender la richesse du champ conceptuel de la fraction (Benrherbal, 2021). Ainsi, considérant ce constant, cette étude souhaite explorer l'usage de fraction rapport et de proportions. Pour ce faire, nous voulons étudier si les fractions constituent des difficultés lors du traitement des situations lors du calcul de la concentration par l'entremise d'un cours en science et technologie. Ce cours fait référence aux concepts de la fraction rapport, de pourcentage, de la proportion et des opérations sur les fractions. Ces concepts s'organisent autour de la notion de concentration pour établir des équivalences entre deux rapports, transformer les concentrations, calculer un pourcentage et reconnaître une relation de proportionnalité entre deux concentrations. Compte tenu des difficultés qui viennent d'être esquissées, il apparaît légitime de poser la question suivante : Comment qualifier les interactions entre un enseignant et ses élèves à propos des fractions et des proportions dans le contexte du calcul de la concentration en science et technologie ? Par interactions didactiques, nous entendons les échanges entre un enseignant et ses élèves à propos du savoir dans le cadre d'une situation à finalité didactique. Les incidents didactiques (Roditi, 2005), les proximités (Bridoux et al., 2015) et le contrat didactique (Brousseau, 1983) offrent une perspective pour interpréter et analyser ces interactions.

Cadre conceptuel

Il convient ici de définir les concepts utilisés pour analyser les interactions didactiques entre les élèves et l'enseignant lors du calcul de la concentration. Nous définissons ici ce que nous entendons par incident didactique, par proximité ainsi que par effet du contrat didactique.

Les incidents didactiques

Un incident didactique peut être entendu comme « une manifestation publique (au sens où elle s'intègre à la dynamique de la classe) d'un élève ou d'un groupe, en relation avec l'enseignement, et en décalage négatif par rapport à l'ensemble des réponses correctes envisageables compte tenu de la tâche proposée » (Roditi, 2003, p. 11). Il s'agit d'un concept pertinent pour analyser les interactions didactiques, notamment lorsque les élèves commettent des erreurs qui n'avaient pas été anticipées par l'enseignant. Plus précisément, nous appellerons incident didactique un écart entre ce qui est attendu de l'action de l'élève et ce qui se passe effectivement dans une activité, marquant un décalage « négatif » par rapport au but visé par la tâche (Rogalski, 2000), qui se produit de manière imprévue (Aldon, 2011) et nécessite l'intervention de l'enseignant (Roditi, 2003). Dans la présente étude, les incidents vont être étudiés comme des éléments déterminants de la dynamique de la classe dans l'interaction entre l'enseignant et les élèves en relation avec le milieu didactique (Roditi, 2005). L'émergence d'incidents durant les interactions nécessite des interventions de l'enseignant pour apporter de l'aide et du soutien aux élèves. Ces interventions seront analysées selon le concept de proximités de Bridoux et ses collaborateurs (2015).

Les proximités

Le concept de proximité permet de qualifier les actions de l'enseignant qui peuvent être associées à une tentative de rapprochement de ses élèves (Robert & Vandebrouck, 2014). En fait, une proximité est une activité de l'enseignant qui vise à réduire l'écart entre ce qu'il souhaite enseigner et ce que les élèves connaissent, font ou disent. Elle est toutefois manifeste lors des allers-retours entre les interventions de l'enseignant et l'activité des élèves. Bridoux et ses collaborateurs (2015) distinguent trois types de proximité en acte. C'est leur place par rapport aux moments d'exposition des connaissances et les liens qu'ils supposent entre l'activité et les interventions qui déterminent ces types de proximité. Le tableau 1 offre un aperçu synoptique des interventions associées à chaque type de proximité.

Type de proximité	Type d'intervention
Proximités horizontales	Ces proximités peuvent porter sur les interactions en train de se faire, à un niveau général. Elles peuvent aussi expliciter localement une suite de calculs ou des différences entre écrit et oral. Elles se traduisent souvent par des interactions limitées qui se caractérisent par des questions brèves et des réponses de faible « portée ». En effet, ce type d'interaction n'a pas d'impact concret sur le niveau de connaissance des élèves.
Proximités descendantes	Ces proximités donnent naissance à des interventions qui se placent entre ce qui a été exposé (les savoirs institutionnalisés) et les situations que les élèves devront ensuite traiter seuls ou avec l'aide leur enseignant. Elles ont lieu après le moment d'exposition des connaissances.
Proximités ascendantes	Ces proximités donnent naissance à des interventions qui se placent entre les situations que les élèves ont déjà traitées et les savoirs qui seront institutionnalisés (mots, définitions, propriétés). Elles ont lieu avant le moment d'exposition des connaissances.

Tableau 1 – Les types de proximité selon les types d'intervention (Bridoux *et al.*, 2015)

Les effets du contrat didactique

La construction du savoir par les élèves est l'enjeu fondamental du contrat didactique. En fait, tout apprentissage d'un nouveau savoir provoque des ruptures de contrat par rapport au savoir ancien et l'enseignement va reposer sur ces ruptures (Brousseau, 1983). Cela dit, si le rapport au savoir des élèves n'évolue pas comme prévu, ce qui est le cas lorsque se produit un incident didactique, l'enseignant doit absolument provoquer la rupture du contrat didactique, sans quoi les élèves ne réaliseront pas les apprentissages prescrits. En effet, à chaque rupture, l'enseignant doit établir un nouveau contrat, lequel permettra aux élèves de faire évoluer dans une autre direction le rapport au savoir initialement développé. Or, cette volonté de maintenir le contrat didactique peut affecter l'activité de l'enseignant de différentes façons ; il s'agit là des effets du contrat didactique (Brousseau, 1983). Dans cette étude, nous avons repéré trois effets qui ont été documentés dans la littérature : l'effet Topaze, l'effet du paradoxe du comédien et l'effet de l'attente incomprise. En voici une description succincte. L'effet Topaze se manifeste lorsque l'enseignant réduit la charge du travail demandé aux élèves en donnant des explications abondantes ou des indices pour les aider à traiter certaines situations. En ce qui a trait au paradoxe du comédien, cet effet se produit lorsque l'enseignant pose des questions aux élèves à propos d'un savoir et qu'au même moment, il apporte lui-même les réponses. Enfin, l'effet de l'attente incomprise consiste à croire qu'une réponse attendue des élèves va de soi pour eux.

Objectifs spécifiques de recherche

La présente étude a pour objectif général la description et l'analyse des interactions entre un enseignant et ses élèves à propos des fractions et des proportions lors de situations de calcul de la concentration en science et technologie. De façon plus spécifique, nous avons fixé les objectifs suivants : 1) Décrire les incidents didactiques qui surviennent lors de l'enseignement de la concentration ; 2) Analyser les aides procurées aux élèves selon le type proximité utilisé durant cet enseignement ; 3) Décrire les effets de contrat qui surviennent durant cet enseignement. Dans la section qui suit, nous donnons quelques indications quant à la méthodologie utilisée pour atteindre ces objectifs.

Méthodologie

Nous avons décrit et analysé les interactions entre un enseignant et ses élèves au cours d'une situation d'enseignement et d'apprentissage (SEA) dans un cours de concentration en science et technologie. Le groupe classe de quatrième secondaire qui a participé à l'expérimentation est composé de 25 élèves. Le choix du concept de l'étude s'est arrêté sur la notion de concentration qui fait référence aux concepts de fraction rapport et de proportion partie d'un tout. Cette dernière met en relation la quantité de matière du soluté et la somme des quantités de matière de tous les composés qui constituent la solution.

Plan d'instrumentation

Les productions d'élèves, les enregistrements vidéo de l'expérimentation, le journal de bord et l'observation directe sont nos outils de collecte de données. Ils nous donnent accès aux interactions didactiques lors des situations de calcul de la concentration.

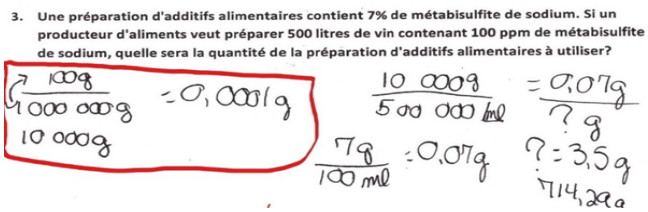
Plan d'analyse

Après avoir transcrit les verbatims, nous avons analysé les interactions entre l'enseignant et les élèves à l'aide de catégories selon les démarches proposées par Thomas (2006) et avons privilégié une approche de type « analyse de contenu ». Notre plan d'analyse est formé de 3 étapes. La première étape est consacrée à l'analyse des productions des élèves pour identifier la nature des erreurs qui émergent lors de leurs interactions avec la SEA. La deuxième étape correspond à l'analyse du verbatim pour déterminer la nature des interventions par rapport aux erreurs identifiées. Cette étape nous permet de qualifier les aides procurées aux élèves et d'identifier les effets du contrat didactique. Enfin, la troisième étape consiste à analyser les événements consignés dans le journal de bord. L'analyse des productions d'élèves nous permet de comprendre comment les élèves mobilisent les concepts de fraction/proportion dans le contexte de la concentration. L'analyse du verbatim des enregistrements vidéo nous permet de jeter un nouveau regard sur l'utilisation de ces deux concepts. Quant au journal de bord, il nous permet de retrouver la dynamique du terrain et de reconstituer l'atmosphère durant les expérimentations.

Résultats

Dans cette section, nous commençons par décrire les incidents didactiques observés lors de l'enseignement de concentration. Nous poursuivons en analysant les aides apportées aux élèves selon le type proximité utilisé par l'enseignant. Nous terminons en décrivant les effets de contrat observés durant l'expérimentation.

Premier incident didactique : Le sens que donne l'élève à la fraction rapport



Production 1 – Le sens que donne l'élève à la fraction rapport

Les traces laissées par l'élève montrent qu'il représente correctement la concentration 100 ppm par le rapport. Cependant $\frac{100_g}{1\,000\,000_g}$, il exprime ce rapport par un nombre décimal 0,0001 g exprimé en unité de gramme. Lorsque l'élève interprète la concentration « parties par million » comme étant un rapport exprimé en unité de gramme, nous nous questionnons sur le sens que donne l'élève à la concentration et à la fraction rapport. Deux interprétations peuvent expliquer cette erreur. La première peut être attribuée au travail massif, en mathématique, sur les nombres sans unités contrairement en physique et en chimie ou la connaissance des unités est un prérequis indispensable pour toute application numérique d'une équation. La deuxième interprétation est liée à la compréhension conceptuelle de la notion de la proportion. En effet, l'élève ne reconnait pas la situation comme étant une situation directement proportionnelle, dans laquelle le coefficient de proportionnalité 0,0001 est le nombre par lequel il faut multiplier la valeur 1 000 000 g de la première variable pour obtenir la valeur 110 g associée de la deuxième variable.

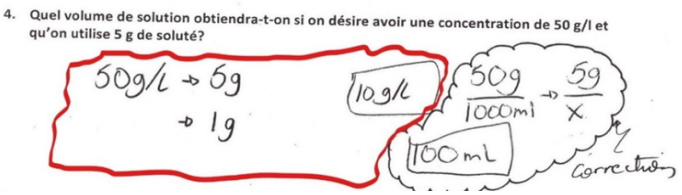
Deuxième incident didactique : Transformation de la concentration à 100 *ppm* = $\frac{1_g}{10\,000_g}$ à 10 000 *g*

Nous avons relevé d'autres erreurs dans les traces laissées dans la production 1. L'élève doit changer le registre de représentation et modéliser le texte en une écriture algébrique (Duval, 1995). La première erreur concerne la concentration 100 ppm représentée dans la proportion par 10 000 g. En effet, à partir du rapport $\frac{100_g}{1\,000\,000_g}$ l'élève a effectué une simplification par 100 : $\frac{100_g}{1\,000\,000_g} = \frac{1_g}{10\,000_g}$ Pour finir, il a transformé dans le même registre de représentation le $\frac{1_g}{10\,000_g}$ à 10 000 *g* Cette transformation a eu un impact sur le calcul du volume. De plus, l'élève a établi une proportion entre deux rapports qui n'ont pas de lien de proportionnalité ($\frac{C_2}{V_2} = \frac{C_1}{V_1}$ au lieu de $\frac{C_2}{V_1} = \frac{C_1}{V_2}$). Cette erreur pourrait constituer un obstacle à la modélisation du texte sous une forme de proportion.

Résultat possible : $\frac{C_2}{V_1} = \frac{C_1}{V_2} \rightarrow \frac{0{,}0001}{x} = \frac{0{,}07}{500\,000_{ml}} \rightarrow x = 714{,}29_{ml} = 714{,}29_g$

Résultat de l'élève : $\frac{C_2}{V_2} = \frac{C_1}{V_1} \rightarrow \frac{10\,000g}{500\,000_{ml}} = \frac{0{,}07}{x} \rightarrow x = 3{,}5_{ml} = 3{,}5_g$

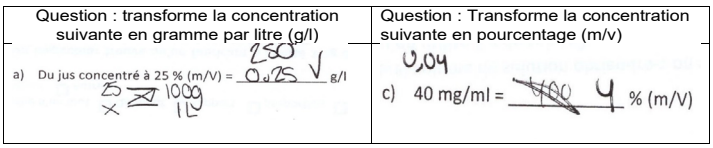
Troisième incident didactique : Erreur liée à la stratégie du retour à l'unité et à la recherche de fractions équivalentes



Production 2 – Erreur liée à la stratégie du retour à l'unité et à la recherche de fractions équivalentes

La production montre que l'élève trouve une concentration de 10 g/l plutôt que le volume d'une solution avec une soluté de 5 g, dont la concentration est de 50g/l. L'élève arrive à cette réponse en multipliant la concentration de 50g/l par 1 g et en divisant le tout par 5 g. La présence de 1 g d$50_{g/l} = \frac{50_g}{1\,000_{ml}} \rightarrow \frac{50_g \div 50}{1\,000_{ml} \div 50} = \frac{1_g}{20_{ml}}$ e l'élève voulait utiliser la stratégie du retour à l'unité: .

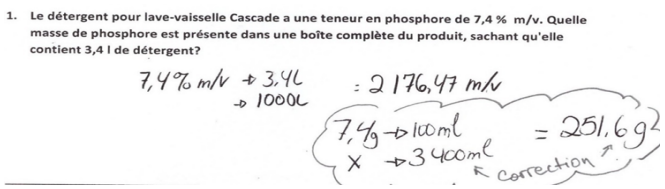
Quatrième incident didactique : Erreur liée à réversibilité de la pensée en transformant une concentration d'une expression à l'autre



Production 3 – Erreur liée à réversibilité de la pensée.

Cette tâche exige un raisonnement proportionnel car entre la concentration exprimée en pourcentage et la concentration exprimée en gramme par litres existe un lien de proportionnalité. Ce lien de proportionnalité est représenté par la règle suivante : $25_g \rightarrow 100_{ml}$ & $x_g \rightarrow 1000_{ml}$. Pour la résolution de ce type d'exercices, la connaissance des rapports des équivalences entre les unités afin de faire les conversions est primordiale. Les traces de l'élève montrent une erreur lorsqu'ils représentent la concentration comme étant 25 sur 100 grammes au lieu de traduire 25% $\left(\frac{m}{v}\right)$ *par* $\frac{25_g}{100_{ml}}$.

Cinquième incident didactique : Correspondance entre deux grandeurs qui n'ont pas de lien de proportionnalité



Production 4 – Correspondance entre deux grandeurs qui n'ont pas de lien de proportionnalité

L'élève fait correspondre la concentration 7,4 % m/v au volume 3,4 l. Cette correspondance ne représente pas de lien de proportionnalité entre les données. Cette erreur semble avoir un impact sur le raisonnement de l'élève pour déterminer la valeur manquante. En effet, pour trouver la masse de phosphore présente dans la boite complète du produit, l'élève applique la procédure du produit croisé sans contrôler le sens des données impliquées dans l'exercice. En effet, l'élève a gardé la concentration 7,4 % m/v sans toutefois la convertir en grammes par millilitres. La variété d'expression utilisées pour exprimer la concentration en soluté d'une solution (Arnaud, 1989) pourrait contribuer à cette erreur.

Les aides procurées aux élèves et les types de proximité selon le type d'intervention de l'enseignant

La première forme d'aide consiste à transformer une fraction en fraction équivalente exprimée en pourcentage

> Enseignant : Alors, si j'ai 8 personnes sur 17, combien ça m'en donne sur 100 ? Alors on va faire le 8 fois 100, donc le produit des extrêmes, qui va donner 800. Mais là je vais faire 8 x 100 = 800 divisé par le chiffre qui reste, 17. Quelqu'un peut me faire ça à la calculatrice ?

L'aide consiste à transformer une fraction $\frac{8}{17}$ en pourcentage en appliquant le produit croisé. La proximité est qualifiée d'horizontale car elle porte sur un rappel qui englobe la transformation et les équivalences des fractions et la notion de pourcentage. En effet, selon un cheminement scolaire régulier, ces concepts devraient déjà avoir été vus lors des classes de secondaire 1 et 2 (MELS : progression des apprentissages, 2016, p. 6).

La deuxième forme d'aide consiste à faire des rappels

> Enseignant : […] Vous m'avez parlé de pourcentages. Les pourcentages, par contre, faut faire attention, il y a trois types de pourcentages. Et ça va dépendre de quelle nature est le soluté, quel état est le soluté, est-ce que le soluté est solide, liquide ou voire même gazeux ? Puis est-ce que mon solvant est liquide ou ma solution finale est-ce qu'elle est liquide ou solide ? Est-ce que ça se peut des mélanges avec à la fin une solution qui est solide […]

L'aide consiste à rappeler l'importance de faire la distinction entre les différents pourcentages qui représentent les concentrations selon le type de soluté et le type de solvant. Ainsi, l'intervention utilise le même niveau de discours sans généralisation. Dans ce contexte, les élèves sont placés en position d'écoute, toutefois l'intervention ne peut pas garantir un changement au niveau des connaissances des élèves. La proximité est donc considérée horizontale.

La troisième forme d'aide vise à donner une signification à la concentration 0,9 %

> Enseignant : Ça veut dire 0,9 de soluté dans 100 de solution. […] La dernière chose qu'il te reste à faire c'est de dire : Mon soluté est-tu solide ou liquide ? Là tu vas me dire : Eh bien… il est dilué… Attention : avant de le mettre, le NaCl est sous quelle forme ? Solide ! Donc quand tu pèses du sel, tu le pèses en grammes. Et la solution finale, elle, que tu injectes dans les veines du patient elle est… liquide […]

L'aide consiste à donner une signification à la concentration exprimée en pourcentage. La proximité est qualifiée d'horizontale puisque l'enseignant donne des explications et met en garde les élèves sur le choix de la forme sur laquelle peut être exprimée la concentration.

La quatrième forme d'aide consiste à valider la procédure du produit croisé dans un contexte particulier

> Enseignant : Ah gang… vous êtes forts, gang ! Ça donne 0,28 ? Le principe est là…. J'en ai 8 dans 100, combien dans… 3,5 ?
>
> Élève : 0,28

L'enseignant valide la réponse de l'élève en verbalise le produit croisé utilisé par ce dernier pour détermine la quatrième proportionnelle. La proximité est qualifiée de descendante puisque l'élève applique la procédure du produit croisé avec succès dans un contexte particulier.

Les effets du contrat didactique

Le Paradoxe du comédien

Il arrive parfois que l'enseignant pose des questions et apporte lui-même les réponses attendues. Il prive ainsi l'élève des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée.

> Enseignant : Combien de millimètres dans un mètre ? 1 000. Combien de milligrammes dans un gramme ? 1 000.

L'enseignant donne des indices pour simplifier la résolution de l'exercice

> « Si on a perfusé un patient avec une soluté de 9%, combien de grammes de sel dans le sang le patient va avoir eu après avoir perfusé un sac complet de soluté ? » Question posée par l'enseignant aux élèves lors des interactions en classe.

> Enseignant : […] à la fin le patient va avoir eu combien de grammes de sel dans son sang ? Je ne parle plus de concentration là, je ne parle que de quantité de solution. Je vous laisse le calculer […]. Mets des unités, fais un calcul puis je te donne un indice : C'est sûr que c'est un produit croisé. C'est certain que c'est un produit croisé.

Afin d'éviter les difficultés chez les élèves, l'enseignant donne des indices pour simplifier la résolution de l'exercice en faisant en sorte que l'élève obtienne la bonne réponse par l'application du produit croisé. Ainsi, l'enseignant prend à sa charge l'essentiel du travail et les connaissances visées disparaissent complètement.

L'enseignant s'attendait que les élèves utilisent les unités quand ils font leurs calculs

> Enseignant : Thomas, tu peux te servir de ce qui est là, ou tu peux écrire totalement ce que tu veux. 6 dans 100… ou bien dans 500… et ça te donne 30, 30 quoi ? Ça là, faites attention à ça : en mathématiques vous perdez énormément de points si vous ne mettez pas vos unités qui est 30 millilitres.

L'effet de l'attente incomprise consiste à croire qu'une réponse attendue des élèves va de soi. Ici, l'enseignant s'attendait que les élèves utilisent les unités quand ils font leurs calculs. Comme les concentrations sont présentées sous différentes formes, leurs unités demeurent un indicateur pour comprendre la situation selon le contexte de l'exercice.

Discussion

En somme, les interactions étudiées, entre l'enseignants et ses élèves, ont permis d'identifier comment les composantes de la situation influencent l'apprentissage et l'enseignement dans le contexte interdisciplinaire. Nous observons que les élèves considèrent la fraction rapport comme une quantité sans relation entre le numérateur et le dénominateur. Or, le prolongement de la fraction « rapport » dans le contexte de la proportionnalité a eu un impact sur la reconnaissance des relations proportionnelles. Un enseignement de la proportionnalité qui privilégie l'application de la règle de trois, par rapport à la construction de sens sur les propriétés caractéristiques de la proportionnalité et le travail sur les implicites pourrait expliquer l'origine de cette interprétation. Mobiliser les fractions dans les différentes situations pourrait exiger une conception plus globale qu'une conception locale liée à une institutionnalisation inachevée du savoir : « c'est le problème de l'institutionnalisation du savoir, car le savoir doit être extrait du contexte dans lequel il est apparu pour devenir autonome, négociable avec d'autres. L'institutionnalisation transforme une expérience en un savoir exportable » (Brousseau, 1984). Cette construction locale des savoirs va à l'encontre d'une construction de savoirs mobilisables dans les tâches nouvelles. Cela a sans doute un impact sur les apprentissages des savoirs en jeu. De plus, nous observons que les aides procurées aux élèves, par l'enseignant, se concentrent davantage au niveau des proximités horizontales. Elles ont un caractère très local et ne favorisent pas la rupture du contrat didactique, contribuant ainsi au maintien du contrat didactique par la présentation de

la procédure du produit comme étant la solution aux situations proposées. La difficulté de ce type d'intervention correspond à l'impossibilité d'adapter cette procédure à d'autres situations sans compréhension textuelle et relationnelle de l'énoncé (Voyer, 2006). La construction de la procédure du produit en croix se fait aux dépens de la construction du sens pour dégager les implicites des énoncés et de la construction du sens de la proportionnalité et du raisonnement proportionnel qui sont deux notions sous-jacentes à la procédure du produit croisé. Cela a pour conséquence un apprentissage basé sur la mémorisation des procédures influencé par les attentes des enseignants. De plus, les effets de contrat qui émergent tendent à susciter des attentes chez les élèves. Enfin, les erreurs observées chez les élèves pourraient avoir un effet sur la planification des enseignants puisqu'ils prévoient un temps pour faire un retour sur les concepts de fraction et proportion sous forme de rappel.

Conclusion

Nous avons relevé trois types d'erreurs : le volet lié aux données de l'énoncé de la tâche lors du passage d'un registre de représentation sémiotique à un autre registre, le volet conceptuel et le volet procédural. Les erreurs des élèves, variées et imbriquées les unes aux autres, constituent des obstacles à l'apprentissage. Ces erreurs résultent des caractères implicites et textuels de la tâche et de l'application coûte que coûte de la procédure du produit croisé. L'enseignement et l'apprentissage sont également influencés par la relation didactique établie par le contrat didactique. Cette influence a été décrite dans notre analyse par la manifestation d'interventions qualifiés essentiellement de proximités horizontales. Ces dernières ne provoquent pas de conflit cognitif chez les élèves. Elles ont l'avantage de maintenir le contrat didactique en empêchant sa rupture. Si le traitement des incidents didactiques met en relief certains types de proximité, la volonté de l'enseignant de maintenir la relation didactique et d'empêcher une rupture du contrat didactique ouvre quant à elle la voie à certains effets de contrat. Ces derniers sont nombreux et contribuent à revoir à la baisse les objectifs des apprentissages pour faciliter la réussite des élèves de plusieurs manières.

Références

Aldon, G. (2011). *Interactions didactiques dans la classe de mathématiques en environnement numérique: construction et mise à l'épreuve d'un cadre d'analyse exploitant la notion d'incident* (Thèse doctorale, Université Claude Bernard-Lyon I).

Arnaud, P. (1989). *Cours de chimie physique*. Dunod. Paris : Bordas.

Barallobres, G. et Lemoyne, G. (2006). L'enseignement des opérations sur les fractions: une visite commentée de manuels québécois et argentins. *Le manuel scolaire. Un outil à multiples facettes*, Québec: Presses de l'Université du Québec, 159-189.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. et Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91-126.

Benrherbal, A. (2021). *Comment les situations faisant intervenir les fractions et les proportions en mathématique et en sciences pourront-elles influencer l'apprentissage et l'enseignement de ces disciplines?* (Thèse de doctorat). Université Laval, Canada.

Bridoux, S., Chappet-Pariès, M., Grenier-Boley, N., Hache, C. et Robert, A. (2015). *Les Moments d'exposition des Connaissances en mathématiques (secondaire et début de l'université)*. Paris: IREM de Paris. Repéré à https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02111575

Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques, 2*(1), 37-127.

Brousseau, G. (1983). Obstacles épistémologiques en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 165-198.

Brousseau, G. (1984). Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. *Actes de la 3e école d'été de didactique des mathématiques*.

Brousseau, G. (2009). *Le cas de Gaël revisité (1999-2009)*.

Desjardins, M., & Hétu, J. C. (1974). *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions: Par Michel Desjardins et Jean-Claude Hétu*. Montréal : Presses de l'Université du Québec.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Kieren. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. *Recent research on number learning*, 125-149.

Kieren. (1988). Personal knowledge of rational numbers. Dans J. Hierbert et M. Behr (Éd.) *Numbers concepts and operation in the middle grade* (p. 1-18). Hillsdale, NJ Erlbaum: Reston, FA : National Council of Teachers of Mathematics.

MEQ (2001). *Programme de formation de l'école québécoise*. Québec: Ministère de l'Éducation du Québec.

MELS (2016). Progression des apprentissages au secondaire. Mathématique. *Québec, Ministère de l'éducation, du Loisir et du Sport*.

Robert, A. et Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*, 239-285.

Roditi, E. (2003). Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(2), 183-216.

Roditi, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris: L'Harmattan.

Rogalski, J. (2000). Y a-t-il un pilote dans la classe? Approche de psychologie ergonomique de l'activité de l'enseignant. ARDM, *Actes du Séminaire National de Didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Thomas, D. R. (2006). A general inductive approach for analyzing qualitative evaluation data. *American journal of evaluation, 27*(2), 237-246.

Voyer, D. (2006). L'influence de facteurs liés à l'élève ou à l'énoncé sur la compréhension en résolution de problèmes écrits d'arithmétique.

Titre: Des jeux pour faciliter l'apprentissage des mathématiques à la maternelle et au primaire : l'expérience du Bénin

Auteur: COSSOU Magloire

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 676 - 682

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Des jeux pour faciliter l'apprentissage des mathématiques à la maternelle et au primaire : l'expérience du Bénin

COSSOU Magloire

Résumé – Conçue et élaborée dans la rubrique *Description d'exemples*, cette affiche vise à présenter au cours des travaux de l'EMF 2022, l'évolution de l'école béninoise quant à l'utilisation des jeux dans les pratiques enseignantes pour faciliter l'apprentissage des mathématiques. Dès son démarrage en 1980, la maternelle s'est résolument inscrite dans cette logique alors qu'il a fallu attendre 2014 pour que, avec le plaidoyer et l'appui technique du projet Pro-Educ, les lignes commencent à bouger dans ce sens au niveau du primaire.

Mots-clefs : jeux, pratiques enseignantes, apprentissage, mathématiques, Bénin

Abstract – Designed and developed in the *Description of examples* section, this poster aims to present during the work of the EMF 2022, the evolution of the Beninese school with regard to the use of games in teaching practices to facilitate learning. mathematics. From its start in 1980, the kindergarten was resolutely part of this logic while it was not until 2014 so that the support of a project begins to move the lines in primary school.

Keywords: games, teaching practices, learning, mathematics, Benin.

Au Bénin comme sous d'autres cieux, les idées reçues sur la rigueur inhérente aux mathématiques et les exigences des tâches à accomplir dans n'importe quelle composante de cette matière ont induit des pratiques d'enseignement arides et trop souvent rébarbatives pour les apprenants des mathématiques aux différents niveaux du système éducatif formel. Il résulte de cet état de choses un taux élevé d'élèves en difficulté, voire en échec dans cette matière. Cependant, les résultats des recherches et des innovations dans ce domaine permettent d'établir que cette situation n'est pas une fatalité et qu'il est possible de s'appuyer sur des jeux pour faciliter les apprentissages en mathématiques.

Pour ce faire, nous allons focaliser successivement notre attention sur les mathématiques et les jeux, l'expérience engrangée par les deux premiers ordres d'enseignement de l'école béninoise dans l'utilisation des jeux pour faciliter les apprentissages en mathématiques, les défis à relever dans cette optique et les perspectives qu'offre l'utilisation des jeux en mathématiques.

Mathématiques et jeux

Cadre théorique

À première vue, les activités mathématiques et les activités ludiques ont longtemps été considérées et traitées comme antinomiques. C'est ainsi que l'on entend dire et écrire d'une part que : « Les *mathématiques* sont un ensemble de "disciplines ayant pour objet l'étude des grandeurs, de leur comparaison, de leur mesure. » Legendre, R. (2005) et d'autre part que : « le *jeu* est une activité physique ou mentale purement gratuite, généralement fondée sur la convention et la fiction, qui n'a dans la conscience de celui qui s'y livre, d'autres fins qu'elle-même, d'autres buts que le plaisir qu'elle procure. » Château, J (1973).

Telles qu'elles sont définies ci-dessus en première position avec le sérieux et la rigueur qui les caractérisent, les mathématiques sont, par voie de conséquence, incompatibles le jeu tel qu'il est généralement perçu et présenté. C'est ainsi que : « Le jeu peut être défini comme une activité de loisir soumise à des règles et ayant pour but de divertir, de s'amuser, d'en tirer du plaisir. Le jeu est une activité naturelle de l'enfant. Grâce au jeu l'enfant exerce et développe ses capacités, stimule ses sens. » Château, J (1973)

De nos jours, le jeu est perçu et utilisé comme une véritable stratégie d'enseignement efficace pour soutenir la motivation intrinsèque des apprenants. Son facteur clé est l'esprit de compétition qui motive les participants aux activités et évalue par là-même leur performance. Les joueurs ne sont pas en compétition les uns contre les autres et dans l'ensemble des jeux pratiqués à l'école, il y en a plusieurs qui nécessitent un travail d'équipe pour surmonter des obstacles ou des adversaires qui y sont reliés. S'il est pertinent et bien organisé, le jeu est une stratégie d'enseignement efficace pour susciter et soutenir la motivation intrinsèque des apprenants au cours des séquences de classe en mathématiques. Il est donc important pour l'enseignant de tenir compte des spécificités de chaque

situation d'apprentissage et des résultats qui en sont attendus pour choisir les jeux les plus pertinents. Les constats faits au cours des observations de séquences d'activités d'enseignement-apprentissage des mathématiques dans les sections de la maternelle et dans les classes du primaire dont les animateurs/enseignants s'appuient sur les jeux éducatifs pour enseigner les contenus de formation prévus en mathématiques, mettent en relief le fait que l'utilisation des jeux suscite la motivation et l'engagement de l'apprenant. Elle facilite aussi la gestion des grands groupes dans une approche différenciée, la compréhension des notions et concepts souvent abstraits des mathématiques et une construction individuelle des savoirs dans la coopération. La pratique des jeux mathématiques offre aux apprenants, des occasions variées et sans contrainte pour un entrainement continu.

Typologie sommaire des jeux éducatifs les plus couramment utilisés au Bénin

La classification systématique des jeux éducatifs les plus couramment utilisés au cours des activités pédagogiques fait ressortir 4 composants. Il s'agit des jeux symboliques basés sur l'imitation, l'imagination ou et « faire semblant » ; des jeux de manipulation sous-tendus par des activités de construction, d'assemblage ou d'expérimentation ; des jeux de société qui visent le respect de la règle et qui se pratiquent à plusieurs personnes, par opposition aux jeux de casse-tête qui se pratiquent seul et des jeux moteurs qui font bouger certaines parties du corps ou tout le corps de différentes façons pour courir, sauter, ramper, marcher à 4 pattes.

À partir de février 2017 de nouveaux jeux ont été introduits au niveau de l'enseignement primaire.

Expérience du Bénin dans l'utilisation des jeux à l'école

Présentation et analyse de la situation à la maternelle et au primaire

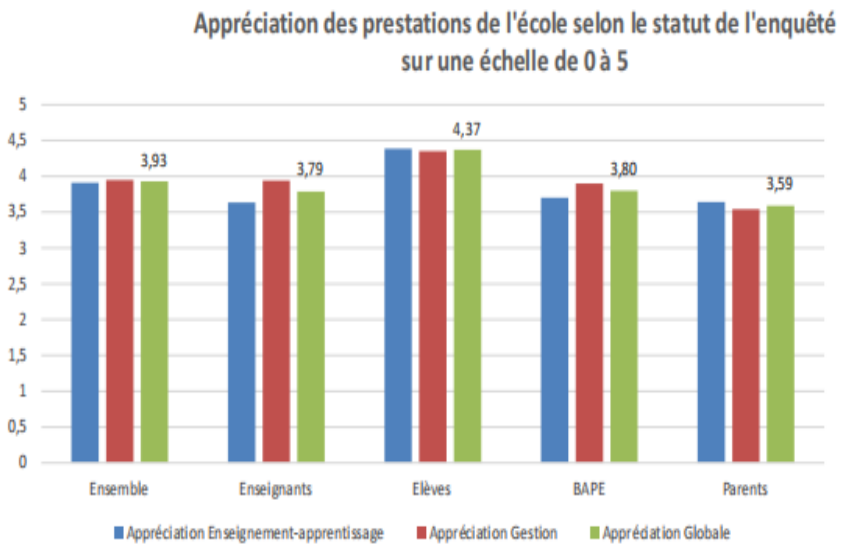
L'enseignement maternel a été systématisé à partir de 1980 à travers les *Centres d'Eveil et de Stimulation de l'Enfant (CESE)* jusqu'en 1990 où l'appellation *Ecole Maternelle (EM.)* a été retenue pour désigner ces établissements. Cet ordre d'enseignement a toujours pour mission de stimuler et d'éveiller les enfants âgés de 2 ans et demi à 3 ans dans la *Section des petits* et ceux âgés de 3 à 5 ans la *Section des grands*. Les prescriptions officielles[1] regroupent les contenus de formation 5 domaines complémentaires parmi lesquels le troisième est dédié au « Développement de la réflexion, des aptitudes intellectuelles et celui des « préapprentissages». C'est dans ce domaine que sont logées les activités d'enseignement-apprentissage des mathématiques qui sont dénommées à ce niveau, *activités de pré-mathématique*. Les activités prévues dans ce cadre visent à permettre au jeune enfant d'accéder à la conservation de la quantité, à la construction de la notion de nombre, à la structuration de l'es-

1. Ministère des Enseignements Maternel et Primaire, *Programmes d'activités d'éveil et approches pédagogiques à l'enseignement maternel*

pace et à la construction de la notion de mesure. Depuis son lancement en 1980 jusqu'à présent au Bénin, l'enseignement maternel a toujours utilisé les jeux comme sa pierre angulaire.

Pour sa part, l'enseignement primaire accueille les enfants âgés de 5-6 ans à 11-13 ans dans 3 sous-cycles qui couvrent chacun, 2 années d'études. Les curricula en vigueur dans le primaire depuis 2005[2] prescrivent que « L'arithmétique, la géométrie et la mesure *soient étudiées à travers des situations de découverte, de conceptualisation, de réinvestissement et de résolution de problème sur les nombres entiers naturels et la numération, sur des opérations, les nombres décimaux, les fractions, la proportionnalité, les suites numériques et des tableaux de données.* »

L'utilisation des jeux pour enseigner les mathématiques à l'école primaire a été initiée et appuyée en février 2017 par le projet Pro Educ dans 100 écoles primaires de 6 classes chacune retenues dans 4 des 12 départements que compte le pays. Dans son Champ d'action 2 (amélioration de la qualité de l'école), ce projet s'est évertué à promouvoir l'utilisation de nouvelles ressources didactiques basées sur des jeux pour faciliter les apprentissages en mathématiques. Après 18 mois de mise en œuvre et de suivi de ces innovations, une évaluation des résultats et des effets induits a été réalisée en aout 2018. Pour ce faire, il a été procédé au recueil et à l'analyse des appréciations des acteurs[3] de l'enseignement primaire sur les innovations didactiques prônées. Un échantillon de 12 écoles de 6 classes chacune a été retenu à cet effet. Le graphique ci-dessous permet de visualiser les résultats de cette évaluation.



Source : Rapport d'évaluation de Pro-Educ, 2018

Graphique 1 – Appréciation par les principaux acteurs, des prestations des écoles

2. Ministère des Enseignements Maternel et Primaire (2005), *Curricula de mathématiques à l'école primaire*

3. Directeurs d'école, enseignants, élèves, pères et mères d'élèves directeurs d'école, enseignants, élèves, pères et mères d'élèves

Ce graphique fait ressortir, à travers les notes moyennes obtenues par les apprenants et qui varient de 3,59 à 4,37 deux faits saillants. Premièrement, la grande majorité des acteurs de la vie scolaire enquêtés s'est déclarée satisfaite des prestations de l'école, tant du point de vue de de la motivation des élèves pour l'étude des mathématiques engendrée par l'utilisation des jeux comme supports didactique que du point de vue des performances relativement élevées des apprenants dans cette matière naguère réputée aride. Deuxièmement, les élèves sont plus enthousiastes que les autres acteurs. Ces constats ont de quoi émerveiller les acteurs, les gestionnaires et les partenaires de l'école béninoise. Cependant, compte tenu de tout ce qu'il reste à faire sur ce chantier, il serait plus sage d'avoir le triomphe modeste.

Discussion

L'utilisation des jeux pour faciliter les apprentissages en mathématiques offre aux acteurs de l'éducation de nouvelles stratégies et de nouveaux outils pour organiser les séquences de classe avec plus d'efficacité en facilitant les apprentissages en mathématiques. Cependant, face aux premiers succès engrangés et à l'engouement manifestes des acteurs et des partenaires de l'école béninoise, il convient d'avoir le triomphe modeste lorsque l'on sait que toutes les avancées enregistrées n'ont été possibles que grâce à l'appui technique et au soutien financier d'un projet qui par définition est à durée limitée. La réussite de la pérennisation des acquis issus de cette expérience et de la mise à l'échelle de la nouvelle posture didactique qui la sous-tend nécessite l'élaboration et la mise en œuvre conséquente d'un dispositif approprié en la matière.

Défis

Pour évoluer vers la situation souhaitée, il est nécessaire de trouver les voies et les moyens appropriés pour poursuivre le plaidoyer qui permettra d'intégrer l'utilisation des jeux pour faciliter les apprentissages en mathématiques dans les plans de formation initiale, dans les plans de formation en cours d'emploi et dans le coaching au quotidien des enseignants.

Conclusion

Les innovations opérées dans le domaine de l'utilisation de divers jeux pour faciliter les apprentissages en mathématiques sont importantes mais il reste encore beaucoup à faire en termes de communication, d'organisation et de formation pour étendre et pérenniser les acquis.

Bibliographie

Adoglo, C, Araba, E et Dossa C. (2006). *Document d'accompagnement du programme d'activités d'éveil et approches pédagogiques à l'enseignement maternel* 1ère édition. Porto-Novo : Right to Play Bénin.

Château, J. (1973). *Le jeu chez l'enfant, introduction à la pédagogie*, 6e édition J. Urin.

Johnson, C. (2009). *Recueil de jeux Document d'accompagnement du programme d'activités*, 1ère édition. Cotonou : Right to Play Benin.

Legendre, R. (2005). *Dictionnaire actuel de l'éducation*. Montréal : Guérin.

Wagner, P. (2018). *Collection des différents outils d'apprentissage pour les écoles primaires*, 1ère édition. Cotonou : Pro-Educ Bénin.

Titre: Contribution pour l'amélioration des pratiques motivationnelles pour l'apprentissage des nombres en cours préparatoire première année

Auteur: DJOUE BOA Ekora Hélène

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 683 - 692

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Contribution pour l'amélioration des pratiques motivationnelles pour l'apprentissage des nombres en cours préparatoire première année

DJOUE BOA[1] Ekora Hélène

Résumé – L'étude traite des modalités d'appréciation d'élèves ivoiriens de six (6) ans en classe de Cours Préparatoire Première année (CPI) en mathématique sur les nombres. Elle vise à montrer l'impact des pratiques motivationnelles sur la construction des nombres en CP1. Les données ont été recueillies à l'aide d'un questionnaire et de l'observation de situations de classe. Les résultats indiquent que les pratiques d'appréciation impactent positivement l'état émotionnel des apprenants et favorisent un meilleur apprentissage des nombres.

Mots-clés : pratiques motivationnelles, apprentissage, nombres, appréciations.

Abstract – The study deals with the methods of appreciation of Ivorian students of six (6) years in mathematics class on the numbers in CP1. It aims to show the impact of motivational practices on the construction of numbers in CP1. The data was collected using a questionnaire and observation of classroom situations. The results indicate that appreciation practices positively impact the emotional state of learners and promote better learning of numbers.

Keywords: motivational practices, learning, numbers, appreciation

1. Inspecteur de l'Enseignement Préscolaire et Primaire, Laboratoire de Recherche en Didactique (LAREDI) de l'ENS d'Abidjan, Côte d'Ivoire, ekorahelene@gmail.com

Considération introductives et contextuelles

Selon le rapport du PASEC (2014), la part des dépenses totales pour améliorer le fonctionnement des administrations de l'éducation nationale est de 20,7%. Ces moyens financiers ont permis de faire des investissements significatifs à travers la construction, la réhabilitation et l'équipement des salles de classe pour améliorer le système éducatif ivoirien. Cependant, améliorer un système éducatif, ne se résume pas seulement aux aspects structurels et administratifs. Il faut renforcer les capacités opérationnelles des enseignants aux plans didactique et pédagogique. Pour accompagner ces investissements sur le plan structurel, pour améliorer l'efficacité interne de son système éducatif, la Côte d'Ivoire a entrepris aussi une réforme curriculaire. Les programmes scolaires, autrefois modélisés en pédagogie par objectifs (PPO), sont désormais dans un format d'approche par compétences (APC). Ces nouveaux programmes placent les mathématiques dans le domaine des sciences au même titre que la discipline des sciences et technologies. Le régime pédagogique des mathématiques au primaire occupe environ 32.45% contre 6.07% pour les autres sciences du volume horaire des emplois du temps.

Les activités numériques en cours préparatoire première année (CP11) abordent les nombres de zéro (0) à vingt (20). Les apprentissages de la numération au CP1 prennent en compte les activités prénumériques (tris, classements, correspondances termes à termes, rangements, jeu de Kim, etc.), l'écriture (chiffres, lettres), codage et décodage, comparaisons. La démarche d'enseignement-apprentissage en mathématiques se fait en sept (7) étapes (prérequis ou rappel, présentation de la situation d'apprentissage, recherche en groupe, présentation des productions de groupe, validation collective, fixation /synthèse, évaluation). A chacune de ces étapes, chaque enseignant déploie ses pratiques conformément aux instructions officielles qui demandent que l'enseignant soit un médiateur où un guide pour ses élèves. Les objets traités doivent de ce fait, être motivants pour capter l'attention des apprenants et leur donner du sens (Nebout Arkhurst, 2017). Pour Nebout Arkhurst (2017), toute pratique enseignante doit intégrer le binôme motivation-compétence dans la construction des savoirs, car une faible motivation de l'élève conduit à une faible compétence de ce dernier. Dans le processus d'enseignement-apprentissage, la configuration idéale recherchée doit s'ancrer dans une forte motivation pour installer une forte compétence (Nebout Arkhurst, 2017). L'analyse des dispositifs officiels ne précise nulle part les modalités motivationnelles qui sont censées accompagner les pratiques des enseignants. Les pratiques motivationnelles ne sont pas modélisées ni formalisées au plan institutionnel. L'initiative est laissée à chaque enseignant de créer ces propres modèles de motivation quel que soit la discipline. Dans ces conditions, comment un enseignant privé de modèle explicite officiel en matière de motivation, peut-il développer des pratiques motivationnelles pour impacter positivement l'apprentissage des nombres en CP1. Cette préoccupation constitue un enjeu didactique et pédagogique qui prendrait en compte la motivation dans la construction des nombres en CP1. L'objectif de l'étude est de contribuer à l'amélioration de l'apprentissage des nombres en CP1 par des pratiques motivationnelles. Nous postulons que les pratiques motivationnelles améliorent l'apprentissage des nombres en CP1.

Répères théoriques

Les pratiques motivationnelles au cœur de l'apprentissage.

Selon Viau (1994), la motivation en contexte scolaire est un état dynamique. Pour Claparède (1931), l'enseignant doit éviter de terroriser intellectuellement les élèves par des mauvaises notes, des sanctions, etc. Il est aussi important de ne pas frustrer les apprenants qui ont des difficultés de compréhension en les traitants comme des êtres inférieurs. Quant à Nebout Arkhurst (2017), l'enseignant doit d'abord choisir ce qu'il va enseigner à ses élèves, l'organiser de façon à ce que le contenu soit plus « accessible » à apprendre conformément au postulat de Vygotsky (1998) sur la zone proximale de développement (ZPD). L'enseignant ne doit pas travailler uniquement avec les élèves considérés comme « meilleures » et laisser dans un coin de la classe ceux considérés comme « moins performants ». Il doit prendre un temps suffisant pour que l'élève construise ses connaissances avec du sens et avec joie. L'atmosphère dans une classe doit stimuler le désir d'apprendre des élèves et non l'inhiber.

Les nombres et leurs modalités d'enseignement en CP1

Selon Brissiaud (2007), l'usage cardinal des nombres est le plus important car c'est celui qui permet de comprendre comment les quantités sont reliées entre-elles, c'est-à-dire construire le nombre. Pour désigner des rangs, on utilise le nombre qui a été construit en contexte cardinal. Avec les élèves, il est d'ailleurs préférable de parler de position et des rangs en utilisant des mots (premier), (deuxième), ceux que la grammaire qualifie d'ordinaux. Aussi, pour Dorier, Gueudet, Peltier Robert et Roditi (2018), la numération chiffrée est une numération décimale de position. De nombreuses irrégularités existent dans les noms des nombres. On dit onze, douze, treize, quatorze, quinze et seize et non dix-un, dix-deux, dix-trois, dix- quatre, dix-cinq, dix-six comme dans dix-sept, dix-huit et dix-neuf. On dispose également des mots spécifiques pour les premières dizaines (vingt, trente, quarante, etc.).

L'étude des nombres en CP1 dans le système ivoirien ne concerne que la numération décimale. Les nombres de la tranche d'un (1) à six (6) se découvrent par vision globale. Le zéro (0) se découvre avec la relation « un de moins » alors que les autres nombres à partir de sept (7) se découvrent avec la relation « un de plus ». Généralement, les nombres dont les noms sont désignés par un seul terme après dix (10) sont difficiles à appréhender parce que leur nom n'apparaît pas dans leur décomposition en dizaine-unités. Les noms des nombres, à partir de dix-sept (17) et en dehors des dizaines, se lisent à partir de leur décomposition en dizaines-unités comme le montre l'exemple ci-après.

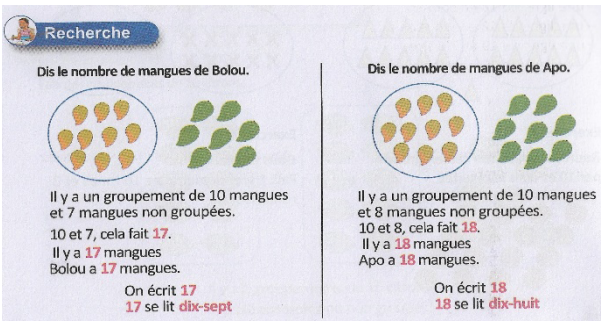


Figure 1 : Un exemple de décomposition de nombres (manuel élève mathématiques CP1, p...

Ces mécanismes graduels et variés dans le fonctionnement des nombres en CP1 montrent toute la complexité de construction des nombres à ce niveau de cours au primaire.

Méthodologie

Toutes nos recherches se sont déroulées dans trente (30) écoles primaires de l'Inspection de l'Enseignement Préscolaire et primaire (IEPP) de Cocody Akouedo (Abidjan). Notre population cible concerne les enseignants et élèves de CP1. L'échantillon de notre recherche est composé de trente (30) enseignants et 300 élèves de cinq (5) classes. La méthode utilisée est mixte (qualitative et quantitative). Pour notre investigation, nous avons procédé par un questionnaire adressé aux enseignants et des observations de classe. D'une part, les centres d'intérêt du questionnaire concernent des indicateurs utilisés par les enseignants pour apprécier les productions des élèves dans l'étude des nombres. Ces indicateurs sont de types très bien, bien, assez bien, moyen, insuffisant, médiocre, mauvais et nul. D'autre part, d'autres items traitent des modalités de mise en éveil à travers les chants, taper des mains, se tenir debout et assis, des petits sauts sur place, des cric-crac, de productions de bruits divers et des interpellations orales. La grille d'observation reprend les mêmes indicateurs et modalités de motivation prévus dans les items du questionnaire. Les séances observées concernent l'écriture en chiffres, en lettres et le codage et décodage des nombres étudiés en CP1. Ce double regard vise à comprendre l'ancrage des opinions déclarées des enseignants dans le questionnaire dans leurs choix de pratiques motivationnelles dans l'étude des nombres. Pour chaque cas, les fréquences relatives sont calculées pour évaluer le poids d'utilisation des indicateurs ou des modalités de motivation pendant l'étude des nombres.

Résultats

Les résultats sont présentés et commentés en tenant compte des outils de collecte de données, à savoir, le questionnaire et les observations de classe.

Résultats du questionnaire

Indicateurs d'appréciations	Très bien	Bien	Assez Bien	Moyen	Insuffisant	Médiocre	Mauvais	Nul
Fréquences relatives	21,25%	21,25%	12,54%	7,32%	11,15%	10,45%	12,20%	3,83%

Source (enquête terrain 2019)

Tableau 1 : Indicateurs d'appréciations et de dépréciations

D'après les résultats du tableau 1, la fréquence des indicateurs du registre verbal d'appréciations positives (très-bien, bien, assez-bien moyen) des enseignants enquêtés pendant l'appropriation des nombres en CP1 est de 62,35%. Quant à la fréquence des indicateurs de dépréciations du registre verbal est de 37,65%. Plus du tiers des enseignants questionnés déprécient oralement les productions des apprenants. Ces pratiques démotivent les élèves à l'apprentissage des nombres.

Modalités de mise en éveil	Chant	Faire un banc	Debout-assis	Des petits sauts	Cric-crac, bouche-bée	Faire un bruit sec	Taisez-vous !	Mains tendues !	Suivez !	Taper sur son bureau	Restez débout
Fréquences relatives	15,36%	17,93%	5,07%	7,80%	6,34%	2,54%	12,86%	5,07%	9,06%	11 ,60%	6,34%

Source (enquête terrain 2019)

Tableau 2 – Indicateurs des procédés de mise en éveil des élèves

D'après les résultats du tableau 2, la fréquence des mouvements gestuels et de demande d'attention motivantes (chant, faire un banc, debout-assis, des petits sauts, cric-crac, bouche-bée) est de 52,50%. Ceux qui sont démotivantes ont une fréquence de 47,50%. Les procédés de mise en éveil sont sensiblement de la même fréquence en termes de motivation et de démotivation. Les procédés de mise en éveil, au lieu de capter l'attention de tous les élèves, démotivent presque la moitié des élèves. Les enseignants, au regard de leurs opinions, font assez de choix démotivants dans leurs pratiques sur l'enseignement des nombres.

Résultats des observations des enseignants

Indicateurs	Chant	Faire un « banc »	Cric-crac Bouche-bée	Taper sur son bureau	Emettre un cri	Taisez-vous !	Faire un bruit sec
Fréquences relatives	9,45%	22,35	8,24%	12,94%	21,18%	15,29	10,59%

Source (enquête terrain 2019)

Tableau 3 – Demandes d'attention motivantes et démotivantes

D'après les résultats du tableau 3, la fréquence des demandes d'attention motivante des enseignants (chant, faire un banc et cric-crac, bouche bée) est de 40,04 % alors que celle des pratiques démotivantes (*taper sur le bureau, émettre un cri, faire un bruit sec*) est de 59,96%. Les demandes d'attention des enseignants sont majoritairement démotivantes alors qu'elles devraient plutôt créer un climat calme et motivationnel.

Résultats de l'observation des élèves

Indicateurs d'émotion	Enthou-siaste	Souriant	Confiant	Dyna-mique	S'applique Davantage	Apeuré	Inhibé	Triste	Timide	Désin-téressé
Fréquence relatives	20%	12%	10%	9%	10%	6%	2%	6%	5%	20%

Source (enquête terrain 2019)

Tableau 4 – Indicateurs de l'état émotionnel des élèves

D'après les résultats du tableau 4, la fréquence des indicateurs d'émotions positives (enthousiasme, sourire, confiance, dynamisme et application) est d'environ 61% qui semblent proches des indicateurs d'appréciations positives. La fréquence des charges émotionnelles négatives (apeuré, inhibé, triste, timide, est désintéressé) est de 39% qui semblent être le reflet des pratiques de dépréciation des enseignants. Cette dernière tendance pourrait constituer une source potentielle de démotivation dans l'apprentissage des nombres.

Interprétation et discussion des résultats

Selon les informations recueillies lors de l'enquête, les enseignants disposent de diverses techniques pour apprécier et motiver leurs élèves. Les procédés de mise en éveil et les modalités du registre verbal sont des outils d'appréciation et de motivation des élèves. Ces derniers sont très sensibles émotionnellement aux expressions d'appréciations positives. Cette manière positive d'apprécier les élèves semble être une source de motivation important susceptible de créer un dynamisme comme

le souligne Viau (1994). Ce qui rejoint notre postulat selon lequel les pratiques motivationnelles améliorent l'apprentissage des nombres.

Certains enseignants, par leurs propos humiliants, découragent les apprenants qui ne trouvent pas les bonnes réponses. Ils déprécient leurs productions. Certaines demandes d'attention à tendances agressives, démotivent plus qu'elles ne motivent. Les enseignants doivent savoir les choisir afin de créer un climat sain et motivationnel dans la classe.

Dans le but de capter l'attention des élèves et de les motiver à l'apprentissage des nombres, certains enseignants utilisent des procédés de mise en éveil qui ne sont pas adéquats. En effet, lors des observations des enseignants et des élèves, les indicateurs du registre verbal motivent les « meilleurs » élèves et démotivent les « moins bons » alors que tous les élèves devraient être motivés à apprendre. Selon Nebout Arkhurst (2017), l'atmosphère dans une classe doit stimuler le désir d'apprendre des élèves et non l'inhiber. Ces pratiques démotivantes amènent les élèves à être tristes, apeurés inhibés. Pour capter leur attention de manière consistante, nous proposons d'accompagner l'étude des nombres par le design ci-après.



Figure 2 : Codage coloré des nombres

L'enseignant doit présenter les nombres comme nos compagnons de tous les jours. Ils nous parlent et nous regardent d'où les yeux et la bouche. Aussi, les enfants sont portés sur les couleurs et les friandises utilisées pour le codage et décodage des nombres.

Conclusion

La motivation, lorsqu'elle est bien orchestrée par l'enseignant, a un impact positif sur l'apprenant. Toutes ces pratiques motivationnelles développées en mathématique dans cette étude jouent un rôle prépondérant dans l'apprentissage des nombres en CPI. Elles pourraient être appliquées dans toutes les disciplines. L'enseignant doit pouvoir les choisir selon les disciplines à enseigner et aux différents moments d'apprentissages.

Pendant l'Education Physique et Sportive (EPS), les élèves doivent être motivés en début de séance (prise en main) par l'échauffement. Au cours de l'échauffement, l'enseignant n'a pas besoin d'une motivation particulière pour capter leur attention ni pour les maintenir en éveil puisqu'ils le sont

déjà. Il en est de même pour l'apprentissage du chant où l'éveil est en permanence. La motivation est aussi un outil qui facilite la tâche de l'enseignant. Il est donc essentiel que le maître ait une bonne connaissance des différentes articulations pour bien gérer la fonction motivationnelle. Il faut une préparation minutieuse du cours. La didactique des mathématiques est un outil incontournable qui permet à l'enseignant de mettre en œuvre des techniques qui pourraient rendre performant son enseignement. L'enseignant doit élaborer le savoir enseigné que l'élève va s'en approprier comme savoir appris. Il faut créer une ambiance d'étude propice à l'acquisition des savoirs par les apprenants. Les pratiques motivationnelles galvanisent les « meilleurs » élèves. Par contre ces mêmes pratiques démotivent certains élèves en occurrence les « moins bons ». D'après les résultats de nos recherches, le taux des pratiques enseignantes démotivantes est élevé. La motivation est une pratique à encourager car selon Lieury et Fenouillet (1996), il n'y a pas de performance élevée sans motivation.

Références bibliographiques

Brissiaud, R. (2007). *Premier pas vers les mathématiques, les chemins de la réussite à l'école*. Paris : Metz.

Claparede, E. (1931). *Education fonctionnelle*. Neuchatel : Delachaux et Niestlé.

Dorier, J., L., Gueudet, G., Peltier, M. L., Robert, A., Roditi, E. (2018). *Enseigner les mathématiques, Didactique et enjeux de l'apprentissage : Paris : Belin éducation*.

Lieury, A., Fenouillet, F. (1996). *Motivation et réussite scolaire*. Paris : Dunod.

Ministère de l'Education Nationale et de l'Enseignement Technique. (2015). *Mathématiques C P1*. Abidjan: Eburnie.

Nebout Arkhurst, P. (2017). *La motivation scolaire, une clé didactique pour l'apprentissage*. Abidjan : Maylis.

Viau, R., (1994). *La motivation en contexte scolaire*. Saint Laurent : Renouveau pédagogique.

Vygostky, S. (1998). *Pensée et langage* (3e éd). Paris : La dispute.

Titre: Résoudre un problème par essais et ajustements : quelles exploitations des essais ?

Auteur: FAVIER Stéphane

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 693 - 704

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Résoudre un problème par essais et ajustements : quelles exploitations des essais ?

FAVIER[1] Stéphane

Résumé – Nous nous intéressons au processus de résolution de problèmes par essais et ajustements mis en œuvre par des élèves du primaire et du secondaire 1 du canton de Genève. Dans cette communication, nous mettons en évidence, au travers de l'analyse fine du travail d'un groupe d'élèves du primaire, que les ajustements ne vont pas de soi et que la manière d'exploiter les différents essais peut même évoluer au fil de la résolution. Il ressort notamment que les interprétations des rétroactions du milieu est un point à expliciter aux élèves.

Mots-clefs : Résolution de problèmes - Ajustements d'essais successifs – Rétroaction – Représentation

Abstract – I'm interested in the process of solving problems by trial and error for primary and secondary 1 pupils. In this paper, I show, through a detailed analysis of the work of a group of primary pupils, that the adjustments are not self-evident and that the way of exploiting the different trials may even evolve during the problem solving. In particular, it emerges that the interpretation of the retroaction of the milieu is a point to be made explicit to the pupils.

Keywords: Problem solving – Trial and error – Retroaction – Representation

1. * Université de Genève, Suisse, stephane.favier@unige.ch

Introduction

Lors de notre travail doctoral[2], nous avons, entre autres, étudié les processus de résolution de problèmes par essais et ajustements mis en œuvre par des élèves en classe de mathématiques, au primaire et secondaire 1 dans le canton de Genève (Suisse). Nous proposons ici de contribuer à la réflexion au sein de ce GT9 en nous intéressant à la manière d'ajuster des élèves : l'étude du travail effectif des élèves et la mise à jour de certaines difficultés nous amènent à émettre quelques pistes de réflexion relatives aux pratiques enseignantes en particulier en lien avec le processus d'institutionnalisation.

La stratégie ajustements d'essais successifs

La stratégie de résolution d'un problème en procédant à des ajustements d'essais successifs est inscrite au Plan d'études Romand[3] (PER) pour chacun des trois cycles que compte la scolarité obligatoire dans la Suisse romande et dans chacun des quatre axes thématiques (Espace, nombres, opérations, grandeurs et mesures) qui structurent le PER. Cette forte présence peut être interprétée comme le signe de l'importance que les prescripteurs souhaitent donner à cette stratégie. Nous y voyons également l'indication que cette stratégie nécessite un apprentissage long du fait de sa complexité.

Pour résoudre ces problèmes, les élèves doivent être en mesure de caractériser un essai, solution potentielle du problème, de pouvoir le confronter aux données du problème et ainsi de le (in)valider. L'invalidation et l'interprétation de la rétroaction du milieu (au sens de (Brousseau, 1998) de manière efficiente sont ce qui va permettre d'ajuster, c'est-à-dire caractériser un autre essai plus proche de la solution, voire la solution elle-même. C'est cet aspect de la démarche qui est mis en évidence par l'idée d'ajuster, ce qui a l'avantage de supprimer la connotation liée au hasard que pourrait induire l'expression « essais-erreurs » qui est un des synonymes présents dans la littérature. Cette idée d'ajuster nous semble également en lien avec « l'art de deviner » avancée par Pólya (1958): « […] il devrait y avoir place dans l'enseignement des mathématiques pour l'art de deviner […]. M'adressant à tous les professeurs de mathématiques quels qu'ils soient, je leur dis : apprenons à nos élèves à deviner. » (p. 271) Cette idée est défendue également par Posamentier & Krulik (2009), sous le label *Intelligent guessing and testing*, qui avancent : « Although this strategy does not sound very mathematical, it is a frequently used strategy. Some books refer to it as "trial and error." But it is more than that! This strategy is extremely powerful and quite sophisticated.» (p. 24) Ajuster n'est pas (encore) un savoir reconnu par la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques. Néanmoins, cette

2. Cette recherche s'est effectuée dans le cadre du projet financé par le Fonds national suisse de la recherche scientifique – FNS (Subside no 100019_173105 / 1) : « la résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au coeur des apprentissages dans la classe de mathématiques : un point de vue fédérateur à partir d'études dans différents contextes. »

3. Le PER est consultable ici : https://www.plandetudes.ch/web/guest/mathematiques

manière de résoudre des problèmes se rencontre fréquemment dans la vie de tous les jours (Elia et al., 2009; Posamentier & Krulik, 2009) ce qui nous amène à lui attribuer le statut de pratique sociale de référence (Chevallard, 1985). En effet, il existe de nombreuses situations qui peuvent nous amener à procéder à des ajustements : régler la température de l'eau, peser un ingrédient avec une balance Roberval ou préparer une certaine masse d'un ingrédient à l'aide d'une balance numérique, accorder une guitare, programmer un robot pour qu'il effectue un déplacement, positionner un cadre de niveau, mettre un meuble de niveau avec des cales, lancer des fléchettes, etc. C'est sans doute parce que les élèves sont confrontés à de telles situations que Stacey (1991) avance que « guess and check is an intuitive strategy available to all » (p. 6). Dans le même ordre d'idée, l'étude conduite par Elia et al (2009) montre que c'est la stratégie la plus largement efficace pour résoudre des problèmes lorsque les élèves n'ont pas encore appris les connaissances mathématiques ad hoc. Ces chercheurs expliquent que « when students are not explicitly taught any heuristic strategies, trial-and-error may be the only strategy they can use, as it does not entail high cognitive demands and it is widely used in a variety of mathematical and everyday situations. » (p. 616) Stacey (1991) relativise ces résultats en mettant en évidence deux obstacles à l'utilisation de cette stratégie. Le premier concerne la difficulté à savoir quoi deviner c'est-à-dire à caractériser un essai. Le deuxième concerne l'identification des contraintes qui peuvent être utilisées pour contrôler un essai. Elle nous met également en garde sur le fait de ne pas utiliser cette stratégie de manière systématique ou automatique ce qui constituerait un frein à l'utilisation d'outils mathématiques plus puissants.

À la lumière de ces quelques éléments tirés de la littérature, les questions qui guident notre réflexion sont : Comment les élèves exploitent-ils leurs essais ? De quelle manière les ajustent-ils?

Méthodologie

Recueil des données

Notre recherche s'est effectuée dans le canton de Genève Nous avons mené notre recueil de données auprès de six classes différentes : deux classes pour le degré 4P (élèves de 7-8 ans), deux pour le degré 8P (élèves de 11-12 ans) et deux pour la 10e année (élèves 13-14 ans). Au total, le travail de 38 groupes de deux ou trois élèves a pu être recueilli. Un problème différent pour chaque degré a été proposé. Le problème proposé aux élèves de 4P s'intitule *Jeu de cartes*[4] et s'énonce ainsi :

> Chaque carte de mon jeu représente soit un triangle, soit un carré. Je tire au hasard 15 cartes. Je compte tous les côtés des figures dessinées sur les cartes que j'ai tirées et je trouve 49. A ton avis, combien ai-je tiré de triangles et de carrés ?

4. Ce problème est une adaptation d'un problème extrait des documents d'application des programmes français (Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, 2005, p. 7-9)

Ce problème et ceux[5] proposés aux autres degrés ont bien en commun de pouvoir se résoudre par des ajustements d'essais successifs même pour les 10e qui n'avaient pas encore appris à résoudre des systèmes d'équations. En ce qui concerne les conditions de passation, les enseignant-e-s menaient la séance dans les conditions habituelles de classe. Les élèves travaillaient individuellement pendant quelques minutes avant d'unir leurs efforts par groupe de 2 ou 3 élèves. Pour recueillir des données au plus près du travail des élèves, nous avons équipé un élève de chaque groupe d'une caméra embarquée installée sur sa tête. Ce dispositif nous permet d'avoir des données audiovisuelles de l'espace de travail des élèves avec leur propre point de vue ainsi que la chronologie complète de leur résolution.

Méthode d'analyse

Les données de chaque problème offrent un milieu suffisamment antagoniste c'est-à-dire qu'il permet que chaque essai soit suivi d'une rétroaction qui va informer l'élève sur la validité de l'essai, ce qui caractérise le *caractère rétroactif* du milieu (Hersant, 2010, p. 43). Ainsi, les rétroactions vont permettre aux élèves de valider ou d'invalider leurs essais mais elles peuvent aussi être interprétées de manière qualitative (en déterminant si l'écart est en plus ou en moins), voire même quantitative (en déterminant exactement cet écart). C'est l'exploitation des interprétations de ces rétroactions par l'élève qui doit lui permettre, théoriquement, d'ajuster de manière pertinente afin de se rapprocher voire de trouver la solution. En conséquence, pour analyser les essais et ajustements, nous faisons le choix de :

- Décrire les essais réalisés et, si nos données le permettent, d'illustrer chaque essai par une photographie de la production des élèves ;
- Décrire les éléments qui sont en lien avec le test de l'essai et donc avec la rétroaction ainsi que les éléments en lien avec l'interprétation de la rétroaction : ces éléments peuvent être des verbalisations, des gestes, des bruits, des intonations de la voix, etc. ;
- Analyser chacune des rétroactions à la lumière de l'interprétation précédente.

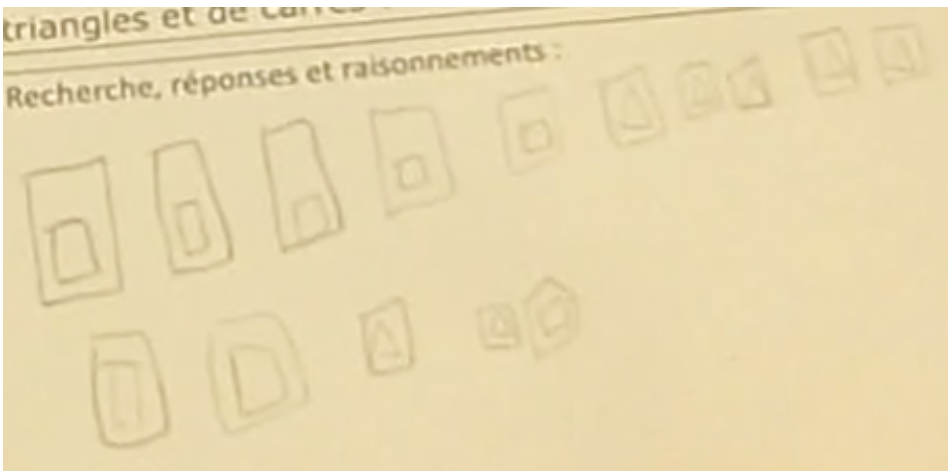
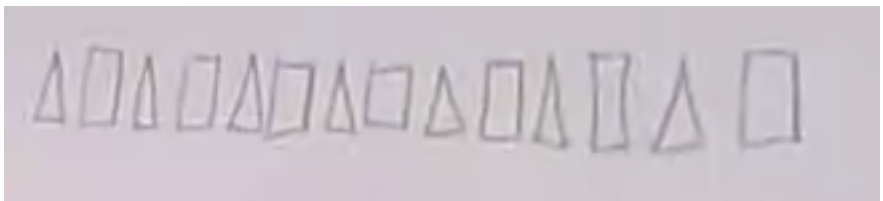
Ces différentes rubriques constituent, dans cet ordre, les trois premières colonnes du tableau qui présente les analyses. Une quatrième colonne intitulée « remarques » est prévue pour renseigner des éléments complémentaires qui pourraient être pertinents pour mieux comprendre et interpréter le travail des élèves (enrichissement du milieu hors ajustements, éléments relatifs aux erreurs, aux régulations, etc.). Chaque essai est numéroté de manière à pouvoir s'y référer plus facilement lors des synthèses. Un indicateur temporel est précisé, il correspond au début de la caractérisation de chaque essai. Dans le cas où les élèves travaillent séparément, le prénom de l'élève qui réalise l'essai est indiqué. Il peut arriver également que deux élèves réalisent deux essais différents de manière simultanée. Entre de tels essais, nous considérons qu'il n'y a pas d'ajustement et, de fait, nous les numérotons

5. Pour les énoncés des autres problèmes et leur analyse a priori, se référer à Favier (2022).

par un bis, par exemple ‘essai 3’ suivi de ‘essai 3bis’. Enfin, dans la 2e colonne du tableau qui présente les analyses, nous faisons le choix de séparer ce qui concerne le test de l’essai et la rétroaction de l’interprétation de la rétroaction par la flèche « → ».

Nous allons illustrer notre travail à partir de l’analyse des essais d’un binôme de 4P sélectionné pour la richesse de la diversité des ajustements réalisés.

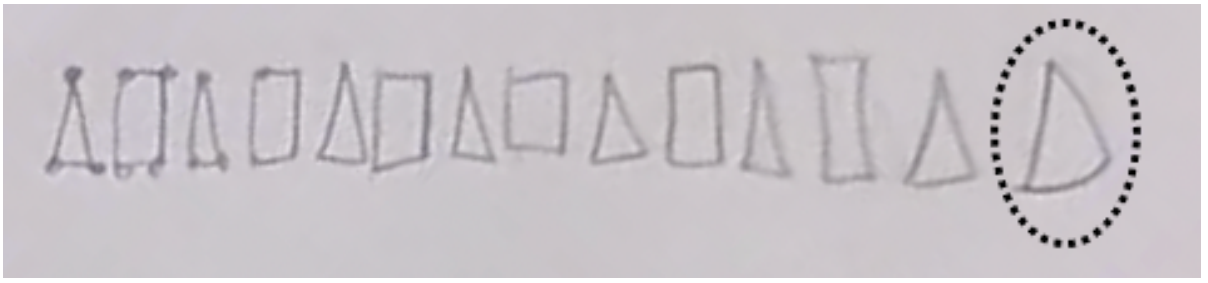
Analyse[6] du groupe composé de Naelle et Cyril

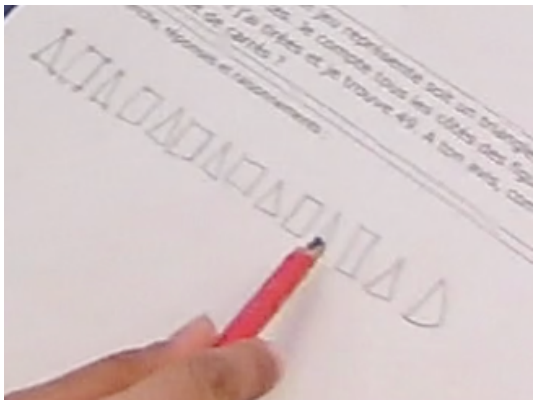
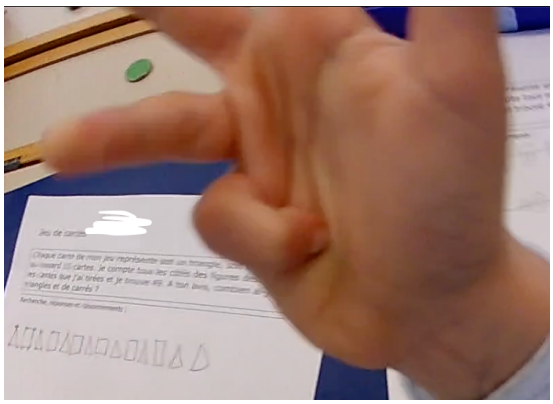
<table>
<tr><th>Éléments descriptifs de l’essai</th><th>Description factuelle de la rétroaction et de l’interprétation de la rétroaction par les élèves</th><th>Analyse de l’interpréta-tion de la rétroaction</th><th>Remarques</th></tr>
<tr><td colspan="4">Essai 1 (Cyril 00:44)
 
</td></tr>
<tr><td>Dessin de 15 figures</td><td>Compte tous les côtés, s’arrête à 49 alors qu’il reste un certain nombre de côtés à dénombrer→ fait non de la tête et barre l’essai (2:44)</td><td>Invalidation sur le nombre total de côtés</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Essai 1bis (Naelle 4:45)
  </td></tr>
</table>

6. Étant donné les contraintes d’espace à prendre en compte dans la rédaction de cette proposition, nous ne proposons pas l’analyse de tous les essais mais nous nous limitons à ceux qui nous paraissent les plus évocateurs.

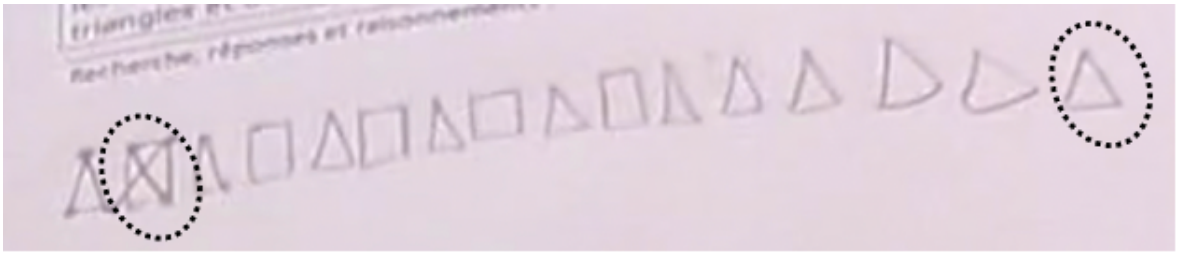
Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai* réalisé pendant la phase de travail individuelle	1. Compte les côtés (50 au lieu de 49) → Cyril propose de remplacer le dernier carré par un triangle « parce que là c'est 4 et là 3 ça va faire 49 » (5 :43) 2. Naelle ne tient pas compte de cette idée et recompte les côtés (49). Cyril recompte également (49). → Naelle applaudit et Cyril dit « je dois recopier » (6:50)	1. L'interprétation de la rétroaction proposée par Cyril est adéquate, l'ajustement est de type quantitatif 2. Validation de l'essai. (Le nombre de figures n'est pas vérifié.)	*Production de l'essai non enregistré. Hypothèse : Naelle a dessiné une figure de chaque catégorie en comptant au fur et à mesure le nombre de côtés, arrêt à 49 côtés.

La confrontation des essais 1 (de Cyril) et 1bis (de Naelle) met en évidence deux représentations différentes du problème. Cyril, qui dessine 15 cartes vierges puis les figures, a une représentation du problème qui prend en compte les deux grandeurs de ce problème. De plus, sur l'essai 1bis de sa voisine, il propose de remplacer le dernier carré par un triangle « parce que là c'est 4 et là 3 ça va faire 49 » (5:43). Cet ajustement révèle qu'il traite ces deux grandeurs de manière simultanée. Naelle réalise un premier essai qui compte bien 49 côtés mais pour 14 figures seulement. Sa représentation du problème se caractérise ainsi par la prise en compte d'une seule donnée du problème. De plus, l'essai se présente sous la forme de la succession d'une figure de chaque catégorie ce qui constitue une contrainte supplémentaire pour ce problème.

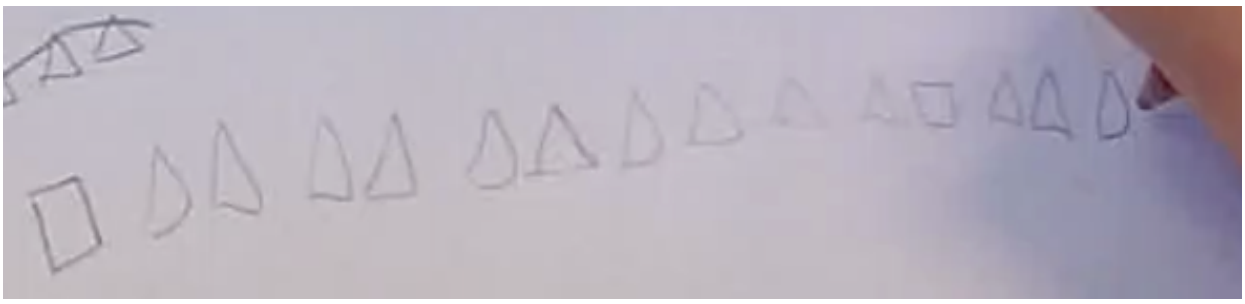
Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai 2 (8:28) 			
Sur son essai, Naelle remplace le dernier carré par un triangle	Compte tous les côtés (48) → geste rageur du point, puis elle dit « peut-être qu'il faut remplacer aussi un triangle par un carré » (9:07)	Invalidation sur le nombre total de côtés L'ajustement proposé n'est pas pertinent puisqu'il ramène à la situation de départ.	Manière d'agir en lien avec la proposition précédente de Cyril

<table>
<tr><th>Éléments descriptifs de l'essai</th><th>Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves</th><th>Analyse de l'interpréta-tion de la rétroaction</th><th>Remarques</th></tr>
<tr><td colspan="4">Essai 3 (9:08)
 
Photo a
 
Photo b</td></tr>
<tr><td>L'idée du remplacement d'un triangle par un carré est évoquée seulement en désignant (photo a) un triangle à remplacer</td><td>Cyril surcompte (photo b) à partir de 48 les 4 côtés du carré (52) → Naelle efface un carré et dessine un triangle à la place</td><td>Invalidation sur le nombre total de côtés
L'ajustement proposé n'est pas pertinent puisqu'il éloigne de la solution.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="4">Essai 4 (9:20)
  </td></tr>
<tr><td>Naelle remplace un carré par un triangle sur son essai</td><td>Compte les figures (14) → « ah ce travail il m'énerve » (9:34) puis elle dessine un triangle supplémen-taire</td><td>Invalidation sur le nombre total de figures. Ajustement pertinent du point de vue du nombre de figures.</td><td></td></tr>
</table>

Pour les essais 2, 3 et 4, Naelle ajuste en mettant en œuvre le même mode d'action que celui proposé par Cyril (remplacement d'une figure par une autre) mais dans des situations où ce n'est pas pertinent c'est-à-dire relativement à des essais qui ne comptent que 14 figures. Ce n'est qu'à l'issue de l'essai 4 que la représentation du problème semble évoluer vers la prise en compte des deux grandeurs. À ce stade nous faisons l'hypothèse que, sur le début de la recherche, Naelle ne met pas en lien le remplacement de figures et l'effet qu'il peut avoir.

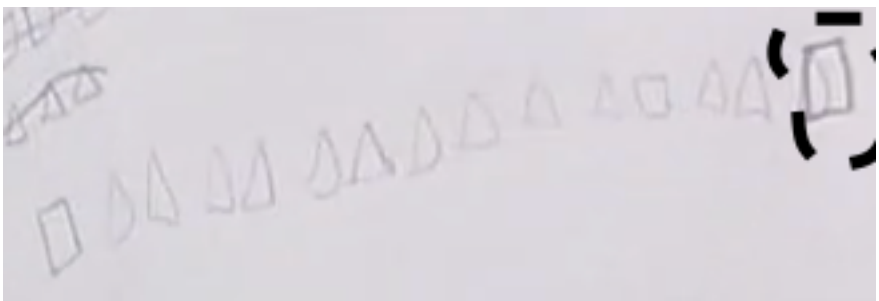
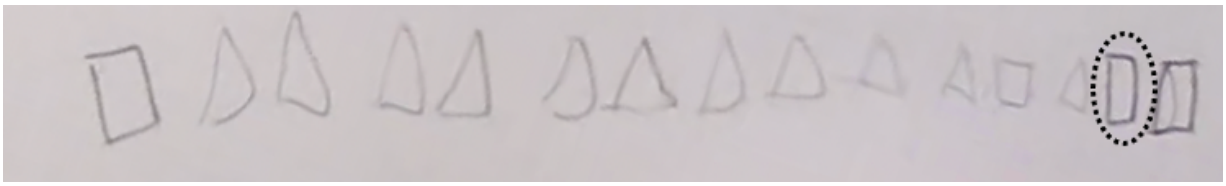
Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai 6 (10:22) 			
Naelle barre le 1er carré de la série et rajoute un triangle à la fin	Compte tous les côtés (47* au lieu de 49) → surcompte sur ses doigts jusqu'à 49 « ça m'énerve » (Naelle, 11:02), « si jamais il y avait une forme avec deux côtés là » (Cyril, 11:05) → compte tous les côtés de son essai recopié à la suite de l'essai 1bis (52) « on est mort » et il barre cet essai (12:06)	Invalidation, calcul de l'écart à la solution avec l'idée d'un ajustement pertinent par ajout d'une figure Relecture de l'énoncé	*Erreurs de dénombrement : deux sommets sont pointés pour un seul mot nombre à deux reprises

À l'essai 6, ce même mode d'action est pertinent et permet d'ailleurs d'obtenir la solution. L'ajustement se fait dans la bonne direction. L'erreur de dénombrement ne permet cependant pas à Naelle de valider cet essai. Le fait qu'elle ne décèle pas l'erreur révèle qu'elle n'anticipe pas le nombre total de côtés qu'elle aurait dû obtenir. Ainsi, si l'effet du remplacement de figures commence à émerger, cet effet se limite à l'aspect qualitatif et ne concerne pas l'aspect quantitatif c'est-à-dire relativement au nombre total de côtés en plus ou en moins.

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai 10 (22:24) 			

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Cyril dessine un autre essai de 15 figures	Compte tous les côtés (47) → Intonation particulière, Naelle surcompte de 3 côtés sur ses doigts pour arriver à 50 puis fait un geste de rage, « on est mort » (Cyril, 24:26) puis elle compte jusqu'à 4 en pointant le dernier triangle et après un temps de réflexion de quelques secondes annonce « je crois que j'ai trouvé » (24:38)	Invalidation sur le nombre total de côtés Cherche à ajuster en ajoutant une figure puis propose un ajustement pertinent du point de vue de la bonne direction.	Cet assortiment semble un peu le fruit du hasard.

L'essai 10 proposé par Cyril est une remise à zéro, ne s'appuyant sur aucun autre essai.

Éléments descriptifs de l'essai	Description factuelle de la rétroaction et de l'interprétation de la rétroaction par les élèves	Analyse de l'interprétation de la rétroaction	Remarques
Essai 11 24:46) 			
Naelle dessine un carré sur un triangle sur l'essai de Cyril	Compte tous les côtés (48)→ geste de rage Compte à nouveau (48) → propose de remplacer un triangle par un carré	Invalidation sur le nombre total de côtés	
Essai 12 (26:20) 			
Naelle remplace un triangle par un carré	Compte tous les côtés (49)→ « quarante-neuf j'ai trouvé » Puis Cyril compte le nombre de figures (15) → ils applaudissent	Validation de l'essai- Solution trouvée	

Les ajustements des essais 11 et 12 sont dans la bonne direction ce qui confirme que le remplacement de figures est utilisé de façon adéquate du point de vue qualitatif. Ceci étant, avant l'ajustement pertinent de l'essai 11, Naelle s'exclame « je crois que j'ai trouvé » (24:38) et son geste de rage lorsque le test de l'essai donne 48 indique qu'elle s'attendait vraiment à obtenir la bonne réponse. Le remplacement de figures n'est pas mis en relation quantitativement avec son effet précis sur le nombre total de côtés.

Discussion et conclusion

Le processus d'ajustements d'essais successifs que ce groupe donne à voir est d'une grande richesse. Il permet de se rendre compte du fait que tous les essais ne sont pas nécessairement le fruit d'ajustements comme l'illustre l'essai 10 de Cyril. Certains ajustements peuvent même ne pas être pertinents c'est-à-dire que soit il n'y a pas d'interprétation qualitative ou quantitative de la rétroaction, soit l'interprétation de la rétroaction est erronée du fait, selon nous, de l'absence de règle qui mette en relation un changement de figures et son effet sur le nombre total de côtés. C'est l'évolution de la manière d'ajuster de Naelle qui met en évidence cette construction progressive de l'effet du remplacement d'une figure par une autre sur le nombre total de côtés. Cet aspect illustré par ce groupe n'est pas anecdotique parmi les différents groupes analysés et ce, même en ce qui concerne des groupes d'élèves plus âgés. La connaissance de ces règles semble cachée pour les élèves alors même qu'elle est complètement évidente pour les enseignants. Nous proposons ainsi de faire formuler ces règles par les élèves au cours du processus d'institutionnalisation. Par exemple, pour le problème du *Jeu de cartes*, cela correspondrait à des formulations du type : « Si je remplace un carré par un triangle alors le nombre total de côtés diminue de 1 » ou « Pour augmenter le nombre total de côtés il faut remplacer un triangle par un carré ». Bien que dans un premier temps, ces règles soient très contextualisées au problème travaillé, les élèves devraient pouvoir transférer cet aspect à d'autres problèmes.

Enfin, nous allons relever en guise d'ouverture, quelques effets inhérents au travail collaboratif de ce groupe d'élèves. D'une part, du point de vue de la représentation du problème (au sens de Julo (1995)), celle de Naelle évolue rapidement vers une représentation adéquate c'est-à-dire correspondant à la prise en compte simultanée des deux grandeurs. Nous pensons que c'est la confrontation avec la représentation de Cyril qui a provoqué cette évolution. En ce qui concerne la manière d'ajuster, tout se passe comme si Naelle disposait d'un mode d'action, introduit dans le milieu par Cyril au début du travail de groupe, mais sans vraiment en connaître les effets sur le nombre total de côtés. C'est la répétition d'essais obtenus avec ce même mode d'action qui a permis à Naelle de progresser vers la solution.

Ces analyses nous permettent de relativiser l'idée de Stacey (1991). En effet, cette manière de résoudre des problèmes est sans doute intuitive et accessible à tous mais elle n'en nécessite pas moins un apprentissage dont l'explicitation des règles qui lient les effets aux changements effectués est une composante.

Références

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La pensée sauvage.

Elia, I., Den Heuvel-Panhuizen, M., & Kolovou, A. (2009). Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics. *ZDM, 41*(5), 605-618.

Favier, S. (2022). *Étude des processus de résolution de problèmes par essais et ajustements en classe de mathématiques à Genève* (Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation, Université de Genève). Université de Genève, Genève. Consulté à l'adresse https://archive-ouverte.unige.ch/unige:159466

Hersant, M. (2010). *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : De l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires*. Note de synthèse HDR, Nantes, Université de Nantes.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche. (2005). *Documents d'accompagnement des programmes*. Paris: Scéren édition.

Pólya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible* (L. Couffignal & R. Vallée, Trad.). Paris: Gauthiers-Villars.

Posamentier, A. S., & Krulik, S. (2009). *Problem solving in mathematics, grades 3-6 : Powerful strategies to deepen understanding*. USA: Corwin Press.

Stacey, K. (1991). The effects on students' problem solving behaviour of long-term teaching through a problem solving approach. In F. Furinghetti (Éd.), *Proceedings of the 15th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, p. 278-285). Assisi: PME.

Titre: Quand les neurosciences analysent les apprentissages et en tirent des conséquences pour l'enseignement

Auteurs: HIRSCH Micaela et RODITI Éric

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 705 - 718

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Quand les neurosciences analysent les apprentissages et en tirent des conséquences pour l'enseignement

HIRSCH[1] Micaela, RODITI[2] Éric

Résumé – Alors que les neurosciences cognitives occupent une place croissante dans les décisions éducatives, nous discutons de recherches récentes portant sur les apprentissages mathématiques et tirons des conséquences pour l'enseignement. Nous élucidons les finalités de ces recherches, et nous apportons un regard critique sur leurs méthodes et leurs conclusions. Nous concluons sur la nécessité d'une approche didactique dans les recherches qui interrogent les liens entre enseignement et apprentissage.

Mots-clefs : Neurosciences, fractions, décimaux

Abstract – Cognitive neuroscience is becoming increasingly important in educational decision-making. For this reason, we discuss two recent neuroscience studies on mathematical learning with implications for teaching. We elucidate their aims and examine their methods and findings. We conclude with the need for a didactic approach in research interrogating the links between teaching and learning.

Keywords: Neuroscience, fractions, decimal numbers

1 Université Paris Cité, Laboratoire EDA, France, hirschmicaela@gmail.com

2 Université Paris Cité, Laboratoire EDA, France, eric.roditi@u-paris.fr

Introduction

Les neurosciences cognitives occupent en France une part de plus en plus importante de l'espace médiatique dédié aux questions d'éducation dont, en particulier, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. C'est ce qui nous conduit à réfléchir au contenu de leurs productions scientifiques : leurs hypothèses théoriques, leurs méthodes, leurs résultats et les conséquences qui en sont déduites pour les pratiques enseignantes. Plutôt que d'en discuter en toute généralité, nous avons préféré prendre deux exemples récents, dans le contexte français, et les analyser avec un point de vue didactique. Le premier exemple est celui de l'apprentissage des fractions à propos duquel Stanislas Dehaene a conduit une recherche en partenariat avec le ministère de l'Éducation nationale. Cette recherche vise à montrer le caractère fondamental et déterminant du placement des nombres sur la droite numérique pour leur apprentissage. Elle a donné lieu, en 2022, à la publication d'une note du Conseil scientifique de l'Éducation nationale (CSEN) dans le but de documenter les enseignants et les formateurs (Dehaene *et al.*, 2022). Le deuxième exemple est celui d'une recherche coordonnée par Olivier Houdé, son objectif est d'apporter une compréhension nouvelle, neuroscientifique, des difficultés que pose la comparaison des nombres décimaux.

Nous commençons par présenter le modèle du triple code et le concept de recyclage neuronal qui font référence dans de nombreux travaux en neurosciences sur les connaissances numériques. Nous analysons ensuite les deux recherches coordonnées respectivement par Dehaene et Houdé, et nous discutons enfin des conceptions portées par ces recherches au sujet des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement.

Le « Triple code » et le « recylage neuronal »

Le modèle du triple code et le concept de recyclage neuronal sont développés par Dehaene.

Le « triple code », un modèle de la connaissance numérique

Dehaene (1992) a modélisé les traitements cognitifs impliqués dans la réalisation de tâches numériques à partir d'un système de trois représentations des nombres, trois « codes », dont il a proposé une implantation anatomique en s'appuyant sur des techniques d'imagerie médicale. À l'origine, ce modèle concerne les nombres entiers (Roditi, 2005). Son succès scientifique tient à l'implantation cérébrale qui lui est associée. Pour le présenter ici, résumons l'exposé qu'en fait l'auteur lui-même aux enseignants (Dehaene, 2010). Le « code des quantités » est impliqué dans la perception de la quantité lorsqu'on observe un ensemble d'objets. Le « code verbal » associe des mots de la langue aux nombres, il est en jeu lorsque nous envisageons une quantité précise après avoir vu ou entendu le mot quinze par exemple. Le « code arabe » est celui des symboles, il nous permet d'associer la quantité à l'écriture chiffrée 15. Ces trois codes engagent respectivement trois aires cérébrales : la

région intrapariétale droite, les régions du système langagier de l'hémisphère gauche, et les aires visuelles qui sont localisées dans différentes zones du cerveau, y compris dans le sillon intrapariétal.

Le code des quantités concerne les quantités précises ou approximatives. Il serait très tôt présent dans le cerveau, des travaux visent à montrer sa présence chez des bébés de moins de 3 mois. Cela conduit Dehaene à affirmer que le « sens du nombre » est en grande partie inné, contrairement aux codes verbal ou arabe qui nécessitent un apprentissage. Signalons une confusion récurrente dans les textes de Dehaene, entre perception du nombre et perception de la quantité ; Keller (2014) souligne que cette confusion relève d'un préjugé nuisible à la recherche, dans la mesure où il détourne de l'élucidation des mécanismes perceptifs à l'œuvre.

Le « recyclage neuronal » à l'origine de l'apprentissage

Le recyclage neuronal explique le passage de capacités innées à des capacités plus élaborées nécessitant un apprentissage. Pour le présenter, résumons à nouveau un article publié à l'attention d'enseignants québécois par Dehaene et deux chercheurs montréalais (Brault Foisy *et al.*, 2016). Ils indiquent que, dès la naissance, le cerveau possède une région dédiée au sens du nombre, à l'évaluation des quantités, mais pas de région dédiée aux représentations symboliques et aux calculs qui constituent une invention récente dans l'histoire de l'humanité. Toutefois, lors de la réalisation de calculs, la région du cerveau associée au sens du nombre demeure activée. Selon Dehaene, cela laisse entendre que cette région s'est recyclée pour traiter les écritures chiffrées. L'apprentissage aurait ainsi transformé sa fonction afin d'associer la perception innée des quantités et la connaissance acquise des symboles mathématiques ; c'est cette transformation que Dehaene nomme « recyclage neuronal ».

Dehaene et ses collègues montréalais affirment alors que l'enseignement ne peut faire fi des caractéristiques initiales du cerveau et des contraintes qui leur sont associées. Ils préconisent un entrainement scolaire intensif de mise en relation de ces deux types de représentation. Ces conclusions sur l'enseignement donnent lieu à controverse. Barallobres (2018), par exemple, conteste le fait que l'objectif de l'enseignement soit de développer des connexions neuronales ; selon lui, l'enseignement doit d'abord faire participer les élèves à des pratiques mathématiques socialement partagées, en préservant leur signification dans le contexte scolaire.

Comme nous allons le voir, faire travailler intensément le « sens des nombres » et le mettre en relation avec le « code symbolique » est bien ce qui sous-tend la recherche sur les fractions présentée par Dehaene *et al*. (2022) dans une note du CSEN publiée en 2022.

La recherche cooronnée par Dehaene sur les fractions

La recherche en question repose sur une évaluation menée en 2020 auprès de 1 274 élèves de 6e. Cette évaluation est nommée « test de la ligne numérique » par les auteurs. Ils en tirent des résultats sur les acquis des élèves et des conséquences pour l'enseignement sous forme de recommandations, c'est sur le premier point que nous nous attardons dans cette partie.

Le « modèle du triple code » : cadre théorique du « test de la ligne numérique »

Le questionnaire est proposé aux élèves sur ordinateur. Pour toutes les questions, un nombre est proposé, et les élèves disposent de 10 secondes pour le placer sur une droite graduée à l'aide de la souris. Chaque nombre est donné par l'une de ses représentations symboliques ou comme le résultat d'un calcul, ce qui correspond à une autre représentation symbolique du nombre. Les auteurs justifient la modalité d'évaluation par une partie intitulée « Bien placer, c'est comprendre » où ils expliquent aux professeurs que le fait de savoir placer les nombres sur la droite graduée atteste de leur compréhension.

D'un point de vue didactique, le fait de placer les nombres sur la droite numérique constitue un critère parmi d'autres de la connaissance des nombres, mais pas davantage. Dans son mémoire de master Hirsch (2022) met ce critère en relation avec d'autres formes de connaissance des fractions parmi les cinq qui sont couramment distinguées (Martinez & Roditi, 2017) : partie-tout, rapport, opérateur, quotient et mesure. Elles font depuis plusieurs décennies l'objet de recherches en didactique ; citons en particulier, parmi les auteurs français : Douady & Perrin-Glorian (1986), Perrin-Glorian (1986), Brousseau & Brousseau (1987), Bolon (1996), Adjiage (2007) et plus récemment Allard (2015), Chambris, Tempier & Allard (2017), Coulange & Train (2018) et Margolinas (2021).

Les auteurs de la note du CSEN indiquent que savoir placer un nombre est prédicteur de sa compréhension, mais il n'y a pas, dans leur test, d'évaluation explicite du lien entre cette connaissance et celle des autres formes de connaissance des nombres rationnels citées plus haut. Il y a, en revanche, des questions portant sur différentes connaissances numériques relatives aux nombres entiers : système décimal, propriétés algébriques des opérations, etc. Il faut donc comprendre que l'économie générale du questionnaire correspond à une volonté d'assoir le modèle du triple code et le concept de recyclage neuronal plutôt que d'enquêter finement sur les composantes de la compréhension des fractions. En outre, les questions posées dans le test conduisent également à quelques déceptions, c'est ce que nous allons montrer ci-après.

Analyse du contenu du test puis de deux questions et des réponses obtenues

Dans le test de la ligne numérique, deux séries de nombres sont à placer sur un segment gradué. La première est une série de nombres entiers, le segment proposé est gradué en unités, de 0 à 20, et seulement les nombres 0, 10 et 20 sont indiqués. La deuxième est une série de nombres rationnels, le segment est alors gradué en dixièmes, de 0 à 5, et les entiers seulement sont indiqués. Chaque nombre des deux séries est donné soit par l'une de ses représentations symboliques (par exemple : 4 ; 2,4 ; 1/2) soit comme le résultat d'un calcul (par exemple : 13 – 4 ; 6 × 18 – 18 × 6 ; 4,1 – 2,5 ; 2 + 1/5). Les auteurs souhaitaient ainsi croiser l'acquisition du sens du nombre (savoir placer des nombres sur la ligne numérique) et la connaissance d'autres savoirs numériques (système de numération décimale, calcul simple avec les fractions et ainsi que des propriétés algébriques comme la commutativité de la multiplication). Nous regrettons à nouveau que malgré toute la littérature didactique sur la question, ces autres savoirs numériques ne concernaient pas les différentes significations portées par les fractions.

La lecture des questions posées et des résultats obtenus donne également à douter de la solidité des conclusions tirées par les auteurs. Analysons ici trois questions du test et les réponses fournies par les élèves ; une analyse plus détaillée a été effectuée par Hirsch et Roditi (2022). Dans la première, il est demandé de placer précisément le nombre 4/2. Cela peut se faire en assimilant 4/2 au nombre 2 (positionnement d'une fraction quotient), mais aussi en effectuant 4 bonds de longueur ½ à partir de l'origine (fraction mesure). Les élèves pourront ainsi réussir sans placer un nombre, mais en mesurant une longueur. C'est d'ailleurs le lien entre mesure et position qui est interrogé dans les travaux de Coulange et Train (2018).

La deuxième question est de placer la fraction 1/2. Dehaene et ses collègues relèvent que les nombres 1 et 1,2 sont fréquents parmi les réponses erronées ; ils en déduisent que les élèves traitent séparément les nombres 1 et 2 de la fraction 1/2 au lieu de considérer cette fraction comme un seul nombre. Ils redécouvrent ainsi des constats anciens qui ont conduit aux nombreuses recherches en didactique sur l'enseignement des nombres rationnels dans les années 1970 et 1980… Une autre réponse erronée est fréquente (la troisième après 1 et 1,2) mais n'est pas commentée. Des élèves ont positionné 1/2 sur la graduation correspondant à 2,5. Comme 2,5 correspond au milieu du segment gradué de 0 à 5 sur lequel il fallait placer les fractions, il est vraisemblable que ces élèves aient associé la fraction 1/2 au milieu du segment ou bien à l'opération de prendre la moitié, ce qui conduit à calculer la moitié de 5. L'absence de commentaire des auteurs sur cette erreur révèle un manque de prise en compte des modalités de réponse et de leurs effets sur les résultats obtenus.

Les auteurs indiquent également avoir évalué la connaissance de la commutativité de la multiplication en demandant de placer le nombre 8 × 15 – 15 × 8 sur la droite graduée. Les élèves répondent 0 pour 45% d'entre eux, mais aussi fréquemment 8, 15, 10 ou 20. Dehaene et ses collègues concluent que les 55 % d'erreurs traduisent le manque de connaissance du « raccourci que permet

cette propriété ». Pour toute personne familière des pratiques scolaires en mathématiques, il apparaît que la question posée n'est pas favorable à la mobilisation de la commutativité, et cela d'autant moins que des calculs devaient être effectués dans les questions précédentes. Ainsi, certains élèves possédaient peut-être la connaissance évaluée, mais pas de façon suffisamment disponible pour la mettre en œuvre de leur propre initiative dans un contexte peu favorable. Les différences de disponibilité sont importantes pour l'évaluation des connaissances, elles ont donné lieu par exemple à une compréhension renouvelée des résultats de l'évaluation PISA de 2012 (Roditi & Salles, 2015). Interrogeons-nous également sur les élèves qui répondent correctement. Il est possible qu'ils aient mobilisé la commutativité de la multiplication, mais cela n'est pas certain. Ils ont pu effectuer le calcul en utilisant une forme de distributivité-en-acte : $8 \times 15 - 15 \times 8 = 8 \times (15 - 15) = 8 \times 0$ ou $15 \times (8 - 8) = 15 \times 0$. S'ils ne commettent pas d'erreur en multipliant par zéro, ils obtiennent la réponse juste, mais sans mettre en fonctionnement le « raccourci » que permet la commutativité. S'ils se trompent avec la multiplication par zéro, ils termineront vraisemblablement leur calcul par $8 \times 0 = 8$ ou $15 \times 0 = 15$. Cela expliquerait d'ailleurs les réponses erronées 8 et 15 qui apparaissent fréquemment. Pour les réponses 10 et 20, l'explication la plus raisonnable est que des élèves, n'arrivant pas à effectuer tous les calculs dans le temps imparti, cliquent sur l'une des trois positions attractives 0, 10 ou 20 qui sont les trois nombres indiqués sur la graduation (ces trois réponses apparaissent fréquemment aux autres questions portant sur les nombres entiers). Il faut alors encore admettre que certains élèves qui ont cliqué sur la position « zéro » ont peut-être obtenu la réponse attendue sans avoir mobilisé la compétence évaluée…

L'analyse soulève donc des problèmes méthodologiques qui ne sont pas discutés dans la note et qui relèvent de ce qu'on appelle la « validité » de l'évaluation : des élèves peuvent ne pas posséder la connaissance évaluée mais réussir à la question posée, d'autres élèves peuvent posséder la connaissance et échouer pour d'autres raisons, et enfin la modalité de passation induit des effets sur les réponses. Ces analyses, pourtant rapides, révèlent trois sources de fragilité de cette recherche : la connaissance de différentes composantes du sens des nombres rationnels ne sont pas évaluées en tant que telles ; les questions demandent toutes de placer un nombre sur la ligne numérique alors que les connaissances évaluées ne relèvent pas toutes de cette composante topologique ou ordinale du sens des nombres rationnels ; les questions ne sont pas toutes valides. Ces constats nous laissent penser qu'une telle recherche aurait gagné à être menée avec des didacticiens spécialistes d'enseignement, d'apprentissage et d'évaluation des mathématiques à l'école. Ils nous laissent aussi penser que l'objectif réel de la recherche était surtout de produire, sur le cas fractions, des résultats qui soutiennent le cadre théorique construit antérieurement par Dehaene pour les nombres entiers… L'autre recherche que nous présentons ici, porte sur la comparaison des décimaux, elle met également en jeu le concept du recyclage neuronal pour éclairer des apprentissages numériques.

La recherche coordonnée par Houdé sur les décimaux

Olivier Houdé a coordonné cette recherche qui a donné lieu à plusieurs publications, nous nous appuyons sur l'article le plus complet produit par les auteurs (Roell *et al.*, 2019). Ces derniers émettent une hypothèse qu'ils cherchent à valider, celle d'un biais visuo-spatial dans la comparaison des nombres décimaux. Ce biais serait causé par une confusion entre la longueur de l'écriture des nombres et leur valeur ; l'origine de la confusion tiendrait au fait que la région du cerveau dédiée de façon innée à la comparaison des longueurs se serait recyclée et s'activerait lors de comparaison des nombres donnés sous forme symbolique. L'hypothèse à valider est que la comparaison de deux décimaux repose sur l'inhibition de la comparaison des longueurs de leurs parties décimales, le mot longueur devant donc ici être compris au sens géométrique. Autrement dit, pour affirmer que 3,14 est inférieur 3,5, nous inhiberions le fait que la partie décimale 14 est plus longue que la partie décimale 5, cette comparaison de longueur induisant une erreur : penser que 3,14 est supérieur à 3,5.

Examinons le dispositif méthodologique mis en œuvre, puis les résultats qu'en tirent les auteurs. Focalisons ici sur des points essentiels, Roditi et Noûs (2021) donnent plus de détails.

Validation d'un biais visuo-spatial dans la comparaison des décimaux

La recherche repose sur un questionnaire élaboré par les auteurs qui s'inspire des tests dédiés à l'étude des « effets d'amorçage négatif » (Tipper, 1985) : la performance à une tâche nécessitant le traitement d'un stimulus est altérée si, juste avant, une autre tâche – dite d'amorce – nécessitait au contraire de ne pas traiter ce stimulus – d'où l'amorçage qualifié de négatif. L'hypothèse mise à l'épreuve par les chercheurs peut alors s'exprimer ainsi : si un traitement de longueur doit être inhibé pour comparer deux décimaux, alors son inhibition affectera une activité de comparaison de longueur devant être effectuée immédiatement après.

Les auteurs ont élaboré un questionnaire informatisé de 60 items (deux comparaisons par item) ; pour chacun d'eux, le sujet doit d'abord comparer deux nombres décimaux de même partie entière, puis comparer deux segments de longueur différente. Trois cas se distinguent suivant la valeur et la longueur de la partie décimale. Dans le premier cas, le nombre le plus grand a la partie décimale la plus courte (0,131 contre 0,6 par exemple) ; ce cas relève de la « condition expérimentale » puisqu'il correspond au cas où une inhibition de la comparaison des longueurs serait nécessaire (amorçage négatif). Dans le deuxième cas, les deux nombres décimaux ont des parties décimales de même longueur (0,612 contre 0,157 par exemple) ; ce cas relève de la « condition de contrôle » puisqu'il n'y a pas de comparaison de longueur à inhiber (amorçage neutre). Dans le troisième cas, le plus grand des deux nombres décimaux a la partie décimale la plus longue (0,18 contre 0,642 par exemple) ; ce cas relève d'une condition que les auteurs qualifient de « complémentaire » car la comparaison des longueurs n'a pas à être inhibée, elle va dans le même sens que la comparaison numérique (amorçage positif).

Le questionnaire a été soumis à 99 personnes sachant comparer des nombres décimaux. Les résultats obtenus sont synthétisés dans le tableau 1 où la performance est indiquée pour les comparaisons de nombres et pour les comparaisons de longueur des segments. Deux indicateurs de performance ont été retenus : le temps de réaction (TR) et le pourcentage de réussite (PR). Les résultats montrent que, pour la comparaison des décimaux, les personnes interrogées sont moins efficaces (temps de réaction plus long et pourcentage de réussite plus faible) en condition expérimentale qu'en condition de contrôle. Ils montrent également un effet sur la comparaison des segments : la performance est altérée en condition expérimentale (temps de réaction plus long et pourcentage de réussite analogue).

Conditions	Nombre d'items	Performances nombres	Performances segments
Expérimentale (0,131 contre 0,6)	24	TR = 1 193 ms PR = 94,5%	TR = 828 ms PR = 99,0%
Contrôle (0,612 contre 0,157)	24	TR = 1 082 ms PR = 98,8%	TR = 802 ms PR = 98,7%
Complémentaire (0,642 contre 0,18)	12	Pas de résultats indiqués	Pas de résultats indiqués

Tableau 1 – Comparaisons de nombres décimaux et effet sur la comparaison de longueurs

Les résultats en condition complémentaire ne sont pas indiqués, ce qui est regrettable, nous y reviendrons… Finalement, puisque la comparaison des longueurs de deux segments est altérée par la comparaison de deux décimaux quand le plus petit est celui dont la partie décimale est la plus longue, les auteurs déclarent avoir prouvé la présence d'un phénomène d'inhibition de l'attention à la longueur de l'écriture numérique. Ils auraient apporté la preuve d'un biais visuo-spatial dans la comparaison des nombres décimaux. Analysons toutefois cette recherche.

Analyse critique de la méthode et des interprétations

Attardons-nous dans un premier temps sur l'interprétation que les auteurs font des résultats obtenus. Un élève qui affirme que 0,6 est inférieur 0,131 pense-t-il que l'écriture du nombre 6 est plus courte que celle du nombre 131 ? que le nombre 6 s'écrit avec moins de chiffres que le nombre 131 ? ou encore que le nombre 6 est inférieur au nombre 131 ? Ces trois interprétations relèvent de trois processus mentaux absolument différents ; pourtant, les auteurs ne retiennent que les deux premières, et cela contrairement à toute la littérature francophone sur cette question, y compris l'article en anglais des auteurs français Grisvard et Leonard (1985) pourtant en bibliographie. Une telle omission dans un article scientifique a de quoi étonner. Il faut toutefois tenir compte du fait que l'article est en langue anglaise et que, dans cette langue, la partie décimale n'est pas prononcée comme un nombre entier, mais chiffre après chiffre : le nombre 2,131 s'écrit 2.131 et se prononce « two point one

three one ». Rien dans l'article n'étant expliqué quant à cette différence de lecture, il est à craindre que le lecteur anglophone ait été exposé à un biais linguistique et culturel.

L'omission de ce processus mental fragilise grandement les résultats. Le travail effectué par les auteurs n'aboutit en effet pas à l'existence d'un traitement visuel des longueurs des parties décimales, mais seulement au fait qu'il ne peut être écarté. La prise en compte de la valeur entière de la partie décimale pourrait aussi avoir un effet sur la comparaison de longueur, surtout si l'on admet, comme les auteurs et avec Dehaene, que les représentations mentales numériques et spatiales ne sont pas sans lien. Pour écarter la prise en compte de la valeur au profit de la longueur, les auteurs auraient dû proposer des comparaisons différentes où l'écriture la plus longue ne correspond pas à la valeur la plus grande : celles d'entiers en numération romaine où par exemple VIII est plus long que X bien que huit soit inférieur à dix ; celles de décimaux différents comme 0,0003 et 0,62 où 0003 est plus long que 62, mais 0003 est inférieur à 62 ; des nombres décimaux affichés avec des caractères différents comme 0,62 et 0,711 où 62 est plus long que 711 bien que 62 soit inférieur à 711 ; etc. Cela, hélas, n'a pas été fait.

Le silence des auteurs sur les résultats relatifs à la condition complémentaire est, lui aussi, très regrettable. Sans différence significative entre les résultats obtenus en condition expérimentale et complémentaire, l'argumentation en faveur de l'hypothèse d'un effet de l'inhibition de la longueur de la partie décimale serait à réviser substantiellement. L'absence cumulée de certaines questions puis de certains résultats donne au lecteur spécialiste l'impression que ce qui ne concourt pas à l'hypothèse à a été omis, une impression de biais de confirmation…

Ces constats laissent à nouveau penser que les neuroscientifiques qui s'intéressent à la connaissance des mathématiques gagneraient à travailler avec des didacticiens. Il apparaît ainsi que, comme dans la première recherche analysée, l'objectif n'était peut-être pas de comprendre et d'améliorer l'apprentissage, mais bien de produire, sur un exemple, des résultats qui renforcent la théorie des chercheurs. Il s'agit, dans cette deuxième recherche, de la théorie cognitive de l'inhibition, une théorie que Houdé développe régulièrement dans ses nombreux travaux. Cela n'empêche pas ces chercheurs d'adresser des préconisations aux enseignants. Examinons-les pour comprendre ce qu'elles portent comme conception des mathématiques, de leur apprentissage et de leur enseignement.

Les neurosciences, les mathématiques et leur enseignement

La conception des mathématiques qui émerge des travaux de ces neuroscientifiques

Comme en témoigne l'histoire de leur construction, les rationnels et les décimaux sont des concepts mathématiques qui relèvent d'un haut niveau d'abstraction. Dans les recherches analysées ici, on ne trouve pas de volonté de préserver en classe la signification de ces concepts, ni celle des pratiques mathématiques associées. Ces recherches véhiculent plutôt des mathématiques considérées

comme un ensemble d'objets et de règles déjà là, que les élèves auraient à voir, à comprendre et à mémoriser. Sans que la perception et la compréhension s'appuient sur une pratique scientifique authentique transposée en classe, sans associer la mémorisation à la construction intellectuelle issue de réorganisations ou de bouleversements des connaissances anciennes.

Dans la note du CSEN, Dehaene et ses collègues écrivent, par exemple, que la bande numérique aide à comprendre que les entiers sont ordonnés et régulièrement espacés, ou que la ligne graduée permet de comprendre qu'à chaque nombre correspond une position précise et vice versa, comme si ces représentations du domaine numérique n'étaient pas elles-mêmes des constructions intellectuelles à élucider, comme si les mathématiques étaient à découvrir dans ces objets du monde. De la même manière, le biais visuospatial dont il est question dans la recherche coordonnée par Houdé n'est jamais relié à la nature de ce qui est vu : des écritures numériques dans un système décimal organisé par des unités de numération liées les unes aux autres par des facteurs multiplicatifs égaux à des puissances de dix.

Les préconisations pour l'enseignement découlent de cette conception des mathématiques.

Une préconisation : des pratiques enseignantes fondées par la recherche

Des résultats qu'ils ont obtenus, les auteurs des deux textes analysés tirent des conséquences pour l'enseignement. Ils donnent ainsi une utilité sociale à leurs travaux, et promeuvent ce faisant des pratiques fondées par la recherche, des « *evidence based practices* ».

Dehaene et ses collègues (2022) préconisent ainsi un entraînement à placer des fractions sur la ligne numérique, cela contribuerait d'après eux à mieux faire comprendre la grandeur des fractions et entraînerait des gains en compréhension plus générale, notamment de « la manière dont les règles arithmétiques s'appliquent aux fractions ». Ils préconisent également, pour gagner en efficacité, de dispenser un enseignement explicite de ce que sont les fractions et de la manière dont « elles se comportent ».

De même, à la fin de l'article de Roell *et al* (2019), Houdé et des collègues indiquent que les professeurs doivent être informés du biais visuo-spatial qu'ils ont mis au jour afin de leur éviter d'interpréter à tort les erreurs commises par les élèves. Ils suggèrent aussi qu'un enseignement fondé entièrement sur l'apprentissage des mathématiques ne suffirait pas, et qu'il faudrait parallèlement entraîner les élèves à utiliser des alarmes exécutives (« *attention, il y a un piège !* ») et à inhiber les biais de raisonnement (« *activer un bloqueur de piège* »). En dissociant l'intervention méta-exécutive de l'intervention mathématique, ils conduisent à penser les mathématiques comme un univers parsemé de pièges à éviter, plutôt qu'à faire comprendre que toute règle mathématique possède un domaine de validité et une justification relative à ce domaine.

On le comprend, les conseils donnés aux enseignants par ces chercheurs ne sont ni plus ni moins qu'une transposition directe de leurs résultats (voire seulement de leurs hypothèses). Les auteurs ne mentionnent aucun dispositif expérimental d'enseignement évalué en milieu scolaire ; dans aucune de ces recherches il n'est question de travail en classe, de projet pédagogique d'enseignement, de pratique de professeurs avec leurs élèves, etc.

Conclusion

L'enseignement et l'apprentissage sont des phénomènes complexes inscrits dans des contextes culturels, sociaux, institutionnels, politiques et économiques. La complexité de ces phénomènes explique la diversité des orientations scientifiques des chercheurs qui les étudient. Les didacticiens des mathématiques les étudient à l'aune d'un système dynamique tripartite composé des savoirs, des élèves et des enseignants, et plongé dans un contexte scolaire particulier. Leurs recherches montrent des variabilités selon les savoirs, l'enseignement dispensé, les pratiques enseignantes, et bien sûr selon les élèves. Les neurosciences cognitives étudient les mécanismes neurobiologiques qui sous-tendent la cognition d'où, quand il s'agit d'apprentissage mathématique, un intérêt pour la mémoire, la perception, le langage, le raisonnement, etc. Ces recherches pourraient intéresser la didactique des mathématiques qui collabore déjà avec d'autres disciplines, les mathématiques bien sûr, mais aussi l'histoire et l'épistémologie, la psychologie, la linguistique, et plus récemment la sociologie.

Dans les deux recherches en neurosciences que nous venons d'analyser, nous regrettons le manque de prise en compte de la littérature scientifique didactique pour problématiser les questions qui touchent à l'apprentissage des mathématiques. Nous n'admettons pas que les auteurs fassent des recommandations aux enseignants sans expérimentation dans des classes, et donc sans évaluer de façon rigoureuse les effets sur les apprentissages en fonction des contextes, des publics scolaires et des pratiques d'enseignement des professeurs. La didactique des mathématiques pourrait donc interagir de façon fructueuse avec les neurosciences cognitives. Cela nécessiterait le concours de scientifiques convaincus par l'intérêt de l'interdisciplinarité, conscients de la portée et des limites de leurs approches. De telles interactions conduiraient à l'accroissement des savoirs sur les conditions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, et contribueraient, à terme, à l'amélioration des apprentissages des élèves.

Références

Barallobres, G. (2018). Réflexions sur les liens entre neurosciences, mathématiques et éducation. *McGill Journal of Education, 53*(1), 169-188.

Brault Foisy, L.-M., Masson, S. & Dehaene, S. (2016). Quand le cerveau se « recycle » pour apprendre à lire et à compter. *Vivre le primaire, 29*(3), 57-59.

Brousseau, G. & Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans le cadre de la scolarité obligatoire : comptes rendus d'observations de situations et de processus didactiques à l'école Jules Michelet de Talence*. Thèse de didactique des mathématiques.

Chambris, C., Tempier, F. & Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école- collège. *Repères IREM, 108*, 63-91.

Coulange, L. & Train, G. (2018). Enseigner les nombres décimaux et les fractions, transitions (ou ruptures ?) primaire-secondaire. In M Abboud (dir.). *Mathématiques en scènes, des ponts entre les disciplines - Actes du colloque EMF 2018* (pp. 1490-1499).

Dehaene, S. (1992). Varieties of Numerical Abilities. *Cognition, 44*, 1-42.

Dehaene, S. (2010). Le cerveau calculateur. *Bulletin de l'APMEP, 488*, 312-326.

Dehaene, S., Potier-Watkins, C., Xi He, C. & Lubineau, M. (2022). Évaluer la compréhension des nombres décimaux et des fractions : Le test de la ligne numérique. *Note du CSEN, 5*.

Douady, R. & Perrin-Glorian, M.-J. (1986). *Liaison école-collège : Nombres décimaux*. Paris : IREM de Paris VII.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 5-32.

Hirsch, M. (2022). *Pluralité des savoirs relatifs aux fractions : une analyse des connaissances des élèves en fin de collège*. Mémoire de master de recherche de l'Université Paris Cité.

Keller, O. (2014). Existe-t-il un sens du nombre ? *Actes des Journées nationales de l'APMEP 2014*. https://www.apmep.fr/IMG/pdf/P1-28-compte-rendu.pdf

Margolinas, C. (2021). Enseigner les nombres rationnels au cycle 3 ? Une proposition didactique. *Grand N, 106*, 5-30.

Martinez, S. & Roditi, E. (2017). Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire. Quelques enseignements tirés de TIMSS. *Éducation & Formations, 94*, 23-40.

Perrin-Glorian, M.-J. (1986). Représentations des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et de collège. *Petit x, 10*, 5-29.

Roditi, E. (2005). L'éducation face aux théories de la construction du nombre chez l'enfant. *Spirale - Revue de recherches en éducation, 36*, 37-52.

Roditi, E. & Salles, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques. *Éducation et formations, 86-87*, 236-267.

Roditi, E. & Noûs, C. (2021). Didactique des mathématiques et neurosciences cognitives : une analyse des contributions à la recherche sur l'apprentissage d'un contenu scolaire. *Revue française de pédagogie, 211*, 103-115.

Roell, M., Viarouge, A., Hilscher, E., Houdé, O., & Borst, G. (2019). Evidence for a visuospatial bias in decimal number comparison in adolescents and in adults. *Scientific Reports, 9*.

Tipper, S. P. (1985). The negative priming effect: inhibition priming par ignored objects. *Quarterly Journal of Experimental Psychologie, 37A*, 571-590.

Titre: Modification de l'apprentissage des élèves en modifiant les mathématiques à enseigner : le cas des fonctions trigonométriques en France

Auteurs: MEGHERBI Djamila et ARTAUD Michèle

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 719 - 732

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Modification de l'apprentissage des élèves en modifiant les mathématiques à enseigner : le cas des fonctions trigonométriques en France

MEGHERBI[1] Djamila – ARTAUD[2] Michèle

Résumé – Ce que les élèves apprennent sur un thème donné dépend du contenu mathématique qui leur est enseigné. Or ce dernier n'est que très partiellement fixé par le programme et dépend du processus de transposition didactique *stricto sensu*, soit de la détermination par les professeurs d'une praxéologie mathématique à enseigner. C'est ce point que nous illustrerons à propos de l'enseignement des fonctions trigonométriques en classe de première en France.

Mots-clefs : Théorie anthropologique du didactique, praxéologie mathématique à enseigner, rapport en position d'élève, apprentissage, fonctions trigonométriques.

Abstract – What students learn depends on the mathematical content taught to them. However, the latter is only very partially fixed by the curriculum and depends on the process of didactic transposition strictly speaking, i.e., on the teachers' determination of a mathematical praxeology to be taught. This is the point we will illustrate in relation to the teaching of trigonometric functions in France (16-17 years old students).

Keywords: Anthropological Theory of the Didactic, mathematical praxeology to be taught, relation in student position, learning, trigonometric functions.

1. Lycée international Alexandre Dumas, Algérie, latmas@hotmail.com

2. Aix Marseille Université, France, michele.artaud@univ-amu.fr

Notre communication prend appui sur un travail de recherche mené lors du master 2 de didactique des mathématiques de l'université d'Aix-Marseille (Megherbi, 2021) qui s'intéressait à la question suivante : la trigonométrie du triangle peut-elle favoriser l'introduction des fonctions sinus et cosinus ou au contraire constitue-t-elle un obstacle à cette introduction ? En effet, parmi les travaux s'intéressant à la trigonométrie, certains s'interrogent sur le rôle fondamental accordé au cercle trigonométrique par les programmes, les manuels et les enseignants, comme par exemple celui de Ratha Loeng (2019) ; d'autres (Proulx, 2003 ; Groupe didactique des maths IREM d'Aquitaine, 2016 ; Nguyen Thi, 2011 ; Espindola & Trgalova, 2020) s'intéressent à des facteurs épistémologiques liés à des connaissances des programmes et des contenus des examens. Mais la plupart soulignent que le passage de la trigonométrie géométrique, introduite au collège dans le cadre du triangle rectangle, à celle de l'analyse étudiée au lycée paraît un point de difficulté sans qu'une praxéologie adaptée permettant de la surmonter ne se dégage clairement des travaux cités. Cette étude, menée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992 & 2019), nous a conduites à nous intéresser aux apprentissages des élèves sur la trigonométrie et à proposer un parcours d'étude et de recherche pour la classe de première en France (élèves de 16-17 ans) de nature à améliorer ces apprentissages. Nous présenterons ici des éléments de ce travail qui mettent en évidence la dépendance de ces apprentissages relativement aux praxéologies (Chevallard, 1999) des enseignants, et notamment celles qui sont relatives à la préparation de la matière mathématique à enseigner – ce qui a trait au processus de transposition didactique. En effet, si les organisations de l'étude mises en place par les enseignants conditionnent le rapport en position d'élève – soit ce que les élèves ont appris –, ces organisations de l'étude dépendent notamment de la détermination des praxéologies mathématiques qui doivent être étudiées. Compte tenu de l'illusion de la transparence du savoir mise en évidence par la théorie de la transposition didactique, ces praxéologies ne peuvent être considérées comme allant de soi.

La trigonométrie dans les programmes français

Historiquement la trigonométrie est apparue pour les besoins de l'astronomie, dans le but de prédire des phénomènes astronomiques réguliers. Son origine est attribuée à l'astronome grec Hipparque qui a vécu au IIe siècle avant J.C, auquel on doit, semble-t-il, les premières tables trigonométriques (calcul de sinus, de cosinus et tangente d'un angle) et la mise au point d'une méthode pour mesurer le rapport des distances entre la terre, la lune et le soleil. Dans l'encyclopédie due à Denis Diderot (1713-1784) et Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), ce dernier définit la trigonométrie comme « l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît » (Diderot & D'Alembert, 1751, p. 640). C'est bien la démarche qui est demandée aux élèves du collège, comme en témoigne le programme du cycle 4 (élèves de 12-15 ans) qui, dans les connaissances du thème « utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer », cite les « lignes trigonométriques dans le triangle rectangle : cosinus, sinus, tangente » (MEN, 2020).

Mais au lycée, ce sont les fonctions trigonométriques qui sont introduites – fonctions qui sont apparues au XVIII[e] siècle et dont la première synthèse semble due à Leonhard Euler, qui les introduit par le biais de leur développement en série (Euler, 1748). En effet, le domaine de l'analyse du programme de spécialité mathématique de première comprend un thème « fonctions trigonométriques » dont on reproduit le contenu ci-dessous :

Fonctions trigonométriques.

Contenus

- Cercle trigonométrique, Longueur d'arc, Radian ;
- Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique, Image d'un nombre réel ;
- Cosinus et sinus d'un nombre réel, Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle, Valeurs remarquables ;
- Fonctions cosinus et sinus, Parité, Périodicité, Courbes représentatives.

Capacités attendues

- Placer un point sur le cercle trigonométrique
- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique ;
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques ;
- Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x.

Démonstration

- Calcul de : sin π/4 ; cos π/3 ; sin π/3.

Exemple d'algorithme

- Approximation de π par la méthode d'Archimède. (MEN, 2019, p. 10-11)

Le thème est présenté ainsi dans l'introduction du domaine :

> Les fonctions trigonométriques font l'objet d'une première approche, d'un point de vue principalement graphique, en lien avec les autres disciplines scientifiques. C'est aussi l'occasion de rencontrer la notion de fonction périodique, également utile dans les sciences sociales (variations saisonnières). (*Ibid.*, p. 8)

Et il fait l'objet du commentaire suivant dans la rubrique « Histoire des mathématiques » :

> La trigonométrie a été utilisée chez les Anciens dans des problèmes de natures diverses (Géométrie, géographie, astronomie). Elle est à l'époque fondée sur la fonction corde, d'un

maniement bien moins facile que les fonctions sinus et cosinus de la présentation actuelle. (*Ibid.*, p. 9)

On voit donc apparaître dans le programme seulement les deux types de tâches suivants : « Placer un point sur le cercle trigonométrique » et « Déterminer, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x ». On pourrait y ajouter un autre type de tâches, implicitement présent, qui est la détermination de l'image d'un nombre par le procédé d'enroulement de la droite sur le cercle. En revanche, l'environnement technologique est plus riche. On y trouve pêle-mêle les notions de cercle trigonométrique, longueur d'arc, radian, enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique, cosinus et sinus d'un nombre réel, fonctions cosinus et sinus, parité, périodicité, courbes représentatives. Il s'agit aussi d'établir certaines valeurs remarquables, de s'appuyer sur le sinus et le cosinus d'un angle dans le triangle rectangle pour produire la notion de cosinus et sinus d'un nombre réel, etc.

Cela laisse beaucoup de latitude au professeur dans la construction d'une praxéologie mathématique à enseigner relative aux fonctions trigonométriques. Nous avons donc cherché à avoir une vision plus nette de cette praxéologie trigonométrique à enseigner à travers l'étude de manuels scolaires.

La trigonométrie dans les manuels de première

Nous avons étudié quatre manuels, en analysant les parties qui permettent de délimiter l'organisation mathématique : les pages de cours et savoir-faire ainsi que les corpus d'exercices. Nous débuterons par le manuel de la collection *Déclic* (Beltramone & *al.*, 2019). Les fonctions trigonométriques font l'objet d'un chapitre, le septième et dernier du domaine « Fonctions et suites numériques » occupant quelques 28 pages. Le « cours » est scindé en trois parties :

1. Enroulement sur le cercle ;
2. Cosinus et sinus d'un nombre réel ;
3. Fonctions cosinus et sinus,

chacune occupant une page à laquelle renvoie une page « Méthode ». On trouve dans les pages « Méthode », sans surprise, les types de tâches « Placer un point sur le cercle trigonométrique » (*Ibid.*, p. 213) et « Déterminer les cosinus et sinus des valeurs remarquables » (*Ibid.*, p. 215). La troisième méthode (*Ibid.*, p. 217) est intitulée « Lier les courbes des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique ». L'énoncé proposé aboutit à la production du tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle [0, 2] ainsi que du tableau de signes de cette même fonction sur le même intervalle. On a donc affaire ici à la réalisation d'un épisode du moment technologico-théorique, dont on pourrait discuter la pertinence de l'articulation avec le cours figurant en regard. La partie « j'applique » comporte le même travail à propos de la fonction cosinus, ajouté à deux autres énoncés. Le premier demande une évaluation de l'assertion « Pour tout réel x, cos$x$ et sin$x$ sont de même signe », tandis

que le second est un « vrai-faux » portant sur la comparaison de deux cosinus d'un nombre ou de deux sinus d'un nombre.

Les exercices permettent d'ajouter trois types de tâches relatifs aux fonctions trigonométriques elles-mêmes : « établir la parité ou la périodicité d'une fonction trigonométrique », « associer des expressions algébriques de fonctions trigonométriques à leurs courbes représentatives » et « tracer la courbe représentative d'une fonction trigonométrique » qui apparaît principalement comme sous-type de tâches des deux précédents.

Les auteurs du deuxième manuel étudié, celui de la collection *Barbazo* (Barbazo & Barnet, 2019), attribuent le premier chapitre du domaine analyse aux fonctions trigonométriques : le chapitre comporte 32 pages. La première partie du cours « Lecture sur le cercle trigonométrique » introduit dans l'environnement technologico-théorique les définitions et propriétés classiques (cercle trigonométrique, longueur d'arc, radian) à réinvestir dans la partie « Enroulement de la droite des réels » et « sinus et cosinus d'un nombre réel ». La quatrième partie « Fonctions sinus et cosinus » complète et enrichit cet environnement technologico-théorique par l'introduction de la définition des fonctions sinus et cosinus et de leurs représentations graphiques, ainsi que la définition de la périodicité d'une fonction trigonométrique et des propriétés de périodicité et de parité des fonctions sinus et cosinus. A chaque partie du cours est associée une page d'exercices résolus. Comme on peut le prévoir, on retrouve les types de tâches : « Placer un point sur le cercle trigonométrique » (*Ibid.*, p. 85) et « Déterminer les cosinus et sinus des valeurs remarquables » (*Ibid.*, p. 87). Ils sont accompagnés de deux autres types de tâches figurant dans la première partie du cours, « Calculer la longueur d'un arc » (*Ibid.*, p. 83) et « Déterminer la mesure en radian d'un angle dont on connaît la mesure en degré et inversement » (*Ibid.*, p. 83). Dans la quatrième partie du cours (*Ibid.*, p. 89) nous rencontrons le type de tâches « Résoudre une équation trigonométrique d'inconnue x de la forme $\cos x + \alpha$ ou $\sin x = \alpha$; sur un intervalle », le spécimen proposé étant relatif à la fonction cosinus sur l'intervalle $[0;2\pi[$. La solution commentée propose d'utiliser la courbe représentative de la fonction cosinus, de tracer la droite d'équation $y = \alpha$ et de faire une résolution graphique de l'équation. Cet énoncé renvoie vers l'exercice 28 (*Ibid.*, p. 102) où il est demandé de réaliser le même type de tâches à propos de la fonction sinus sur l'intervalle $]-\pi;\pi[$ et de contrôler le résultat obtenu en exploitant le cercle trigonométrique. On y trouve aussi les types de tâches « Étudier la périodicité d'une fonction trigonométrique » et « Montrer qu'une fonction est paire ou impaire » avec le même format – c'est-à-dire un exercice résolu qui renvoie vers un exercice comportant le même type de tâches. Deux pages « Démonstrations et raisonnement » clôturent le cours dans lesquelles trois points sont présents : comprendre une démonstration, rédiger une démonstration et utiliser différents raisonnements (*Ibid.*, p. 90). Là encore aucun des types de tâches demandé nécessite de manipuler les fonctions sinus ou cosinus. La partie exercices est répartie en quatre sections dont les trois premières, comportant 61 exercices, se voient attribuées des termes empruntés à la musique pour indiquer le tempo : *Va piano ; moderato ; allegro*, la quatrième partie se voyant attribuer l'intitulé « vers l'épreuve écrite ». L'examen de cette partie révèle 12 exercices sur 77 qui mettent en jeu des types de tâches faisant appel à des techniques justifiées par

les fonctions trigonométriques. L'exercice 28 (*Ibid.*, p. 102), nous l'avons dit plus haut, relève du type de tâches « Résoudre une équation trigonométrique d'inconnue de la forme ou ; sur un intervalle ». Il en va de même de l'exercice 30 (*Ibid.*, p. 102). L'exercice 29 (*Ibid.*, p. 102) demande quant à lui de résoudre sur l'intervalle [une inéquation d'inconnue de la forme en s'aidant de la représentation graphique donnée de la fonction cosinus et en contrôlant le résultat obtenu avec le cercle trigonométrique. L'exercice 31 (*Ibid.*, p. 102) concerne également la résolution d'inéquations trigonométriques mais, bien qu'il se trouve dans la rubrique « Fonctions sinus et cosinus », il est demandé d'utiliser le cercle trigonométrique. L'exercice 32 (*Ibid.*, p. 102) demande de faire des conjectures sur la parité et la périodicité de fonctions à partir de leur représentation graphique. L'objet des exercices 33, 34 et 35 (*Ibid.*, p. 102) est d'établir la parité et la périodicité de fonctions trigonométriques définies par leur expression algébrique, l'un d'entre eux nécessitant de représenter la fonction à la calculatrice pour conjecturer sa période. On peut donc ajouter aux types de tâches identifiés dans l'ouvrage précédent les cinq suivants : « Calculer la longueur d'un arc de cercle », « Déterminer la mesure en radian d'un angle dont on connaît la mesure en degré et inversement », « Résoudre une équation trigonométrique d'inconnue $\boldsymbol{x}$ de la forme $cos\boldsymbol{x} = \alpha$ ou $sin\boldsymbol{x} = \alpha$ sur un intervalle », « Résoudre une inéquation d'inconnue $\boldsymbol{x}$ de la forme $cos(\boldsymbol{x})<\alpha$, $cos(\boldsymbol{x}) \leq \alpha$ » et « Transformer des expressions trigonométriques ». La considération du programme de la spécialité mathématique de terminale laisse penser que la résolution d'équations et d'inéquations trigonométriques ne fait pas partie de l'organisation mathématique à enseigner en classe de 1re puisqu'elle figure dans les capacités attendues en terminale – sauf à employer les techniques graphiques dont les élèves disposent depuis la seconde et qui font donc partie du milieu pour l'étude.

Dans le manuel de la collection *Variations* des éditions Hatier (Roland & Darthos, 2019), le troisième que nous avons étudié, le chapitre « fonctions trigonométriques » est le quatrième et dernier chapitre du domaine analyse. Le cours est organisé autour de trois objectifs, chacun étant associé à un savoir-faire. On retrouve pratiquement le même environnement technologico-théorique que précédemment : cercle trigonométrique, tableau des valeurs remarquables, définitions du sinus et du cosinus d'un nombre réel, tableau de variations des fonctions sinus et cosinus ainsi que leurs courbes représentatives. On note cependant que le radian est introduit comme nouvelle unité de mesure d'angle par le biais d'une petite annotation dans la marge :

> Lorsque le nombre réel α appartient à l'intervalle $[0;2\pi]$, la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ au centre est proportionnelle à la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$. On dit aussi que l'angle $\widehat{IOM}$ mesure α radians. Le radian est une nouvelle unité d'angle. (Roland & Darthos, 2019, p. 192)

Les trois pages de savoir-faire comportent un exercice résolu et des « applications directes ». Se repérer sur le cercle trigonométrique est le savoir-faire associé au premier objectif « exploiter le cercle trigonométrique » ; déterminer le cosinus et le sinus d'un nombre réel est le type de tâches relatif à l'objectif 2, « définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel » ; et le savoir-faire « traduire graphiquement la parité et la périodicité » pour le troisième objectif « étudier les fonctions trigonométriques ». On y

retrouve les types de tâches « placer sur le cercle trigonométrique un point associé à un réel donné », « déterminer le cosinus et le sinus d'un nombre réel » et « déterminer la périodicité et la parité d'une fonction trigonométrique » auxquels on peut ajouter « compléter sur l'intervalle *J* la courbe représentative d'une fonction trigonométrique donnée sur *I* inclus dans *J*». La partie « exercices » commence par « les incontournables » (*Ibid.*, p. 201) pour vérifier que l'on maitrise les savoir-faire contenant dix exercices, dont deux impliquant des types de tâches relatifs aux fonctions trigonométriques et mobilisant principalement les ingrédients technologiques pour compléter une assertion ou déterminer sa véracité. On y trouve ensuite 46 exercices classés sous les rubriques des objectifs du cours et rangés dans le même ordre. En ce qui concerne l'étude des fonctions trigonométriques, 14 exercices sont proposés et dans lesquels il s'agit principalement d'émettre des conjectures quant à la parité ou la périodicité de la fonction représentée et de les justifier. On note un ou deux exemplaires de « tracer la représentation graphique d'une fonction trigonométrique », « établir le tableau de variations d'une fonction trigonométrique » et « associer des expressions algébriques de fonctions trigonométriques à leurs courbes représentatives ».

Le dernier ouvrage que nous avons considéré est celui édité par *lelivrescolaire.fr* (De Sousa, 2019). La trigonométrie fait l'objet de deux chapitres, les 4e et 5e du domaine analyse, occupant un total de 43 pages. La seule différence notable avec les ouvrages précédents réside dans le fait que le chapitre sur les fonctions trigonométriques est structuré ainsi :

1. Définitions et premières propriétés
2. Fonctions cosinus et sinus ;
3. Courbes représentatives.
4. Etude des fonctions trigonométriques
5. Dérivées ;
6. Tableaux de signes et variations.

La dérivation des fonctions trigonométriques est nettement hors du programme de première puisqu'elle fait partie des contenus du programme de la spécialité de terminale. Cette « sortie de route » conduit les auteurs à donner, dans la rubrique « application et méthode », l'exercice suivant :

> On considère la fonction *g*: $x \mapsto \frac{1}{cos(x)}$
>
> Donner l'ensemble de définition de *g*.
>
> Dresser le tableau de variations de *g* sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. (*Ibid.*, p. 209)

Sa résolution est accompagnée de la méthode ci-après :

> On identifie les fonctions de référence en jeu : ici, la fonction inverse et la fonction cosinus.
>
> La fonction inverse étant définie pour tout réel non nul, il suffit d'écarter les zéros de la fonction cosinus ; c.à.d. x vérifiant $\cos(x) = 0$.
>
> Une fois les valeurs interdites déterminées, la fonction g est alors définie pour tous les réels excepté ces valeurs.
>
> On calcule la dérivée et on détermine son signe en faisant attention aux valeurs interdites.
>
> On définit les variations de *g* à partir du signe de la dérivée. (*Ibid.*, p. 209)

On a là, nous semble-t-il, un effet classique d'un changement de programme qui, à la fois, enlève certaines notions et n'explicite pas suffisamment la nouvelle organisation praxéologique à enseigner, ce qui conduit les auteurs à dépasser les frontières du programme faute d'arriver à compléter de façon substantielle l'organisation mathématique en restant dans les contours fournis par le programme. On notera à cet égard que la stratégie des auteurs de l'ouvrage de la collection *Barbazo*, consistant à faire de la trigonométrie le premier chapitre de l'analyse, permet à la fois de faire du neuf en introduisant deux nouvelles fonctions et la notion de périodicité, tout en réinvestissant les acquis de la classe de seconde sur l'étude des fonctions et la résolution d'équations et d'inéquations. Mais cela se heurte à une contrainte temporelle du niveau de la discipline puisque les fonctions trigonométriques sont l'un des chapitres qui ne figurent pas au programme de l'épreuve du baccalauréat passée par les élèves de première ne prenant pas la spécialité mathématique en terminale – épreuve abandonnée au profit du contrôle continu à partir de la rentrée 2022.

Praxéologie mathématique à enseigner

Nous l'avons vu, les ouvrages suivent la présentation du programme et scindent la praxéologie mathématique à enseigner en deux parties : une première autour du cercle trigonométrique permettant de définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel ; une seconde autour de la définition des fonctions sinus et cosinus comme procédé associant à un nombre réel le cosinus ou le sinus de ce nombre, ainsi que les propriétés de parité de périodicité de ces fonctions. Cela met en évidence que le processus de transposition didactique n'a pas vraiment pris en compte le fait que l'on soit dans le domaine des fonctions et plus dans le domaine de la géométrie : bien que l'on traite l'enroulement de la droite des réels sur le cercle, le cercle trigonométrique matérialise le cosinus d'un angle comme le rapport de deux longueurs. Si l'introduction des fonctions passe par le cercle trigonométrique, le rapport créé disqualifie très fortement la notion de fonction : de fait ce rapport au cercle trigonométrique va gêner l'existence de la notion de fonction puisque l'on reste sur les angles, et les élèves ont peu de chance de se saisir de la notion de fonction qui à un nombre associe un nombre. Ceci a motivé la

constitution d'une praxéologie mathématique amalgamant les deux organisations mathématiques proposées par le programme : nous avons développé l'environnement technologico-théorique principalement autour des fonctions cosinus et sinus, d'une part pour améliorer l'existence des fonctions trigonométriques en augmentant le nombre de type de tâches dont la technique est produite ou justifiée par les fonctions trigonométriques et leurs propriétés ; d'autre part, pour pouvoir construire les fonctions cosinus et sinus directement à partir du sinus et cosinus d'un angle et ainsi mettre en évidence l'apport et la raison d'être mathématique des fonctions trigonométriques.

Nous en explicitons ci-après quelques éléments pour donner une idée plus précise du changement de rapport que cette praxéologie mathématique permet de créer. Elle comprend six types de tâches :

T_{IM} : Calculer l'image d'un nombre par la fonction sinus ou cosinus.

T_{per} : Déterminer la période d'une fonction trigonométrique.

T_{par} : Déterminer la parité d'une fonction trigonométrique.

T_{m} : Déterminer la mesure en radian d'un angle dont on connaît la mesure en degré et réciproquement.

T_{r} : Déterminer la mesure en radian d'un angle dont on connaît la mesure en degré, : Déterminer la mesure en degré d'un angle dont on connaît la mesure en radian,

T_{point} : Placer sur le cercle trigonométrique l'image d'un réel par le procédé d'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique.

$T_{réel}$: Etant donné un point sur le cercle trigonométrique, déterminer les réels dont il est l'image par le procédé d'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique.

Voici les techniques correspondant aux deux types de tâches T_{IM} et $T_{réel:}$

τ_{IM} : Si l'on connait son image, par l'autre fonction, calculer $\sqrt{(1-y^2)}$; vérifier en calculant l'image à la calculatrice.

Sinon, représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus. Placer les valeurs remarquables $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$ et leurs images.

Si x est de la forme $\frac{a\pi}{2}$, $\frac{b\pi}{4}$, $\frac{c\pi}{3}$ ou $\frac{d\pi}{6}$, avec *a*, *b*, *c* et *d* entiers naturels, regarder si x appartient à [0 ; 2π] ; sinon s'y ramener en enlevant un multiple de 2π soit 2*k*π avec *k* entier naturel pour obtenir y dans [0 ; 2π] tel que $x = y + 2k\pi$.

Si x ou y dans $[0; \frac{\pi}{2}]$ lire la valeur sur la courbe ; sinon regarder dans quel intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$; $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$; $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi$ se situent x ou y, placer x ou y sur l'axe des abscisses et lire la valeur de

son image sur la courbe représentative. Vérifier en plaçant le point A de coordonnées (cos(x) ; sin(x)) ou (cos(y) ; sin(y)) sur le cercle trigonométrique et en contrôlant que l'angle $\widehat{IOA}$ mesure x rad ou y rad ; puis en entrant cos(x) ou cos(y) ou sin(x) ou sin(y) à la calculatrice en mode radian.

Si x est de la forme $-\frac{a\pi}{2}$; $-\frac{b\pi}{4}$; $-\frac{c\pi}{3}$ et $-\frac{d\pi}{6}, a, b, c, d$ entiers naturels, déterminer cos(-x) ou -sin(-x).

Sinon, déterminer une valeur approchée en entrant cos(x) ou cos(y) ou sin(x) ou sin(y) à la calculatrice en mode radian et contrôler avec la courbe représentative. Vérifier en plaçant le point A de coordonnées (cos(x) ; sin(x)) ou (cos(y), sin(y)) sur le cercle trigonométrique et en contrôlant que l'angle $\widehat{IOA}$ mesure x rad ou y rad.

$\tau_{réel}$: Représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction cosinus et de la fonction sinus. Placer les valeurs remarquables : $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$ et leurs images.

Déterminer graphiquement les antécédents de *a* dans l'intervalle [0; 2π[par la fonction cosinus et ceux de *b* dans l'intervalle [0; 2π[par la fonction sinus.

Choisir l'antécédent commun de *a* et de *b*, x et écrire que les réels cherchés sont les réels de la forme, x+2*k*π où est un entier relatif.

Placer le point *M* sur le cercle et vérifier x que est la mesure en radian de l'angle $\widehat{IOM}$.

Ces techniques matérialisent le changement d'environnement technologico-théorique que nous avons signalé, en mettant les fonctions, par le biais de leur courbe, comme principal ingrédient permettant de produire les techniques.

La définition des fonctions sinus et cosinus repose sur l'organisation mathématique étudiée au collège et sur la notion de périodicité, qui fait partie de cette définition.

La fonction cosinus est une fonction définie sur R, périodique de période 2π : pour tout x réel, *cos*(x + 2π) = *cos*(x) Elle est définie sur [0 ; 2π] par :

$$\cos x = \begin{cases} \cos(x \text{ rad}) \text{ si } x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \\ -\sin\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{rad}\right) \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right] \\ -\cos((x - \pi) \text{ rad}) \text{ si } x \in [\pi ; \frac{3\pi}{2}] \\ \sin\left(\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \text{rad}\right) \text{ si } x \in [\frac{3\pi}{2} ; 2\pi] \end{cases}$$

La fonction sinus est une fonction définie sur R, périodique de période 2π : pour tout x réel, $sin(x + 2\pi) = sin(x)$.Elle est définie sur [0; 2π] par:

$$\sin x = \begin{cases} \sin(x \text{ rad}) \text{ si } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{rad}\right) \text{ si } x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \\ -\sin\left((x - \pi) \text{ rad}\right) \text{ si } x \in [\pi ; \frac{3\pi}{2}] \\ -\cos\left(\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \text{rad}\right) \text{ si } x \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi] \end{cases}$$

Vers la question de l'organisation de l'Étude

La modification de l'apprentissage des élèves concernant les fonctions trigonométriques passe ainsi par une modification de l'organisation mathématique à enseigner : compte tenu des conditions et des contraintes prévalant dans le système scolaire français, cette modification est à la charge de la position de professeur. Bien entendu, l'apprentissage des élèves est également conditionné par l'organisation de l'étude constituée pour mettre en place l'organisation mathématique à enseigner. Ce que nous avons explicité met en évidence certains ingrédients relatifs au temps didactique, et notamment le fait de traiter le cercle trigonométrique après avoir introduit les fonctions trigonométriques. Dans le mémoire (Megherbi, 2021), nous proposons une organisation de l'étude satisfaisant à ces conditions et nous étudions certains aspects de sa réalisation dans deux classes de première. Cette étude met en évidence que si les praxéologies de direction de l'étude des enseignants sont essentielles pour créer un rapport en position d'élève aux fonctions trigonométriques clairement situé dans le domaine de l'analyse, la constitution préalable de l'organisation mathématique servant de support à ce rapport est cruciale. La distinction entre praxéologies mathématiques enjeu de l'étude et praxéologies didactiques dans l'analyse des observables est un aspect déjà mis en évidence (Artaud, 2019 ; Artaud & Cirade 2022 notamment) mais dont l'importance mérite d'être soulignée.

Références

Artaud M. (2019) Praxeologies to be taught and praxeologies for teaching: a delicate frontier. In Marianna Bosch, Yves Chevallard, Francisco Javier García, John Monaghan (Eds), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education* (pp. 33-40). Londres : Routledge.

Artaud M., & Cirade G. (2021) La TAD comme milieu pour l'étude de l'activité des institutions didactiques. *Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online) 11*(1), 388-411. https://aplicacoes.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/762

Barbazo É., & Barnet C. (Dir.) (2019) *Mathématiques, 1re Spécialité*. Collection *Barbazo*. Paris : Hachette Éducation.

Beltramone J.-P., et al. (2019) *Maths 1re Spécialité*. Collection *Déclic*. Paris : Hachette Éducation.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques 12*(1), 73–112. https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/

Chevallard Y. (2019) On using the ATD: Some clarifications and comments. *Educação Matemática Pesquisa 21*(4), 1-17. https://doi.org/10.23925/1983- 3156.2019v21i4p001-017

Diderot D., & D'Alembert J. (1751) *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers. Tome seizième*. Neufchastel : Samuel Faulche & Compagnie. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k50548c?rk=42918;4

Espindola E., & Trgalova J. (2019) Étude des facteurs de décisions didactiques dans l'enseignement de la trigonométrie dans une classe du lycée au Brésil. In S. Coppé, E. Roditi, et al. (Dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques* (pp. 663-672.). La pensée sauvage : Grenoble.

https://www.researchgate.net/publication/340492478_Etude_des_facteurs_de_decisions_didactiques_dans_l%27enseignement_de_la_trigonometrie_dans_une_classe_du_lycee_au_Bresil [accessed Sep 03 2021].

Groupe didactique des maths IREM d'Aquitaine. (2016) *Quelques idées pour enseigner la trigonométrie au lycée*. Talence : IREM d'Aquitaine. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/BO/IBO16001/IBO16001.pdf

Proulx J. (2013) L'histoire de la trigonométrie comme outil de réflexion didactique. *Bulletin AMQ* Vol. XLIII n°3, 13-37. https://www.amq.math.ca/ancien/archives/2003/3/2003-3-part6.pdf

De Sousa P. (Coord.) (2019) *Maths 1re*. Lyon : *lelivrescolaire.fr* Éditions.

Loeng R. (2019) *Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge*. Thèse de doctorat de didactique des mathématiques de l'université Paris Cité.

Ministère de l'Éducation nationale (MEN). (2019) Programme de mathématiques de première générale. *Bulletin officiel de l'Éducation nationale spécial* n°1 du 22 janvier 2019. https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm

Ministère de l'Éducation nationale (MEN). (2020). Programme d'enseignement du cycle des approfondissement (cycle 4). *Bulletin officiel de l'Éducation nationale* n°31 du 30 juillet 2020. https://cache.media.education.gouv.fr/file/31/89/1/ensel714_annexe3_1312891.pdf

Roland, C., & Darthos,P. (Dir.) (2019) *1re Spécialité Maths*. Collection *Variations*. Paris : Hatier.

Titre: Une étude à grande échelle des pratiques déclarées des enseignants du secondaire français

Auteurs: PILET Julia, COPPÉ Sylvie, GRUGEON-ALLYS Brigitte et HOROKS Julie

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 733 - 746

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Une étude à grande échelle des pratiques déclarées des enseignants du secondaire français

PILET[1] Julia – COPPÉ[2] Sylvie – GRUGEON-ALLYS[3] Brigitte – HOROKS[4] Julie

Résumé – L'enquête française PRAESCO présentée ici a pour objectif de dresser un panorama des pratiques déclarées des enseignants de mathématiques de la dernière année de l'enseignement secondaire inférieur (classe de 3e de collège). Nous commençons par présenter le cadrage théorique et les méthodes de travail adoptées pour construire le questionnaire adressé aux enseignants et caractériser les pratiques. Nous présentons ensuite les principaux résultats de l'enquête.

Mots-clefs : pratiques enseignantes, second degré, questionnaire, grande échelle, algèbre

Abstract – The aim of the French PRAESCO survey presented here is to draw up an overview of the declared practices of mathematics teachers in the last year of lower secondary education (3rd grade). We begin by presenting the theoretical framework and the working methods adopted to construct the questionnaire addressed to the teachers and to characterize the practices. We then present the main results of the survey.

Keywords: teaching practices, second degree, questionnaire, large scale, algebra

1. Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010, Creteil, France, julia.pilet@u-pec.fr

2. Université de Genève FPSE, Équipe DiMaGe, Suisse, sylvie.coppe@unige.ch

3. Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010, Creteil, France, brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

4. Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010, Creteil, France, julie.horoks@u-pec.fr

PRAESCO, une enquête initiée par le ministère de l'Éducation Nationale

L'enquête française sur les Pratiques d'Enseignement Spécifique aux Contenus (PRAESCO) en mathématiques a été initiée par la Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance (DEPP) qui est chargée par le ministère de l'Éducation nationale de l'information statistique sur le système éducatif français. La DEPP pilote en particulier les évaluations nationales à grande échelle des acquis des élèves de tous les niveaux scolaires et, plus particulièrement, elle évalue en fin d'année les acquis en mathématiques des élèves de CM2 (5e et dernière année de l'école élémentaire, élèves âgés de 11 ans) et de 3e (9e année de scolarisation obligatoire et dernière année du collège, élèves âgés de 15 ans). Parallèlement à ces évaluations, la DEPP a souhaité dresser un panorama français des pratiques d'enseignement des mathématiques en fin de CM2 et de 3e qui se distingue des enquêtes existantes (comme EPODE, THALIS…) par la prise en compte des contenus enseignés, ici les mathématiques, et plus particulièrement le calcul littéral. Dans ce but, elle a conclu un partenariat avec des laboratoires de recherche, notamment en didactique des mathématiques. Pour le ministère, l'objectif est d'effectuer un suivi de l'évolution des pratiques parallèlement à celui effectué sur les apprentissages des élèves, tous les cinq ans. Pour les chercheurs, l'objectif est d'initier une étude à grande échelle en complément des travaux qualitatifs menés en didactique des mathématiques sur les pratiques enseignantes. Les résultats obtenus depuis près de vingt années par ces recherches conduites en France ont nourri nos questions sur les pratiques enseignantes.

L'enquête se présente sous la forme d'un questionnaire prévu pour une passation de 45 minutes auquel un échantillon représentatif d'enseignants, d'environ 1800 enseignants, a répondu. Nous avons participé à la conception du questionnaire et à son analyse.

Éléments théoriques et hypothèses

Appuis théoriques

La conception des items de l'enquête et du cadre de leur analyse intègre des résultats de recherche en didactique des mathématiques relatifs, d'une part, aux pratiques enseignantes et, d'autre part, aux travaux de didactique de l'algèbre élémentaire.

Nous nous appuyons sur la double approche didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2005) pour décrire les pratiques enseignantes à partir des différentes composantes d'analyse des pratiques, cognitive et médiative en ce qui concerne la stratégie d'enseignement de l'algèbre en 3e, sociale, institutionnelle et personnelle, en ce qui concerne les contextes professionnel et personnel. Pour les composantes cognitive et médiative des pratiques, nous décrivons l'organisation mathématique et didactique de l'enseignement à partir de praxéologies mathématique et didactique, outils de la théo-

rie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999). L'étude des pratiques d'évaluation prend en compte les travaux de (Black et Wiliam, 1998 ; Allal, 2007 ; Horoks et Pilet, 2015 ; Grapin et Grugeon-Allys, 2018 ; Coppé et Roubin, 2019). Enfin en ce qui concerne une catégorisation des pratiques enseignantes, nous nous appuyons sur des travaux relatifs au développement des pratiques, les i-genres (Butlen et al, 2002, les modes de développement professionnel et leurs effets sur les apprentissages des élèves (Grugeon-Allys, 2010).

La conception des items de l'enquête relatifs à l'enseignement de l'algèbre élémentaire intègre des résultats de recherche en didactique de l'algèbre élémentaire (Chevallard, 1985, 1989 ; Kieran et al, 2007 ; Grugeon-Allys et al., 2012 ; Assude, Coppé et Pressiat, 2012 ; Pilet, 2015 ; Sirejacob, 2017). En particulier, l'algèbre est un outil pour résoudre différents types de problèmes (Chevallard, 1985, 1989) de généralisation, de preuve, de modélisation et de mise en équation dont l'enseignement peut être modélisé par un processus progressif d'algébrisation des programmes de calcul, d'abord pour introduire les expressions littérales via l'équivalence de deux programmes de calcul, puis les équations via l'égalité de deux programmes de calcul (Ruiz-Munzon, Matheron, Bosch et Gascon, 2012). Notons qu'actuellement, les instructions officielles françaises tiennent compte de ces résultats.

L'enquête comprend également des questions liées à des résultats plus généraux indiquant des conditions pouvant être favorables aux apprentissages. Ces derniers concernent la place de l'erreur dans l'apprentissage, le rôle de l'évaluation, des conditions relatives à l'organisation didactique de l'enseignement (séquence), à la gestion didactique lors des séances en classe et aux responsabilités de l'enseignant et de l'élève. Ils sont tirés d'expérimentations rendant compte des pratiques d'enseignement du calcul littéral et des difficultés rencontrées par les enseignants (Combier, Guillaume et Pressiat, 1995 ; Grugeon-Allys, Pilet, Chenevotot-Quentin et Delozanne, 2012 ; Pilet, 2015 ; Coppé et Grugeon-Allys, 2015 ; Coppé, Grugeon-Allys et Pilet, 2016 ; Horoks et Pilet, 2015).

Nos hypothèses sur les liens entre pratiques et apprentissages

Nos hypothèses de travail reposent sur les liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages des élèves. Nous considérons que les éléments suivants peuvent avoir une influence sur les apprentissages des élèves :

- l'organisation de la séquence, le choix de types de tâches mathématiques, de leur articulation, des variables didactiques associées, et du niveau de justification visé ;
- l'organisation globale de l'enseignement, de l'évaluation et de la régulation, dans les moments d'enseignement-apprentissage d'une notion en lien avec les enjeux institutionnels ;
- la gestion didactique en classe, accordant une place explicite aux savoirs mathématiques et certaines responsabilités aux élèves en lien avec le contrat dans les processus d'enseignement-apprentissage.

Nous y ajoutons la prise en compte du contexte d'enseignement et du profil de l'enseignant parce qu'ils permettent d'interpréter des choix faits par les enseignants.

Trois axes pour décrire les pratiques enseignantes

Nous structurons la description des pratiques enseignantes en trois axes : l'axe enseignement du calcul littéral, l'axe organisation du travail en classe et l'axe prise en compte des élèves. Ces trois axes permettent de décrire les pratiques enseignantes sur les composantes cognitive et médiative. Le contexte dans lequel travaille l'enseignant, son profil comme sa formation et son expérience permettent de décrire les composantes personnelle, sociale et institutionnelle. Notre étude commence par décrire les pratiques enseignantes sur les trois axes puis à mettre en relation leurs caractéristiques avec le contexte et le profil des enseignants.

Chaque axe est structuré en dimension. À chaque dimension correspond un ensemble d'items sur lequel des scores issus d'analyses statistiques sont ensuite calculés comme nous le présentons dans les paragraphes suivants.

Dimension	Description
1. Équilibre entre technique de calcul et résolution de problèmes	Progressivité qui prend en compte la transition de l'arithmétique vers l'algèbre Choix et répartition globale (en nombre et durée) de types de tâches (résolution de pb vs exercices de calcul) en début et fin de séquence
2. Motivation du sens et de l'intérêt du calcul littéral	Situations d'introduction aux expressions littérales et équations selon qu'elles motivent plus ou moins les raisons d'être de l'algèbre
3. Variété et complexité des types d'exercices	Variété : couverture des types d'exercices (modélisation, preuve, mise en équation, calcul) et contextes de problèmes (intra ou extra mathématiques) Complexité : niveau de mise en fonctionnement des connaissances
4. Formulation des propriétés	Formulations mathématiques versus simplificatrices (règles, recettes, ordre légal, etc.) dans le cours, notamment des propriétés (par exemple de distributivité et de conservation de l'égalité)
5. Justifications pendant les interactions	Fréquence de justification ou validation d'un calcul ou un raisonnement par les propriétés dans les interactions

Tableau 1 – Les 5 dimensions de l'axe « Enseignement du calcul littéral »

Dimension	Description
6. Ressources	Diversité et fréquence en vue de préparer et de mettre en œuvre l'enseignement
7. Usages des outils numériques	Usage par les élèves et/ou par l'enseignant du tableur, d'un logiciel de géométrie dynamique, de la calculatrice, etc.
8. Modalités de travail en classe	Modalités laissant plus ou moins d'initiatives aux élèves, notamment dans les temps recherches et les mises en commun
9. Évaluation diagnostique	Repérage des acquis, erreurs, conceptions et procédures (erronées ou non), selon les moments de la séquence et par certains types d'exercices
10. Évaluation sommative	Conception par l'enseignant (moment dans la séquence et choix des exercices) et format et nature des retours aux élèves
11. Appuis et retours sur le travail des élèves	Fréquence d'appui sur les productions effectives à partir de travaux et erreurs des élèves dans les mises en commun ou dans les copies

Tableau 2 - Les 6 dimensions de l'axe « Organisation du travail en classe »

Dimension	Description
12. Prise en compte de l'erreur	Choix de situations permettant ou non de repérer et de déconstruire les erreurs Appui plus ou moins fréquent sur la classe pour valider-invalider les productions effectives des élèves Validation-invalidation en lien plus ou moins explicite avec les contenus mathématiques sous-jacents
13. Aides et moyens de contrôles en classe	Moyens donnés par l'enseignant aux élèves pour vérifier ou évaluer leur propre production ou celles des autres élèves Nature des aides, spécifiques aux contenus mathématiques visés (substitution, cohérence et structure d'une expression) Régularité des incitations à s'auto-évaluer et évaluer le travail des autres élèves

Tableau 3 - Les 2 dimensions de l'axe « Prise en compte de l'élève »

Méthodologie

Caractéristiques et élaboration du questionnaire

L'enquête porte sur un questionnaire dont la passation est prévue pour 45 minutes. Les questions sont toutes fermées avec le format d'échelles de Lickert à quatre niveaux en termes de fréquence (de « jamais », à « très souvent ») ou d'accord (de « pas du tout d'accord » à « tout à fait d'accord »). Toutefois, les pourcentages commentés dans les résultats sont construits à partir du regroupement des deux niveaux supérieurs des échelles et des deux niveaux inférieurs. Ainsi, nous dirons qu'une pratique est fréquente pour les réponses « très souvent » et « souvent » et peu fréquentes pour « parfois » et « jamais ». Les questions sont formulées de sorte que l'enseignant situe ses réponses pour une classe de 3^{e} donnée, appelée « 3ème de référence ».

Le questionnaire comprend quatre rubriques. Chaque rubrique a été élaborée par un groupe composé d'enseignants et de chercheurs. Un premier ensemble de question a fait l'objet d'un cobayage

par des enseignants sollicités par la DEPP. Cela a conduit à une sélection de 108 items, ceux ayant au moins 80% de réponses identiques ont été supprimés.

Certaines questions sont des mises en situation fictives, c'est-à-dire des questions évoquant une situation d'enseignement, reconnue par la profession (par exemple des exercices ou des situations de classe ou des réponses d'élèves ou erreurs), où les enseignants devaient répondre en indiquant ce que seraient leurs choix pédagogiques ou didactiques si cette situation fictive prenait place dans le contexte de leur classe de 3e.

La DEPP a organisé la passation avec un échantillon représentatif d'environ 1800 enseignants interrogés.

Analyses statistiques

Les réponses sont étudiées à partir d'analyses statistiques dont les résultats sont interprétés selon notre cadre d'analyse des pratiques. Les tris à plats, items par items, permettent de caractériser les pratiques d'enseignement en mathématiques. Des analyses statistiques de type classification ascendante hiérarchique (CAH) et analyse de correspondances multiples (ACM), obtenue à partie de regroupements d'items sur chaque dimension, ont permis la recherche de groupes de pratiques (appelés aussi « clusters »).

Les résultats que nous présentons sont issus de la note d'information de PRAESCO[5] second degré et du document de travail[6] qui l'accompagne. Compte-tenu du format de cette contribution, nous ne rendons compte que des résultats les plus marquants et renvoyons le lecteur vers la note d'information, en particulier en ce qui concerne les analyses différenciées suivant le contexte d'enseignement (éducation prioritaire, enseignement public ou privé) et le profil des enseignants.

Principales caractéristiques des pratiques d'enseignement en mathématiques

Description de l'échantillon « enseignants » et du contexte d'enseignement

Les enseignants de mathématiques en classe de troisième de l'échantillon représentatif des enseignants en France métropolitaine sont une population majoritairement féminine (52 % de femmes). Leur âge moyen est de 43,8 ans et leur ancienneté dans l'enseignement de 16,9 ans, dont 11,9 ans en tant qu'enseignant auprès d'élèves de troisième. 94 % des enseignants a été reçu à un concours d'enseignement. Les enseignants contractuels ne forment ainsi que 6 % de l'échantillon des répon-

5. Note d'information DEPP-B4 21.11 (2021) https://www.education.gouv.fr/media/74626/download

6. Document de travail 2021-E02 https://www.education.gouv.fr/media/74607/download

dants et ils sont surreprésentés dans le secteur privé et en éducation prioritaire (plus d'un enseignant sur dix). Trois enseignants sur quatre (environ 74%) déclarent avoir bénéficié d'une formation initiale mais des disparités importantes apparaissent selon le secteur, l'expérience et le statut.

Caractérisation des pratiques enseignantes sur l'axe 1 « Enseignement de l'algèbre »

Il ressort deux tendances dans les organisations mathématiques structurant les séquences de calcul littéral. Pour débuter la séquence sur les expressions algébriques, 61 % des enseignants privilégient la résolution de problèmes conduisant à produire des expressions littérales (52 %) ou à prouver des propriétés (9 %). Ils sont près de 40 % à privilégier au contraire les techniques de calcul en commençant par des exercices du type « Développer et réduire des expressions littérales ». Le temps passé sur ces deux types d'exercices (la résolution de problèmes *versus* les exercices de calcul) au cours de la séquence sur les expressions algébriques témoigne de choix didactiques différenciés : près d'une moitié d'enseignants indique consacrer autant de temps à la résolution de problèmes qu'au calcul technique tandis que l'autre moitié opère des choix plus marqués (40 % passent plus de temps sur le calcul et 11 % sur les problèmes). Concernant la séquence portant sur les équations : 46 % des enseignants commencent par des problèmes de mise en équation, quand 54 % commencent par les exercices techniques de résolution d'équations. Les enseignants se répartissent de manière assez uniforme dans trois groupes selon le temps passé sur les différents types d'exercices : ainsi, 35 % rapportent consacrer plus de temps à la résolution de problèmes, 33 % à la résolution d'équations et 33 % autant de temps à ces deux types d'exercices.

Par ailleurs, une majorité des enseignants interrogés adhèrent à des tâches motivant le sens et l'intérêt des expressions littérales et des équations. Ainsi, deux situations d'introduction destinées à commencer le chapitre sur les expressions littérales ont été proposées aux enseignants qui devaient indiquer leur degré d'adhésion pour chacune d'entre elles, indépendamment : 69 % des enseignants adhèrent à la situation de généralisation (situation du type « carré bordé » conseillée dans les documents officiels) qui motive le recours à la lettre, quand 49 % adhèrent à une situation de traduction d'aire et de périmètre d'un rectangle où la lettre est déjà donnée.

Au-delà du choix des traces écrites proposées, les enseignants ont été questionnés sur les types d'arguments auxquels ils ont recours en cas d'erreur d'un élève lors d'un exercice de transformation d'expression littérale et de résolution d'équations. Ces arguments peuvent être soutenus par des propriétés mathématiques (comme la distributivité) ou être, au contraire, plus proches de recettes ou de règles soutenues par le langage courant (comme regrouper ou passer), par des analogies (ajouter des poires et des pommes) ou encore par des signes, des flèches ou des couleurs. Sur l'exercice de calcul littéral, 64 % des enseignants rapportent donner fréquemment des indications du type « On n'ajoute pas des poires et des pommes ». Seulement, la moitié des enseignants indiquent fréquemment proposer à l'élève, de tester par un exemple numérique une réponse fausse. Ils sont encore moins nombreux à utiliser fréquemment des indications mathématiques (21% pour la propriété de distribu-

tivité, 39% pour la priorité opératoire). Les enseignants sont plus nombreux à donner des indications mobilisant des formulations mathématiques pour la résolution des équations : 90 % insistent sur la distinction entre l'addition et la multiplication et 58 % proposent de tester si la réponse vérifie l'égalité initiale. La formulation du type « passer de l'autre côté » est utilisée par un quart des enseignants ce qui n'est pas de nature à favoriser un raisonnement mathématique.

Caractérisation des pratiques enseignantes sur l'axe 2 « Organisation globale de l'enseignement »

Les enseignants alternent les modalités de travail en classe entre temps individuels et collectifs mais certains choix ne favorisent pas le développement de l'autonomie des élèves. Des questions concernaient l'organisation des temps de recherche, de mise en commun et de confrontation, dont les modalités peuvent responsabiliser les élèves et favoriser leur autonomie. Lors de la résolution de problèmes, pendant le temps de recherche, c'est le travail individuel qui est la modalité de travail la plus fréquemment utilisée (86 % des enseignants). Les modalités les moins fréquentes concernent le travail en binôme (57%) et le travail en petits groupes (27 %). Un peu plus de deux enseignants sur cinq animent « souvent » ou « très souvent » une mise en commun à la suite d'un travail de groupe. 72 % des enseignants sollicitent régulièrement leurs élèves pour justifier leur réponse et expliquer aux autres leur démarche lors des temps collectifs. Seulement 45 % des enseignants demandent fréquemment aux élèves d'évaluer la production d'un autre élève et 21 % de comparer des productions d'élèves afin d'étudier l'efficacité de certaines stratégies ou raisonnements. Ces résultats donnent à penser que des pratiques laissent peu de place au développement de l'autonomie et à la prise de responsabilité des élèves.

L'évaluation diagnostique est peu pratiquée chez les enseignants afin de repérer des prérequis, des conceptions, des erreurs des élèves. Ils sont en effet 18% seulement, c'est-à-dire, moins d'un enseignant sur cinq, à proposer fréquemment une évaluation diagnostique afin de repérer les acquis des élèves en début de chapitre. Plus d'un enseignant sur deux (55 %) rapporte s'appuyer « souvent » ou « très souvent » sur les erreurs connues déjà observées les années précédentes. Près d'un tiers des enseignants dit également repérer fréquemment les acquis des élèves grâce à leur expérience des difficultés rencontrées par leurs élèves.

Seulement un quart des enseignants élabore fréquemment une évaluation sommative avant de commencer un chapitre ce qui indique une faible anticipation de ces évaluations. La préparation des élèves à l'évaluation est principalement réalisée par des conseils d'ordres généraux et peu par un accompagnement spécifique aux contenus évalués. Ainsi le « contrat » d'évaluation sommative semble peu expliciter aux élèves les objectifs d'apprentissage et le travail personnel à réaliser. Pour 91 % des enseignants interrogés, les évaluations sommatives contiennent principalement des exercices proches de ceux vus en classe. Moins de trois enseignants sur dix proposent fréquemment des exercices nouveaux (type d'exercice, contexte, etc.) par rapport à ce qui a été vu en classe (27 %), ou plus

difficiles (22 %). Pour corriger les copies, 85% des enseignants construit fréquemment un barème ou une grille de correction avant de donner l'évaluation et 87% attribue fréquemment une note chiffrée. 78% annote fréquemment par des commentaires détaillés les copies, notamment en ce qui concerne les erreurs.

Caractérisation des pratiques enseignantes sur l'axe 3 « Prise en compte de l'élève »

Les enseignants marquent une volonté de repérer les procédures et les erreurs de leurs élèves mais ils se donnent des moyens limités pour les traiter. 76% des enseignants déclarent fréquemment se déplacer dans la salle de classe pour proposer des aides à ceux qui sont bloqués. Les erreurs constatées au cours d'une séance d'exercices sont prises en compte selon des modalités variées : 78 % des enseignants questionnent fréquemment les élèves de la classe au sujet de ces erreurs et 60 % les corrigent eux-mêmes au tableau « souvent » ou « très souvent ». Seulement 45 % intervient fréquemment individuellement auprès des élèves concernés par les erreurs. 37 % fait corriger fréquemment une erreur constatée dans un exercice par un élève qui l'a réussi.

De plus, les stratégies de vérification et de contrôle sont assez peu présentes dans les classes en calcul littéral. En effet, 55 % des enseignants ont fréquemment l'habitude de demander à leurs élèves oralement de « *vérifier la cohérence de l'expression obtenue* » et assez peu d'enseignants demandent fréquemment aux élèves de vérifier l'expression développée ou factorisée en substituant la lettre par un nombre, avec ou sans calculatrice (17 % dans chaque cas). Davantage d'enseignants demandent fréquemment aux élèves de vérifier la solution d'une équation (53 % leur demandent de le faire avec la calculatrice et 43 % sans la calculatrice). Seulement 19 % des enseignants demandent fréquemment aux élèves de faire figurer une trace de leurs vérifications sur leurs copies de contrôle.

Recherche de clusters : quatre groupes de pratiques

Certaines cohérences, statistiquement établies, conduisent à dégager quatre groupes de professeurs caractérisés par des pratiques homogènes. Ils sont désignés par des lettres dans l'ordre décroissant de leur effectif (A : 584 répondants (34 %), B : 491 (29 %), C : 350 (29 %), D : 265 (16 %)). Le groupe C se distingue nettement sur l'axe enseignement du calcul littéral. Les groupes A et B d'une part, et C et D, d'autre part, présentent des écarts systématiques sur les axes 2 et 3. Notons que les caractéristiques qui ne distinguent pas les groupes en moyenne dans l'échantillon ne sont pas commentées.

Le groupe A propose un enseignement relativement formel et un accompagnement des élèves moins personnalisé. Sur l'axe 1, le groupe est proche de la moyenne sur l'équilibre entre technique et résolution de problème et sur les types de justification. Mais ils motivent moins que la moyenne le sens et l'intérêt du calcul littéral (- 19 points) et proposent moins de problèmes complexes (- 43 points). Sur l'axe 2, ils explicitent beaucoup moins le lien entre ce qui est fait en classe et la façon dont les élèves sont évalués (- 43 points) et s'appuient aussi beaucoup moins sur les productions de leurs

élèves (- 49 points) et leur font moins de retours aux élèves. Sur l'axe 3, ils prennent peu en compte l'erreur (- 49 points) et organisent le travail pour un élève moyen.

Le groupe B propose un enseignement plutôt transmissif et portant plus souvent sur les techniques. Sur l'axe 1, ils commencent plus souvent la séquence sur les expressions algébriques par l'aspect technique (47% contre 40%). Ils utilisent plus de formulations simplificatrices, de type ostensif sans favoriser la mise en place de propriétés et de vocabulaire mathématiques (-26 points dans les interactions et -10 points sur la formulation des propriétés). Sur l'axe 2, ils passent moins de temps au repérage des prérequis, des besoins et des difficultés des élèves. Sur l'axe 3, ils sont plus nombreux à proposer des organisations de classe qui favorisent peu le travail collaboratif entre élèves (plus faible score (-41 points) sur la dimension « Modalités de travail en classe : recherche et mise en commun »).

Le groupe C propose un enseignement appuyé sur des choix didactiques articulant sens et technique et prenant en compte les élèves. Sur l'axe 1, ils recherchent un équilibre entre technique de calcul et résolution de problèmes dans les exercices et activités proposés aux élèves (+ 66 points sur cette dimension). Ils utilisent moins souvent que la moyenne des formulations simplificatrices et s'appuient plus souvent sur des formulations privilégiant les mathématiques en jeu (+51 pts pour la dimension « Justifications pendant les interactions »). Sur l'axe 2, ils privilégient plus que la moyenne des problèmes nécessitant des temps de recherche et favorisant l'autonomie des élèves (+71pts pour la dimension « Modalité de travail en classe »). Ils valorisent le travail collaboratif entre élèves et favorisent la prise d'initiatives et de responsabilité des élèves. Sur l'axe 3, ils considèrent davantage que vérifier est une aide, par exemple pour vérifier la solution d'une équation (89 % contre 79 %) ou vérifier la cohérence de l'expression obtenue après transformation (60 % contre 50 %). Enfin, ils considèrent moins que la moyenne que la vérification est difficile à réaliser par les élèves (43 % contre 49 %)

Le groupe D est caractérisé par une forte prise en compte de l'élève pour un enseignement qui fait « flèche de tout bois ». Sur l'axe 1, les pratiques de ces enseignants sont proches de la moyenne. Ils se distinguent toutefois par un recours plus marqué aux situations d'introduction ne motivant pas le sens et l'intérêt du calcul littéral (61 % contre 49 % pour celle sur les expressions et 72 % contre 56 % pour celle sur les équations). Les types d'exercices et de problèmes qu'ils proposent sont plus fréquemment variés (entre +15 et + 20 points). Ils diversifient davantage les formulations utilisées. Sur l'axe 2, ils ont plus souvent recours à une évaluation diagnostique pour repérer les acquis de leurs élèves avant de commencer un nouveau chapitre (28 % contre 18 %). Ils donnent à leurs élèves plus d'initiatives et favorisent les interactions en classe (score de +85 points sur la dimension « Appuis et retours sur le travail des élèves »). Sur l'axe 3, au moment de la conception de leur séquence sur les équations, ils anticipent davantage les erreurs possibles de leurs élèves (90 % contre 81 %) ainsi que les aides à leur apporter (93 % contre 79 %).

Conclusion

En conclusion, cette enquête met à jour des choix variés des enseignants pour enseigner l'algèbre, en dépit des programmes et du référentiel de compétences, pour organiser globalement leur enseignement, et, pour traiter les procédures et erreurs des élèves même s'il y a une volonté marquée des enseignants à les repérer. L'étude dévoile également peu d'écarts selon le contexte d'enseignement et le profil des enseignants en ce qui concerne l'organisation pédagogique et didactique de l'enseignement et la prise en compte de l'élève.

Cette étude marque une étape décisive, tant par l'ampleur de l'échantillon que par les outils théoriques et méthodologiques conçus, dans l'analyse quantitatives des pratiques enseignantes déclarées en France, relativement aux contenus enseignés. La collaboration avec la DEPP se poursuit actuellement pour établir des liens entre les apprentissages des élèves et les pratiques déclarées des enseignants, dont nous avons pu montrer la grande variété.

Références

Allal, L. (2007). Régulation des apprentissages : orientations conceptuelles pour la recherche et la pratique en éducation. In L. Allal & L. Mottier Lopez (éd.), *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation* (p. 7-24). Bruxelles : De Boeck.

Black, P. & D. Wiliam (1998a), "Assessment and Classroom Learning", Assessment in *Education: Principles, Policy and Practice*, CARFAX, Oxfordshire, Vol. 5, No. 1, 7-74.

Butlen, D., Peltier-Barbier, M.-L. et Pézard, M. (2002). Nommés en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en REP : cohérence et contradictions. *Revue française de pédagogie, 140*, 41-52.

Assude, T., Coppé, S. & Pressiat, A. (2012). Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au Collège : atomisation et réduction. In L. Coulange, J.-L. Dorier, J.-P. Drouhard & A. Robert (Eds.). *Enseignement de l'algèbre élémentaire - Bilan et perspectives. Numéro spécial hors-série de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques* (p. 41-62), Grenoble : la Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques, 19*(2), 221-265

Chevallard Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x 5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques, 19*(2), 221-265.

Combier, G., Guillaume, J.-C., et Pressiat, A. (1995). *Calcul littéral : Savoirs des élèves de collège*. France : INRP.

Coppé, S. & Roubin, S. (2019). Intégrer des évaluations entre pairs dans les séances de mathématiques : un exemple en algèbre au collège. In M. Abboud (Ed.) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone Paris 2018* (p. 953-962). Université de Cergy-Pontoise. https://emf2018.sciencesconf.org/data/actes_EMF2018.pdf

Coppé, S. & Grugeon, Allys, B. (2015). Étude multidimensionnelle de l'impact des travaux de recherche en didactique dans l'enseignement de l'algèbre élémentaire : Quelles évolutions ? Quelles contraintes ? Quelles perspectives ? In D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, G. Cirade, S. Clivaz, S. Gobert, C. Hache, M. Hersant, C. Mangiante-Orsola (Éds). *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et le système éducatif* (p. 41-74). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Coppé, S. Grugeon, B. & Pilet, J. (2016). Conditions pour diffuser des situations issues de la recherche en didactique des mathématiques : l'exemple du carré bordé. *Petit x 102*, 57-80.

Coulange L., Drouhard J.P., Dorier J.-L. & Robert A. (Eds.) (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire, Bilan et perspectives. Recherche en Didactique des Mathématiques, Hors-série* (p. 137-162). Grenoble : La pensée sauvage.

Grapin, N. & Grugeon-Allys, B. (2018). Approches psychométrique et didactique de la validité d'une évaluation externe en mathématiques : quelles complémentarités ? Quelles divergences ? *Mesure, Evaluation en Education, 41*(2), 37- 66.

Grugeon, B. (2010). Évolution des pratiques des professeurs débutants de mathématiques pendant les premières années d'exercice. Dans R. Goigoux, L. Ria et M.-C. Toczek-Capelle (éd.), *Les parcours de formation des enseignants débutants* (p. 205-223). Clermont-Ferrand : Presses Universitaires Blaise Pascal.

Grugeon B., Pilet J., Chenevotot, F., Delozanne E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. *Recherches en didactique de mathématiques, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives, hors série* (p. 137-162). Grenoble : La pensée sauvage.

Horoks, J., & Pilet, J. (2015). Etudier et faire évoluer les pratiques d'évaluation des enseignants de mathématiques en algèbre au collège dans le cadre d'un Léa. In L. Theis (Ed.), *Actes EMF2015, Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage, Alger, GT9* (p. 791-804).

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra At the Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In J. Lester F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, p. 707-762). Charlotte, NC : I.A.P.

Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en didactique des mathématiques, 35*(3), 273-312.

Robert, A., & Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. In *Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classroom* (pp. 269-298). Springer US.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *Recherches en didactique des mathématiques, hors série, Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives*, Hors-série, 87-106.

Sirejacob, S. (2017). Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens : le cas des équations du premier degré à une inconnue. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot, Paris. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01686587

Titre: Enquêter sur les pratiques d'enseignement pour les mettre en lien avec les apprentissages des élèves

Auteurs: RODITI Éric, ALLARD Cécile, MASSELOT Pascale, PELTIER-BARBIER Marie-Lise et TEMPIER Frédérick

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 747 - 759

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Enquêter sur les pratiques d'enseignement pour les mettre en lien avec les apprentissages des élèves

RODITI[1] Éric – ALLARD[2] Cécile – MASSELOT[3] Pascale – PELTIER-BARBIER[4] Marie-Lise – TEMPIER[5] Frédérick

Résumé – Les enquêtes nationales sur les pratiques d'enseignement des mathématiques font partie des enquêtes « PRAtiques d'Enseignement Spécifiques aux Contenus » (PRAESCO) que conduit la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (DEPP) en partenariat avec des équipes de recherche. Le texte rend compte de la recherche menée auprès de professeurs enseignant dans des classes de CM2. Elle se prolonge par la recherche d'une mise en lien entre pratiques d'enseignement et apprentissages des élèves.

Mots-clefs : Pratiques d'enseignement, enquête à grande échelle, enseignement primaire.

Abstract – Two surveys on mathematics teaching practices were carried out by the French Ministry of Education (Department of Evaluation) in partnership with two laboratory of research. One of them focus on the grade 5 (10 years old). A new research has begun which aims to link teaching practices and student learning.

Keywords: Teacher practices, large scale survey, primary school

1. Université Paris Cité, Laboratoire EDA, France – eric.roditi@u-paris.fr

2. Université Paris Est Créteil, LDAR, France, cecile.allard@u-pec.fr

3. LDAR, France, pmasselot@aol.com

4. LDAR, France, mlpeltier@yahoo.fr

5. CY Cergy Paris Université, LDAR, France, frederick.tempier@cyu.fr

Introduction

L'enquête nationale PRAESCO (PRAtiques Enseignantes Spécifiques aux COntenus) vise à décrire les pratiques d'enseignement de contenus disciplinaires précis. Elle complète celles sur les pratiques pédagogiques (Talis, EPODE) qui n'étaient pas centrés sur les contenus enseignés. Menées pour la première fois en 2019 sur l'enseignement des mathématiques en CM2 et en 3e, les deux enquêtes ont été conduites par la DEPP en partenariat avec deux laboratoires de recherche de l'université de Paris (EDA et LDAR). Celle dont il est question dans ce texte porte sur l'enseignement des mathématiques en CM2, un échantillon national représentatif de 1 317 professeurs des écoles a été interrogé par questionnaire comprenant 234 items proposés pour l'essentiel avec une échelle ordinale de réponse. Sans objectif d'évaluation, nous cherchions à rendre compte des pratiques des enseignants, des raisons qui motivent leurs choix et des contraintes auxquelles ils sont soumis.

Une recherche est en cours visant à croiser les pratiques d'enseignement et les apprentissages des élèves. Aucun résultat ne pourra être apporté, nous signalerons toutefois les outils méthodologiques en cours d'élaboration pour parvenir à un tel croisement.

Quelques éléments concernant l'enquête sur les pratiques

La population enquêtée

L'enquête couvre le secteur public et le secteur privé sous contrat en France (DROM compris à l'exception de Mayotte). La population-cible est celle des professeurs des écoles (non stagiaires) ayant en charge en 2018-2019 une classe comprenant des élèves de CM2 pour au moins 75 % d'un service à temps plein. En ce qui concerne l'échantillonnage, dans un premier temps un tirage des écoles a été effectué puis la sélection d'enseignants éligibles en leur sein. La représentativité de l'échantillon a été assurée par un tirage des écoles stratifié selon le secteur d'enseignement, l'appartenance ou non à l'éducation prioritaire et la taille de la commune ou de l'unité urbaine en 4 postes (commune rurale ; unité urbaine de moins de 20 000 habitants ; unité urbaine de 20 000 à 200 000 habitants ; unité urbaine de plus de 200 000 habitants). Au sein de chaque strate, les écoles puis les professeurs ont été déterminée par un tirage aléatoire (Allard *et al.* 2021b)[6]. Un effectif de 1 250 répondants était souhaité, pour cela 1 600 enseignants ont été sondés et ce sont finalement 1 317 enseignants qui constituent l'échantillon.

6. Des indications méthodologiques figurent dans le fichier Excel qui accompagne le texte de la Note d'information (onglet « Méthodologie »). Il convient de s'y reporter pour tout complément concernant la méthodologie d'enquête et d'analyse des données.

Le questionnaire

Le questionnaire a été élaboré avec un appui sur le cadre théorique de la « double approche didactique et ergonomique des pratiques d'enseignement des mathématiques » dont l'élaboration a débuté dans les années 2000 (Robert & Rogalski 2002 ; Peltier-Barbier 2004 ; Vandebrouck 2008 ; Roditi 2013). Selon l'approche didactique, les questions posées portaient sur les activités mathématiques des enseignants et sur celles qu'elles induisent chez les élèves. Selon l'approche ergonomique, les pratiques étaient interrogées pour savoir comment les enseignants répondent aux prescriptions institutionnelles dans un contexte d'exercice donné et en fonction de leurs caractéristiques professionnelles et personnelles.

Pour identifier les facteurs qui influencent éventuellement les pratiques, des items ont été conçus qui interrogent les enseignants quant à leur formation initiale et continue, à leur expérience d'enseignement, au poste occupé, à l'établissement et aux élèves pris en charge, aux ressources et outils technologiques utilisés, ainsi qu'aux satisfactions et difficultés rencontrées quant à l'apprentissage des élèves et dans l'exercice du métier. D'autres items du questionnaire interrogent précisément l'enseignement des mathématiques s'appuient sur des résultats de recherche en didactique des mathématiques (Allard 2015 ; Charles-Pézard, Butlen & Masselot 2012 ; Peltier-Barbier 2004 ; Houdement 2011 ; Roditi 2007 et Tempier 2020). Une première catégorie d'entre eux portent sur les pratiques en mathématiques de manière assez générale sur : les orientations pédagogiques, l'organisation de l'enseignement, les modalités d'interaction et d'évaluation, le travail effectué sur les erreurs, l'adaptation de l'enseignement en fonction des élèves, l'exposition et l'approfondissement des connaissances, etc. Une seconde catégorie d'items traite spécifiquement de l'enseignement de notions mathématiques précises : de leur introduction, du choix des exercices et des problèmes pour l'enseignement comme pour l'évaluation, des ajustements opérés quant aux valeurs des variables didactiques, du niveau d'approfondissement et d'autonomie attendu, etc. Ces notions ont été déterminées pour garantir que tous les enseignants enquêtés les aient bien enseignés au moment de l'enquête, il s'agit de la numération, des nombres décimaux et de la division ; les professeurs ont également été interrogés au sujet de leur enseignement de la résolution de problèmes.

Des pratiques hétérogènes malgré des objectifs convergents

Premiers éléments sur la population et sa satisfaction à enseigner les mathématiques

Les enseignants de l'échantillon travaillent pour 87 % d'entre eux dans l'enseignement public dont 71 % hors éducation prioritaire (HEP dans la suite du texte) et 16 % en éducation prioritaire (EP) et pour 13 % dans un établissement privé sous contrat (EPSC). Ils forment une population majoritairement féminine (78 % de femmes), ils ont un âge moyen de 43,2 ans (ils sont un peu plus jeunes en EP : 40,4 ans).

Ils considèrent très majoritairement (84 %) qu'une forte proportion d'élèves de CM2 montre de l'intérêt pour les mathématiques. Trois sur quatre (75 %) déclarent qu'enseigner les mathématiques leur apporte souvent des satisfactions, et presque autant (71 %) jugent que cela a été plutôt facile au cours de l'année écoulée. Plus d'un tiers (36 %) estime toutefois qu'ils ont des élèves qu'ils ne pourront pas vraiment faire progresser en mathématiques.

Les ressources et matériels utilisés

Les enseignants déclarent presque tous utiliser souvent un manuel pour préparer leur enseignement (98 %), ce n'est pas le cas des revues ou ouvrages pédagogiques (16 %) ou des documents élaborés avec des collègues (20 %). Près de trois enseignants sur quatre déclarent rechercher souvent des supports d'activité pour les élèves : des exercices (72 %), des activités d'introduction (70 %), etc. Moins d'un sur trois déclare rechercher souvent des documents professionnels : éclairages sur les notions (31 %), fiches de préparation ou progressions (20 %). Presque tous (89 %) déclarent utiliser souvent des supports qu'ils ont auparavant adaptés en fonction de leurs objectifs, la moitié des supports qu'ils ont conçus eux-mêmes (56 %) et un sur cinq des supports non modifiés (20 %).

En classe de mathématiques, il semble incontournable d'utiliser le tableau (97 % déclarent l'utiliser souvent), l'ardoise (95 %) et le cahier de brouillon (92 %). Pour 57 % d'entre eux, les enseignants déclarent utiliser souvent du matériel de numération (barrettes *Cuisenaire*, etc.) et pour 36 % des logiciels dédiés.

Les activités mathématiques que les professeurs déclarent mettre en place

De façon quasi-unanime, les professeurs déclarent mettre souvent en place des activités pour que les élèves développent des automatismes en calcul (89 %), mais aussi comprennent les procédures qu'ils appliquent (86 %). Leurs avis convergent également quant à l'introduction des notions mathématiques : concernant la comparaison des nombres décimaux par exemple, ils considèrent de façon très majoritaire qu'elle doit faire émerger les erreurs courantes (84 %).

Les activités mathématiques mises en place ne sont toutefois pas uniformes. Ainsi, trois enseignants sur quatre visent la mémorisation des règles et techniques par leurs élèves (78 %) et mettent en place des activités pour que les élèves s'exercent sur des problèmes qu'ils doivent savoir résoudre facilement (74 %). Deux sur trois cherchent à faire que les élèves comparent les procédures qui ont été mises en œuvre dans la classe (68 %) et qu'ils dressent un bilan de ce qu'il faudra retenir (63 %). Concernant la résolution de problèmes, les pratiques sont davantage différenciées : un sur deux propose souvent des problèmes pour découvrir une notion (48 %), pour apprendre à chercher (50 %) ou pour se confronter à la complexité (problèmes à étapes sans questions intermédiaires, 46%). Une minorité de professeurs proposent à leurs élèves de résoudre des problèmes qui n'ont pas été travaillés en classe auparavant (39 %) ou leur donnent des moyens de s'auto-évaluer (30 %).

L'attention au travail des élèves, leur prise en compte en classe et les aides apportées

Presque tous les professeurs déclarent porter fréquemment attention au travail de leurs élèves en relevant leur cahier (92 %) ou en passant auprès d'eux (91 %). Ils visent ainsi fréquemment à aider immédiatement ceux qui se trouvent en difficulté (95 %), à comprendre leurs procédures (89 %) ou à identifier leurs connaissances (84 %). Lorsqu'une réponse juste est proposée par un élève, une grande majorité (89 %) estime nécessaire de donner ou demander une explication.

Lorsque plusieurs méthodes correctes ont été identifiées pour résoudre un problème, majoritairement les enseignants déclarent faire qu'elles soient toutes présentées (82 %) et l'objet d'une discussion collective (80 %). Mais leurs avis diffèrent sur le fait de hiérarchiser les méthodes ou de montrer la plus efficace au tableau (respectivement, 60 % et 45 % déclarent qu'ils ne le font pas souvent). Les professeurs déclarent unanimement (95 %) faire travailler sur les erreurs qui apparaissent en classe et qui sont assez fréquentes. Toutefois, les questions posées aux professeurs évoquant des élèves en difficulté pour réaliser une tâche mathématique précise révèlent qu'il n'y a pas consensus sur les moyens utilisés pour aider ces élèves.

Les pratiques selon les variables personnelles et de contexte

Des indicateurs pour comparer les pratiques de différents groupes d'enseignants

L'ensemble des items constituant le questionnaire a été réorganisé afin de regrouper les items qui, *a priori* et selon les chercheurs, alimentaient un même aspect (ou dimension) des pratiques enseignantes ; 29 dimensions ont ainsi été distinguées. Certaines renseignent sur la composante personnelle des pratiques comme la mise en acte ou l'opposition à certaines conceptions de l'enseignement des mathématiques (orientation vers la réussite immédiate, enseignement par des moyens mnémotechniques, exposition magistrale des mathématiques et des techniques). D'autres portent sur leur composante cognitive : les points d'appui de l'enseignement (jeux, tâches techniques, problèmes, etc.) ; les visées d'apprentissages portant sur des fonctions cognitives (mémoriser, essayer, organiser, etc.), les connaissances (approfondissement, structuration, etc.) et les procédures (variété, liens, validité, etc.). D'autres encore portent sur la composante médiative des pratiques et notamment l'adaptation de l'enseignement aux élèves (différentes prises d'information, adaptation des tâches à la classe, ajustement à chaque élève, etc.). Enfin certaines dimensions concernent les composantes institutionnelles et sociales (difficultés d'enseignement, travail collectif, etc.).

Pour chaque dimension, un indicateur a été construit mesurant l'intensité des pratiques selon cette dimension. La valeur de l'indicateur résulte des réponses des enseignants, elle est normalisée afin que les valeurs des différents indicateurs soient comparables et interprétables en valeur absolue. La valeur de l'indicateur pour un groupe de professeurs correspond ainsi à l'écart à la moyenne de

l'indicateur calculé sur l'ensemble des professeurs enquêtés (égale à zéro par construction), écart exprimé en point de pourcentage d'écart-type (pp par la suite). Ces indicateurs sont ainsi très utiles pour comparer des pratiques, mais leur valeur ne peut s'interpréter hors de cet objectif : pour un groupe donné d'enseignants, si un indicateur prend une valeur négative, cela signifie que la dimension correspondante est moins développée qu'en moyenne mais cela ne dit rien sur son « niveau absolu » chez les enseignants en question.

Comparaison des pratiques selon les variables personnelles ou professionnelles

Les pratiques des enseignantes et des enseignants se différencient peu quant aux situations choisies, elles diffèrent en revanche significativement quant à l'ajustement aux besoins des élèves : les femmes déclarent plus souvent adapter les tâches à effectuer en fonction du niveau de leurs élèves et agir en tenant compte de chacun d'eux. Les pratiques déclarées ne varient sensiblement pas selon que les professeurs ont suivi ou non une formation professionnelle initiale à ce métier. Elles diffèrent en revanche selon leur ancienneté, examinons comment.

Les professeurs entrés plus récemment dans le métier (ancienneté inférieure à dix années) indiquent davantage que les plus anciens (professeurs avec une ancienneté supérieure à vingt années) (+51pp) que leurs difficultés tiennent à leurs conditions de travail (manque de temps et de formation, effectif de la classe, etc.). Ils déclarent davantage utiliser du matériel didactique (+48pp) et consulter des ressources pour leurs préparations. Ils offrent en revanche moins aux élèves l'occasion de travailler sur des situations complexes (-30pp), de faire des liens entre les procédures (-26pp), d'expliciter les connaissances (-23pp). En ce qui concerne les interactions avec les élèves et ajustements de l'enseignement, les enseignants ne se distinguent pas significativement par leur ancienneté.

Comparaison des pratiques selon les contextes d'exercice

Les professeurs en classes multiniveaux sont de deux ans plus jeunes, plus souvent en milieu rural et moins fréquemment en éducation prioritaire. Le multiniveau constitue une difficulté pour 31 % des enseignants qui y sont affectés notamment lorsqu'ils ont peu d'expérience en la matière. Ces enseignants attribuent beaucoup moins aux élèves leurs éventuelles difficultés d'enseignement des mathématiques (-36pp). Leurs pratiques sont proches de celles de leurs collègues, même s'ils déclarent proposer plus souvent du matériel ou des jeux, et moins souvent des situations conduisant à un travail réflexif sur les connaissances.

Pour près de la moitié des professeurs de l'enseignement privé, le manque de formations sur des contenus mathématiques constitue un facteur de difficulté professionnelle. Ces derniers sont pourtant plus nombreux que dans le public à juger qu'il est facile d'enseigner cette discipline. Leurs pratiques se différencient essentiellement par le fait qu'ils donnent plus de tâches techniques (+22 pp) en cherchant moins à établir leur validité (-35 pp) ou leur sens (-33 pp).

Les professeurs exerçant en éducation prioritaire sont un peu plus jeunes et ont moins d'ancienneté que les autres. Ils attribuent davantage leurs difficultés aux caractéristiques de leurs élèves (+36 pp), sans souligner particulièrement celles liées aux conditions d'exercice du métier (effectifs de la classe, classe multiniveau, ampleur du programme de mathématiques, manque de temps). En éducation prioritaire, les professeurs s'appuient davantage sur des sites institutionnels et sur des documents élaborés avec leurs collègues. Leurs pratiques ne se distinguent pas nettement de celles de leurs collègues hors éducation prioritaire, même s'ils orientent davantage leur enseignement vers les élèves individuellement (+21 pp) et qu'ils incitent davantage leurs élèves à chercher (+20 pp), à expliciter (+17 pp) et à structurer leurs connaissances (+17 pp). Ils leur proposent par ailleurs plus de tâches techniques (+12 pp), moins de problèmes complexes (-17 pp).

Un investissement et des choix didactiques contrastés

Construction de groupes d'enseignants dont les pratiques sont semblables

Nous avons enfin cherché à construire une typologie de pratiques avec l'objectif principal de différencier des pratiques cohérentes en s'émancipant des déterminants *a priori* (personnels, professionnels et de contexte d'exercice) c'est-à-dire de caractériser *a posteriori* des pratiques proches, la proximité étant établie d'après la proximité des réponses aux items didactiques qui concernent directement l'enseignement (les items du questionnaire relatifs aux caractéristiques personnelles, professionnelles et de contexte n'ont donc pas été pris en compte).

L'identification de ces profils de pratiques, est issue d'une classification ascendante hiérarchique (CAH) effectuée sur les cinq premiers axes d'une analyse des correspondances multiples (ACM) réalisée sur l'ensemble des items didactiques du questionnaire. La méthode a conduit à l'identification de cinq groupes de professeurs caractérisés par des pratiques homogènes au sein d'un même groupe. Ces groupes sont présentés ci-après par ordre décroissant de leur effectif. Afin d'illustrer au mieux les aspects qui le caractérise, chaque groupe a été comparée avec l'ensemble de l'échantillon ; la comparaison étant indiquée en pourcentages ou en points, selon qu'elles portent sur un item ou un indicateur synthétique.

Des difficultés vis-à-vis des mathématiques et de leur enseignement.

Le premier groupe comprend 26 % des répondants, il est plus masculin que la population étudiée (32 % *vs* 22 %). En classe, plus que dans l'échantillon, les professeurs de ce groupe exposent de manière magistrale les mathématiques et les techniques (+23 pp) tout en explicitant moins les règles et leurs justifications (-48 pp). Ils proposent moins de travail réflexif sur les connaissances (-33 pp) et de situations conduisant à approfondir (-26 pp).

Dans leur classe, les procédures sont moins travaillées, que ce soit pour leur variété (-54 pp), leur mise en lien (-50 pp) ou leur validation (-41 pp). Les professeurs de ce groupe s'appuient moins sur le travail des élèves : ils prennent moins d'information sur leurs réponses (-56 pp) ou sur leurs procédures (-66 pp). Ils adaptent moins les exercices au niveau des élèves (-37 pp) et à leurs difficultés (-44 pp). Parmi les facteurs de difficulté à enseigner les mathématiques, ce groupe est le seul qui mentionne particulièrement celui relatif à la complexité supposée ou ressentie de cette discipline (+15 pp) ; cela éclaire sans doute les pratiques de ce groupe tant sur les contenus enseignés que sur la prise en compte des élèves.

Un enseignement où les élèves construisent activement leurs connaissances

Le deuxième groupe (22 % des répondants) se caractérise par des choix didactiques affirmés pour un enseignement des mathématiques où les élèves construisent activement leurs connaissances. Ce groupe contient un peu plus de professeurs enseignant en éducation prioritaire (21 % *vs* 16 %). Les enseignants de ce groupe travaillent davantage avec leurs collègues (+15 pp) et ont moins le sentiment qu'il y a des élèves qu'ils ne pourront pas vraiment faire progresser en mathématiques (28 % *vs* 35 %).

Par rapport à l'ensemble de l'échantillon, leur enseignement s'appuie sur du travail réflexif sur les connaissances (+34 pp) ou sur des manipulations et des jeux (+43 pp). Ils proposent plus de situations qui permettent aux élèves d'approfondir les procédures qu'ils mettent en œuvre, en leur donnant du sens (+55 pp) ou en les faisant valider (+56 pp). Ils choisissent également plus de situations permettant aux élèves d'expérimenter (+20 pp) ou de s'exercer (+32 pp).

Ils enseignent moins les mathématiques en les exposant de manière magistrale (-38 pp) ou en donnant des moyens mnémotechniques (-66 pp). Ils ne concentrent pas leur attention sur les seules réponses de leurs élèves : ils prennent plus d'information sur les procédures mises en œuvre (+35 pp) et interagissent davantage avec eux à propos des mathématiques en jeu (+21 pp). Les professeurs de ce groupe se caractérisent ainsi par des choix didactiques affirmés.

Un engagement et une satisfaction moindres dans l'enseignement des mathématiques

Le troisième groupe (21 % des répondants) se différencie par un engagement moindre et une satisfaction moins importante dans l'enseignement des mathématiques. Les enseignants de ce groupe sont plus nombreux à exercer dans le public hors éducation prioritaire (79 % *vs* 72 %) et à temps partiel (12 % *vs* 7 %). Ces professeurs déclarent moins que l'ensemble de l'échantillon interrogé se consacrer à leur auto-formation (-59 pp) et au travail avec leurs collègues (-44 pp).

En classe, ils proposent moins de situations de travail réflexif sur les connaissances (-58 pp) ou conduisant à expliciter les connaissances (-47 pp), les approfondir (-59 pp). Leur enseignement

conduit également beaucoup moins les élèves à mémoriser (-56 pp), s'organiser (-56 pp), chercher (-42 pp) et s'exercer (-50 pp). Ces professeurs s'appuient moins sur le travail des élèves (-34 pp) et ajustent également moins leur enseignement à leurs difficultés (-48 pp).

Ils déclarent retirer moins fréquemment des satisfactions de leur enseignement des mathématiques (67 % *vs* 75 %) et attribuent davantage aux conditions d'exercice du métier la difficulté à les enseigner (+14 pp).

Un enseignement plutôt magistral où les mathématiques sont techniques

Le quatrième groupe (17 % des répondants) se caractérise par un enseignement de type magistral, plutôt technique, qui vise la réussite immédiate. Les enseignants de ce groupe ne se distinguent pas par leur contexte d'enseignement. Dans leur carrière, ils ont suivi moins de formations sur des thèmes mathématiques comme les nombres décimaux et les fractions (48 % *vs* 58 %), le calcul mental (42 % *vs* 54 %) ou la résolution de problèmes (59 % *vs* 69 %), et sont plus nombreux à passer moins de deux heures hebdomadaires à la préparation de leur enseignement des mathématiques (61 % *vs* 49 %). Ils ont davantage le sentiment qu'il y a des élèves qu'ils ne pourront pas vraiment faire progresser en mathématiques (48 % *vs* 35 %).

Ils dispensent plus fréquemment un enseignement de type magistral (+36 pp). Ils donnent plus de moyens mnémotechniques (+97 pp) qu'ils demandent d'appliquer à des tâches essentiellement techniques (+63 pp). Ils offrent également moins de moyens de valider les procédures mises en œuvre (-50 pp) ou de donner du sens aux techniques utilisées (-53 pp). Ces professeurs concentrent leur attention sur les réponses de leurs élèves (+36 pp) ainsi que sur leurs erreurs (+37 pp) ; plus que dans l'échantillon, leurs pratiques d'enseignement visent la réussite immédiate des élèves en mathématiques (+67 pp).

Des enseignants engagés qui font flèche de tout bois pour la réussite de leurs élèves

Le cinquième et dernier groupe (14 % des répondants) se distingue par un engagement fort dans l'enseignement des mathématiques et des pratiques qui font « flèche de tout bois ». Les enseignants de ce groupe exercent plus fréquemment en milieu urbain (80 % *vs* 70 %). Durant leur carrière, ils ont davantage participé à des actions de formation continue sur des contenus mathématiques. Ils sont plus nombreux (62 % *vs* 51 %) à prendre plus de deux heures par semaine à la préparation de leur enseignement de cette discipline.

Pour tous les types d'activités interrogés dans le questionnaire, ils déclarent plus que dans l'échantillon les proposer à leurs élèves, que ce soient des tâches techniques (+67 pp), des problèmes complexes (+98 pp), des applications de règles mathématiques (+81 pp) ou du travail réflexif sur les

connaissances (+107 pp), entre autres. Ils déclarent également davantage agir en tenant compte de chaque élève (+92 pp) et ajuster leur enseignement aux difficultés des élèves (+99 pp).

Ils prennent plus souvent des informations sur leurs réponses (+44 pp) et sur leurs procédures (+95 pp). Leurs interactions avec les élèves portent plus sur les mathématiques en jeu (+92 pp) et sur l'organisation du travail en classe (+82 pp). Les écarts fortement positifs s'expliquent par le fait que ce groupe utilise fréquemment les extrémités de l'échelle des réponses, mais une hypothèse interprétative émerge également qui converge avec des études qualitatives menées parallèlement : ces professeurs semblent mettre toutes les possibilités en œuvre afin que leurs élèves atteignent les objectifs d'apprentissage visés en CM2, sans pour autant hiérarchiser leurs choix didactiques.

Conclusion et perspectives

Pour la première fois en France, les résultats des recherches qualitatives ont été utilisées pour nourrir une enquête nationale à grande échelle visant à décrire au mieux les pratiques d'enseignement des mathématiques des professeurs enseignant à un niveau donné. Cette enquête montre que les pratiques d'enseignement des mathématiques en classe de CM2 sont variées et assez marquées par des conditions personnelles, professionnelles et liées au contexte d'exercice. Des pratiques cohérentes se distinguent et conduisent à différencier cinq groupes de professeurs selon leur engagement professionnel et leur conception de l'enseignement des mathématiques. Ces résultats constituent des apports significatifs à la connaissance des pratiques d'enseignement des mathématiques à ce niveau scolaire. Cela nous semble également utile pour les formateurs : mieux connaître les pratiques des professeurs, les cohérences issues des corrélations entre les différents aspects des pratiques ainsi que la diversité des difficultés rencontrées aux différentes étapes de la carrière et selon les contextes permet de proposer des formations plus adaptées.

Les résultats de l'enquête seront encore analysés, d'autre précisions seront apportées concernant les pratiques des groupes d'enseignants caractérisées par les variables personnelles, professionnelles ou de contexte de travail ainsi que concernant celles des groupes d'enseignants construits statistiquement pour la ressemblance de leurs pratiques. Ces analyses tenteront notamment de mieux comprendre comment les pratiques dépendent des caractéristiques des groupes en cumulant les croisements.

Une nouvelle recherche est en cours qui se fonde sur celle-ci. Elle vise à établir des liens entre les pratiques des enseignants et les apprentissages des élèves : dans une cinquantaine de classes, les professeurs ont été enquêtés sur leurs pratiques et leurs élèves évalués en mathématiques en début et en fin d'année sur les thèmes mathématiques dont l'enseignement a été interrogé dans le questionnaire. Nous cherchons à travers cette recherche à répondre à des questions générales : telles pratiques sont-elles plus ou moins favorables aux apprentissages ? Selon quels niveaux des élèves ? Selon quels types d'acquis antérieurs ? etc. Ainsi, par exemple, les évolutions d'acquis des élèves des

professeurs les moins engagés (des groupes 1 et 3) sont-ils différents de ceux des professeurs les plus engagés (groupes 2, 4 et 5) ?

Les professeurs qui proposent un enseignement visant une construction active des connaissances atteignent-ils mieux cet objectif que les autres ? Leurs élèves progressent-ils davantage dans leur capacité à prendre des initiatives ou à mettre en œuvre de façon coordonnée des connaissances diverses pour résoudre une tâche mathématique ? Le questionnaire soumis aux élèves en début et en fin d'année comporte précisément des tâches pour évaluer ce type de performance. De manière plus locale, les professeurs qui déclarent proposer davantage tel type de tâche mathématique (par exemple des problèmes de division portant sur le reste plutôt que sur le quotient) produisent-ils de meilleures compétences chez leurs élèves sur ces types de tâches ?

Les élèves des professeurs qui proposent un enseignement magistral visant plutôt la réussite immédiate en s'appuyant sur des moyens mnémotechniques progressent-ils davantage que les autres sur les items du questionnaire interrogeant justement des connaissances techniques des mathématiques (numération, comparaison de nombres, opérations posées, etc.) ? Comment leurs élèves se différencient-ils des autres sur des tâches exigeant davantage de réflexion et d'initiative ? Et qu'en est-il des acquis des élèves des professeurs qui font flèche de tout bois pour atteindre leurs objectifs d'apprentissage qu'ils se sont fixés ?

Par le travail que nous venons d'engager, nous cherchons à répondre à ces questions, sans *a priori* sur les résultats, en étant attentifs à la diversité des élèves qui composent les classes.

Références

Allard, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot.

Allard, C., Masselot, P., Peltier-Barbier, M.-L., Roditi, E., Solnon, A. & Tempier, F. (2021) Premiers résultats de l'enquête sur les pratiques d'enseignement des mathématiques, Praesco, en classe de CM2 en 2019, *Note d'information de la Depp, 21*.10. https://www.education.gouv.fr/media/74631/download

Allard, C., Masselot, P., Peltier-Barbier, M.-L., Roditi, E., Solnon, A. & Tempier, F. (2021b), Fichier « Pour en savoir plus » correspondant à la *Note d'information de la Depp, 21*.10. https://www.education.zgouv.fr/media/74633/download

Charles-Pézard, M., Butlen D. & Masselot, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : la Pensée sauvage.

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de didactiques et de sciences cognitives, 16*, 67-96.

Peltier-Barbier, M.-L. (dir.) (2004). *Dur, dur, dur d'enseigner en ZEP*. Grenoble : la Pensée sauvage.

Robert, A. & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2(4)*, 505-528.

Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 12*, 55-81.

Roditi, E. (2013). Une orientation théorique pour l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques, 15*, 39-60.

Tempier, F. (2020). Les grands nombres au cycle 3 : de nouvelles pistes de travail. *Grand N, 105*, 75-99

Vandebrouck, F. (coord.) (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : OCTARES.Dupont J. (2010) Les canetons. Revue canophile 13, 14-26.

Titre: Analyse critique de la pertinence des activités introductrices des notions en classe de Seconde C

Auteurs: SAWADOGO Timbila, DOUAMBA Kirsi Jean-Pierre et NANA Rasmané

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 760 - 771

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Analyse critique de la pertinence des activités introductrices des notions en classe de Seconde C

SAWADOGO[1] Timbila – DOUAMBA[2] Kirsi Jean-Pierre – NANA[3] Rasmané

Résumé – Les réussites dans l'acquisition des connaissances mathématiques par les élèves relèvent en grande partie des situations d'enseignement-apprentissage créées et gérées par l'enseignant. Dans cette recherche nous interrogeons la pertinence des activités introductrices des notions en mathématiques dans le contexte burkinabé.

Mots-clefs : Mathématiques, apprentissage, activités introductrices.

Abstract – The successes in the acquisition of mathematical knowledge by the pupils depend largely on the teaching-learning situations created and managed by the teacher. In this research we question the relevance of the activities introducing notions in mathematics in the Burkinabe context.

Keywords: Mathematics, learning, introductory activities.

1. Ecole Normale Supérieure, Burkina Faso, sawtimbs@yahoo.fr

2. Ecole Normale Supérieure, Burkina Faso, kjpdouamba@gmail.com

3. Ecole Normale Supérieure, Burkina Faso, rasmanenana2017@gmail.com

Introduction

L'apprentissage des mathématiques développe l'esprit d'initiative, d'imagination et de créativité chez les élèves et leur permet de comprendre et d'explorer le monde réel. Cependant, l'enseignement des mathématiques se heurte à des difficultés de compréhension des élèves. En effet,

> L'enseignement des mathématiques est sans doute celui qui pose depuis toujours le plus de difficultés et pour lequel une large majorité de personnes déclare n'y avoir jamais rien compris, même parmi ceux qui ont poursuivi des études supérieures (Barbolosi, 2008, p.8).

Les programmes mathématiques du Burkina Faso ont été élaborés pour répondre à de telles préoccupations. Ainsi, dans les instructions officielles, il est suggéré d'organiser l'apprentissage des mathématiques de sorte à ce que cet apprentissage des concepts mathématiques permette aux élèves de répondre aux questions qu'ils se posent. Dans cette perspective, les enseignants s'efforcent de créer les conditions pour que les élèves reconstruisent eux-mêmes les savoirs mathématiques. Ils procèdent par un enseignement par les activités introductrices.

Cependant, de nombreuses études dont celles de Damoué (2015) et Zida (2015) ont révélé, respectivement, de nombreuses difficultés des élèves dans l'apprentissage des fractions et du calcul littéral. Les diverses difficultés et incompréhensions vécues par les élèves en mathématiques pourraient être le signe d'insuffisances que présentent les activités introductrices.

Ces observations nous ont convaincus d'interroger la pertinence des activités introductrices des notions mathématiques dans une classe charnière dans l'acquisition des connaissances mathématiques : la seconde C. L'objet de notre recherche est d'analyser les activités introductrices proposées aux élèves de 2nde C afin de déterminer les limites de leurs contributions au processus d'élaboration du sens et de construction des notions mathématiques par ces élèves.

Problématique

Dans cette partie nous présentons le problème et le cadre théorique de notre étude.

Le problème

L'enseignement-apprentissage des mathématiques occupent une place de choix dans le système éducatif burkinabè. À tous les niveaux d'enseignement du post-primaire au secondaire (de la 7ème à la 13ème année de scolarité), les mathématiques sont présentes. C'est d'ailleurs la 2ème discipline à plus fort coefficient et au volume horaire hebdomadaire le plus élevé, après le Français, dans la majorité des classes de la sixième à la terminale dans l'enseignement général. Les méthodes utilisées dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques ont évolué avec le temps. Les programmes en

vigueur au post-primaire et au secondaire depuis 1991 font une large part à la notion d'activité prise dans le sens d'une situation créant un problème. En effet, dans l'enseignement secondaire général, il ressort dans les instructions officielles que l'introduction d'une notion doit partir autant que possible d'une situation-problème dans les spécialités littéraires. Dans celles scientifiques, chaque séance d'enseignement doit faire une part importante à l'activité de l'élève en s'orientant principalement vers la résolution de problèmes. Il ressort qu'à tous les niveaux de l'enseignement des mathématiques, il est recommandé de susciter constamment l'activité de l'élève.

Répondre à ces exigences nécessite que l'enseignant procède avec une attention particulière au choix des problèmes à proposer aux élèves. Ces problèmes doivent mettre les élèves dans une réelle action et leur permettre un réel apprentissage des notions mathématiques. Dans cette approche de l'enseignement-apprentissage des mathématiques, l'inspection de mathématiques préconise une démarche de préparation et de conduite du cours à travers une fiche pédagogique.

Dans la phase de préparation d'un cours sur un concept mathématique, l'enseignant définit les objectifs d'apprentissage. Puis, il crée une tâche mathématique pour introduire la notion à enseigner. Cette tâche, appelée « activité introductrice », est un élément central dans la planification du cours. C'est elle qui permet aux élèves de découvrir, de donner du sens aux notions mathématiques.

Pour Charlot (1987), l'activité introductrice n'est certainement pas un exercice où l'élève applique de façon quasi mécanique une formule où un processus opératoire. Pour lui, l'activité doit avoir un sens pour l'élève, elle doit lui permettre d'enclencher une activité intellectuelle et de se construire des connaissances mathématiques. Par ailleurs, elle permet aux élèves d'acquérir des outils pour résoudre efficacement les exercices que les enseignants leur proposent.

Ainsi, nous avançons l'hypothèse que les erreurs, les difficultés des élèves en mathématiques, et donc leurs échecs dans cette discipline sont le reflet des insuffisances de l'activité introductrice. Nous souhaitons alors questionner la pertinence des activités introductrices pour situer si elles permettent à l'élève d'enclencher une activité intellectuelle et de se construire des connaissances mathématiques.

Le cadre théorique

Nous nous intéressons dans cette recherche, d'une part à la théorie constructiviste de Jean Piaget (1896-1980) et à la théorie socioconstructiviste de Vygotsky (1896-1934) qui sont des cadres de référence ayant influencé les nouvelles approches de l'enseignement et de l'apprentissage. D'autre part, nous faisons appel à la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau (1998) et à la dialectique outil-objet de Régine Douady (1987).

Le constructivisme nous est utile pour notre travail en ce sens qu'il nous renseigne qu'un apprentissage efficace se fait par remise en cause de certaines connaissances antérieures des élèves et que ce qui fait obstacle est un levier pour construire de nouvelles connaissances. Quant au socio-constructivisme, il est axé sur la construction des connaissances qui se réalise à travers des échanges, des confrontations entre élèves et élèves ou entre enseignant et élèves et des remises en cause de certaines conceptions des élèves.

Les situations didactiques (Brousseau, 1986) et la dialectique outil-objet (Douady, 1987), nous semblent pertinentes dans l'analyse des problèmes. Elles permettent de percevoir dans quelle mesure un problème choisi par un enseignant est déclencheur ou non d'une participation de l'élève à la construction de connaissances mathématiques. En effet, la théorie des situations didactiques est un modèle théorique d'enseignement qui renseigne sur les conditions de productions des connaissances chez les élèves. En cela, elle sera une référence pour analyser les activités introductrices proposées aux élèves et d'apprécier leurs effets sur l'apprentissage de ces derniers. En outre, elle sert de cadre d'élaboration d'activités introductrices pertinentes qui intègrent une meilleure organisation de l'enseignement des mathématiques.

Par ailleurs, les concepts d'outil et d'objet apportent des précisions sur le statut des connaissances visées dans les activités introductrices et d'analyser leur adéquation avec ces activités. Aussi la dialectique outil–objet permet de repérer le cadre dans lequel l'activité introductrice est posée et dans quel autre cadre elle peut être traitée. Ce repérage permet d'apprécier les activités intellectuelles que les élèves auront à mettre en œuvre pour traiter l'activité introductrice.

Méthodologie

La pertinence d'une activité introductrice est liée d'une part aux activités intellectuelles qu'elle induit chez les élèves en classe et d'autre part à sa congruence avec la connaissance visée. De ce fait, nous avons décidé d'analyser à la fois les énoncés des activités proposées aux élèves et leur déroulement en classe. Cette analyse a pour but d'identifier les activités éventuelles des élèves induites par l'activité introductrice de la notion, les différentes procédures que peuvent utiliser les élèves, les savoirs et savoir-faire mis en jeu dans les activités, la conduite de ces activités en classe, le lien entre la connaissance visée et l'activité introductrice.

Par ailleurs le choix des activités pertinentes et leur gestion par les enseignants peuvent être influencés par des facteurs comme la maîtrise des notions mathématiques à enseigner, les compétences didactiques et pédagogiques. Nous cherchons alors à appréhender les profils académiques des enseignants, les stratégies utilisées pour le choix ou la conception de leurs activités introductrices ; les difficultés rencontrées dans la conception desdites activités. Nous évaluons aussi dans cette étude l'effet des activités introductrices sur les apprentissages des élèves en mathématiques.

Nous avons choisi une approche mixte pour notre étude (Karsenti & Savoie-Zacj, 2000). Notre dispositif d'enquête s'appuie sur les données recueillies suivant quatre étapes. La première étape consiste en une analyse a priori de l'activité introductrice. La seconde étape consiste en une analyse de la conduite de l'activité en classe. La troisième étape est un entretien avec l'enseignant pour comprendre les choix opérés par ce dernier. La dernière étape place les élèves en situation d'appréciation des apprentissages qu'ils acquièrent à travers les activités introductrices, les difficultés rencontrées dans ce type d'enseignement. Ainsi nous avons choisi, pour le recueil de ces données quatre instruments : une analyse documentaire, une observation directe de séances de cours, des entretiens et des questionnaires. Visant la qualité des observés et non la quantité, nous avons choisi de travailler avec quatre enseignants ayant reçu une formation initiale. Pour chaque enseignant choisi nous avons observé deux cours, un cours sur une activité numérique et un cours sur une activité géométrique. Ainsi, nous avons analysé au total huit activités introductrices. Ces activités portaient respectivement sur : la factorisation d'un polynôme de degré 3 sous la forme ; le domaine de définition d'une fonction numérique comportant un dénominateur et un radical ; l'écriture vectorielle $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ pour $G = bary\{(A;\alpha);(B;\beta)\}$; la parité d'une fonction numérique.

Les résultats atteints sont présentés et discutés dans la partie suivante.

L'analyse des activités introductrices a été scindée en trois axes : l'analyse a priori de l'activité introductrice, la description des caractéristiques générales de l'activité et la congruence de la connaissance visée avec l'activité. En rappel dans l'axe « analyse a priori » (Charnay, 2003), il s'agit essentiellement de déterminer l'objectif de l'activité, les savoirs et savoir-faire en jeu dans l'activité, les stratégies possibles de résolution de l'activité, les difficultés éventuelles des élèves, les activités éventuelles des élèves dans cette activité.

Dans l'axe « description des caractéristiques globales de l'activité », il s'agit pour nous de répondre aux questions suivantes :

- Les étapes de la résolution sont-elles indiquées ?
- Plusieurs stratégies de résolutions sont-elles possibles ?
- L'énoncé est-il constitué de sous-tâches qui déterminent complètement la stratégie de résolution ?
- Les questions sont-elles ouvertes ou fermées ?
- L'énoncé laisse-t-il à l'élève la responsabilité du choix des outils et de la stratégie pour résoudre l'activité ?
- L'énoncé nécessite-t-il des essais, des conjectures, l'élaboration d'une procédure, des justifications, des validations, des changements de cadre ?
- Dans l'axe « congruence de la connaissance visée avec l'activité », nous allons répondre à

la question : la connaissance visée est-elle l'outil indispensable pour résoudre l'activité ?

Résultats et discussions

Dans cette partie nous présentons l'analyse a priori d'une des activités pour rester dans les normes du nombre de pages de la communication. Dans le même sens nous omettons le corrigé.

Analyse d'une activité géométrique

Énoncé

1. soit *G* le barycentre des points pondérés (*A*;2) et (*B*;3).

   a) Écrire la relation vectorielle que *G* doit vérifier.

   b) A l'aide de la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et placer le barycentre *G* des points pondérés (*A*;2) et (*B*;3).

2. Soient (*A*;α) et (*B*;β) deux points pondérés tels que α+β≠0. On pose G=bary{(A;α);(B;β)}.

   a) Écrire la relation vectorielle que *G* doit vérifier.

   b) À l'aide de la relation de Chasles, démontrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

   c) Application : on pose α=5 et β=2. Donner $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

Analyse a priori de l'activité introductrice en géométrie

- Quel est l'objectif de l'activité ?

L'activité a pour objectif d'amener les élèves à construire le barycentre de deux points pondérés.

- Quels sont les savoirs et savoir-faire en jeu dans l'activité ?

Les savoirs en jeu dans l'activité sont : le calcul vectoriel ; l'écriture vectorielle du barycentre de deux points ; la relation de Chasles sur les vecteurs ; le théorème de Thalès.

Les savoir-faire en jeu dans l'activité sont : appliquer la relation de Chasles sur une écriture vectorielle ; écrire la relation vectorielle du barycentre de deux points ; utiliser le théorème de Thalès pour partager un segment.

- Quelles sont les stratégies possibles de résolution de l'activité ?

Dans cette activité, deux stratégies de construction du point *G* peuvent être envisagées selon la distance. Mais la distance n'étant pas fixée au départ, les élèves auront tendance à prendre comme *AB* un multiple de 5.

- Quelles sont les activités éventuelles des élèves ?

Les activités des élèves dans cette activité consistent à : écrire la relation vectorielle $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; faire une transformation vectorielle de $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ en $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ en utilisant la relation de Chasles ; construire le point *G* à partir de l'écriture vectorielle $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$; écrire la relation vectorielle $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$; faire une transformation vectorielle de $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ en $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ en utilisant la relation de Chasles ; remplacer les variables par valeurs numériques dans la relation obtenue.

- *Quelles sont les difficultés que peuvent rencontrer les élèves ?*

La principale difficulté est la construction du point dans le cas où la distance AB n'est pas un multiple de 5.

- **Caractéristiques globales de l'activité**

- *Les différentes étapes de la résolution sont-elles indiquées ?*

Toutes les étapes dans la résolution de l'activité sont indiquées.

- *Plusieurs stratégies de résolution sont-elles possibles ?*

L'énoncé est découpé en de questions indiquant la stratégie à utiliser donc l'élève est amené à suivre le chemin de résolution tracé par l'enseignant. Les possibilités de stratégies optionnelles de l'élève sont réduites et quasi-nulles.

- *Les questions sont-elles ouvertes ou fermées ?*

Les questions sont ouvertes, cependant ce qu'il y a à faire est indiqué de même que la méthode à utiliser.

- *L'énoncé laisse-t-il à l'élève la responsabilité du choix des outils et la stratégie de résolution ?*

Dans cette activité, les moyens de résolution sont indiqués ; il ne reste plus à l'élève qu'à appliquer, donc il n'a plus à choisir ni un outil ni une stratégie pour résoudre le problème posé.

- *L'énoncé nécessite-t-il des essais, des conjectures, l'élaboration d'une procédure, des justifications, des validations, des changements de cadre ?*

Les indications données font que l'énoncé ne nécessite pas des essais, donc pas de conjectures, ni d'élaboration d'une procédure de résolution, ni des justifications, ni de validations, ni des changements de cadre.

- **Congruence de la connaissance visée avec l'activité**
- *La connaissance visée est-elle indispensable pour résoudre l'activité ?*

L'activité n'est pas une situation problématique nécessitant l'outil barycentre pour la résoudre, donc la connaissance visée n'est pas indispensable pour résoudre l'activité.

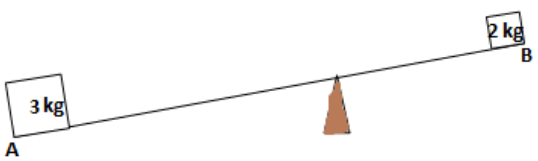
Synthèse de l'analyse de l'activité

L'activité a permis le réinvestissement du calcul vectoriel. Cependant, elle ne fournit pas toutes les données indispensables dans la construction comme les points *A* et *B*. Dans cette activité les moyens et les méthodes de résolutions sont indiqués. Elle généralise inutilement l'expression $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, car cette anticipation ne permet en rien aux élèves de prendre conscience de la nécessité de transformer $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ pour construire *G*. Elle n'est pas propice pour un apprentissage. Par ailleurs, elle ne pose pas un problème nécessitant l'outil barycentre et sa construction. Ce problème peut être crée à partir de la modélisation d'une situation de physique (recherche et construction du centre d'inertie d'une barre homogène).

Nous proposons alors une activité mathématique pour introduire la construction du barycentre.

Activité introductrice

Aux extrémités *A* et *B* d'un levier de masse négligeable et de longueur 2 mètres, deux masses sont déposées, l'une de 3 kg en *A* et l'autre de 2 kg en *B*. En quel point du levier, doit-on placer le pivot pour que le levier soit en équilibre ?



Prérequis nécessaire à la recherche de cette activité.

✓ Connaître la loi d'Archimède ou le théorème des moments en physique ;
✓ Écrire une égalité vectorielle à partir d'une égalité de distance ;
✓ Utiliser la relation de Chasles.

Organisation de la recherche : 10 minutes de travail individuel et 15 minutes de travail de groupe de trois ou de quatre élèves.

Analyse des observations de cours, entretiens réalisés avec les enseignants et des réponses du questionnaire administré aux élèves.

Dans l'ensemble des cours observés, tous les enseignants ont eu le souci de vérifier la présence ou l'absence des connaissances supposées nécessaires pour entrer dans le cours. Cependant cette vérification ne va pas loin puisqu'aucun récapitulatif des acquis n'a été fait et certains prérequis n'ont pas été ciblés, donc n'ont pas été contrôlés. Ce manquement peut être source de difficultés pour certains élèves dans la recherche de l'activité, car l'absence des connaissances préalables peuvent bloquer les élèves dans le traitement de l'activité introductrice.

Par ailleurs, les enseignants ont privilégié la recherche individuelle dans toutes les séances observées et cette recherche au cours des activités introductrices n'est jamais achevée pour insuffisance de temps. D'autre part, la correction des activités introductrices est fortement guidée par l'enseignant. Aussi, cette correction ne débouche pas sur un bilan (synthèse) des méthodes ou des connaissances construites dans l'activité. En effet, tout juste après la prise de la correction de l'activité par les élèves, les enseignants donnent directement de façon décontextualisée des savoirs à retenir. Pour les enseignants interrogés, la phase de synthèse consiste à donner le théorème, la définition, la propriété ou la règle générale. Ils font donc une certaine confusion entre synthèse de l'activité introductrice et la situation d'institutionnalisation. En outre, leur synthèse n'a pas souvent de lien avec l'activité, car des procédures/techniques ou des théorèmes qui n'ont pas été abordés par l'activité introductrice se retrouvent institutionnalisés. Toutes les activités ont été traitées dans un seul cadre, soit algébrique, soit géométrique.

Les élèves enquêtés ne perçoivent pas les savoirs enseignés comme des outils de résolution de problème. Le temps insuffisant pour la recherche individuelle a été aussi relevé par les élèves enquêtés. Les enseignants expliquent cela par la donnée de 55 minutes comme temps d'exécution d'une leçon par les instructions officielles. Dans les réponses des élèves, nous avons remarqué un apprentissage de techniques au détriment d'une vraie compréhension des notions abordées.

Interprétation

Les insuffisances constatées dans les activités introductrices peuvent s'expliquer par le fait que la dimension outil (Douady, 1993) des notions abordées est occultée lors de l'élaboration des activités introductrices. En effet, la prise en compte de l'aspect outil dans l'élaboration des activités introductrices permet de construire des situations problématiques que mettront en exergue les raisons d'être de la notion et qui permettront aux élèves d'être dans une réelle activité de recherche (Berte & al., 2006). L'utilisation d'un seul cadre dans la conception des activités introductrices (Robert & Rogalski,

2002) ne permet pas un réel apprentissage. Le guidage des enseignants conduit les élèves à envisager le travail mathématique comme une mise en œuvre de techniques dans des exercices répétitifs. Il a pour conséquence de réduire l'initiative et la créativité des élèves et les met en difficultés dans les exercices où ils doivent chercher. Les entretiens d'explicitation que nous avons eus avec les quatre enseignants tout juste après les différentes observations du cours corroborent notre interprétation.

Conclusion

Cette étude menée sur la pertinence des activités introductrices est partie du constat que les élèves ont des difficultés à utiliser les savoirs enseignés dans la résolution de problèmes. Elle avait pour but d'analyser les activités introductrices proposées par les enseignants dans le but de voir si elles permettaient un apprentissage pertinent des mathématiques. Elle vise à améliorer l'apprentissage des notions mathématiques à travers des activités introductrices pertinentes.

L'étude a révélé que les activités introductrices présentent les insuffisances suivantes : le découpage des activités introductrices en une série de questions guidées qui ne favorise pas de prise d'initiative par les élèves ; l'inexistence d'un véritable enjeu pour l'apprentissage de la connaissance visée ; les moyens de progresser dans la résolution de l'activité sont connus et indiqués ; le travail se fait dans un seul cadre qui est soit algébrique, soit géométrique et il n'y a alors pas d'interaction de plusieurs cadres.

Ainsi, les activités introductrices ne donnent pas du sens aux notions abordées par les enseignants. De ce fait, elles ne permettent pas un réel apprentissage des notions mathématiques.

Au regard de ces résultats, il est urgent d'épauler les enseignants dans l'élaboration d'activités introductrices pertinentes à travers des formations continues, la mise à leur disposition des documents didactiques adaptés.

Références bibliographiques

Barbolosi, D. (2008). Un exemple de démarche scientifique. *REPERES-IREM, 71*, 5-22.

Berte, A. & al. (2006). Engager les élèves dans une réelle activité mathématique, *Petit x, 70*, 7-29.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique de mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 7*(2), 33-115.

Brousseau, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. La pensée Sauvage, Grenoble.

Charlot, B. (1987), Qu'est-ce que faire des maths. *In bulletin de l'APMEP* n°105, pp.24-26 http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Faire_des_maths_Charlot_.pdf [consulté le 6 Août 2017]

Charnay, R. (2003) « Analyse a priori, un outil pour l'enseignant » *Maths-école* n°209, Université de Genève.

Damoué, Y. (2015). *L'enseignement/apprentissage des fractions en classe de 4e au Burkina Faso : Difficultés, causes et propositions de solutions*. Mémoire de fin de formation à la fonction d'Inspecteur de l'Enseignement Secondaire Option : Mathématiques. École Normale Supérieure Université de Koudougou.

Douady, R. (1987). Un exemple d'ingénierie didactique où sont à l'œuvre les jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Publications de l'institut de recherche mathématiques de Rennes, 1987, fascicule 5* http://www.numdam.org/article/PSMIR_1987___5_A1_0.pdf [Consulté le 1 février 2018].

Douady, R. (1993). L'ingénierie didactique : un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage. *Cahier de DIDIREM*. Université Paris VII

Karsenti, T & Savoie-Zacj, L. (2000). *Introduction à la recherche en éducation*. Sherbrooke: Éditions du CRP: Faculté d'éducation, Université de Sherbrooke.

ROBERT, A & ROGALSKI, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x, 60*, 6-25.

Zida, H. (2015). *Difficultés d'enseignement/apprentissage du calcul littéral au post-primaire au Burkina Faso : cas de la factorisation des expressions algébriques*. Mémoire de fin de formation à la fonction d'Inspecteur de l'Enseignement Secondaire Option : Mathématiques. École Normale Supérieure/ Université de Koudougou.

Titre: Perception d'un corps dans les épreuves de conservation de la matière chez Piaget et réussite des opérations d'égalité en mathématiques chez les apprenants

Auteur: TCHASSAMA Ati-Mola

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 772 - 782

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Perception d'un corps dans les épreuves de conservation de la matière chez Piaget et réussite des opérations d'égalité en mathématiques chez les apprenants

TCHASSAMA[1] Ati-Mola

Résumé – Ce travail vise à améliorer l'enseignement des calculs de conversion. La réussite des opérations d'égalité dans les calculs de conversion des unités chez les apprenants dépend de leur maîtrise des épreuves de conservation de la matière de Piaget (1947). Cinq enfants ont été soumis aux opérations de conversion des unités de mesure. Il ressort que la réussite des opérations de conversion des unités de mesure dépend de leur perception des corps.

Mots clés : Perception, épreuve de conservation, conversion, égalité, réussite

Abstract – This work aims to improve the teaching of conversion calculations. The success of equality operations in unit conversion calculations for learners depends on their mastery of Piaget's (1947) matter conservation tests. Five children underwent units of measurement conversion operations. It appears that the success of the operations of conversion of units of measurement depends on their perception of the bodies.

Key words: Perception, conservation test, conversion, equality, success

1. Ecole Normale Supérieure (ENS) d'Atakpamé, Togo, atimola1111@yahoo.fr

Tout savoir est le fruit de l'interaction entre le sujet qui apprend et son environnement (Piaget, 1967). L'enfant apprend par sa perception depuis son bas âge lorsque celui-ci peut percevoir la lumière, les objets sur lesquels il agit et qui agissent sur lui. Sa pensée intuitive, sa logique perceptive se développe également et fait suite à un raisonnement opératoire basé sur l'égalité entre les objets perçus. Lafon (1970, p.589) précise que c'est à cette condition que les apprentissages scolaires est possible et « en particulier l'assimilation des mathématiques ». La perception apparaît comme élément indispensable pour la réussite des opérations d'égalité et de réversibilité en mathématiques. Ce qui explique l'intérêt pour ce sujet dont l'objectif est d'expliquer concrètement le lien d'égalité entre les corps à partir de la perception de ceux-ci chez les apprenants.

Problématique

La perception est un « acte par lequel un individu, à un moment donné, aperçoit que se présente à lui un objet ayant pour caractère de lui apparaître comme extérieur à lui, comme circonscrit par une surface palpable et visible, et comme étant soit immobile, soit mobile » (Lafon, 1970, p.799). Celui-ci précise que pour qu'un être soit capable de cet acte, il faut qu'il soit pourvu d'organes de sens et qu'il soit capable d'interpréter ces sensations qui peuvent varier en fonction de la position de l'objet perçu ou par contact immédiat et par certaines sensations éprouvées par les organes de sens. L'auteur explique qu'il s'agit d'une synthèse psychologique très complexe qui ne correspond pas seulement à une succession ou à une addition de sensation, mais à une totalité au sens de la théorie de Gestalt. Autrement dit, il s'agit de percevoir les objets dans leur globalité et non dans leur détail, c'est-à-dire, élément par élément. La prise en compte de la perception dans les opérations de conservation chez les apprenants contribuerait à améliorer l'enseignement des notions d'égalité et de réversibilité. Ainsi, la qualité de l'enseignement et de l'apprentissage peut conduire à l'acquisition des opérations concrètes de conservation de quantité et spatiale chez un apprenant.

Perception dans les apprentissages

Selon Lafon (1970), la perception suppose la conscience de l'existence d'un objet et une interprétation qui lui donne un sens. Pour l'auteur, percevoir, c'est reconnaître, c'est opérer un choix parmi les sensations : insister sur certaines et en négliger d'autres. C'est ainsi que nos organes sensoriels nous révèlent uniquement des objets ayant un sens, c'est-à-dire des perceptions. La perception sociale est celle que l'on se fait des gens et de leur environnement social et le jugement que l'on porte sur eux. Les théories relevant de la cognition sociale focalisent leurs analyses sur des processus de traitement de l'information et sur l'intérêt porté sur les éléments qui structurent le rapport entre la cible et le percevant (Bourhis & Leyens, 1994). Par rapport à ces théories, on pense que des jugements sociaux ne peuvent être compris qu'en tenant compte de leurs intentions, motivations et objectifs. Autrement dit, les cognitions du percevant sont déterminées par les interactions entre l'individu et son milieu, tout en sachant que ses intentions ne sont pas celles d'un sujet autonome, mais celles

d'un agent social respectant les rôles qui lui sont attribués et les normes sociales en vigueur dans une situation donnée. La perception des individus est forcément subjective car elle dépend de notre interprétation des situations sociales. La formation des impressions résulte donc d'un traitement construit de l'information qui reste propre à chacun. Pour Tajfel (1972, p.272), les *« processus psychologiques qui tendent à ordonner l'environnement en termes de catégories : groupes de personnes, d'objets, d'événements (ou groupes de certains objets en fonction de leurs attributs) en tant qu'ils sont soit semblables, soit équivalents les uns aux autres pour l'action, les intentions ou les attitudes d'un individu »*. Vergnaud (1965, p.24) va jusqu'à affirmer que « la catégorisation est au cœur de l'humanité ». La fonction principale de ce processus est de permettre d'organiser et de réduire la complexité du réel, en sélectionnant des éléments et en les attribuant à différentes catégories. L'appartenance à une catégorie produit plusieurs effets dont :

- une accentuation des dissemblances entre les éléments appartenant à des catégories différentes ;
- une accentuation des ressemblances entre éléments appartenant à une même catégorie.

Le processus favorise donc une certaine intégration des éléments de l'environnement au prix d'une systématisation simplificatrice. Cette simplification concerne les aspects inductif et déductif du processus. L'aspect inductif de la catégorisation concerne essentiellement la reconnaissance d'un objet appartenant à la catégorie. L'aspect déductif porte sur l'attribution à un objet de caractères relatifs à la catégorie. La catégorisation n'est pas seulement un aspect cognitif, elle est aussi un processus social et culturel.

La perception qu'a un individu de l'espace qui l'entoure peut-être modifiée lorsqu'il manipule un outil (Bourgeois et al., 2014) ou est chargé d'un poids (Lourenco & Longo, 2009). Chez l'enfant, le développement de cette compétence est encore mal connu (Gabbard, 2015). Nous posons la même problématique par rapport à l'influence de la perception dans la maîtrise des opérations de conservation qui, pour nous, induisent celles d'égalité et de réversibilité.

Opération de conservation chez Piaget

Pour Piaget (1947), il y a conservation lorsque l'enfant porte un jugement de conservation. Nous sommes d'avis avec ceux, fidèles à l'idée Piagetienne, qui pensent qu'en plus de ce constat global de jugement, qu'il ait une justification jugée pertinente (Gruen, 1966). Piaget (1967) a donné des âges moyens d'acquisition. Pour un objet solide, la conservation de sa substance est atteinte vers 8 ans, celle de son poids entre 9 et 10 ans et celle de son volume vers 11-12 ans. La conservation de la quantité liquide et des collections d'objets est atteinte vers 7 ans, celle de la longueur, de la distance et de la surface entre 7 et 9 ans (Piaget et Inhelder, 1961).

Afin de bien saisir le concept de conservation, l'enfant doit maitriser les trois opérations suivantes (Boyd et Bee, 2017; Fréchette et Bouchard, 2011; Papalia et Martorell, 2018) :

- La *réversibilité*, soit la capacité de faire mentalement une opération en sens inverse. L'enfant comprend que l'objet peut revenir à la forme initiale. Par exemple, il comprend que le biscuit qui a été brisé en deux était auparavant entier, le nombre de pièces de monnaies alignées est égal au même nombre de pièces rangées en cercle ou dans toute autre position.

- L'*identité* suppose que peu importe la nature de l'objet, il reste le même si on n'a rien enlevé ni rien ajouté. Ainsi, l'enfant saisit qu'un œuf entier ou un œuf brisé reste un œuf.

- La *décentration* suppose que l'enfant perçoive les différents aspects d'une situation. A titre d'exemple, il comprend que deux verres peuvent contenir la même quantité de liquide malgré leurs formes différentes : haut et étroit ou court et large.

En ce qui concerne la conservation spatiale, il s'agit de la conservation de la distance, de la longueur, de la surface, du volume que Piaget (1947) a étudiée en géométrie et sur la représentation de l'espace chez l'enfant. Dans le même sens, Kingsley et Hall (1967) qui ont étudié l'acquisition de la conservation de la longueur en même temps que celle du poids. Beilin (1964, 1966) a introduit la notion de conservation des surfaces, c'est-à-dire conservation dans une situation sans transformation. Celui-ci utilise l'épreuve de deux rectangles faits de carrés juxtaposés et déplace un carré dans l'une d'elles avant de les présenter à l'enfant, qui doit reconnaître l'égalité de leurs surfaces. Dans une première expérience, Beilin (op. cit.) a trouvé que cette quasi conservation est plus difficile que la conservation de type piagétien (à 10 ans, 40 % des sujets seulement réussissent). Il en déduit que dans une expérience de conservation de type Piagetien, le déplacement d'un carré a pour effet d'attirer l'attention du sujet et l'inciter à utiliser l'une ou l'autre des opérations infralogiques : transposition ou itération (comptage) pour arriver à reconnaître la conservation. Pour l'auteur, le facteur principal influençant cette expérience est attention. Pour le vérifier, il soumet 197 enfants âgés de 6 et 7 ans non-conservants à l'épreuve de quasi-conservation à un entraînement avec divers procédés : le feed-back (informer les sujets sur leurs réponses correctes ou non, pour les inciter à utiliser des opérations infralogiques) ; la transposition (faire réarranger par le sujet des surfaces ayant un même nombre de carrés mais disposés différemment) ; l'itération (compter les carrés des diverses sortes de surfaces). Beilin a trouvé que 57,6 % des sujets entraînés par le feed-back sont devenus quasi conservants contre 12 % pour les deux autres procédés (différence significative). L'analyse des réponses verbales montre que le feed-back a augmenté l'utilisation des opérations infralogiques, donc a amené le sujet à reconstruire mentalement les transformations non données dans une tâche de quasi-conservation. Beilin conclut que les transformations impliquées dans une tâche de conservation de type Piaget ne sont pas nécessaires à l'acquisition des opérations mentionnées. On peut remarquer que dans la tâche de quasi-conservation de Beilin, le feed-back a plutôt incité le sujet à l'analyse et la comparaison de deux objets pour découvrir une ressemblance qui est ici une équivalence numérique des carrés. Braine et Shanks (1965 a) ont introduit dans la notion de conservation la distinction entre le réel et le phénoménal, distinction qu'ils croient plus précoce chez l'enfant et qui est à la base de

la conservation. Pour tester cette compréhension spontanée, Braine et Shanks (op. cit.) soumettent 55 enfants âgés de 4 à 5 ans à une épreuve d'illusion de grandeur. Elle consiste à présenter des paires de segments d'anneau dont l'un est légèrement plus petit que l'autre, quand ils sont superposés. Mais quand ils sont juxtaposés, le petit segment apparaît plus grand par illusion optique. A chaque présentation, on pose deux questions : « Lequel est réellement plus grand » et « Lequel paraît plus grand. » Les résultats montrent que la majorité des enfants répondent à la grandeur apparente sans tenir compte de la question. Le problème peut ne pas provenir de l'ambigüité des questions posées comme l'a fait Piaget (1967) mais de la perception des objets présentés lors de l'épreuve. Une autre expérience consiste à varier les formes d'illusion en utilisant des figures géométriques : carré, rectangle, étoile, etc., dont la grandeur est doublée grâce à un dispositif muni d'une lentille. Les deux auteurs concluent que vers 5 ans, la majorité des enfants sont capables d'apprendre à distinguer entre la grandeur réelle et la grandeur phénoménale ou apparente.

Une autre expérience a été faite : 20 enfants ont été entrainés à distinguer 2 tiges droites égales, puis l'une pliée en forme de C. Au post-test, 11 enfants sont devenus conservants et presque tous le sont restés dans un post-test donné deux mois plus tard. L'acquisition de la conservation de la grandeur, au sens de Piaget (Op. cit.), n'apparaît que vers 7 ans. Mais la précocité de la distinction entre le réel et le phénoménal a été confirmée par Braine et Shanks (1965) dans une expérience portant sur la conservation de la forme et utilisant l'illusion du bâton brisé dans l'eau ; la distinction leur paraît très probablement bien antérieure à 5 ans. Nous pensons que l'entrainement a consisté, sans doute, à attirer l'attention des enfants sur leur perception des formes des objets mis à l'épreuve. Puisqu'il s'agit d'un raisonnement sur l'égalité ou la réversibilité des mêmes objets ou des corps présentés de deux façons, la perception de ceux-ci agirait et expliquerait les réponses des enfants selon qu'ils soient conservants ou non. Les opérations de conservation induiraient la réussite de ces notions mathématiques. Ces opérations permettraient aux apprenants de réussir les activités de conversion des unités de mesures telles que les unités du litre, de la longueur, de la surface et du poids. Cela contribuerait à la maîtrise de l'espace et le développement de l'intelligence logicomathématique et l'intelligence spatiale chez les enfants. Mais cette étude se propose d'étudier le lien entre la perception d'un corps dans les épreuves de conservation de la matière chez Piaget et réussite des opérations de réversibilité et d'égalité. L'objectif est de fournir aux éducateurs, des stratégies didactiques leur permettant de contribuer à la réussite des mathématiques. Pour atteindre cet objectif, la méthodologie suivante est adoptée.

Méthodologie

L'étude a concerné les enfants du niveau du Cours Elémentaire Première année (CE1). Cinq (5) meilleurs élèves ont été choisis pour ce travail. Le choix du niveau CE1 se justifie par le fait nous pensons que les opérations de conservation de Piaget aideraient les enseignants à mieux apprendre à apprendre leurs apprenants des opérations sur la comparaison d'égalité de monnaies, de liquide et de solide inscrites au programme d'enseignement de ce niveau. Il existe aussi la notion de conversion

entre les unités de mesure, par exemple, la conversion du litre en millilitre, mètre en décimètre et le kilogramme en gramme. De plus, Piaget (1947) a démontré que le stade des opérations de conservations se situe entre 6-7 à 12 ans. Ses adeptes Braine et Shanks (1965) ont trouvé que l'acquisition de la conservation de la grandeur n'apparaît que vers 7 ans. Mais déjà, vers 5 ans, la majorité des enfants sont capables d'apprendre à distinguer entre la grandeur réelle et la grandeur phénoménale ou apparente (qui, pour nous dépendrait de la perception des objets) et la conservation des surface (Beilin,1964 ; 1966). L'étude de cas sur la perception des objets dans les opérations de conservation en lien avec la réussite des opérations d'égalité et de réversibilité, pour chaque enfant, explique le choix réduit des sujets. Les meilleurs ont été choisis afin qu'on s'assure que ces enfants n'aient pas de difficultés scolaires, donc prêts à réussir les opérations de conservation. Nous leur avons soumis aux mêmes épreuves de conservation des objets solides et liquides. Chaque enfant doit observer et comparer des pâtes malléables issues de la farine de blé de même quantité mais de différentes formes, des volumes d'eau de même quantité mais contenues dans différents verres et les fils de fer de même longueur et épaisseur mais de formes différentes. Toutes ces épreuves ont été présentées aux enfants en leur demandant de les observer et dire s'il y a égalité ou pas. Les mêmes élèves ont d'abord été soumis au problème suivant : 1 litre = ? centilitre. Nous avons disposé des bouteilles en plastique dont certaines sont graduées en litre et d'autres en centilitre, un verre rond et un verre effilé non gradués dans lesquels nous versons une même quantité d'eau d'un petit verre. Les premières bouteilles sont de forme allongée et un peu grosses et celles en centilitre sont effilées. Ensuite, toutes ces mesures ont été effectuée devant chaque enfant qui doit répondre à la même question, c'est-à-dire s'il y a égalité ou pas entre les volumes en apportant une justification. Les résultats issus de cette méthode expérimentale ont été analysés quantitativement et qualitativement. L'analyse quantitative a permis de classer les enfants en fonction de leur réussite aux différentes épreuves et leurs raisonnements justificatifs ont été analysés qualitativement. Nous avons procédé à l'analyse de contenu. Il s'agit de l'analyse logico-sémantique qui s'intéresse directement au contenu manifeste (Mucchielli, 1984).

Résultats

Lorsqu'on a présenté les épreuves conservation déjà montées aux enfants en leur demandant de les observer et dire s'il y a égalité ou pas, on constate que tous les enfants ont trouvé qu'il n'y a pas égalité entre les corps, de part leur forme, volume, taille et le poids. C'est de même pour les corps présentés en images. Néanmoins, tous ont hésité avant de donner leur réponse. Ils ont cherché à mesurer avant de se prononcer puisque ceux-ci cherchaient à toucher ou à manipuler ces corps.

Lorsque les expériences concernant ces épreuves ont été réalisées devant les enfants, autrement dit, lorsque toutes ces mesures ont été effectuée devant chaque enfant qui doit répondre à la même question en apportant une justification, tous les enfants ont réussi toutes les épreuves en décrivant le déroulement de chaque catégorie d'expérience servant de justification de chaque réponse. Par exemple, l'expérience concernant un litre d'eau dans un tube gradué en litre est le même dans celui

gradué en millilitre. Seul, deux enfants trouvent qu'un fil de fer de 20 cm allongé est plus long que celui ayant la même dimension mais courbé, contrairement aux trois autres enfants. Mais lorsqu'on a pris un verre effilé et un verre rond dans lesquels on a verré la même quantité d'eau, on a demandé aux enfants de dire s'il y a égalité ? Il y a un enfant qui trouve qu'il n'y a pas égalité. Mais lorsqu'on a reposé la question de savoir : est-ce qu'il y a la même quantité d'eau dans les deux cas ? L'enfant a répondu oui. Son raisonnement est que le verre effilé a besoin de l'espace pour mieux contenir de l'eau alors que le verre rond en a suffisamment et peut en prendre encore. Les expériences ont permis de comprendre la théorie Piagetienne sur les opérations concrètes de conservation et les facteurs agissant sur cet apprentissage tels que l'entrainement, l'attention et la perception que nous allons expliquer.

Discussion

En analysant la théorie de Piaget (1947), on a l'impression que les opérations de conservation au stade des opérations concrètes s'acquièrent automatique et de manière intuitive, une fois l'enfant à ce stade. Nos expériences montrent que, ayant l'âge correspondant à ce stade ne réussissent pas automatiquement ces opérations.

Si Braine et Shanks (1965), en introduisant dans la notion de conservation la distinction entre le réel et le phénoménal, ont montré que la majorité des enfants répondent à la grandeur en raisonnant sur les opérations sans tenir compte de la question : « Lequel est réellement plus grand ? » et « Lequel paraît plus grand ?», cela n'a pas été le cas dans nos expériences durant lesquelles nous posions des questions suivantes : Ya-t-il égalité dans les deux cas ? Où est-ce qu'il y a plus d'eau ? Ou encore, Quel objet est plus long que l'autre ? Il faut reconnaître qu'il y a eu ambigüité au niveau de compréhension des questions posées comme l'ont reconnu aussi les deux auteurs, qui agit sur la réponse de certains enfants issus de notre expérience. Ce qui explique le raisonnement selon lequel le verre effilé a besoin de l'espace pour mieux contenir de l'eau alors que le verre rond en a suffisamment et peut en prendre encore. D'où il y a plus d'eau dans le verre effilé que dans le verre rond si celui-ci considère toujours ce qui est rond comme étant grand. Cela peut s'expliquer aussi par la perception au sens de Tajfel (1972) qui parle de la catégorisation sociale qui résulte des processus psychologiques qui tendent à ordonner l'environnement en termes de groupes de certains objets en fonction de leurs attributs) en tant qu'ils sont soit semblables, soit équivalents les uns aux autres. Pour Vergnaud (1965), l'appartenance à une catégorie produit plusieurs effets dont une accentuation des ressemblances entre éléments appartenant à une même catégorie ou porte sur l'attribution à un objet de caractères relatifs à cette catégorie. Cela s'explique aussi par la perception due à l'effet de halo en nous référons à Brunswick (cité par Fréchette & Bouchard, 2018) qui a trouvé que les sujets se forment une perception identique des objets par l'agencement des différentes indices déjà manipulées. Il y a une surestimation des corrélations entre certains indices qui produit une distorsion dans la perception d'autrui.

Les facteurs tels que l'activité du sujet, l'entrainement, l'attention et la perception des formes des objets sont déterminants dans l'acquisition des opérations de conservation et par conséquent dans la réussite des opérations d'égalité et de réversibilité. C'est en agissant à l'occasion de ses rapports avec les objets et le milieu physique que l'individu se construit sur les divers plans de l'organisation personnelle et qu'il apprend. L'intelligence se développe sous l'effet combiné de deux mécanismes fondamentaux : l'assimilation et l'accommodation (Piaget,1947). L'assimilation consiste à incorporer les éléments du milieu qui ne peut se concrétiser que par l'activité du sujet, l'entrainement et les conditions du milieu. L'accommodation est la modification et la mobilisation des structures en fonction des modifications du milieu, c'est l'ajustement de soi au réel. On constate un réel intérêt en pédagogie s'appuyant sur les pratiques suivantes des enseignants :

- adopter une approche concrète de l'enseignement qui s'appuie sur la manipulation et l'exploration des choses et favoriser la construction mentale chez l'élève par le questionnement progressif ;
- l'apprentissage par la découverte personnelle plutôt que par la démonstration, enseignement des vérités (Gaonac'h & Golder, 1995).

Nous pensons que l'entrainement a consisté, sans doute, à attirer l'attention des enfants sur leur perception des formes des objets mis à l'épreuve.

Conclusion

Si l'enseignement ces mathématiques demeure un problème préoccupant, il y a nécessité de chercher à comprendre les théories et les pratiques pédagogiques connexes qui sous-tendent son acquisition chez les enfants. Ce travail a permis d'analyser le lien entre la perception d'un corps dans les épreuves de conservation de la matière chez Piaget et la réussite des opérations de réversibilité et d'égalité dans les calculs de conversion des unités de mesure en mathématiques chez les apprenants. La méthode expérimentale a permis de soumettre les enfants aux opérations de conversion des unités de mesure à partir des épreuves de conservations de Piaget. Cinq enfants de 7-8 ans caractéristiques de ce stade ont été choisis pour ce travail. Les résultats montrent que ceux-ci réussissent mieux les opérations de conversion des unités de mesure lorsqu'on ceux-ci sont entrainés à partir des opérations de conservation de Piaget. La maîtrise de celles-ci, à leur tour, sont dues à la perception des objets et corps utilisés pour l'expérience. Ainsi, est ce que les opérations de conservation ne peuvent pas être instituées et servir d'outils à la réussite des mathématiques chez les apprenants ?

Références

Braine, M. D. S. & Shanks, B. L. (1965) The development of conservation of size. Journal *verbs Learn, verbs Behavior 4*, 227-242.

Braine, M. D. S. & Shanks, B. L. (1965) The conservation of a shape property and a proposal about the origin of the conservation. *Canada Journal Psychology 19*, 197-207.

Boyd, D. & Bee, H. (2017) *Les âges de la vie : Psychologie du développement humain* (2e éd.). Saint-Laurent, Québec : ERPI.

Beilin, H. (1964) Perceptual-cognitive conflict in the development of an invariant area concept. *Child Psychology 1*, 208-226.

Beilin, H. (1966) Feedback and infralogical strategies in invariant area conceptualization. *Child Psychology 3*, 267-278.

Bourhis, R. Y. &Leyens J-P. (1994) *Stéréotypes, discrimination et relations intergroupes*. Liège : Mardaga

Fréchette, N. & Bouchard, C. (2018) *Le développement global de l'enfant de 0 à 5 ans en contextes éducatifs*. Québec : Les Presses de l'Université du Québec.

Gaonac'h, D. et Golder, C. (1995) *Manuel de psychologie pour l'enseignement*. Paris : Hachette.

Gruen, G. E. (1966) Note on conservation : methodological and definitional considerations. *Child Development 37*, 977-983

Kingsley, R. C. & Hall, V. C. (1967) Training conservation through the use of learning set. *Child Development 38*, 1111-1126.

Lafon R. (1969) *Vocabulaire de psychopédagogie et de psychiatrie de l'enfant*. Paris : PUF.

Mucchielli R. (1984) *L'analyse de contenu des documents, des communications*. Paris, ESF.

Papalia, D. E. & Martorell, G. (2018) *Psychologie du développement de l'enfant*. Québec : Chenelière Education

Piaget J. (1947-1967) *Psychologie de l'intelligence*. Paris : Armand Colin.

Piaget, J. (1966) Nécessité et signification des recherches comparatives en psychologie génétique. *Journal international Psychology 1*, 3-13.

Piaget, J. (1967) *Biologie et connaissance*. Paris : Gallimard.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1961) *Le développement des quantités physiques chez l'enfant*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

Tajfel, H. (1972) Quelques développements de la psychologie sociale. *Journal européen de psychologie sociale 2*, 3, 307-321.

Vergnaud, G. (1965) Note sur un cas de fausse conservation, *Psychology.fr, 10*, 277-279.

Titre: Bilan du Groupe de travail N°9 - Liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages

Auteurs: KAMGA Alice, MOPONDI Alexandre et PILET Julia

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 783 - 792

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Bilan du Groupe de travail n° 9

Liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages

Responsables
KAMGA[1] Alice – MOPONDI[2] Alexandre – PILET[3] Julia
Correspondant CS
RODITI[4*] Éric

Présentation du GT9

Ce groupe de travail s'intéresse aux liens que la didactique des mathématiques peut éclairer entre les pratiques enseignantes, déclarées ou effectives, et les apprentissages des élèves, potentiels ou effectifs, en mathématiques. Lors des précédents EMF (Sayac, Chesnais, Barrera, Roditi, 2015 ; Atta, Coutat, Pilet, 2018), ces liens ont été étudiés avec les deux points de vue suivants qui sont restés au cœur des intérêts du GT9 pour EMF2022 : les effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves, mais aussi l'influence de la variabilité des apprentissages sur les pratiques enseignantes.

D'une part, l'étude des pratiques enseignantes nourrit les recherches en didactique des mathématiques, en particulier pour leur impact sur les apprentissages des élèves (Robert &Rogalski, 2002 ; Vandebrouck, 2008). Les choix des enseignants – pour la conception de leurs séquences d'enseignement comme pendant leur déroulement – conditionnent en effet les activités mathématiques de leurs élèves et par conséquent leurs apprentissages. D'autre part, l'étude des apprentissages des élèves interroge les pratiques enseignantes, mais aussi les choix curriculaires ou les potentialités de certains dispositifs d'enseignement.

Par ailleurs, l'enseignant et les élèves agissent au sein d'une institution scolaire qui a ses spécificités, en particulier quant à la transposition didactique des savoirs mathématiques (Chevallard, 1999). Étudier les liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages, consiste donc aussi à prendre en compte et à analyser les spécificités institutionnelles : organisation du système d'enseignement,

1. Ministère des Enseignements Secondaires, Inspection de Pédagogie chargée de l'enseignement, Section Mathématiques, République du Cameroun, al_kamga@yahoo.fr

2. Université Pédagogique Nationale, Département de mathématique et Informatique, République Démocratique du Congo, bendekomopondi@yahoo.fr

3. Univ Paris Est Creteil, Université de Paris, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-94010, Creteil, France, julia.pilet@u-pec.fr

4. Université Paris Cité, Laboratoire EDA, France, eric.roditi@u-paris.fr

choix curriculaires, langue d'enseignement, modalités d'enseignement à distance ou hybride, etc. Même si aucune contribution n'aborde directement des comparaisons internationales, la lecture des textes peut ouvrir une réflexion en ce sens étant donné la diversité des pays ayant contribué au GT9 d'EMF 2022.

De plus, ces spécificités institutionnelles évoluent tant au niveau des curriculums qu'au niveau de la société, et celapeut conduire à des adaptations pédagogiques et didactiques dans les pratiques des enseignants. Par exemple, les approches par compétences, par situations ou par objectifs sont au cœur des curricula des systèmes éducatifs de plusieurs pays et transforment profondément les pratiques d'enseignement et d'évaluation. Les effets de ces approches sont donc abordés dans ce GT9 de l'EMF 2022 en considérant les liens étroits qu'elles entretiennent avec les contenus mathématiques, leurs processus d'enseignement et d'apprentissage et les pratiques d'évaluation. En outre, la crise sanitaire mondiale a conduit à mettre en place de façon inédite de nouvelles modalités d'enseignement que le GT9 a proposé de questionner, notamment en lien avec les apprentissages.

Enfin, le travail sur la thématique de l'évaluation des apprentissages des élèves a été reconduit à l'EMF 2022 car cette entrée s'avère fructueuse pour l'analyse des liens entre enseignement et apprentissage, notamment pour questionner les conditions sous lesquelles l'évaluationconstitue un outil pour l'enseignant au service des apprentissages des élèves.

Les questions suivantes ont structuré la réflexion :

- Quels cadres théoriques et quelles méthodologies fondent les recherches sur les liens entre pratiques enseignantes et apprentissages mathématiques des élèves ? Quelles sont les spécificités des apports des recherches qualitatives et quantitatives ?
- Comment la prise en compte des spécificités institutionnelles, culturelles et sociales des pays, en perpétuelle mutation, éclaire-t-elle les pratiques enseignantes et les apprentissages qui en découlent ?
- Quels sont les effets, potentiels ou effectifs, des approches de l'enseignement par compétences, par situations ou par objectifs sur les pratiques enseignantes et sur les apprentissages des élèves ?
- Quels rôles l'évaluation joue-t-elle dans l'effet de l'enseignement sur les apprentissages ?

Les contributions ont apporté des éléments de réponses à ces questions tout en enrichissant la réflexion sur les liens entre pratiques enseignantes et apprentissages des élèves en mathématiques.

Les liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages abordés dans les contributions

Au total, onze contributions ont été discutées à EMF 2022 sous la forme de dix communications et d'un poster. Neuf nationalités étaient représentées : Algérie, Burkina Faso, Bénin, Canada, Côte d'Ivoire, Cameroun, France, Maroc, République Démocratique du Congo, Suisse. Nous avons regroupé les communications en cinq catégories selon les liens qui y sont abordés entre pratiques d'enseignement et apprentissages des élèves. Ces catégories ne se veulent ni exclusives ni exhaustives des façons d'aborder ces liens. D'autres catégorisations sont certainement possibles.

De l'enseignement prévu vers des apprentissages potentiels

Trois contributions s'intéressent à l'enseignement tel qu'il est prévu dans l'institution scolaire considérée, ou tel qu'un enseignant l'a prévu pour sa classe pour questionner les apprentissages potentiels des élèves qui pourraient en découler. Ces contributions s'appuient sur des analyses de ressources pour l'enseignement comme les programmes scolaires ou les manuels scolaires, de tâches de situations ou encore d'entretiens avec des enseignants.

Megherbi et Artaud interrogent le processus de transposition didactique autour des fonctions trigonométriques au lycée en France à travers une analyse des programmes scolaires et de manuels dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999). Prenant comme hypothèse que les apprentissages des élèves dépendent du contenu mathématique qui leur est enseigné, elles mettent en évidence des modifications possibles de l'organisation mathématique à enseigner sur les fonctions trigonométriques qui pourraient contribuer à ce que les rapports personnels des élèves à ce savoir soient davantage dans le domaine de l'analyse.

Partant du constat que les élèves ont des difficultés à utiliser les savoirs enseignés dans la résolution de problèmes, Sawadogo et ses collaborateurs s'intéressent quant à eux aux effets potentiels des activités introductrices sur les apprentissages au Burkina Faso. À partir d'une analyse à la fois des énoncés des activités conçues par les enseignants, de leur déroulement en classe et d'entretiens menés avec les enseignants, ils montrent les insuffisances des activités et du guidage des enseignants pour donner du sens aux notions chez les élèves.

Enfin, Cossou marque un état des lieux sur la place des jeux éducatifs dans l'enseignement béninois de la maternelle et du primaire dont leur utilisation est supposée faciliter les apprentissages en mathématiques.

Des pratiques déclarées des enseignants vers des apprentissages potentiels

Les deux contributions de Roditi et ses collaborateurs et Pilet et ses collaboratrices portent sur une même enquête nationale française, appelée PRAESCO (PRAtiques Enseignantes Spécifiques aux Contenus), menée respectivement sur l'enseignement primaire et l'enseignement secondaire, et visant à décrire les pratiques d'enseignement déclarées sur des contenus disciplinaires mathématiques précis. Prenant appui sur différents cadres théoriques comme la Double Approche (Robert & Rogalski, 2002) et la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1999) ainsi que sur des analyses statistiques, ces recherches montrent la diversité des pratiques enseignantes qui vivent dans les classes. Des prolongements sont prévus pour croiser les pratiques et les apprentissages. Du fait de l'ampleur des échantillons et des outils théoriques et méthodologiques conçus, ces deux communications ont contribué à des échanges sur, d'une part la place de recherches quantitatives par rapport au recherche qualitatives pour analyser les pratiques enseignantes et, d'autre part, sur la complémentarité des productions respectives de ces deux types de recherches.

Des pratiques effectives vers des apprentissages potentiels

Djoué Boa cherche à analyser les pratiques « motivationnelles » des enseignants sur la construction du nombre à partir de questionnaires et d'observations de classes. Elle montre que certaines pratiques motivationnelles impactent positivement l'état émotionnel des apprenants ce qui, selon elle, peut favoriser un meilleur apprentissage des nombres.

Des activités effectives des élèves vers les pratiques effectives des enseignants

Trois communications analysent les activités effectives des élèves pour questionner les liens avec les pratiques de leurs enseignants. Elles s'appuient sur des productions d'élèves et/ou des analyses de séances de classe.

À partir de l'analyse fine du travail collaboratif d'un groupe d'élèves de primaire du canton de Genève en résolution de problèmes, Favier met en évidence que la mise en œuvre, par les élèves, de processus d'essais et d'ajustements ne va pas de soi et que leur exploitation par les enseignants tant pour soutenir les élèves dans leur recherche que pour gérer l'institutionnalisation est complexe. Toujours en contexte de résolution de problèmes, Allard et ses collaboratrices comparent la nature des raisonnements et des registres de représentation mobilisés par des élèves français de fin de primaire et de début de secondaire pour résoudre des problèmes déconnectés de partage inéquitable. Elles interprètent les résultats selon l'enseignement que les élèves ont reçu en lien avec ces problèmes et ouvrent des pistes de réflexion sur des pratiques à développer pour soutenir les élèves dans la résolution de ces problèmes, comme le fait de travailler sur les relations mathématiques – notamment de comparaison – ou le fait d'accompagner les élèves dans la mise en relation des données dans leurs écrits.

Quant à Benrherbal, dans une perspective interdisciplinaire, il s'intéresse aux interactions didactiques entre un enseignant et ses élèves dans des exercices de calcul de concentration en sciences et technologies. Il montre en quoi les difficultés des élèves sur les fractions et les proportions influencent les interactions didactiques et peuvent conduire l'enseignant à revoir à la baisse ses objectifs d'apprentissage afin de faciliter la réussite des élèves.

Des apprentissages effectifs vers l'enseignement à prévoir

Deux communications prennent appui sur une analyse des apprentissages effectifs des élèves pour en dégager des pistes d'évolution de l'enseignement des notions considérées.

Tchassama étudie, sur quelques élèves, le lien entre la perception d'un corps dans les épreuves de conservation de la matière chez Piaget et la réussite aux tâches de conversion d'unités de mesure et cherche à en dégager des pistes pour améliorer l'enseignement.

Par ailleurs, Hirsch et Roditi mettent à la discussion des résultats de recherche récents en neurosciences cognitives. Ces résultats portent sur des apprentissages effectifs d'élèves français sur les fractions et les décimaux et la façon dont les chercheurs en neurosciences cognitives impliqués dans ces recherches en tirent des conclusions sur des conseils à donner aux enseignants pour concevoir leur enseignement. Cette communication interroge la place de la didactique dans les recherches pour établir des liens entre enseignement et apprentissage.

Perspectives

Nous avons regroupé les contributions en cinq catégories selon les liens qui étaient abordés entre pratiques d'enseignement et apprentissages. Ce regroupement donne un panorama aussi complet que possible de la diversité des thématiques abordées pendant l'EMF 2022 mais il ne peut relater toute la richesse des interactions qui ont été au cœur des échanges pendant ce colloque. Au moment d'établir le bilan, les discussions collectives du groupe ont fait émerger plusieurs perspectives de travail que nous suggérons pour un éventuel prochain GT9, si ce groupe est maintenu lors de la prochaine édition de l'EMF.

Les participants soulignent que peu de communications prennent en compte les apprentissages effectifs des élèves et suggèrent que l'accent soit mis sur ce point dans un prochain appel à communication. La réflexion a également fait émerger d'autres thématiques qui pourraient faire l'objet d'un questionnement spécifique au GT9 comme des études questionnant les rapports au savoir et à l'enseignement des mathématiques des enseignants et des élèves ou des études prenant en compte les mathématiques intervenant dans les autres disciplines.

Une des questions adressée au groupe concernait les cadres théoriques à mobiliser et les méthodologies à mettre en place pour analyser les pratiques enseignantes. L'ensemble des communications donne à voir une diversité de cadres théoriques et méthodologiques, mais, comme au précédent au EMF, les échanges entre participants n'ont pu aboutir à davantage de développements concrets sur cet aspect. Il ressort toutefois des apports innovants, tant théoriques que méthodologiques, des enquêtes PRAESCO 1er et 2nd degrés menées sur des échantillons représentatifs à grande échelle en France. Ces enquêtes questionnent le rôle et les apports respectifs des études qualitatives et quantitatives des liens entre pratiques et apprentissages. Il serait certainement intéressant d'investir cette potentielle complémentarité entre recherches qualitatives et quantitatives pour étudier les liens entre pratiques et apprentissages.

L'évaluation et le rôle du travail collaboratif des enseignants figuraient parmi les perspectives envisagées à l'EMF 2018. Aucune contribution n'a porté spécifiquement sur ces questions mais elles restent d'actualité et méritent certainement d'être objet d'un nouvel appel à communication dans le prochain EMF.

Les échanges sur les contributions ont régulièrement débouché sur des développements d'éléments de contexte pour faire comprendre les conditions dans lesquelles la problématique de la contribution était posée, les données recueillies et les conclusions interprétées. Étant donné que ces développements ont pris une place importante dans les échanges, cela nous mène, d'une part, à souligner l'apport essentiel que pourraient avoir des recherches comparatives entre pays sur les conditions d'enseignement des mathématiques, et, d'autre part à suggérer d'autres modalités de travail au sein d'EMF comme des ateliers ou des temps d'échanges à partir de vidéos de classe.

Références

Atta, G., Coutat, S., Pilet, J. (2018). Liens entre pratiques d'enseignement et apprentissages. In M. Aboud (Ed.), *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone, Genevilliers, octobre 2018* (p. 929-933). Paris : IREM de Paris.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19* (2), 221-265.

Sayac, N., Chesnais, A., Barrera, R. I., & Roditi, E. (2015). Les pratiques d'enseignement etd'évaluation face aux défis des inégalités des opportunités d'apprentissage. In L. Theis(Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pourleur enseignement et leur apprentissage– Actes du colloque EMF2015* (p. 765-768).

Robert, A., &Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques. Une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 2*(4), 505-528. https://doi.org/10.1080/14926150209556538

Vandebrouck, F. (2008). *La classe de mathématique : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse : Octares.

Annexe : Listes des contributions par ordre alphabétique

Allard, C., Horoks, J., Jeannotte, D. & Pilet, J.

Résolution de problèmes déconnectés de partage inéquitable par des élèves français de fin de primaire et de début de secondaire et lien avec l'enseignement reçu.

Benrherbal, A.

Interactions entre un enseignant et ses élèves lors des situations faisant intervenir les fractions et les proportions dans le calcul de la concentration en science et technologie.

Djoué Boa, E. H.

Contribution pour l'amélioration des pratiques motivationnelles pour l'apprentissage des nombres en cours préparatoire première année.

Favier, S.

Résoudre un problème par essais et ajustements : quelles exploitations des essais ?

Hirsch, M. & Roditi, É.

Quand les neurosciences analysent les apprentissages et en tirent des conséquences pour l'enseignement.

Magloire, C.

Des jeux pour faciliter l'apprentissage des mathématiques à la maternelle et au primaire : l'expérience du Bénin.

Megherbi, D. & Artaud, M.

Modification de l'apprentissage des élèves en modifiant les mathématiques à enseigner : le cas des fonctions trigonométriques en France.

Pilet, J.,Coppé, S., Grugeon-Allys , B. &Horoks, J.

Une étude à grande échelle des pratiques déclarées des enseignants du secondaire français.

Roditi, É., Allard, C.,Masselot, P., Peltier-Barbier,M.-L. & Tempier, F.

Enquêter sur les pratiques d'enseignement pour les mettre en lien avec les apprentissages desélèves.

Sawadogo, T., Douamba, K. J.-P. & Nana, R.

Analyse critique de la pertinence des activités introductrices des notions en classe de seconde C.

Tchassama, A.-M.

Perception d'un corps dans les épreuves de conservation de la matière chez Piaget et réussite des opérations d'égalité en mathématiques chez les apprenants.

Titre: Utiliser un exerciseur sur une tablette avec des élèves ayant des difficultés d'apprentissage

Auteur: ATHIAS Francine

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 793 - 806

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Utiliser un exerciseur sur une tablette avec des élèves ayant des difficultés d'apprentissage

ATHIAS[1] Francine

Résumé – Notre recherche porte sur la description et l'analyse des actions d'une professeure et de deux élèves ayant des difficultés importantes d'apprentissage, dans un contexte post-confinement. Nous nous intéressons plus spécifiquement à l'une de ces deux élèves, dans des usages d'une ressource numérique pour l'enseignement des mathématiques, à savoir un exerciseur sur tablette. Nos résultats portent sur la compréhension des difficultés qu'elle rencontre et des actions de la professeure et de sa camarade.

Mots-clefs : apprentissage du nombre, maternelle, difficultés d'apprentissage, exerciseur, tablette.

Abstract – Our research focuses on the description and analysis of the actions of a teacher and two students with lasting learning difficulties in a post-confinement context. More specifically, we are interested in one of these two students, in the use of teaching software. Our results relate to the understanding of the difficulties she encounters and the actions of the teacher and her classmate.

Keywords: teaching of numbers, kindergarten, learning difficulties, teaching software, tablet.

1. ELLIADD, INSPE Besançon, FR-EDUC, France, francine.athias@univ-fcomte.fr

Introduction

La recherche exploratoire que nous présentons porte sur des usages du numérique en grande section de maternelle (GS, élèves de 5 ans) auprès de deux élèves ayant des difficultés à apprendre de l'enseignement qui leur est proposé. Nous cherchons à repérer comment des connaissances et compétences mathématiques peuvent être abordées. Cette recherche a lieu dans un contexte particulier. En effet, la classe de cette école rurale comporte douze élèves de quatre groupes, six élèves de Cours Préparatoire (CP ou 1ère classe : élèves de 6 ans), deux élèves de Toute-Petite Section (élèves de 2 ans), deux élèves de Moyenne Section (élèves de 4 ans) et ces deux élèves de GS, Lenny et Mado. C'est précisément sur ce groupe de deux élèves que nous enquêtons, en particulier sur l'élève Mado. De surcroît, cette étude a lieu lors de la reprise en classe en présentiel, après le confinement au printemps 2020 : l'école avait été fermée pendant environ deux mois. Il est important de repérer que les deux élèves, avant le confinement, rencontraient déjà de nombreuses difficultés et que, au moment de la recherche, elles sortaient d'une période de non-activité scolaire de plus de deux mois. Ces difficultés portent sur l'accès aux apprentissages visés en maternelle, le temps d'attention au cours de la journée… Nous pouvons également préciser, a posteriori, que ces deux élèves, désormais en CP, bénéficient d'un accompagnement spécifique. Pour toutes ces raisons, nous pensons que cette recherche exploratoire a toute sa place dans le Groupe de Travail 10, Enseignement auprès de publics spécifiques ou dans des contextes particuliers, en lien avec le thème des ressources en enseignement des mathématiques.

Dans une première partie, nous présentons l'exerciseur proposé et analyser les exercices proposés à l'aide du triplet praxéologique (Chevallard, 1999 ; Assude et Mercier, 2007) ainsi que le choix d'une orchestration (Trouche, 2005) par la professeure. Dans une deuxième partie, nous exposons quelques éléments théoriques et méthodologiques pour rendre compte de l'action conjointe de la professeure et des élèves. Dans une troisième partie, nous décrivons et analysons des moments de classe. Dans une quatrième partie conclusive, nous engageons une discussion.

Des usages du numérique

L'application Marbotic

La professeure a choisi d'utiliser l'application « 10 doigts » du logiciel sur tablette « Marbotic ». Nous allons nous intéresser plus spécifiquement à la partie « + ». L'écran y affiche une addition de deux nombres, d'un signe = et d'un point d'interrogation, par exemple « 1+2 = ? » (cf. figure 1). L'élève doit poser un doigt à gauche de l'écran (ce qui correspond au 1 affiché) et deux à droite de l'écran. Ces deux parties sont délimitées par le trait vertical placé sous le signe d'addition (ce qui correspond au 1 affiché). Si les doigts sont posés correctement sur la tablette, alors des étoiles s'affichent : une étoile sous le chiffre 1 et deux sous le chiffre 2. Le résultat 3 est écrit (cf. figure 2). Puis une voix énumère les

étoiles les unes après les autres (un, deux, trois). De plus le nombre s'affiche au niveau de l'étoile puis disparaît. Pour passer au calcul suivant, il suffit de toucher le symbole en bas à droite.

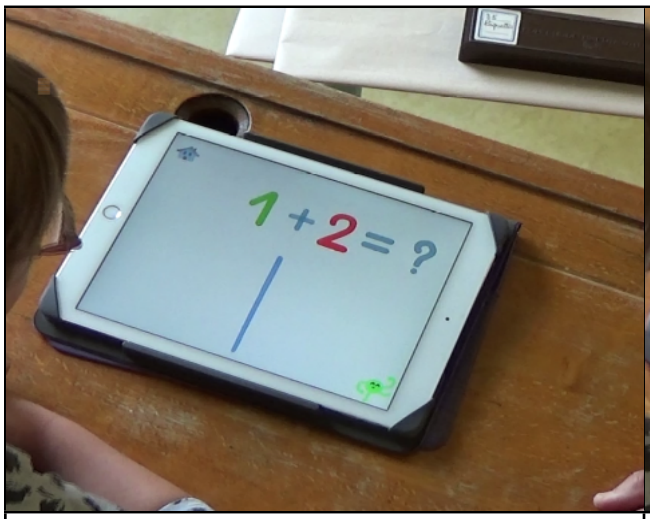


Figure 1 – Une égalité à compléter

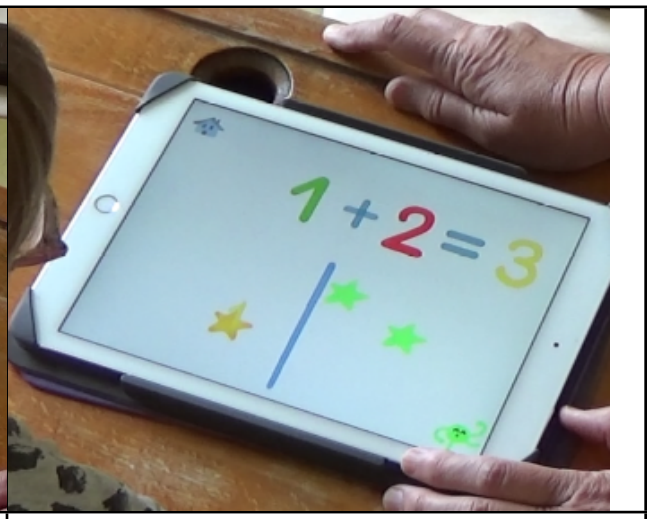


Figure 2 – La tablette affiche la somme 3 à la place du point d'interrogation

Analysons rapidement cet exerciseur (uniquement la partie « + »), en appui sur le triplet praxéologique (Chevallard, 1999 ; Assude et Mercier, 2007) : type de tâches, techniques et technologie (nous ne développerons pas ici les éléments théoriques). Le type de tâches proposé est de poser un nombre de doigts correspondant à l'écriture chiffrée (compris entre 1 et 9). La somme des deux nombres est à la charge de l'application. Elle est explicitée au moment où toutes les étoiles sont dénombrées par un comptage-numérotage (Brissiaud, 2007). Pour pouvoir réaliser cette tâche, différentes techniques sont possibles. Dans tous les cas, l'élève doit reconnaître l'écriture du nombre (par exemple 2). Soit il pose directement deux doigts à l'écran. Soit il retient que c'est deux, il lève les doigts au fur et à mesure qu'il récite la comptine numérique et s'arrête lorsqu'il atteint le nombre (un, deux). Il doit laisser les doigts posés et faire de la même manière pour le deuxième nombre. D'un point de vue de la technologie (Chevallard, 1999), ce qui est en jeu, c'est la représentation d'une quantité écrite en chiffres à la même quantité représentée par les doigts. Il s'agit d'associer par deux fois un chiffre (1, puis 2) à un nombre de doigts correspondant. La somme est alors symbolisée par des étoiles. Nous pouvons noter un usage du signe d'égalité (1 + 2 =?) qui n'est pas envisagé à l'école maternelle.

Un usage de la professeure

Les usages du numérique en maternelle ont été étudiés dans des conditions ordinaires (Besnier et Bueno-Ravel, 2014 ; Besnier et Gueudet, 2016). Ainsi diverses orchestrations (Trouche, 2005) ont été décrites en maternelle. Dans un environnement technologique, Trouche (2005) définit la notion d'« orchestration instrumentale » comme « l'agencement systématique des artefacts disponibles dans un environnement donné, pour la mise en œuvre d'une activité (mathématique) donnée » (2005, p. 126). Dans l'usage par la professeure de Marbotic avec les élèves, une seule orchestration est présente. La

professeure met à disposition une tablette et fait en sorte que l'écran soit visible par les deux élèves. Elle les interroge à tour de rôle. Au début elle lit l'énoncé puis au fur et à mesure du jeu, elle laisse l'élève lire l'énoncé (par exemple elle lit « 2 plus 4, 2 et 4 »). Elle attend que le résultat soit donné oralement (ici 6), avant de les autoriser à poser les doigts. Le résultat est validé par les élèves lorsque le nombre dit par l'élève est le nombre énoncé et écrit par la tablette. Le signe d'égalité n'est pas lu. Il est attendu que les élèves sachent dire le nombre de doigts.

Le type de tâche dans ce nouveau jeu est plus complexe. Non seulement l'élève doit reconnaître les nombres, comme nous l'avons analysé précédemment, mais elle doit déterminer la somme des deux nombres. Pour résoudre ce problème, l'élève peut s'appuyer sur des résultats mémorisés (2 et 4, ça fait 6). Elle peut aussi s'appuyer sur une collection intermédiaire, le dénombrement des doigts levés, en les énumérant un à un ou en surcomptant. La validation de sa réponse se fait par la comparaison (implicite) du nombre qu'elle a dit et du nombre énoncé et écrit par la tablette. D'un point de vue de la technologie (Chevallard, 1999), il s'agit d'un problème additif, de type composition, où les deux parties sont connues et le tout est cherché (Vergnaud, 1986).

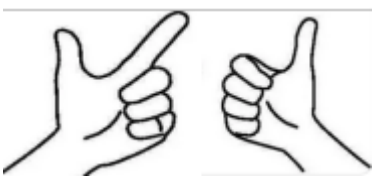
Cette première description de l'usage de ce jeu numérique dans ces nouvelles conditions montre que la tâche de l'élève est plus complexe qu'il n'y paraît, avec une présence importante de la professeure. Le dispositif numérique est plutôt convivial, mais que font les élèves dans ces conditions ? Quelle est la place de la professeure ?

Cadre théorique et méthodologique

Nous allons maintenant décrire et analyser les actions de la professeure et des deux élèves dans cet usage de la tablette. Pour cela, nous nous appuyons sur des notions modèles issues de la théorie de l'action conjointe en didactique (Sensevy, 2011). Lorsque l'élève aborde la situation, il sait déjà certaines choses, que l'on peut considérer comme un « déjà-là ». Ce dernier renvoie d'une part au savoir, ici des connaissances mathématiques et d'autre part aux habitudes dans la classe. Nous parlons alors de contrat didactique (Brousseau, 1998 ; CDpE, 2019). Par exemple, ces deux élèves savent lire les premiers nombres de la comptine numérique. Lorsqu'elles voient « 3 », elles sont capables de dire « trois » et de montrer trois doigts. La professeure et les deux élèves travaillent sur cet arrière-plan du contrat. Elles vont devoir aborder de nouvelles situations organisées par la professeure, en appui sur les propositions de l'application. L'usage de la notion de milieu didactique (Brousseau, 1998 ; Sensevy, 2011 ; CDpE, 2019) permet de rendre compte de la description des situations et du problème évolutif auquel sont confrontés les élèves. Par exemple, lorsque Mado voit « 2+4=? », au départ, elle ne sait pas le lire. Apprendre à le lire signifie qu'elle est capable de reformuler la question en actes, c'est-à-dire qu'elle sait que cela signifie qu'il faut mettre 2 et 4 doigts. Elle sait qu'il lui faut dénombrer cette collection de doigts. Nous savons par exemple qu'elle ne peut pas dire « 6 » directement.

Nous utiliserons également la dialectique expression-réticence (Sensevy, 2011 ; CDpE, 2019). Ce descripteur permet de rendre compte des actions de la professeure. Tout énoncé produit par la professeure dit/montre des choses et dans le même temps tait/cache d'autres, dans un même mouvement. Par exemple, lorsque l'élève met cinq doigts alors qu'elle devrait en mettre six, la professeure demande à l'élève de vérifier. En cela, elle manifeste peut-être que ce n'est pas juste, mais elle ne le dit pas.

Nous allons maintenant analyser le rôle des représentations (Brousseau, 2004). La réponse mathématique à la question mathématique « 1+2= ? » dans l'univers des symboles mathématiques n'est pas directement accessible à l'élève de GS. L'élève traduit cette représentation « 1+2= ? » par deux collections de doigts « un doigt et deux doigts levés » . Dans cet univers des collections de doigts, elle peut résoudre le problème de composition (Vergnaud, 1986), où les deux parties sont connues et le tout est cherché. Puis le nombre 3 étant dit comme représentant le cardinal de la collection des doigts, l'élève peut lire la réponse proposée par le logiciel, nombre qui est dit et écrit dans l'univers des symboles mathématiques. Autrement dit, le jeu est organisé pour permettre des allers-retours entre l'univers des symboles mathématiques et l'univers des collections de doigts. Nous l'illustrons par le schéma suivant.

Univers des symboles mathématiques	**Univers de la collection des doigts**
Phase 1 : la tablette propose : 1+2 = ? L'expression est lue par les élèves de la manière suivante : un et deux	Phase 2 : l'élève représente les nombres avec les doigts, 2 dans la main gauche et 1 dans la main droite. 
Phase 4 : l'élève dit 3	Phase 3 : l'élève peut dénombrer 1, 2, 3. ou surcompter 2, 3.

Cette première description de l'usage de la tablette dans ces nouvelles conditions montre que la tâche de l'élève est plus complexe du fait de la présence importante de la professeure. Que se passe-t-il en classe ? Nous cherchons à décrire et comprendre les actions de la professeure et des élèves dans ce contexte particulier, avec une élève ayant de grandes difficultés d'apprentissage dans tous les domaines. Comment, dans cet environnement numérique, la gestion, par la professeure, de la dialectique expression/réticence permet-elle de construire de nouvelles connaissances mathématiques en orientant son action, vers le contrat, ou vers le milieu ?

Pour tenter de répondre à ces questions, nous avons choisi de filmer les deux élèves et la professeure au cours de sept séances autour de l'application Marbotic, au mois de juin 2020.

Séances de classe

Les séances de classe s'organisent toujours de la même manière. La professeure est avec les deux élèves. L'application propose un calcul. Au départ, les élèves doivent se mettre d'accord pour proposer un résultat. La validation passe par le posé des doigts, les doigts de l'une à gauche (le premier nombre), les doigts de l'autre à droite (le deuxième nombre). Si le résultat annoncé est juste, alors le collectif a droit à un « bâton » (pendant trois séances). Tout en continuant cette alternance, la professeure ajoute une règle : chaque élève joue pour lui-même, à tour de rôle ; si le résultat annoncé par l'élève est juste, alors cette dernière a droit à un « bâton » (pendant une séance). Puis la professeure rajoute une contrainte. Si le résultat annoncé est faux, alors l'élève perd un « bâton » (pendant deux séances). La partie s'arrête à 3. Enfin, pour terminer, la professeure ajoute enfin une nouvelle règle : si l'élève parvient à donner le résultat « tout de suite », elle a droit à deux « bâtons » (pendant une séance). La partie s'arrête à 15 bâtons.

Nous allons nous intéresser à deux calculs, 2+4 et 6+1, chacun observés à deux moments différents, pour montrer l'évolution de Mado à ce jeu. Nous rappelons que cette élève rencontre des difficultés à apprendre de l'enseignement qui lui est proposé.

Le calcul « 2 + 4= ? » proposé par la tablette, vu à deux moments différents

Ce calcul « 2+4 = ? » est joué plusieurs fois au cours de sept séances. Nous allons décrire et analyser ce qui se passe lors de la première séance (c'est la première fois que les élèves jouent à ce jeu) et lors de la dernière séance. La professeure dit « deux plus quatre. Deux et quatre ». Mado propose « deux ». La professeure explique que la réponse doit être discutée entre les deux élèves : « Vous devez vous mettre d'accord ». Lenny propose alors « cinq », Mado maintient sa réponse « deux». Finalement, elles se mettent d'accord et proposent « cinq ». La professeure propose de vérifier. Mais Mado pose deux doigts et Lenny deux (cf. figure 3). Il n'y a pas de proposition de la tablette (il ne se passe rien). La professeure explique qu'il faut représenter « deux » et « quatre ». Elle précise alors que Mado doit poser « deux » et Lenny « quatre ». Finalement, les deux élèves exécutent cette demande. Le résultat « six » est affiché. Les élèves regardent l'animation : les étoiles sont énumérées pour aller jusqu'à six. Le calcul dure 1min 30s.



Figure 3 – Le calcul proposé est « 2+4= ? ». Les élèves proposent « 2 et 2 »

Au cours de la septième et dernière séance, c'est à Mado de jouer : le jeu a évolué, les élèves jouent chacune leur tour. L'application propose le même calcul « 2+4= ? ». Mado lit le calcul à voix haute « Deux et quatre ». Aussitôt elle montre « deux » avec sa main gauche et « quatre » avec sa main droite (cf. figure 4). Puis elle énumère ses doigts en s'appuyant sur son nez. Elle annonce « six » et pose les doigts. Elle gagne ainsi un « bâton ». Le calcul dure 10 secondes.



Figure 4 – Le calcul proposé est « 2+4= ? ». Mado montre « 2 et 4 » avec ses doigts

Analysons maintenant ce qui se déroule dans ces deux parties de jeu. Le premier calcul « 2+4= ? » permet à la professeure de mettre en place les règles du nouveau jeu. Les élèves savent représenter « deux » et « quatre » avec leurs doigts, elles savent lire les nombres « deux » et « quatre ». Ces connaissances mathématiques sont disponibles (contrat didactique). En appui sur ces connaissances, elles ont un problème à résoudre « que font « deux » et « quatre » ensemble ? ». Pour Mado, ce milieu n'est pas accessible. Elle voit « deux » et montre qu'elle sait reconnaître « deux ». Le «deux» semble prégnant : il s'agit du « deux » de l'énoncé et probablement du « deux » de « deux et deux, quatre ». Pour Lenny, ce milieu n'est pas directement accessible. Elle propose un nombre « cinq », juste après le quatre (comme dans la comptine numérique ?). En entendant Mado, la professeure ne se positionne pas par rapport à la réponse, mais par rapport aux échanges entre les élèves. Cette réticence conduit Mado à se rallier à Lenny. La professeure ne valide pas la réponse fausse commune. Elle se met en

retrait. Cependant, les deux élèves ne représentent pas le calcul correctement. L'application ne réagit pas au « deux et deux », parce que les doigts posés ne sont pas corrects. La professeure exprime alors ce que les élèves ont à faire (représenter « deux et quatre »). Au moment du résultat donné par l'application, les élèves regardent les étoiles, la professeure ne dit rien. Si dans le premier jeu, Mado ne peut guère agir, dans le jeu de la dernière séance, il en est tout autrement. C'est au tour de Mado de jouer. Elle joue seule : la professeure est en retrait et n'intervient pas. Mado interprète désormais le calcul « 2+4= ? » en le représentant sur ses doigts avec deux mains : deux dans la main gauche et quatre dans la main droite. Le nombre de doigts levés répond au problème posé. Elle passe par un système de représentation (Brousseau, 2004) : elle ne peut pas agir dans l'univers des nombres, elle passe par l'univers de représentation des doigts levés. Elle devient performante à ce jeu (le résultat est très rapide) : elle sait représenter la somme de deux nombres (ce qu'elle ne pouvait pas faire au début). Par contre, elle ne peut donner le résultat de l'addition qu'elle dénombre avec les doigts de un à un en utilisant un comptage-numérotage (Brissiaud, 2007). Elle ne parvient pas à voir « six » sans passer par les doigts. La professeure essaie de faire jouer un nouveau jeu « voir six rapidement », en proposant deux « bâtons ». Mais ce nouveau gain ne suffit pas à inciter Mado à jouer autrement. Autrement dit, en jouant sur le contrat didactique et non pas sur le milieu didactique, la professeure n'arrive pas à faire progresser Mado.

Le calcul « 6+1=? » proposé par la tablette, vu à deux moments différents

Au cours de la deuxième séance, l'application propose un nouveau calcul « 6+1= ? ». Mado et Lenny ont pris l'habitude de lever des doigts. Mado propose « 6 » et montre ses doigts (« 5 » dans la main gauche et « 1 » dans la main droite). Lenny montre alors sept doigts : « Là c'est 6 », elle montre avec l'autre main le septième doigt « sept » (cf. figure 5). La professeure complète « six et un, sept ». Mado enlève le six de ses doigts, regarde mais ne dit rien. Mado pose alors six doigts à gauche de l'écran avec l'aide de la professeure et Lenny en met un, seule. L'application valide le résultat. Le calcul dure 1min15s.



Figure 5 – Mado ne dit plus rien, ne fait plus rien

Au cours de la septième et dernière séance, l'application propose le calcul « 6+1= ? ». Comme nous l'avons vu, Mado doit jouer toute seule. Elle ne lit pas le calcul à voix haute. Elle explique : « Il faut faire 5 et un » et le montre avec les doigts. La professeure souhaite faire répéter ce qui est attendu. Mado est très claire : « il faut faire six et un » et montre « cinq et un ». Elle dénombre ses doigts et dit « six ». Elle est prête à poser les doigts (cinq et un). Lenny interrompt et ajoute qu'il faut une autre main. Elle explique à Mado : « Toi tu fais six » et elle prépare un doigt (cf. figure 6). Mado s'apprête à poser les cinq doigts de la main (et cache la deuxième main). Lenny explique qu'elle met « un ». Mado montre des signes de fatigue. Puis Mado dénombre tous les doigts pour annoncer le résultat « sept ». Elle le répète deux fois en regardant la professeure qui ne dit rien. La professeure pointe alors la main entière de Mado et interroge : « Tu en as combien ? ». Mado répond cinq sans hésiter. La professeure montre le sixième doigt de Mado : « et encore un, six » puis le doigt de Lenny « et encore un, sept ». Elle encourage alors Mado « C'est ce que tu avais dit ». Les deux élèves posent sans hésiter les doigts pour valider. Le calcul dure 2 min 45s.



Figure 6 – Lenny montre à Mado

Analysons maintenant ce qui se passe avec ce nouveau calcul. Nous avons vu que, au cours du premier calcul « 2+4=? », aucune des deux élèves n'utilise leurs doigts. Là, devant « 6+1= ? » (il s'agit de la deuxième séance), les deux élèves commencent à lever des doigts. Mado montre six doigts puis elle annonce le résultat « six ». Ainsi, Mado a appris à montrer la quantité attendue avec les doigts levés. Elle savait le faire avant, mais elle n'éprouvait pas seule la nécessité de le faire dans ce contexte. Les deux élèves ont un problème à résoudre « que font 6 et 1 ensemble ? ». Pour Mado, ce milieu reste encore inaccessible. Elle voit « 6 » et montre qu'elle sait reconnaître le « 6 » et montrer « 6 » avec les mains rapidement, avec les deux mains. Mais au moment de poser les doigts sur la tablette, elle veut poser une main de chaque côté. Les habitudes du jeu (depuis sept calculs) sont de placer un nombre à droite et un nombre à gauche. Pour Mado, le jeu consiste à poser les doigts d'une main à gauche et ceux de l'autre main à droite. Le milieu, constitué d'une part de « 5 et 1 » (ce qui nécessite deux mains) et d'autre part « 1 » (ce qui nécessite une troisième main) n'est pas accessible. Mado peut voir « six » comme cinq et un, lorsqu'il s'agit de montrer « 6 ». Par contre, elle ne peut pas poser « six » en posant du même côté deux mains. Le « un » levé a donc deux statuts, celui du « six » et

celui du « un ». Du point de vue de Mado, le contrat ne lui permet pas de jouer adéquatement. Nous remarquons que dans ce jeu, l'autre élève, Lenny est capable de voir « six et un », comme « cinq et deux » en utilisant les doigts. La professeure explique alors pourquoi c'est sept, en s'appuyant sur le surcomptage : « six et un, sept ». Lenny et la professeure semblent jouer cependant seules : Mado ne dit rien, ne met rien sur les doigts. Si dans ce premier jeu, Mado ne peut guère agir, dans le jeu de la dernière séance, elle a toujours besoin d'aide. En effet, nous allons analyser les actions de Mado en train de jouer quand l'application propose ce même calcul « 6+1=? ». Nous avons vu que Mado a compris le sens du jeu : elle est capable de dire que deux et quatre font six. Elle est confrontée à un nouveau problème « 6 + 1= ? ». Elle peut montrer six avec les doigts de deux mains, un avec une main et cinq avec l'autre main. Mais elle ne peut pas montrer six (cinq et un) et un avec deux seules mains. Mado ne peut s'adapter spontanément à un changement. Le contrat ne permet pas d'accommoder le milieu. Cette nouvelle difficulté semble fatiguer Mado (elle baille). Elle a montré qu'elle pouvait faire ce qui était demandé. Et là, elle ne semble pas comprendre en quoi ce calcul n'est pas comme les autres. Lenny l'aide rapidement en lui proposant une main. L'apport de la troisième main permet à Mado de résoudre le problème. Elle sait que le résultat est sept : elle le dit deux fois en regardant la professeure. Cette dernière ne permet pas aux élèves de vérifier en posant les doigts. Elle ralentit le temps didactique (Chevallard et Mercier, 1987 ; Assude, 2005). La professeure essaie d'engager les élèves vers la composition/recomposition de la somme en « 5 et un et un » en prenant appui sur les doigts. Elle le fera plusieurs fois pendant ce jeu, mais Mado ne quittera pas le comptage des doigts un à un tandis que Lenny le fera de temps en temps.

Nous pouvons relever le rôle pernicieux de l'artefact qui permet l'induction suivante : doigts de la main gauche à gauche et doigts de la main droite à droite. Cette manière de faire est valide pour les quantités inférieures ou égales à cinq. Par contre, elle joue alors contre la pratique pour les quantités supérieures ou égales à six : main gauche et main droite à gauche du trait et deuxième levée de doigts à droite du trait.

Discussion - Conclusion

Cette étude exploratoire met en lumière l'action de la professeure et des élèves dans un environnement assez contraint d'un exerciseur sur une tablette ,. Il s'agit de faire de nombreuses additions rapidement. La professeure s'appuie sur les calculs donnés par l'application. Elle ne peut donc pas choisir les sommes proposées, par exemple en fonction de sa connaissance des élèves. Elle doit donc agir en fonction de la somme proposée par l'exerciseur, en relation avec les capacités de l'élève. Mado a appris au cours de ces séances : elle sait calculer des sommes de deux nombres inférieurs à 5 en prenant appui sur les doigts, en énumérant un à un les doigts. Les actions de la professeure portent d'abord sur des éléments, vus comme un contrat que l'on pourrait expliciter ainsi : puisque l'application demande à placer les doigts sur l'écran, il suffit de préparer les doigts et de dénombrer les doigts levés. Cette anticipation n'est pas spontanée (cf exemple 1 séance 1) puis elle devient une habitude (cf exemple 1 séance 7). Autrement dit, nous pourrions dire que cet exerciseur permet un

entraînement de lecture de l'écriture chiffrée, de représentations des nombres par une collection intermédiaire, de représentation d'un tout composé de deux parties. Par contre lorsque la professeure essaie d'engager d'autres stratégies (surcompter, décomposer/recomposer par exemple), Mado ne parvient pas à les utiliser. Ainsi, le milieu organisé autour de l'exerciseur Marbotic reste pauvre, malgré les incitations de la professeure.

Regardons cette élève Mado. Grâce à ces différentes expériences, elle a appris à voir, dans un contexte de représentations intermédiaires, ce qu'était une somme, sous certaines conditions : chaque terme doit être inférieur à 5. C'est peu, certes. Dans le même temps, elle a acquis une aisance avec ces petits nombres : le calcul « 2+4= ? », dans ce contexte, est aisément résolu. Ces différentes réussites lui permettent d'affronter les difficultés : elle n'a aucune réticence à être aidée. Après des échanges avec la professeure, nous avons appris que cette élève avait déjà expliqué à de nombreuses reprises depuis le début d'année, qu'elle ne voulait pas s'engager parce qu'elle savait par avance qu'elle n'arriverait à rien. Pour cette élève, même si les connaissances mathématiques travaillées sont moindres, ne peut-on pas dire qu'elle a joué le jeu ? L'application numérique comme support de motivation (Amadieu et Tricot, 2014) et les actions de la professeure l'ont engagée vers des habitudes d'action (elle représente les collections de doigts) et vers des connaissances nouvelles (la somme de deux nombres). Elle accepte d'être confrontée à un problème, qui n'est pas directement accessible, un milieu résistant.

Nous savons qu'il est nécessaire de laisser aux élèves une liberté du choix des procédures et de renoncer provisoirement à une capacité d'intervenir directement pour aider les élève à accomplir une tâche (Margolinas et Wozniak, 2012). La situation élaborée par la professeure ne peut se suffire à elle-même dans le cadre de Marbotic. Dans l'usage de ce logiciel, la question se pose quant au comptage avec les doigts et dépasse largement le contexte technologique de l'usage de la tablette. Se pose aussi la question de la somme, dans la mesure où la collection des deux collections n'apparaît pas à l'écran. Cette connaissance peut-elle être réellement travaillée avec un tel logiciel ? Comme la professeure sait que le logiciel ne permet pas à lui seul d'y parvenir, elle fait retravailler ces calculs de manière systématique. Dans le même temps, elle fait travailler des situations d'énumération (Margolinas, Wozniak et Rivière, 2015), des situations d'anticipation du nombre (Margolinas et Wozniak, 2012) et des situations de la progression ACE en maternelle (Joffredo-Lebrun, 2016 ; Athias, Henry et Forest, 2021). Elle ne fait pas utiliser le signe d'égalité, en dehors de cet usage contraint du logiciel.

Références

Amadieu, F & Tricot, A. (2014). *Apprendre avec le numérique, Mythes et réalités*. Édition Retz.

Assude, T. (2005). Time management in the work economy of a class, a case study: integration of cabri in primary school mathematics teaching, *Educational Studies in Mathematic, 59*, 183-203.

Assude, T. & Mercier, A. (2007). L'action conjointe professeur-élève dans un système didactique orienté vers les mathématiques, Dans G. Sensevy & A. Mercier (Eds). *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (pp. 153-185). Rennes : Presses Universitaires.

Athias, F., Henry, A. & Forest, D. (2021). Le jeu des annonces en maternelle : questions après une observation dans un milieu spécifique. Dans M-J. Gremmo (Ed.). *Pour une reconstruction de la forme scolaire* (vol. 2 ; pp. 13-30). Actes du Deuxième Congrès international de la TACD, théorie de l'action conjointe en didactique.

Besnier, S. & Bueno-Ravel, L. (2014). Usage des technologies en mathématiques à l'école maternelle : le travail documentaire des enseignants. *Review of Science, mathematics and ICT Education, 8* (1), 63-80.

Besnier, S. & Gueudet, G. (2016). Usages de ressources numériques pour l'enseignement des mathématiques en maternelle : orchestrations et documents. *Perspectivas da Educação Matemática* – INMA/UFMS – v. 9, n. 21, 978-1003.

Brissiaud, R. (2007). *Premiers pas vers les maths, les chemins de la réussite à l'école maternelle*. Editions Retz.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2004). Les représentations : étude en théorie des situations didactiques. *Revue des sciences de l'éducation, 30* (2), 241–277.

Chevallard, Y. & Mercier, A.(1987). Sur la formation historique du temps didactique, Publication de l'IREM d'Aix-Marseille, nº 8, Marseille.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221–266.

Collectif Didactique Pour Enseigner. (2019). *Didactique Pour Enseigner*. Rennes : PUR.

Joffredo-Le Brun, S. (2016). Enseignement et apprentissage des mathématiques au CP : continuité de l'expérience des élèves et systèmes de représentation, un exemple. Questions Vives [En ligne], 25, mis en ligne le 05 septembre 2016.

Margolinas, C. & Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique***.** Bruxelles : De Boeck.

Margolinas, C., Wozniak, F., & Rivière, O. (2015). Situations d'énumération et exploration des collections. *Recherches En Didactique Des Mathématiques, 35*(2), 183-220.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.

Trouche, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des mathématiques, 25*(1), 91-138.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple, les structures additives. *Grand N, 38*, 21-40.

Titre: Pratiques enseignantes de la multiplication auprès d'enfants présentant des signes d'autimes dans six écoles de la commune de Cocody

Auteurs: ATTA Kouadio Yeboua Germain et DIOMANDE Mariam

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 807 - 819

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Pratiques enseignantes de la multiplication auprès d'enfants présentant des signes d'autimes dans six écoles de la commune de Cocody

ATTA[1] Kouadio Yeboua Germain – DIOMANDE[2] Mariam

Résumé – Notre sujet portant sur les pratiques enseignantes auprès des enfants présentant des signes d'autisme pose la problématique de la prise en charge pédagogique et didactique des élèves à profil autiste en situation d'apprentissage au primaire. L'étude vise à expliciter les pratiques enseignantes à des enfants autistes au primaire. Les enquêtes et les observations menées révèlent qu'une prise en charge communicationnelle et rapprochée suffisante entre l'enseignant et l'apprenant à profil autiste améliore la performance de ce dernier dans les situations d'enseignement-apprentissage.

Mots-clefs : Pratiques enseignantes, enfants à profil autiste, apprentissage, multiplication, pratiques de communication

Abstract – Our subject on teaching practices with autistic children raises the issue of the pedagogical and didactic care of children with an autistic profile in learning situations in primary school. The study aims to clarify the teaching practices of autistic children in primary school. The surveys and observations carried out reveal that sufficient communication and close support between the teacher and the autistic learner improves the performance of the latter in teaching-learning situations.

Keywords: Teaching practices, children with an autistic profile, learning, multiplication, communication practice

1. LAREDI, Ecole Normale Supérieure d'Abidjan, Côte d'Ivoire, leroiyeb@gmail.com

2. Inspecteur Pédagogique de CAFOP (IPC), Côte d'Ivoire, mdiomande25@yahoo.fr

Introduction

L'éducation joue un rôle déterminant étant donné qu'elle fournit une qualité de travail indispensable à la croissance économique. La loi N°2015- 635 du 17 septembre 2015 portant modification de la loi 95-696 du 7 septembre 1995 relative à l'enseignement en Côte d'Ivoire institue l'obligation scolaire à tous les enfants sans distinction âgés de trois (3) à seize (16) ans. L'article 17 nouveau de cette loi fait obligation formelle aux parents de scolariser et de maintenir leurs progénitures à l'école jusqu'à l'âge maximum ci-dessus indiqué quels que soient le sexe, le rang social des parents et/ou le handicap de l'enfant. La prise en compte des handicaps dans cette scolarisation obligatoire s'inscrit dans une démarche inclusive de l'école. Pour tenir compte de cette approche incluse, un module de formation relative à l'éducation inclusive en formation initiale des enseignants du primaire est institué dans leur programme de formation. Ce module vise à développer les compétences pédagogiques et didactiques des enseignants afin de donner une égale chance de réussite à tous les enfants scolarisés au cycle primaire. En Côte d'Ivoire, malgré la présence de structures spécialisées privées telles que « *la page blanche* », le « *centre de rééducations sainte Marie Madeleine* » et les « structures publiques spécialisées, comme l'école des sourds- muets, l'institut des aveugles » existent pour prendre respectivement en charge la formation des enfants atteints de handicaps tels que la trisomie 21, la surdité, la déficience visuelle, etc. Mais, aucune de ces structures spécialisées n'intègre véritablement l'autisme dans son dispositif de formation. En 2017, au moins quarante- huit mille (48.000) enfants en situation de handicap étaient hors du système éducatif selon l'Ecole Nationale de Statistique et d'Economie Appliquée (ENSEA), y compris les enfants autistes. Certains de ces enfants à profil autiste se retrouvent néanmoins dans le système éducatif sans que leurs enseignants, bien qu'aidés par des assistants de vie scolaire (AVS), ne reçoivent de formation adéquate pour leur prise en charge convenable dans des classes contenant des enfants sans handicap. Il y a donc nécessité pour ces enseignants de disposer de ressources et d'outils pour la prise en charge réelle des enfants en situation de handicap, précisément l'encadrement de ceux atteints des de Troubles du Spectre Autistique (TSA). Selon Chakrabarti et Fombonne (2005), les troubles du spectre autistique (TSA) sont reconnus comme les troubles neurologiques les plus répandus. Ils touchent les familles de toutes origines et de toutes couches sociales. Les TSA sont plus diagnostiqués chez les garçons que chez les filles, avec un ratio de quatre garçons pour une fille au niveau mondial (Chakrabarti et Fombonne, 2005).

En Côte d'ivoire, les centres de prise en charge comptent de plus en plus d'enfants avec TSA (Journal Fraternité Matin n°15992 du 03 Avril 2018, rubrique Santé). En 2020, dans le Centre d'Action Médico Psycho-Social de l'Enfant (CAMPSE), sur un effectif de quatre- vingt – dix- neuf (99) enfants en situation de handicap, soixante- six (66) enfants présentent des TSA, soit environ 66,66%. La mise en place de l'éducation inclusive sur le terrain est complexe par manque de formation des enseignants à charge de la conduire. Les enjeux pédagogiques et didactiques sont vastes. L'autisme est un handicap encore mal connu et les enseignants ne sont pas préparés à la gestion de ce type de handicap dans leurs pratiques. La présente étude porte sur les pratiques enseignantes de la multiplication auprès d'enfants à profil autiste dans six écoles primaires de la commune de Cocody (Abidjan). Elle se

veut un cadre d'analyse pédagogique et didactique des situations d'enseignement- apprentissages mathématiques sur la multiplication avec retenue en classe primaire. Des interrogations semblent utiles. Quelles sont les modalités d'enseignement de la multiplication à des enfants à profil autiste en classe de primaire ? En quoi les pratiques enseignantes affectent-elles positivement le rendement des enfants à profil autiste en multiplication ?

L'objectif de recherche visé est d'identifier les types de pratiques qui favorisent qualitativement le rendement des enfants à profil autiste en multiplication. De cet objectif, nous postulons que les pratiques de communication affectent positivement les productions des enfants à profil autiste en multiplication.

Quelques repères théoriques

Pédagogie différenciée, outil d'inclusion des enfants autistes

Selon l'Office National d'Information sur les enseignements et les Professions (ONISEP) (2022), l'autisme est un trouble du développement précoce dans lequel la communication et les interactions sociales sont perturbées. La personne autiste manifeste des intérêts restreints et/ou s'adonne à des activités routinières, stéréotypées et répétitives. La sévérité et la forme des troubles varient énormément d'un individu à l'autre. L'enfant autiste se place souvent en retrait et fuit tout contact (même visuel) avec ses camarades du même âge et présente une très grande résistance au changement. Le développement du langage est retardé. Odier-Guedj et Gombert (2012) proposent de développer des pratiques collaboratives en classe contenant des enfants en situation de handicap pour maximiser l'interaction pédagogique et didactique au travers des gestes de guidance orientés vers la compréhension des consignes. Cette collaboration est bien possible avec tous les élèves à travers des médiations différentes et ajustées selon le handicap.

Schelles et Dayan (2015) se préoccupent de la manière dont l'enfant en situation de handicap se voit et voit autrui (l'enseignant ou ses pairs) au cours du processus d'apprentissage. Cette relation intra ou interpersonnelle dépend aussi de la manière dont l'enfant handicapé pense les liens avec ses pairs. Mal gérée, cette double relation peut entamer négativement la démarche inclusive des enfants handicapés dans le processus d'apprentissage, car ces derniers ne comprennent pas toujours ce que l'on enseigne. La démarche inclusive en situation d'apprentissage s'inscrit dans une logique sociale. Gardou (2012) reconnait que la réussite de la scolarisation d'un enfant en situation de handicap nécessite de changer radicalement le fonctionnement de la société. Pour Mazereau et Orion (2021), les situations d'inclusion générées en milieu ordinaire peuvent être l'occasion d'une redéfinition de périmètre des savoirs parentaux, des normes ordinaires et des savoirs spécialisés.

En milieu scolaire, les caractéristiques spécifiques et variées de l'enfant autiste demandent une prise en charge différenciée de ce dernier dans les situations de construction de savoirs. Pour cette péda-

gogie différenciée désigne l'ensemble des actions et des méthodes diverses susceptibles de répondre aux besoins des apprenants. Elle se définit aussi comme une pédagogie qui tient compte des caractéristiques personnelles et sociales des enfants. Aston (1983) préconise des structures facilitant cette différenciation, une évaluation des performances qui soit formative et non sélective, une pédagogie du projet qui fasse une large place à l'interdisciplinarité, une individualisation de l'enseignement tout en privilégiant l'enfant, ses besoins et ses possibilités. Elle se différencie des autres pratiques en proposant des situations d'apprentissage et des outils variés ; ouvrant ainsi à un maximum d'enfants les portes du savoir, du savoir-faire, du savoir être. Pour Laurent (2001), il est important de souligner qu'il ne s'agit pas de différencier les objectifs, mais de permettre à tous les élèves d'atteindre les mêmes objectifs par des voies différentes.

Difficultés d'apprentissage de l'enfant autiste

Dutillieux (2008) décrit une grille de difficultés dans l'enseignement des mathématiques à des enfants autistes. Au niveau de la conceptualisation, l'apprenant autiste prend difficilement en compte une propriété non perceptive par défaut d'expérience vécue sur les objets du monde environnant. D'où l'impossibilité à donner du sens aux mots qui désignent les concepts, leurs représentations analogiques ou symboliques. Dans le domaine numérique, bien qu'il dispose d'une relative aisance dans les désignations orales et écrites des nombres, l'apprenant autiste peut manquer de donner du sens aux opérations ou à une quantité. L'incapacité à modéliser une situation génère une difficulté à anticiper et à élaborer des stratégies de résolution de problèmes par défaut de formulation de procédures personnelles. A travers des études de cas, Dutillieux (2008) montre que, quel que soit le problème qui lui est posé, l'apprenant autiste attend qu'on lui fournisse les éléments de modélisation pour s'en saisir et les utiliser. Le problème ne semble réellement prendre sens pour lui que dans le modèle qui lui est fourni.

Enseignement de la multiplication à l'école primaire en contexte ivoirien.

La multiplication est l'une des quatre (4) opérations enseignées à l'école primaire en Côte d'ivoire. Son enseignement systématique part du CP2 au CM2. Son étude comporte quatre (4) étapes qui sont l'étude du sens, l'étude des propriétés, l'acquisition de la technique opératoire sur les nombres entiers naturels et l'extension de cette opération aux autres nombres (décimaux, rationnels, sexagésimaux). L'acquisition du sens de la multiplication se fait dans des situations diverses tirées à de la vie courante. Le sens de la multiplication est présenté sous l'aspect ensembliste et l'aspect fonctionnel. L'aspect ensembliste est abordé sous forme d'addition itérée ou répétée et sous forme de produit cartésien de cardinaux d'ensembles équipotents (ayant le même nombre d'éléments). L'aspect fonctionnel est abordé dans les situations où il est demandé à l'apprenant de trouver le double, le triple… L'étude des propriétés de la multiplication est faite à travers des situations qui illustrent la commutativité, l'associativité, l'élément neutre, l'élément absorbant, la distributivité de la multiplication par

rapport à l'addition. La technique opératoire de la multiplication est abordée à partir de la classe de CEI sur les nombres entiers naturels. Elle part de la multiplication sans retenue à la multiplication avec retenue. Cette technique opératoire se décline en phases de manipulation, de schématisation et d'abstraction (partielle et totale). L'étape terminale concerne l'extension de la technique opératoire aux autres nombres où l'algorithme de base utilisé sur la multiplication des entiers naturels est « transposé » aux spécificités de ces autres nombres convoqués que sont les décimaux, fractions, sexagésimaux.

Cadre méthodologique

Présentation du terrain de recherche

La présente étude a été menée dans la direction régionale de l'éducation nationale (DREN) Abidjan 1. Elle s'est déroulée dans les quatre (4) circonscriptions de l'enseignement préscolaire et primaire (IEPP) de cette DREN, à savoir, IEPP « Blockauss », IEPP « Akouedo », IEPP « Attoban » et IEPP « Deux-Plateaux ». Les écoles concernées sont EPC « Le Petit baobab », EPC « Joseph Epoux », Groupe scolaire « Saint Marc », EPP « Cocody Est », EPC « Notre Dame des Deux- Plateaux » et le Groupe scolaire « Madeleine Daniélou ».

Population et échantillonnage

La population ciblée par cette enquête est composée d'enseignants titulaires de classes du CP2 au CM1, ayant reçu au moins un enfant à profil autiste dans leur classe et les enfants présentant des signes autistes des écoles primaires ordinaires choisies. L'échantillonnage porte sur trente-six (36) enseignants et dix-neuf (19) enfants à profil autiste. Ces enseignants et élèves à profil autiste enquêtés dans les quatre (4) inspections de l'enseignement préscolaire et primaire sont choisis de manière raisonnée.

Techniques de recherches et outils de collecte des données.

L'étude s'est faite à travers une enquête par questionnaire adressé aux enseignants du primaire dans les écoles choisies et une observation de leurs pratiques de classe comportant des enfants à profil autiste au sein du groupe-classe dans l'apprentissage de la multiplication. Les outils de collecte de données utilisés sont le questionnaire et une grille d'observation. Pour conduire notre enquête, le questionnaire utilisé se structure en trois (3) parties. La première partie correspond à une présentation de l'objectif de l'enquête. La deuxième partie est consacrée à l'identification des personnes enquêtées. La troisième partie correspond à un recueil d'informations relatives aux connaissances sur l'autisme et les stratégies mises en œuvre pour l'apprentissage de la multiplication auprès des enfants à profil autiste. Ces questions ont été menées autour de quatre axes. Il s'agit de questions sur les

pratiques enseignantes et motivationnelles développées en présence d'enfants à profil autiste, puis des moyens utilisés comme support de la situation d'apprentissage et des modalités d'évaluation dans une classe contenant un enfant à profil autiste. Une séance sur la multiplication dans les classes ordinaires dont l'effectif contient au moins un enfant à profil autiste a été menée par chaque enseignant. Les informations récoltées ont été consignées dans une grille d'observation qui se présente sous forme d'un tableau à deux (02) colonnes. La première colonne regroupe les observables de types pédagogiques (dispositions classiques ou spécifiques, félicitations, appréciations, récompenses en nature, valorisation des productions) et de types didactiques (exploitation de textes écrits, d'images, d'histoires racontées ou dramatisées, vidéos, consignes collectives ou spécifiques aux apprenants à profil autiste, exercices communs ou spécifiques, évaluations communes ou différenciées. La deuxième colonne comporte les commentaires ou constats.

Méthodes de recherche

Dans le cadre de notre étude, deux méthodes d'analyse de données ont été choisies. Ce sont la méthode qualitative et la méthode quantitative. La démarche qualitative a permis d'analyser les projets d'enseignement (préparation écrite), la qualité de l'animation de classe à travers la qualité des moyens motivationnels et d'évaluation (productions orales et écrites des enfants à profil autiste) de ces classes. L'étude quantitative présente des fréquences des réponses aux différents indicateurs dégagés relativement aux items du questionnaire et aux constats issus des observations de séances sur la multiplication.

Procédure de collecte d'analyse et des données

Après observation d'une animation de classe, tous les élèves sont soumis à une évaluation et l'enseignant vérifie et remet la production des enfants à profil autiste sur des exercices de multiplication. Pour analyser leurs productions, trois critères ont été choisis. Une production est réussie lorsque l'apprenant fait une bonne disposition et a un résultat correct. Une production est partiellement réussie quand l'élève a un résultat correct mais une mauvaise disposition. Une production non réussie correspond à une disposition incorrecte et un résultat erroné sur la technique opératoire.

Résultat

Présentation des résultats du questionnaire

Les différentes réponses du questionnaire ont été collectées par item dans des grilles présentées comme ci-dessous.

Observables	Fréquences
Respect de la séance prévue dans le découpage de la leçon	30
Prise en compte des habiletés visées par la séance	29
Prise en compte des spécificités d'apprentissage des apprenants autistes	6

Tableau 1 – Éléments annoncés dans la préparation écrite

Tous les enseignants respectent la répartition des séances proposées par le manuel officiel. Ils abordent toutes les habiletés prévues pour les séances. Les temps institutionnels prévus ont été entamés et dépassés par tous les enseignants. Le tableau présente les résultats des pratiques des enseignants lors de la préparation des séances. Une forte majorité (83%) des enseignants respecte les instructions officielles dans leurs choix. Par contre, une très faible majorité des enseignants (1/5) intègre les spécificités des apprenants à profil autiste dans les préparations écrites.

Résultats des observations

Statistiques des types supports exploités en situation d'apprentissage

Types de supports didactiques	Fréquences
Texte écrit au tableau	26
Texte lu au tableau	07
Image affichée au tableau	09
Histoire racontée	08
Un fait dramatisé	06
Un message audio à écouter	04

Tableau 2 – Fréquences des types de supports didactiques utilisés

Les textes écrits au tableau constituent le type de support didactique le plus utilisé par la majorité des enseignants (72,22%). Les textes lus, les images affichées, les histoires racontées ou dramatisées, les messages audio sont utilisés à minima entre 11% et 25% dans leurs pratiques d'exploitation des situations d'apprentissage.

Fréquences des modalités motivationnelles

Modalités motivationnelles	Fréquences
Félicitations	25
Appréciations	36
Récompenses en nature	4
Valorisation des productions	10
Usage de câlins	4

Les appréciations constituent la modalité la plus utilisée par tous les enseignants observés pour motiver les apprenants à profil autiste dans leurs pratiques de classe. Environ 7/10 parmi eux utilisent les félicitations dans leurs pratiques motivationnelles. Moins du tiers des enseignants utilise les

récompenses en nature, les câlins et la valorisation des productions pour motiver leurs apprenants à profil autiste. Les récompenses en nature portent essentiellement sur les morceaux de craie et des stylos à bille.

Fréquences des pratiques évaluatives observées

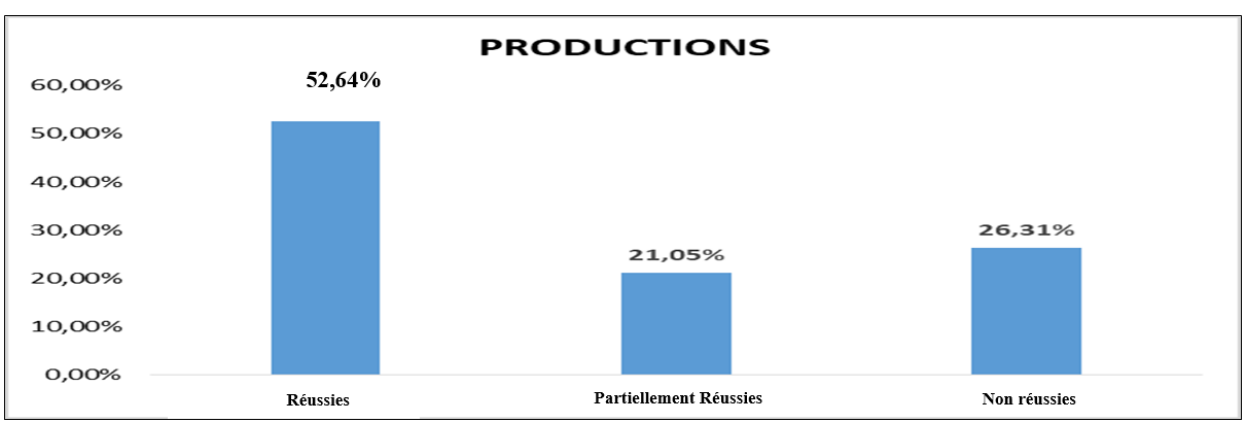
Pratiques d'évaluation observées	Fréquences
Exercice commun à toute la classe	36
Exercice commun aux enfants à profil autiste	00
Consigne commune à toute la classe	36
Consigne reprise aux enfants à profil autiste	00
Explication commune à toute la classe	36
Explication différentiée aux enfants à profil autiste	15

Tableau 4 – Fréquences des pratiques évaluatives observées

Tous les enseignants observés proposent des exercices communs à tous leurs élèves (à profil autiste et non autiste) sans des consignes reprises spécifiquement aux autistes pour une meilleure compréhension de la part de ces derniers. Les explications ne sont non plus spécifiées pour les autistes.

Présentation des résultats des productions

Le graphique présente les statistiques des productions des apprenants :



Graphique 1 - Statistiques des productions des apprenants

Plus de la moitié des enfants autistes (10 sur 19, soit 52,64%) a réussi les exercices. Environ 4 sur 19, soit 21,05%) ont partiellement réussi. Alors que seulement, 5 sur 19, soit 26,31%, n'ont pas réussi leur production. Les apprenants à profil autiste ayant réussi leurs productions sont ceux qui ont été suffisamment félicités et encouragés pendant les séances d'apprentissages. Les consignes leurs sont reprises en continu lors des évaluations. Ceux n'ayant pas été motivés n'ont pu achever leurs productions avec qualité. Ces derniers cherchaient à copier sur leurs voisins. Certaines enseignantes ont été impatientes avec les apprenants présentant des lenteurs. Les consignes n'ont pas été reprises pour eux. Il s'agit dans ce cas de ceux ayant partiellement achevé leurs productions. Les productions inachevées portent essentiellement sur les calculs bien que la disposition soit correcte. Les productions erronées portaient à la fois sur la disposition et les calculs

Interprétation et discussion des résultats

Le guide d'exécution est le seul outil pédagogique sur lequel les enseignants s'appuient pour élaborer leur préparation écrite. Cet outil pédagogique ne leur fournit aucune information pour permettre une bonne préparation écrite en faveur des enfants à profil autistes intégrés dans leurs classes. Les résultats révèlent que la valorisation des productions n'est pas une pratique de motivation courante car seulement 22.22% et 3/10 des enseignants enquêtés et observés la pratique. Ce qui montre qu'ils ne prennent pas suffisamment en compte le handicap d'autisme dans leurs pratiques. La plupart des enfants à profil autiste ont un développement langagier inhabituel. La valorisation de leurs productions est un moyen motivationnel important pour les emmener à mieux s'exprimer et avoir confiance en eux. Les moyens utilisés comme support de la situation d'apprentissage ne sont pas appropriés. Il s'agit là aussi d'une méconnaissance du handicap d'autisme. L'enfant autiste est avant tout visuel. Les images, un fait dramatisé, les projections d'un film, une représentation (dessin, schéma) pourraient les aider à mieux comprendre la situation d'apprentissage s'ils sont « accompagnés » comme le propose Dutillieux (2008) par l'écoute et la reprise permanente des consignes. Ce qui relève d'une pratique communicationnelle par la reformulation des consignes et une écoute personnalisée des apprenants à profil autiste. Ce qui répond à notre postulat selon lequel les pratiques de communication affectent positivement les productions des élèves présentant des signes autistes. Les processus d'évaluation des enfants à profil autiste ne sont pas pris en compte ni au niveau de la formulation des consignes, des explications, ni dans le choix des exercices proposés. Cependant, il ressort que dix (10) enfants sur dix-neuf (19) enquêtés, soit 52,64%, ont réussi leurs évaluations. Ce taux s'explique par la présence auprès de ces enfants à profil autiste des assistances de vie scolaire qui les accompagnent. En effet, les assistances de vie scolaire sont au nombre de dix-huit (18) pour vingt-deux (19) enfants à profil autiste enquêtés. Seul quatre (04) enfants à profil autiste ne sont pas accompagnés. Le rôle de l'assistance de vie scolaire est d'aider l'enfant à s'intégrer au sein de l'école et du groupe classe et c'est un relais qui reformule, explique les consignes dans un langage approprié et adapté à l'apprenant à profil autiste.

Au vu des résultats de notre recherche, il ressort que les enseignants des écoles primaires ordinaires n'ont pas de supports pédagogiques et didactiques et les connaissances sur le handicap (l'autiste). L'étude de Flavier et Clément (2013) sur les connaissances des enseignants concernant les élèves avec troubles du spectre de l'autisme (TSA), met en évidence le faible niveau de connaissance des enseignants concernant ce public. Aussi, selon nos résultats, la méconnaissance de la spécificité des enfants TSA amène les enseignants à des pratiques enseignantes inadaptées telles que la non- valorisation de leur production, le choix de situation d'apprentissage et d'exercices d'évaluations à inadaptés, ainsi que des consignes mal formulées. C'est en cela qu'une pédagogie différenciée qui s'appuie sur la singularité des apprenants devrait permettre l'accès à des outils communs. Il faut prendre en compte la spécificité des enfants à profil autiste en matière de communication, en matière de difficultés à gérer plusieurs stimuli simultanément et de difficultés à planifier et à conduire une stratégie de résolution. Cette proximité didactique et pédagogique pourrait être une source de motivation de l'apprenant, une clé didactique comme le souligne Nebout-Arkhurst (2013). Chevallard (1991) qui affirme que la transposition didactique interne fait passer le savoir à enseigner en savoir réellement enseigner dans les classes conseille à l'enseignant de développer une ingénierie didactique capable de mieux traduire les contenus des programmes en contenus d'apprentissage prenant en compte les besoins de tous ses élèves. Une fois formé, l'enseignant, selon Perez et Assude (2014), saura différencier le geste générique du geste spécifique permettant ainsi une pratique enseignante plus inclusive.

Conclusion

Notre étude sur les pratiques enseignantes auprès des enfants présentant des signes autistes en multiplication dans six écoles primaires de la commune de Cocody est un sujet d'actualité pertinent, car le système éducatif, qu'il soit à l'échelle mondiale ou nationale, est soumis à une nouvelle donne, celle de l'éducation inclusive. Cette dernière consiste à faire former tous les élèves sans exception. Dans le système éducatif en Côte d'Ivoire, de nombreux d'élèves à profil autiste ne sont pas pris en compte dans les écoles ordinaires. Or, l'éducation est la voie pour que l'enfant handicapé, plus précisément celui atteint des Troubles du Spectre Autistique (TSA) intègre la société. L'enjeu de l'école inclusive est sociétal dans un cadre international avec un cadre institutionnel partagé par tous. L'idée est de sortir les enfants avec TSA de la marginalisation sociale, du rejet scolaire, faire en sorte qu'ils se sentent bien, afin de participer à la vie sociétale et communautaire en fonction de leurs capacités.

Références

Aston, J.P. (1983). La pédagogie différenciée. Consulté en ligne sept 22 https://pedagogie.ac-strasbourg.fr/fileadmin/pedagogie/physiquechimie/La_pedagogie_differenciee_01.pdf

Chakrabarti, S. & Fombonne, E. (2005). Troubles envahissants du développement au préscolaire. Enfants : confirmation d'une prévalence élevée. *Le Journal américain de psychiatrie, 162*(6), 1133-1141. https://doi : 10.1176/appi.ajp.162.6.1133.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigner*. Grenoble : Pensée sauvage Editions.

Dutillieux, G. (2008). Enseignement des mathématiques et enfants autistes. *Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle, 41*(1), 65-90. https://doi10.3917/lsdle.411.0065.

Flavier, E. & Clément, C. (2014). Connaissances et besoins de formation des enseignants du second degré concernant les Troubles du Spectre de l'Autisme. *La Nouvelle Revue de l'Adaptation et de la Scolarisation, 65*, 95-112.

Gardou, C. (2012). *La société inclusive, parlons-en ! Il n'y a pas de vie minuscule*. Toulouse Erès.

Laurent, S. (2001). Pédagogie différenciée. Consulté en ligne le 25 septembre 2022 sur le site http://recherche.aix-mrs.iufm.fr/publ/voc/n1/laurent2/index.html

Legrand, L. (1995). *Les différenciations de la pédagogie*. Paris : PUF.

Mazereau, P. & Orion, G. (2021). Handicap ou besoin éducatif particulier, comparaison des usages de ces notions dans huit pays européens en rapport avec l'éducation inclusive. *La nouvelle revue - Éducation et société inclusives, 91*, 199-212. https://doi.org/10.3917/nresi.091.0199.

Ministère de l'éducation nationale (2017). *Mathématique CM2. Ecole et Développement*. Abidjan : NEI-CRDA.

Ministère de l'éducation nationale (2017). *Mathématique CE1. Ecole Nation et développement*. Abidjan : NEI-CEDA.

Ministère de l'éducation nationale (2017). *Mathématique CE2. Ecoles, Nation et développement*. Abidjan : NEI-CEDA.

Ministère de l'éducation nationale (2017). *Mathématique CM1. Ecoles, Nation et développement*. Abidjan : NEI-CEDA.

Ministère de l'éducation nationale (2017). *Mathématique CP2. Ecoles, Nation et développement*. Abidjan : NEI-CEDA.

Nebout-Arkhurst. P. (2013). *La motivation scolaire. Une clé didactique pour l'apprentissage*. Abidjan : Maylis.

Odier-Guedj, D. & Gombert, A. (2012). Pratiques collaboratives en classe : amélioration de la compréhension des consignes chez des élèves dyslexiques et autistes. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation, 57* (1), 117- 130.

Office National d'Information sur les enseignements et les Professions (ONISEP) (2022). Scolarité et autisme. Définition de l'autisme. Consulté sur le site : https://www.onisep.fr/Formation-et-handicap/mieux-vivre-sa-scolarite/Par-situation-de-handicap/Scolarite-et-autisme/definition-de-l-autisme le 6 août 2022 à 22h 42 min.

Perez, J.M. & Assude, T. (2014). Savoirs professionnels et pratiques inclusives. Effets des contrats et systèmes sémiotiques. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation, 65*, 5-9.

Scelles, R. & Dayan, C. (2015). L'enfant en situation de handicap : désir de savoir et apprentissage avec les pairs. *Revue Cliopsy, 13*, 7- 25.

Titre: Pratiques inclusives et accompagnant d'élèves en situation de handicap (AESH) : une étude de cas en géométrie au collège

Auteur: DUPRE Frédéric

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 820 - 833

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Pratiques inclusives et accompagnant d'élèves en situation de handicap (AESH) : une étude de cas en géométrie au collège

DUPRE[1] Frédéric

Résumé – En France, les élèves reconnus institutionnellement handicapés peuvent bénéficier de compensations pour favoriser leur scolarisation. La compensation la plus fréquente est l'attribution à l'élève d'un accompagnant d'élève en situation de handicap (AESH). À travers une étude de cas, nous proposons de mettre en évidence des obstacles et des conditions favorables à l'accessibilité didactique au sein du système d'enseignement comportant un système didactique auxiliaire aux côtés du système principal.

Mots-clefs : système didactique auxiliaire, système didactique principal, AESH, accessibilité didactique, pratiques inclusives

Abstract – In France, students recognized as institutionally disabled can benefit from compensation to promote their schooling. The most frequent compensation is the allocation to the student of a support for a student with a disability (AESH). Through a case study, we propose to highlight obstacles and favorable conditions for didactic accessibility within the education system comprising an auxiliary didactic system alongside the main system.

Keywords: auxiliary didactic system, main didactic system, AESH, didactic accessibility, inclusive practices

1. Université Paris Lumières INSHEA (UR Grhapes), France, frederic.dupre@inshea.fr

Introduction

En France, les élèves reconnus institutionnellement handicapés peuvent bénéficier de compensations pour favoriser la scolarisation en milieu ordinaire dans le cadre de pratiques dites inclusives. La compensation la plus fréquente est l'attribution à l'élève d'un accompagnant d'élèves en situation de handicap[2] (AESH). Le nombre d'élèves actuellement dans cette situation s'élève à 319870[3] (Dauphin & Prouchandy, 2021). Ils sont accompagnés par 176070 AESH[4]. Cet accompagnement peut être individualisé (au sein de la classe l'AESHi, s'occupe d'un seul élève notifié), mutualisé (l'AESHm peut s'occuper de plusieurs élèves notifiés dans une même classe) ou encore lié à un dispositif ULIS[5] (l'AESHco s'occupe des élèves qui bénéficient du dispositif ULIS). Ces données quantitatives introductives sont à mettre en regard avec un nombre limité d'études qui se sont intéressées à ces situations d'accompagnement (Suau et al., 2017; Toullec-Théry, 2019; Toullec-Théry & Assude, 2012; Toullec-Théry & Brissiaud, 2012).

Nous souhaitons dans cette communication nous intéresser à la question suivante : quelles sont les conditions pour que l'accompagnement mis en place soit en mesure de faciliter l'accessibilité didactique ? Nous pensons en effet que dans ces situations le système d'enseignement se trouve complexifié car il comprend dans un même espace-temps un système didactique principal (SDP) et un système didactique auxiliaire (SDA). Nous faisons l'hypothèse que l'articulation entre ces deux systèmes est nécessaire pour que le système auxiliaire puisse jouer pleinement sa fonction d'aide vis-à-vis du système principal. Nous proposons d'explorer cette question à travers une étude de cas en géométrie en classe de 6e. Ce travail est adossé à un double cadre théorique : une approche clinique du didactique (Leutenegger, 2000, 2009; Schubauer-Leoni & Leutenegger, 2002) associée à des outils issus de la théorie anthropologique du didactique (Assude et al., 2016; Chevallard, 1999).

Dans une première partie, nous contextualiserons notre travail de recherche. Ensuite nous présenterons quelques éléments méthodologiques liés au recueil de données et aux analyses. Dans un troisième temps, une étude de cas en géométrie (classe de 6e) permettra d'illustrer la mise en évidence d'obstacles et de conditions favorables à l'accessibilité didactique. Pour finir, nous présenterons d'autres résultats obtenus dans le cadre de notre thèse dans des systèmes d'enseignement similaires.

2. La circulaire n°2017-084 du 3 mai 2017 précise que « ces personnels se voient confier des missions d'aide aux élèves en situation de handicap. Ainsi sous le contrôle des enseignants, ils ont vocation à favoriser l'autonomie des élèves, sans se substituer à lui sauf lorsque c'est nécessaire ». Les activités de ces personnels peuvent relever de trois catégories : accompagnement des élèves dans les actes de la vie quotidienne, accompagnement des élèves dans l'accès aux activités d'apprentissages et accompagnement des élèves dans les activités de la vie sociale et relationnelle.

3. Ces données issues d'une note de la DEPP permettent de distinguer le premier degré (187406 élèves accompagnés) et le second degré (132464 élèves)

4. Données issues de Repères et références statistiques 2021 (RERS) publié par les services statistiques ministériels de l'Éducation nationale

5. Unité localisée pour l'inclusion scolaire. Ces dispositifs que l'on retrouve à l'école, au collège et au lycée permettent à des élèves d'avoir un emploi du temps partagé entre la classe ordinaire et le regroupement spécialisé

Contexte et cadre théorique de la recherche

L'étude que nous proposons ici est issue de notre travail de thèse (Dupré, 2019) qui s'intéressait à des pratiques inclusives en mathématiques dans le second degré et plus particulièrement dans le cadre de dispositifs ULIS au collège. Dans le cadre de ce travail, nous avons cherché à comprendre quels étaient les conditions favorables (ou les obstacles) pour que les apprentissages mathématiques réalisés au sein du regroupement spécialisé (SDA) puissent soutenir le temps personnel d'élèves reconnus institutionnellement handicapés et ainsi favoriser l'accès aux savoirs au sein de la classe de mathématiques (SDP). Nous avons donc étudié plus particulièrement des articulations entre ces systèmes didactiques lorsque ceux-ci existent de façon successive dans des espaces-temps différents. Le travail mené, de nature qualitative, nous a permis de travailler dans quatre collèges différents sur une échelle temporelle délimitée par des séquences d'enseignement. Parmi les données recueillies, il se trouve que nous avons également pu observer des situations où SDA et SDP coexistent dans le même espace-temps : soit dans le cadre de coenseignement (Dupré, 2020) dans le collège n°2 ou lors de l'accompagnement de l'élève au sein de la classe de mathématiques par l'AESHco dans les collèges n°3 et n°4. Nous disposons de huit séances filmées dans cette configuration.

Cadre théorique mobilisé

L'étude que nous proposons s'inscrit dans le prolongement de travaux menés il y a vingt ans en Suisse par Francia Leutenegger qui considérait la question de l'articulation fonctionnelle entre différents systèmes didactiques comme « un problème ardu en didactique des mathématiques » (2000, p. 216). Ce type de questionnement nécessite la mise en œuvre d'une méthodologie appropriée qui puisse être en mesure d'observer la dynamique des systèmes sur une durée suffisamment longue en s'appuyant sur des indicateurs en mesure de « rendre compte de la dynamique créée par les systèmes en parallèle » (2000, p. 217). Ces nécessités méthodologiques contribuent à la naissance de l'approche clinique du didactique afin de pouvoir observer des situations ordinaires d'enseignement qui mettent en jeu différents systèmes didactiques.

Pour modéliser la situation étudiée, nous utilisons les notions de système didactique et de système d'enseignement. Chevallard précise que « le système didactique n'existe qu'à être compatible avec son environnement » (1991, p. 16) et il définit l'environnement proche du système didactique comme le système d'enseignement. L'auteur précise également que l'espace de l'étude ne peut être réduit au système didactique principal, qui est bien souvent associé à la classe. Le système principal suppose l'existence et le fonctionnement de systèmes qu'il qualifie d'auxiliaire (1995) qui ont pour fonction de venir en aide au système didactique principal (2010).

Pour finir, et de façon à disposer d'indicateurs en mesure de rendre compte de la dynamique des systèmes en jeu, nous nous appuyons sur les cadres temporels produits au sein de ces systèmes : le temps didactique (Chevallard & Mercier, 1987), le temps praxéologique (Assude et al., 2016), le capital

temps (Assude, 2004) et le temps personnel de l'élève (Mercier, 1992). Les articulations entre ces différents cadres temporels peuvent s'envisager verticalement (entre les différents cadres produits au sein d'un même système) ou horizontalement (entre des cadres identiques produits par deux systèmes différents)[6] (Chevallard & Mercier, 1987).

Modélisation du système d'enseignement étudié

Les éléments théoriques que nous venons de présenter nous permettent de modéliser une situation d'enseignement de mathématiques lors de laquelle un élève du dispositif ULIS est accompagné par l'AESH collective. La figure 1 représente cette configuration.

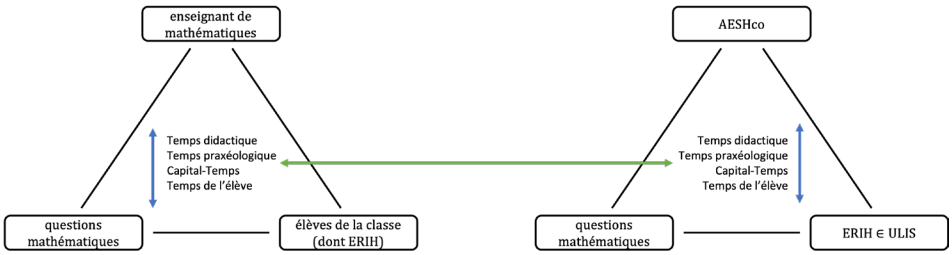


Figure 1 – modélisation du système d'enseignement

Cette modélisation rend compte de la coexistence de deux systèmes didactiques dans le même espace-temps. Le système principal est pris en charge par l'enseignant de mathématiques et nous retrouvons l'AESH collective dans le système auxiliaire. L'élève reconnu institutionnellement handicapé (ERIH) qui bénéficie du dispositif ULIS est donc amené à prendre place dans deux systèmes didactiques différents. Les flèches bleues rendent compte des articulations verticales au sein d'un même système et la flèche verte illustre les articulations horizontales. Deux questions émergent de cette représentation : 1) est-ce que les questions mathématiques sont identiques dans le SDP et dans le SDA ? 2) comment le SDA joue son rôle d'aide en facilitant l'articulation du temps personnel de l'élève avec les cadres temporels produits par le SDP ?

L'étude de ces deux questions nous permettra d'apporter un éclairage à notre question de recherche évoquée en introduction : quelles sont les conditions pour que l'accompagnement mis en place puisse faciliter l'accessibilité didactique ?

Élèments méthodologiques

Nous avons mis en œuvre un dispositif de recueil de données en mesure de saisir les relations entre les différents pôles des systèmes didactiques en jeu. Conformément à notre positionnement épisté-

6. Nous avons développé la présentation de ces différents cadres temporels et les articulations qui en résultent dans un précédant article (Dupré, 2022).

mologique et de façon à nous prémunir du risque de naturalisation des phénomènes observés, nos analyses ne portent pas directement sur ces données audio et vidéo, mais sur la transcription de celles-ci afin de réaliser une mise à distance nécessaire vis-à-vis des traces recueillies.

Présentation du dispositif vidéo

Nous appuyons sur un dispositif vidéo multisources permettant de garder une trace de l'évolution du milieu au sein du système principal et dans le système auxiliaire. Ce dispositif est composé de quatre caméras et de plusieurs enregistreurs audios afin de pouvoir saisir les échanges langagiers principaux (adressés au collectif), mais également les échanges secondaires (entre l'enseignante et un élève, entre l'AESHco et l'élève ou encore entre les élèves). Une seule caméra est mobile sur un pied fixe en fond de classe pour suivre les actions de l'enseignante. Trois caméras sont en plan fixe : pour garder une trace de l'évolution du savoir au tableau, suivre l'évolution des travaux de l'élève et avoir une vue globale face à la classe. Cette dernière nous permet également d'avoir une vue de l'environnement proche de l'élève. Des entretiens ante et post sont également réalisés lors de chaque séance.

Méthodologie d'analyse

Les transcriptions sont consignées au sein d'un tableur. Il s'agit à la fois d'une transcription intégrale des discours (principaux ou secondaires), des actions et gestes des acteurs et de l'évolution du milieu à travers notamment des captures d'écran. Cette vision synoptique nous permet d'avoir une double lecture. Horizontalement nous pouvons observer les discours ou les actions qui se déroulent simultanément. Verticalement, nous pouvons suivre l'évolution des différents pôles du système didactique. Ce tableau de transcription participe d'une mise à distance nécessaire avec les matériaux bruts recueillis. C'est à partir de ce matériel que nous procédons à l'analyse de la séance afin de saisir l'évolution des différents cadres temporels.

Une étude de cas en classe de 6e

Dans le collège n°4, nous avons filmé une séquence qui traite de la symétrie axiale en classe de 6e. La classe en question est composée de vingt élèves. Parmi ces élèves trois ont une reconnaissance institutionnelle de handicap. Victor bénéficie du dispositif ULIS, il est accompagné par l'AESHco de ce dispositif. Deux autres élèves (Martin et Laurent) sont accompagnés par une AESH mutualisée. L'enseignante de mathématiques est expérimentée. Lors des séances de mathématiques, trois professionnelles sont donc présentes au sein de l'espace classe.

La notion de symétrie axiale qui est au cœur de ce chapitre est un objet qui n'est pas nouveau pour les élèves, car elle apparait dans les programmes dès le cycle 2. Au cycle 3, l'étude de cet objet se poursuit avec principalement une évolution du point de vue des techniques de construction comme l'utilisation d'outils tels que l'équerre et le compas[7]. Lors de ce chapitre, les quatre premières séances ont permis à l'enseignante de mathématiques de faire appel à la mémoire didactique des élèves en revenant sur des objets anciens, rencontrés à l'école primaire. De ce point de vue, nous n'observons pas d'évolution du temps didactique. La cinquième séance correspond à l'introduction d'une nouvelle technique de construction faisant intervenir le compas. Avec l'introduction de cette technique nouvelle[8], l'enseignante engage une évolution du temps praxéologique. Nous allons focaliser notre regard sur deux moments consécutifs de cette séance, lorsque les élèves vont devoir chercher à deux une manière de construire le symétrique d'un point au compas puis lors d'une réalisation en individuel. La consigne donnée par l'enseignante à l'ensemble de la classe est la suivante : « *par deux* […] *vous essayerez de me trouver une technique avec le compas pour tracer le symétrique du point C par rapport à la droite delta qu'avec le compas* » (transcription séance, 15'20). Dans le premier épisode, Victor va être associé à Martin. Ce binôme lors de cette phase est accompagné à la fois par l'AESHco et l'AESHm. Le SDA est pris en charge par ces deux AESH pour faciliter la réalisation d'une tâche de recherche de technique issue du SDP.

Observation d'un épisode de recherche en binôme

Dans l'entretien *ante*, l'enseignante explique son choix de faire travailler les élèves à deux : « *en essayant de les mettre par deux pour qu'ils s'apportent des idées mutuellement* ». Lors de l'entretien *post*, elle nous explique qu'elle a choisi de faire travailler Victor avec Martin avec qui il arrive à travailler d'habitude, mais qu'« *aujourd'hui il n'était pas du tout en interaction avec Martin* ». Nous allons donc observer comment s'est déroulée cette phase de recherche. L'épisode que nous observons se déroule entre 16'24 et 22'25. La figure 2 rend compte de différents arrêts sur image représentatifs. Nous reproduisons la construction initiale de Victor : (1) il recopie ce qui est au tableau, c'est-à-dire l'axe oblique ainsi que le point C que nous matérialisons en bleu ; à l'issue de la phase de recherche (2) nous observons qu'il a réalisé un cercle en plaçant le centre sur l'axe (matérialisé en rouge) et en prenant pour rayon la distance entre ce point sur l'axe et le point C. Victor réalise donc la première partie de la technique de construction du symétrique d'un point avec le compas seul, mais il ne va pas plus loin, c'est le cas également d'autres élèves dans la classe. Martin réalise également une construction dans son cahier, mais le cadrage de cette caméra ne nous permet pas d'observer son travail.

7. D'autres évolutions sont observées entre les programmes de cycle 2 et ceux de cycle 3 comme une complexification des figures travaillées avec par exemple différentes positions possibles pour l'axe de symétrie ou encore les propriétés de conservation (longueurs, aires).

8. Les repères de progressivité des programmes et les observations menées lors des premières séances nous amènent à penser que cette technique n'a pas été rencontrée à l'école primaire par les élèves de cette classe.

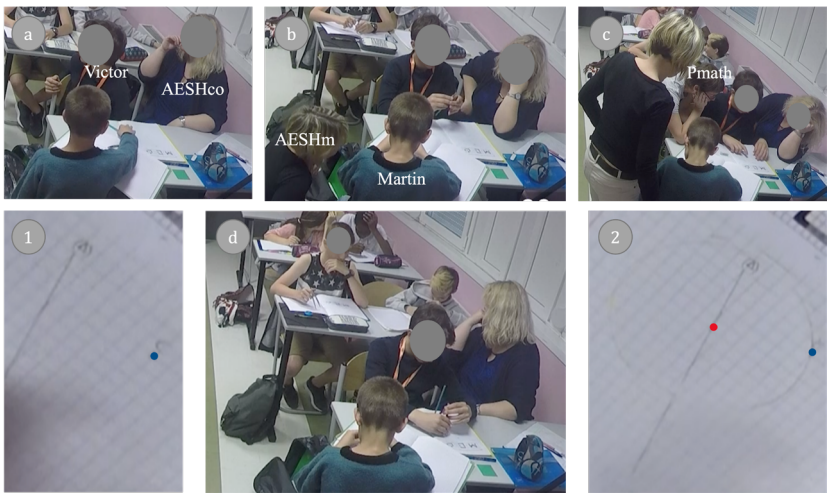


Figure 2 – travail en binôme au sein du SDA

Nous allons également nous intéresser au positionnement pris par les différents acteurs. Victor est tout d'abord en position d'attente (a), car il n'a pas de compas. Il regarde en direction de l'enseignante. Son camarade Martin a pourtant un compas qui permettrait d'initier la collaboration. Nous relevons dans le discours secondaire de AESHco : « [l'enseignante] *va-t'en prêter un des compas comme ça vous pouvez travailler à deux* » (tdp n°126). En effet, l'enseignante prêtera un compas à Victor. Nous choisissons ensuite de mettre en évidence le positionnement spatial des différents acteurs. Sur (b) on observe la présence de l'AESHm qui accompagne Martin. Le tableau 1 rend compte d'un extrait des échanges entre ces différents acteurs au sein du système auxiliaire.

tdp	Acteur	Discours	Remarques
143	AESHco	*Et comment tu sais qu'il fallait s'arrêter juste*	S'adresse à Martin
144	AESHm	*Parce que tu aurais pu le mettre un petit peu en dessous*	S'adresse à Martin (observe le cahier de martin, hors champ de caméra)
145	AESHco	*Ouais*	
146	Martin	*Parce que le point il était euh*	
147	AESHm	*Ce n'est pas du pif il faut vraiment que ça soit exact et il y a une tactique / il faut trouver une astuce*	S'adresse à Martin
148	AESHco	*Et toi Victor tu as fait pareil ?*	S'adresse à Victor
149	AESHm	*Tu as fait pareil que Martin ?*	S'adresse à Victor
150	Victor	*[Inaudible] ce n'est pas ça*	
151	AESHco	*[Inaudible] il est juste en face tu le mettrais deux millimètres en dessous*	S'adresse à Martin
152	AESHm	*Victor tu as fait quoi là est-ce que tu as fait le symétrique du point C ?*	S'adresse à Victor, observe (2) sur la figure 2

Tableau 1 – transcription des échanges au sein des deux SDA

Les discours des AESH portent sur les constructions réalisées individuellement par Victor et Martin, seul le tdp n°148 pourrait ouvrir la possibilité d'une confrontation entre les deux élèves, mais ça ne sera pas le cas. Cet échange témoigne de la difficulté pour Victor et Martin de prendre position au sein du SDA. La situation se compliquera ensuite encore avec l'intervention de l'enseignante (c) qui s'adresse à Victor. Martin est en retrait et n'intervient pas. L'épisode se termine par le départ de l'enseignante et de l'AESHm (d). L'AESHco de son côté laisse Victor et échange avec les élèves qui sont derrière elle. Victor et Martin pendant l'ensemble de ce temps de recherche n'auront pas collaboré (ni en actes, ni dans les discours). Ce constat est également relevé par l'enseignante dans d'autres groupes et l'indique publiquement à l'ensemble de la classe : « *je repère juste que dans certains groupes c'est quand même un peu du travail tout seul dans son petit coin l'idée c'est d'en discuter* ».

Mise en œuvre de la technique de construction au compas en individuel

À l'issue de cette phase de recherche en binôme au sein du système auxiliaire, la technique de construction au compas va être montrée et verbalisée au tableau dans le système principal. L'enseignante propose ensuite aux élèves en individuel de reprendre ce type de construction. La figure 3 rend compte du travail de Victor à ce moment de la séance.

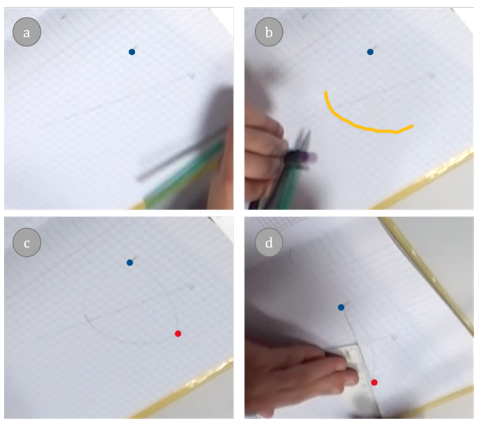


Figure 3 – construction réalisée par Victor

Nous observons tout d'abord Victor tracer un axe oblique et un point que nous matérialisons en bleu (a). Il pique ensuite son compas sur l'axe en prenant pour rayon la distance jusqu'au point bleu (b) pour tracer un premier arc de cercle. Il reproduit ensuite l'opération avec un second arc de cercle (c) puis il réalise la vérification demandée par l'enseignante, c'est-à-dire vérifier si l'axe de symétrie est bien la médiatrice du segment composé par le point rouge et bleu. Victor vérifie l'équidistance et la perpendicularité (d). Lors de cette construction, l'AESHco intervient uniquement pour lui demander de réaliser les traits de construction en pointillés (il s'agissait d'une demande publique de l'enseignante).

Analyse des cadres temporels

L'analyse des programmes nous avait permis de montrer que le temps didactique n'évolue pas dans cette séance (Dupré, 2019), cependant la tâche proposée associée au matériel indiqué par l'enseignante correspond à une évolution du temps praxéologique. On observe tout d'abord lors de la phase de travail de groupe une migration de la tâche introduite dans le SDP vers le SDA. Ce que nous relevons au sein du système auxiliaire c'est l'apparition d'un double obstacle qui complique la synchronisation du temps personnel des deux élèves avec les cadres produits. Le premier est lié au milieu matériel. Le fait de solliciter un second compas au sein du binôme rend possible un travail individuel de la part de Victor et de Martin alors que l'enseignante propose cette situation de recherche à deux, car elle estime que la collaboration pourra faciliter la découverte de la technique nouvelle. Nous faisons l'hypothèse que le partage de cet outil aurait pu initier une construction commune ou un échange entre les élèves sur le début de construction réalisé par Victor (2 sur la figure 3), les AESH n'ont sans doute pas perçu cette nécessité pour favoriser la collaboration. Le second obstacle est lié à la place prise par les AESH du point de vue des discours. Cette place semble limiter les possibilités de synchronisation du temps personnel des deux élèves qui n'ont que peu d'espace pour qu'ils « *s'apportent les idées mutuellement* » comme le suggérait l'enseignante. La construction réalisée ensuite par Victor nous permet d'observer la synchronisation de son temps personnel avec le temps praxéologique du SDP sans que le SDA intervienne au niveau de la mise en œuvre de la technique. Dans les deux épisodes observés, nous constatons que le système auxiliaire ne joue pas un rôle d'aide déterminant pour favoriser la synchronisation de Victor avec les cadres temporels du système principal et qu'il peut au contraire générer des obstacles supplémentaires pour les élèves impliqués au sein des SDA.

Obstacles et conditions favorables à l'articulation entre SDA et SDP

Nous avons conscience que les deux moments présentés dans la partie qui précède correspondent à un corpus limité dans le temps relatif à une tâche spécifique de construction. Nous proposons dans cette dernière section de présenter d'autres obstacles et conditions favorables mis en lumière dans l'ensemble des séances dont nous disposons et que nous avons analysé avec la même méthodologie (Dupré, 2019, accepté).

Conditions favorables mises en évidence

La comparaison entre les études dans les collèges n°3 et n°4 permet de dégager certaines conditions favorables aux articulations entre le SDA et le SDP. *Le travail sur des objets communs* : la situation de coprésence en classe semble réduire le risque de travailler sur des objets différents ou non sensibles ; l'aspect dissymétrique de la relation entre l'enseignante de mathématiques et l'AESHco peut

contraindre cette dernière à travailler sur les objets du SDP. *Le positionnement en retrait de l'AESH au sein du SDA lors des phases d'oral collectif dans le SDP* : ce positionnement facilite l'attention de l'élève accompagné lors des phases collectives dans le système principal et évite la superposition des discours qui nécessiterait à l'élève de choisir dans quel système didactique s'engager. *Un outil visuel de communication* : cet outil qui utilise trois cartons de couleurs (vert, jaune et rouge) afin de signifier à l'élève si son engagement est satisfaisant au regard de l'AESHco permet également à l'enseignante de prendre des informations sur le travail réalisé par l'élève accompagné et de moduler ses gestes professionnels (modulation du rythme, sollicitation de l'élève, encouragements, aide). *Le positionnement spatial de l'AESH et de l'élève* : le positionnement au premier rang de la classe semble faciliter les interactions avec l'enseignante ; le positionnement de l'AESHco sur un côté de la classe (par exemple, figure 2) semble favorable également, car l'élève lorsqu'il écoute l'enseignante peut se détacher facilement du système auxiliaire. *La reprise des techniques issues du SDP* : l'aide à l'étude au sein du SDA passe par la reprise des techniques attendues par le SDP ; cela semble faciliter la synchronisation du temps personnel de l'élève vis-à-vis du temps praxéologique du SDP.

Obstacles mis en évidence

À l'opposé de ces conditions favorables, des obstacles sont également mis en évidence. *Le travail sur des objets trop anciens et non sensibles pour le SDP* : cela a pour effet de désynchroniser le temps personnel de l'élève avec les cadres temporels du SDP. *Les discours du SDA qui se superposent à ceux du SDP* : cette superposition de discours implique à l'élève de faire des choix ; la proximité spatiale au sein du SDA le contraint à s'exclure du SDP car il n'a souvent pas d'autres choix que de s'engager dans les échanges initiés au sein de ce système du fait de la proximité physique avec l'AESH. *La réalisation des tâches par l'AESHco* : lorsque cette dernière réalise les tâches à la place de l'élève, en particulier lors de moments de recherche, cela l'empêche de prendre position comme élève. *La non-prise en compte des commandes du SDP* : lorsque le SDA choisit de ne pas prendre en compte une commande du SDP, cela entraine une désynchronisation de l'élève vis-à-vis des cadres temporels du SDP. *Le risque de dévoluer l'étude au SDA* : l'enseignant du collège n°2 verbalise ce risque d'être moins attentif à l'élève lorsque l'AESH est présent (propos recueilli en entretien).

Conclusion

Notre souhait dans cette communication était de nous intéresser aux conditions pour que l'accompagnement AESH soit en mesure de faciliter l'accessibilité didactique au sein de la classe ordinaire. À partir de deux exemples localisés, nous avons voulu illustrer la complexité du système d'enseignement qui comprend dans un même espace-temps un système didactique principal et un système didactique auxiliaire. Une des limites de notre étude réside dans l'aspect localisé des épisodes observés. Il s'agit néanmoins d'un premier éclairage permettant de mettre en évidence que si dans l'exemple observé le partage d'un même objet (et plus particulièrement d'une même tâche de construction)

est effectif entre le système principal et le système auxiliaire, la fonction d'aide du système auxiliaire n'est pas démontrée. D'autres résultats issus de notre corpus vont dans ce sens et laissent à penser que la finalité de ce type de compensation peut parfois avoir un effet inverse en empêchant l'élève de synchroniser son temps personnel avec les cadres produits par le système principal (Dupré, accepté). D'un point de vue méthodologique, nous avons pu montrer que le dispositif de recueil de données mis en œuvre permet de collecter des traces suffisamment fines (au niveau des discours, des actions des acteurs et du milieu) pour permettre de reconstituer ce qui se joue dans le système principal et dans le système auxiliaire et ainsi rendre compte de l'articulation fonctionnelle entre ces deux systèmes.

Pour conclure, nous pensons qu'il est nécessaire de poursuivre les études qui s'intéressent à ces situations d'accompagnement d'élèves reconnus handicapés au sein de la classe ordinaire. Il s'agit d'une question vive en France qui pourrait également être éclairée par des études dans d'autres contextes éducatifs lorsqu'un système d'enseignement avec une architecture similaire existe.

Références

Assude, T. (2004). Time Management in the Work Economy of a classe. A Case Study : Integration of Cabri in Primary School Mathematics Teaching. *Educational Studies in Mathematics, 59*.1, 183-203. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5888-0

Assude, T., Millon-Fauré, K., Koudogbo, J., Morin, M.-P., Tambone, J., & Theis, L. (2016). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherches en didactique des mathématiques, 36*, 197-230.

Chevallard, Y. (1995). La fonction professorale : Esquisse d'un modèle didactique. *Actes de la VIII^e école d'été de didactique des mathématiques*, 83-122.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19/2*, 221-266.

Chevallard, Y. (2010). *« Le sujet apprenant entre espace et dispositif ». Commentaires depuis la théorie anthropologique du didactique*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=206

Chevallard, Y., & Mercier, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. Irem d'Aix-Marseille.

Dauphin, L., & Prouchandy, P. (2021). *Élèves en situation de handicap* (2021.S02). DEEP.

Dupré, F. (2019). *Pratiques inclusives en mathématiques dans le second degré : Études de cas en ULIS collège* [Thèse de doctorat]. Aix-Marseille.

Dupré, F. (2020). Analyse didactique d'une séance de coenseignement entre un enseignant spécialisé et un enseignant ordinaire dans le cadre de pratiques inclusives au collège. *Éducation et francophonie, 2*(XLVIII), 158-177.

Dupré, F. (2022). Articulations entre deux systèmes didactiques : Une étude de cas autour de l'objet fraction. *Recherches en didactique des mathématiques, 1*(42), 103-148.

Dupré, F. (accepté). Pratiques inclusives et articulation entre deux systèmes didactiques : L'accompagnement par un AESH est-il un obstacle ou un levier à l'accessibilité didactique? *Éducation et didactique [en ligne]*.

Leutenegger, F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 20*(2), 209-250.

Leutenegger, F. (2009). *Le temps d'instruire. Approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématique* (Peter Lang). Peter Lang.

Mercier, A. (1992). *L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique*. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I.

Schubauer-Leoni, M., & Leutenegger, F. (2002). Expliquer et comprendre dans une approche clinique/expérimentale du didactique ordinaire. In F. Leutenegger & M. Saada-Robert (Éds.), *Expliquer et comprendre en sciences de l'éducation* (p. 227-251). De Boeck.

Suau, G., Perez, J.-M., Tambone, J., & Assude, T. (2017). Accompagnement et accessibilité didactique : Quels obstacles. *Revue suisse de pédagogie spécialisée, 2*, 30-36.

Toullec-Théry, M. (2019). D'une recherche sur le travail conjoint AESH-enseignants vers la mise en œuvre d'une ingénierie coopérative : Un moyen pour renouveler les pratiques? *La nouvelle revue - Éducation et société inclusives, 85*, 19-36.

Toullec-Théry, M., & Assude, T. (2012). *Faire travailler ensemble tous les acteurs de l'inclusion ?* INS HEA.

Toullec-Théry, M., & Brissiaud, M. (2012). Scolarisation d'un élève en situation de handicap : Le cas d'un accompagnement délicat effectué par un Auxiliaire de vie scolaire (AVS). *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation, 1*(57), 139-153.

Titre: Le jeu mathématique comme levier à la dévolution en contexte orthopédagogique

Auteurs: HOULE Virginie, ATKINS Isabelle et GHAILANE Oumama

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 834 - 847

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Le jeu mathématique comme levier à la dévolution en contexte orthopédagogique

HOULE[1] Virginie – ATKINS[2] Isabelle – GHAILANE[3] Oumama

Résumé – La dévolution représente un défi particulier en contexte orthopédagogique en raison des contraintes spécifiques à ce contexte d'enseignement. Dans le cadre d'une recherche, nous avons étudié le potentiel d'un jeu mathématique, le jeu de Yum, pour favoriser la prise de décision d'élèves suivis en orthopédagogie. Sur la base des expérimentations réalisées, nous montrons comment se négocient les enjeux didactiques et ludiques au cours des interactions en prenant en compte les caractéristiques de ce jeu.

Mots-clefs : Jeu, orthopédagogie, mathématiques, dévolution, contrat didactique et ludique

Abstract – Devolution is a particular challenge in remedial education because of the specific constraints of this teaching context. In a research project, we studied the potential of a mathematical game, the Yum game, to promote decision-making in students in remedial education. Based on the experiments carried out, and while considering the characteristics of this game, we show how didactic and ludic issues are negotiated within the interactions.

Keywords: Game, remedial education, mathematics, devolution, didactic and ludic contract

1. Université du Québec à Montréal, Canada, houle.virginie@uqam.ca

2. Université du Québec à Montréal, Canada, atkins.isabelle@uqam.ca

3. Université du Québec à Montréal, Canada, ghailane.oumama@uqam.ca

Introduction

La relation entre l'engagement et la réussite scolaire est bidirectionnelle : alors que le désengagement peut entrainer de faibles performances scolaires, les faibles performances peuvent, réciproquement, provoquer un désengagement des élèves (Lee, 2014). Les échecs répétés rencontrés au cours du parcours scolaire des élèves en difficulté peuvent effectivement affaiblir leur sentiment de compétence. Leur expérience peut alors les conduire à ne plus percevoir la réussite comme une issue possible et, par conséquent, à abandonner rapidement face à l'adversité (Lafortune et St-Pierre, 1994). L'engagement cognitif ne repose cependant pas exclusivement sur les caractéristiques personnelles des élèves et leur trajectoire scolaire. Des recherches montrent effectivement que les pratiques pédagogiques ont une incidence importante sur l'engagement des élèves (Archambault et Chouinard, 2004; Gurtner et al., 2006). Dans le cadre d'une recherche sur l'enseignement-apprentissage des mathématiques en contexte orthopédagogique menée au Québec, nous avons misé sur le jeu pour favoriser l'engagement d'élèves identifiés en difficulté et les amener à prendre des décisions par et pour eux-mêmes. Un appui sur le jeu apparait intéressant pour faciliter la dévolution des problèmes mathématiques, qui représente un défi particulier en contexte orthopédagogique.

Contraintes spécifiques au contexte orthopédagogique

L'orthopédagogue travaille généralement avec un nombre restreint d'élèves jugés en difficulté en lecture, en écriture et/ou en mathématiques dans un local à l'extérieur de la classe. Comme le soulèvent Matheron et Noirfalise (2002), en installant un dispositif d'aide individualisée, il revient en quelque sorte à l'institution scolaire, en l'occurrence à l'orthopédagogue, de trouver de nouvelles conditions pour permettre aux élèves en difficulté de développer les connaissances visées, ce qui suggère implicitement aux élèves que leur rôle, lorsqu'ils participent à un tel dispositif, est d'attendre l'aide qui leur est délivrée. La fonction même du service orthopédagogique, mais aussi la proximité de l'orthopédagogue avec les élèves, peuvent effectivement favoriser un lien de dépendance des élèves vis-à-vis de l'orthopédagogue et amener l'orthopédagogue à prendre à sa charge le travail qui devrait revenir aux élèves (Mary, 2003).

Deux logiques, c'est-à-dire deux ordres de contraintes, pèsent sur le service orthopédagogique : la logique de l'adaptation et la logique de la réussite (Houle et Giroux, 2016). La logique de l'adaptation, qui consiste à adapter l'enseignement aux caractéristiques des élèves, repose largement sur le fait que les orthopédagogues travaillent avec des élèves identifiés en difficulté pour qui l'enseignement en classe n'a pas permis d'acquérir les savoirs visés par le programme. Pour se différencier de l'enseignement dispensé en classe, le contenu de l'enseignement est alors pensé selon les spécificités cognitives et affectives des élèves, ce qui peut conduire à négliger l'analyse didactique des situations proposées, et même, à ne plus voir les conditions spécifiques nécessaires et suffisantes à l'apprentissage d'un savoir donné (Roiné, 2009). Une autre logique implicite qui affecte l'intervention orthopé-

dagogique est celle de la réussite. Cet ordre de contraintes s'explique par la fonction de ce service, qui est d'aider les élèves en difficulté à répondre aux exigences fixées par l'institution scolaire, et ce, dans un temps relativement court puisque l'orthopédagogue rencontre généralement les élèves une ou deux séances par semaine pendant une période déterminée. Dans cette perspective, l'enseignement explicite apparait comme une avenue intéressante dans la mesure où comme les règles à appliquer sont modélisées, ce type d'enseignement permet rapidement d'amener les élèves à (re)produire ce qui est attendu. Des didacticiens des mathématiques montrent cependant les limites de l'enseignement explicite, qui conduit à découper les tâches en sous-tâches, les rendant chacune isolée des autres, et ne permet pas un travail approfondi sur le plan conceptuel (Proulx, 2017).

Problématisation et objectif de la recherche

La dévolution, soit l'acte par lequel l'enseignant fait accepter aux élèves la responsabilité d'une situation d'apprentissage (Brousseau, 2010), représente un défi important en contexte orthopédagogique, et ce, non seulement en raison des difficultés des élèves, mais aussi en raison des contraintes spécifiques à ce contexte d'enseignement. Pour que les élèves se dégagent des attentes de l'orthopédagogue et prennent des décisions par et pour eux-mêmes, le choix des situations apparait déterminant. Les situations doivent inciter les élèves à participer à la construction de leurs connaissances, car s'ils se contentent d'appliquer ce qui vient d'être enseigné sans s'interroger sur le rapport entre les stratégies mobilisées et la situation, ils risquent alors de ne pas reconnaitre l'utilité de leurs connaissances et donc, de ne pas être en mesure de les utiliser plus tard dans de nouvelles situations (Sarrazy, 2015).

Pour faciliter la dévolution en contexte orthopédagogique, nous avons choisi de miser sur le jeu, car la prise de décision y est fondamentale. Comme le soulève Brougère (2005), jouer, c'est décider. C'est effectivement la succession de décisions que prend le joueur qui crée le jeu. Notre recherche s'appuie ainsi sur l'hypothèse que le jeu pourrait agir comme levier à la dévolution en contexte orthopédagogique. De plus, le caractère frivole du jeu apparait particulièrement intéressant pour travailler auprès d'élèves en difficulté, car il pourrait engendrer une prise de distance vis-à-vis des activités scolaires habituelles dans lesquelles ces élèves ont souvent rencontré l'échec. Si cette caractéristique du jeu apparait favorable à la prise de décision, pour que celui-ci provoque des apprentissages en mathématiques, ses règles doivent contraindre les élèves à avoir besoin des connaissances mathématiques visées pour jouer et/ou pour gagner. Le choix ou la construction d'un jeu doit donc reposer sur une analyse didactique qui prend en compte les possibilités d'actions des élèves et les connaissances mathématiques auxquelles elles font appel.

Bien que le recours à des jeux mathématiques soit généralement considéré comme une avenue intéressante pour favoriser l'engagement et l'apprentissage des élèves, des études menées dans le champ de l'adaptation scolaire montrent que le caractère ludique d'une situation ne favorise pas systématiquement l'apprentissage et que l'appui sur le jeu peut engendrer des défis dans le pilotage des

situations (Butlen et Vannier, 2011; Akins, 2020). Toutefois, aucune recherche, à notre connaissance, n'a étudié l'incidence de jeux mathématiques sur la nature des interactions en contexte orthopédagogique auprès d'élèves identifiés en difficultés. Il apparait donc pertinent d'étudier la manière dont se négocient les enjeux didactiques et ludiques au sein des interactions dans ce contexte. La recherche que nous avons menée vise ainsi à identifier et comprendre l'incidence d'un jeu mathématique sur les interactions didactiques et ludiques en contexte orthopédagogique[4]. Autrement dit, nous nous intéressons à l'articulation entre les caractéristiques du jeu, la façon dont il est piloté et les conduites des élèves, et ce, en prenant en compte les contraintes spécifiques au contexte orthopédagogique.

Contrat didactique et ludique

Le concept de contrat didactique et ludique permet de prendre en compte l'articulation entre les enjeux propres à l'enseignement-apprentissage d'un savoir mathématique et les enjeux spécifiques au jeu. Ce concept a été introduit par Pelay (2011), dans sa thèse, pour modéliser les interactions entre des enfants et un animateur au cours de situations mathématiques expérimentées en contexte de séjours de vacances. Le concept de contrat didactique et ludique s'appuie sur deux concepts : celui de contrat didactique, défini en didactique des mathématiques dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), et celui de contrat ludique, défini par Duflo (1997) dans le cadre de travaux en philosophie. Pelay (2011) définit ainsi le contrat didactique et ludique.

> Le contrat didactique et ludique est l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un «éducateur» et un ou plusieurs «participants» dans un projet, qui lie de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné. La conjonction « et » signifie que ce concept vise à modéliser l'interaction entre les processus didactiques et ludiques. Ces deux termes sont pour nous au même niveau : il ne s'agit pas de mettre une hiérarchie a priori entre les deux, mais d'étudier à quel(s) pôle(s) vont renvoyer les règles ou comportements, implicites ou explicites, qui sont observés. (p.284)

Autrement dit, ce concept permet d'étudier conjointement les pôles didactique et ludique, pour ainsi identifier et comprendre la nature des interactions lors de situations d'enseignement-apprentissage en mathématiques où la dimension ludique joue un rôle qui peut être plus ou moins explicite.

4. Notons que dans le cadre du projet que nous avons mené, nous avons développé et expérimenté une séquence d'enseignement composée de six situations à caractère ludique, chacune découpée en différentes parties par un jeu sur les valeurs des variables didactiques. Cette contribution porte sur l'analyse d'une partie d'une des situations de cette séquence.

Méthodologie de la recherche

Pour étudier l'incidence d'un jeu mathématique sur les interactions didactiques et ludiques en contexte orthopédagogique, nous nous inspirons de l'ingénierie didactique d'Artigue (1988). Notre méthodologie se décline ainsi en trois phases : 1) Conception et analyse *a priori*; 2) Expérimentation; 3) Analyse *a posteriori*. La première phase consiste à choisir un jeu ayant un potentiel à la fois ludique et didactique, et à organiser une progression des valeurs des variables didactiques en anticipant les stratégies mathématiques des élèves. Nous avons ciblé, comme principal contenu disciplinaire, la multiplication dans l'ensemble des nombres naturels et avons retenu, comme jeu, le jeu de Yum[5]. La progression du jeu de Yum que nous avons aménagée a d'abord été expérimentée par l'équipe de recherche. Puis, à la suite d'une formation, elle a été expérimentée à huit reprises par des orthopédagogues, chacune accompagnée d'un conseiller pédagogique responsable de filmer les séances et de soutenir l'orthopédagogue dans le pilotage. Les expérimentations ont été réalisées dans un local de l'école auprès d'un nombre restreint d'élèves (2 à 4 élèves) de 3e, 4e et 5e année du primaire jugés en difficulté en mathématiques par leur enseignant.e (ces niveaux scolaires au Québec accueillent des élèves de 8 à 11 ans). Chaque groupe est composé d'élèves provenant d'un même niveau scolaire. L'analyse des résultats s'appuie sur la confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori*. Nous comparons ainsi les connaissances mathématiques visées et celles qui ont été investies par les élèves, et nous analysons les interactions entre l'orthopédagogue et les élèves sous l'angle du contrat didactique et ludique (Pelay, 2011).

Analyse *a priori* du jeu de Yum

Pour favoriser l'apprentissage de la multiplication en contexte orthopédagogique, nous avons construit une progression du jeu de Yum en nous appuyant sur les travaux d'ERMEL (2001). Dans ce jeu, les élèves, à tour de rôle, lancent des dés dans le but d'obtenir des points en considérant des dés de même valeur. Ainsi, un premier élève lance par exemple cinq dés et peut ensuite relancer, une seule fois, autant de dés qu'il le souhaite. Il complète ensuite le tableau de pointage (chaque élève possède son tableau) selon la valeur de dés retenue (voir figure 1). Cette valeur ne pourra plus être utilisée lors des tours suivants. Lorsque tous les élèves ont joué trois tours, ils calculent leurs points et l'élève qui en a le plus remporte la partie.

5. Le jeu de Yum est aussi connu sous le nom de « Yacht Game », « Yahtzee » et « Jeu de Yam ».

Valeur du dé	Nombre de dés obtenus	Points obtenus
1		
2		
3	4	12
4		
5	3	15
6	3	18
TOTAL DES POINTS		45

Figure 1 - Exemple de tableau complété par un élève

Nous avons construit une progression de ce jeu en six parties. Pour ce faire, nous avons essentiellement modifié les valeurs des quatre variables didactiques suivantes : 1) la représentation des nombres sur les dés (avec points ou avec chiffres) ; 2) le nombre de dés utilisés (5 dés ou 8 dés) ; 3) les nombres inscrits sur les dés (nombres de 1 à 6 ou nombres de 5 à 10) ; 4) le type de relation entre les joueurs (les élèves jouent les uns contre les autres ou ils jouent ensemble contre l'orthopédagogue). L'espace dont nous disposons ne nous permet malheureusement pas de présenter les analyses *a priori* et *a posteriori* des six parties. Nous nous concentrons donc sur l'analyse d'une seule partie, soit la deuxième partie. Dans cette dernière, huit dés numérotés de 1 à 6 sont utilisés et les élèves jouent ensemble contre l'orthopédagogue. Les nombres étant représentés à partir de chiffres, le dénombrement des points sur les dés n'est pas possible. Les élèves peuvent toutefois recourir à diverses stratégies pour identifier les points obtenus à un lancer. Nous présentons ci-après les stratégies anticipées pour identifier les points à un lancer et les connaissances qu'elles sous-tendent.

Le comptage rythmé et le comptage par intervalle

Le comptage rythmé et le comptage par intervalle se distinguent du dénombrement des points sur les dés, car ces stratégies nécessitent de faire du double comptage, c'est-à-dire de coordonner le comptage des groupes (les dés) avec le comptage des éléments par groupe (les points par dé) (Jacob et Willis, 2003). Pour trouver, par exemple, le nombre de points correspondant à un lancer de trois dés de 4 points chacun, un élève peut recourir au comptage rythmé : 1, 2, 3, **4** (1 dé) ; 5, 6, 7, **8** (2 dés) ; 9, 10, 11, **12** (3 dés). Le comptage par intervalle, facilité avec les dés d'une valeur de 2 et de 5, s'éloigne encore davantage du dénombrement un à un des points sur les dés dans la mesure où les élèves ne comptent plus par 1. Ils peuvent ainsi, pour trois dés de 5, compter par intervalle de 5 en s'appuyant sur les dés pour savoir quand arrêter le comptage. Notons que le nombre de groupes, lors du double comptage, est généralement contrôlé par les élèves à l'aide de leurs doigts. Dans le jeu de Yum, la

présence des dés apparait comme un élément facilitateur pour la mise en place des stratégies de comptage rythmé et de comptage par intervalle.

Les sommes successives (avec ou sans regroupement de termes)

Une autre stratégie possible, pour trouver le nombre de points à un lancer, consiste à trouver, mentalement, la somme des points sur les dés. Par exemple, pour quatre dés de 6, un élève peut ajouter à 6, trois fois de suite, 6, en s'appuyant sur les dés : 6 + 6 = 12 → + 6 = 18 → + 6 = 24. Cette stratégie peut être modélisée à l'écrit par l'addition répétée. L'écriture nécessite toutefois de considérer simultanément le nombre de points par dé, 6, et le nombre de dés, 4, pour contrôler le nombre d'itérations à faire : 6 (1) + 6 (2) + 6 (3) + 6 (4). Le jeu de Yum permet à l'élève de se concentrer sur le multiplicande (le nombre de points par dé) puisque le contrôle du multiplicateur (le nombre de dés) est assuré par l'appui sur les dés. Pour trouver plus rapidement le nombre de points obtenus à un lancer, il est par ailleurs possible de regrouper des dés. Un élève peut par exemple, pour quatre dés de 6, regrouper deux à deux les dés, et faire mentalement : 6 + 6 = 12 ; 6 + 6 = 12 ; 12 + 12 = 24. Cette stratégie fait appel, dans l'action, à l'associativité de l'addition, et peut être modélisée par l'écriture suivante : (6 + 6) + (6 + 6).

La multiplication

Lorsque les faits multiplicatifs sont connus, trouver le produit est certainement la stratégie la plus rapide. Or, considérant les nombres sur les dés dans la deuxième partie du jeu de Yum (de 1 à 6), les stratégies de comptage et de sommes successives sont également possibles et relativement efficaces (selon les dés conservés). Sur le plan relationnel, la multiplication peut être associée à la réplique d'une même grandeur par un multiplicateur scalaire ou elle peut mettre en jeu l'articulation de deux grandeurs (Giroux, 2021). Dans le premier cas, pour un lancer de quatre dés de 6, la multiplication repose sur le raisonnement suivant, 4 x 6 points = 24 points, tandis que dans le deuxième cas, elle repose plutôt sur le raisonnement suivant, 4 dés x 6 points/dé = 24 points.

Ces différentes stratégies ne sont pas mutuellement exclusives. Un élève peut par exemple reconnaître l'utilité de la multiplication ou des sommes successives pour trouver le nombre de points obtenus à un lancer et, pour trouver le résultat, recourir au comptage rythmé ou au comptage par intervalle. Étant donné que, dans la deuxième partie du jeu de Yum, les élèves forment une même équipe, ils sont non seulement appelés à prendre des décisions, mais aussi à expliquer leur choix, voire à le confronter avec celui de leurs pairs. Cette caractéristique, en plus de favoriser les dialectiques de formulation et de validation, facilite, sur le plan méthodologique, l'identification des stratégies utilisées par les élèves.

Analyse *a posteriori* du jeu de yum

Dans l'analyse *a posteriori*, nous distinguons les stratégies des élèves, celles formulées par les orthopédagogues (notamment lorsque c'est à leur tour de jouer) et celles issues d'un travail collaboratif entre l'orthopédagogue et un ou des élèves. Comme en témoigne le tableau 1, la deuxième partie du jeu de Yum favorise diverses stratégies.

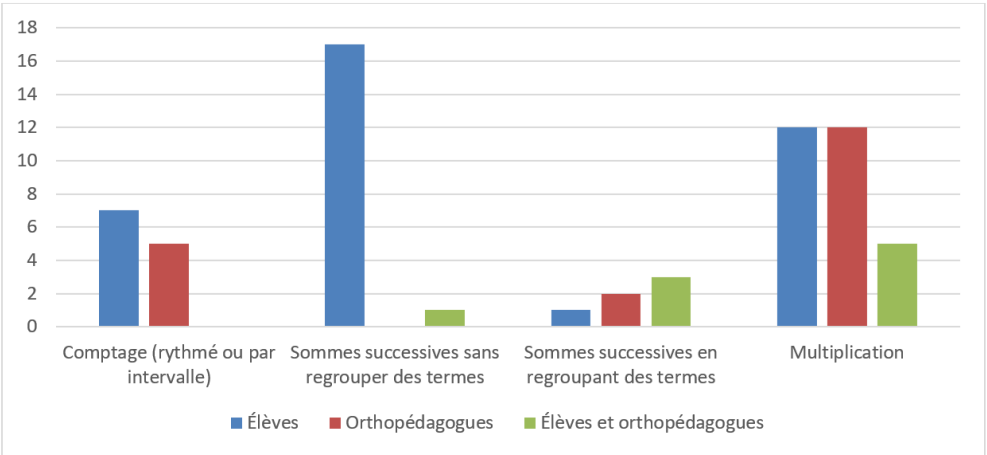


Tableau 1 - Stratégies des élèves et des orthopédagogues dans la deuxième partie du jeu de Yum

Les stratégies les plus utilisées par les élèves de façon autonome se distinguent de celles les plus souvent formulées par les orthopédagogues. La stratégie de sommes successives sans regroupement de termes est presque exclusivement mobilisée par les élèves. Les orthopédagogues, afin de favoriser l'apprentissage des élèves, mettent plutôt en évidence des stratégies plus élaborées sur le plan mathématique, en particulier la multiplication, qui correspond à la connaissance visée par l'enseignement. Par effet de contamination, les élèves à leur tour mobilisent cette stratégie, et ce, même si elle n'est pas nécessaire compte tenu des valeurs des variables didactiques. Il arrive aussi que des orthopédagogues recourent au comptage par intervalle en verbalisant leur raisonnement, ce qui vise sans doute à favoriser chez les élèves l'établissement de la relation entre les connaissances sur la liste des multiples et celles sur la multiplication, et qu'elles encouragent le regroupement des termes lors de sommes successives en vue d'introduire l'associativité de l'addition.

L'analyse des interactions montre par ailleurs que les élèves, lorsque c'est à leur tour de jouer, cherchent à prendre une décision par leurs propres moyens. En effet, ils se tournent très rarement vers l'orthopédagogue pour avoir de l'aide, malgré sa proximité. Ce sont plutôt les orthopédagogues qui interviennent afin de favoriser l'apprentissage des élèves. Elles les invitent régulièrement à formuler les stratégies qu'ils utilisent pour identifier le nombre de points à un lancer. Dans certains cas, elles leur demandent également s'ils auraient pu utiliser une autre stratégie et parfois même, leur suggèrent directement une autre stratégie possible. Si ce type d'intervention renvoie aux enjeux didactiques, les orthopédagogues gèrent également des enjeux ludiques. Elles s'assurent notamment

du bon déroulement du jeu, par exemple en rappelant les règles, et cherchent à maintenir l'enjeu ludique, en particulier l'aspect compétitif entre les élèves et elles. Fréquemment, tant les orthopédagogues que les élèves réagissent, parfois avec beaucoup d'émotion, aux dés obtenus à un lancer. Ils s'exclament « Oh ! » lorsqu'ils obtiennent un lancer jugé bon et « Ah non ! » quand ils n'obtiennent pas la valeur de dés qu'ils espéraient. On observe même, à quelques reprises, des élèves, mais aussi des orthopédagogues, qui brassent les dés en suppliant d'obtenir une valeur de dés qui les avantagerait. La place importante du hasard dans le jeu de Yum semble ainsi favoriser un cadrage ludique.

Lorsque c'est au tour de l'orthopédagogue de jouer, les élèves sont généralement très attentifs, et participent parfois même de leur propre chef par exemple en lui suggérant une valeur de dés qu'elle devrait, selon eux, conserver. Les conduites des orthopédagogues varient considérablement d'un groupe à l'autre. Certaines orthopédagogues jouent, la plupart du temps, sans justifier leur choix de façon, sans doute, à ne pas influencer le choix des élèves et à les laisser prendre des décisions qui leur appartiennent. D'autres orthopédagogues, au contraire, expliquent à voix haute les raisons pour lesquelles elles choisissent de garder une valeur de dés plutôt qu'une autre et formulent la stratégie qu'elles utilisent pour identifier le nombre de points à un lancer. Ce type d'intervention vise probablement à favoriser la contamination des stratégies et l'avancement du savoir. À quelques reprises, on observe aussi des orthopédagogues qui questionnent les élèves sur les dés qu'elles devraient conserver. Ainsi, elles renvoient aux élèves ce qui, selon le contrat ludique, devait être leur décision. Les questions posées par l'orthopédagogue visent à faire faire des mathématiques aux élèves, et ceux-ci s'efforcent d'y répondre au meilleur de leurs connaissances. Dans ce cas, les relations entre l'orthopédagogue et les élèves sont régies par des implicites de nature didactique. Le contrat ludique, dans la deuxième partie du jeu de Yum, suppose plutôt que l'orthopédagogue joue contre les élèves et donc, qu'ils n'ont pas intérêt à l'aider.

Cela étant dit, selon nos analyses, il y a bien souvent, au sein d'un même groupe, un va-et-vient relativement rapide entre des interactions qui renvoient essentiellement au pôle didactique et des interactions qui renvoient plutôt au pôle ludique. En effet, les élèves répondent aux questions de l'orthopédagogue en se plaçant dans une posture d'élève et dans l'instant qui suit, ils adoptent une posture de joueur et se montrent par exemple déçus lorsque l'orthopédagogue obtient des dés qui l'avantagent, allant parfois même jusqu'à lui suggérer, en blaguant, de conserver une valeur de dés qui la désavantage. La dimension ludique est toutefois plus ou moins présente selon les groupes. En effet, alors que dans certains groupes, la plupart des interactions sont régies par des implicites de nature ludique, dans d'autres groupes, la dimension didactique domine largement.

Discussion et Conclusion

La recherche que nous avons menée nous a conduites à explorer le potentiel d'un jeu mathématique pour favoriser la dévolution dans le contexte particulier de l'orthopédagogie. Le jeu, dans lequel la prise de décision occupe une place fondamentale, peut sembler difficilement compatible

avec la logique de la réussite, puisque cet ordre de contraintes conduit (souvent inconsciemment) l'orthopédagogue à prendre en charge une partie du travail de l'élève. La tension entre la prise de décision nécessaire au jeu et la logique de réussite qui pèse sur le service orthopédagogique a provoqué des écarts relativement importants dans le pilotage réalisé selon les orthopédagogues. Alors que certaines d'entre elles interviennent peu afin d'éviter d'influencer le choix des élèves, d'autres, au contraire, pilotent parfois fortement les échanges pour orienter leur choix. Il arrive aussi que des orthopédagogues adoptent une position mitoyenne entre ces deux pôles en formulant à voix haute leur raisonnement lorsqu'elles jouent, visant ainsi à favoriser l'avancement du savoir sans toutefois imposer une stratégie. Bien que les interventions varient de façon considérable selon les orthopédagogues, nos analyses montrent que les élèves, dans l'ensemble, ne recherchent pas l'aide de l'orthopédagogue. Ce résultat peut s'expliquer par la dimension ludique de l'activité qui les amène à se placer dans la posture de joueur et favorise ainsi la prise de décision, mais aussi par le faible niveau de difficulté de la deuxième partie du jeu de Yum qui facilite la mise en œuvre de stratégies de façon autonome chez les élèves.

La logique de l'adaptation aux spécificités des élèves, selon nos analyses, pèse peu sur le pilotage dans le jeu de Yum. Toutefois, les orthopédagogues et les conseillers pédagogiques avec lesquels nous avons travaillé ont relevé à maintes reprises l'intérêt de miser sur l'aspect ludique pour amener les élèves en difficulté à prendre plaisir à faire des mathématiques. Ils mettent ainsi en évidence un élément du jeu de Yum qui répond, d'une certaine manière, à une caractéristique affective souvent associée aux élèves en difficulté, soit leur faible motivation scolaire. La mise en place d'activités amusantes pour les élèves est certainement un élément non négligeable dans l'enseignement, notamment - peut-être même particulièrement - auprès d'élèves en difficulté. Or, pour qu'un jeu permette aux élèves à la fois d'éprouver du plaisir et d'apprendre les mathématiques, il apparait essentiel de ne pas négliger son analyse didactique.

Un intérêt didactique de la deuxième partie du jeu de Yum est qu'elle ouvre sur une diversité de stratégies, facilitant par le fait même la dévolution. Comme le soulèvent Mary et Squalli (2021), la présentation de problèmes pouvant être résolus de plusieurs manières augmente les chances que chaque élève puisse y entrer à partir d'une démarche personnelle. Or, il apparait également important, pour favoriser l'avancement du savoir tout en permettant aux élèves de donner du sens à leur apprentissage, d'organiser des situations dans lesquelles les stratégies faisant appel au savoir visé par l'enseignement sont éventuellement les seules à être satisfaisantes (Brousseau, 1998). Une progression des valeurs des variables didactiques a ainsi été organisée, de façon à faire évoluer les stratégies des élèves et à rendre progressivement la multiplication nécessaire (notamment en augmentant les nombres écrits sur les dés). Les orthopédagogues contrôlent donc certaines variables, mais c'est néanmoins le hasard, à chaque lancer, qui détermine les nombres obtenus. Il arrive que les nombres soient peu pertinents sur le plan didactique et ne favorisent pas la confrontation des points de vue entre les élèves. En effet, les élèves s'entendent souvent rapidement sur la valeur de dés à conserver en mobilisant peu de connaissances mathématiques. Ainsi, bien que le hasard, source

d'incertitude, ajoute une touche de frivolité, il ne permet pas à l'orthopédagogue de contrôler le choix des nombres. On peut par exemple penser qu'un lancer tel que 1, 1, 3, 4, 5, 6, 6, 6 a un moins grand potentiel didactique qu'un lancer comme 5, 5, 5, 3, 3, 3, 3, 3. Il apparait ainsi particulièrement pertinent, dans un tel jeu, de prévoir un va-et-vient entre des moments de jeu et des exercices organisés par l'orthopédagogue dans lesquels le jeu est utilisé comme situation de référence.

Cela dit, le hasard, mais aussi l'aspect compétitif entre les élèves et l'orthopédagogue, semblent favoriser un cadrage ludique de l'activité, malgré le contexte dans lequel elle se déroule. La dimension ludique est toutefois plus ou moins visible selon les groupes, ce qui repose sans doute sur un ensemble de facteurs, dont le pilotage réalisé par l'orthopédagogue et la sensibilité au contrat didactique des élèves (Sarrazy, 2002). Le recours au jeu en contexte orthopédagogique ne vise cependant pas à ce que les élèves perçoivent la dimension ludique de l'activité, mais plutôt à favoriser leur engagement cognitif et leur prise de décisions, qui sont essentiels pour provoquer des apprentissages signifiants durable. Et nos résultats suggèrent que le jeu, s'il est bien choisi/construit, peut effectivement agir comme levier à la dévolution en contexte orthopédagogique.

Références

Archambault, J. & Chouinard, R. (2004). *Vers une gestion éducative de la classe (2e éd.)*. Boucherville : Gaëtan Morin.

Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 9*(3), 281-308.

Atkins, I. (2020). *L'enseignement/apprentissage des structures additives auprès d'élèves ayant un trouble du spectre de l'autisme sous l'angle de la théorie des situations didactiques*. Mémoire de maitrise, Montréal, Université du Québec à Montréal.

Brougère, G. (2005). *Jouer/Apprendre*. Paris : Economica.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Brousseau, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998)*. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

Butlen, D. & Vannier, M. P. (2011). Un exemple de situation pour la formation ASH (option D). *Actes du 37e colloque COPIRELEM* (La Grande Motte 2010). IREM de Montpellier.

Duflo, C. (1997). *Jouer et philosopher*. Paris : Presses Universitaires France.

ERMEL (2001). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes. Cours élémentaire (première année)*. Paris : Hatier.

Giroux, J. (2021). *Fondements pour l'investigation des connaissances sur les structures multiplicatives*. (Manuscrit inédit).

Gurtner, J. L., Gulfi, A., Monnard, I. & Schumacher, J. (2006). Est-il possible de prédire l'évolution de la motivation pour le travail scolaire de l'enfance à l'adolescence ? *Revue française de pédagogie, 155*, 21-33.

Houle, V. & Giroux, J. (2016). Conception et pilotage de situations à dimension adidactique en contexte orthopédagogique. *Recherches en didactique des mathématiques, 36*(3), 275-306.

Jacob, L. & Willis, S. G. (2003). The development of multiplicative thinking in young children. In L. Bragg, C. Campbell, G. Herbert, & J. Mousley (Eds.), *Mathematics Education Research: Innovation, Networking, Opportunity: Proceedings of the 26th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia* (Vol. 1, pp. 460 - 467). Melbourne Vic Australia: Deakin University.

Lafortune, L. & St-Pierre, L. (1994). *La pensée et les émotions en mathématiques*. Montréal : Les éditions logiques.

Lee, J. S. (2014). The Relationship Between Student Engagement and Academic Performance: Is It a Myth or Reality? *The Journal of Educational Research, 107*, 177-185.

Mary, C. (2003). Interventions orthopédagogiques sous l'angle du contrat didactique. *Éducation et francophonie XXXI, 2*, 103-124.

Mary, C. & Squalli, H. (2021). Miser sur le potentiel mathématique des élèves en difficulté : fondements épistémologiques et didactiques. In P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gauthier et C. Bisson (éd.), *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté. Quels enjeux et quelles perspectives ?* (pp. 13-33). Montréal : Les Éditions JFD inc.

Matheron Y. & Noirfalise R. (2002). L'aide individualisée : entre système didactique auxiliaire inutile et déficit d'analyse didactique entravant son efficacité et son développement. *Petit x, 60*, 60-82.

Pelay, N. (2011). *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat, Lyon I, Université Claude Bernard.

Proulx, J. (2017). Essai critique sur les travaux de John Hattie pour l'enseignement des mathématiques : une entrée par la didactique des mathématiques. *Chronique, fondements et épistémologie de l'activité mathématique*. http://chroniques.uqam.ca/

Roiné, C. (2009). *Cécité didactique et discours noosphériens dans les pratiques d'enseignement en S.E.G.P.A.* Thèse de doctorat, Bordeaux, Université de Bordeaux.

Sarrazy, B. (2002). Pratiques d'éducation familiale et sensibilité au contrat didactique dans l'enseignement des mathématiques chez des élèves de 9-10 ans. *La revue internationale de l'éducation familiale 6*(1), 103-130.

Sarrazy, B. (2015). Règles, obéissance et transgression : L'enjeu de leurs rapports pour l'enseignement des mathématiques. *Chroniques, fondements et épistémologie de l'activité mathématique*. http://chroniques.uqam.ca/

Titre: Temps légal et performances scolaires en mathématiques : cas des élèves en classe à double vacation à l'école primaire

Auteur: KOUAMÉ Koffi Pierre

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 848 - 860

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Temps légal et performances scolaires en mathématiques : cas des élèves en classe à double vacation à l'école primaire

KOUAMÉ[1] Koffi Pierre

Résumé – Former des citoyens performants grâce aux Mathématiques est une ambition affichée par les instructions officielles en Côte d'Ivoire. Cependant, dans la réalité, des contraintes liées au manque d'infrastructures pour accueillir tous les enfants en âge d'aller à l'école obligent les gouvernants à proposer à l'école primaire, la double vacation qui réduit le temps légal d'enseignement. Notre étude, à partir de l'analyse des notes à des évaluations communes, révèle que ce choix n'impacte pas négativement les performances des apprenants.

Mots-clefs : temps didactique, performance scolaire, classe à double vacation, école primaire.

Abstract – Forming successful citizens through Mathematics is an ambition displayed by official instructions in Côte d'Ivoire. However, in reality, constraints related to the lack of infrastructure to accommodate all children of school age force governments to offer primary school the double shift which reduces the legal teaching time. Our study, based on the analysis of scores in common assessments, reveals that this choice does not negatively impact the performance of learners.

Keywords: didactic time, school performance, double-shift class, primary school.

1. Docteur en didactique des disciplines, Laboratoire de Recherche en Didactiques (LAREDI), Ecole Normale Supérieure (ENS) d'Abidjan, Côte d'Ivoire, koffipierrekouame@yahoo.fr

Introduction

L'éducation est un droit humain, un catalyseur pour la création d'emplois, la croissance économique, des vies plus saines et l'égalité des sexes. L'éducation est une condition préalable essentielle au développement durable et à l'éradication de la pauvreté (Kouakou & Al, 2015). L'éducation, selon ces auteurs, est un outil de construction de sociétés harmonieuses et développées. Ils prennent à leur compte la vision du Forum mondial sur l'éducation tenu en 2000 à Dakar au Sénégal qui, s'appuyant sur la déclaration universelle des droits de l'homme et la Convention relative aux droits de l'enfant, stipule que :

> « Toute personne, enfant, adolescent ou adulte, doit pouvoir bénéficier d'une formation conçue pour répondre à ses besoins éducatifs fondamentaux, au sens le plus large et le plus riche du terme, une formation où il s'agit d'apprendre à connaître, à faire, à vivre ensemble et à être. Une formation qui s'attache à exploiter les talents et le potentiel de chaque personne et à développer la personnalité des apprenants, afin de leur permettre de mener une vie meilleure et de transformer la société dans laquelle ils vivent ».

Offrir à chaque citoyen la possibilité d'apprendre tout au long de sa vie en mettant l'accent sur l'apprenant et sur les processus d'apprentissage devient donc une exigence pour les systèmes éducatifs. Pour ce faire, chaque système éducatif se doit de se donner les moyens humains, financiers et matériels pour améliorer ses performances et celles des apprenants dont il a la charge. Or, pour Boesen et Helenius, (2009), être un citoyen dans une démocratie moderne requiert des compétences mathématiques élaborées. Pour eux, « Comprendre et utiliser des formes différentes de mathématiques dans l'argumentation politique et économique, porter un jugement critique sur la nature des éléments de mathématiques intégrés à la société moderne sont des compétences vitales pour un citoyen actif ». Ils proposent la définition et la mise en œuvre de programmes d'enseignement des mathématiques planifiés avec des objectifs élevés, en assurant une aide à tous en vue de parvenir à une éducation inclusive.

La Côte d'Ivoire s'inscrit dans cette perspective en accordant une place importante à l'enseignement-apprentissage des mathématiques qui ont pour finalité selon les manuels officiels, « résoudre les problèmes de la vie courante à l'aide des Mathématiques ».

L'enseignement des mathématiques dans les écoles primaires ivoiriennes a pour objectif de développer chez les apprenants les capacités d'expérimentation, les capacités d'élaboration de procédures, le développement du raisonnement logique et de l'esprit d'imagination. Au moyen de la résolution correcte de problèmes qui ont du sens pour eux, il les arme en leur permettant de modéliser des situations et de produire des démonstrations.

L'importance de la résolution de problèmes mathématiques dans la formation des apprenants est indiquée par les concepteurs des programmes éducatifs ivoiriens. Selon le Forum mondial sur

l'éducation tenu en 2000 à Dakar au Sénégal, dans le domaine de l'éducation, les questions majeures liées à l'éducation sont l'accès, l'équité, la qualité, la pertinence, le renforcement des capacités et les partenariats. Ce forum relève qu'en dépit des efforts accomplis par les pays africains subsahariens dont la Côte d'Ivoire pour que chaque enfant ait accès à une éducation de base de qualité, seuls dix pays ont atteint l'enseignement primaire universel. Il indique également qu'il n'a pas été possible de répondre à la croissance démographique et à la migration rurale vers les villes. La difficile gestion de la croissance démographique génère des classes à profils spécifiques avec des classes à effectifs pléthoriques ou classes à sureffectifs dans les régions à forte densité de population et des classes à sous-effectifs dans les régions moins peuplées. Dans les classes à sureffectif, l'on observe le fonctionnement des classes en double-vacation ou en double-flux. Ce constat suscite des interrogations. La première de ces interrogations est relative au temps d'apprentissage consacré aux apprenants de ces différentes classes et la seconde est liée à l'impact de ce temps sur leurs performances scolaires.

Dans cette communication, nous nous intéresserons aux classes fonctionnant en double-vacation du Cours Préparatoire première année (CP1), au Cours Moyen deuxième année (CM2).

Nous présenterons d'abord la problématique et le cadre théorique de référence de notre l'étude, ensuite le cadre méthodologique et enfin les résultats.

Problématique et cadre théorique de référence

Contexte et problématique de l'étude

La loi d'orientation N°95-696 du 7 septembre 95 sur l'enseignement de la Côte d'Ivoire stipule en son article premier que,

> « le droit à l'éducation est garanti à chaque citoyen afin de lui permettre d'acquérir le savoir, de développer sa personnalité, d'élever son niveau de formation, de s'insérer dans la vie sociale, culturelle et professionnelle et d'exercer sa citoyenneté ».

L'éducation du citoyen selon cette loi, est donc une priorité pour les autorités ivoiriennes. Selon Save the Children (2014), ce droit du citoyen n'est pas toujours respecté à cause de problèmes liés à l'insuffisance d'infrastructures scolaires, du nombre croissant d'enfants à scolariser et le déficit en enseignants. Un écart important existe entre le nombre d'élèves et celui des structures d'accueil. Cette situation a conduit les autorités en charge de l'éducation à trouver des alternatives telles que l'ouverture de classes à profils spécifiques.

La problématique de notre étude tire sa source dans le déphasage entre les ambitions affichées par le système éducatif ivoirien à travers la place privilégiée accordée à l'éducation du citoyen et particulièrement à la formation du citoyen aux Mathématiques et l'existence de classes à double-vacation

qui réduit le temps d'enseignement- apprentissage des Mathématiques. En effet, ces classes selon les manuels officiels, ont environ deux-cent-quatre (204) heures de cours annuel en Mathématiques, alors que les classes dites « normales » en ont quatre-cent-huit (408) heures.

Cette situation nous amène à nous poser la question suivante : quel est l'impact de la réduction du temps légal sur les performances des apprenants de l'école primaire de Côte d'Ivoire ?

En nous posant cette question, nous voudrions établir le lien entre la durée d'apprentissage ou le temps légal d'apprentissage et les performances des élèves de l'école primaire en Côte d'Ivoire. Pour ce faire, nous partons de l'hypothèse que : « le temps légal d'apprentissage impacte négativement les performances des apprenants des classes à double vacation ».

Clarification notionnelle

Nous définissons des concepts en lien avec notre sujet comme le temps, la performance scolaire et les classes à profils spécifiques, afin de rendre plus lisible notre travail. En enseignement- apprentissage, la notion de temps est l'une des plus controversées. Le temps est parfois cité comme l'une des causes des difficultés que les enseignants rencontrent dans l'accomplissement de leurs missions. Chopin (2007) distingue le temps institutionnel ou temps légal, le temps de l'apprentissage, le temps de l'enseignement et le temps didactique.

Le temps légal ou temps institutionnel est le temps prévu par l'institution scolaire pour permettre à l'enseignant d'installer les compétences prévues chez les apprenants selon les différents niveaux de cours ou selon les différents cycles.

Le temps de l'apprentissage est le temps où l'élève acquiert des connaissances.

Le temps de l'enseignement est le temps utilisé par l'enseignant pour mettre le savoir à la disposition des apprenants afin qu'ils puissent se l'approprier, en vue de son utilisation dans diverses situations de résolution de problèmes de vie quotidienne. Le temps de l'enseignement a un lien très fort avec les différentes méthodes d'enseignement.

Le temps didactique est le temps endogène au système de diffusion des connaissances. C'est l'ensemble des événements qui participent à la diffusion des connaissances par l'enseignant dans sa classe. Il est le temps générateur de savoirs spécifiques.

Legendre (1993) définit la performance comme « le résultat obtenu par une personne, lors de la réalisation d'une tâche spécifique dont l'exécution obéit à des règles préétablies ».

Semé (2002) relève deux types de performances scolaires : la performance globale et la performance partielle. La performance globale est relative à l'ensemble des disciplines de la classe. Elle s'obtient par la moyenne pondérée de ces différentes disciplines. La performance partielle relève d'une catégorie

de disciplines ou d'une discipline particulière. Elle est acquise en faisant la moyenne obtenue dans cette catégorie de disciplines ou dans cette discipline. Pour lui, une performance peut être bonne ou mauvaise. Ce point de vue diffère de celui de Ndiaye (2008) qui considère la performance comme un résultat satisfaisant et durable.

Pour Ndiaye (2008), être performant, c'est réussir les tâches proposées dans une proportion supérieure ou égale à la moyenne.

En éducation, selon Dieng (2007), « les performances peuvent être appréciées à différents niveaux, depuis le système éducatif dans son ensemble, jusqu'à l'apprenant en passant par le maître et l'appréciation des performances de l'élève se fait par le biais d'évaluations souvent sommatives ».

Une classe à profil spécifique est une classe dont le fonctionnement est différent de celui des classes ordinaires à cause de son effectif pléthorique ou de son faible effectif. Les Classes à effectifs pléthoriques sont des classes à sureffectifs et les classes à faibles effectifs sont des classes à sous-effectifs.

En côte d'Ivoire, selon les instructions officielles, les classes à sureffectifs sont les classes dont les effectifs sont supérieurs à cinquante élèves et les classes à sous-effectifs sont celles qui ont des effectifs inferieurs à trente élèves. Les classes à sureffectifs peuvent fonctionner en double vacation. Dans ces types de classe, l'on met en place une organisation où dans le même local, deux groupes pédagogiques reçoivent des enseignements alternativement le matin et l'après-midi. Cette organisation change tous les deux jours ou chaque semaine (Save the children, 2014). Il existe des classes à double vacation de type 1 où dans la même classe, se retrouve un niveau de cours de deux écoles qui se partagent alternativement la même salle. Exemple : CP1A et CP1B ou CE1A et CE1B et des classes à double vacation de type 2 où, Exceptionnellement (en cas d'intempéries, manque d'infrastructures…) des niveaux différents d'une même école se partagent la même salle alternativement. Exemple : CE1 et CE2. Les classes à sureffectifs peuvent aussi fonctionner en double flux. Dans ce cas, l'on a des classes où travaillent successivement dans un même local, deux groupes pédagogiques avec le même instituteur, le premier groupe recevant son enseignement le matin et le second l'après-midi, avec alternance hebdomadaire (sorte de double vacation avec un seul maître).

Cadre théorique de référence

Le cadre théorique de notre étude aborde les questions liées au processus enseignement- apprentissage, à la dimension sociale de l'apprentissage et à la qualité de l'évaluation des apprentissages. Il se nourrit de la théorie des situations didactiques de Brousseau, (1998), du socioconstructivisme de Vygotski, (1995) et des travaux de De Landsheere, (1992).

Pour que l'élève soit performant, il doit avoir acquis des connaissances dans des situations proposées par son maître où s'exercent des relations étroites entre lui et ce dernier, entre lui et le milieu, entre lui et les savoirs. La démarche d'enseignement utilisée par les enseignants observés engage

les phases d'action, de formulation et de validation telles que proposées par Brousseau, (1998). La théorie des situations de Brousseau, (1998) mérite donc d'être abordée pour éclairer notre travail, relativement aux situations dans lesquelles les apprenants reçoivent les savoirs, se les approprient en vue de leur réutilisation correcte dans la résolution de problèmes.

L'approche pédagogique en vigueur en Côte d'Ivoire est l'Approche par les Compétences (APC) qui recommande la découverte de nouvelles notions par les apprenants à partir d'un travail de groupe. Les élèves échangent entre eux et les plus compétents aident les moins performants dans la réalisation de tâches. Le socioconstructivisme tel qu'élaboré par Vygotski, (1989) constitue un cadre idéal pour aider à appréhender le processus de construction des connaissances chez les apprenants en vue de leur réutilisation efficiente.

Les performances des apprenants se mesurent à travers des évaluations. Pour que ces évaluations soient fiables, elles doivent s'adosser à des théories scientifiques telles que celle développées par De Landsheere, (1992) relatives à la qualité d'une évaluation. Cet auteur relève qu'une bonne évaluation est une évaluation qui a un caractère équitable. Aussi, est-il important de prendre en compte la quantité de temps accordée à chaque apprenant dans les activités d'évaluation.

Approche méthodologique

Site de l'étude

La présente étude s'est déroulée dans la Direction Régionale de L'éducation Nationale et de l'Alphabétisation (DRENA) de Dabou (banlieue d'Abidjan), dans les établissements primaires, de la circonscription de l'enseignement préscolaire et primaire de Dabou 2. Elle a été menée dans les Groupes Scolaires Wrod, Mermeville, Sodepalm, Tchothoraf, Lopou, Agnéby et Municipal.

Population cible et échantillon

Notre étude a été menée auprès de deux types de population : des élèves issus des classes pratiquant la *double vacation* de type 1 et des élèves des classes dites « *normales* » qui bénéficient de tout le temps légal consacré à l'enseignement- apprentissage des Mathématiques.

Les élèves des classes pratiquant la double vacation de type1 sont issus de six classes et au nombre de mille-huit-cent-vingt-trois (1823) répartis selon le tableau ci-dessous :

Niveaux	Effectifs
CP1	253
CP2	287
CE1	217
CE2	328
CM1	347
CM2	391
TOTAL	1823

Tableau1- Répartition des élèves pratiquant la double-vacation de type1

Les élèves des classes dites « *normales* » sont issus de six classes et au nombre de neuf-cent-neuf (909) répartis selon le tableau ci-dessous :

Niveaux	Effectifs
CP1	128
CP2	143
CE1	184
CE2	140
CM1	159
CM2	155
TOTAL	909

Tableau2- *Répartition des élèves des classes normales*

Tous ces élèves sont encadrés par des enseignants formés dans les Centres d'Animation et de Formation Pédagogiques (CAFOP). Ils utilisent tous comme approche pédagogique, l'Approche Par les Compétences (APC).

Techniques et outils de collecte de données

Notre travail a consisté à recueillir au moyen de grille, les notes obtenues à des évaluations en Mathématiques par les apprenants des classes à double vacation de type 1 et celles obtenues par les élèves en classes dites « *normales* » puis, à les analyser. La grille comporte trois colonnes. La première colonne présente les types de classe (classe à double- vacation ou classe normale). La deuxième colonne est relative aux effectifs des classes et la troisième présente les élèves performants.

Méthodes de recherche

Nous utiliserons une méthode mixte de recherche : la méthode qualitative et la méthode quantitative. La méthode qualitative nous permettra d'apprécier les performances des apprenants et la méthode quantitative nous permettra de présenter les états statistiques des effectifs des notes qu'ils ont obtenues.

Collecte et analyse des données

À la fin du troisième trimestre, après l'achèvement des programmes, tous les élèves ont été soumis dans les mêmes conditions selon leurs niveaux de cours, à une évaluation en Mathématiques. Les notes obtenues par ces élèves ont été recueillies. Pour mesurer leurs performances, celles des élèves en classe à double- vacation ont été confrontées à celles des élèves en classes dites « *normales* ». Nous retenons de la performance, la définition de N'diaye (2008), qui relève qu'être performant, c'est réussir les tâches proposées dans une proportion supérieure ou égale à la moyenne. Pour notre étude, la note moyenne exigé pour être considéré performant est 25 pour les classes du CE1 au CM2 et 10 pour les classes du CP1 et CP2.

Résultats

Les résultats des apprenants sont ceux obtenus à la fin du troisième trimestre, après l'achèvement des programmes. Ces évaluations sont de type formatif.

Types de classe	Effectifs	Élèves performants
CP1 en double-vacation	253	187
CP1en classes « *normales* »	128	84

Tableau 3- *Performances des élèves de CP2 en Mathématiques à l'évaluation*

Au CP1, avec un effectif total de 253 élèves en classe en double-vacation, 187 élèves soit 73,91 % de l'effectif, sont performants. Pour les élèves en classes « *normales* », sur un effectif de 128 élèves, 84 soit 65,62 %, sont performants.

Dans les deux types de classe, le pourcentage d'élèves performants est élevé avec une tendance supérieure pour les classes à double-vacation.

Types de classe	Effectifs	Élèves performants
CP2 en double vacation	287	207
CP2 en classes « *normales* »	143	123

Tableau 4- Performances des élèves de CP2 en Mathématiques à l'évaluation

Pour la classe de CP2, avec un effectif de 287 élèves en classe à double-vacation, 207 soit 72,13 % de l'effectif, sont performants.

Sur 143 élèves en classe « *normales* », 123, soit 86, 01 %, de l'effectif sont performants.

Le pourcentage des élèves performants dans les deux types de classe est élevé. Cependant, celui des classes « *normales* » est supérieur à celui des classes à double-vacation.

Types de classe	Effectifs	Élèves performants
CE1 en double vacation	281	150
CE1en classes « *normales* »	184	105

Tableau 5- Performances des élèves de CE1 en Mathématiques à l'évaluation

Au CE1 pour les classes à double- vacation, sur 281 élèves, 150 parmi eux, soit 53,38 % de l'effectif, sont performants.

Sur un effectif de 184 élèves en classes « *normales* », 105 élèves représentant 57,07 % de l'effectif sont performants.

Les élèves performants sont les plus nombreux dans ces deux types de classe avec une tendance supérieure pour les classes « *normales* ».

Types de classe	Effectifs	Élèves performants
CE2 en double vacation	328	215
CE2 en classes « *normales* »	140	82

Tableau 6- Performances des élèves de CE2 en Mathématiques à l'évaluation

Au CE2 pour les classes à double- vacation, sur 328 élèves, 215, soit 65,55 %, sont performants.

82 élèves sur un effectif de 140 en classes « *normales* », représentant 58,57 % de l'effectif sont performants.

Dans les deux types de classe, le pourcentage d'élèves performants est élevé avec une tendance supérieure pour les classes à double-vacation.

Types de classe	Effectifs	Élèves performants
CM1 en double vacation	347	188
CM1 en classes « *normales* »	166	106

Tableau 7- Performances des élèves de CM1 en Mathématiques à l'évaluation

En classe de CM1, avec un effectif de 347 élèves en classe à double vacation, 188, soit 54,18 % de l'effectif, sont performants. Sur 166 élèves en classe « *normales* », 106, soit 63, 86 %, de l'effectif sont performants. Dans les deux types de classe, le pourcentage d'élèves performants est supérieur à celui des élèves moins performants avec une tendance supérieure pour les classes « *normales* ».

Types de classe	Effectifs	Élèves performants
CM2 en double vacation	327	105
CM2 en classes « *normales* »	155	95

Tableau 8- Performances des élèves de CM2 en Mathématiques à l'évaluation

En classe de CM2, avec un effectif de 327 élèves en classe à double-vacation, 105, soit 32,11 % de l'effectif, sont performants. Sur 155 élèves en classe « *normales* », 95, soit 61, 29 %, de l'effectif sont performants. Au CM2, le pourcentage des élèves performants en classes « *normales* » est plus élevé, alors que celui des élèves des classes à double-vacation est faible.

Interprétation et discussion des résultats

Nos résultats révèlent que du CP1 au CM1, que ce soit dans les classes à double vacation ou dans les classes « *normales* », la proportion d'élèves performants au sens de N'DIAYE (2008) est plus élevée. Au CP1 et au CE2, dans les deux types de classe, le pourcentage d'élèves performants est plus élevé avec une tendance supérieure pour les classes à double vacation. Le pourcentage d'élèves performants est de 73,91 % contre 65,62 % pour la classe de CP1 et de 65,55 % contre 58,57 % pour la classe de CE2. Au CP2, CE1, CM1, dans les deux types de classe, le pourcentage d'élèves performants est plus élevé avec une tendance supérieure pour les classes « *normales* ». Le pourcentage d'élèves performants est de 86, 01 % contre 72,13 % pour la classe de CP2, 57,07 % contre 53,38 % pour le CE1, et 63, 86 %, contre 54,18 % pour le CM1. Au CM2, Le pourcentage d'élèves performants est moins élevé dans les classes à double vacation et plus élevé dans les classes « *normales* ». Il est de 61, 29 % dans les classes « *normales* » contre 32,11 % dans les classes à double-vacation.

Ces résultats infirment notre hypothèse qui stipule que : « Le temps légal d'apprentissage impacte négativement les performances des apprenants des classes à double vacation ». Cette hypothèse n'est vérifiée que pour la classe de CM2. Du CP1 au CM1, elle ne l'est pas.

Ces résultats sont en concordance avec ceux de Chopin, (2007) qui révèlent que le temps institutionnel n'impacte pas la qualité des apprentissages et les performances des apprenants.

Conclusion

Éduquer le citoyen aux Mathématiques afin qu'il soit performant dans la réalisation de tâches complexes de vie courante est une volonté affichée par les autorités ivoiriennes. Cependant, des contraintes liées à l'insuffisance d'infrastructures scolaires contrarient cette ambition et obligent les autorités éducatives à trouver des alternatives à travers le choix des classes à double-vacation qui réduit le temps légal alloué aux séances d'enseignement- apprentissage des mathématiques dans les classes de l'école primaire.

Les résultats de notre étude ne remettent pas en cause la pertinence de ce choix, car dans les classes de CP1 au CM1, la proportion d'élèves performants est plus élevée dans les deux types de classe. Au CP1 et au CE2, les élèves des classes à double-vacation sont même plus performants que ceux des classes « *normales* ». Globalement, à contenus similaires, le temps légal d'apprentissage diffère d'un type de classe à un autre, mais cette différence de temps n'impacte pas négativement les performances des apprenants.

Références

Boesen, J. et Helenius, O. (2009). Améliorer l'enseignement des mathématiques, *Revue internationale d'éducation de Sèvres*, 51 | 91-101.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : la pensée sauvage.

Chopin, M. P. (2007). *Le temps didactique dans l'enseignement des Mathématiques, Approche des phénomènes de régulation des hétérogénéités Didactiques*, Education, Université Victor Segalen, Bordeaux.

De Landsheere, G. (1992). *Dictionnaire de l'évaluation et de la recherche en éducation*. Paris : PUF.

Dieng, B.D. (2007). Les déterminants de la réussite à l'Université. Vers une modélisation dans le contexte sénégalais. *Thèse de doctorat en sciences de l'éducation inédite*, Université Catholique de Louvain, Louvain-La–Neuve, Belgique.

Kouakou, N. et *al.* (2015). Analyse des déterminants de la performance. *Revue Universitaire des Sciences de l'Éducation*, *N°5*. Abidjan : EDUCI

Légendre, R. (1993). *Dictionnaire actuel de l'éducation*. Montréal : Guérin.

N'diaye, S. (2008). *Former un enseignant motivé et compétent*. Dakar : Nouvelles Éditions Africaines du Sénégal.

Save the children, (2014) : *Gestion des classes à profil spécifique, module de formation*. Abidjan

Semé, A.P.S. (2002). Niveau d'attention et performances en mathématiques chez des élèves de sixième. *Mémoire de maîtrise*. Département de psychologie. Université de Cocody, Abidjan.

UNESCO. (2000). *Cadre d'action de Dakar, L'Education pour tous : tenir nos engagements collectifs*. Paris : UNESCO Site web : www.unesco.org/efa (consulté le 15 février 2022)

Vygotski, L. (1995). *Pensée et langage*. Paris : Éditions sociales.

Titre: La numération de position décimale dans les manuels scolaires québécois du primaire

Auteurs: KOUDOGBO Jeanne et FERNANDES Daniela

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 861 - 875

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

La numération de position décimale dans les manuels scolaires québécois du primaire

KOUDOGBO[1] Jeanne – FERNANDES[2] Daniela

Résumé – Dans cet article, nous présentons les résultats d'une recherche qui vise à décrire ce que véhiculent les manuels scolaires québécois du primaire pour enseigner la numération de position décimale. Après avoir analysé les contenus et les types d'activités, nous discuteront les résultats à la lumière des visées du programme de formation mathématique et des retombées, dont l'impact de l'utilisation des manuels et leurs incidences potentielles sur l'apprentissages des élèves à besoins particuliers.

Mots-clefs : numération de position décimale ; manuels scolaires ; difficultés d'apprentissage ; enseignement-apprentissage ; niveau primaire ; programme d'études

Abstract – This paper focuses on the results of a research project which aims to describe what Quebec elementary school textbooks convey for the teaching of decimal positional numeration. We will present these results according to content and types of activities. Then we will discuss the results considering the aims of the mathematics education program, and the outcomes, including the impact of the use of textbooks and their potential effect on the learning of special needs students.

Keywords: decimal positional numeration; textbooks; teaching-learning; learning difficulties; primary level, curriculum

1. Université de Sherbrooke, Canada, jeanne.koudogbo@usherbrooke.ca

2. Université de Sherbrooke, Canada, daniela.fernandes@usherbrooke.ca

Introduction et problématique

La recherche s'inscrit dans un projet financé par le Fonds de recherche du Québec – Société et culture (FRQSC, 2017-2020-2023[3]) qui porte sur les enjeux de formation mathématique dans le curriculum québécois et dans les manuels scolaires concernant l'enseignement de la numération de position décimale (NPD). Elle s'inscrit dans la suite de nos travaux réalisés au Québec, sur la NPD, dont notre thèse de doctorat (Koudogbo, 2013) et d'autres publications scientifiques (Koudogbo, 2021 ; 2017 et 2013, Koudogbo, Giroux et René de Cotret, 2017). Dans cet article, nous nous limiterons aux premiers résultats de l'étude en cours, en articulant l'utilisation des ressources, les manuels scolaires, avec la problématique de l'enseignement aux élèves à besoins particuliers et les incidences potentielles sur leurs apprentissages.

Le concept de NPD sert à désigner les nombres, à les représenter et à opérer sur eux. La NPD est au cœur de l'enseignement-apprentissage de l'arithmétique au primaire, en plus d'être à la base de la construction des concepts dans d'autres domaines mathématiques. Elle a fait l'objet de plusieurs études au Québec dans les années 80-90 (Bednarz et Janvier, 1984, 1988 ; Giroux, 1991) et ces dernières années (Koudogbo, 2021 ; 2017 ; 2013, Koudogbo, Giroux et René de Cotret (2017) et ailleurs (Mounier, 2010 ; Tempier, 2016 ; 2013). Certaines de ces études ont révélé sa complexité, vu les multiples notions qui la caractérisent, ainsi que les difficultés qu'elle crée chez les élèves (Koudogbo, op.cit. ; Bednarz et Janvier, op.cit.) et chez les enseignants (Ma, 1999). Particulièrement, au Québec, Bednarz et Janvier, à la suite d'une analyse de la prise en compte de la numération (incluant la NPD) dans l'ancien programme et dans les activités des manuels scolaires, ont fait des constats les amenant à expliquer les difficultés et les conceptions erronées des élèves : l'enseignement de la NPD était davantage axé sur l'écriture conventionnelle, le symbolisme, le vocabulaire technique. Le programme, structuré selon un découpage séquentiel du travail sur les nombres conduit l'élève à concevoir le nombre comme un découpage, un ordre, une position. De surcroît, à la suite d'une analyse de séquences d'enseignement dans lesquelles les enseignants ont utilisé des activités des manuels, les résultats des études de Koudogbo (2013) montrent que c'est le principe de position, avec la valeur de position du chiffre dans le nombre (unités, dizaines, centaines, unités de mille...) qui est le plus enseigné au détriment des autres principes, pourtant circonscrits dans le programme d'études québécois, et nécessaires à la conceptualisation. Les études de Tempier (2016, 2013) montrent que dans le programme français et les manuels scolaires, c'est le principe de position qui est surinvesti. Par ailleurs, Koudogbo, dans ses études, constate une absence de liens entre les nombres et les opérations en termes d'action sur des groupements et ainsi, les élèves ont des difficultés liées aux principes de la NPD, lors de l'apprentissage des algorithmes.

3. Ce projet de recherche a bénéficié du Financement du Fonds de Recherche Société et Culture (FRQSC) du Gouvernement du Québec (2017-2020-2023), Référence : 2018-NP-205838.

Or depuis la publication au Québec des travaux de Bednarz et Janvier (op.cit), le programme scolaire québécois a été réformé (MELS, 2006, 2009), s'accompagnant d'un changement de directives, avec une volonté d'organiser les savoirs à la formation mathématique selon le développement des compétences. D'où une restructuration des modalités et contenus d'enseignement : la NPD est au cœur des savoirs essentiels du domaine de l'arithmétique et est articulée avec le nombre et les opérations sur les nombres. La résolution de situations problèmes occupe une place de choix (la situation problème diffère du problème par son libellé, la contextualisation et la conceptualisation.) Les principes de la NPD (base dix, position, valeur de position, groupement et sens du zéro) y sont censés être enseignés. En outre, on note un renouvellement des ressources, les manuels scolaires et les documents d'accompagnement. Dans ce contexte, il importe d'étudier la prise en compte de la NPD dans les manuels scolaires en référant au cadre théorique de la transposition didactique de Chevallard (1991) surtout, la TD externe, liée à la conception des ressources. Mais nous référerons aussi à la TD interne liée à l'usage des contenus des manuels scolaires en classe par l'enseignant ou l'orthopédagogue.

D'ailleurs, des recherches ont montré que les manuels scolaires sont un objet de prédilection pour les enseignants qui utilisent leurs contenus pour enseigner les mathématiques (Côté, 2015 ; Grouws et Smith, 2000 ; Spallanzani et al. 2001). Ils s'y reposent, leur conférant une certaine fiabilité et importance (Lebrun et Lebrun, 2006). Les manuels servent de support aux apprentissages des élèves. Or les manuels ne tiennent pas compte des besoins particuliers des élèves en favorisant leur engagement et apprentissage. Ils préconisent plutôt des situations d'apprentissage uniformes pour tout le groupe-classe (Conne et al., 2006), sans considérer le parcours cognitif des élèves et la nature du handicap (Butlen, 2012). Ainsi, dans l'enseignement des mathématiques auprès de publics spécifiques ou dans des contextes particuliers, se posent le problème de l'utilisation des contenus des manuels ainsi que celui de l'impact de ces manuels sur l'apprentissage des élèves. Cependant, il est certes difficile, à la suite d'une recension d'écrits scientifiques, d'identifier des travaux traitant de l'utilisation des ressources, des manuels, auprès de publics spécifiques, encore moins ceux analysant les retombées en matière de l'impact d'une telle utilisation sur l'apprentissage dans des contextes particuliers. Les études sur l'enseignement des mathématiques auprès d'élèves à besoins particuliers montrent plutôt comment contribuer à l'engagement et à l'apprentissage de ces élèves (Assude, Perez, Tambone et Vérillon, 2013 ; Million Fauré et al. 2018 ; Butlen, 2012). Les réalités de ces contextes imposent de faire des choix conséquents de situations conceptuellement riches, robustes, de recourir à des adaptations qui permettent de conserver les enjeux de savoir selon les besoins mathématiques des élèves.

À la lumière de ce qui précède, nous notons plusieurs enjeux concernant l'enseignement-apprentissage de la NPD. Parmi ceux-ci, il y a les orientations du curriculum québécois et les choix pour enseigner la NPD, avec les incidences sur les ressources, comme les manuels scolaires, leur importance et leurs rôles, la problématique entourant l'enseignement aux élèves à besoins particuliers et l'incidence que pourrait avoir une surutilisation sur l'apprentissage des élèves. Considérant ces enjeux, il nous semble essentiel de réaliser cette étude. Pour cela, la question générale de la recherche est :

Quels sont, pour la formation mathématique au primaire les objets de savoir à enseigner introduits dans les manuels scolaires à propos de la NPD ? L'objectif alors est de décrire et d'analyser les savoirs à enseigner de la NPD tels qu'introduits dans les manuels scolaires pour saisir les enjeux de formation mathématique. Pour ce faire, nous allons, d'abord, circonscrire les appuis théoriques pour cette recherche, puis, nous préciserons les éléments méthodologiques et, finalement, les premiers résultats émergeant des analyses seront présentés. Ce qui nous permettra de les discuter pour introduire des retombées en matière d'apprentissage, d'enseignement, notamment aux élèves à besoins particuliers, de la prise en compte des difficultés des élèves ainsi que de la formation des maîtres.

Appuis théoriques

La transposition didactique (TD)

D'emblée, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de la transposition didactique (TD) de Chevallard (1991) en considérant ses mécanismes qui permettent de saisir les rapports entre les savoirs scientifiques de référence et les savoirs à enseigner tels que retenus et prescrits par les instances officielles dans les textes des programmes, puis transposés dans les instances didactiques. Dans le cas de la présente étude, nous nous intéressons au savoir mathématique, la NPD, dans le Programme de Formation de l'École Québécoise (PFÉQ) du 2e cycle primaire (MELS, 2006) et la Progression des Apprentissages (PDA) (MELS, 2009) ; c'est-à-dire à la transposition didactique externe qui se fait au niveau des manuels scolaires. En ce qui concerne le PFÉQ, les savoirs sont énumérés dans une section distincte, « Savoirs essentiels », sous forme de concepts et de processus mathématiques à être enseignés selon le PDA des trois cycles (élèves de 6 à 11ans). La NPD se trouve au cœur du domaine de l'arithmétique. Elle y constitue la base des savoirs essentiels prévus pour être enseignés suivant les trois cycles durant six années. De plus, des principes de la NPD y sont censés être enseignés au 2e cycle (base dix, position, valeur de position et sens du zéro), avec des nombres inférieurs à 100 000 ; le principe de groupement étant travaillé au 1er cycle. Enfin, la NPD est articulée avec le sens et l'écriture des nombres, le sens des opérations et les opérations sur les nombres. La manière d'envisager la NPD dans le programme s'ancre dans l'approche promue, le socioconstructivisme et le développement des trois compétences disciplinaires (résoudre une situation problème mathématique, raisonner à l'aide de concepts et processus mathématiques et communiquer à l'aide du langage mathématique). Le programme vise le développement de la pensée mathématique. Il revient à l'enseignant de proposer des activités propices aux élèves pour les amener à « réfléchir, manipuler, explorer, construire, simuler, discuter, structurer ou s'entraîner » et à « s'approprier des concepts, des processus et des stratégies » (op.cit, p. 3). La restructuration des savoirs a entraîné un renouvellement des manuels et documents d'accompagnement.

Il importe alors selon la TD externe de saisir quelle forme de vie prend la NPD en tant que savoir à enseigner dans les manuels en fonction des visées du PFÉQ concernant la formation mathématique. Nous ne traitons pas de ce fait des objets enseignés (en classe) ni appris (par l'élève), lesquels relèvent de la TD interne. Nous y reviendrons toutefois lors de la discussion.

Analyse conceptuelle de la NPD et les types d'activités de la NPD

L'**analyse conceptuelle de la NPD nous** permet d'éclairer la façon dont elle est abordée en termes d'objet de savoir à enseigner dans les manuels scolaires et en circonscrire les éléments clés aux fins d'analyses subséquentes sur les plans méthodologiques lors de la collecte des données. Pour cette analyse, nous considérons les publications scientifiques en référant, principalement aux travaux réalisés au Québec, notamment ceux de Bednarz et Janvier (1984, 1988) et nos publications (Koudogbo, 2021, 2017, 2013 ; Koudogbo, Giroux et René de Cotret, 2017), pour décrire les caractéristiques et les principes de la NPD. D'abord, le ***principe de la base décimale*** permet de compter par groupements réguliers de dix en utilisant dix symboles différents (0, 1, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 8, 9) ou un nombre limité de symboles oraux (mots) pour représenter tout nombre ou opérer sur les nombres. Le ***principe de position*** joue un rôle dans l'écriture des nombres : il permet d'écrire un seul chiffre à une position, partant de la droite (unité) vers la gauche (unité supérieure). L'un de ces chiffres (0) doit désigner l'absence d'un groupement d'unités à une position donnée, c'est un principe complémentaire et nécessaire qui renvoie à ***la fonction du zéro***, au sens du zéro. Grâce au ***principe de la valeur décimale***, chaque chiffre d'un nombre écrit réfère à un nombre inférieur à la base 10. La NPD comporte un groupement régulier (10). Grâce à ce groupement régulier, le ***principe d'échange***, applicable aux opérations sur les nombres (retenue/emprunt) permet de faire des groupements (addition) ou de les défaire (soustraction). Par ailleurs, dans les études de Tempier (2013 ; 2016), l'auteur distingue deux principes (décimal et de position). Les ressources proposées aux enseignants sont structurées pour travailler l'aspect «positionnel» et ne favorisent pas une réelle compréhension, par manque d'articulation avec les autres principes et avec les opérations (Koudogbo, op.cit). Ainsi, le principe de position, avec l'identification des chiffres à une position donnée (valeur de position décimale) est plus enseigné.

Nous retenons aussi les entrées/modalités par lesquelles on accède au savoir à enseigner selon les **types d'activités**, l'une étant la résolution de (situations) problèmes, dans le programme d'étude. Nous prenons alors appui sur les travaux de Stein et al. (2000) et Zhu et Fan (2006) pour caractériser les types d'activités selon le degré de conceptualisation et l'habillage mathématique, textuel, visuel, contextualisé. Zhu et Fan distinguent les problèmes simples (calculs, algorithmes) aidant peu à la conceptualisation des problèmes qui la favorisent.

Éléments méthodologiques

La **collecte des données** comprend une variété de corpus documentaire, assurant une rigueur à la recherche (Van der Maren, 2006). Les instruments sont constitués de deux ressources. D'abord, les documents officiels (Programme de formation de l'école québécoise et Progression des apprentissages), un corpus de données ayant servi à la problématisation et à la contextualisation de l'objet sur le plan de la TD externe (voir I et II.1.) Nous considérons ensuite les ressources, les manuels scolaires (manuels, cahier de l'élève, guide d'enseignement) de 2e cycle primaire (élèves de 8-9ans). Les **critères de sélection** sont : 1) l'importance des manuels scolaires pour documenter la mise en texte du savoir à enseigner par l'institution scolaire, en réponse à l'objectif de recherche ; 2) le 2e cycle est retenu, car c'est à ce cycle que les difficultés inhérentes à la NPD sont accrues, avec l'étude des grands nombres (Koudogbo, 2017, 2013 ; Bednarz et Janvier, 1984, 1988) et où s'opèrent les liens entre la NPD et d'autres concepts.

Pour les collections de manuels scolaires, dix ont été approuvées en 2016 par le Comité-conseil sur l'évaluation des ressources didactiques (CCÉRD). Nous avons retenu les collections les plus utilisées : *Adagio, Clicmaths, Défi Mathématique* et *Tam-Tam Mathématique*. Ils constituent un échantillon non probabiliste et intentionnel (Patton, 2002) ; leur qualité permet de documenter et saisir l'objet de recherche. De plus, nous avons construit une grille pour collecter et traiter les données, en nous référant à la recension des écrits scientifiques, aux visées du programme et à l'analyse conceptuelle. Cette grille comprend **deux dimensions**, avec des variables et leurs valeurs, applicables aux activités dans les manuels scolaires des collections : **1)** les contenus, déclinés selon leurs variables, i.e., les ***caractéristiques et les principes*** de la NPD[4] dont la valeur de *position décimale* du chiffre dans le nombre (VPD) ou d'un groupe de chiffre dans le nombre (VPDGC), le *principe d'échange* (retenue ; emprunt), le *sens du zéro* et la *base 10*); en plus du sens des ***opérations sur les nombres***. **2)** les entrées par lesquelles la NPD est investie selon les types d'activités et leurs variables (exercice ou calcul, *problème, situation-problème* et *théorie*). Notons que la nature des variables catégorielles de la base de données SPSS sont des variables dichotomiques (codées 0-1) et nominales. Ainsi (1) représente la présence de la variable dans l'activité et (0) son absence. Ces variables s'appliquent à la dimension *Contenu*. Pour les types d'activités sont codés ainsi : 1 (exercice) ; 2 (problème); 3 (situation-problème); 4 (théorie). Une même activité peut avoir plusieurs dimensions ou variables.

Pour l'**analyse des données**, d'abord, les valeurs aberrantes ont été neutralisées par la fonction Explorer de SPSS et nous avons analysé les données selon la présence des activités de la NPD dans chaque collection et dans l'ensemble des collections. Puis nous avons analysé et comparé les résultats selon les dimensions de façon intra-collection et inter-collections, par des analyses descriptives (fréquences, %). Par le biais de tableaux croisés, la relation entre les variables catégorielles a été exa-

4. Cette variable aide à savoir si une activité concerne la NPD pour saisir quels principes/dimensions sont en jeu.

minée. En gros, nous utilisons une méthode mixte (Johnson et Onwuegbuzie, 2004) en référant à la recension des écrits et aux appuis théoriques pour produire et discuter les résultats.

Résultats

Résultats en lien avec la dimension « Contenus »

Nous présentons et discutons les résultats. D'abord, nous avons répertorié, dans l'ensemble des collections, peu importe les domaines mathématiques (arithmétique, géométrie, mesure, statistiques et probabilité), 3389 activités, dont 833 (24,6%) concernent la NPD. Ce résultat est statiquement considérable et mériterait d'être discuté après. Notons que ces 833 activités se répartissent ainsi dans les collections : Clicmaths (N= 268 ; 32,2%); Défi-Mathématique (N= 215; 25,8%); Adagio (N=178; 21,4%) et Tam-Tam (N=172; 20,6%). En se basant sur ces données, la NPD est plus utilisée dans Clicmaths. Pour les résultats liés aux contenus, ils concernent, d'abord, *les principes de la NPD*. Vu que plus d'un principe peut se retrouver dans une même activité, l'effectif total des présences est 1508. Les résultats exposés dans le tableau-ci, révèlent lequel des principes est statistiquement surreprésenté ou non.

Collections Principes Fréquences et %	Tam-Tam	Clicmath	Défi-mathématique	Adagio	Total **et %**	
Valeur Position Décimale - VPD	84	**207**	**170**	85	**546**	36,2%
%	15,4%	37,9%	31,1%	15,6%	100%	
VPD groupe de chiffres	14	15	**49**	24	**102**	6,7%
%	13,7%	14,7%	48,0%	23,5%	100%	
Échange : retenue	52	29	93	22	196	13%
%	26,5%	14,8%	47,4%	11,2%	100%	
Échange : emprunt	52	12	39	19	**122**	8,1%
%	42,6%	9,8%	32,0%	15,6%	100%	
Sens du zéro	38	66	51	30	185	12,3%
%	20,5%	35,7%	27,6%	16,2%	100%	
Base 10	63	108	85	101	357	23,7%
%	17,6%	**30,3%**	23,8%	28,3%	100%	
Total : Fréquences	303	**437**	**487**	281	**1508**	**100%**
%	20,1%	**29%**	**32,3%**	18,6%	**100%**	

Tableau – Fréquences et pourcentages des principes de la NPD dans les collections

Il apparaît, toutes collections confondues, que les principes à même d'être le plus enseigné sont la valeur de position décimale (VPD) du chiffre dans le nombre, avec 36,2%, et la base 10 (23,7%). Une analyse inter-collections révèle que le principe de la *VPD* est statistiquement surreprésenté dans Clicmath (37,9%) et Défi-Mathématique (31,1%) ; mais sous-représenté dans TamTam (15,4%) et Adagio (15,6%). Quant à la *base 10*, elle est surreprésentée dans Clicmath (30,3%) et Adagio (28,3%). Les fréquences des autres principes se présentent ainsi : la *valeur de position décimale* d'un groupe de chiffres dans le nombre (6,7%); l'échange/ emprunt (8,1%), le sens du zéro (12,3%) et l'échange/retenue (13%). Mais, trois collections se démarquent statistiquement : Défi Mathématique pour la *valeur de position décimale* d'un groupe de chiffres dans le nombre (48 %) et l'échange/retenue (47,4); Tam-Tam pour l'échange/emprunt (42,6%) et Clicmath pour le sens du zéro (35,7%). En second lieu, les résultats liés aux *sens des opérations sur les nombres* montrent un effectif total de 1683 présences. Nous relevons particulièrement une surreprésentation de l'addition dans toutes les collections (38,3%) et une sous-représentation de la division (18,7%), suivie de la soustraction (20,9%) et la multiplication (22,1%). En outre, certaines tendances émergent : la fréquence des quatre opérations est statistiquement surreprésentée dans TamTam (34,3%) et sous-représentée dans Clicmath et Défi mathématique (19%). La *division* est surreprésentée dans Tam-Tam (42,5%), mais sous représentée dans Défi mathématique (12,7%). La *soustraction* est surreprésentée dans Tam-Tam (32,4%) ; sous-représentée dans Clicmath (18,8%). Quant à la *multiplication*, elle est surreprésentée dans Adagio (35,8%) et Tam-Tam (30,9%) et sous représentée dans Défi mathématique (15,6%) et Clicmath (17,7%), comme révélé ci-dessous.

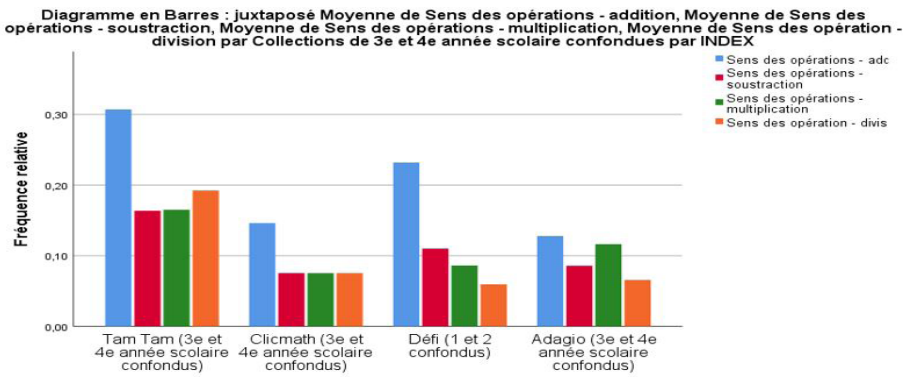


Figure – Distribution du sens des quatre sens des opérations sur les nombres

Les entrées par lesquelles la NPD est investie dans les manuels : les types d'activités

Pour la dimension des **types d'activités** (exercice/calcul, problème, situation-problème), des résultats, nous relevons un effectif de 1597 fréquences sur l'ensemble des collections. Les exercices ou calculs à faire sont statistiquement surreprésentés (56,1%) au détriment des situations problèmes qui ne comptent qu'un pour cent (1%). D'ailleurs c'est seulement la collection *Clicmath* qui obtient

16 fréquences, i.e., les 100% de cette variable ; et donc, 0% dans les trois autres collections. C'est un résultat majeur sur lequel nous reviendrons. Les problèmes représentent 32,2% et la théorie visant à expliquer les notions aux élèves, 10,6 %. D'une collection à l'autre, certaines tendances se dégagent. Ainsi, nous observons dans *TamTam* une surreprésentation des exercices (53,3%) et une sous-représentation de problèmes mathématiques (24,7%). Toutefois, c'est dans la collection *Tam-Tam* qu'on observe une surreprésentation de théorie (50,6%) et le plus grand pourcentage sur l'ensemble des types d'activités (43%) comparativement aux autres collections. La collection *Adagio* montre une surreprésentation de problèmes mathématiques (35%) et les exercices/calculs sont sous-représentés (14,7%), comme dans ces deux collections, *Clicmath* (14%) et *Défi mathématique* (18%); les problèmes mathématiques comptent 24,7% dans chacune de ces deux collections, également et on note très peu de théorie dans *Défi mathématique* (12,4%) et *Clicmath*.

Discussion et conclusion

L'objectif de cette étude était de décrire et d'analyser les savoirs à enseigner de la NPD dans les manuels scolaires pour saisir les enjeux de formation mathématique, à partir de quatre collections. Les résultats produits nous permettent d'ouvrir la discussion en référant à chacune des dimensions pour mieux comprendre comment ce savoir est introduit dans les manuels, puis enseigné dans les classes, vu qu'une majorité d'enseignants s'en servent comme outil principal pour enseigner (Grouws et Smith, 2000). Pour cela, nous discutons les résultats d'un point de vue de la TD externe et interne, selon la forme de vie que prend la NPD dans les manuels en fonction des visées du programme pour la formation mathématique, et en classes en référant aux constats dégagés dans la recension des écrits scientifiques et l'analyse conceptuelle.

D'abord, il faut reconnaître que la NPD occupe toujours une place de choix dans les savoirs à enseigner en mathématiques, tous domaines confondus, car elle correspond à 24,6% des activités d'apprentissage sur l'ensemble des collections. Mais, le contenu véhiculé dans les manuels scolaires est limité, en ce qui concernent **les principes et le sens des opérations** sur les nombres; ce qui peut être une source de difficultés d'apprentissage chez les élèves, comme l'ont montré au Québec les travaux de Bednarz et Janvier, de Koudogbo et de Koudogbo et al, ou ceux de Tempier en France. En effet, c'est le principe de position qui est le plus présent, et donc le plus à même d'être davantage enseigné dans l'ensemble des collections au détriment des autres principes, d'une grande portée pour la conceptualisation de la NPD et des opérations sur les nombres. Quant aux résultats liés au sens des opérations sur les nombres, ces derniers nous révèlent que c'est l'addition qui est l'opération la plus travaillée. Aussi, les sens des opérations sous-représentées sont ceux qui sont habituellement plus complexes et difficiles à conceptualiser. Ces résultats ne surprennent pas, ils traduisent, empiriquement, les constats liés à l'enseignement des quatre opérations sur les nombres dans les classes du primaire au Québec.

Ensuite, pour les entrées par lesquelles la NPD est investie selon les types d'activités, notons que le programme québécois (MELS, 2006, 2009) stipule le développement des compétences mathématiques par la résolution de situations problèmes. Or, force est de constater que les résultats sont loin de tendre vers cette visée et ce, de façon éloquente. **Les types d'activités** ne s'enlignent pas assez sur les visées des documents officiels. En effet, la conception des activités montre une posture traditionnelle de l'enseignement de la NPD où les activités papier crayon sont privilégiées par des exercices, exceptée la collection ClicMaths qui utilise la résolution de situations problèmes. D'ailleurs, cette différence entre cette collection et les autres remet en cause l'évaluation des manuels scolaires par le CCÉRD. Ainsi, en privilégiant les exercices, cela prive non seulement tous les élèves, mais surtout ceux à besoins particuliers, de l'opportunité de fréquenter des situations problèmes, voire des problèmes propices à la conceptualisation (Stein et al., 2000 ; Zhu et Fan, 2006) et d'apprendre la NPD en interrelation avec le sens des opérations sur les nombres. De surcroît, nous notons un écart dans la TD externe des visées du programme, vu la structuration des savoirs essentiels et les modalités de leur enseignement dans les documents officiels (MELS, 2006, 2009). Les activités susceptibles d'être utilisées en classe par des enseignants limitent l'apprentissage de la NPD.

En matière d'**éléments conclusifs**, les résultats de l'étude peuvent servir d'appuis scientifiques à plus d'un titre : d'abord, en ce qui concerne l'amélioration de la formation mathématique des apprenants en général et surtout ceux ayant des difficultés d'apprentissage ou à besoins particuliers, tant par l'éclairage apporté sur les contenus dans certains manuels pour la conceptualisation de la NPD, que par les discussions menée; ensuite, en ce qui concerne les précisions liées au savoir tel qu'investi dans les manuels et pouvant subséquemment guider les choix des enseignants fondés sur les connaissances produites. Ce sont autant de pistes pour influer sur l'usage abusif des manuels et pour interpeler les enseignants, surtout ceux exerçant dans des contextes particuliers à la vigilance didactique lors de la TD interne, vu l'écart observé lors de la TD externe. Si les manuels scolaires approuvés pour enseigner les mathématiques sont, a priori, censés avoir intégré des modifications pour répondre aux visées du programme pour la formation mathématique, l'analyse des activités dans ces manuels et des modalités de mise en scène de la NPD, visibles dans la formulation de ces activités montre le contraire. Ainsi les manuels scolaires sont des indicateurs pertinents de la nature de la formation mathématique des élèves, incluant ceux en difficulté ou à besoins particuliers, en fonction des types d'activités qui y prédominent. De ce fait, mettre l'accent sur les difficultés des élèves et vouloir y remédier de façon partielle, voire exclusive, ne semblent pas envisageable sans clarifier préalablement ce qui peut être à la base de ces difficultés et qui se trouve au cœur de l'enseignement.

D'abord, en ce qui a trait à l'apprentissage des mathématiques, les résultats poussent à arguer en faveur d'un renforcement des difficultés des élèves mises en exergue dans les études précédentes *à cause de la nature du contenu à enseigner, du sens des opérations* et des types d'activités privilégiés. D'une part, quel type de conceptualisation envisagent ces activités dans trois quarts des collections qui misent plutôt sur les exercices d'application, faisant fi des situations problèmes à résoudre. D'autre part, la portée des résultats est importante avec l'émergence d'écarts dans le processus trans-

positif externe de la prescription du programme du savoir à enseigner aux activités introduites dans les manuels scolaires (et les écarts observés inter-collections). Ces écarts permettent d'expliquer les difficultés observées chez les élèves par les études précédentes et à leur prise en charge.

Les résultats interpellent également au niveau de la formation des enseignants, sachant que le manuel scolaire est une référence non des moindres pour ceux-ci, en général, et souvent pour les novices, une ressource dont ils ne peuvent se passer (Grouws & Smith, 2000). Des choix conséquents devront être faits par l'enseignant ou l'orthopédagogue, lors de la TD interne, éclairés par des connaissances mathématiques et didactiques, lorsqu'il s'agit d'enseigner aux élèves, à ceux à besoins particuliers. De plus, il serait pertinent de limiter les écarts lors de la TD externe pour amoindrir les déficits conceptuels et les écarts inter-collections et pallier les obstacles potentiels à l'accessibilité au savoir. La conception des manuels scolaires pourrait se faire en collaboration avec les acteurs concernés, experts dans leur domaine respectif.

Finalement, nous soulignons la nécessité en formation initiale et continue de soutenir les enseignants et les orthopédagogues pour développer une posture critique lors de la sélection et de l'utilisation des manuels ou autres ressources didactiques afin que ceux-ci soient mieux adaptés aux objets et enjeux de savoir et aux apprentissages visés. En ce sens, la vigilance sera de mise lors des phases de l'action pédagogique, en veillant en amont de la séance en classe à la richesse conceptuelle des situations proposées. Ainsi, la conception et l'analyse de situations didactiques pourront servir d'outils efficaces au service du travail de l'enseignant et des apprentissages des élèves (Assude *et al.*, 2013). Car, plus il y a d'écarts lors de la TD externe, plus les choix pour l'accessibilité au savoir lors de la TD interne doivent s'appuyer sur des connaissances mathématiques/didactiques précises et une analyse fine des supports disponibles.

Références

Bardier, J.-C. (2002). Cahier d'exercice 3. *Clicmaths, Mathématiques au primaire*, 2e cycle du primaire. Éditions Grand-Duc - HRW.

Bednarz, N. & Dufour-Janvier, B. (1988). A constructivist approach to numeration in primary school: Results of a three-year intervention with the same group of children. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 299-331.

Bednarz, N. & Dufour-Janvier, B. (1984). La numération : Les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N, 33*, 5-31.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA : Belknap Press.

Chevallard, Y. (1991). Transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné. La pensée sauvage.

Conne, F., Favre, J.-M. & Giroux, J. (2006). Répliques didactiques aux difficultés d'apprentissage en mathématiques : Le cas des interactions de connaissances dans l'enseignement spécialisé. In Doudin, P.-A. et Lafortune L. (dir.), *Intervenir auprès d'élèves ayant des besoins particuliers* (p. 117-141). Éditions Presses de l'Université du Québec.

Deshaies, I. & Bessette, C. (2012). *Tam Tam : mathématique*, 3e [-4e] année. Pearson.

Giroux, J. (1991). Modélisation des connaissances sur la numération et les opérations chez des élèves en première année du primaire. Thèse de doctorat, Université de Montréal.

Grouws, D. A. & Smith, M. S. (2000). Findings from NAEP on the preparation and practices of mathematics teachers. In E.A. Silver et P.A. Kenney (dir.), *Results from the Seventh Mathematics Assessment of the National Assessment of Education Progress* (p.107-141). National Council of Teachers of Mathematics.

Johnson, R. B. & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational researcher, 33*(7), 14-26.

Koudogbo, J. (2013). Portrait actuel des connaissances d'élèves de troisième année de l'ordre primaire et de situations d'enseignement sur la numération de position décimale. Thèse de doctorat en éducation, Université du Québec à Montréal.

Koudogbo, J., Giroux, J. & René-de-Cotret, S. (2017). La numération de position : Où en sont les connaissances d'élèves québécois ? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 17*(3), 199-218.

Koudogbo, J (2017). Decimal number system: Knowledge of Quebec students educated under the 2001/1981 programs and teaching situations. *Journal of Mathematics Education, Education for All, 10*(1), 17-35.

Koudogbo, J. (2021). La recherche en didactique des mathématiques, un levier pour l'enseignement ? Vers une approche systémique pour développer le potentiel des élèves en difficulté. In P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gauthier et Bisson, C. (2021). *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté : quels enjeux et quelles perspectives ?* (p. 53-76). JFD.

Lebrun, J. & Lebrun, M. (2006). *Le manuel scolaire : un outil à multiples facettes*. PUQ.

Lyons, M. & Lyons, R. (2002). *Défi mathématique-Cahier d'apprentissage*. Chenelière.

MA, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates.

MELS (2006). *Programme de formation de l'école québécoise*. Enseignement préscolaire et primaire.

MELS (2009). *Progression des apprentissages au primaire*. Mathématiques. MELS.

Mounier, E. (2010). Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes. Thèse de Doctorat, Université Paris Diderot.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods*. Sage Publications.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M.A. & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. Teacher College.

Spallanzani, C., Biron, D., Larose, F., Lebrun, J., Lenoir, Y., Masselter, G. et Roy, G.-R. (2001). *Le rôle du manuel scolaire dans les pratiques enseignantes au primaire*. Éditions du CRP.

Tempier, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N, 98*, 67-90.

Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Éducation. Université Paris-Diderot - Paris VII.

Zhu, Y. & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*(4), 609-626.

Van der Maren, J.-M. (2006). Les recherches qualitatives : des critères variés de qualité en fonction des types de recherche. In L. Paquay, Crahay, M. & De Ketele, J.-M. (Dir.). L'analyse qualitative en éducation (pp. 65-80). De Boeck Supérieur: Pédagogies en développement.

Titre: Potentialités mathématiques d'élèves identifiés en difficulté dans la résolution d'une situation-recherche en mathématiques

Auteur: MOUBOLI Victor

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 876 - 889

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Potentialités mathématiques d'élèves identifiés en difficulté dans la résolution d'une situation-recherche en mathématiques

MOUBOLI[1] Victor

Résumé – La présente communication porte sur les potentialités mathématiques d'élèves identifiés en difficulté dans la résolution d'une situation-recherche « pavage de carrés » (Grenier et Payan, 2003) expérimentée avec des élèves du début du secondaire (12-13 ans) dans le contexte du Québec. Le concept de potentialités mathématiques est abordé à partir des écrits de quelques chercheurs en éducation (Radford, 2011 ; Mary et Squalli, 2021, Mary et al., 2011). Le Teaching Experiment sert de cadre méthodologique. Une grille d'analyse des résultats est proposée suivie d'une discussion des résultats.

Mots-clefs : Potentialités, Situation-recherche, Résolution, Élèves en difficulté, Entrevues-interventions

Abstract – This communication focuses on the mathematical potential of pupils identified as having difficulty in solving a situation-research «paving of squares» (Grenier and Payan, 2003) tested with pupils from the beginning of secondary school (12-13 years old) in the Quebec context. The concept of mathematical potentialities is approached from the writings of some educational researchers (Radford, 2011; Mary and Squalli, 2021, Mary et al., 2011). The Teaching Experiment serves as a methodological framework. An analysis grid of the results is proposed followed by a discussion of the results.

Keywords: Potentialities, Situation-Research, Resolution, Students in difficulty, Teaching Experiment

1. Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue, Canada, victor.mouboli@uqat.ca

Introduction

Le présent texte découle des travaux menés avec des élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques en résolution de situation-problème dans le cadre d'une recherche doctorale (Mouboli, 2020). Le programme de formation de l'école québécoise met l'accent sur la compétence à résoudre des situation-problèmes du primaire au secondaire (MEQ, 2001, 2003). Cette dernière pose des défis importants pour les élèves, notamment ceux dits en difficulté, au regard de la complexité des situations proposées (Lajoie et Bednarz, 2016). Ce questionnement est le point de départ de notre recherche doctorale qui nous a conduit à analyser de plus près le fonctionnement d'élèves identifiés en difficultés d'apprentissage dans différents types de situations problèmes en mathématiques, non restreintes au format usuel développé au plan institutionnel. Dans cette analyse, le concept de potentialités mathématiques s'est avéré porteur pour analyser les solutions des élèves. Nous revenons ici sur une des situations problèmes expérimentée (Mouboli, 2020), une situation-recherche (le pavage de carrés), par les élèves dits en difficulté d'apprentissage en mathématiques du 1er cycle du secondaire. Dans un premier temps, nous présentons le cadre conceptuel de potentialité et la méthodologie utilisée. Ensuite, nous reviendrons sur l'analyse de ce qui ressort dans cette situation, avant d'ouvrir sur la discussion.

Le concept de potentialité mathématique

Le cadre conceptuel s'articule autour des différents modèles d'intervention en lien avec les élèves identifiés en difficulté. Le concept de potentialités mathématiques est abordé en regard des postures de quelques chercheurs (Radford, 2011 ; Mary et Squalli, 2021, Mary *et al.*, 2011). Notre analyse des travaux de ces chercheurs débouche sur une conception des potentialités mathématiques des élèves et ouvre la voie à un modèle d'intervention. Qu'en est-il du concept de potentialités mathématiques des élèves identifiés en difficulté ? En biologie, le mot potentialité « est associé à un ensemble de réalisations, de manifestations mises en lien avec des conditions : dans ce cas, un caractère ou organe vivant (pour nous un élève) se meut dans un environnement ou dans des conditions (naturelles ou expérimentales) qui peuvent lui permettre de manifester ces potentialités (mathématiques) » (Mouboli, 2020, p. 99). D'aucuns parlent de « potentialité » (Vaivre-Douret, 2019 ; Radford, 2011), d'autres de « potentiel mathématique » (Mary et Squalli, 2021). Nous parlerons de potentialités mathématiques d'élèves. Que recouvre ce concept ? En éducation, Vaivre-Douret (2019) parle des enfants à « hautes potentialités ». Selon l'auteur, les potentialités réfèrent « à la fois à une pluralité et à une diversité de dispositions potentielles, susceptibles de recevoir dans certaines conditions d'environnement, d'exercices et de motivations, les impulsions nécessaires à leur développement » (p.141). La potentialité se définit ici comme « une disposition latente de l'élève susceptible d'être activée. Elle est attachée à l'élève et va se développer sous l'effet de l'environnement (Mouboli, 2020, p.99). Cette conception n'est pas la nôtre. La potentialité n'étant pas conçue comme une disposition de l'élève (Ibid. 2020, p. 99). Radford (2011) parle des potentialités en terme de savoirs mathématiques se

révélant à l'élève de manière singulière au cours d'une activité mathématique médiatisée par des artefacts culturels. Mary et Squalli (2021) parlent d'un potentiel mathématique qui s'actualise en terme de connaissances en action, avec la nécessité de reconnaître « l'importance des situations » (p. 22), de rechercher « des conditions favorables à l'apprentissage » (p. 23), de favoriser la construction de connaissance par l'élève en interaction avec un milieu : « les conduites des élèves ne sont pas indépendantes des situations qui engagent une interaction spécifique avec le savoir » (p. 22). Ce dernier point de vue est le nôtre. Nous parlerons davantage de potentialités qui se développent en interaction avec un certain milieu. Les « [p]otentialités mathématiques ne peuvent être pensées, d'une part, sans une interaction avec certaines conditions, un certain milieu (au sens de Brousseau, 1988), mais, d'autre part, elles ne peuvent être conçues de façon statique […]. Les potentialités mathématiques des élèves sont de l'ordre de **connaissances-en-action**, elles ne sont pas nécessairement explicites ni formalisées […]. Ces potentialités mathématiques **se développent en interaction avec un certain milieu antagoniste** (Brousseau, 1988), source de déséquilibres, dans un processus d'adaptation ouvrant sur divers possibles […]. Les potentialités mathématiques, en ce sens, sont vues comme un **ensemble de connaissances possibles** sur lesquelles ouvre cette activité mathématique de l'élève dans l'interaction avec ce milieu. **« Ces potentialités ne sont pas statiques, elles sont appelées à évoluer au regard des conditions mises en place »** (Mouboli, 2020, p. 102-104). À travers ce point de vue, le rôle joué par le milieu dans le développement des connaissances est central. La conception de Piaget (1967) avec en avant l'idée d'adaptation nous sert d'ancrage à notre posture sur le concept de potentialités mathématiques. Venons-en au cadre méthodologique choisi.

Repères méthodologiques

Le Teaching Experiment (TE) a été retenu comme méthodologie de recherche. Elle a été utilisée au départ dans des domaines autres que la didactique des mathématiques (Steffe et Thompson, 2000), puis en didactique des mathématiques par de nombreux chercheurs (Bonotto, 2010; Confrey, 1994) en lien avec l'analyse du processus de construction de connaissances par les élèves. Selon Steffe et Thompson (2000), « l'émergence de cette approche de recherche résulte de deux raisons : d'abord la nécessité de tenir compte dans les modèles construits par les chercheurs des progrès dont les élèves attestent dans leur processus de construction de connaissances (le chercheur veut ici modéliser cette dynamique de construction et non faire état de connaissances à un moment donné), d'autre part la nécessité de valoriser l'idée que, dans toute pratique d'intervention, l'autonomie des élèves est une dimension importante à considérer » (Mouboli, 2020, p. 132). Steffe et Thompson (2000) distinguent ce qu'ils appellent les «students' mathematics» des «mathematics of students», une distinction tirée d'Ackermann (1995). Selon ces auteurs, « les «students' mathematics» réfèrent aux réalités mathématiques des étudiants, autrement dit à ce que les élèves disent et font avec/sur les mathématiques indépendamment des interactions avec les chercheurs, par opposition aux «mathematics of students» qui concernent les interprétations des chercheurs sur les actions mathématiques des élèves » (Mouboli, 2020, p. 132). Dans la méthodologie du Teaching Experiment, ces

deux aspects sont présents. Le Teaching Experiment répond à notre préoccupation de recherche sous l'angle de l'analyse en profondeur des potentialités des élèves tout au long d'un processus de résolution et ce, sur un long temps. Comme l'affirme Mouboli (2020, p. 137) : (1)[c]ette méthodologie permet une étude approfondie du processus de résolution par des élèves identifiés en difficulté; (2) sur une période longue, fournissant une entrée en profondeur sur le processus de résolution de la situation-problème par ces élèves : en leur accordant une autonomie dans l'explicitation de leur point de vue, en cernant jusqu'où ils peuvent aller au regard de cette situation. Le Teaching Experiment a pris la forme « d'entrevues-interventions »[2] articulées sur trois situations-problèmes différentes (s'étalant sur le long terme). Une des situations (pavage de carrés) a été choisie par nous sur la base de trois critères : (1) une situation non marquée scolairement (2) l'élève peut s'y investir car elle nécessite peu de prérequis (3) le contexte mathématique auquel réfère la situation-problème est un contexte purement mathématique (pour plus de détails sur les autres situations expérimentées touchant à des contextes réalistes et fantaisistes, voir Mouboli, 2020). Pour les élèves identifiés en difficulté, certains travaux de recherche tendent à montrer l'influence du marquage scolaire de la situation dans sa résolution (Lemoyne, 1989). Lemoyne (1989, p. 83) a ainsi montré que « chez l'élève (en difficulté) la peur de ne pas savoir la réponse n'est pas généralisée à tous les contenus mathématiques et ne se manifeste pas dans toutes situations didactiques ». L'auteure distingue deux types de situations : des situations marquées scolairement et des situations non marquées scolairement (Lemoyne, 1989), susceptibles d'influencer la manière dont l'élève va aborder le problème. L'analyse des situations présentant un potentiel dans les recherches (Berdonneau, 2006 ; Mary et Theis, 2007 ; Mary, Squalli et Schmidt, 2008 ; Dias, 2006 ; Coffin *et al*. 2006) auprès d'élèves identifiés en difficulté mettait en évidence que celles-ci partageaient la caractéristique commune d'être non marquées scolairement, favorisant en ce sens une amorce de résolution de l'élève dans la tâche. Ce critère sous-tend la situation pavage de carrés. Notre choix a porté sur une situation «accessible» à l'élève, dans laquelle il pouvait s'engager a priori, de sorte qu'elle ne conduise pas à un blocage de sa part et qu'une construction de significations puisse s'amorcer (Mouboli, 2020). L'étude réalisée a impliqué huit élèves identifiés en difficulté de classes régulières de secondaire 1 d'une école de l'île de Montréal sur la base des témoignages de l'enseignant liés aux observations qu'il avait pu faire lors de la première étape, et de leurs résultats scolaires obtenus en secondaire 1 à la 1ère étape de mathématiques. Nous avons choisi plus spécifiquement pour notre étude des élèves de secondaire 1 pour les raisons suivantes. Les travaux menés sur les élèves en difficulté montrent que *dans le passage du primaire au secondaire et au début du secondaire* les difficultés augmentent en lien avec l'apprentissage de concepts et processus mathématiques complexes qui caractérisent le passage d'un ordre d'enseignement à l'autre (Bednarz et Janvier, 1996; Bednarz *et al*., 2006; Perrin-Glorian, 1993; Salin, 2006; Bednarz et Saboya, 2006). Le niveau secondaire 1, qui constitue un passage important dans la progression des apprentissages, nous semblait donc présenter un intérêt pour notre étude. Il nous fallait aussi cibler plus spécifiquement, pour ce niveau, une école dont proviendraient ces élèves. Nous disposions des résultats de l'ensemble des élèves pour les différentes écoles de la CSDM. Notre intervention a pris

2. Le trait d'union est utilisé entre les deux mots pour montrer que les concepts sont imbriqués.

place plus spécifiquement dans une école de la CSDM[3] pour laquelle les résultats des élèves dans la compétence disciplinaire 1 (CD1) -résoudre une situation-problème en mathématiques- témoignent de difficultés (résultats de moins de 60 %). Cette école regroupe une population multiethnique. Nous reprenons plus précisément cette situation tirée de Grenier et Payan (2003) et l'aménagement que nous en avons proposé dans le protocole qui s'est étalé sur trois séances (voir annexe, Mouboli, 2020).

Ce qui ressort de l'analyse de la situation

Les construits des élèves ont pris la forme de conjectures, énoncées explicitement par les élèves ou mises en œuvre implicitement, ou encore de systématisation de cas possibles. Le tableau ci-dessous présente les conjectures formulées par les élèves à cinq moments différents.

Moments et différentes variantes au fil du temps		**Conjectures formulées**	**Élèves**	**Évolution des mathématiques des élèves (par rapport à la 1ère question : pavage de carrés avec des dominos)**
Pavage de *n'importe quel carré avec des dominos*		(Pnt) La parité ou l'imparité porte sur le nombre de cases au complet (Pnc) La parité ou l'imparité porte sur le nombre de cases d'un côté [sur une dimension] (R) Aucune conjecture	5 élèves (A, B, F, L et R) 3 élèves (J, M et Y) 1 élève (C)	
Pavage de n'importe quel carré *privé d'une case* avec des dominos	Recouvrement d'un carré avec une case spécifique bouchée (1er temps)	Pm) Conjecture mixte (à la fois sur le nombre total de cases mais aussi sur la dimension)	L	Restructuration de la conjecture initiale [La parité ou l'imparité portait sur le nombre de cases au complet]
		(Pnt) Conjecture basée sur la parité ou l'imparité portant sur le nombre de cases au complet	A, B, C, F, J, M, R, Y	J, M, Y travaillent sur le nombre total des cases et non plus sur la dimension C n'avait aucune conjecture et en formule une
	Recouvrement d'un carré quel que soit l'endroit où la case est bouchée (2e temps)	(Pm) Conjecture mixte (à la fois sur le nombre total de cases mais aussi sur la dimension)	L, C	La conjecture est la même qu'au 1er temps. C passe de Pnt à Pm
		(Pnt) Conjecture basée sur la parité ou l'imparité portant sur le nombre de cases au complet	A, B, F, J, M, R, Y	La conjecture est la même qu'au 1er temps.

3. Quelques écoles ont été approchées à cette fin et l'une d'entre elles s'est montrée intéressée à participer au projet. Cette école est parmi les écoles pour lesquelles on retrouvait des résultats faibles dans la compétence « résoudre une situation-problème » (voir chapitre 1, Mouboli, 2020), où nous étions donc à même de trouver des élèves identifiés en difficulté dans ce domaine.

Moments et différentes variantes au fil du temps		Conjectures formulées	Élèves	Évolution des mathématiques des élèves (par rapport à la 1ère question : pavage de carrés avec des dominos)
Extension du pavage de n'importe quel carré avec des dominos à des *triminos ayant différentes formes* [allongé et en L]	1er temps (Carré plein)	Aucune	Tous les élèves	
Jeu autour du pavage de *carrés et rectangles* avec des triminos de différentes formes	2e temps (jeu)	Conjecture portant sur la parité/l'imparité du nombre de carré sur un côté	M	
Pavage de n'importe quel carré *privé d'une case* avec des triminos de différentes formes	3e temps (Carré troué)	Des conjectures (implicites) sous-jacentes aux stratégies [un 3 qui se répète 3…]	B, C, R, M, Y	

Tableau 1 – Conjectures formulées par les élèves à 5 moments différents

L'analyse des « mathématiques de l'élève » et de leur évolution s'est faite en lien avec ces différentes variantes introduites au fil du temps. Nous présentons dans le tableau ci-dessous les potentialités mathématiques des élèves qui ressortent de l'analyse en termes de stratégies et entrées dans le problème, processus mathématiques mobilisés et construits des élèves.

Potentialités en termes de	Pavage de carrés
Stratégies et entrées dans le problème	• Variété de stratégies (recouvrement empirique, recours à un co-dage[4], représentation mentale; apparition de nouvelles stratégies (décentration du matériel, recours à un recouvrement mental) avec l'introduction du jeu (influence de la variable didactique[5]), conjectures réinvesties dans le cas d'une modification de variable didactique, par exemple passage des dominos aux triminos). • Variété d'entrées (par la surface recouverte, par la dimension, par une conjecture déjà élaborée)
Processus mathématiques mobilisés	• Formulation de conjectures • Passage à une généralisation (à des conjectures énoncées de façon générale au-delà du cas spécifique), exemplification, recours à des exemples • Passage à une représentation mentale (du pavage) • Validation des conjectures (dans de nouveaux cas) • Réinvestissement des conjectures et restructuration de celles-ci • Systématisation des cas (possibles ou non)
Supports mobilisés dans la résolution	Une variété de supports sollicités : Matériel, traces écrites (permettant de contrôler le recouvrement en l'absence de matériel), représentation mentale.
Registres de travail	Différents registres de travail mobilisés : Numérique, géométrique, visualisation Des registres de travail qui s'enrichissent (ex du géométrique dans la systématisation)
Des construits	Une variété de construits : • 3 types de conjectures • restructurées dans de nouveaux cas (ex carré privé d'une case)

Tableau 2: Les « mathématiques des élèves » déployées dans la situation : pavage de carrés (Extrait et adapté de Mouboli, 2020, p.362

4. Par exemple, l'élève J met en évidence les dominos par son trait. La procédure est plus visuelle [On peut reconstituer le domino qui recouvre sous les traits].

5. Il s'agit, par exemple, d'un recouvrement mettant à profit la dimension à l'aide des triminos en forme de L. Dans ce cas, c'est la visualisation qui conduit l'élève A à affirmer que le recouvrement est possible pour le rectangle 6 x 3 (voir figure 2). En effet, il repère un rectangle 2 x 3 que l'on peut rentrer dans 6 x3. En revanche, l'élève B voit un rectangle 3 x 2 et pense alors qu'il reste une rangée non-comblée (voir figure 2).

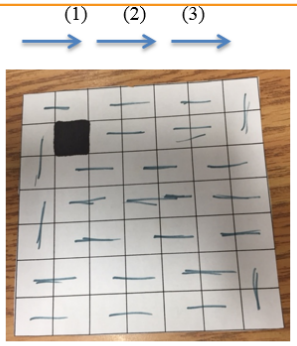


Figure 1 Production de l'élève J en lien avec un recours à un codage (Extraite de Mouboli, 2020, p. 189)

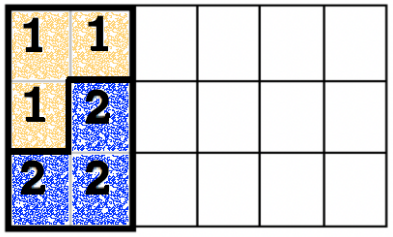
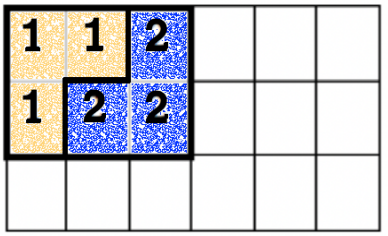
Visualisation élève A	Visualisation élève B
	

Figure 2 Recouvrement d'un rectangle 6 x 3 à l'aide de triminos par les élèves A et B (Extraite et adaptée de Mouboli, 2020, p. 208)

Conclusion

Les tableaux précédents mettent clairement en évidence les potentialités développées par les élèves dans la situation « pavage de carrés ». Celles-ci se manifestent dans les manières même d'aborder les problèmes (stratégies et entrées dans le problème, supports mobilisés, registres de travail) mais également dans la richesse mathématique qui s'y déploie, prenant la forme de processus mis en œuvre et de conjectures élaborées. L'apport de ces résultats pour les recherches sur les élèves en difficulté d'apprentiisage rejoint les travaux d'autres chercheurs comme Lemoyne (1989), Mary et Squalli (2021), Berdonneau (2006), Mary et Theis (2007), Mary, Squalli et Schmidt (2008), Dias, (2006), Coffin *et al.* (2006) et Giroux et Ste-Marie (2006) qui montrent bien l'apport de situations problèmes qui sortent du domaine scolaire usuel pour engager les élèves dans une véritable activité mathématique, reconstruisant un rapport au sens pour ces élèves. Les résultats de notre recherche semblent montrer que les potentialités des élèves se développent en interaction avec un certain milieu. Par exemple, le fait de modifier dans l'action certaines variables didactiques (par exemple, le passage de dominos aux triminos) a permis de voir des changements significatifs dans les constructions et les raisonnements d'élèves. Cette recherche nous amène à poursuivre des travaux sur d'autres situations

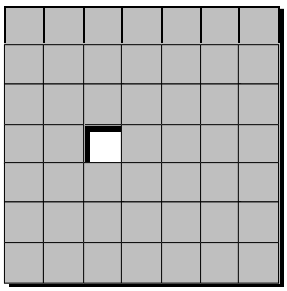
de manière à mettre en évidence les aménagements féconds du point de vue des apprentissages des élèves (Mouboli, 2020).

Annexe

Situation-recherche initiale: le pavage (SRC tirée de Grenier et Payan, 2003)

Peut-on, à l'aide de dominos, paver un carré de côté impair, par exemple 7, privé d'une case? (la case pouvant être choisie n'importe où). La tâche est présentée sur un exemple.





Références

Ackermann, E. (1995). Construction and transference of meaning through form. Dans Steffe, L. P. et Gale, J. (dir.), *Constructivism in education* (pp. 341-354). Hillsdale, NJ : Lawrence Erlbaum.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. Dans Bednarz, N., Kieran, C. et Lee, L. (dir.), *Approaches to Algebra: Perspectives for research and Teaching* (pp. 115-136). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Bednarz, N., Lajoie, C., Théorêt, M. & Poirier L. (2006). Défis posés par l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques en milieu défavorisé. Dans EMF (dir.), Colloque *Espace mathématique francophone*, EMF 2006. Sherbrooke : EMF. Récupéré de http://emf.unige.ch/files/5914/5390/4201/EMF2006_GT7_Bednarz.pdf

Bednarz, N. & Saboya M. (2006). Questions didactiques soulevées par l'enseignement de l'algèbre auprès d'une élève en difficulté au secondaire. Dans Giroux, J. et Gauthier, D. (dir.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : Hommage à Gisèle Lemoyne* (pp. 139-166). Montréal : Éditions Bande Didactique.

Berdonneau, C. (2006). Le « coffre à problèmes » : un dispositif d'apprentissage à la résolution de « problèmes pour chercher », son intérêt face à des élèves en difficulté, en particulier pour des enfants à haut potentiel intellectuel. Dans Bednarz, N. et Mary, C. (dir.), Colloque *Espace mathématique francophone*, EMF 2006 : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. (GT 7). Sherbrooke : EMF. Récupéré de http://emf.unige.ch/files/4714/5390/4206/EMF2006_GT7_Berdonneau.pdf

Bonotto, C. (2010). Engaging students in mathematical modelling and problem posing activities. *Journal of mathematical modelling and application, 1*(3), 18-32.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

Coffin, F., Dupraz, M., Manin, S. & Payan, C. (2006). «Maths à modeler» : situations-recherche pour l'enseignement des mathématiques auprès d'enfants présentant des troubles psychopathologiques. Dans Bednarz, N. et Mary, C. (dir.). *Espace mathématique francophone*, EMF 2006 : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés. (GT 7). Sherbrooke : EMF. Récupéré de http://emf.unige.ch/files/5914/5390/4232/EMF2006_GT7_Coffin.pdf

Confrey, J. (1994). « Voix et perspective » : à l'écoute des innovations épistémologiques des étudiants et des étudiantes. *Revue des sciences de l'éducation, XX*(1), 115-133.

Dias, T. (2006). Expérimenter en mathématiques pour relever le défi de l'adaptation. *Colloque Espace mathématique francophone*, EMF 2006 (thème 7). Sherbrooke : EMF. Récupéré de http://emf.unige.ch/files/9014/5390/4237/EMF2006_GT7_Dias.pdf

Grenier, D. & Payan, C. (2003). Situations de recherche en «classe», essai de caractérisation et proposition de modélisation. Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2002 (pp. 189-203). Paris : IREM de Paris, Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM)

Lajoie, C. & Bednarz, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du XXIe siècle au Québec : rupture ou continuité? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 16*(1), 1-27. DOI : 10.1080/14926156.2014.993443, http://dx.doi.org/10.1080/14926156.2014.993443

Lemoyne, G. (1989). La peur de ne pas savoir la réponse : les difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. *Repères, essais en éducation* (12), 79-101.

Mary, C. & Squalli, H. (2021). Chapitre 1: *Miser sur le potentiel mathématique des élèves en difficulté : Fondements épistémologiques et didactiques*, Dans P. Marchand, A. Adihou, J. Koudogbo, D. Gauthier et C. Bisson (dir.), *La recherche en didactique des mathématiques et les élèves en difficulté : Quels enjeux et quelles perspectives ?* Montréal : Les éditions JFD.

Mary, C., Squalli, H., Roy, P. & Turgeon, S. (2011). Intervenir auprès des élèves à risque. Le développement professionnel des compétences, un pas sur la bonne voie! *Vie pédagogique, 158*(Juin), 27-29. Récupéré de http://collections.banq.qc.ca/ark:/52327/bs2043482

Mary, C. & Theis L. (2007). Les élèves à risque dans des situations-problèmes statistiques: stratégies de résolution et obstacles cognitifs. *Revue des sciences de l'éducation, XXXIII*(3), 579-599.

Mary, C., Squalli, H. & Schmidt, S. (2008). Mathématiques et élèves en difficulté grave d'apprentissage : contexte favorable à l'interaction et au raisonnement mathématique. Dans Bisaillon, J. M. et Rousseau, N. (dir.), *Les contextes d'intervention favorables aux jeunes en grandes difficultés* (pp. 169-192). Québec : Presses de l'Université du Québec.

MEQ (2003). Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle. Québec : Gouvernement du Québec.

MEQ (2001). Programme de formation de l'école québécoise. Version approuvée, éducation préscolaire, enseignement primaire. Québec : Gouvernement du Québec.

Mouboli, V. (2020). *Analyse de la résolution de situations-problèmes par des élèves en difficulté d'apprentissage en mathématiques : difficultés et potentialités*. Thèse. Montréal (Québec, Canada), Université du Québec à Montréal, Doctorat en éducation.

Perrin-Glorian, M.-J. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes faibles. *Recherche en didactique des mathématiques, 13*(1), 5-118.

Piaget, J. (1967). *Biologie et connaissance*. Paris : Gallimard.

Salin, M.-H. (2006). A la recherche de milieux adaptés à l'enseignement des mathématiques. Dans Giroux, J. et Gauthier, D. (dir.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques Hommage à Gisèle Lemoyne* (pp. 195-217). Montréal : Éditions Bande Didactique.

Steffe, L.P. & Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential. Dans Lesh, R. et Kelly, A. E. (dir.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ : Erlbaum.

Radford, L. (2011). *Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage : la théorie de l'objectivation*. Toulouse : Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques de Toulouse.

Vaivre-Douret, L. (2019). *Caractéristiques développementales de l'enfant à « hautes potentialités » et compréhension de trajectoires vers la dépression à l'âge scolaire en primaire et au collège*.

Titre: Accompagner un élève malvoyant en mathématiques : quelles aides ? quels effets ?

Auteurs: PETITFOUR Édith et HOUDEMENT Catherine

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 890 - 905

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Accompagner un élève malvoyant en mathématiques : quelles aides ? quels effets ?

PETITFOUR[1] Édith – HOUDEMENT[2] Catherine

Résumé – Dans cet article, nous analysons les aides apportées par une accompagnante d'élèves en situation de handicap (AESH) à un élève malvoyant inclus dans une classe ordinaire de sixième (élèves de 11-12 ans), dans la réalisation d'une tâche mathématique nécessitant une manipulation de matériel, lors d'une séance introductive du concept d'aire. Nos analyses mettent en évidence des dissonances sémiotiques qui éclairent sur des obstacles aux apprentissages que peut produire l'accompagnement proposé à l'élève.

Mots-clefs : sémiotique, handicap, dissonance, troubles visuels, accompagnant, mathématiques

Abstract – This paper analyzes the support provided by a Special Education Assistant (SEA) to a visually impaired student included in a mainstream sixth grade class (aged 11-12), in solving a mathematical problem requiring the use of manipulatives, during an introductory lesson on the concept of area. The present analyses highlight semiotic misunderstandings which can arise, providing insight into the obstacles to learning that can result from the support offered by the SEA to a visually impaired student in mainstream education.

Keywords: semiotic, special need, dissonance, visual impairment, teaching assistance, mathematics

1. Univ Rouen Normandie, Université de Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000, Rouen, France, edith.petitfour@univ-rouen.fr

2. Univ Rouen Normandie, Université de Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000, Rouen, France, catherine.houdement@univ-rouen.fr

Nos recherches visent à comprendre ce qui se joue dans la relation didactique entre les acteurs (élèves, enseignant, accompagnant d'élèves en situation de handicap) et le savoir mathématique. Dans cette optique, nous étudions la dimension sémiotique de l'activité mathématique dans une *approche situationniste* (Houdement et Petitfour, 2022) : nous observons et analysons des situations d'enseignement et d'apprentissage dont nous n'interrogeons ni la motivation, ni la pertinence didactique *a priori* et dont le thème mathématique est laissé au libre choix de l'enseignant. Notre but est de révéler des types d'interactions susceptibles de favoriser l'engagement des élèves à besoins éducatifs particuliers dans l'apprentissage. Nous dévoilons ainsi des « phénomènes » surgissant dans les interactions d'enseignement et d'apprentissage, qui pourraient éclairer de façon plus large certaines difficultés d'élèves.

Cette recherche s'inscrit dans un projet[3] visant à étudier des conditions favorables à l'accessibilité aux savoirs mathématiques d'élèves présentant des troubles visuels. Elle se situe dans la lignée d'études de cas d'élèves en situation de handicap bénéficiant en mathématiques d'un accompagnant (Petitfour, 2018 ; Suau *et al.*, 2017 ; Toullec-Théry, 2020). Dans la continuité de nos travaux présentés à EMF 2018 (Houdement et Petitfour, 2019), nous analysons des interactions lors d'une situation d'aide. Nous étudions ici les aides apportées par une accompagnante d'élèves en situation de handicap[4] (AESH) à un élève malvoyant scolarisé dans une classe ordinaire de sixième (11-12 ans) en 2018-2019[5], dans la réalisation d'une tâche mathématique nécessitant une manipulation de matériel. Précisons que nous observons certes un élève en situation de handicap et son accompagnante dans une classe, mais sans *a priori* sur leurs potentialités. Ce n'est que dans l'analyse des interactions que nous tenons compte des empêchements (par exemple liés au handicap pour l'élève, au manque de formation pour l'accompagnante).

Nous présentons tout d'abord les fondements théoriques de notre recherche et nos outils d'analyse, nous donnons ensuite quelques éléments de contexte de l'étude, puis exposons nos analyses avant de conclure.

3. Projet bénéficiant du soutien de l'École Supérieure du Professorat et de l'Éducation de l'Université de Rouen Normandie.

4. Depuis la loi française du 11 février 2005 (https://www.legifrance.gouv.fr/eli/loi/2005/2/11/2005-102/jo/texte), les élèves en situation de handicap peuvent être scolarisés en milieu ordinaire et bénéficier d'un accompagnant dont les missions concernent les actes de la vie quotidienne, l'accès aux apprentissages et les activités de la vie sociale et relationnelle. Ces accompagnants bénéficient de 60 h de formation.

Source : https://www.education.gouv.fr/les-accompagnants-des-eleves-en-situation-de-handicap-12188

5. En France, 64211 élèves en situation de handicap sont scolarisés en classe ordinaire en 2018-2019 et suivent une formation en collège (hors SEGPA), 1419 d'entre eux (soit environ 2 %) présentent des troubles visuels (Ces troubles regroupent les troubles de l'acuité visuelle ainsi que les troubles de la vision).

https://www.education.gouv.fr/media/11165/download

Fondements théoriques et outils d'analyse

Approche sémiotique

En appui sur la théorie socioculturelle vygotskienne des apprentissages (Vygotski, 1978) et à la suite de Radford (2009), nous considérons qu'en mathématiques « penser ne se produit pas uniquement dans la tête mais aussi dans et à travers une coordination sémiotique sophistiquée de discours, corps, gestes, symboles et outils »[6] (Radford, 2009, traduit par nous), et cela quel que soit l'individu ou les individus observés. Nous nous appuyons alors sur le concept de *faisceau sémiotique* (Arzarello, 2006) afin de prendre en compte le développement dynamique des interactions entre les différents systèmes de signes tels le langage, coordonné avec des aspects corporels (gestes, postures, regards, actions avec du matériel) et des traces écrites (mots, dessins, symboles mathématiques).

Nous utilisons un *tableau sémiotique* (Houdement et Petitfour, 2020 ; Petitfour et Houdement, 2022) pour rendre compte de la multimodalité des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage et interpréter les différents signes activés lors des interactions entre les acteurs de la classe (cf. figure 3). Le tableau sémiotique donne à voir deux aspects clés du faisceau sémiotique : son caractère systémique et sa nature dynamique. L'aspect systémique traduit la simultanéité, il se réfère aux relations entre les différents types de signes à un moment donné. L'aspect dynamique traduit la chronologie, il se focalise sur les évolutions des signes et sur leurs transformations au cours du temps. Sur la première ligne du tableau sémiotique figurent des repères de temps, instants auxquels démarre chaque interaction, correspondant à un tour de parole ou au démarrage d'une action ou d'un geste. Nous inscrivons également le nom des auteurs des interventions (en général le locuteur principal). Les types de signes générés ou interprétés par les acteurs de la situation et le nom de ces acteurs sont présentés sur autant de lignes que nécessaire en fonction de ce que les données filmées et enregistrées permettent de recueillir. Nous pouvons par exemple (cf. figure 3) relever des mots parlés (écrits en caractères droits dans le tableau), le ton ou l'intensité avec lesquels ils sont formulés (indications écrites en italique), des formes d'expression corporelle (posture, regard, gestes, action avec du matériel) décrites verbalement (écrites en italique) ou par des photos ou des dessins, et enfin des traces graphiques (schémas, dessins, etc.). La lecture d'une colonne donne à voir la simultanéité des signes produits, la lecture d'une ligne rend compte de la chronologie.

Enfin, nous utilisons les termes de *dissonance sémiotique* (*ibid.*) pour nommer un décalage entre deux interprétations de mêmes signes, ou une interprétation personnelle « décalée » d'un signe mathématique.

6. "thinking does not occur solely in the head but also *in* and *through* a sophisticated semiotic coordination of speech, body, gestures, symbols and tools." (Radford, 2009, p. 113).

L'analyse sémiotique consiste à repérer des signes, les conditions de leur émergence, leur circulation et les interprétations qui en sont faites par les acteurs. Nos analyses se situent à un niveau micro, sur des épisodes allant de quelques secondes à quelques minutes. Les interprétations que nous faisons s'appuient sur un réseau d'informations que l'on recompose à partir de plusieurs sources : observations en classe filmées et enregistrées, entretiens avec l'enseignant ou les élèves, échanges par mail, documents de travail de l'enseignant, interventions de l'enseignant avec ses pairs lors de moments de formation, de moments de classe, etc. Nous réalisons ainsi une triangulation de données (Denzin, 1978).

Analyse des aides apportées

En utilisant les termes de Chevallard (1999), nous considérons que l'élève et l'AESH constituent un système didactique auxiliaire (SDA), visant *a priori* une meilleure accessibilité didactique (Assude *et al.*, 2014), à l'intérieur du système didactique principal (SDP) constitué par l'enseignante et tous élèves de la classe. Ces deux systèmes ne sont pas juxtaposés, puisque le SDA doit intégrer des informations ou questions venant de l'enseignante, ou des autres élèves ; inversement le SDP peut accueillir des interventions ou questions venant du SDA, formulées par l'élève ou l'AESH. Le SDA, avec sa propre logique de fonctionnement, a une fonction d'aide au SDP dans lequel est inclus l'élève en situation de handicap, cependant, il peut s'ériger en obstacle. Des temps didactiques parallèles peuvent en effet écarter l'élève des apprentissages de la classe, en outre, la distance intime que l'AESH entretient généralement avec l'élève dans ce type d'accompagnement peut empêcher son émancipation en classe (Toullec-Théry, 2020). L'élève peut, par exemple, être « empêché » d'échanges spontanés avec d'autres élèves s'il n'a d'autres voisins de classe que l'AESH : il reste alors entièrement dépendant de l'AESH dans ses demandes d'aide.

Nous utilisons le cadre d'analyse de l'action instrumentée (Petitfour, 2018) pour identifier deux types d'aide pouvant être apportées à un élève dans une activité mathématique où une manipulation de matériel est attendue : une aide pratique et une aide technique. Ces aides sont contextualisées, d'une part aux « déficits objectifs » dont l'élève relève, comme un handicap visuel ou un handicap cognitif (dyspraxie), et d'autre part aux connaissances mathématiques en jeu dans l'action à réaliser avec le matériel. Dans le cas étudié, l'aide pratique, compensatoire du handicap visuel, est relative à la réalisation concrète de la manipulation dans ses aspects manipulatoires et organisationnels nécessitant un repérage visuel : elle concerne tout ce qui, dans l'action, ne met pas en jeu de connaissances mathématiques. L'aide technique est relative aux aspects de la manipulation en lien avec le savoir mathématique en jeu. Les aides peuvent être de différentes natures (langagière, gestuelle, etc.). Nous les repérons en analysant les faisceaux sémiotiques.

Données et analyse préalable

Contexte et recueil de données

Marco est un élève malvoyant ayant une vision tubulaire. Il est scolarisé dans une classe ordinaire de sixième de grande ville. Jenny, recrutée comme AESH de Marco, nous informe lui apporter un soutien oral pour lui permettre d'accéder aux informations transmises à la classe par écrit – collectivement au tableau ou sur des documents individuels –, et prendre en charge la production d'écrits pour soulager sa fatigue visuelle.

La séance analysée est la première d'une séquence sur le thème des aires, conçue par une enseignante en formation (pratique accompagnée) dans ce collège, un jour par semaine durant toute l'année scolaire. Elle est menée par la stagiaire en présence du professeur titulaire de la classe. Nous avons filmé cette séance avec deux caméras, une centrée sur Marco et Jenny, assis côte à côte au premier rang face au tableau, l'autre centrée sur le tableau et l'enseignante. Un enregistreur était placé près de Marco et Jenny disposait d'un micro-cravate. Les données ont été transcrites.

Le document donné aux élèves est constitué du texte qui suit et d'une annexe (figure 1).

1. Calculer le périmètre de chaque rectangle.
2. Qu'observe-t-on ?
3. Quelle différence peut-on observer entre le rectangle 1 et 3 ?
4. Quelle méthode peut-on utiliser pour justifier la question précédente ? Tester-la.

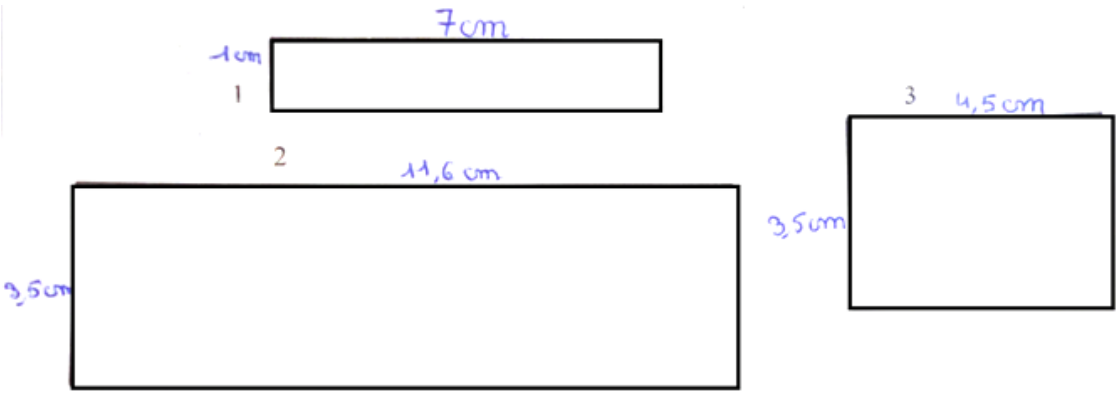


Figure 1 – Annexe du document-élève

(sur le document original, les figures sont à l'échelle 1 ; les longueurs ne sont pas indiquées)

Le travail démarre dans le SDP par un rappel en collectif de la formule de calcul du périmètre d'un rectangle et par l'écriture par l'enseignante des dimensions des rectangles sur l'annexe vidéoprojetée. Les élèves calculent le périmètre de chaque rectangle, une correction au tableau est réalisée ainsi que le constat que les rectangles 1 et 3 ont même périmètre. La question de la différence entre ces deux rectangles est traitée collectivement et aboutit à la demande de justifier que les rectangles 1 et 3 ont une aire différente. Nous nous centrons sur cette activité qui va engager dans les faits une manipulation de matériel.

Analyse a priori

La tâche[7] (mathématique) est de comparer les deux rectangles selon leur aire. L'enseignante engage les élèves à manipuler des formes en papier ; elle exclut donc *a priori* une technique de calcul de l'aire par produit des deux longueurs du rectangle, rencontrée *a priori* par les élèves en fin d'école primaire (9-10 ans).

Parmi les techniques possibles pour résoudre la tâche (voir annexe 1), deux techniques sont envisageables pour comparer, selon leur aire et par manipulation, deux surfaces rectangulaires. On peut tester une comparaison directe (technique Ta) : on prend une forme, on la place sur l'autre, on la glisse et on la tourne pour vérifier, par la vue (et/ou par le toucher si les deux formes sont découpées), si les deux se superposent exactement ou si l'une est totalement incluse dans l'autre. Si l'on n'obtient ni superposition exacte, ni inclusion, une comparaison indirecte est nécessaire (technique Tb) : on découpe une forme en morceaux tels que, en réorganisant les morceaux par juxtaposition, l'assemblage obtenu se superpose exactement à l'autre forme, est inclus dans l'autre forme ou la recouvre. Les élèves sont susceptibles d'avoir déjà réalisé de telles manipulations lors des deux années précédentes (école primaire). Rappelons que notre but n'est pas de juger de la pertinence – mathématique ou didactique – de l'activité proposée, mais d'analyser les interactions produites par l'activité.

Soulignons la complexité d'interprétations du terme « rectangle » dans l'épisode étudié. Comme objet graphique, il peut être perçu globalement comme une surface (objet 2D) mais aussi, par *déconstruction dimensionnelle* (Duval, 2005), comme un ensemble de lignes (les côtés, objets 1D) ou un réseau de points (les sommets, objets 0D). Le découpage de la feuille suivant le contour du rectangle produit un objet matériel pour lequel la vision surface prédomine. Pour travailler sur le concept d'aire (ici de rectangles), la manipulation physique de l'objet matériel (le rectangle en papier) doit avoir comme horizon théorique la *Géométrie 2* (Houdement, 2007), qui accueille l'objet géométrique, conceptuel : seules certaines manipulations du rectangle papier sont licites avec cet horizon.

7. Nous utilisons *tâche* et *technique*, au sens de Chevallard (1999), qui ne les conçoit qu'insérées dans une institution (ici les mathématiques scolaires). Une *technique* est un moyen, reconnu par l'institution, d'accomplir la tâche. Un *type de tâches* est un ensemble de tâches associables à une même technique. Nous appelons *procédure* un moyen utilisé et/ou construit par un sujet (ici l'élève) pour traiter la tâche : elle peut s'appuyer sur une technique (ou plusieurs, ou aucune), être efficace ou pas.

Un *langage technique* (Petitfour, 2017a), à savoir un langage relatif à l'utilisation du matériel en lien avec le concept mathématique sous-jacent, permet d'exprimer une comparaison licite : découpage d'un rectangle en surfaces, sans perte de papier, à rassembler par juxtaposition, pour recouvrir l'autre rectangle, complètement, exactement ou partiellement.

Analyse

Lors de la séance, l'enseignante cherche à orienter les élèves vers la technique Tb pour « vérifier que le rectangle 3 utilise plus de quantité de papier que le rectangle 1 » comme nous le découvrirons lors de la correction finale de l'activité. Sa consigne orale est transcrite dans un tableau (figure 2). Dans la première colonne, les données temporelles de type 24'09 (24 minutes 9 secondes) correspondent au moment de la séance où les éléments de la consigne sont donnés.

24'09	on va essayer de faire rentrer le rectangle 1 dans le rectangle 3, on va essayer de le superposer d'accord ?
24'15	donc avant de sortir les ciseaux et de commencer à découper, on va déjà répondre à la question et ensuite
24'23	donc effectivement vous allez découper le premier rectangle d'accord, seulement le premier pour commencer et vous allez
24'30	donc vous avez le droit de le découper le rectangle hein
24'33	et vous allez essayer de faire rentrer du coup toute la quantité de papier du rectangle 1 dans votre rectangle 3

Figure 2 – Transcription de la consigne orale de l'enseignante

Une divergence d'interprétations du verbe « découper » apparaît, entre d'un côté l'enseignante qui emploie ce terme à l'oral, de l'autre Jenny ainsi que de nombreux élèves de la classe qui entendent ce terme. Les deux premières occurrences « commencer à découper » (24'15) et « découper le premier rectangle » (24'23) ont une *fonction organisationnelle* (Petitfour, 2017b). Le découpage demandé est lié à des aspects matériels et pratiques car les surfaces rectangulaires ne sont pas encore physiquement manipulables (les rectangles sont dessinés sur une feuille) ; le conseil d'extraire un seul rectangle de la feuille vise à limiter le travail de découpage ; le choix du rectangle 1 (plutôt que du rectangle 3) devrait permettre une meilleure lisibilité de l'inclusion des rectangles (rectangle 1 d'aire la plus petite à poser sur l'autre). On pourrait penser que la troisième occurrence « le droit de découper le rectangle » (24'30) reprend l'aspect organisationnel, découper le contour d'un des deux rectangles. Cependant, en observant les gestes qui accompagnent le discours de l'enseignante (figure 3), et compte tenu de ce qu'elle vise, il semble bien que le même verbe « découper » relève d'une *fonction technique* (Petitfour, 2017b) liée au partage du rectangle permettant une comparaison indirecte des rectangles.

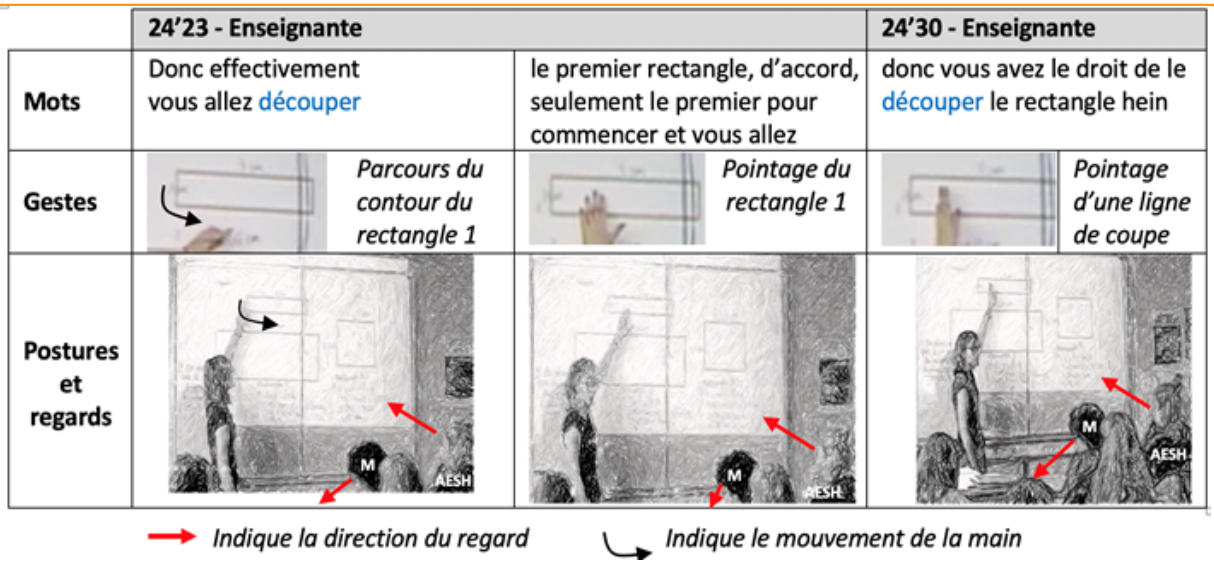


Figure 3 – Tableau sémiotique, passation de la consigne

Examinons plus précisément le déroulement de la consigne (figure 3). À 24'23, il s'agit de découper le contour du rectangle 1 (l'enseignante précise sa parole par un geste de parcours du contour du rectangle avec sa main) pour détacher cette forme de son support, la rendre mobile ; à 24'30, il s'agit de décomposer le rectangle en plusieurs parties (le bord médial de sa main montre une ligne de coupe qui partage le rectangle en deux parties), on est là dans la description du début de la technique Tb. En outre, les élèves doivent comprendre que le rectangle qu'ils peuvent partager est le rectangle 1, grâce au geste de pointage de l'enseignante (paume de la main posée sur le rectangle 1).

Le basculement de sens du verbe « découper » n'est éclairé que par les gestes de l'enseignante. Cette information gestuelle et furtive (24'30) n'est pas perçue, sinon décodée, par la majorité des élèves et encore moins par Marco qui voit mal, et qui ne regarde pas le tableau. L'enseignante va d'ailleurs être amenée à repréciser par trois fois aux élèves durant leur travail individuel (28'02 – 29'38 – 31'49) leur « droit de couper le rectangle 1 ».

Ces discrets basculements de sens du verbe « découper » ne vont pas produire les effets escomptés par l'enseignante, mais produire, dans le SDA, des dissonances sémiotiques.

Les élèves ont du mal à comprendre ce qu'il faut faire suite à la consigne de l'enseignante. Cette dernière circule dans la classe, interagit avec les élèves pour réguler. La première régulation (28'02) s'adresse à la classe, mais elle n'est pas entendue au sein du SDA tandis que la seconde (29'38) l'est. Malgré une troisième régulation (31'49), certains élèves tentent toujours d'inclure le rectangle 1 dans le rectangle 3 au moment de la correction (Technique Ta).

La première interprétation que Jenny fait de la consigne la conduit à mettre en œuvre la technique Ta. Le début de la consigne (24'09) suggère en effet l'emploi de cette technique, avec le verbe « rentrer », induisant une structure sémantique de type « contenant-contenu » (Gamo *et al.*, 2014). La mé-

thode écrite au tableau, à recopier sur les cahiers, renforce cette idée : « On va découper le rectangle 1 et le superposer avec le rectangle 3 ». Jenny se réfère à cet écrit et guide Marco pour qu'il positionne le rectangle 1 sur le rectangle 3 : elle lui donne le rectangle 1 qu'elle a découpé, lui indique, en le pointant avec son index, le rectangle 3, en lui demandant « d'essayer de le faire rentrer » ; elle répond négativement à la demande du « droit de plier » faite par Marco et lui demande « d'essayer dans tous les sens » quand il lui dit qu'« on ne peut pas [faire rentrer le rectangle 1 dans le rectangle 3] » ; elle demande enfin à Marco de dire « pourquoi [le rectangle ne peut pas rentrer] » une fois cette réponse réaffirmée et de garder en tête sa réponse. Il y a donc un décalage entre le projet de l'enseignante (guider vers la technique Tb) et l'initiative de Jenny (guider vers la technique Ta). L'enseignante pensait pourtant avoir mis les élèves sur la voie de la technique Tb dans sa consigne. À 28'02, elle précise en effet : « Je vous ai dit justement le premier rectangle, vous avez le droit de le couper pour le faire entrer dans le troisième. ».

Quand Jenny et Marco entendent l'enseignante répondre à une élève que le rectangle 1 peut être coupé « en deux, en trois, en quatre, peu importe » (29'38), Jenny réinterprète la consigne de l'enseignante en restant toujours dans le *registre matériel* : elle se focalise sur une manipulation déconnectée du concept mathématique visé. Ainsi, elle laisse à Marco l'initiative de plier le rectangle 1 pour marquer la ligne de coupe souhaitée, puis elle coupe sur le pli (ces deux initiatives sont compatibles avec la consigne de l'enseignante en 24'30), mais elle ne lui « redonne » qu'une partie du rectangle 1, mettant l'autre partie avec les chutes de papier du découpage récupérées lors de l'extraction du rectangle 1 de la feuille annexe. Cette interprétation personnelle est compatible avec la demande de l'enseignante « de ne pas perdre les petits morceaux du premier rectangle » (27'16), liée à la mise en œuvre de la technique Tb, mais cette consigne est considérée par Jenny comme liée à l'organisation matérielle (il ne faut pas jeter de papier par terre dans la salle de classe). Jenny, à son insu, empêche ainsi Marco de « penser » à la technique Tb. L'aide qu'elle apporte à Marco poursuit toujours le même but de « faire rentrer le rectangle 1 dans le rectangle 3 », ce qui est réalisable avec « le droit de couper le rectangle 1 » si on enlève la partie en trop. Jenny reste et incite Marco à rester dans le registre matériel, contribuant à l'empêcher de voir une autre finalité (l'aire d'une surface) à l'activité.

Discussion et Conclusion

L'enseignante utilise du matériel et des termes de la langue courante pour guider les actions des élèves vers des réponses à un problème de comparaison d'aires de rectangles. Ces termes sont interprétés par l'AESH, loin du concept visé, au plus près de leur signification courante. Il manque sans doute à l'AESH des connaissances mathématiques nécessaires sur l'aire pour contrôler les termes qu'elle emploie, et les actions qu'ils déclenchent chez l'élève, et/ou un échange conséquent avec l'enseignante en amont de la séance sur le thème et le déroulement prévu de la leçon. Remarquons aussi que l'enseignante ne fait le lien entre la manipulation matérielle proposée et le concept d'aire qu'à la fin de l'activité, n'évoquant l'aire pendant l'épisode que par « l'intérieur de la figure » et « la quantité de papier qu'on utilise ». C'est à travers ce filtre sémantique que l'AESH choisit d'oraliser

ou de lire certains signes parmi les signes visuels auxquels l'élève malvoyant a un accès restreint (écrit sur document de travail et au tableau, gestuelle de l'enseignante). C'est donc une interprétation très décalée qu'elle communique en langage oral à l'élève malvoyant : Marco ressort de la séance en n'ayant pas compris que l'enjeu de la leçon était l'aire des figures (confirmé dans un entretien avec Marco à la fin de la séance).

Le risque de dissonance a été initié par l'enseignante et augmenté par l'AESH. Dans une recherche antérieure, Petitfour (2017a) a mis en évidence, dans un travail en dyade, l'intérêt d'utiliser un *langage technique* pour permettre à un élève dyspraxique d'accéder aux concepts géométriques, sans passer par la réalisation de constructions instrumentées, qu'il ne peut pas réussir à cause de son handicap. Le langage technique décrit les aspects de la manipulation en lien avec le savoir en jeu : il offre la possibilité que l'élève formule son *intention d'agir* (Jeannerod, 2009) à un tiers qui se charge d'*agir* au plus près de l'intention exprimée. Pour des activités où des manipulations de matériel sont utilisées pour faire émerger des connaissances mathématiques, nous faisons l'hypothèse que l'emploi d'un *langage technique* serait bénéfique dans les SDA comportant un élève avec des troubles visuels (par exemple ici). Cela questionne plus largement la nécessité, pour un élève handicapé, de *modes d'expression sémiotique complémentaires* à l'intérieur des SDA, auxquels bien sûr l'AESH devrait être aussi formée.

L'AESH essaie, dans le contexte d'enseignement posé par l'enseignante, d'apporter des *aides pratiques* pour rendre accessible la résolution d'une tâche nécessitant un contrôle visuel (actions de découpage, de collage et de repérage visuel de figures). Deux remarques s'imposent. D'abord, il est dommage que n'ait pas été pensée (en amont de la séance) la mise à disposition de Marco d'un matériel plus propice au toucher que la feuille de papier, par exemple des rectangles en carton-mousse, si besoin agrandis, partant du principe qu'exploiter les ressources préservées de l'élève avec troubles visuels (le canal tactile) offre plus d'intérêt que de compenser le déficit visuel (par une intervention langagière d'un tiers). Ensuite, certaines aides apportées par l'AESH dépassent leur objectif de compensation du handicap visuel de Marco. Jamais ce dernier ne prend l'initiative de la technique qu'il met en œuvre pour résoudre le problème posé (alors qu'il le devrait), ni ne s'oppose à l'interprétation erronée de la résolution de la tâche par l'AESH. Les dissonances sémiotiques créées par l'AESH exacerbent l'identification de ce phénomène. Marco se laisse conduire dans la mise en œuvre d'une technique de résolution par un guidage en micro-tâches perdant ainsi probablement le sens du but poursuivi. Mais quelle autre option peut avoir ici l'AESH qui « gère » le SDA que de privilégier la réussite de l'élève, quitte même à lui donner la réponse[8] ? On entrevoit un « risque » de ce type de SDA, en résonance avec un phénomène relevé début des années 2000 dans les SDP des écoles ZEP / REP (Butlen *et al.*, 2004) : privilégier la réussite de la tâche aux dépens de l'apprentissage du concept. Il se peut aussi que le *topos* (Chevallard, 1999 ; Suau *et al.*, 2017) de chaque acteur du SDA reste flou (institutionnellement) ou mal explicité (pratiquement), les empêchant de prendre une position propice

8. À la fin d'un autre épisode de mathématiques (sur les pourcentages), où les élèves doivent résoudre individuellement un problème de pourcentages, l'AESH finit par souffler la réponse à Marco qui ne sait s'y prendre.

aux apprentissages de l'élève (Houdement et Petitfour, 2019). La collaboration de l'enseignant et de l'AESH, au service des apprentissages de l'élève du SDA, reste un enjeu crucial.

Références

Arzarello, F. (2006). Semiosis as multimodal process. In L.Radford et B.D'Amore (Éds) Sémiotique, culture et pensée mathématique, *Número especial, Revisita Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 267-299.

Assude, T., Perez, J.-M., Suau, G., Tambone J. & Vérillon, A. (2014). Accessibilité didactique et dynamique topogénétique. *Recherches en didactique des mathématiques, 34*(1), 33-57.

Butlen, D., Peltier, M.L. & Pézard, M. (2004). Des résultats relatifs aux pratiques de professeurs débutants ou confirmés enseignant les mathématiques en ZEP/REP. In M.L.Peltier-Barbier, M.L.(dir.). *Dur, dur, dur d'enseigner en ZEP* (pp.69-81). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*, 221-226.

Denzin, N. K. (1978). *The research act: a theoretical introduction to sociological methods*. New York : McGraw-Hill.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 10*, 5-53.

Gamo, S., Nogry, S. & Sander, E. (2014). Réduire les effets de contenus en résolution de problèmes pour favoriser la construction d'une représentation alternative. *Cahiers des Sciences de l'Éducation*– Université de Liège (aSPe), 35-65.

Houdement, C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères IREM, 67*, 69-84.

Houdement, C. & Petitfour, E. (2019). Jeu de pouvoir dans l'enseignement spécialisé. In M. Abboud (Éd.), *Actes du colloque EMF 2018* (pp.1205–1213). Paris : IREM de Paris.

Houdement, C. & Petitfour, E. (2020). La manipulation dans l'enseignement spécialisé : aide ou obstacle ? Une étude de cas autour de la numération décimale. *Recherches en didactique des mathématiques, 40*(2), 181-223.

Houdement, C. & Petitfour, E. (2022). Le dessin à main levée, un révélateur du rapport des élèves à la figure géométrique. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 22* (2), 315-340.

Jeannerod, M. (2009). *Le cerveau volontaire*. Éditions Odile Jacob.

Petitfour, E. (2017a). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition d'un dispositif de travail en dyade. *Petit x, 103*, 5-31.

Petitfour, E. (2017b). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques, 37*, 247-288.

Petitfour, E. (2018). Quel accompagnement en géométrie pour des élèves dyspraxiques ? *Grand N, 101*, 45-70.

Petitfour, E. & Houdement, C. (2022). Des effets didactiques de microphénomènes sémiotiques en mathématiques. In C. Houdement, C. de Hosson, C. Hache, *Approches sémiotiques en didactique des sciences* (pp.209-244). ISTE Editions.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 111-126.

Suau, G., Perez, J.-M., Tambone, J. & Assude, T. (2017). Accompagnement et accessibilité didactique : quels obstacles ? *Revue suisse de pédagogie spécialisée*, 2017-2, 30–36.

Toullec-Théry, M. (2020). L'AESH, aide ou écran à l'inclusion scolaire ? *Ressources, 22*, 64-72.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA : Harvard University Press.

Annexe 1

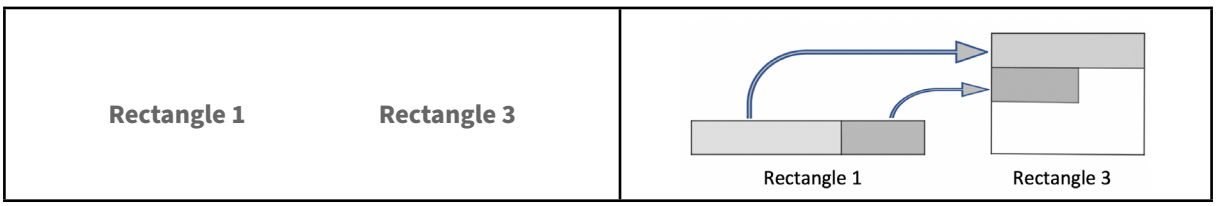
Comparaison des aires de deux rectangles

a. Comparaison directe : on prend un rectangle, on le place sur l'autre, on le glisse et on le tourne pour vérifier si les deux se superposent ou si l'un est inclus dans l'autre.

Si l'on n'obtient ni superposition, ni inclusion, on peut tester une comparaison indirecte.

b. Comparaison indirecte : on transforme un rectangle en une autre forme par découpage et re-composition pour rendre cette forme comparable directement à l'autre rectangle.

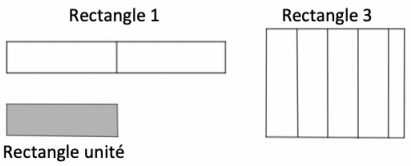
Décomposer le rectangle 1 en deux surfaces qu'on peut disposer à l'intérieur du rectangle 3.



Ces deux techniques de comparaison, directe et indirecte, peuvent être faites de façon effective, par manipulation des formes, mais aussi à l'aide de tracés sur les rectangles proposés ou réalisés *mentalement. L'enseignante projettera d'ailleurs la disposition de droite ci-dessus lors de la correction.*

b'. Comparaison par pavage et mesurage d'aires : on choisit un rectangle « commode » (qui donnera l'unité d'aire) pour paver (ou presque paver) les deux rectangles, on détermine le nombre d'unités d'aire (UA) des deux rectangles et on compare ces nombres. Le rectangle de dimensions 1 cm sur 3,5 cm est très commode.

Par exemple, l'aire du rectangle 1 est 2 UA et celle du rectangle 3 est 4,5 UA : 2 UA < 4,5 UA



Notons que les mesures des longueurs des trois rectangles, notamment le fait qu'une dimension au moins soit multiple de 35 mm, rend possible l'utilisation des trois techniques de comparaison : les techniques b et b' pour comparer l'aire du rectangle 1 à celles des deux autres, la technique a pour comparer celles des rectangles 2 et 3.

c. Comparaison par calcul : en utilisant les dimensions des rectangles et la formule de l'aire d'un rectangle :

Aire (rectangle 1) = 1 cm x 7 cm = 7 cm^2 et Aire (rectangle 3) = 3,5 cm x 4,5 cm = 15,75 cm^2

Donc Aire (rectangle 1) < Aire (rectangle 3).

Titre: Mise à l'épreuve d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté dans une classe togolaise du primaire

Auteur: THEIS Laurent

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 906 - 918

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Mise à l'épreuve d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté dans une classe togolaise du primaire

THEIS[1] Laurent

Résumé – Dans cette communication, nous allons présenter les résultats d'une recherche collaborative dans une classe de CM1 togolaise (8 - 10 ans) dans laquelle nous avons expérimenté un dispositif d'aide préalablement développé dans des contextes québécois et français. Les résultats montrent que le dispositif d'aide, réalisé par l'enseignante de la classe maintiennent les mêmes fonctions méso, topo et chronogénétiques que celles observées précédemment, et ce, malgré l'effectif pléthorique de la classe togolaise.

Mots-clefs : élèves en difficulté, dispositif d'aide, arithmétique, classe à effectif pléthorique, école primaire.

Abstract – We present the results of a collaborative research conducted in a third grade class of a togolese elementary school (students aged 8 to 10 years). We experimented, in this class, an aid session for low achieving students, held previously to the classroom activity, that we had previously developed in a French and Canadian context. Our results show that the aid session produces similar mesogenetic, topogenetic and chronogenetic functions in this setting, despite the large size of the class.

Keywords: low-achieving students, aid sessions, arithmetics, large-sized class, elementary school.

1. Université de Sherbrooke, Canada (Québec), laurent.theis@usherbrooke.ca

Introduction

Depuis 2013, nous travaillons avec une équipe de chercheurs québécois et français sur les dispositifs d'aide qui visent à permettre à des élèves en difficulté de classes régulières du primaire à s'engager pleinement dans des activités de résolution de problèmes et à y réaliser les apprentissages prévus (Theis *et al.*, 2014, 2016 ; Assude *et al.*, 2016a, 2016b, Marchand *et al.*, 2021, Millon-Fauré *et al.*, 2018). Ces dispositifs d'aide se distinguent avant tout par le fait qu'ils sont réalisés avant l'activité mathématique en classe.

En effet, habituellement, les dispositifs d'aide sont réalisés à postériori et visent plutôt à revenir sur le contenu vu en classe auparavant et dont l'enseignant ou l'intervenant spécialisé en difficultés d'apprentissage considère qu'ils n'ont pas été appris en classe par ces élèves. Les dispositifs d'aide habituels s'inscrivent ainsi dans une posture remédiative. Or, ces dispositifs présentent également plusieurs inconvénients. Ainsi, le contenu qui y est travaillé concerne des savoirs anciens, qui ne sont plus d'actualité en classe. Les élèves qui participent à ces dispositifs d'aide sont ainsi dans un perpétuel mode de rattrapage puisqu'ils ne permettent pas de combler le retard sur le temps didactique de la classe. D'ailleurs, habituellement, le temps didactique n'y avance pas (Leutenegger, 2009 ; Tambone, 2014). Par ailleurs, ces dispositifs d'aide ne contribuent pas non plus à augmenter ce que Tambone (2014) appelle la valeur scolaire des élèves.

Les dispositifs d'aide que nous avons développés depuis 2013 réunissent un petit nombre d'élèves en difficulté *avant* la résolution d'un problème mathématique en classe. Il s'agit d'élèves qui sont identifiés par l'enseignante comme étant susceptibles de pouvoir rencontrer des difficultés lors de la réalisation de la situation en classe. Dans ce contexte, nous poursuivons une approche résolument systémique. Ce ne sont pas tant les processus mentaux déficitaires des élèves qui nous intéressent, mais plutôt les interactions à l'intérieur du triangle didactique, entre élève, enseignant et savoir.

Depuis le début de notre projet, les questions que nous nous posons par rapport à ces dispositifs d'aide réalisés avant la classe sont les suivantes :

- Comment un dispositif d'aide réalisé avant le travail mathématique en classe peut-il aider des élèves en difficulté à s'engager dans le problème mathématique, tout en préservant les opportunités pour ces élèves d'apprendre les concepts visés en classe ?
- Quelles sont les fonctions de ces dispositifs d'aide ?

Lors des précédentes expérimentations de nos dispositifs dans des classes du préscolaire et du primaire, les dispositifs d'aide pouvaient comprendre les éléments suivants : (1) présentation des consignes du problème travaillé en classe, (2) anticipation des techniques possibles pour travailler le problème, sans toutefois les mettre en œuvre encore (Theis *et al.*, 2014) ; (2) retour sur des savoirs anciens que l'enseignante considérait importants pour pouvoir entrer dans le problème (Theis *et al.*, 2016, Marchand *et al.*, 2021), (3) Réalisation de la première sous-tâche d'un problème de communi-

cation d'une série de plusieurs sous-tâches, sans toutefois obtenir de rétroaction concernant cette tâche (Assude *et al.*, 2016a, 2016b).

Pour la présente communication, nous avons expérimenté ces dispositifs d'aide dans le cadre d'une recherche collaborative avec une enseignante togolaise de CM1, afin de mettre à l'épreuve les dispositifs dans un contexte d'enseignement différent. En effet, contrairement aux écoles québécoises, où il y a des services d'orthopédagogie destinés aux élèves en difficulté, un tel soutien est virtuellement inexistant dans l'école publique togolaise. La réalité scolaire togolaise se distingue également par la différence entre les effectifs des classes. Alors qu'au Québec et en France, les tailles des classes au primaire ne dépassent rarement 25 ou 30 élèves, les effectifs des classes togolaises de l'enseignement public sont pléthoriques (la classe de l'enseignante avait 72 élèves), rendant par le fait même l'encadrement des élèves en difficulté beaucoup plus difficile pour l'enseignant. Dans cet article, nous allons décrire si et comment les fonctions d'un dispositif d'aide réalisé avant l'enseignement se transpose à la réalité d'une classe togolaise à effectif pléthorique.

Cadrage théorique et fonctions du dispositif

Chevallard (1995) distingue deux types de systèmes didactiques : le système didactique principal (SDP), essentiellement la classe et des systèmes didactiques auxiliaires (SDA), périphériques à la classe, qui incluent quelques-uns, mais pas tous les élèves de la classe. Les SDA poursuivent les mêmes objectifs que les SDP et peuvent consister en des sessions d'aide pour élèves en difficulté en dehors de la classe. Ces systèmes (SDP et SDA) sont reliés par le fait qu'ils traitent des mêmes savoirs. Toutefois, comme les SDA se déroulent typiquement après la classe (Tambone 2014), les SDA sont en retard sur les SDP puisqu'on y traite de savoirs qui sont déjà anciens en classe.

Nous allons analyser les interactions entre enseignants et élèves au SDA et au SDP en nous appuyant sur la théorie de l'action conjointe de Sensevy dont nous retenons pour notre analyse une triple dimension pour décrire l'interaction entre l'enseignant et l'élève : la chronogenèse, la mésogenèse et la topogenèse.

La chronogenèse produit « les temps de l'enseignement et de l'apprentissage » (Sensevy *et al.*, 2000, p. 267). Parmi ces temporalités, on retrouve le temps didactique, qui marque l'avancement du savoir. La mésogenèse « produit les objets des milieux des situations et l'organisation des rapports à ces objets » (Sensevy *et al.* 2000, p. 267). Dans ce contexte, le milieu est constitué de tous les éléments sur lesquels l'élève agit et qui agissent sur l'élève (Brousseau, 2003). La topogenèse quant à elle produit « les lieux du professeur et de l'élève » (Sensevy *et al.*, 2000, p. 267).

Lors de nos travaux précédents, nous avons dégagé différentes fonctions aux SDA réalisés avant le SDP.

Premièrement, la fonction mésogénétique permet aux élèves qui participent au SDA de se familiariser avec la tâche à résoudre ainsi que des éléments qui composent le milieu avant le SDP.

Deuxièmement, la fonction topogénétique permet aux élèves de participer pleinement au SDA et au SDP. La configuration en petit groupe des SDA permet à l'enseignant de donner un espace aux élèves pour participer et interagir. Lors du SDP, nous avons observé que les élèves du SDA participaient davantage que d'habitude au travail en grand groupe et étaient généralement en mesure de s'engager dans la tâche.

Troisièmement, la fonction chronogénétique intervient puisque les élèves du SDA connaissent la tâche du SDP avant les autres élèves et ils disposent de plus de temps pour se familiariser avec cette tâche. Généralement, dans les SDA que nous avons expérimentés, il n'y a pas eu d'avancement du temps didactique : l'objectif du SDA est de préparer les élèves à intervenir lors du SDP et non de devancer les apprentissages à réaliser.

Une quatrième fonction de notre dispositif en est une de distanciation qui correspond à une dialectique entre la suspension et l'anticipation des élèves dans le SDA. Ainsi, il y a un équilibre à trouver entre d'une part, l'entrée en contact des élèves avec le problème et l'anticipation de certaines techniques sans toutefois obtenir de rétroaction concernant celles-ci et d'autre part, la suspension de l'action, qui permet d'éviter l'avancement du temps didactique.

Une dernière fonction concerne la création d'un espace de questionnement qui permet aux élèves du SDA d'échanger sur la tâche et les techniques anticipées ou mises en place lors du SDA. Cette fonction est facilitée par la petite taille du groupe d'élèves dans le SDA et elle permet également une observation fine de la part de l'enseignante des raisonnements des élèves (Marchand *et al.*, 2021).

Contexte de la recherche

L'expérimentation décrite dans cet article s'inscrit dans le cadre d'une recherche collaborative plus large réalisée avec trois enseignants d'écoles primaires publiques de la ville de Lomé, au Togo. Tout d'abord, une recherche collaborative, au sens de Desgagné *et al.* (2001) se distingue par le fait qu'elle n'est pas une recherche *sur* l'enseignant, mais une recherche *avec* l'enseignant. Dans ces recherches, chacun des acteurs détient une expertise particulière, qui, ensemble, contribuent à l'élaboration d'un produit commun. Dans ce contexte, l'expertise de l'enseignant est une expertise « pratique », acquise au fil des années d'enseignement et qui lui a permis de développer un savoir-faire notamment pour gérer les situations mathématiques en classe et pour faire avancer la construction des savoirs. L'expertise du chercheur est plutôt de nature théorique puisqu'il détient des cadres et des outils qui permettent d'analyser et de comprendre ce qui se passe en classe. Dans le cadre de notre recherche, notre visée générale était de documenter les pratiques de 3 enseignants du primaire reconnus par leurs pairs comme étant d'excellents enseignants, en vue de l'élaboration d'un document commun

rendant compte des expérimentations et susceptible de servir d'outil à la formation des enseignants. Dans ce contexte, nous avons également expérimenté notre dispositif d'aide avec une des enseignantes ayant participé au projet.

La collecte de données comprenait les étapes suivantes : (1) une demi-journée d'observation dans la classe de l'enseignante, afin de nous familiariser avec les contraintes professionnelles dans lesquelles elle évolue ainsi qu'avec son approche d'intervention, (2) une journée d'échanges et de formation avec les trois enseignants participants, (3) une demi-journée de planification avec l'enseignante qui ont permis le développement commun de la situation expérimentée et du dispositif d'aide associé, (4) l'expérimentation du dispositif d'aide et de la situation d'enseignement en classe par l'enseignante, avec enregistrement vidéo, (5) une demi-journée de rencontre individuelle avec l'enseignante pour faire une analyse commune de l'expérimentation.

Analyse de la situation expérimentée

Le point de départ de notre situation-problème est une page du manuel scolaire de CM1 du Togo, dans laquelle les auteurs proposent de travailler l'addition à travers un contexte de pièces de monnaie (voir figure 1).



Figure 1 : Extrait du manuel togolais de CM1

Nous avons modifié cette situation de départ de manière à ce qu'elle travaille toujours les mêmes enjeux mathématiques (l'addition ainsi que les échanges de pièces de monnaie), mais dans un contexte un peu plus complexe, dans lequel plusieurs solutions sont possibles. En effet, nous souhaitions rester proches des visées des programmes togolais et du type de situation qui y sont proposées, de manière à ne pas trop déstabiliser ni l'enseignante ni les élèves.

Deux situations différentes ont été proposées successivement aux élèves.

(1) Ton petit frère veut avoir une somme de 1000F avec exactement 5 pièces de monnaie. Aide-le à trouver deux façons de le faire.[2]

(2) Ton petit frère veut avoir une somme de 1000F avec exactement 4 pièces de monnaie. Aide-le à trouver deux façons de le faire.

Les deux problèmes posés sont similaires et permettent d'aborder à la fois les échanges de pièces de monnaie et les additions. Cependant, comme nous allons également le voir, les deux situations diffèrent par le nombre de solutions possibles. Ainsi, il y a de nombreuses façons d'obtenir 1000 francs CFA en utilisant 5 pièces de monnaie, mais seulement 3 façons de faire sont possibles en utilisant 4 pièces.

Tout d'abord, dans le système monétaire des francs CFA, il existe les pièces suivantes : 5; 10; 25; 50; 100; 200; 250; 500. Il y a également les billets suivants : 500; 1000; 2000; 5000; 10000. Pour cette situation, nous avons choisi de recourir seulement aux pièces de monnaie. Ensuite, toutes les pièces de monnaie ne peuvent être utilisées pour faire 1000 francs avec 5 pièces de monnaie. Ainsi, les pièces de 5F et 10F sont trop petites pour générer 1000F en utilisant un total de 5 pièces. Une seule solution implique une pièce de 25 F : (25, 25, 200, 250, 500). La pièce de 25F est donc la plus petite dont l'utilisation permet de générer une solution valide au problème.

Si la première situation permet de trouver un grand nombre de solutions différentes, la deuxième situation (faire 1000F avec exactement 4 pièces de monnaie) n'en permet seulement trois (500, 200, 200, 100), (250, 250, 250, 250) et (500, 250, 200, 50) et devient ainsi plus difficile à résoudre.

De manière générale, quels sont alors les concepts mathématiques qui sont travaillés dans le cadre de cette situation ? Tout d'abord, il y a les additions des nombres naturels, qui sont impliquées dans la recherche des différentes solutions au problème. Ainsi, les élèves ont besoin de faire les sommes intermédiaires pour déterminer le montant obtenu avec les pièces qu'ils ont déjà utilisées. Ensuite, l'addition « à trous » pourrait également être utilisée. Par exemple, un élève qui travaille sur le premier problème a déjà réuni les pièces suivantes : 500, 200, 200 et 50. L'addition lui permet de trouver la somme intermédiaire de 950 et l'addition « à trous » permettrait de trouver le complément pour arriver à 1000, soit 50. Ensuite, la soustraction peut également être utile dans cette situation, puisqu'il suffit de soustraire 950 à 1000 pour déterminer la quantité manquante.

Il est à noter ici toutefois que toutes les combinaisons ne permettent pas à trouver un résultat. Par exemple, un élève dont les 4 premières pièces seraient 100, 100, 100 et 50 ne pourrait pas trouver de cinquième pièce de monnaie qui lui permet de compléter le 1000F, puisque le montant requis serait de 650F, qui ne correspond pas à une pièce de monnaie.

2. La même pièce de monnaie peut être utilisée à plus d'une reprise.

Fonctions observées du dispositif d'aide lors de l'expérimentation

Le rencontre avec les 8 élèves en difficulté identifiés par l'enseignante a eu lieu lors de la récréation des élèves, juste avant la résolution en classe de la situation-problème et était d'une durée de 10 minutes

Lors de la planification, nous avions prévu que l'enseignante aborde les points suivants dans le SDA : (1) La présentation du matériel qui sera utilisé en classe, c'est-à-dire les pièces de monnaie en papier. (2) L'identification des différentes pièces de monnaie, avec la lecture des montants qui y sont inscrits (3) La présentation de la situation-problème qui sera travaillée en classe, sans toutefois la résoudre tout de suite.

Fonction mésogénétique

Dans cette expérimentation du dispositif d'aide, la fonction mésogénétique s'est d'abord manifesté par la rencontre, avant les autres élèves, d'objets qui feront partie du milieu du SDP et surtout le matériel de manipulation qui allait être utilisé en classe.

Ainsi, l'enseignante a d'abord demandé aux élèves d'identifier les différentes pièces de monnaie : « Quelles sont les pièces qu'on utilise pour acheter ? » et les enfants ont identifié à tour de rôle les montants de ces pièces. Cette première tâche permettait d'introduire le travail avec les pièces de monnaie, mais aussi de rappeler les différentes pièces qui sont en circulation. Par ailleurs, elle permettait d'éliminer des valeurs qui ne se retrouvent pas sur les pièces de monnaie. Ainsi, une élève a proposé une valeur de 300, ce qui a permis à l'enseignante de clarifier qu'il n'y a pas de telle pièce en circulation. Par ce fait même, cette réponse permettait également de préciser que seules les valeurs qui se retrouvent effectivement sur les pièces réelles seraient considérées. Cette clarification était alors devenue possible puisque les élèves se trouvaient en petit groupe.

L'enseignante a ensuite montré de vraies pièces qu'elle a amenées en classe et demande aux élèves d'identifier les valeurs de chaque pièce.

> Enseignante : Par exemple, maman me donne 50 francs et 25 francs, quel est le plus grand ? Quel est le plus grand ? On a vu ça.
>
> Élève : 50.
>
> Enseignante : Plus grand ça ne veut pas dire que c'est plus gros.

Cette précision est alors importante puisqu'elle a permis d'attirer l'attention des élèves sur le fait que ce n'est pas la taille des pièces qu'il faut regarder, mais bien leur valeur. Cette notion semblait d'ailleurs déjà avoir posé problème à certains élèves, puisque l'enseignante précise « on a déjà vu ça ».

Ensuite, l'enseignante a amorcé la transition vers les pièces de monnaie en papier, avec lesquelles les élèves allaient travailler en classe. « Aujourd'hui, nous allons travailler sur les pièces de monnaie. Comme nous n'avons pas assez de pièces de monnaie, nous allons utiliser de la monnaie en papier ». Les élèves devaient alors à nouveau identifier la valeur inscrite sur chacune de ces pièces en papier. L'accompagnement de cette transition par l'enseignante est important, puisqu'elle ne va pas de soi. En effet, s'il est possible que certains élèves reconnaissent les vraies pièces de monnaie à leur taille ou leur couleur, cette façon de faire n'est plus possible avec la monnaie en papier, où seule la valeur nominale est à considérer. D'ailleurs, l'enseignante a également accompagné la lecture de ces nombres chez les élèves, notamment en décomposant certains d'entre eux (p. ex. le 500 qui est composé d'un 5 et de deux 0), répondant ainsi à une autre difficulté potentielle de ces élèves. Par le fait même, elle est alors revenue sur un savoir ancien qui, s'il n'est pas maitrisé, est susceptible de poser problème lors du SDP.

Fonction chronogénétique

La fonction chronogénétique du SDA s'est également manifestée de différentes manières lors du SDA. Ainsi, comme dans les autres expérimentations, les élèves en difficulté ont disposé de plus de temps pour s'approprier la consigne ainsi que les différents éléments du milieu qui ont y ont été discutés.

Le surplus de temps pour s'approprier les différents éléments du milieu se traduisent ainsi par des informations qui sont accessibles aux élèves du SDA mais qui n'ont pas été nommés explicitement dans le SDP. Ainsi, comme nous l'avons vu, l'enseignante prend le temps lors du SDA de préciser que ce n'est pas parce qu'elle est plus grande qu'une pièce de monnaie a une plus grande valeur. Par ailleurs, lors du SDA, l'enseignante prend en charge, avec les élèves, la transition entre les pièces de monnaie réelles et les pièces de monnaie en papier. Ce travail restera implicite lors du travail en classe.

Finalement, la fonction chronogénétique du SDA s'est également traduite par la possibilité pour les élèves de prendre connaissance avant les autres élèves de la première tâche à résoudre en classe : « Si on dit, je veux 1000 francs avec 5 pièces, alors est-ce que vous pouvez me faire ça ? Avec 5 pièces... on prend 5 pièces et quand on calcule le total ça va faire 1000 francs. C'est ce qu'on va faire en classe. » Il est important toutefois de noter qu'il s'agit ici d'une simple prise de connaissance de la consigne, sans toutefois que les élèves ne se soient engagés dans sa résolution pour l'instant.

Fonction topogénétique

La fonction topogénétique permet aux élèves qui participent au SDA d'assumer pleinement leur rôle d'élève et ce, à la fois dans le SDA et le SDP.

Dans le SDA, les élèves semblent au début hésitants à intervenir, mais au fur et à mesure que celui-ci avance, ils demandent de plus en plus la parole et interagissent avec l'enseignante. La taille du groupe relativement petite pour un contexte d'enseignement togolais contribue alors probablement à faciliter les échanges entre les différentes élèves.

Lors du SDP, nous avons également pu observer des effets de la fonction topogénétique. Il est toutefois important de préciser qu'en raison du grand nombre d'élèves dans la classe et des moyens d'enregistrement réduits dont nous disposions, il nous était impossible de repérer et de suivre l'ensemble des élèves en difficulté qui ont participé lors du SDA dans le SDP. Nous allons alors illustrer l'effet topogénétique à partir des techniques mises en place par un élève qui a participé au SDA. Cet élève travaillait seul sur son ardoise lors du SDP. Lors du travail sur la première tâche, il en est arrivé à la solution présentée ci-dessous (les ovales rouges ont été ajoutés par nous dans l'image).

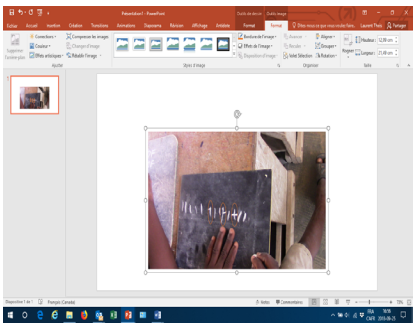


Figure 2 : Solution d'un élève en difficulté au premier problème

Cet élève a alors eu recours à une technique très différente de celle des autres élèves de la classe qui, pour la très grande majorité, effectuaient des additions et ajustaient au besoin leur calcul. Or, cet élève a procédé différemment : tel qu'il nous l'a expliqué, chacun des 10 traits correspond à une centaine. Il les a séparées par des signes d'addition (voir les ovales rouges). L'élève a alors procédé par décomposition, en séparant les 10 centaines qui composent les 1000 francs en quatre regroupements de centaines (500 + 200 + 100 + 200). Cette façon de faire lui a permis de trouver une première solution au problème posé tel que le montre la figure 3, où il a retranscrit ses calculs sous forme numérique, sur son ardoise.

Toutefois, si cette technique permet de trouver des solutions qui impliquent des montants qui sont des multiples de 100, elle devient plus difficile à appliquer lorsqu'il faut trouver d'autres solutions, qui impliquent des montants qui ne sont pas des multiples de 100 (250 ou 50, par exemple). Ainsi,

sur l'image suivante, le même élève tente de trouver une deuxième solution à l'aide d'une technique similaire. Tout d'abord, il a distribué deux centaines dans chacun des 4 paquets qui sont présents. Or, de cette manière, il n'arrive pas à un montant suffisamment élevé (800 au lieu de 1000). Il tente par conséquent de trouver une façon d'arriver au montant désiré en tentant d'ajouter un « demi-trait » (voir encerclé en rouge).



Figure 3 : Solution d'un élève au troisième problème

Ce demi-trait pourrait alors représenter une « demi-centaine » (50) et mener à 4 montants de 250 francs. Or, l'élève n'a pas été en mesure de verbaliser ce qu'il entend par « demi-trait » et de compléter sa démarche.

Au niveau de la fonction topogénétique, il est intéressant de constater que cet élève était engagé dans la situation et a réussi à trouver une façon de générer au moins une solution correcte au problème. On peut supposer ici que le dispositif d'aide, auquel cet élève a participé et qui a été réalisé avant la présentation de la situation-problème, a contribué à lui permettre d'entrer dans la situation.

Discussion

Notre expérimentation a montré à travers quelques exemples que les dispositifs d'aide que nous avons développés ont le potentiel de faire valoir les mêmes fonctions dans le contexte d'un enseignement en classe pléthorique, auprès d'élèves qui sont habitués à des approches d'enseignement très différentes. Plusieurs enjeux nous semblent toutefois importants à investiguer afin de confirmer ce potentiel.

Ainsi, notre expérimentation s'est limitée à une seule situation expérimentée en classe. Or, tel que nous l'avons vu lors des recherches précédentes, le contenu des SDA expérimentés diffère fortement d'une expérimentation à l'autre, en fonction de la structure du problème travaillé et du savoir qui y est construit. Il deviendrait alors intéressant d'explorer si les éléments présents dans le présent SDA, à savoir la présentation du matériel de manipulation, le retour sur certains savoirs anciens essentiels à la situation et la présentation de la consigne à résoudre pourrait constituer un canevas de base qui pourrait s'appliquer à l'ensemble, ou à tout le moins une très grande majorité des problèmes mathématiques.

Dans un contexte d'enseignement dans des classes pléthoriques, les SDA réalisés avant l'enseignement en classe pourraient également constituer un lieu privilégié pour permettre à l'enseignant de travailler avec les élèves en difficulté, fonction que nous avons commencé à théoriser dans Assude *et al.* (2022). En effet, en contexte de classe pléthorique, l'enseignant n'a habituellement que peu d'occasions de se consacrer aux élèves en difficulté. Dans ce contexte, notre SDA constitue un espace dans lequel il peut échanger, en petit groupe, avec ces élèves autour de la tâche, du matériel qui sera utilisé et de savoirs anciens. Cet échange aurait également le potentiel de lui permettre d'observer les savoirs développés par ces élèves ainsi que les difficultés vécues. Finalement, il est possible que cet échange lui permette également de l'informer sur des difficultés susceptibles d'apparaître dans la résolution du problème en classe. Évidemment, il deviendrait alors nécessaire de trouver un lieu institutionnel dans lequel pourrait se dérouler le SDA. Dans notre expérimentation, c'est pendant la récréation que l'enseignante a pu rencontrer les élèves. Si cette solution est peut-être envisageable de manière ponctuelle, elle nous semble toutefois plus difficile à mettre en place de manière plus régulière.

Références

Assude, T., Koudogbo, J., Millon-Fauré, K., Tambone, J., Theis, L. & Morin, M.-P. (2016a). Mise à l'épreuve des fonctions d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté en mathématiques. *Revue canadienne de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologies, 16*(1), 1-35.

Assude, T., Millon-Fauré, K., Koudogbo, J., Morin, M.-P., Tambone, J. & Theis, L. (2016b). Du rapport entre temps didactique et temps praxéologique dans des dispositifs d'aide associés à une classe. *Recherches en didactique des mathématiques, 36*(2), 33-57.

Assude, T., Marchand, P., Millon-Fauré, K., Theis, L. & Koudogbo, J. (2022). Des systèmes d'aide à l'enseignement : une étude de cas à propos du volume. *Recherches en didactique des mathématiques, 42*(3), 285-324.

Brousseau, G. (2003). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf.

Chevallard, Y. (1995). *La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique*. Actes de la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques, 83-122. Clermont-Ferrand : IREM.

Desgagné, S., Bednarz, N., Lebuis, P., Poirier, L. & Couture, C. (2001). L'approche collaborative de recherche en éducation : un rapport nouveau à établir entre recherche et formation. *Revue des sciences de l'éducation, 27*(1), 33-64.

Leutenegger, F. (2009). *Le temps d'instruire. Approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire en mathématiques*. Berne : Peter Lang.

Marchand, P., Guille-Biel Winder, C., Theis, L. & Assude, T. (2021). Difficultés d'un système didactique à propos de l'enseignement du volume au primaire. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 26*, 85-116.

Millon-Fauré, K., Theis, L., Tambone, J., Koudogbo, J.. Assude, T. & Hamel, V. (2018). Apropriation par un enseignant d'un dispositif d'aide pour l'enseignement des mathématiques. *Spirale-E – Revue de Recherches en Éducation, 61*, 41-56.

Sensevy, G., Mercier, A. & Schubauer-Leoni, M.-L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. À propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques, 20*.3, 263-304.

Tambone, J. (2014). Enseigner dans un dispositif auxiliaire : le cas du regroupement d'adaptation et de sa relation avec la classe d'origine de l'élève. *Pour l'Ère Nouvelle, 47*(2), 51-71.

Theis, L., Assude, T., Tambone, J., Morin, M.-P., Koudogbo, P. & Marchand, P. (2014). Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez les élèves en difficulté du primaire? *Éducation et francophonie, 42*(2), 160-174.

Theis, L., Morin, M.-P., Tambone, J., Assude, T., Koudogbo, J. & Millon-Fauré, K. (2016). Quelles fonctions de deux systèmes auxiliaires destinés à des élèves en difficulté lors de la résolution d'une situation-problème mathématique? *Annales de didactique et de sciences cognitives, 21*, 9-38.

Titre: Le dessin à main levée en géométrie dans l'enseignement spécialisé

Auteur: VENDEIRA Céline

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 919 - 933

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Le dessin à main levée en géométrie dans l'enseignement spécialisé

VENDEIRA[1] Céline

Résumé – Cet article présente une recherche visant à mettre en évidence les effets du dessin à main levée en géométrie chez des élèves de l'enseignement spécialisé. A travers différents exemples nous mettons en évidence la richesse des connaissances géométriques mobilisés par les élèves, le potentiel de réplique du dessin à main levée et les types de contrôles nécessaires afin de prendre le contrôle sur le milieu.

Mots-clefs : Enseignement spécialisé, connaissances géométriques, jeux de tâches, dessin à main levée, types de contrôles

Abstract – This article presents a research on the effects of freehand drawing in geometry in the context of special education. Through different examples we highlight the many geometric knowledge mobilized by the students. We also see the kinds of controls needed to gain control over the milieu.

Keywords: Special education, geometric knowledge, "jeu de taches", freehand drawing, types of controls

1. Université de Genève, Suisse, celine.marechal@unige.ch

Introduction

Dans cet article, nous explorons l'usage du dessin à main levée, comme alternative au dessin instrumenté, pour des élèves relevant de l'enseignement spécialisé en Suisse romande.

En didactique des mathématiques, le *dessin* est considéré comme une représentation à travers un tracé matériel d'une *figure* (Laborde et Capponi, 1994). Si l'on se réfère au Plan d'Etude suisse romand (CIIP, 2010), « la forme est liée à la perception d'ordre visuel d'un objet », alors que les figures sont des objets « immuables et idéals » qui « existent indépendamment des représentations (dessins, croquis...) qui en sont faites » (p. 14). Dans le contexte de notre recherche, il ne nous semble pas adapté de parler de figure, car les élèves passent par une représentation graphique ou mentale de l'objet à reproduire. C'est donc la forme qui est considérée même si, par ailleurs, certaines caractéristiques de l'objet sont considérées. C'est pour cette raison que nous parlons de « caractéristiques des formes » (Vendeira et Coutat, 2017).

Dans notre recherche, nous distinguons deux types de dessins ceux produits via des instruments porteurs de propriétés et le dessin à main levée. Quel que soit l'instrument utilisé, il implique l'émergence et l'évolution de schèmes d'utilisation parfois complexes (Rabardel, 1999). Les instruments de tracés tels que la règle, l'équerre ou le rapporteur comportent par exemple des contraintes manipulatoires impliquant la connaissance de certaines propriétés et relations entre objets difficilement maitrisables. Ces instruments de géométrie usuels réclament également une certaine dextérité pas toujours appropriée dans le contexte de l'enseignement spécialisé (Petitfour, 2015 ; Jovenat, 1998). Nous trouvons également d'autres types d'instruments, tels que les gabarits, différents types de réseaux et également des logiciels impliquant un environnement informatique. Notre recherche s'intéresse aussi à l'instrument « réseaux » où les contraintes manipulatoires sont moindres et se rapprochent du dessin à main levée du point de vue des types de contrôle qui s'y opèrent. Nous ne développons toutefois pas ce pan de recherche dans cet article.

A partir de ces quelques développements, nous pouvons tenter de définir le dessin à main levée comme un tracé matériel sans instrument. L'absence d'instrument, porteur de propriétés, implique que les caractéristiques / propriétés de l'objet dessiné sont entièrement à la charge de son auteur. De plus, l'absence de schèmes d'utilisation dans l'acte de dessiner à main levée permet une entrée immédiate dans la tâche. Pour finir, l'absence de contraintes manipulatoires le rend simple d'utilisation, notamment pour des élèves dyspraxiques ou ceux pour qui un manque de dextérité est constaté. Cette facilité d'utilisation permet de nombreuses répliques peu couteuses en temps. La possibilité de multiplier ainsi les essais est un outil au service de la résolution de problèmes où de nombreux essais pour trouver la solution sont nécessaires comme par exemple ceux par ajustements d'essais successifs ou impliquant une démarche expérimentale (Favier et Chanudet, 2021).

Le dessin à main levée peut ainsi se révéler une excellente alternative du fait qu'il libère les élèves des contraintes instrumentales en leur permettant de se focaliser uniquement sur certaines caractéristiques des formes à construire/reproduire et les relations géométriques impliquées. Cependant, instinctivement, nous pourrions faire l'hypothèse que ce n'est qu'en se basant sur notre vision que nous pouvons considérer l'objet géométrique dessiné à main levée. L'usage du dessin à main levée pourrait par conséquent paraître un choix étonnant pour des élèves avec lesquels se détacher d'une vision iconique (Duval, 2004) reste un enjeu d'apprentissage primordial. Nous nous appliquerons donc à montrer à travers plusieurs exemples que cette supposition n'est pas fondée.

Dans cet article, nous tentons donc d'illustrer comment l'utilisation du dessin à main levée dans des tâches de construction/reproduction est véritablement au service des apprentissages géométriques chez des élèves en contexte d'enseignement spécialisé. Pour ce faire, nous développons deux axes de réflexion :

- Le premier concerne la richesse des **connaissances mathématiques** mobilisables par les élèves dans des tâches impliquant le dessin à main levée ;
- Le second s'intéresse **aux types de contrôles dynamiques** en usage lors du dessin à main levée en géométrie. Ces contrôles sont caractérisés de « dynamiques » car ils doivent se coordonner dans l'action afin que l'élève parvienne à prendre le contrôle sur le milieu. De plus, ces contrôles sont rendus possible grâce au **potentiel de réplique** du dessin à main levée.

Présentation du cadre théorique

Peu de travaux en didactique des mathématiques s'intéressent à l'emploi du dessin à main levée. Lorsque le dessin à main levée est questionné c'est plutôt au secondaire où il est utilisé comme moyen de contraindre l'élève à questionner sa perception visuelle afin de considérer l'objet idéal quelle qu'en soit sa représentation (Coppé, Dorier et Moreau, 2005). Conne (2006) a, pour sa part, initié l'étude du dessin à main levée avec des élèves de l'enseignement spécialisé. Il s'est intéressé à des tâches de reproduction de cubes ou autres polyèdres à partir d'un modèle ou de mémoire. Il observe ensuite les problèmes rencontrés dans ces tâches qui obligent les élèves à réinterroger leur représentation de l'objet idéal, leur dessin et procédés de reproduction (p. 252). C'est donc le dessin à main levée comme terrain d'expérience qu'il interroge et que nous reprenons dans notre recherche.

Pour ce faire, nous nous intéressons aux types de contrôle que les élèves mobilisent lorsqu'ils cherchent à construire ou reproduire des formes géométriques à main levée. A cet effet nous faisons référence à la visualisation iconique et non iconique de Duval (2005) qui renvoient à deux modes de fonctionnement cognitifs bien distincts. Le premier s'appuie sur une vision globale des objets alors que le second se centre sur ses propriétés géométriques. Dans notre recherche nous parlons de « contrôle de la forme » lorsque le traitement associé est perceptif et « contrôle analytique » lorsque certaines caractéristiques sont prises en compte.

Ces deux types de contrôles doivent se coordonner lorsqu'il s'agit de reproduire une forme à main levée. En effet, l'élève doit, au fil de ses productions, par un jeu d'ajustement entre un contrôle de la forme et un contrôle analytique prendre peu à peu contrôle sur le milieu.

Selon Conne (2006) les dessins à main levée sont faciles à réaliser. Ces derniers peuvent par conséquent être répliqués autant que souhaité. Dès lors le dessin à main levée est considéré comme un processus où les connaissances s'initient, se transforment, se construisent au fil des productions. Les répliques de dessins produites témoignent des procédures et connaissances mises en œuvre à un moment donné pour être éventuellement ensuite abandonnées, améliorées, stabilisées par les élèves. Ce sont donc les différentes étapes de construction / reproduction de la forme qui nous intéressent plutôt que le produit fini. Ce dernier point est essentiel dans le contexte de l'enseignement spécialisé où il est, selon le groupe *ddmes*, difficile d'obtenir des informations sur les connaissances des élèves.

> […] nous ne pouvions que rarement nous appuyer, comme cela se fait de manière classique à l'école ordinaire, sur les réussites des élèves aux tâches qui leur étaient soumises. De plus, il était souvent difficile d'obtenir des indications sur ce que les élèves savaient et apprenaient en les interrogeant directement à ce propos, voire à recueillir des traces susceptibles de nous en informer. (Favre, 2008, p. 9)

Les travaux de Thom et McGarvey (2015) abondent dans le même sens lorsqu'ils analysent le travail d'élèves de 4-7 ans dans trois situations de géométrie impliquant le dessin à main levée. Ils s'interrogent sur la manière d'appréhender la pensée géométrique des enfants. Ils vont jusqu'à supposer que les dessins des enfants pourraient être exploités par les chercheurs comme des artefacts qui permettraient d'appréhender leurs capacités cognitives, leur conscience spatiale et leurs connaissances géométriques.

Contexte et méthodologie

Contexte

Ce travail de recherche s'intègre aux travaux du groupe *ddmes* qui s'intéresse à l'enseignement des mathématiques dans le contexte de l'enseignement spécialisé. Ce groupe a développé au fil des années un savoir-faire opérationnel au service des expérimentations en classe impliquant successivement trois phases distinctes qui se répètent aléatoirement en s'enrichissant les unes et les autres : l'exploration du milieu permettant le développement d'un jeu de tâches, l'utilisation du jeu de tâches avec des élèves et l'usage de la narration.

Dans notre groupe, nous nous intéressons aux mathématiques en tant qu'objet d'expérience. Nous aménageons ainsi des expériences mathématiques substantielles aux élèves. Les expériences ne se réduisent ainsi ni aux mathématiques scolaires ni aux mathématiques « utilitaires » très prégnantes dans le contexte spécialisé (Favre, 2015). Dans cette optique nous procédons, en amont, à un travail d'exploration du milieu. Celui-ci peut prendre appui sur une tâche existante (Conne et al., 2003 (pour l'activité « Puzzle »), Favre, 2008 (pour l'activité « Croix géniale »)), un concept mathématique (Monod, 2019 (pour le concept d'angle droit)) ou sur un artefact (Favre (dir.), 2019 (pour le matériel polydrons)). Quel que soit le milieu exploré, il importe d'en révéler le potentiel mathématique. L'enjeu est avant tout d'aménager des tâches permettant de faire vivre des expériences mathématiques substantiels aux élèves souvent par l'intermédiaire d'objets mathématiques que les élèves n'ont pas l'occasion de rencontrer dans leur classe (ils ne sont ainsi pas marqués par l'échec). De ce fait, comme nous ne visons pas l'apprentissages de mathématiques scolaires, mais bien des expériences, les connaissances rencontrées dans les jeux de tâches ne sont pas nécessairement au programme. De plus, selon le pilotage du jeu en classe, les mathématiques rencontrées peuvent considérablement varier. Ainsi, le véritable objectif commun aux jeux de tâches consiste à engager les élèves dans des tâches de résolution de problèmes nécessitant la mise en œuvre de démarches et modes de raisonnement propres aux mathématiques (Favier et Chanudet, 2021).

Dans cette recherche, c'est le dessin à main levée qui a fait l'objet de l'exploration du milieu. Ce travail d'exploration permet l'élaboration d'une liste de tâches, constitutive du jeu de tâches (Favre, 2008). Le milieu ainsi aménagé est susceptible de produire des interactions de connaissances très variées selon les élèves, d'où l'importance du pilotage. L'intérêt d'une telle démarche dans le contexte de l'enseignement spécialisé est de pouvoir passer d'une tâche à l'autre sans se soucier de la réussite de l'élève mais en s'assurant de lui faire vivre des expériences mathématiques à travers des problèmes. Dans le contexte de l'enseignement spécialisé genevois, les enseignants ne sont ni contraints par un programme ni par des moyens d'enseignement (Maréchal, 2010). Il ne sont ainsi pas guidés par des objectifs fixés a priori ce qui les autorisent à avoir un champ de savoirs visés moins borné. Les tâches du jeu de tâches sont un exemple de cette flexibilité possible.

Jeux de tâches autour du dessin à main levée

Afin de travailler la géométrie par le biais du dessin à main levée, nous en avons exploré le milieu afin d'élaborer ensuite un jeu de tâches dont certaines d'entre elles seront développées dans ce qui suit. Ce jeu de tâches a été expérimenté avec de élèves d'une institution spécialisée du canton de Vaud en Suisse. Ces élèves sont âgés entre 7 et 13 ans et rencontrent des difficultés sur lesquelles nous ne nous sommes pas renseignés. Dans les exemples proposés ci-après, il s'agit d'élèves à chaque fois différents et appartenant à des classes distinctes. Nos analyses sont effectuées sur la base de vidéos et/ou des traces d'élèves.

Voici à titre d'exemple, quelques tâches du jeu de tâches autour du dessin à main levée :

a. Dessiner à main levée sur une feuille blanche toutes les formes possibles à 3-4-5-6-7 côtés ;

b. Dessiner à main levée sur une feuille blanche des étoiles à x côtés ;

c. Produire à main levée sur une feuille blanche des polygones étoilés inscrits dans un cercle. Partir de n points positionnés à égales distance sur sa circonférence, puis les relier point par point puis en sautant chaque fois 1 puis 2 puis x points. Essayez de faire et regardez ce que ça donne;

d. Reproduire à main levée sur une feuille blanche un modèle de forme donnée (avec le modèle à disposition ou de mémoire) ;

e. Explorer les différentes formes réalisables à partir d'une paire de parallèles (ou réseaux de droites parallèles qui se coupent) ;

f. dessiner à main levée sur une feuille blanche le logo Mitsubishi (voir Vendeira, à paraître), un hexagone, un assemblage de cubes. Trouver plusieurs manières de les reproduire (dans plusieurs orientations, en les emboîtant, en plus petit ou plus grand, en un seul coup de crayon, …).

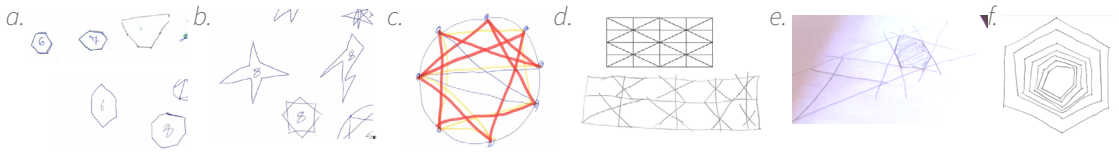


Figure 1- Exemple de traces laissées par des élèves au cours du jeu de tâches autour du dessin à main levée

Cet ensemble de tâches permet ainsi d'aborder des savoirs très variés mais qui appartiennent pour la grande majorité au domaine de l'espace. C'est ainsi au pilote du jeu, en fonction des interactions avec son/ses élèves, de sélectionner les tâches à proposer.

Narrations et analyses

Dans cette partie, nous présentons différents extraits de séances en classe avec des élèves de l'enseignement spécialisés. Ces extraits sont issus de passages vidéo analysés et/ou de traces laissées par les élèves et sont au service de nos deux axes de réflexion. La forme retenue est la narration qui « s'inscrit comme une façon de reconstituer a posteriori le déroulement de la partie jouée par les élèves et le pilote » (Favre, 2019, p.5). La narration comprend une partie factuelle, mais également interprétative. Nous signalons dans ce qui suit les parties interprétatives avec une police d'écriture plus petite.

Exemple 1 – Adrian - à partir d'extraits vidéo

La tâche réalisée par l'élève consiste à reproduire une forme qui ressemble à un drapeau (voir figure 2b). Pour ce faire, Adrian dessine d'abord un rectangle, puis marque le centre du rectangle et à partir du centre il trace les demi diagonales et médianes pour obtenir la forme souhaitée (figure 2a).

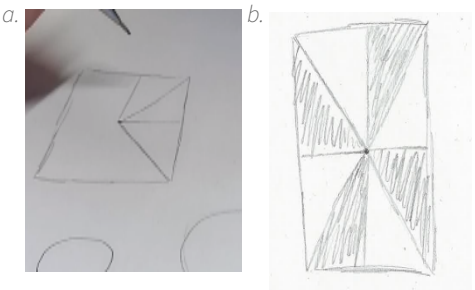


Figure 2 - Traces produites par Adrian (a. en cours de travail / b. à son terme)

Puis, l'élève choisi de reproduire une nouvelle fois le drapeau, mais en plus grand. Lors de cette nouvelle reproduction il modifie sa procédure Cette fois, il marque toujours le centre du rectangle qu'il dessine, mais il trace les segments des diagonales et médianes d'un seul coup de crayon, sans « rayonner » autour du point central (fugure 3a). Lors du tracé de la première diagonale, il rectifie son segment pour qu'il passe bien par le centre marqué. Il a ici un contrôle qui ne serait pas visible avec un instrument.

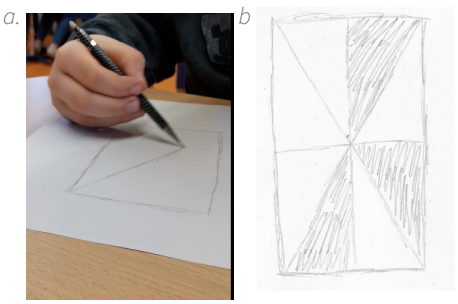


Figure 3 – Deuxième série de traces produites par A (a. en cours de travail / b. à son terme)

Adrian utilise (peut-être implicitement) les propriétés du centre du rectangle afin de pouvoir tracer correctement les segments diagonaux et médians.

Nous faisons l'hypothèse que ceci est rendu possible par l'usage du dessin à main levée. En effet, nous pensons que si Adrian avait eu une règle en sa possession les deux sommets opposés du rectangles auraient probablement été utilisés pour tracer la diagonale.

Ses deux procédures, bien que proches, s'appuient sur des contenus mathématiques différents. Dans le premier cas, tracer des segments depuis le centre repose sur le fait que le centre du rectangle est le centre de symétrie du rectangle. Ainsi, pour tracer ces segments il lui suffit de parcourir la même distance pour chaque segment (demi diagonale ou médiane) de part et d'autre de l'axe de symétrie. Dans le second cas, lorsqu'il utilise le tracé complet des diagonales, il utilise le centre du rectangle comme point d'intersection des diagonales et des médianes.

Dans cet exemple, l'élève mobilise des propriétés qu'il ne mobiliserait peut-être pas lors d'un dessin instrumenté puisqu'ici c'est le besoin de tracer les diagonales et les médianes le plus précisément possible qui l'amène à les utiliser.

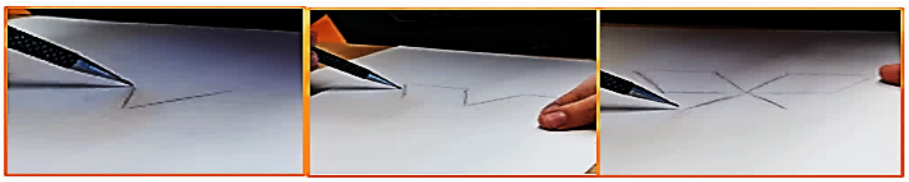
Exemple 2 – Mikael - à partir d'extraits vidéo

L'élève Mikael doit dessiner à main levée selon un modèle qu'il a à disposition le logo Mitsubishi sur une feuille blanche.



Figure 4 - Logo à reproduire à main levée sur une feuille blanche

Là où d'autres élèves construisent successivement trois losanges indépendants, Mikael semble utiliser une procédure différente. Il commence par dessiner le triangle (non fermé) à la base du logo (figure 5a).



a. b. c.

Figure 5 – Reproduction pas à pas du logo Mitsubishi par Mikael.

Puis il construit de chaque côté un segment, parallèle au bord de sa feuille, pour obtenir la base des deux losanges du bas (figure 5b). Il complète ensuite le losange de droite, puis celui de gauche en respectant le parallélisme des côtés opposés et en veillant à les refermer en un point. Pour tracer le dernier losange, il trace d'abord le V du bas du losange en prolongeant les segments de ses deux premiers losanges (figure 5c). Pour tracer le côté en haut à gauche du logo, il prolonge le segment du côté du losange en bas à gauche (représenté en pointillés rouges sur la figure 6) pour obtenir la direction à suivre. Il le fait sans toucher la feuille. Il utilise aussi ce tracé « fictif » pour modifier la longueur des segments constituant le V du losange déjà tracé. Enfin, il trace l'axe de symétrie vertical du logo pour

savoir où est son sommet (figure 6). Son tracé est léger étant donné qu'il s'agit d'un trait de contrôle et non d'un segment appartenant au logo Mitsubishi.

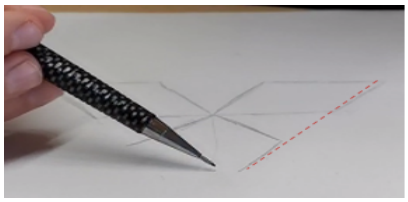


Figure 6 – Dernière étape de reproduction du logo Mitsubishi par Mikael.

Ainsi, la procédure de reproduction de Mikael s'appuie, de manière implicite (lors du Λ du dessin de la base ou du V du losange supérieur) ou explicite (lors du dessin du haut du losange supérieur) sur les propriétés de symétrie axiale de la forme. Il mobilise également les relations de parallélisme, d'alignement et d'intersection de segments.

A travers cet exemple, on remarque que l'élève, sans instrument, doit se donner des moyens de contrôler les propriétés géométriques du logo afin de le reproduire.

Ces deux premiers exemples mettent en évidence des procédures impliquant la mobilisation, par des élèves de l'enseignement spécialisé, de certaines propriétés géométriques (même implicites) pour résoudre un problème de reproduction de figure à main levée. Ainsi, malgré les réserves que l'on a intuitivement quant à l'usage du dessin à main levée pour l'enseignement, on constate qu'il permet néanmoins d'engager des connaissances mathématiques riches.

Types de contrôles dynamiques en usage lors du dessin à main levée en géométrie et potentiel de réplique du dessin à main levée

Exemple 3 - Nuria - à partir d'extraits vidéo

Cet exemple met en évidence deux types de contrôle nécessaires lorsqu'un élève utilise le dessin à main levée dans une tâche de reproduction de figure (logo Mitsubishi). Le cas de Nuria est décrit plus en détails dans Vendeira (à paraître).

Nuria débute par le losange de petite taille dans sa position prototypique (celui du haut sur sa pointe) comme c'est souvent le cas lorsque nous donnons cette tâche à des élèves. C'est à partir de cette première partie de la forme dessinée qu'elle va prolonger ses segments. Elle semble respecter autant que possible les alignements et le parallélisme des côtés.

Nous faisons l'hypothèse que Nuria ne contrôle pas la longueur des côtés de son deuxième losange produit (celui en bas à droite dans la figure 7). Cela se répercute ainsi sur la suite de sa production. On voit aussi que le deuxième losange créé (en bas à gauche sur la figure 7) correspond bien à un losange, mais son aire ne correspond à aucun des deux autres. Malgré son apparence surprenante, on peut

toutefois repérer une certaine logique dans ce dernier losange dessiné. Nous pouvons donc supposer que ce n'est pas l'apparance globale du symbole Mitsubishi qui a guidé les choix de construction de Nuria pour ce dernier élément, mais bien une analyse impliquant des propriétés géométriques. On voit en effet une tentative de respecter des alignements avec les deux losanges déjà produits au risque de s'éloigner significativement de la forme globale du symbole à reproduire. On peut donc faire l'hypothèse que Nuria opère principalement par un traitement analytique de la forme à reproduire.

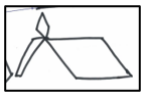


Figure 7 – Production par Nuria du logo Mitsubishi à main levée

Or deux types de contrôle sont nécessaires pour mener à bien cette tâche : la connaissance et le contrôle d'un certain nombre de propriétés même implicites (égalité des longueurs, alignement des points, concourance des lignes, parallélisme, …) et le contrôle de la forme plus perceptif pour vérifier l'aspect global du dessin produit. Comme cet exemple le met en évidence, l'utilisation exclusive de l'un ou l'autre de ces types de contrôle ne suffit pas, les deux doivent se coordonner dans l'action.

Exemple 4 – Fabrice - à partir d'extraits vidéo

Dans l'exemple suivant, nous mettons en évidence comment, au fil de ses productions, un élève prend peu à peu le contrôle sur le milieu en coordonnant les deux types de contrôles nécessaires pour reproduire une forme.

Comme pour l'exemple précédent, il s'agit d'une narration décrite plus en détails dans Vendeira (à paraître). Fabrice reproduit le symbole Mitsubishi en plusieurs étapes que nous décrivons ci-dessous. Sur un réseau qu'il a lui-même produit sur une feuille blanche, il va produire un premier dessin figurant dans le figure 8a.

A partir de cette première production, nous pensons que Fabrice conçoit le symbole Mitsubishi comme composé de trois formes égales.

Toutefois l'orientation des deux losanges du bas (figure 8 a) n'est pas correcte. Une fois sa production finie, Fabrice la regarde puis procède à un nouveau dessin (figure 8b).

Nous faisons ici l'hypothèse que c'est sa vision globale de l'objet dessiné qui lui permet de la sanctionner. En effet, les trois parties sont « collées » entre elles alors que ce n'est pas le cas dans le symbole Mitsubishi où elles se rejoignent en un point.

Lors de sa seconde tentative, l'élève produite cette fois-ci trois objets qui se rejoignent bien en un point comme dans le symbole modèle. Il n'est toutefois toujours pas satisfait.

Probablement qu'il l'invalide par rapport à la nature des formes produites qui ne sont pas des losanges.

Il corrige alors sa production en transformant les triangles en losanges puis colorie son logo (figure 8c).

Cet exemple met de nouveau en évidence la nécessaire coordination entre le contrôle de la forme et le contrôle analytique des formes à reproduire. On voit également comment Fabrice investit les différents essais afin de s'ajuster pour finalement obtenir le symbole souhaité.



Figure 8 – Traces des étapes de dessin à main levée d'un même élève s'appuyant sur un réseau de droites parallèles

Exemple 5 - A partir des traces de deux élèves

Dans ce qui suit, nous donnons deux exemples qui nous permettent, grâce aux traces laissées, d'identifier l'évolution des procédures et la prise de contrôle progressive du milieu par les élèves. C'est ici le potentiel de réplique du dessin à main levée qui est à l'œuvre.

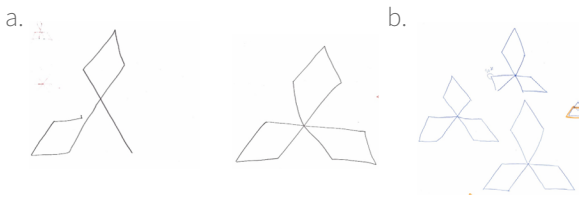


Figure 9 – Traces des étapes de dessin à main levée de deux élèves pour reproduire le logo Mitsubishi

Dans le premier exemple (figure 9a), Sabine dessine le logo Mitsubishi d'un seul coup de crayon, sans lever la main. On constate qu'elle ne contrôle pas l'intersection de sont dernier segment. Sa deuxième tentative suffit à prendre le contrôle et produire un logo Mitsubishi satisfaisant.

Dans le deuxième exemple (figure 9b), Mirko produit trois logos avant d'atteindre l'objectif. Dans sa première tentative, il produit un triangle à la place d'un losange pour l'une des trois parties constituant le logo. Il parvient à réguler sur cet aspect lors de sa seconde tentative, mais ne contrôle pas les mesures des formes produites. Pour finir, il produit le dessin du logo Mitsubishi où les trois losanges sont d'aires plus ou moins égales et dont les alignements et le parallélisme des segments semblent bien contrôlés.

Conclusions

Les différentes expérimentations présentées dans cet article démontrent que le dessin à main levée sur papier blanc n'empêche pas les élèves de mobiliser des connaissances riches. Dans les exemples présentés ce sont les caractéristiques des formes à reproduire ainsi que certaines relations géométriques impliquées qui aont mobilisées. On remarque même que le dessin à main levée permet d'utiliser des propriétés qui sont habituellement peu mobilisées.

Le dessin à main levée a donc un potentiel pour le travail sur les propriétés des objets géométriques et notamment dans l'enseignement spécialisé où l'utilisation d'instrument de géométrie peut être un obstacle aux apprentissages.

Sans instrument, les élèves doivent se donner d'autres moyens de contrôler les propriétés et relations géométriques des formes à reproduire.

Nos observations nous permettent également d'appréhender les deux types de contrôle mobilisés par les élèves dans l'action : le contrôle de la forme et le contrôle analytique. Nous constatons que l'usage exclusif de l'un ou l'autre ne suffit pas, les deux doivent se coordonner afin que l'élève puisse véritablement prendre le contrôle sur le milieu.

Pour finir, le dessin à main levée permettant de nombreuses répliques, des traces abondantes sont laissées et deviennent supports pour appréhender les savoirs en constructions chez les élèves de l'enseignement en contexte spécialisé.

Références

CIIP (2010). *Plan d'étude romand*. [En ligne]. Disponible à l'adresse : https://www.plandetudes.ch/

Conne, F. (2006). Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres : Suivi de situations de dessin en 4ème primaire de l'enseignement spécialisé. Dans *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne*, Giroux, J., Gauthier, D. (dir.). Editions Bande Didactique, Montréal, 219-258.

Conne, F., Cange, C., Favre, J.-M., Del Notaro, L. Scheibler, A., Tièche Christinat, Ch., Bloch, I. & Salin M.-H. (2003). L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. In V. Durand Guerrier & Cl. Tisseron (éds). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, (pp. 77-185). Irem, Université de Paris Diderot. http://www.irem.univparisdiderot.fr/articles/mise_en_ligne_des_actes_du_seminaire_national_de_didactique

Coppé, S., Dorier, J.-L. & Moreau, V. (2005). Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de 5ème. *Petit x, 68*, 8-37.

Duval, R., Godin, M. & Perrin-Glorian, M.-J. (2004). Reproduction de figures à l'école élémentaire. Dans *Actes du séminaire ARDM 2004 de didactique des mathématiques*, Castela, C., Houdement, C. (dir.). IREM Paris 7, Paris, 7-89.

Duval, R. & Godin, M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

Favier, S. & Chanudet, M. (2021). Les démarches et modes de raisonnement en jeu dans les problèmes de « recherche & stratégies » en10H. *RMé, 235*, 88-98.

Favre, J.-M. (dir.) (2019). Expérience et interprétation - Faire des mathématiques avec des élèves de l'enseignement spécialisé. *Actes des troisièmes journées didactiques de La Chaux-d'Abel 3-4-5 mai 2018*.

Favre, J.-M. (2015). Investissements de savoirs et interactions de connaissances dans un centre de formation professionnelle et sociale : une contribution à l'étude des mathématiques dans le contexte de la formation professionnelle spécialisée. Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève.

Favre, J.-M. (2008). Jeu de tâches : un mode d'interactions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans l'enseignement spécialisé. *Grand N, 82*, 9-30.

Jovenet, A.-M. (1998). Perception et conceptualisation de la symétrie. Une situation adaptée aux élèves myopathes. *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(1), 35-58.

Laborde, C. & Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 14/1.2, l65-2l0.

Maréchal, C. (2010). Effets des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé : une analyse didactique à partir du cas de l'introduction à l'addition. Thèse de l'Université de Genève. http://tel.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=j6u9lqna1pg4a69gg4ghger7f1&view_this_doc=tel-00609830&version=1

Monod, J.-D. (2019). A la recherche de l'angle droit avec un enfant aveugle de naissance. *Math-École, 222*, 10-15.

Petitfour, E. (2015). Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème. Thèse de doctorat en Didactique des Disciplines, Paris.

Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Dans Luc Trouche (Dir,), Jean B. Lagrange (Dir.), Les instruments en mathématiques, travail, enseignement, apprentissage (pp. 9-13). Houlgate, France: Xème Ecole d'été de didactique des mathématiques.

Thom, J. S. & McGarvey, L. M. (2015). The act and artifact of drawing(s): observing geometric thinking with, in, and through children's drawings. *ZDM Mathematics Education, 47*, 465-481.

Vendeira, C. (à paraître). Le dessin à main levée pour les apprentissages géométriques à l'école primaire. In C. Guille-Biel Winder, T. Assude (Coord.). Articulations espace sensible, espace graphique, espace géométrique. Ressources, pratiques et formation. Londres : Iste Science Publishing.

Vendeira, C. & Coutat, S. (2017). « C'est une montagne ou une trompette ? » Entre perception globale et caractéristiques des formes aux cycles 1 et 2. *Grand N, 100*, 79-104.

Titre: Bilan du Groupe de travail n°10

Auteurs: ETITFOUR Édith, KOUDOGBO Jeanne et KOUAMÉ Koffi Pierre

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 934 - 942

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Bilan du Groupe de travail nº 10

Responsables
PETITFOUR[1] Édith – KOUDOGBO Jeanne[2] – KOUAMÉ[3] Koffi Pierre
Correspondante CS
VENDEIRA[4] Céline

Les communications et les discussions au sein du groupe « Enseignement des mathématiques auprès de publics spécifiques ou dans des contextes particuliers » (GT10, EMF 2022) ont permis d'aborder de nombreuses thématiques et questions de recherche dans la continuité des travaux réalisés lors des colloques EMF précédents. Le premier thème concerne des dispositifs de recherche visant à développer le potentiel d'élèves à besoins particuliers dans leur activité mathématique. Le deuxième thème porte sur la scolarisation inclusive d'élèves en situation de handicap, le troisième concerne une réflexion sur les ressources et le dernier les performances et potentialités des élèves.

Dispositifs particuliers, développement du potentiel des élèves

Deux contributions ont présenté des dispositifs particuliers : l'un, présenté par Theis, vise à apporter une aide au système didactique principal (classe ordinaire avec des élèves en difficulté), le second, présenté par Vendeira, vise à développer le potentiel de l'usage du dessin à main levée en géométrie avec des élèves à besoins particuliers (classe d'une institution spécialisée). Nous en présentons brièvement les contextes avant d'aborder les éléments discutés au sein du GT10.

Dans un contexte d'enseignement dans une classe togolaise de CM1 (8-10 ans) à effectif pléthorique (72 élèves), Laurent Theis s'est intéressé à la mise à l'épreuve d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté. Ce dispositif a été expérimenté dans le cadre d'une recherche collaborative entre le chercheur et une enseignante, à partir d'un problème ayant pour enjeux mathématiques l'addition et les échanges de pièces de monnaie. Développé depuis 2013 par une équipe de chercheurs québécois et français (e.g. Theis et al., 2014), ce dispositif d'aide a la particularité d'être réalisé avec un petit groupe d'élèves en difficulté en amont de l'activité mathématique en classe.

Dans un contexte d'enseignement spécialisé en Suisse romande, Céline Vendeira s'est intéressée aux potentialités du dessin à main levée pour développer des connaissances géométriques. Le dispositif de travail est mené dans une classe d'une institution spécialisée d'un canton Suisse (élèves

1. Université Rouen Normandie, LDAR, France, edith.petitfour@univ-rouen.fr
2. Université de Sherbrooke, CREAS, Canada, jeanne.koudogbo@usherbrooke.ca
3. LAREDI, ENS, Côte d'Ivoire, koffipierrekouame@yahoo.fr
4. Université de Genève, Suisse, celine.marechal@unige.ch

de 7-13 ans) via des interactions entre élèves et chercheur. Il repose sur une exploration du milieu et l'élaboration d'une liste de tâches contribuant à un « jeu de tâches » (e.g. Conne et al., 2003) ainsi que développé dans les travaux de recherche du groupe didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé (DDMES).

La réflexion du groupe a porté en particulier sur la place du chercheur dans les deux types de dispositif : quelle diffusion des dispositifs ? Quelle transposition du dispositif d'aide aux élèves en difficulté ou du jeu de tâches à la pratique de classe usuelle, sans l'expertise du chercheur à l'œuvre dans les expérimentations présentées ? Dans le jeu de tâches, la place de l'institutionnalisation est questionnée du point de vue du chercheur et de l'enseignant. Le chercheur se centre sur les interactions avec l'élève et ne fait pas d'institutionnalisation. Pour les enseignants, il peut être difficile de faire ressortir les contenus mathématiques, la palette des possibles étant importante dans l'*analyse a priori* qui est à mener. Une piste pourrait être de différer l'institutionnalisation pour laisser à l'enseignant le temps d'analyser les tâches réalisées par l'élève. Le dispositif d'aide aux élèves en difficulté n'est pas simple non plus à mettre en place car ce qu'on fait avant la situation de classe avec le petit groupe d'élèves diffère d'un problème à l'autre, est dépendant d'une analyse *a priori* spécifique. En outre, identifier ce qui aidera l'élève en difficulté sans aller trop loin n'est pas facile non plus à réaliser.

Scolarisation inclusive d'élèves en situation de handicap

Trois contributions ont traité de la scolarisation inclusive d'élèves en situation de handicap : élève déficient visuel (Petitfour et Houdement), élèves reconnus institutionnellement handicapé (Dupré) et élèves autistes (Atta Yeboua et Diomandé).

Édith Petitfour et Catherine Houdement se sont intéressées à l'accompagnement d'un élève malvoyant (11 ans) scolarisé dans une classe de sixième en France. Elles ont étudié les aides apportées par une accompagnante d'élèves en situation de handicap (AESH) dans la réalisation d'une tâche mathématique nécessitant une manipulation de matériel et visant à l'introduction du concept d'aire. Une analyse sémiotique (e.g. Petitfour et Houdement, 2022) révèle des dissonances sémiotiques qui éclairent sur des obstacles aux apprentissages, elle met en évidence la nécessaire collaboration entre enseignant et AESH au service des apprentissages de l'élève.

Dans un contexte français analogue d'inclusion scolaire, Frédéric Dupré s'est intéressé au cas d'élèves bénéficiant en classe de l'accompagnement d'AESH dans le cadre d'une séance d'enseignement portant sur la symétrie axiale en classe de sixième (élèves de 11-12 ans). Son étude s'inscrit dans le prolongement des travaux de Leutenegger (2000) à propos de l'articulation entre différents systèmes didactiques. Elle met en évidence des obstacles et des conditions favorables à l'accessibilité didactique au sein du système d'enseignement comportant un système didactique auxiliaire aux côtés du système principal.

Germain Atta Yeboua et Mariam Diomandé ont questionné la prise en charge d'élèves autistes scolarisés dans des classes d'écoles primaires ordinaires en Côte d'Ivoire (classes du CP2 au CM1). L'étude a été réalisée dans six écoles de la commune de Cocody à travers une enquête et une observation de pratiques de classe dans l'apprentissage de la multiplication. Elle montre que bon nombre d'élèves autistes ne sont pas pris en compte dans les écoles ordinaires, les pratiques enseignantes étant inadaptées à la spécificité des élèves autistes.

À la suite de ces trois présentations, la réflexion du GT10 a porté sur le rôle des accompagnants d'élèves en situation de handicap en classe, sur leur formation, sur leurs liens avec l'enseignant. Les contextes, en France et en Côte d'Ivoire, sont différents concernant les pratiques inclusives, puisque l'inclusion des élèves autistes ivoiriens est à la charge des seuls enseignants alors que les élèves français reconnus institutionnellement en situation de handicap peuvent bénéficier d'une aide humaine si besoin. Un système didactique auxiliaire dans le même espace-temps que le système didactique principal ne favorise cependant pas toujours une accessibilité aux apprentissages mathématiques visés.

Ressources en enseignement des mathématiques

Trois contributions se sont intéressées à la question des ressources en enseignement-apprentissage des mathématiques, notamment le jeu (Athias ; Houle, Atkins et Ghailane) et les manuels scolaires (Koudogbo et Fernandes).

En ce sens, Francine Athias a présenté une étude sur l'utilisation d'un jeu numérique sur tablette auprès des élèves en difficulté d'apprentissage dans un contexte français post-confinement en vue d'y repérer comment des connaissances et compétences mathématiques peuvent être considérées. Ainsi, elle décrit et analyse des actions d'une enseignante et de deux élèves en grandes difficultés d'apprentissage, en s'intéressant surtout à l'une de ces élèves, lors de l'utilisation d'un exerciseur sur tablette en grande section de maternelle (GS, élèves de 5 ans). Les résultats concernent la compréhension des difficultés auxquelles fait face l'élève et des actions de l'enseignante et de l'autre élève.

Dans leur contribution, Virginie Houle, Isabelle Atkins et Oumama Ghailane ont montré comment le jeu mathématique peut servir de levier à la dévolution en contexte orthopédagogique (Québec). Ainsi, ces autrices se sont penchées sur le jeu de Yums dont l'analyse *a priori* des potentialités aide à identifier des tâches mathématiques pouvant être travaillées. Lors des interactions se négocient les enjeux didactiques et ludiques en fonction des caractéristiques du jeu. Le potentiel de ce jeu aide à la prise de décision d'élèves en difficulté.

Jeanne Koudogbo et Daniela Fernandes ont, quant à elles, examiné, dans un contexte québécois, comment le concept de la numération de position décimale, un savoir emblématique, est introduit dans les manuels scolaires québécois du primaire dans une recherche financée par le Fonds de re-

cherche du Québec Société et culture (2017-2023). Les premiers résultats révèlent que les manuels scolaires sont des indicateurs pertinents de la nature de la formation mathématique des élèves en difficulté (ou non), en fonction des contenus et des types d'activités et de représentations. Les résultats orientent vers un renforcement des difficultés des élèves (e.g. Koudogbo et al., 2017) et l'impact de l'utilisation des manuels et leurs incidences potentielles sur l'apprentissage.

À la suite des trois présentations, la discussion du GT10 a concerné différents axes. D'abord, un point commun qui émerge entre ces différentes contributions est la question du choix des ressources disponibles et l'analyse de ces ressources en fonction du contexte spécifique d'exercice. Le choix des ressources est à la charge de l'enseignant ou encore de l'orthopédagogue et fait partie du processus de transposition didactique interne dans le sens où ce choix pourra avoir une répercussion directe sur les objets de savoirs qui vont être introduits au sein du système didactique.

Dans la contribution de Koudogbo et Fernandes (2022), il s'agit d'une analyse des ressources au niveau de la transposition didactique externe qui est réalisée. L'analyse des manuels disponibles met en évidence des choix du point de vue des éditeurs qui ne reflètent pas l'ensemble des savoirs à enseigner inscrits dans les programmes. L'aspect limitatif pourrait avoir une influence sur les apprentissages des élèves en difficulté ou à besoins particuliers (si les différents principes de la numération de position décimale ne sont pas travaillés car le principe de position est surreprésenté).

Un questionnement se dégage notamment du point de vue des ressources mobilisées ou fréquemment utilisées par l'enseignant spécialisé ou l'orthopédagogue qui a à sa charge une responsabilité supplémentaire dans le processus de transposition didactique interne. Au-delà de cette question, les actions de l'enseignante ou encore de l'orthopédagogue sont déterminantes dans la gestion du jeu, il s'agit là d'un questionnement autour de la mise en œuvre des ressources sélectionnées. Cette mise en œuvre peut permettre de dépasser certaines limites ou encore d'influencer certaines techniques visées.

Les discussions ont aussi permis de mener une réflexion autour de l'utilisation du jeu. Le recours au jeu semble motivé par le souci de proposer des situations non marquées scolairement (en référence aux travaux de Lemoyne) aux élèves désignés en difficulté mais aussi sur des situations qui possèdent un potentiel ludique. Ainsi les échanges portent sur la définition du jeu et la différence entre jeu et tâche. La référence à Bougeard permet de souligner le caractère polysémique du mot et d'en définir certaines caractéristiques. La notion de contrat didactique et ludique permet de réfléchir à l'analyse des potentialités du jeu et d'ouvrir une réflexion sur son évolution d'un point de vue temporel : est-ce que le potentiel ludique reste constant au fur et à mesure de la mise en œuvre du jeu ou observe-t-on une diminution de ce potentiel ? Quel est le rôle de l'enseignant dans le maintien d'un équilibre entre ces deux pôles afin de ne pas uniquement basculer dans l'aspect ludique ? Ce potentiel est-il fonction de la difficulté des apprentissages ou des procédures à mettre en œuvre ? La réflexion autour des variables didactiques possibles (Yums) ou impossibles (application sur la tablette) fait partie du travail à

réaliser *a priori* et semble important dans une réflexion sur un temps moyen mais également du point de vue de la flexibilité de la séance (ce qui rejoint le travail autour du jeu de tâches).

En matière de perspectives, dans le texte d'Athias ou de Houle et al., les travaux qualitatifs visent à observer et à comprendre l'activité mathématique et le potentiel des élèves à un temps t. Mais ce qu'Athias nous livre du positionnement scolaire de l'élève observé 3 ans plus tard ouvre un questionnement sur la mise à l'étude sur une temporalité plus longue afin de voir l'évolution de la place de ces élèves vis-à-vis des enjeux de savoirs, en particulier lorsqu'ils ont bénéficié de mesures spécifiques (dispositif d'aide, appui par un enseignant spécialisé ou un orthopédagogue). Enfin, la clarification des contextes et la manière dont les élèves sont identifiés ou désignés comme en difficulté apparait nécessaire en particulier dans le cadre d'EMF qui regroupe des travaux issus de différents systèmes éducatifs. Il semble ressortir que ces élèves dit à besoins éducatifs particuliers peuvent être désignés par une institution extérieure à l'école (MDPH en France, placement dans un centre de jour en suisse), identifiés par l'institution scolaire (élèves en difficulté pris en charge par un orthopédagogue au Québec), identifiés par l'enseignant de la classe qui proposera une intervention spécifique en classe ou encore identifiés par le chercheur.

Performances et potentialités des élèves

Deux contributions ont eu pour centres d'intérêt les performances scolaires (Kouamé) et les potentialités des apprenants (Mouboli).

Dans sa contribution, Koffi Pierre Kouamé aborde la question de l'enseignement des mathématiques dans des contextes particuliers comme ceux des classes à sureffectifs. Il établit le lien entre les séquences temporelles et les performances en mathématiques des élèves de l'école primaire. À cet effet, il analyse l'impact des temps institutionnels ou temps légaux d'enseignement et des temps didactiques (Chopin, 2007) sur les performances des apprenants. À partir des résultats des évaluations communes proposées à des élèves en classes à double-vacation qui ne bénéficient pas de la totalité du temps institutionnel d'enseignement et à des élèves en classes dites « normales » qui eux ont l'entièreté de ce temps, l'étude révèle que le temps légal et le temps didactique n'impactent pas les performances en mathématiques des apprenants de l'école primaire même si, globalement, la tendance est favorable aux élèves en classes dites « normales ». Ce constat est en concordance avec les résultats des travaux de Chopin (2007).

Victor Mouboli, lui, a axé son étude sur le développement des potentialités mathématiques d'élèves identifiés en difficulté par l'interaction avec le milieu. Il relève l'apport de situations problèmes qui sortent du domaine scolaire usuel pour engager les élèves dans une véritable activité mathématique. Le jeu sur les variables didactiques sur le vif permet de susciter des changements significatifs en ce qui a trait à la construction des connaissances des élèves.

Les présentations de ces deux contributions ont suscité des réactions. Concernant le texte de Kouamé, les échanges ont porté sur l'utilisation du temps didactique pour formuler des hypothèses sur les performances des élèves plutôt que le temps d'enseignement, la possibilité de mieux lier les différents concepts à la temporalité, la définition de la performance scolaire, l'intérêt des théories de Brousseau et de Vygotski. En réponse, des clarifications sur certains aspects contextuels comme la moyenne, le type d'évaluation ont été apportées pour permettre à tous les participants de mieux comprendre le texte. Il a été relevé que c'est plutôt le temps légal qui est mis à contribution. Du texte de Mouboli, il a été demandé de clarifier le contexte de l'étude, la qualité des élèves, la notion de potentialité et d'inclure des exemples de pavage, des exemples de tâches présentées aux élèves et de faire plus de place à la description des activités. L'auteur a justifié ses choix. Au terme des deux présentations, les auteurs ont décidé de prendre à leur compte toutes les observations faites par les participants.

Conclusion des travaux

Dix contributions réalisées en contexte togolais, ivoirien, québécois, français et genevois ont nourri les travaux du groupe de travail « enseignement auprès de publics spécifiques ou dans des contextes particuliers » (GT10) pour cette édition 2022 de l'Espace Mathématique Francophone à Cotonou.

Ces contributions ont montré que dans le processus actuel qui tend vers l'école inclusive, l'enseignement des mathématiques auprès de publics spécifiques ou dans des contextes particuliers entraîne régulièrement une complexification du système d'enseignement qui fait intervenir des systèmes auxiliaires ou encore des variations du temps légal d'enseignement. Nous avons observé que ces modifications ont une influence directe sur le processus d'enseignement apprentissage des mathématiques.

Dans nos systèmes éducatifs respectifs, nous retrouvons différents professionnels autres que l'enseignant qui vont avoir une fonction d'aide auprès des élèves : le TES au Québec (Technicien en éducation spécialisé), l'AVS en Côte d'Ivoire (Auxiliaire de vie scolaire), l'AESH en France (Accompagnant d'aide aux élèves en situation de handicap), le SPES en Suisse (Soutien pédagogique de l'enseignement spécialisé). Nous mettons en évidence que ces situations de travail conjoint au sein de la classe peuvent paradoxalement créer des obstacles.

La question des conditions et moyens permettant de soutenir le projet d'école inclusive nécessite une réflexion systémique et cela transparaît dans nos différentes contributions. Cette réflexion implique de s'intéresser aux ressources, aux besoins situés des élèves et aux gestes professionnels des enseignants.

Tous les questionnements que nous avons eus autour de l'accessibilité au savoir sont résolument des questions vives qui nous réunissent dans ce processus international d'accès à l'éducation pour tous. Il nous semble donc important de poursuivre nos travaux au prochain colloque EMF.

Références

Chopin, M. P. (2007). Le temps didactique dans l'enseignement des Mathématiques, Approche des phénomènes de régulation des hétérogénéités Didactiques, Education, Université Victor Segalen, Bordeaux.

Conne, F., Favre, J.-M., Cange, C., Del Notaro, L. Scheibler, A., Tièche Christinat, Ch., Bloch, I., & Salin M.-H. (2003). L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. In V. Durand Guerrier & Cl. Tisseron (*éds*). *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques année 2003*, (pp. 77-185). Irem, Université de Paris Diderot.

Koudogbo, J., Giroux, J. & René-de-Cotret, S. (2017). La numération de position : Où en sont les connaissances d'élèves québécois ? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 17*(3), 199-218, DOI: 10.1080/14926156.2017.1299893.

Leutenegger, F. (2000). Construction d'une « clinique » pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 20*(2), 209-250.

Petitfour, E., & Houdement, C. (2022). Des effets didactiques de microphénomènes sémiotiques en mathématiques. In C. Houdement, C. de Hosson, C. Hache, *Approches sémiotiques en didactique des sciences* (pp.209–244). ISTE Editions.

Theis, L., Assude, T., Tambone, J., Morin, M.-P., Koudogbo, P., & Marchand, P. (2014). Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez les élèves en difficulté du primaire? *Éducation et francophonie, 42*(2), 160-174.

Annexe

ATHIAS, F.

Utiliser un jeu numérique sur tablette avec des élèves ayant des difficultés d'apprentissage

ATTA KOUADIO YEBOUA, G. & DIOMANDÉ, M.

Pratiques enseignantes de la multiplication auprès d'enfants présentant des signes d'autimes dans six écoles de la commune de Cocody

DUPRÉ, F.

Pratiques inclusives et accompagnant d'élèves en situation de handicap (AESH) : une étude de cas en géométrie au collège

HOULE, V., ATKINS, V. & GHAILANE, O.

Le jeu mathématique comme levier à la dévolution en contexte orthopédagogique.

KOUAME KOFFI, P.

Temps légal et performance scolaire des élèves en mathématiques : cas des élèves en classe à double vacation à l'école primaire

KOUDOGBO, J. & FERNANDES, D.

La numération décimale dans les manuels scolaires québécois du primaire

MOUBOLI, V.

Potentialités mathématiques des élèves identifiés en difficulté dans la résolution d'une situation-recherche en mathématique

PETITFOUR, E. & HOUDEMENT, C.

Accompagner un élève déficient visuel en mathématiques : quelles aides ? quels effets ?

THEIS, L.

Mise à l'épreuve d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté dans une classe togolaise du primaire

VENDEIRA, C.

Le dessin à main levée pour développer des connaissances géométriques en contexte d'enseignement spécialisé

Titre: Étude de gestes évaluatifs en situation de résolution de problemes au cycle 2

Auteurs: BLANCHOUIN Aline, GRAPIN Nadine et MOUNIER Eric

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 943 - 959

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Étude de gestes évaluatifs en situation de résolution de problemes au cycle 2

BLANCHOUIN[1] Aline – GRAPIN[2] Nadine – MOUNIER[3] Eric

Résumé – Mené dans le cadre d'une recherche collaborative, notre travail documente l'activité évaluative d'enseignants lors d'une séance de résolution de problèmes arithmétiques en tenant compte de la planification des séances, leur mise en œuvre en classe et le bilan qui en est fait. Une étude comparative de l'activité évaluative de deux enseignantes montre l'intérêt d'une analyse au grain du geste et questionne les opportunités d'auto-régulation offertes aux élèves en lien avec les objets d'apprentissage évalués.

Mots-clefs : mathématiques, évaluation, gestes évaluatifs, résolution de problèmes, auto-régulation

Abstract – Conducted within the framework of collaborative research, our work documents the assessment activity of teachers during a session of arithmetic problem solving by considering the planning of the sessions, their implementation in the classroom, and the outcome that is made. A comparative study of the evaluative activity of two teachers shows the interest in the gesture for the study and asks about the opportunities for self-regulation offered to the pupils in relation to the learning objects assessed.

Keywords: mathematics, assessment, evaluative gestures, problem solving; self-regulation

1. Centre de Recherches sur l'Education, les Apprentissages et la Didactique, Université de Bretagne Occidentale, France, aline.blanchouin@inspe-bretagne.fr

2. Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Est Créteil, France, nadine.grapin@u-pec.fr

3. Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Est Créteil, France, eric.mounier@u-pec.fr

En France, l'évaluation fait l'objet de plusieurs directives institutionnelles depuis 2013 qui incitent les enseignants à concevoir l'évaluation dans un paradigme d'accompagnement des élèves (De Ketele, 2016). La récurrence de ces prescriptions est à croiser avec divers constats sur la difficulté à faire évoluer les pratiques enseignantes en ce sens (Mottier-Lopez, 2015 ; Fagnant & Goffin, 2017 ; Sayac, 2019) et sur le manque de formation des enseignants à l'évaluation en France. C'est avec cette toile de fond que nous étudions la façon dont des enseignants de cycle 2 évaluent au quotidien les connaissances mathématiques de leurs élèves dans le cadre d'une recherche collaborative (Bednarz, 2015) dans laquelle nous sommes engagés depuis plusieurs années. Les enseignants avec qui nous faisons de la recherche / formation exercent en réseau d'éducation prioritaire (REP), c'est-à-dire dans des écoles (élèves du Grade 1 au Grade 5, élèves âgés de 6 à 11 ans) qui bénéficient de moyens supplémentaires pour que tous les élèves maitrisent les apprentissages dits fondamentaux (français et mathématiques). Or, dans ce contexte de travail, Butlen *& al*. (2016) soulignent que les pratiques des enseignants en mathématiques sont marquées par deux tensions : l'installation d'une paix scolaire vs l'exercice d'une vigilance didactique et l'importance de la dévolution (faire en sorte que l'élève s'approprie la tâche) vs l'institutionnalisation (formaliser des savoirs).

Pour cette communication, nous nous intéressons à l'activité évaluative de deux enseignantes de CE1 (Grade 2) en début d'année scolaire lors d'une séance de résolution de problèmes additifs conçue à partir du même guide de l'enseignant. Nous montrons, dans ce contexte, comment l'avancée dans le scénario didactique de la séance influence ces enseignantes d'une part sur les objets d'apprentissages qu'elles choisissent d'évaluer et d'autre part sur les opportunités d'auto-régulation qu'elles offrent à leurs élèves. Afin d'élaborer notre questionnement, nous définissons la notion de geste évaluatif de l'enseignant pour accéder à son activité évaluative et nous précisons les différents objets qui peuvent être évalués en résolution de problèmes. Puis nous décrivons notre méthodologie et formulons nos résultats. Une courte conclusion synthétise les résultats et propose des pistes de discussion en vue de la communication orale.

Cadre conceptuel et questionnement

Étudier l'activité évaluative des enseignants

Rappelons d'abord que, de façon consensuelle, l'évaluation peut être considérée comme étant constituée de :

> « l'objet à évaluer et ses dimensions à analyser ; les attentes vis-à-vis de cet objet [...] ; le recueil d'un ensemble d'informations en rapport avec l'objet au regard des possibilités du réel ; l'interprétation des informations recueillies [...] ; la formulation d'une appréciation qui doit pouvoir être communiquée et fonder des prises de décision ». (Mottier-Lopez, 2015, p.14)

De plus, nous pensons important de considérer dans l'étude de l'activité évaluative de l'enseignant à la fois ses interactions verbales avec les élèves, mais aussi ce qui relève du non-verbal et du paraverbal[4] (et qui peut par exemple permettre de communiquer une appréciation de la part de l'enseignant à un élève). Nous avons choisi pour ce faire de retenir l'approche phénoménologique et anthropologique des gestes professionnels de Jorro & Crocé-Spinelli (2010) et de Jorro (2018) qui repose sur la reconnaissance de la part du corps dans l'agir. Par ailleurs Jorro (2016) invite à mobiliser le grain d'analyse des gestes évaluatifs afin de comprendre l'interaction évalué-évaluateur et souligne que « la situation de feedback comme étant particulièrement cruciale dans l'interaction évaluateur-évalué » (*Ibid*, p. 59). En référence à Hattie et Timperley (2007), nous avons alors retenu quatre catégories de feedbacks :

- le feedback correctif ou de résultat (*task level*) qui vise à révéler à l'élève dans quelle mesure il a réussi ou compris la tâche ;
- le feedback de traitement de la tâche (*process level*) qui vise à guider la réalisation de la tâche en cours en énonçant notamment des liens à effectuer ou des stratégies à adopter ;
- le feedback d'autorégulation (*self-regulation level*) qui vise à développer l'auto-évaluation (self-evaluation), le contrôle et l'autonomie de l'élève ;
- le feedback de personne (*self-level*) qui vise à exprimer une évaluation ou un affect à l'endroit de l'élève, sans rapport avec la tâche, par exemple « tu es un très bon élève ».

Ainsi, nous avons défini le geste évaluatif comme :

> « une combinaison de deux gestes situés : l'un de recueil d'informations et l'autre de rétroaction sur les connaissances ou capacités ou compétences d'un / de certains/ de tous les élèves, en lien avec l'objet évalué et relativement aux attentes de l'enseignant. » (Blanchouin & al., accepté)

Afin de documenter chacun de ces deux gestes et relativement à l'objet évalué, nous repérons d'abord, et de façon commune aux deux gestes, son destinataire. Puis, pour celui de recueil d'informations, nous retenons la forme du questionnement (oral, écrite) ou de l'observation (silencieuse de la production par exemple) ainsi que la nature des informations recherchées par l'enseignant (compréhension de la tâche, résultat produit par l'élève, procédures utilisées, etc.). Pour celui de rétroaction, nous considérons la forme de la communication (verbale, non verbale, introduction de matériel, etc.) et le type d'informations cette fois-ci communiquées à l'élève via les feedbacks (Blanchouin & al., accepté).

4. Nous distinguons le verbal, du paraverbal et du non-verbal en référence à Chabanne (1999) : « le verbal serait ce qu'une transcription écrite conserve des phénomènes langagiers ; le paraverbal serait ce que seul un enregistrement au magnétophone pourrait enregistrer, mais que l'écrit ne retient pas », par exemple : le ton de la voix, la vitesse d'élocution, etc. Les attitudes corporelles, les mimiques, les regards relèvent du non-verbal.

Chacun des gestes évaluatifs étant relatif à l'objet évalué, nous explicitons ci-après les connaissances entrant en jeu dans la résolution de problèmes.

Étudier l'activité de l'élève en résolution de problèmes

Précisons tout d'abord que notre recherche est centrée sur les problèmes arithmétiques verbaux (Feyfant, 2015) basiques (Houdement, 2017), et plus spécialement les problèmes relevant des structures additives (Vergnaud, 1991). Ce choix est notamment justifié par le contenu des programmes français (MEN, 2018) et des documents les accompagnant (attendus de fin d'année et repères de progression), et qui, au début du cycle 2 (grades 1 et 2), préconisent l'enseignement de la résolution de problèmes additifs de réunion (avec recherche du tout et d'une des parties) et de transformation d'état avec recherche de l'état final, de la transformation ou de l'état initial.

De nombreux travaux montrent la complexité à analyser l'activité de l'élève en situation de résoudre des problèmes (Feyfant, 2015). Pour nous y aider, nous avons retenu le modèle de Verschaffel & De Corte (2008, Figure 1) qui distingue différentes étapes dans le processus de résolution de problèmes.

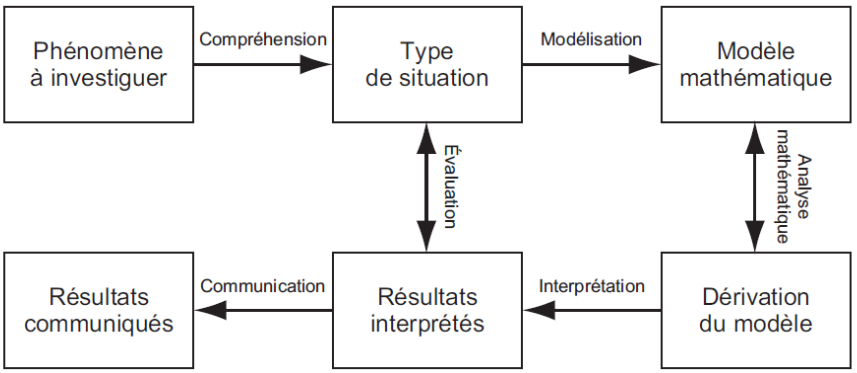


Figure 1 – Schéma de processus de modélisation, extrait de Verschaffel & De Corte (2008)

Précisons qu'au début de cycle 2 (niveau où nous nous plaçons) et dans le cas de problèmes additifs, les modèles mathématiques accessibles aux élèves sont de l'ordre du comptage ou de la reconnaissance de la structure additive en jeu. Par conséquent, « l'analyse mathématique » correspond à un traitement numérique visant à effectuer une opération (qu'elle soit écrite ou non) par calcul ou à réaliser un comptage (Beylot & al., 2022). L'identification du type de situation peut faire écho à la reconnaissance d'une classe de problème que l'élève aurait pu rencontrer au préalable et qui lui permet de mettre en relation le problème donné avec un ou des problèmes résolus antérieurement, mais le choix du modèle mathématique peut aussi reposer sur des inférences de nature sémantique (du type, « ôter c'est soustraire »). Enfin, l'évaluation du résultat obtenu et interprété après calcul peut se faire par des contrôles de nature pragmatique et-ou syntaxique (le premier renvoyant à l'ordre de grandeur du résultat trouvé en lien avec la réalité de la situation évoquée dans l'énoncé et le second à « l'analyse des relations entre les nombres » (Houdement, 2011)). Les contrôles réalisés sur le résul-

tat peuvent ainsi amener l'élève à reprendre son calcul (et dans ce cas, il reste du côté de l'analyse mathématique) ou à repenser le type de modèle choisi. Ainsi, l'enchaînement de ces étapes constitue une progression circulaire, et non linéaire, vers la communication du résultat.

Formulation de la problématique

Le modèle que nous avons choisi pour étudier l'activité de l'élève lorsqu'il résout des problèmes montre la multiplicité des objets potentiellement évaluables pour l'enseignant : la capacité à lire l'énoncé lorsque celui-ci est proposé à l'écrit (ce qui peut être particulièrement difficile pour certains des élèves des grades 1 ou 2), la compréhension du problème (en faisant le lien avec une classe de problème déjà rencontrée si tel est le cas), le choix du modèle conduisant éventuellement à l'écriture d'un schéma, d'un calcul, l'effectuation du calcul ou d'un comptage, l'interprétation et la communication du résultat. En classe, afin d'accompagner l'élève dans ses apprentissages, l'enseignant est amené à évaluer ces différents objets et est amené à ajuster ses gestes, non seulement pour prendre des indices sur les connaissances de ses élèves (gestes de recueil d'informations) mais aussi pour interagir avec lui (gestes de rétroaction). De plus, favoriser la participation de l'élève à l'évaluation de ses connaissances en l'invitant à repérer la réussite ou non à la tâche (auto-évaluation) et à s'engager dans des modifications de son action (auto-régulation) s'avère particulièrement exigent pour l'enseignant désireux d'évaluer pour faire apprendre. Notre questionnement porte donc d'une part sur la mise en évidence des objets évalués en résolution de problèmes par l'enseignant et la place accordée à chacun et, d'autre part sur les caractéristiques des gestes de rétroaction.

Le contexte d'enseignement/apprentissage retenu pour cette communication est un contenu d'enseignement décrit dans un guide de l'enseignant (Mazollier & al., 2016). Il est mis en œuvre par deux enseignantes de CE1. L'objectif annoncé de la séance est de « déterminer par une procédure personnelle la transformation » (*Ibid*, p. 46). C'est la troisième séance de la séquence intitulée « Situations additives et soustractives - Problèmes de transformation (recherche de la quantité finale et de la transformation) » (*Ibid*.) ; séquence qui est la première de l'année de CE1 à être dédiée à la résolution de problèmes arithmétiques. Pour atteindre l'objectif, les auteurs proposent une « activité de découverte » basée sur deux problèmes basiques (Houdement, 2017) de transformation d'état, l'une positive et l'autre négative, avec recherche de l'état initial. La lecture de l'énoncé est accompagnée par un schéma (Figure 2).

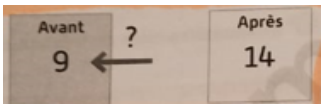
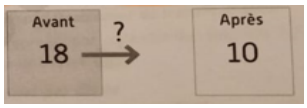
1er problème (Pb1)	2e problème (Pb2)
9 voitures sont garées dans le parking. Des voitures entrent. Maintenant il y a 14 voitures dans le parking. Combien de voitures sont entrées ? 	Il y a 18 voitures garées dans le parking. Des voitures sortent. Maintenant il y a 10 voitures. Combien de voitures sortent ? 

Figure 2 – Enoncés et schémas proposés dans le guide de l'enseignant

Une analyse *a priori* de ces problèmes en lien avec le modèle retenu pour étudier l'activité de l'élève nous conduit à anticiper différentes stratégies et difficultés. La compréhension de l'énoncé passe par celle de l'énoncé oral du problème, mais aussi par le décodage du schéma (compréhension du sens de la flèche). Soulignons que ce type de schéma a été rencontré l'année précédente par les élèves en Cours Préparatoire (Grade 1). La modélisation du problème peut conduire l'élève à l'écriture d'une opération à trou du type 9 +… = 14 et 18 – … = 10 ou d'une soustraction (14 – 9 et 18 – 10), mais il peut ne pas écrire d'opération et pour autant reconnaître un modèle additif en passant par une procédure de comptage (décomptage en partant de 14 pour aller à 9 ou sur-comptage pour aller de 9 à 14, pour le 1er problème). Les procédures de traitement numérique (de calcul ou de comptage) vont conduire à la production d'un résultat numérique que l'élève interprétera au vu du problème pour produire sa réponse. Il pourra vérifier cette dernière par différents contrôles (avec du matériel ou la calculatrice par exemple). Nous cherchons donc, dans ce contexte, à étudier l'activité évaluative de l'enseignant en nous centrant sur la place accordée aux différents objets évalués et sur ses gestes de rétroaction.

Méthodologie generale et elements de contexte

Méthodologie générale

La méthodologie repose sur le recueil d'un matériau composite relatif à l'activité de l'enseignant durant les trois phases de son travail : la planification de la séance, sa mise en œuvre en classe, le bilan post qu'il en fait. La figure 3 ci-dessous donne à voir les méthodes employées pour le faire.

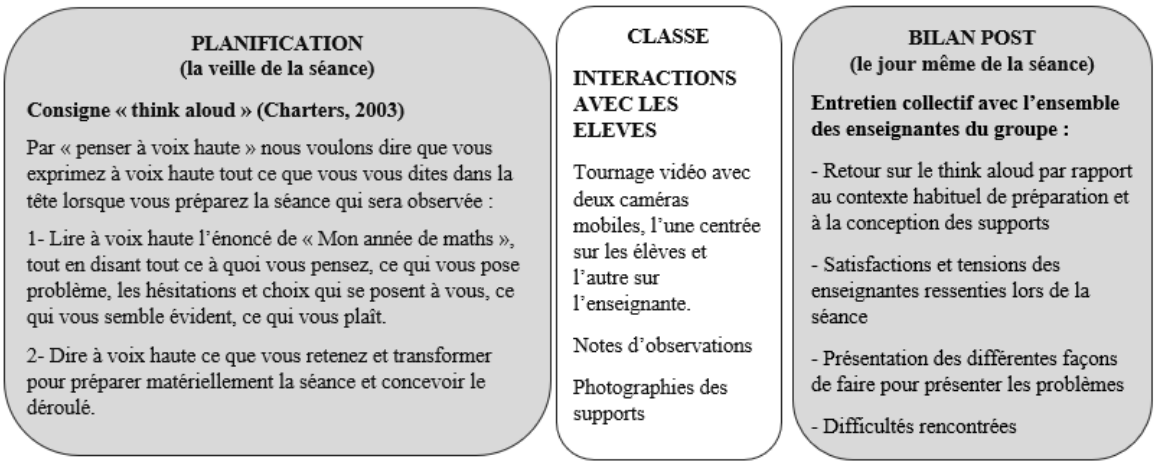


Figure 3 – Les trois sources de matériau pour renseigner l'activité évaluative au quotidien

Concrètement dans le contexte que nous avons sélectionné, les 2 enseignantes (C* et S*) :

- *à la fin de la planification* nous ont transmis leurs enregistrements audios accompagnés des photos de toute leur activité manuscrite ;
- *après leurs séances, lors de la pause méridienne*, ont partagé leur vécu avec quatre autres enseignantes de CE1 impliquées dans le projet de recherche collaborative lors d'un entretien compréhensif collectif, contractualisé en amont entre tous les acteurs.

Pour traiter le matériau, nous articulons les trois volets de matériau [planification-interaction-bilan] en réalisant des transcriptions de plus en plus ciblées des réflexions à voix haute des enseignantes lors de leur planification, de leur co-activité avec élèves en classe autour de l'objet d'enseignement/apprentissage du jour ainsi que du bilan post-séance. Le découpage de la séance en phases s'effectue à partir des objets évalués. Les durées de chacune des phases puis des épisodes sont renseignés à partir du minutage précis du déroulement ; elles sont des indicateurs pour accéder aux préoccupations et aux dilemmes situés de l'enseignant. La mise en lien de l'ensemble de ces données permet ainsi de caractériser le contexte local, d'identifier les objets évalués et de décrire les gestes évaluatifs. En particulier, en croisant ces données, il est possible de repérer les intentions évaluatives de l'enseignant et par conséquent de distinguer les gestes évaluatifs des gestes associés aux interventions propres à la dynamique d'enseignement-apprentissage.

Caractérisation du contexte local : les deux enseignantes, les deux séances

Les deux enseignantes, C* et S* sont très expérimentées (20 ans et davantage) avec une expérience plus importante du cycle 3 (élèves âgés de 9 à 11 ans). Elles partagent chacune la responsabilité d'un groupe de 24 élèves avec une autre enseignante. En lien avec les échanges au sein du groupe depuis septembre 2019, les enseignantes fonctionnent le matin en 4 groupes (un par îlot de tables) ayant des

tâches différentes à réaliser (*fonctionnement en atelier* inspiré de la maternelle). C'est dans ce cadre quotidien que se déroulent, sur une semaine, les quatre séances de mathématiques de la séquence. L'observation doublée du tournage s'est faite durant le travail de C* avec les deux premiers groupes d'élèves (G1 et G2) du matin et durant le travail de S* avec son dernière groupe (G4). Pour caractériser les séances de classe, nous nous référons au projet des auteurs du guide (déroulement indiqué, p.46-48) et utilisons les indicateurs suivants : existence ou absence des 4 moments composant le déroulé du guide (*les activités de découverte*-succession de 2 problèmes ; *le bilan/institutionnalisation* ; *les activités de réinvestissement* (2 exercices) ; un *bilan final*) ; durée et moyens d'actions matériels de l'enseignante auprès des élèves lors de ces moments. A partir de ces indicateurs, présentons chronologiquement les déroulés des séances des deux enseignantes.

- Avant les activités de découverte : S* conduit un temps de rappel de 3minutes à partir du problème de la veille (12+4= ?). Elle trace la schématisation et leur demande de retrouver l'histoire (1minute 50secondes). Puis, elle invite les élèves à sortir et à préparer leur ardoise en traçant les différents symboles (sans la pointe de la flèche – annexe 2) tout en revenant sur la signification du point d'interrogation (1minute 10 secondes).

- Les activités de découverte (les 2 problèmes) représentent 72,5% (G2) et 82% (G1) de la séance de C* qui ne propose pas les activités de réinvestissement et 52 % chez S* qui elle les propose. L'annexe 1 apporte des indications sur les déroulements effectifs (enchaînement des phases de lancement- recherche-mise en commun et validation) de ce moment chez C* et S*.

- L'institutionnalisation est conduite en demandant tout d'abord aux élèves de sortir leur cahier de mathématiques (S*) ou en distribuant une fiche (C*). Cela étant fait (entre 1 à 2 minutes), chacune procède problème par problème pour compléter la trace écrite proposée par le guide. Chez C*, cela prend 13% à 15,4% du temps de la séance lors d'une durée de 4 minutes pour les deux groupes ; cette place accordée est bien plus faible chez S* (8%). Toutes deux utilisent une affiche confectionnée en remplacement du poster du guide qui leur permet de faire apparaître le contenu (Annexe 2).

- Pour les activités de réinvestissement, seule S* les propose sur 25% du temps de la séance.

- Le bilan final de séance n'est réalisé par aucune des 2 enseignantes pour revenir comme suggéré par le guide aux « questions à se poser et les procédures de résolution de problèmes rencontrées en lien avec la structure des problèmes ».

L'accès à la planification via le think aloud permet de comprendre les choix de S* et C* concernant le déroulé de leur séance et éclaire la raison pour laquelle le temps passé, durant la séance, à la résolution des deux problèmes (activités de découverte) n'est pas le même (Blanchouin & al., 2021). Etudions désormais l'activité évaluative de C* et S* durant ce moment et montrons ici l'intérêt de pouvoir croiser nos données pour comprendre leurs gestes.

Résultats : objets évalues et gestes de retroaction

Une priorisation différente des objets évalués au cours de l'activité de découverte

Dans le cadre de cette séance, l'analyse *a priori* nous a permis de dégager la multiplicité des objets à évaluer. Nous avons ainsi retenu que pour les enseignantes, la compréhension du problème et la recherche d'un modèle passait par la traduction de l'énoncé (avec un schéma similaire à celui présenté dans les figures 2 et 3), par un traitement numérique du problème et par l'écriture mathématique conduisant à la réponse donnée. Une analyse au niveau de la durée des phases (Figure 4) montre que le temps accordé à la traduction du problème est variable d'un problème à l'autre et d'un atelier à l'autre pour C*.

C* (Groupe 1)	C* (Groupe 2)	S*
Traduction de l'énoncé en schéma Pb1 : 14% ; Pb2 : 36%	**Traduction de l'énoncé en schéma** Pb1 : 39% ; Pb2 : 45%	**Traduction de l'énoncé en schéma** Pb1 : 34% ; Pb2 : 40%
Recherche du problème Pb1 : 35% ; Pb2 : 30%	*Recherche du problème* Pb1 : 20% ; Pb2 : 19%	*Recherche du problème* Pb1 : 17% ; Pb2 : 22,5%
Ecriture mathématique du calcul Pb1 : 15% ; Pb2 : 5%	**Ecriture mathématique du calcul** Pb1 : 12% ; Pb2 : 12,2%	**Procédures de calcul** Pb1 : 49% ; Pb2 : 23,5%
Procédures de calcul Pb1 :31% ; Pb2 : 25%	**Procédures de calcul** Pb1 : 29% ; Pb2 : 23,8%	**Ecriture mathématique du calcul** Pb1 : non fait ; Pb2 : 14%
Réponse au problème Pb1 : 5% ; Pb2 : 4%	**Réponse au problème** *Lors de l'écriture mathématique*	**Réponse au problème** *Lors des procédures (Pb1 et Pb2)* *Lors de l'écriture mathématique (Pb 2)*

Figure 4 – Répartition en proportion des durées des phases de la séance

Dans tous les cas, nous observons, à partir de ces seules données, que la place accordée à l'écriture mathématique dans le déroulé de la séance est moindre que celle accordée aux procédures de calcul et à la traduction sous une forme de schéma. Une analyse des transcriptions des interactions entre les enseignantes et les élèves lors des ateliers nous permettra d'affiner ces premières conclusions et de préciser le nombre d'épisodes évaluatifs selon chacune de ces phases, pour chacun des objets. Ainsi, la variation des consignes données par C* aux élèves pour résoudre le problème (Figure 5) témoigne des tensions auxquelles C* est soumise lors de cette séance et questionne ainsi la nature des objets qu'elle va vouloir évaluer.

G1-Pb1 : « *Essayer de trouver le calcul et la solution* »

G1-Pb2 : « *Faire le calcul et écrire le résultat* »

G2-Pb1 : « *Faire les dessins et les calculs et mettre les solutions* »

G2-Pb2 : « *Chercher le résultat du problème et écrire le calcul le problème* »

Figure 5 – Consignes successives données par C* pour engager les élèves dans la résolution des problèmes

Nous remarquons en ce qui concerne le traitement numérique (calcul ou comptage), que les deux enseignantes y portent davantage attention lors de la mise en commun ; S* l'aborde avant l'institutionnalisation de l'écriture du calcul alors que C* le fait après. L'arbitrage entre ces objets d'évaluation et les choix opérés sur les déroulés peuvent ensuite être expliqués par les données issues du think aloud et du bilan post séance (Blanchouin & al., 2021).

Des gestes de rétroaction avec matériel différents

Nous avons choisi de nous intéresser aux gestes de rétroaction, et plus spécifiquement à ceux déployés avec du matériel par les enseignantes. En effet, le guide propose d'utiliser le matériel miniaturisé (carte parking et vignettes de voitures) avec deux finalités : pour les élèves en difficulté qui « après des essais infructueux, ne sont pas encore capables de déterminer la valeur de la transformation » (Mazollier *& al.*, 2016, p. 47) et pour valider le résultat lors de la mise en commun. Les auteurs conseillent également, lors de la validation, d'utiliser la calculatrice ou éventuellement des jetons. Nous comprenons alors que l'utilisation du matériel pourrait conduire à des feedbacks au niveau du traitement de la tâche ou de l'auto-régulation (pour contrôler le résultat trouvé) permettant ainsi à l'élève d'être plus ou moins autonome dans la résolution du problème. Par rapport aux prescriptions du guide, C* et S* proposent en plus une bande numérique ; C* met également à disposition les cubes de numération.

S* ne propose pas le matériel de la même façon lors des deux problèmes. Pour le premier, elle n'introduit que le matériel miniaturisé à la fin de la mise en commun pour valider le résultat ; elle s'adresse plus spécifiquement à deux élèves, pour lesquelles elle avait observé silencieusement une erreur de comptage, sans rétroagir immédiatement. S* place ainsi le matériel miniaturisé au centre de la table et, en s'adressant à ces deux élèves, matérialise la situation puis ajoute des voitures en sur-comptant de 9 à 14. Cette rétroaction différée, conduit une des élèves à trouver que 5 voitures ont été ajoutées. Lors de la résolution du problème 2, S* propose à cette même élève de prendre la bande numérique dès le début de la recherche et elle indique à l'autre élève, qui souhaitait également en prendre une, qu'elle peut prendre si elle préfère du matériel miniaturisé. S* observe les réponses des élèves silencieusement et valide lorsqu'ils lui montrent leur ardoise par un signe de tête, un regard et un sourire ; la rétroaction se faisant ainsi au niveau du résultat uniquement lorsque la réponse est juste. Une élève se trompe cependant en écrivant (10 – 11 – 12 – 13 – 14 – 15 – 16 – 7 – 18) et en

trouvant ainsi 9 pour résultat. La rétroaction se fait en indiquant à l'élève que sa réponse est fausse ; l'élève rectifiant en écrivant 8 après avoir observé les ardoises de ses camarades.

Pour chacun des deux groupes, C* présente le matériel lors de la phase de lancement, indépendamment de toute évaluation. Ensuite, selon les difficultés qu'éprouvent les élèves lors de la phase de recherche (difficultés qu'elle repère bien souvent par une observation silencieuse), C* propose à nouveau le matériel, mais sans orienter l'élève vers l'utilisation d'un type de matériel ni lui indiquer ce à quoi il peut lui servir. Par exemple, elle dit à Miriam (qu'elle sait être en difficulté) au début de la phase de recherche : « *si tu as besoin, tu as ça* » en poussant vers elle une barquette avec le matériel miniaturisé, ou à Max, après avoir observé sa production : « *qu'est-ce qui te bloque ? Regarde, tu as du matériel ; tu as le parking, les cubes comme tu veux* ». C* a tendance dans un premier temps, elle, a laissé l'initiative aux élèves de choisir le matériel dont ils ont besoin, puis si besoin de le leur en proposer en fonction de ses observations soit au début de la phase de recherche, lorsque l'élève semble bloqué ou en cours de recherche lorsqu'elle constate que le résultat n'est pas le bon.

Une étude plus fine de ses gestes évaluatifs, et notamment ceux de rétroaction, sera présentée lors du colloque, mais nous pouvons cependant faire l'hypothèse que de tels gestes conduisent à favoriser l'autorégulation chez l'ensemble des élèves. Hypothèse étayée par l'observation, dans chacun des deux groupes, d'élèves qui choisissaient de leur propre initiative du matériel soit pour effectuer le traitement numérique (bande numérique chez S* et cubes et parking chez C*), soit pour valider leur résultat (bande numérique chez S* et C*). Ceci nous permet de mieux comprendre pourquoi et comment les gestes évaluatifs des deux enseignantes ont amené certains de leurs élèves à être plus autonomes pour entrer dans le problème, pour contrôler leur résultat ou encore pour revoir leur procédure et plus largement à prendre des initiatives.

Conclusion

Tout d'abord, ce que nous venons de dégager à propos de l'arbitrage fait par les deux enseignantes entre les trois objets à évaluer (traduction de l'énoncé en schéma, procédures de calcul, écriture mathématique sous forme d'opération) et des gestes de rétroactions déployés en lien avec du matériel apporte un premier éclairage sur les caractéristiques de leur activité évaluative. Une analyse plus fine de la co-activité [enseignante-élèves] permettra de proposer des résultats plus précis quant aux gestes ayant favorisé ou non la participation des élèves au processus évaluatif. Ce qui permettra de conclure sur la problématique de l'évaluation au service des apprentissage dans ce contexte d'enseignement de la résolution de problèmes avec des élèves étant au début de leurs apprentissages scolaires dans ce domaine ainsi qu'en lecture.

Ensuite, nous envisageons la discussion dans deux directions : l'intérêt de notre méthodologie en trois volets pour non seulement décrire l'activité évaluative de l'enseignant mais aussi pour la comprendre ; l'interprétation faite du modèle de Verschaffel & De Corte (2008) pour aider, en formation, l'enseignant à prendre des indices en classe sur l'activité de l'élève.

Références

Bednarz, N. (2015). La recherche collaborative. *Carrefours de l'éducation, 39*(1),171-184.

Beylot, D., Blanchouin, A., Chenevotot, F., Grapin, N., Ledan, L., Mounier, E. (2022) Etude exploratoire de procédures d'élèves de 7-8 ans en calcul mental aditif. *Revue Math-Ecole, 238*, 29-40.

Blanchouin, A., Grapin, N., Mounier, E. (2021) Documenter l'activité évaluative de PE dans le cadre d'un dispositif de Recherche-Formation : étude de cas en résolution de problèmes au cours élémentaire de première année. *Colloque L'école primaire au 21ème siècle. Cergy Pontoise. Octobre 2021*.

Blanchouin, A., Grapin, N., Mounier, E (accepté) Documenter l'activité évaluative des professeurs des écoles à partir de leurs gestes évaluatifs - Étude de cas en mathématiques. *e-JIREF.*

Butlen, D., Charles-Pezard, M. Masselot, P. (2016). *Apprentissage et inégalités au primaire : le cas de l'enseignement des mathématiques en éducation prioritaire*. Contribution dans le cadre du rapport du CNESCO sur les inégalités scolaires d'origine sociale et ethnoculturelle.

Chabanne, J-C. (1999). Verbal, para-verbale t non verbal dans l'interaction verbale humoristique. Dans : J.M. Defays et L.Rosier éd, *Approches du discours comique*, p. 35-53. Bruxelles : Mardaga.

De Ketele, J-M (2016). L'évaluation et ses nouvelles tendances, sources de dilemmes. *Education Permanente, 208-3*, 19-32.

Fagnant, A., & Goffin, C. (2017). Les conceptions des futurs enseignants du secondaire en matière d'évaluation : entre un accord de principe et une vision limitée de l'évaluation formative. *Mesures et évaluation en éducation, 40-1*, 1-32.

Feyfant, A. (2015) La résolution de problèmes de mathématiques au primaire. *Bulletin de veille de l'Ifé*, 105.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research, 77-1*, 81-112.

Houdement, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 15*, 67-96.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 59-78.

Jorro, A. (2016) Se former à l'activité évaluative. *Education Permanente*, 208/2016-3, 53-64.

Jorro, A. (2018). Les gestes professionnels comme arts de faire. Education, formation, médiation culturelle. Presses universitaires du Septentrion.

Jorro, A., & Crocé-Spinelli, H. (2010) Le développement de gestes professionnels en classe de français. Le cas de situations de lecture interprétative. *Pratiques, 145-146*, 125-140.

Mazollier, M-S., Mounier, E., Pfaff, N. (2016). *Mon année de Maths CP*. Manuel pédagogique pour l'enseignant et fichier de l'élève. Editions SED.

Ministère de l'éducation nationale (2018). Programme d'enseignement du cycle 2.

Mottier-Lopez, L. (2015). *Evaluations formative et certificative des apprentissages*. De Boeck.

Sayac, N. (2019). Approches didactiques de l'évaluation et de ses pratiques en mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques, 39*(3), 283-329.

Vergnaud, G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

Verschaffel, L. & De Corte, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. Dans : Marcel Crahay éd., *Enseignement et apprentissage des mathématiques : Que disent les recherches psychopédagogiques* (p. 153-176). Louvain-la-Neuve: De Boeck Supérieur.

Annexe 1

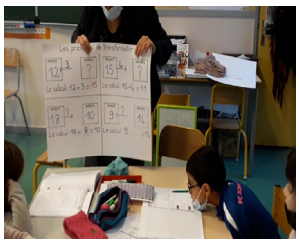
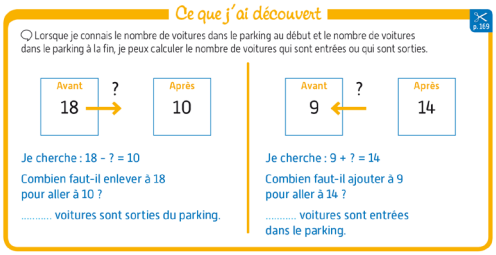
C* avant la récréation **G1** : 4 élèves (31') **G2** : 6 élèves (26')	Résumé de la séance n°3/4 du GUIDE (Mazollier et al., p.46 à 48)	S* après la récréation **Le dernier groupe de fin matinée G4** : 6 élèves (33')
PROBLEME 1 **Groupe 1** (13'34) soit **44,2%** de la séance **Groupe 2** (9') soit **34,6%** de la séance Déroulé identique pour les 2 groupes **Lancement** : lecture, écriture de la schématisation, mise à disposition de matériel divers **Recherche** sur ardoise de l'écriture de l'opération **Mise en commun** : 1-Ecriture de l'opération 2-Procédures 3-Résultat (sauf pour le G2)	**I-Activités de découverte** Deux problèmes sont proposés l'un après l'autre **Problème 1 énoncé oral et schématisation** Avant 9 ← Après 14 **Problème 2 énoncé oral et schématisation** Avant 18 → Après 14 Un même déroulement est indiqué ***Lancement :*** *Lire et représenter la situation* ***Recherche :*** ***Mise en commun et validation*** *- Discussion pour faire ressortir les différentes procédures permettant de trouver la solution* *- Analyse des erreurs puis des procédures justes* *- Validation avec le matériel une fois les procédures exposées* *- Verbalisation claire du résultat obtenu : de 9 pour aller à 14 il faut ajouter 5* *- Lien avec le problème référence en montrant la différence entre les deux.* *- L'écriture mathématique est utilisée : 9+5 = 14*	**PROBLEME 1 :** Durée de 9'44 soit **29,8% de la séance** Déroulé **Lancement schématisation en oral collectif** : lecture et traduction de chacune des phrases par l'ajout d'un élément du schéma ≈3'20 **Recherche sur l'ardoise de l'opération et du résultat** ≈1'40 **3-Mise en Commun** ≈4'46 1-Procédures de calcul 2-Validation du résultat avec le matériel « élève ». Nb : pas de retour sur l'écriture de l'opération (S* s'en rend compte après la mise en commun du 2ème problème) *1' : élèves effacent et préparent leurs ardoises pour le 2ème problèmes / Véra prend conscience de son erreur de départ // S* prépare son tableau (le schéma à remplir + aimante la fiche « énoncé »*
PROBLEME 2 **Groupe 1** (11'40) **soit 37,6 %** de la séance **Groupe 2** (9'50) **soit 37,8%** de la séance Déroulé identique pour les 2 groupes différent du problème 1 **Lancement** : lecture **Recherche (1)** sur ardoise de la schématisation **Mise en commun** (1) Schématisation **Recherche (2)** sur ardoise de l'opération et du résultat **Mise en commun** (2) 1-Ecriture de l'opération (et résultat pour le G2) 2-Procédures 3-Résultat lors de l'écriture de l'opération (sauf G2)		**PROBLEME 2 :** durée (7'10) **soit 22% de la séance** Déroulé identique au 1er problème avec une variation lors de la 2ème partie de la mise en commun **Lancement schématisation en oral collectif** : lecture et traduction de chacune des phrases par l'ajout d'un élément du schéma ≈2'53 **Recherche sur l'ardoise de l'opération et du résultat** ≈1'37 **Mise en Commun** ≈2'42 1-Procédures de calcul 2-Ecriture de l'opération

Annexe 2

Avant les activités de découverte : schématisation proposée par S* et schémas tracés t par les élèves sur l'ardoise

S* trace la schématisation	Ardoise des élèves avant les « activités de découverte »
	 

Institutionnalisation

Poster de l'enseignante	Trace écrite à compléter par les élèves
	

Titre: Évaluer les compétences des élèves en résolution de problèmes : Réflexion sur la nature des apprentissages visés et les modalités d'évaluation

Auteurs: CHANUDET Maud et FAVIER Stéphane

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 960 - 975

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Évaluer les compétences des élèves en résolution de problèmes : Réflexion sur la nature des apprentissages visés et les modalités d'évaluation

CHANUDET[1] Maud – FAVIER[2] Stéphane

Résumé – Nous nous intéressons aux apprentissages possibles des élèves en résolution de problèmes lorsque celle-ci constitue l'objet de l'enseignement. Nous montrons en quoi la prise en compte des démarches et des raisonnements en jeu dans les problèmes conduit à interroger le choix de ceux proposés aux élèves en vue d'une évaluation certificative, en lien avec les modalités d'évaluation mises en avant institutionnellement. Nous prenons pour cela comme contexte d'étude un cours genevois dédié à la résolution de problèmes.

Mots-clefs : résolution de problèmes, raisonnement mathématique, démarche, évaluation, narration de recherche

Abstract – This paper focuses on the possible learnings related to problem solving in mathematics when it is the object of the teaching and learning. We show how taking into account the mathematical approaches and reasoning involved in the problems leads us to question the choice of those proposed to the students with a summative purpose, in connection with the evaluation methods chosen by the scholar institution. For this purpose, we take as a study context a course dedicated to problem solving.

Keywords: problem solving, mathematical reasoning, process, assessment, research narrative

1. Université de Genève, Suisse, maud.chanudet@unige.ch

2. Université de Genève, Suisse, stephane.favier@unige.ch

Introduction

Le travail que nous présentons ici s'inscrit dans le cadre d'un projet de recherche financé par le fonds national suisse pour la recherche scientifique[3], mené par l'équipe DiMaGe (didactique des mathématiques à Genève) entre 2017 et 2022, dirigé par Jean Luc Dorier et Sylvie Coppé et portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes.

Le plan d'études romand qui régit les 11 années de la scolarité obligatoire fait de la résolution de problèmes le cœur de l'enseignement des mathématiques, à Genève comme dans le reste de la Suisse romande. Par ailleurs, un cours genevois spécifiquement dédié à cette partie de l'activité mathématique (intitulé « démarches mathématiques et scientifiques ») est suivi par une partie des élèves de 10e (grade 8, élèves de 13-14 ans). Dans ce contexte, les enseignant·es doivent amener les élèves à développer leurs compétences en résolution de problèmes. Ce cours conduit de plus à une évaluation certificative indépendante du cours ordinaire de mathématiques et qui vise à se prononcer sur le fait que « Au terme de la résolution d'un problème mathématique, l'élève est capable d'expliquer la démarche entreprise en décrivant ses actions, en structurant son raisonnement et en argumentant ses choix. » (DIP 2021, p. 4). Pour cela, il est demandé aux enseignant·es de s'appuyer sur le dispositif de la narration de recherche. Une grille de critères d'évaluation leur est proposée, s'articulant autour de cinq grandes dimensions : la présentation, la narration, la modélisation, la recherche et la technique.

Notre recherche doctorale (Chanudet, 2019) menée dans le contexte de ce cours a mis en avant des difficultés ressenties par les enseignant·es quant à l'enseignement et à l'évaluation de la résolution de problèmes lorsque celle-ci constitue un objet d'enseignement et d'apprentissage à part entière. L'étude a notamment montré que les enseignant·es peinaient à identifier les objectifs d'apprentissage visés et en conséquence, à choisir les problèmes à proposer dans le cadre d'une évaluation certificative et, pour certains, à déterminer des critères d'évaluation.

Nous nous intéressons ici à la nature des apprentissages qui peuvent être visés via la recherche des problèmes que Georget (2009) regroupe sous l'appellation d' « activités de recherche et de preuve entre pairs » (activités RPP), c'est-à-dire que nous cherchons à déterminer leur potentiel didactique (Georget, 2009), et par la même, à mener une réflexion théorique sur les problèmes qu'il peut être pertinent de proposer aux élèves, sur leur articulation et sur l'évaluation associée.

3. Subside nº 100019_173105 / 1

La résolution de problèmes comme objet d'enseignement et d'apprentissage

L'introduction à l'enquête thématique de l'*International Congress on Mathematical Education* (ICME-13) dédiée au *Problem solving in mathematics education* (Liljedahl *et al.*, 2016) met en avant deux fonctions de la résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques. La première est celle d'outil, de moyen de développer et d'évaluer les apprentissages des élèves sur des notions ou des concepts mathématiques spécifiques. Les problèmes sont alors constitutifs de l'apprentissage des mathématiques (Houdement, 2003, p. 8), ce qui conduit à parler d'apprentissage *par* la résolution de problèmes. La deuxième fonction a trait à la résolution de problèmes comme un objet d'apprentissage à part entière. Contrairement au premier cas, il s'agit ici de développer chez les élèves des compétences de résolution de problèmes, indépendamment en quelque sorte des notions mathématiques en jeu. On peut alors parler d'apprentissage *de* la résolution de problèmes. Charnay (1988) mettait déjà en avant cette double fonction en termes d'objectifs de l'activité de résolution de problèmes, entre ceux d'ordre « méthodologique » (apprendre à chercher) et ceux d'ordre « cognitif » (visant une connaissance).

Toutefois, force est de constater que, comme le soulignent plusieurs auteurs (Hersant, 2008; Houdement, 2009; Mercier, 2008) dans les dispositifs visant à faire pratiquer la résolution de problèmes aux élèves ainsi que dans les parties des curricula dédiés, les apprentissages visés ne sont pas toujours clairement exprimés et ne se réfèrent pas à des savoirs mathématiques précis. Houdement (2009) met quant à elle en avant le fait que les problèmes de type « problème pour chercher » à l'école primaire peuvent amener les élèves à développer, notamment, des apprentissages liés à des manières de raisonner et de valider en mathématiques. Nous nous plaçons dans cette perspective et étendons la réflexion au niveau du secondaire I. Cela nous conduit à identifier et à caractériser le potentiel didactique des activités RPP comme relevant de démarches et de raisonnements mathématiques et de différentes manières de prouver.

Les raisonnements et démarches en jeu dans les activités RPP

Postulant qu'en résolvant des problèmes, les élèves peuvent développer des apprentissages liés au raisonnement mathématique, nous nous appuyons sur les travaux de Jeannotte (Jeannotte, 2015; Jeannotte et al., 2020; Jeannotte & Kieran, 2017) qui propose un modèle du raisonnement mathématique pour l'enseignement et l'apprentissage à l'école, afin d'identifier des types de raisonnement qui peuvent être travaillés avec les élèves en classe.

Jeannotte définit le raisonnement mathématique comme « une activité particulière de communication avec soi-même ou les autres qui permet d'inférer des énoncés mathématiques à partir d'autres énoncés mathématiques. » (Jeannotte *et al.*, 2020, p. 9). Elle s'appuie sur deux aspects essentiels pour caractériser le raisonnement mathématique, son aspect structurel et son aspect processuel. Le

premier aspect a trait à la structure, à la forme de l'activité discursive, à la manière dont s'articulent et s'enchainent les pas de raisonnement. On retrouve notamment les raisonnements à structure déductive ou inductive qui sont travaillés à l'école, ou encore les raisonnement abductif ou analogique. Le second aspect prend en compte les actions menées par celle ou celui qui raisonne et leur but. Jeannotte identifie ainsi les processus de généralisation, de conjecture, d'identification d'une régularité, de comparaison et de classification qu'elle regroupe sous l'intitulé de processus de recherche de similitudes et de différences, et les processus de justification, preuve et démonstration qu'elle regroupe en processus de recherche de validation, tous étant supportés par le processus d'exemplification.

La prise en compte de ces deux aspects du raisonnement mathématique nous permet d'identifier des types de raisonnement particuliers qui peuvent être mobilisés par les élèves.

Au sein des raisonnements à structure déductive, on distingue notamment les raisonnements hypothético-déductifs des raisonnements d'implication logique, et ce, en fonction de la nature de la règle convoquée. En effet, un pas de raisonnement déductif permet de trouver une affirmation à partir de données et d'une règle. C'est-à-dire qu'à partir de données et d'une règle dont la prémisse correspond aux données et qui implique nécessairement la conclusion, on en déduit une affirmation. Lorsque la règle est liée à des savoirs mathématiques au sens de savoirs savants dans la transposition didactique (Chevallard, 1985), c'est-à-dire des objets d'enseignement identifiés dans les programmes et travaillés explicitement avec les élèves (théorème, propriété, etc.), nous parlons de raisonnement hypothético déductif[4]. Lorsque la règle est de l'ordre de la logique mathématique (la règle du tiers exclus par exemple) et ne fait donc pas l'objet d'un enseignement spécifique (en tout cas en Suisse), nous parlons de raisonnement par implication logique. Le point de vue structurel permet aussi de caractériser certains raisonnements par des articulations particulières de pas déductifs. Parmi ceux-là, nous retenons le raisonnement par exhaustivité des cas qui consiste, de manière générale, à tester l'une après l'autre, après les avoir énumérées, toutes les solutions potentielles d'un problème (Battie, 2003, p. 48) et le raisonnement par disjonction de cas qui consiste à ramener la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas grâce à une partition des éléments de l'ensemble considéré et à un traitement séparé de chacun d'eux (Battie, 2003). Ajoutons que lorsque l'on met en jeu de tels raisonnements, la preuve tient au fait que si la règle et les données sont vraies alors l'affirmation obtenue l'est aussi. Le raisonnement déductif étant le seul à avoir cette caractéristique, c'est ce qui lui donne une place particulière en mathématiques.

La deuxième structure de raisonnement qui est mis en avant dans les programmes scolaires est le raisonnement inductif. Il est souvent caractérisé comme permettant de passer du particulier au général. Pólya (1958) le caractérise comme une manière de raisonner qui conduit à la découverte de lois générales en partant de l'observation d'exemples particuliers et de leurs combinaisons. On peut le caractériser comme partant de l'observation de données et de certaines régularités (appelées aussi

4. N'ayant pas la place d'illustrer à l'aide de problèmes les différents types de démarches et raisonnements mentionnés, nous renvoyons les lecteurs/trices à l'article rédigé dans la revue RMé (Chanudet & Favier, 2021).

affirmation), et de l'inférence d'une règle qui permet de passer des données à l'affirmation. Pour autant, l'affirmation obtenue n'est pas nécessairement vraie. Il faut le prouver en s'appuyant notamment sur un raisonnement déductif.

Ce type de raisonnement est en particulier mis en œuvre dans des démarches dites expérimentales, mais il ne suffit pas à caractériser l'ensemble des processus impliqués. C'est pourquoi il est intéressant de prendre en compte l'aspect processuel du raisonnement mathématique. Le processus d'exemplification et les processus de recherche de similitudes et de différences permettent de caractériser deux types de démarches importantes en résolution de problèmes, qui n'ont pas de structure propre c'est-à-dire qui ne peuvent pas être caractérisés comme relevant de raisonnements déductifs, inductifs, abductifs ou analogiques. Il s'agit de la démarche expérimentale et de la démarche d'ajustements d'essais successifs.

Gardes définit la démarche expérimentale comme articulant des phases d'expérimentations (faire des expériences, en observer les résultats et en inférer des conclusions), de formulation de conjectures et de tentative de preuve (Gardes, 2013). Du point de vue des processus, il s'agit donc d'exemplifier, d'identifier une régularité, de conjecturer, et de généraliser. Pour prouver le résultat obtenu (ce qui n'est cependant pas toujours à la portée des élèves au vu de leurs connaissances), il faut alors s'appuyer sur un raisonnement déductif.

La démarche dite d'ajustements d'essais successifs qui consiste à rechercher la solution d'un problème en faisant différents essais et en tenant compte chaque fois des résultats des essais précédents met en jeu les processus d'exemplification et de comparaison de l'écart entre le résultat obtenu et celui attendu. Dans ce cas, la validité du résultat n'est pas liée à la validité de la démarche. Pour prouver la validité du résultat, il faut vérifier qu'il satisfait bien les conditions de l'énoncé, ce qu'on appelle aussi prouver par ostension. Nous proposons ci-dessous un schéma synthétisant les différents types de démarches, raisonnements et preuves relevés précédemment.

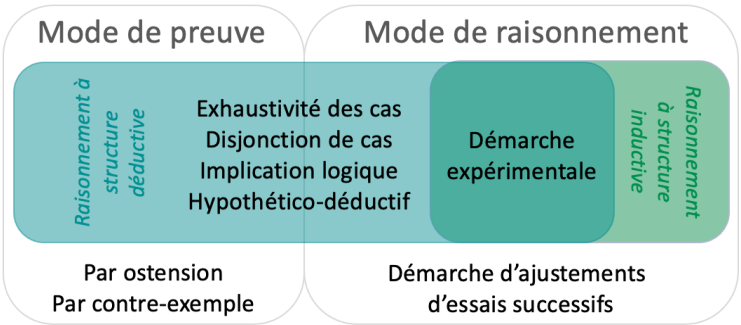


Figure 1. Synthèse de différents types de raisonnements, démarches et preuves qui peuvent être travaillés avec les élèves au secondaire I.

La diversité de ces manières de raisonner en mathématiques conduit à questionner tout d'abord le choix des problèmes proposés aux élèves. En effet, les élèves ne vont pas mobiliser les mêmes démarches, raisonnements et preuves en fonction du problème traité. Cela conduit de plus à questionner l'articulation des problèmes proposés aux élèves sur l'année scolaire et le choix des problèmes à proposer en évaluation. Nous n'analysons pas ici les pratiques effectives d'enseignant·es quant à l'articulation entre les problèmes travaillés en classe et ceux soumis en évaluation du point de vue des démarches et des raisonnements en jeu, ni les critères d'évaluation auxquels elles et ils se réfèrent, ou encore les critères de choix des problèmes d'évaluation mais renvoyons les lecteurs/trices intéressé·es à (Chanudet, 2019).

Une réflexion sur les problèmes à proposer en évaluation et sur les dispositifs d'évaluation associés

Le fait d'identifier les démarches et raisonnements en jeu dans les problèmes peut permettre aux enseignant·es de sélectionner ceux à proposer aux élèves en prenant en compte la perspective d'un apprentissage sur le long terme. Elles et ils peuvent ainsi chercher à faire ressortir les caractéristiques propres de chaque type de démarche ou de raisonnement, en proposant des problèmes mobilisant les mêmes ou, à l'inverse, différents raisonnements et démarches. Nous nous appuyons pour cela sur la notion de schéma de problèmes développée par Julo (1995) et qu'il définit comme les « traces laissées en mémoire par les situations rencontrées précédemment et organisées en objets structurés ayant un certain nombre de propriétés caractéristiques » (p. 90). Nous faisons ainsi l'hypothèse que le fait de multiplier les confrontations à divers problèmes peut permettre aux élèves d'enrichir leur mémoire des problèmes et de développer des schémas de problèmes. Les démarches et raisonnements pourraient ainsi constituer ce que Julo appelle les « propriétés caractéristiques ».

L'identification des démarches et raisonnements impliqués dans les problèmes nous semble de plus une aide pour l'évaluation de la résolution de problèmes. Cela peut permettre à l'enseignant·e de choisir en évaluation un problème mobilisant une démarche ou un raisonnement déjà travaillé sur d'autres problèmes et ainsi articuler sur la base d'un critère mathématique les problèmes travaillés en séance ordinaire avec ceux proposés en évaluation, et de fait limiter le caractère subjectif du choix du problème donné en évaluation. L'objet de l'évaluation est aussi clarifié. Il s'agit d'évaluer les compétences des élèves à résoudre un problème mathématique de même type, du point de vue des raisonnements et des démarches en jeu, que ceux travaillés auparavant.

Dans le contexte du cours de « démarches mathématiques et scientifiques », comme précisé plus haut, l'évaluation des compétences des élèves à résoudre des problèmes passe par le dispositif de la narration de recherche. Notre recherche doctorale (Chanudet, 2019) a montré que d'un moyen d'accès aux procédures de recherche des élèves, il devient pour certains enseignant·es un objet d'évaluation en soi, voire le seul. Nous poursuivons ci-dessous notre analyse pour étudier la pertinence du choix de certains problèmes pour le dispositif de la narration de recherche. Nous nous appuyons

pour cela sur nos observations en classe et, en particulier, sur des narrations de recherche rédigées par des élèves et sur les problèmes proposés par les enseignant·es.

Ainsi, il semble que certains problèmes se prêtent mieux à la narration de recherche que d'autres. Les problèmes qui conduisent à mettre en œuvre un raisonnement par implication logique, amène par exemple à effectuer des déductions souvent difficiles et longues à transcrire par écrit pour l'élève, tout autant qu'à suivre ensuite par l'enseignant·e qui lit la production de l'élève. Nous donnons en annexe l'exemple du problème intitulé « En avion » issu du chapitre « Recherche et Stratégie » dédié à la résolution de problèmes dans les moyens d'enseignement romands de 10e[5] (Annexe 1). Les élèves auxquels ce problème a été présenté devaient rédiger une narration de leur recherche et étaient donc évalués sur ce problème, à l'appui de la grille de critères d'évaluation utilisée par l'enseignant pour toutes les narrations de recherche rédigées par ses élèves. Nous avons choisi de présenter en annexe la production qui, selon nous, est la plus claire et la plus complète parmi l'ensemble des textes produits par les élèves de la classe, celle d'un groupe de deux élèves (Annexe 2).

Nous voyons que ces élèves ont verbalisé par écrit, de manière exhaustive et structurée, l'ensemble des déductions qu'elles ont opérées et qui sont synthétisées dans le logigramme qui conclue leur production. De plus, la lecture de leur texte permet certes de reconstituer pas à pas leur cheminement, mais on constate à quel point cela est difficile à suivre pour nous lecteur/trice. On doit en effet vérifier à la fois que les informations extraites de l'énoncé sont correctes, que chaque pas de déduction est valide, et que le logigramme est conforme au raisonnement mené (ce qui nécessite donc de remplir un logigramme en parallèle). Pour les élèves, on peut imaginer la difficulté que représente, l'identification et la mise en mots, a posteriori, de chacun des pas élémentaires de raisonnement opérés, et de chacun des processus menés. Se pose alors la question des apports de telles verbalisations quant aux des apprentissages des élèves, sur ce type de problèmes amenant à un raisonnement par implication logique. En effet, le tableau présenté à la fin de la production (dont les élèves précisent au début de leur narration qu'il a été le support de leur réflexion), nous semble permettre d'attester de la validé du raisonnement qu'elles ont mené (au vu des presque 8 millions de configurations possibles, il semble peu probable que les élèves trouvent la bonne réponse par hasard…). Le fait qu'elles soient parvenues à attribuer correctement les caractéristiques à chaque passager permet d'assurer que le raisonnement et les déductions qu'elles ont menées sont correctes. La narration de recherche apporte peu d'informations supplémentaires à l'enseignant·e quant à la démarche adoptée par l'élève.

Ainsi, même pour les élèves qui n'auraient pas réussi à résoudre le problème, la rédaction a posteriori d'une telle narration de recherche ne nous semble pas présenter de réelle plus-value. En effet, dans le cas où l'élève n'a pas mis en œuvre le bon raisonnement (par exemple, s'il a mobilisé une démarche d'ajustements d'essais successifs en remplissant la grille avec quelques informations issues de l'énoncé, puis en plaçant les autres éléments au hasard avant de vérifier l'absence de

5. A Genève comme dans tous les cantons suisses romands, les enseignant·es disposent, pour les mathématiques, de manuels scolaires officiels, communs et unifiés appelés moyens d'enseignement.

contradictions avec chacune des informations de l'énoncé) même si la narration peut permettre à l'enseignant·e de comprendre le type de raisonnement mené, il serait préférable de le repérer en cours de recherche afin de réguler directement l'activité de l'élève. Dans le cas où l'erreur de l'élève se situe au niveau de la mobilisation d'un pas déductif et qu'il a par ailleurs opéré au fur et à mesure des déductions correctes, l'erreur qui va apparaitre dans la narration est ponctuelle et peu significative. Au final, il nous semble donc très couteux et peu pertinent de demander aux élèves de rédiger des narrations de recherche sur ce type de problèmes dont la résolution à l'aide d'un logigramme parait plus significative.

Les problèmes mobilisant une démarche de type expérimental nous semblent cependant quant à eux plus intéressants pour amener les élèves à rendre compte de la recherche menée. Les élèves peuvent ainsi identifier et expliciter comment leurs essais les ont amenés à repérer une régularité, à conjecturer, et décrire ensuite comment ils ont cherché à les valider leur résultat. Le récit de l'élève apporte alors à l'enseignant·e un complément essentiel à la seule mention du résultat pour comprendre la démarche adoptée. Prenons en ce sens l'exemple du problème intitulé « Les châteaux de cartes » présenté sur le site Sésamath[6] dont l'énoncé est rappelé en annexe (Annexe 3)[7].

Nous présentons aussi en annexe la narration de recherche d'un élève sur ce problème (Annexe 4). La narration rédigée par l'élève permet ici de suivre les pistes suivies (tout d'abord le dénombrement sur le schéma pour 7 étages, puis la recherche d'une formule plus générale pour 30 puis 100 étages) mais aussi abandonnées (la tentative de schématisation pour 30 étages), les conjectures retenues (calculer la somme de la somme des doubles des entiers de 1 à 30 et de la somme des 30 premiers entiers) et celles invalidées (calculer la somme des doubles des entiers de 1 à 30 et de 30) et la manière dont il l'a fait (tester la conjecture pour 3 étages, avec confrontation à la valeur obtenue à partir de la formule). On voit donc ici que la narration permet au lecteur de comprendre comment l'élève articule les phases d'essais et de conjecture, et même s'il ne peut pas prouver son résultat, de voir s'il teste et comment il teste ses conjectures.

Si nous avons ici remis en question la pertinence du choix du dispositif de la narration de recherche par rapport à l'intention affichée par l'institution de permettre aux enseignant·es d'accéder aux processus de résolution des élèves, sans distinction quant aux types de problèmes proposés, nous ne réfutons toutefois pas que ce dispositif ait un intérêt quant au développement de compétences, notamment communicationnelles, des élèves qui sont amenés à le pratiquer.

6. https://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/index.php?ouvrage=ms3_2012&page_gauche=162

7. Pour plus de détails concernant l'analyse de ce problème et de procédures d'élèves, voir (Chanudet, 2017)

Conclusion

Il nous semble que, bien que succincts, les deux exemples que nous présentons invitent à questionner le choix fait par l'institution scolaire de mettre en avant un dispositif d'évaluation à visée certificative pour l'ensemble d'un cours, indépendamment des contenus c'est-à-dire de la nature des problèmes proposés aux élèves. Si le dispositif de la narration de recherche permet en effet d'accéder, en tout cas davantage que sans dispositif particulier, aux démarches de recherche des élèves, il ne semble toutefois pas pertinent pour tous les types de problèmes, et en particulier pour les problèmes amenant à la mobilisation d'un raisonnement par implication logique.

Dès lors que l'évaluation porte sur les compétences des élèves à résoudre des problèmes, le dispositif qui supporte cette évaluation nous semble mériter d'être discuté, en lien avec les objets de l'évaluation, les critères d'évaluation et la nature des problèmes proposés.

Évaluer les compétences des élèves en résolution de problèmes en mathématiques pose des questions fondamentales, auxquelles l'institution scolaire comme la recherche ne nous semblent pas avoir répondu de manière opérationnelle pour les enseignant·es, ce qui en fait des questions encore vives pour la profession :

1. Quels compétences, savoirs, savoir-faire cherche-t-on à évaluer chez les élèves en résolution de problèmes ? Quels compétences, savoirs, savoir-faire peut-on effectivement évaluer ? Quels peuvent être les critères d'évaluation associés ?

2. Quels problèmes proposer dans le cadre d'une évaluation à visée certificative ? Quelle articulation envisager avec les problèmes travaillés lors des séances ordinaires ?

3. Sur quel support ou dispositif peut s'appuyer une telle évaluation ?

Nous espérons que de prochaines recherches tacheront d'y apporter des réponses.

Références

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique* [Thèse de doctorat en Didactique des Mathématiques]. Université Paris 7 Diderot.

Chanudet, M. (2017). Le problème des châteaux de cartes. *Revue de mathématiques pour l'école, 228*, 4-13.

Chanudet, M. (2019). *Etude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques* [Doctorat en didactique des mathématiques]. Université de Genève.

Chanudet, M., & Favier, S. (2021). Les démarches et modes de raisonnement en jeu dans les problèmes de « Recherche & stratégies » en 10H. *Revue de mathématiques pour l'école, 235*, 88-98.

Charnay, R. (1988). Apprendre (par) la résolution de problèmes. *Petit x, 42*(3), 21-29.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.

Département de l'instruction publique, de la culture et du sport, Direction générale de l'enseignement obligatoire, Service enseignement et évaluation. (2021). *Programme cantonal. Complément au Plan d'études romand (PER). Démarches mathématiques et scientifiques (DMS). Année scolaire 2020-2021 (2021 v.6)*.

Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres* [Thèse de doctorat en mathématiques générales]. Université Claude Bernard - Lyon I.

Georget, J.-P. (2009). *Activités de recherche et de preuve entre pairs à l'école élémentaire : Perspectives ouvertes par les communautés de pratique d'enseignants* [Thèse de doctorat en didactique des mathématiques]. Université Paris Diderot.

Hersant, M. (2008). « Problèmes pour chercher ». Des conduites de classe spécifiques. *Grand N, 81*, 57-75.

Houdement, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N, 71*, 7-23.

Houdement, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 14*, 31-59.

Jeannotte, D. (2015). *Raisonnement mathématique : Proposition d'un modèle conceptuel pour l'apprentissage et l'enseignement au primaire et au secondaire*. Université du Québec à Montréal.

Jeannotte, D., Dufour, S., & Sampson, S. (2020). Discours autour du raisonnement mathématique : Ajouter la voix d'enseignantes du primaire à la conversation. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, 1*, 5-37.

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 1-16.

Julo, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques : Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*. Presses universitaires de Rennes.

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. ICME-13 Topical Surveys. Springer, Cham.

Mercier, A. (2008). Une question curriculaire de l'enseignement élémentaire des mathématiques : La « résolution de problèmes ». *Programme national de pilotage. Actes du séminaire national. L'enseignement des mathématiques à l'école primaire*, 93-116.

Pólya, G. (1958). *Les mathématiques et le raisonnement plausible* (L. Couffignal & R. Vallée, Trad.). Gauthiers-Villars.

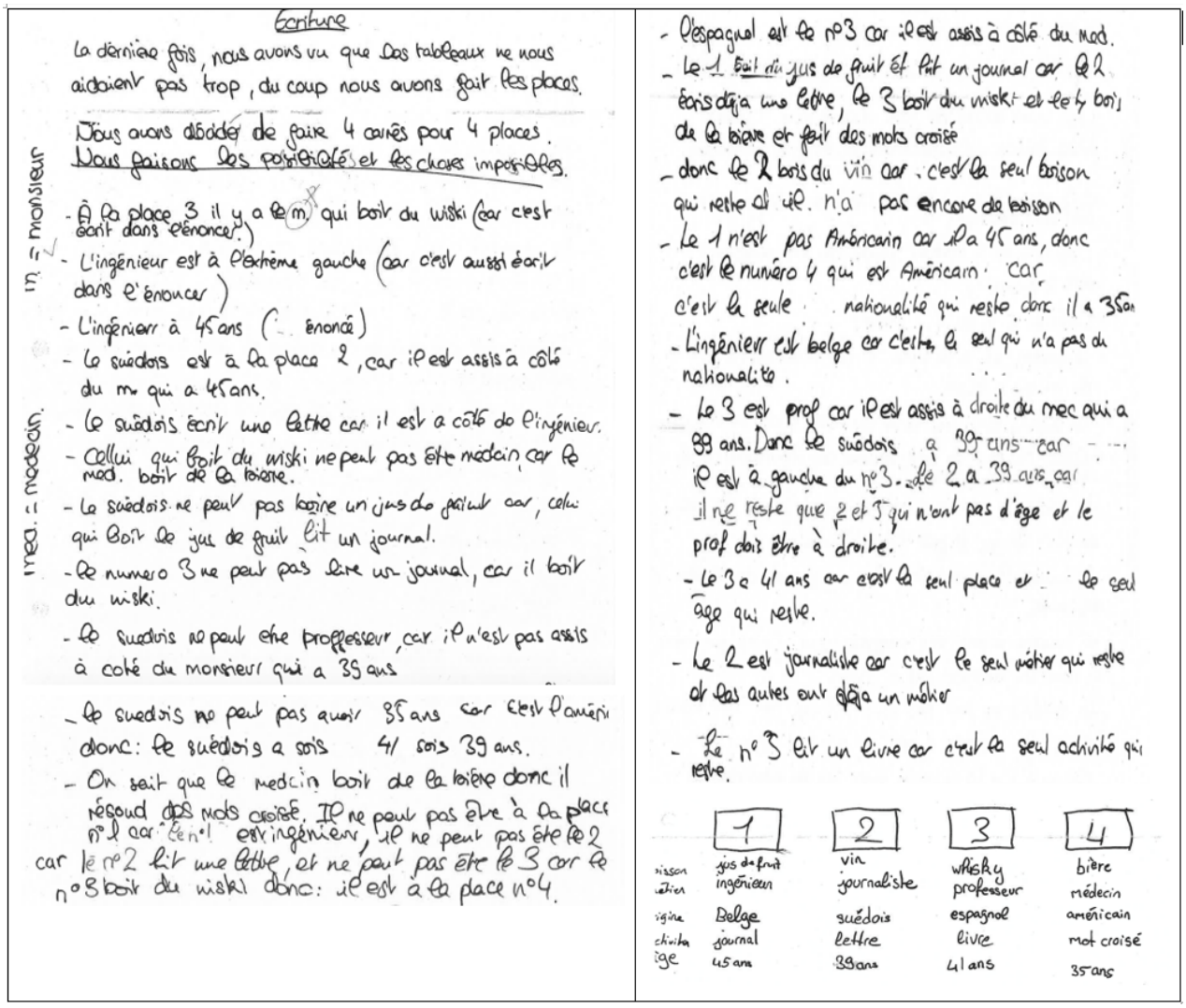
Annexes

Annexe 1. Enoncé du problème «En avion» tiré des moyens d'enseignement romands de 10e

Dans un avion, quatre passagers sont assis côte à côte.
Ils sont tous de nationalité, d'âge et de profession différents.

1. Le professeur est âgé de 41 ans.
2. Le passager qui a 45 ans est ingénieur.
3. Celui qui boit de la bière résout des mots croisés.
4. Le Suédois est assis à côté du passager qui a 45 ans.
5. Le voyageur qui boit du whisky est à la deuxième place, depuis la droite.
6. Le professeur est assis à la droite du voyageur qui a 39 ans.
7. L'homme qui est assis à côté de l'ingénieur écrit une lettre.
8. L'Espagnol est à côté du médecin.
9. Le voyageur qui boit du jus de fruit lit un journal.
10. L'Américain est âgé de 35 ans.
11. L'ingénieur est à l'extrême gauche.
12. Le médecin boit de la bière.

a) Quel est l'âge du Belge?
b) Quelle est la nationalité du journaliste?
c) Quel est l'âge du buveur de vin?
d) Quelle est la profession du voyageur qui lit un livre?



Écriture

La dernière fois, nous avons vu que les tableaux ne nous aidaient pas trop, du coup nous avons fait les places.

Nous avons décidé de faire 4 carrés pour 4 places.
Nous faisons les possibilités et les choses impossibles.

m = monsieur
méd. = médecin

- À la place 3 il y a le m qui boit du wiski (car c'est écrit dans l'énoncé)
- L'ingénieur est à l'extrême gauche (car c'est aussi écrit dans l'énoncé)
- L'ingénieur à 45 ans (... énoncé)
- Le suédois est à la place 2, car il est assis à côté du m qui a 45 ans.
- Le suédois écrit une lettre car il est à côté de l'ingénieur.
- Celui qui boit du wiski ne peut pas être médecin, car le méd. boit de la bière.
- Le suédois ne peut pas boire un jus de fruit car, celui qui boit le jus de fruit lit un journal.
- Le numéro 3 ne peut pas lire un journal, car il boit du wiski.
- Le suédois ne peut être professeur, car il n'est pas assis à coté du monsieur qui a 39 ans

- Le suédois ne peut pas avoir 35 ans car c'est l'américain donc: le suédois a soit 41 soit 39 ans.
- On sait que le medcin boit de la bière donc il résoud des mots croisé. Il ne peut pas être à la place n°1 car c'est l'ingénieur, il ne peut pas être le 2 car le n°2 lit une lettre, et ne peut pas être le 3 car le n°3 boit du wiski donc: il est à la place n°4.

- L'espagnol est le n°3 car il est assis à côté du méd.
- Le 1 boit du jus de fruit et lit un journal car le 2 écris déjà une lettre, le 3 boit du wiski et le 4 boit de la bière et fait des mots croisé
- donc le 2 boit du vin car, c'est la seul boisson qui reste où il n'a pas encore de boisson
- Le 1 n'est pas Américain car il a 45 ans, donc c'est le numéro 4 qui est Américain car c'est la seule nationalité qui reste donc il a 35 ans
- L'ingénieur est belge car c'est le seul qui n'a pas de nationalité.
- Le 3 est prof car il est assis à droite du mec qui a 39 ans. Donc le suédois a 39 ans car il est à gauche du n°3. Le 2 a 39 ans car il ne reste que 2 et 3 qui n'ont pas d'âge et le prof doit être à droite.
- Le 3 a 41 ans car c'est la seul place et le seul âge qui reste.
- Le 2 est journaliste car c'est le seul métier qui reste où les autres ont déjà un métier
- Le n°3 lit un livre car c'est la seul activité qui reste.

	1	2	3	4
boisson	jus de fruit	vin	whisky	bière
métier	ingénieur	journaliste	professeur	médecin
origine	Belge	suédois	espagnol	américain
activité	journal	lettre	livre	mot croisé
âge	45 ans	39 ans	41 ans	35 ans

Annexe 3. Enoncé du problème « Les châteaux de cartes »,

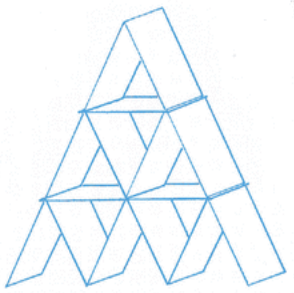
Un château de cartes à un étage est composé de deux cartes.
Un château de cartes à deux étages est composé de sept cartes.
Pour réaliser trois étages, il faut quinze cartes.



1 étage



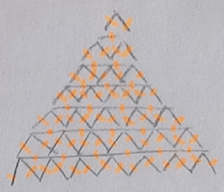
2 étages



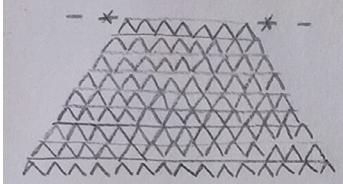
3 étages

Combien faut-il de cartes pour réaliser un château de 7 étages ? De 30 étages ? De 100 étages ?

Pour commencer j'essaie de construire le château à 7 étage pour voir ce que ça donne : Et ça donne 77 cartes.



Après avoir fait le château à 7 étages, je commence ensuite avec le château à 30 étages qui évidemment un grand nombre d'étages mais qu'il faut comme même essayer par passer au schéma.



Malheureusement on ne peut pas aller plus loin avec le schéma de 30 étage car il est beaucoup trop long à faire et prend beaucoup de place du coup pour trouver le nombre de carte pour le château à 30 étages il faudra trouver une autre solution. L'autre solution que j'ai trouvé c'est de prendre le nombre d'étage.

Ex : 30 étage chaque on fait (- 1 étage) et je le multiplie par 2.

30 · 2 = 60	16 · 2 = 32
29 · 2 = 58	15 · 2 = 30
28 · 2 = 56	14 · 2 = 28
27 · 2 = 54	13 · 2 = 26
26 · 2 = 52	12 · 2 = 24
25 · 2 = 50	11 · 2 = 22
24 · 2 = 48	10 · 2 = 20
23 · 2 = 46	9 · 2 = 18
22 · 2 = 44	8 · 2 = 16
21 · 2 = 42	7 · 2 = 14
20 · 2 = 40	6 · 2 = 12
19 · 2 = 38	5 · 2 = 10
18 · 2 = 36	4 · 2 = 8
17 · 2 = 34	3 · 2 = 6
	2 · 2 = 4
	1 · 2 = 2

Le fois 2 correspond au deux nombres de carte qu'il y dans 1 étage

Ensuite il faut additionner tous les résultats donnés et ça donne : 980

Après il faut additionner 980 avec le nombre d'étage qu'il y a qui est donc 30

980 + 30 1010 *

Donc pour 30 étages il y a 1010 cartes.

Après avoir trouvé le résultat de 30 étage maintenant j'essaie de chercher pour 100 étages. La solution 2 est peut être aussi longue donc pour 100 étages donc il faudra chercher une régularité au niveau de la 2ème solution pour trouver le résultat plus facilement car 100 est aussi un très grand nombre d'étages. L'enseignante m'a conseillé de trouver une formule afin de chercher et d'essayer pour trouver.

(nombre) · 2 + (nombre d'étage) ⇒ x · 2 + 100
1, 2, 3, ... 2x + 100

Exemple : Pour 3 étage la formule sera 1 · 2 + 3 = 5
2 · 2 + 3 = 7
3 · 3 + 3 = 12
= 24

Ça ne fonctionne pas du coup la formule ne sera pas celle-là.

(*) Je me suis rendu compte que la solution pour 30 étages est fausses j'ai réussi en me rendre compte en voulant faire une formule pour 30 étages du coup j'ai posé le calcul pour 7 étages

7 · 2 = 14
6 · 2 = 12
5 · 2 = 10
4 · 2 = 8
3 · 2 = 6
2 · 2 = 4
1 · 2 = 2

⇒ 56 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 77

Du coup pour 30 étages ça sera 980 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 = 1415

Pour 100 étages je n'ai pas eu le temps mais je peux considérer la même formule.

Titre: Une étude à grande échelle des pratiques enseignantes d'évaluation en algèbre au collège

Auteurs: HOROKS Julie, COPPE Sylvie, GRUGEON-ALLYS Brigitte et PILET Julia

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 976 - 988

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Une étude à grande échelle des pratiques enseignantes d'évaluation en algèbre au collège

HOROKS[1] Julie – COPPE[2] Sylvie – GRUGEON-ALLYS[3] Brigitte – PILET[4] Julia

Résumé – Nous présentons un questionnaire conçu pour dresser un tableau des pratiques d'évaluation déclarées des enseignants du secondaire en mathématiques, suite à une demande du Ministère de l'Education Nationale. Nous présentons nos outils théoriques et méthodologiques pour caractériser les pratiques d'évaluation, puis détaillons le projet et la méthodologie adoptée. Nous donnons ensuite quelques résultats de l'enquête.

Mots-clefs : Evaluation, pratiques enseignantes, algèbre, questionnaire à grande échelle

Abstract – We present a questionnaire designed to take an inventory of the evaluation practices of secondary school teachers in mathematics, following a request from the Ministry of Education. We present our theoretical and methodological tools for characterising evaluation practices, then detail the project and the methodology adopted. We then give some results of the survey.

Keywords: Assessment, algebra, teachers' practises, large-scale survey

1. LDAR, Université Paris Est Créteil, France, julie.horoks@u-pec.fr

2. FAPSE, Université de Genève, Suisse, sylvie.coppe@unige.ch

3. LDAR, Université Paris Est Créteil, France, brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr

4. LDAR, Université Paris Est Créteil, France, julia.pilet@u-pec.fr

Nous présentons un questionnaire que nous avons conçu pour dresser un tableau des pratiques déclarées d'évaluation des enseignants du secondaire en mathématiques. Cette recherche fait suite à une demande du Ministère de l'Education Nationale, de prendre en compte un contenu mathématique spécifique (l'algèbre) pour l'analyse des pratiques des enseignants à grande échelle (1200 enseignants). Nous présentons dans un premier temps nos outils théoriques et méthodologiques pour caractériser les pratiques d'évaluation des enseignants, puis nous présentons le projet et la méthodologie adoptée. Nous donnons ensuite quelques résultats de l'enquête portant sur ces pratiques.

Présentation générale du projet

La DEPP (Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance) est chargée de la conception, de la gestion et de l'exploitation de l'information statistique sur le système éducatif en France. Elle contribue à l'évaluation des politiques menées par le ministère de l'éducation nationale. Elle a déjà développé une expertise sur l'évaluation, à travers les enquêtes nationales et internationales sur l'éducation, qui porte principalement sur les conditions et les pratiques d'enseignement (dont l'évaluation des apprentissages des élèves), mais non liées à un contenu spécifique. Parallèlement, la DEPP évalue périodiquement les élèves de CM2 (dernière année de l'école élémentaire) et de 3ème (dernière année du collège) dans les disciplines du programme par le test CEDRE (Cycle d'Évaluations Disciplinaires par Échantillon).

Le nouveau cycle d'évaluation des élèves qui a débuté en juin 2018 est la première occasion d'établir une image des pratiques d'enseignement sur un contenu mathématique spécifique. Dans ce contexte, les objectifs du programme PRAESCO (Enquête sur les pratiques d'enseignement à partir de contenus spécifiques) sont de mettre à disposition des décideurs politiques et de la communauté éducative un ensemble d'indicateurs sur les pratiques d'enseignement en mathématiques, et de rechercher les effets de ces pratiques sur l'apprentissage par les élèves de contenus mathématiques spécifiques (nombres et calcul pour les élèves de 5ème et algèbre pour les élèves de 3ème). Le rôle des chercheurs mandatés par la DEPP est de construire un questionnaire fondé sur un cadre théorique permettant d'identifier les variables des modalités d'enseignement des mathématiques, et d'apporter une dimension scientifique et didactique à l'analyse de cette enquête. Dans cet article, nous nous concentrons sur les questions de l'enquête concernant les pratiques d'évaluation des enseignants au niveau de la classe de 3ème, en fin de cycle 4 au collège.

Nos cadres théorique et méthodologique

Nous expliquons notre cadre théorique pour l'analyse des pratiques des enseignants et plus particulièrement pour les pratiques d'évaluation en relation avec l'apprentissage des élèves en mathématiques. Nous expliquons également notre choix de sélectionner l'algèbre comme contenu mathématique spécifique de l'enquête.

Nos hypothèses sur l'enseignement et l'apprentissage sont fondées sur l'adaptation de la théorie de l'activité en didactique (Vandebrouck, 2018) : c'est principalement à travers les activités mathématiques des élèves que se fait leur apprentissage, activités provoquées, en grande partie, par les tâches qu'on leur donne à réaliser. Les tâches ont donc une place centrale dans nos analyses, pour anticiper les apprentissages possibles pour les élèves, mais aussi pour caractériser les pratiques des enseignants à travers leur choix de tâches pour les élèves et la mise en œuvre effective du travail autour de ces tâches en classe, y compris lors des différents moments d'évaluation des apprentissages des élèves.

Pour caractériser les pratiques des enseignants, nous adoptons le cadre théorique de la Double Approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2005), en prenant également en compte certains déterminants des pratiques des enseignants qui ne sont pas uniquement liés aux apprentissages des élèves ciblés. Nous considérons les différentes contraintes qui influencent le métier d'enseignant, ce qui nous amène à inclure dans notre analyse des pratiques des enseignants, les composantes institutionnelles, sociales et personnelles du métier d'enseignant, en plus des composantes cognitives et médiatives (Robert & Rogalski, 2002).

Dans ce large panorama des activités et du contexte professionnel des enseignants, nous considérons que l'évaluation des élèves, en particulier formative, joue un rôle important dans le processus d'enseignement et d'apprentissage, car elle permet à l'enseignant de prendre en considération les activités mathématiques réelles des élèves, afin de construire un enseignement approprié, à court ou à long terme. C'est pourquoi notre questionnaire comprend une section sur les pratiques d'évaluation, que nous allons décrire ci-dessous.

La question de l'évaluation

Dans nos travaux précédents (Pilet *& al.*, 2019 ; Pilet et Horoks, 2017), nous avons construit un cadre d'analyse des pratiques d'évaluation des enseignants du secondaire en mathématiques, en considérant les spécificités des contenus mathématiques. Nous nous appuyons sur la définition d'évaluer de De Ketele (2010), mettant en évidence trois dimensions dans l'acte d'évaluation : prendre des informations, les interpréter et les utiliser pour prendre des décisions. Nous caractérisons alors les pratiques d'évaluation par tout ce que l'enseignant fait pour prendre des informations sur les activités mathématiques des élèves (ce qu'ils font, savent, disent, écrivent) et la manière dont ils utilisent ces informations, notamment pour favoriser l'apprentissage des élèves. Selon la fonction donnée à l'évaluation par l'enseignant, cette collecte et cette exploitation des informations peuvent se faire de différentes manières, plus ou moins formelles et avec des effets plus ou moins importants sur les choix ultérieurs de l'enseignant pour sa classe.

Pour Black & Wiliam (1998), l'évaluation des élèves est dite formative lorsque les informations recueillies par l'enseignant sont utilisées pour répondre aux besoins des élèves et lorsque les élèves peuvent s'auto-évaluer à travers la réalisation des tâches qui leur ont été confiées. Ash & Levitt (2003) affirment que l'évaluation formative est une activité conjointe de l'enseignant et de l'élève, qui reste assez proche de ce que l'élève sait déjà faire. L'enseignant collecte des indices sur l'activité d'un élève afin d'analyser cette activité et de planifier la prochaine étape pour aider cet élève à évoluer. L'évaluation sommative, d'après de Landsheere (1973) dresse un bilan de l'apprentissage, à l'issue d'un enseignement, tandis que l'évaluation diagnostique se situe en amont de cet enseignement et vise à repérer des prérequis, des conceptions et des erreurs des élèves. Indirectement, ces deux types d'évaluations participent selon nous aux apprentissages des élèves, dans la mesure où elles permettent à l'enseignant de se placer au plus près des connaissances, acquises ou non, des élèves. Nous nous intéressons alors aux pratiques d'évaluation des enseignants (diagnostique, sommative, formative) au sein de leurs pratiques d'enseignement de façon plus générale, pour apprécier en particulier la façon dont ces évaluations peuvent participer aux apprentissages des élèves.

Enseignement-apprentissage de l'algèbre

Dans ce projet, notre démarche d'analyse des pratiques déclarées des enseignants, se concentre sur les contenus mathématiques à enseigner, ce qui nous a amené à choisir le domaine de l'algèbre élémentaire, par consensus entre les participants au projet, et pour plusieurs raisons. Tout d'abord, parce que l'algèbre élémentaire représente un enjeu important pour l'avenir des études des élèves dans l'enseignement secondaire et supérieur, mais aussi parce que les enseignants expriment souvent des difficultés à enseigner l'algèbre (Kieran, 2007). C'est également un choix qui nous permet de nous appuyer sur les résultats de recherche existants concernant l'enseignement de l'algèbre. Nous nous sommes appuyés sur les travaux de (Grugeon *& al.*, 2012 ; Pilet, 2015 ; Sirejacob, 2017) qui, sur la base d'une étude épistémologique, ont établi une référence pour une organisation mathématique (Chevallard, 1999) de l'enseignement de l'algèbre à ce niveau scolaire. Cette dernière fournit les types de tâches représentatives du domaine algébrique, ce qui permet de s'interroger sur la couverture de ce domaine par les tâches proposées par les enseignants, et sur la pertinence de ces tâches (pour l'apprentissage ou pour l'évaluation). Lors d'une évaluation sommative, le fait de choisir ou non d'évaluer la réussite à certaines tâches parmi l'ensemble des tâches possibles, en lien avec l'enseignement dispensé, nous renseigne ainsi sur le rapport de l'enseignant à l'enseignement de l'algèbre et à son évaluation. Ce référentiel fournit également des informations sur les niveaux de raisonnement attendus des élèves du secondaire (11-15 ans), et sur les propriétés qui peuvent être mises en avant par l'enseignant pour institutionnaliser les connaissances, valider ou invalider les productions des élèves, et sont donc utiles pour nous, pour comprendre comment l'enseignant évalue (analyse, corrige) des réponses orales ou écrites d'élèves.

Méthodologie

Conception du questionnaire

Notre cadre d'analyse des pratiques d'évaluation a déjà été utilisé pour des études impliquant moins d'enseignants, mais sur une période plus longue (plusieurs années). Le passage à une plus grande échelle nécessite une méthodologie spécifique, que nous avons élaborée avec la DEPP.

Pour concevoir le questionnaire, nous avons réuni une équipe de chercheurs en enseignement des mathématiques et d'enseignants expérimentés en mathématiques dans l'enseignement secondaire. Des réunions régulières, dont certaines ont eu lieu avec les membres de la DEPP impliqués dans le projet, nous ont permis de nous mettre d'accord sur la formulation des questions, afin de pouvoir effectuer une analyse valide des réponses des enseignants, tant d'un point de vue statistique que didactique. Le questionnaire ainsi construit comporte 4 parties, où l'on retrouve les composantes des pratiques proposées par la Double Approche :

- le contexte d'enseignement et les antécédents de l'enseignant (expérience, formation, contraintes et possibilités institutionnelles, utilisation de la technologie pour l'enseignement et opinions personnelles sur l'enseignement et l'apprentissage, en particulier sur l'algèbre) (composantes personnelles, institutionnelles et sociales)
- la préparation de la classe (ressources, sélection de tâches algébriques, temps alloué aux contenus et tâches spécifiques) (composante cognitive)
- la gestion de l'enseignement en classe (organisation du travail en classe dans les différentes phases d'une séance de mathématiques, interactions en classe) (composante médiative)
- et l'évaluation de l'élève (20 questions, 106 sous-questions, dont 31 sous-questions sur l'algèbre).

Questions sur les pratiques d'évaluation

La dernière partie de l'enquête, qui porte spécifiquement sur l'évaluation, questionne surtout les pratiques d'évaluation diagnostique (17 items) ou sommative (36 items). Les questions relatives à l'évaluation formative sont quant à elles réparties dans l'ensemble du questionnaire, et moins identifiables par les enseignants comme des questions relevant de l'évaluation.

Dans la première partie, relative au contexte et aux informations personnelles, nous demandons aux enseignants s'ils ressentent le besoin d'une formation complémentaire sur l'évaluation des élèves. Nous les interrogeons également sur les origines possibles des difficultés de leurs élèves en mathématiques, ce qui peut être lié à l'évaluation diagnostique. Le choix des tâches qu'ils font pour

leur classe, largement interrogé dans la deuxième partie du questionnaire centrée sur la préparation de la classe, peut également être comparé aux tâches choisies pour l'évaluation, afin de repérer d'éventuels écarts entre les deux, et d'en déduire un certain rapport à l'évaluation sommative (conçue comme plus difficile ou de difficulté similaire à ce qui a été traité en classe).

Dans la partie du questionnaire relative à la gestion de l'enseignement en classe, on trouve des questions sur le travail réalisé en classe sur les productions des élèves pour une tâche donnée, que nous relions à l'évaluation formative. Certaines questions de cette partie portent également sur la gestion des erreurs des élèves et demandent aux enseignants de se positionner sur les niveaux de discours mathématique qu'ils utilisent généralement avec leurs élèves. Les propositions suivantes (figure 1) participent, plus ou moins, à un processus d'évaluation formative. Par exemple, dans cet item pour lequel les enseignants devaient se positionner sur chacune des différentes propositions, pour réagir à une erreur commise par une élève (figure 1), la proposition 4 ne s'appuie pas sur les propriétés mathématiques liées à la conservation de l'égalité, mais fait référence aux gestes accompagnant la technique, qui ne nous semblent pas assez riches pour aider les élèves à comprendre leurs erreurs et à en tirer des leçons (Sirejacob, 2017).

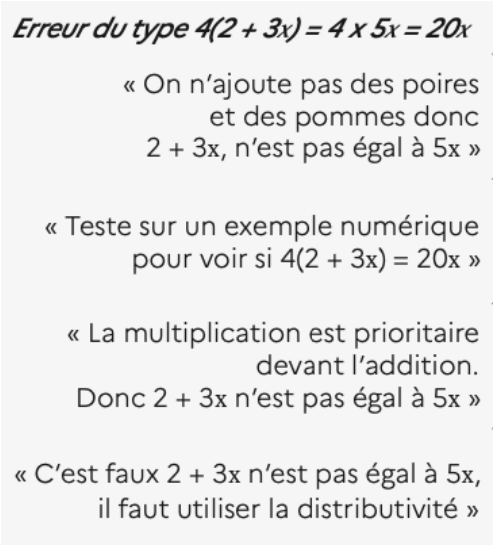


Figure 1 : Item du questionnaire PRAESCO 3e sur la fréquence et la nature des indications proposées par les enseignants

Dans la dernière section du questionnaire, nous posons des questions sur le rapport de l'enseignant avec l'évaluation sommative, ainsi que sur la manière dont il la met en œuvre en classe. Nous souhaitons interroger en particulier les fonctions qui lui sont données par les enseignants, incluant ou non un meilleur apprentissage pour leurs élèves (comprendre ses erreurs, progresser à son rythme, plutôt que noter, classer, distribuer, sanctionner, en référence à Merle, 2015).

En ce qui concerne les pratiques déclarées d'évaluation des enseignants, nous avons appliqué la définition de l'évaluation retenue - prendre des informations, les interpréter et les utiliser pour prendre des décisions - pour concevoir cette partie du questionnaire. Nous voulons donc identifier les

moments (Chevallard, 1999), où les enseignants recueillent des informations sur les connaissances de leurs élèves (avant de commencer à enseigner l'algèbre dans leur classe de référence, ou à la fin de ce chapitre, et tout au long de l'enseignement de cette matière), et les moyens utilisés pour le faire (par des processus formels ou informels (Allal & Mottier-Lopez, 2007)) et par des types de tâches algébriques), rendus plus ou moins explicites pour les élèves par le discours des enseignants. Nous cherchons également à apprécier la manière dont les enseignants interprètent certaines réponses possibles de leurs élèves à des tâches données, en leur demandant de commenter des productions des élèves. Cela nous donne également accès au rapport des enseignants à l'algèbre, et au rôle de l'erreur dans leur vision de l'enseignement des mathématiques, ainsi qu'à leur considération des procédures des élèves plutôt que de leurs seuls résultats. Nous interrogeons aussi les enseignants sur l'exploitation qu'ils déclarent habituellement des informations sur les connaissances ou les savoir-faire de leurs élèves : si et comment ils déclarent adapter leur enseignement en conséquence, pour certains élèves ou pour toute la classe, et avec quels appuis sur les contenus mathématiques.

Concernant le cas particulier de l'évaluation sommative, qui est le type d'évaluation le plus associé à l'acte d'évaluation par les enseignants en France (De Ketele, 2010), le questionnaire s'interroge sur sa fréquence, sa durée et ses formats, avec un intérêt particulier pour le choix des tâches par les enseignants à cette fin. Ce choix révèle un lien potentiel avec les tâches algébriques choisies pour ce chapitre pour une classe donnée, en termes de couverture du domaine, de pertinence pour l'évaluation ou l'apprentissage, mais aussi, en termes de complexité et de variété parmi toutes les tâches possibles. Les pratiques de correction de ces évaluations sommatives sont également étudiées (à travers la notation, le feedback aux élèves) car elles nous permettent de mieux comprendre la fonction de ces évaluations et leur dimension formative potentielle.

Résultats de l'enquête

Pratiques d'évaluation diagnostique

L'évaluation diagnostique, formelle ou non, occupe une faible place au sein des pratiques déclarées Un grand nombre d'enseignants déclarent fréquemment se déplacer dans la salle de classe pour repérer les erreurs de leurs élèves (96 %) et identifier leurs connaissances (74 %), mais seulement 18 % déclarent s'appuyer fréquemment sur une évaluation diagnostique avant un nouveau chapitre. 56 % des enseignants déclarent choisir régulièrement la première activité d'un chapitre pour lui faire jouer le rôle de diagnostic, et 53 % déclarent repérer en amont les besoins des élèves pour leur proposer des exercices spécifiques en vue de stabiliser les prérequis. Plus de la moitié des enseignants (55 %) indiquent également s'appuyer « souvent » ou « très souvent » sur les erreurs connues déjà observées les années précédentes. Près d'un tiers des enseignants disent estimer régulièrement les acquis des élèves grâce à ce qu'ils savent ou pensent savoir *a priori* des difficultés de leurs élèves, mais sans faire de diagnostic de façon formelle ou informelle pour le vérifier.

Pratiques d'évaluation sommative

L'évaluation sommative est peu anticipée dans la préparation des enseignants et présente peu les objectifs d'évaluation aux élèves Un quart des enseignants déclarent élaborer régulièrement les énoncés d'évaluation sommative avant de commencer un chapitre. La moitié disent les concevoir au fur et à mesure de l'avancée du chapitre ou juste avant de les donner aux élèves. Une minorité (9 %) déclare s'appuyer « souvent » ou « très souvent » sur les évaluations proposées les années précédentes.

Les élèves sont préparés aux tâches d'évaluation formelle principalement par des conseils d'ordres généraux et peu par des conseils spécifiques aux contenus évalués : 28 % des enseignants indiquent proposer une grille explicitant les compétences et les différents types d'exercices associés au contenu mathématique travaillé en amont. Ainsi le « contrat » d'évaluation sommative, quand il existe, apparaît peu expliciter aux élèves les objectifs d'apprentissage et le travail personnel à réaliser.

La grande majorité des enseignants (91 %) déclarent concevoir des évaluations sommatives avec des exercices proches de ceux vus en classe. Ils sont moins nombreux à inclure fréquemment des exercices nouveaux (27 %) ou plus difficiles (22 %) par rapport à ce qui a été vu auparavant avec les élèves. 85 % des enseignants déclarent élaborer fréquemment un barème ou une grille de correction avant de donner l'évaluation (85 %) et 87 % attribuer fréquemment une note chiffrée. Enfin, 78 % des enseignants indiquent annoter les copies.

Pratiques d'évaluation formative

Les items liés à l'évaluation formative ne sont pas explicitement étiquetés comme tels dans le questionnaire, contrairement à la majorité de ceux se rapportant aux évaluations diagnostique et sommative, et concernent des éléments des pratiques en lien avec la gestion de l'erreur ou les aides apportées, pour l'enseignement de l'algèbre ou plus globalement.

L'évaluation formative est marquée par une volonté de repérer les procédures et les erreurs des élèves mais aussi par des moyens limités pour les traiter. En préparant la séquence sur la résolution des équations, environ 80 % des enseignants déclarent fréquemment anticiper les erreurs possibles et des aides (orales ou écrites) adaptées. Les enseignants sont très nombreux (76 %) à indiquer se déplacer dans la classe pour proposer des aides aux élèves bloqués. Les erreurs constatées au cours d'une séance d'exercices sont traitées selon des modalités variées : 78 % des enseignants disent questionner régulièrement l'ensemble des élèves de la classe à propos de ces erreurs et 60 % les corriger eux-mêmes au tableau « souvent » ou « très souvent ». Seuls 45 % d'entre eux interviennent fréquemment envers les élèves concernés par les erreurs en passant individuellement auprès d'eux. 37 % des enseignants font corriger régulièrement une erreur constatée dans un exercice par un élève qui l'a réussi.

Voici un exercice posé en classe de 3e :
Développer et réduire l'expression suivante : $(5x - 6)(2x + 3)$

Voici quatre propositions de déroulement de la correction au tableau de ce type d'exercice.

Déroulement de correction 1 :
Le professeur corrige en expliquant les propriétés qu'il a utilisées.

Déroulement de correction 2 :
Le professeur choisit un élève qui a une solution correcte pour venir écrire son travail au tableau et expliquer sa démarche.

Déroulement de correction 3 :
Le professeur passe dans les rangs et choisit un élève qui a écrit $(5x - 6)(2x + 3) = -x \times 5x = -5x^2$ ou $(5x - 6)(2x + 3) = 5x \times 2x - 6 \times 3 = 10x^2 - 18$ pour venir au tableau.
Puis il demande à la classe d'analyser ce que l'élève a écrit au tableau.

Déroulement de correction 4 :
Un élève volontaire vient corriger au tableau.
Le professeur attend qu'il ait fini et demande l'avis de la classe pour valider sa solution.

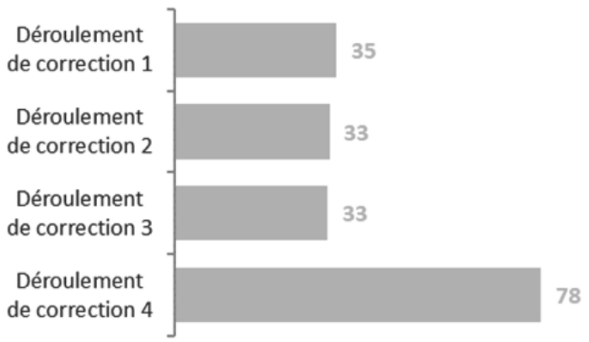


Figure 2 : Item du questionnaire PRAESCO 3e sur la fréquence et la nature des déroulements de correction proposées par les enseignants

Par ailleurs, le déroulement d'un moment de correction le plus fréquemment mis en œuvre correspond, pour 78 % des enseignants, au cas où un élève volontaire vient corriger au tableau et où la classe est sollicitée pour valider la solution proposée par cet élève, comme on peut le voir (figure 2) dans l'adhésion plus ou moins grande des enseignants aux déroulements proposés.

Conclusion

Les pratiques d'évaluation déclarées répertoriées dans cette enquête sont d'une grande variété. Cependant les résultats suggèrent que certaines de ces pratiques s'appuient relativement peu sur la fonction formative de l'évaluation, dans la mesure où elles cherchent peu à prendre de l'information précise sur les connaissances des élèves, et peuvent d'autant moins prendre appui sur ces connaissances pour en construire de nouvelles, en algèbre, et plus largement en mathématiques. L'évalua-

tion pour faire apprendre les mathématiques aux élèves ne semble pas suffisamment présente dans la classe pour donner à ceux-ci une certaine autonomie dans leurs apprentissages, et des moyens de contrôle de leur action en mathématiques.

Il nous reste à relier aux apprentissages des élèves, à travers les évaluations de leurs acquis menés en parallèle (projet PRAESCOL en cours), les pratiques déclarées des enseignants, même s'il reste évidemment difficile pour les chercheurs d'isoler les effets des pratiques d'évaluation, parmi l'ensemble de ce que font les enseignants en classe et pour leur classe.

Références

Allal, L. & Mottier Lopez, L. (Ed.) (2007). *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation*. Bruxelles : De Boeck.

Ash, D., & Levitt, K. (2003). Working within the Zone of Proximal Development: Formative Assessment as Professional Development, *Journal of Science Teacher Education, 14*(1), 1-313.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and Classroom learning, *Assessment in Education: Principles, Policy & Pratice, 5*, (1), 7-74.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques. 19*(2), 221-266.

De Ketele, J.M. (2010). Ne pas se tromper d'évaluation, *Revue française de linguistique appliquée, 15-1*, 25-37.

Grugeon B., Pilet J., Chenevotot, F., Delozanne E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'enseignement en algèbre élémentaire. Recherches en didactique de mathématiques, *Enseignement de l'algèbre, bilan et perspectives, hors série*, 137-162.

Kieran, C. (2007). Learning and Teaching Algebra At the Middle School Through College Levels. Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. In J. Lester F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, p. 707-762). Charlotte, NC : I.A.P.

de Landsheere, G. (1973). Formes nouvelles de l'évaluation. *Français dans le Monde: Revue Internationale et Francophone des Professeurs de Français, 100*.

Merle, P. (2015). *Les notes. Secrets de fabrication*. Presses universitaires de France.

Pilet, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 35*(3), 273-312.

Pilet, J. & Horoks, J. (2017). Assessment in mathematics as a lever to promote students' learning and teachers' professional development, In Dooley, T., & Gueudet, G. (Eds.) *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10*, February 1-5, 2017). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME, 3572-3580

Pilet, J., Allard, C. & Horoks, J. (2019). Une entrée par l'évaluation des apprentissages pour analyser les interactions entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves dans les moments de mise en commun. *Éducation et francophonie, 47*(3), 121–139.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education, 2*(4), 505-528

Robert, A., & Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. In *Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classroom* (pp. 269-298). Springer US.

Sirejacob, S. (2017) *Le rôle de l'enseignant dans l'organisation de l'étude personnelle hors la classe de collégiens : le cas des équations du premier degré à une inconnue*. Thèse de Doctorat. Université Paris-Diderot, Paris. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01686587

Vandebrouck F. (2018) *Activity Theory in French Didactic Research*. In: Kaiser G., Forgasz H., Graven M., Kuzniak A., Simmt E., Xu B. (eds) *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham

Titre: Tout problème est-il apte à une évaluation certificative ?

Auteurs: RUF Isaline et WEISS Laura

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 989 - 1001

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Tout problème est-il apte à une évaluation certificative ?

RUF[1] Isaline – WEISS[2] Laura

Résumé – Dans le cadre de la mise à disposition aux enseignant.es de Suisse romande de matériaux évaluant la résolution de problèmes en mathématiques, un site a été créé. Le travail préalable d'analyse des tâches issues d'évaluations cantonales externes, en particulier des problèmes, a soulevé plusieurs questions, notamment celle du choix et de la pertinence de certains problèmes pour évaluer les élèves.

Mots-clefs : école primaire, évaluations cantonales externes suisses romandes, évaluation certificative, résolution de problèmes.

Abstract – In order to provide teachers in the French-speaking part of Switzerland with materials evaluating problem solving in mathematics, a dedicated site was created. The previous work carried out to analyze mathematical tasks from external cantonal tests, in particular problems, raised several questions, especially the choice and the relevance of certain problems to assess the pupils.

Keywords: certificative assessment, external French-speaking cantonal tests, primary school, problem solving.

1 IRDP, Suisse, isaline.ruf@irdp.ch

2 IRDP, Suisse, laura.weiss@irdp.ch

Introduction

Tout.e enseignant.e est tenu.e d'évaluer les compétences de ses élèves. Nécessaire, cette pratique est aussi difficile. Afin de soutenir les enseignant.es romand.es dans cette tâche, un site dédié a été créé. Celui-ci comprend des exemples de matériaux évaluatifs en mathématiques destinés à des élèves de 8e année (grade 6, élèves âgé.es de 11-12 ans), accompagnés d'éclairages théoriques, didactiques et méthodologiques. Dans cet écrit, nous décrivons le processus qui a conduit à la mise en ligne de ces matériaux évaluatifs, issus d'évaluations cantonales externes (EC)[3], et des questionnements qui en ont découlé.

Le Plan d'études romand (PER), publié en 2010 et adopté par tous les cantons de Suisse romande, met au centre de l'enseignement-apprentissage des mathématiques la résolution de problèmes comme but et moyen d'apprendre les mathématiques (CIIP, 2010). La difficulté de l'évaluation de la résolution de problèmes étant reconnue, ce sont dans un premier temps des tâches évaluatives de résolution de problèmes qui ont été mises à disposition des enseignant.es romand.es. Ces problèmes, chacun accompagné d'un étayage didactique détaillé, se veulent emblématiques – sans toutefois prendre le statut de modèles – pour l'évaluation de la résolution de problèmes en mathématiques.

Les matériaux évaluatifs proposés sur ce site sont issus des EC des différents cantons romands qui en proposent. L'analyse des tâches de ces EC, en particulier des problèmes, a soulevé plusieurs questions que nous abordons dans ce texte.

Cadrage théorique

Contexte

En Suisse romande, la majorité des cantons proposent des EC en 8e année pour plusieurs disciplines scolaires, avec l'objectif d'évaluer les connaissances et compétences des élèves en fin d'école primaire. Leur visée varie toutefois d'un canton à l'autre. En effet, certaines EC cherchent à attester le niveau de maitrise des connaissances et des compétences des élèves attendues par le PER pour le cycle 2, tandis que d'autres participent également à la sélection des élèves en vue de leur entrée au secondaire I, où différentes filières et/ou niveaux les regroupent, notamment sur la base de leurs résultats scolaires. Par ailleurs, la forme que prennent ces évaluations diffère d'un canton à l'autre. Certaines regroupent par exemple les tâches en deux parties spécifiques, la première comptant des exercices techniques à réaliser sans calculatrice, et la seconde comportant essentiellement des

3 Dans la plupart des cantons romands, les élèves de fin de primaire réalisent des évaluations cantonales externes portant sur l'ensemble des apprentissages prévus par le Plan d'études romand. Ces épreuves, identiques pour l'ensemble des élèves d'un même canton qui les produit, sont certificatives dans la mesure où elles participent à l'évaluation de leurs compétences, voire à leur orientation scolaire.

tâches contextualisées pour lesquelles les élèves disposent, selon les cas, d'une calculatrice. Ces EC, comportant des tâches de divers types, sont donc une riche ressource de tâches d'évaluation.

Les travaux pour mettre à disposition des enseignant.es romand.es des tâches évaluatives de résolution de problèmes ont débuté par l'identification de ce type de tâches dans les EC. Pour ce faire, nous avons dépouillé et analysé les EC de mathématiques de 8e année de trois années, et catégorisé les différentes tâches qui s'y trouvent (voir Ruf & Weiss, envoyé pour publication). La première étape a donc consisté à déterminer ce qu'est un problème.

La résolution de problèmes, vers une définition

De nombreux auteurs se sont penchés sur la question de la définition d'un problème en mathématiques. Beaucoup s'accordent à dire que la caractéristique principale d'un problème réside dans le fait que la procédure permettant de le résoudre «pose problème», c'est-à-dire qu'elle n'est pas immédiatement accessible au sujet appelé à réaliser cette tâche (Monaghan, Pool, Roper & Threlfall, 2009 ; Schoenfeld, 1985 ; Newell & Simon, 1972). Comme le souligne Brun (1990), un problème, au départ, est relatif et dépend notamment du contexte et des apprentissages déjà réalisés :

> Il n'y a problème que dans un rapport sujet / situation, où la solution n'est pas disponible d'emblée, mais possible à construire. C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple (p. 2).

Ce n'est donc pas une tâche en soi qui est un exercice ou un problème.

Un problème est une tâche pour laquelle l'élève doit s'interroger sur la stratégie à mettre en œuvre, les outils et notions à convoquer et la manière de les combiner pour arriver à la solution, au regard de son niveau et de ses compétences. Engagent ainsi une résolution de problèmes les tâches dont le «modèle de résolution» est inconnu, ou encore celles où il est en partie connu mais nécessite pour le mettre en œuvre le tri, la recherche, la décomposition et l'organisation des données, amenant ainsi l'élève à sélectionner et connecter des informations pour progresser vers le résultat final à travers des résultats intermédiaires qu'il ou elle a construits de son propre chef. Ainsi, comme le soutient Chanudet (2019), une tâche dont la résolution revient à mettre en œuvre une procédure automatisée correspond à un exercice et non à un problème, la procédure permettant d'arriver à la réponse étant connue d'emblée.

Houdement (2015, 2017) distingue trois types de problèmes arithmétiques à l'école primaire :

- [les] problèmes basiques dont il est attendu une résolution « automatisée » ;
- [les] problèmes complexes, agrégats de problèmes basiques où la construction et la connexion des informations, nécessaires pour la résolution, est à la charge de l'élève ;

- [les] problèmes atypiques (qui ne sont pas des agrégats de problèmes basiques), dont la résolution demande la construction d'une stratégie, à défaut d'une ressemblance que percevrait le sujet avec un problème résolu.

- (Houdement, 2017, p. 73)

Au regard de l'aspect automatisé attendu pour les procédures de résolution des problèmes dits «basiques», la terminologie «problème» pour ce type de tâches peut être questionnée. Nous y reviendrons par la suite.

D'autres distinctions peuvent être faites parmi les tâches de type problème, notamment leur fonction. Les problèmes qui nous intéressent ici sont ceux dont Charnay (1992) parle en termes de «problèmes dont l'objectif est de permettre au maître et aux élèves de faire le point sur la manière dont les connaissances sont maîtrisées («problèmes d'évaluation»)» (p. 79). Leurs caractéristiques restent toutefois floues.

Il convient à présent de définir ce qu'est une évaluation (certificative) à l'école.

L'évaluation (certificative)

L'évaluation fait partie intégrante du travail de tout.e enseignant.e. Selon De Ketele (2010), le processus évaluatif consiste à :

> […] recueillir un ensemble d'informations […] pertinentes dans le choix, valides pour l'exploitation, fiables dans le recueil et confronter, par une démarche adéquate, cet ensemble d'informations à un ensemble de critères […] pertinents dans le choix (cohérent avec le référentiel), valides dans l'opérationnalisation, fiables dans l'utilisation pour attribuer une signification aux résultats de cette confrontation […] et ainsi pouvoir fonder une prise de décision cohérente avec la fonction visée par l'évaluation […] (p. 31).

Il existe différentes formes d'évaluation, lesquelles se distinguent notamment par leur visée ou fonction. De Ketele (2010) en distingue trois : «évaluer pour orienter une nouvelle action à entreprendre ; évaluer pour améliorer une action en cours ; évaluer pour certifier socialement une action considérée comme terminée» (p. 26). Dans cet écrit, nous nous intéressons plus particulièrement à cette dernière forme d'évaluation, que cet auteur qualifie d'évaluation certificative. Parfois aussi caractérisée de sommative, De Ketele insiste sur le fait que l'aspect «sommatif» fait référence à la démarche d'évaluation – ici de faire une somme pour attribuer une note – et non à la fonction de l'évaluation.

Relevons toutefois que, sur le terrain, ces deux aspects vont souvent de pair, comme en témoignent les propos de Mottier Lopez et al. (2013) qui avance que font notamment partie des «pratiques d'évaluation certificative d'enseignants […] quand ils attribuent des notes aux copies de leurs élèves qui serviront à calculer ensuite une moyenne déterminant la promotion à la fin de chaque degré sco-

laire» (p. 160). Ces pratiques répondent à une injonction institutionnelle. En effet, «il est demandé aux systèmes éducatifs de certifier les acquis des élèves […], demande de certification [qui] apparaît comme légitime compte tenu des contraintes propres aux formations post-obligatoires, à la formation professionnelle et aux exigences de l'entrée dans le métier quel qu'il soit» (p. 162).

Dans cette contribution, nous nous en tenons à la terminologie «certificative», ce type d'évaluation visant à attester du niveau d'acquisition des connaissances et compétences de l'élève au terme d'une ou plusieurs séquences d'enseignement dans le but justement de les certifier.

Corpus et analyse

Sur la base de ces éléments, nous avons été amenées, dans un premier temps, à discriminer parmi les 1507 tâches des EC de trois années scolaires, les problèmes des exercices au sens de Chanudet (2019), au regard des compétences et connaissances attendues pour des élèves de fin d'école primaire. Parmi ces 1507 tâches, il a été relativement facile d'identifier les exercices que nous avons qualifiés de «tâches techniques isolées», au nombre de 992 (66%), dont font partie les calculs posés ou réfléchis, l'identification des propriétés d'une figure géométrique à partir de sa définition et/ou de sa représentation, le repérage de points dans un système d'axes, la reconnaissance et la dénomination d'une isométrie, la mesure de longueurs ou d'angles, la conversion d'unités, la décomposition d'un nombre en unités, dizaines, dixièmes, etc., la lecture ou le placement d'un nombre sur une droite graduée, etc. Pour les 515 tâches restantes (34%), nous nous sommes appuyées sur les catégories déterminées par Houdement (2015, 2017) présentées plus haut.

Toutefois, cette classification ne nous paraissant pas totalement appropriée au terme d'une séquence d'enseignement-apprentissage, les problèmes dits basiques ne pouvant plus, selon nous, être considérés comme des problèmes au stade d'évaluation certificative, la procédure de résolution ayant été automatisée en classe. Ainsi, nous l'avons quelque peu revue pour arriver à une nouvelle catégorisation, plus adaptée à nos travaux. Cela nous a en outre permis d'étendre cette classification à l'ensemble des domaines mathématiques présents dans les EC, nous amenant à retravailler assez finement les catégories.

Au final, nous avons déterminé quatre types de tâches. Les deux premiers relèvent d'exercices (selon la terminologie de Chanudet (2019)). Il s'agit d'une part des *tâches techniques isolées* évoquées plus haut, généralement décontextualisées, qui permettent de vérifier la maitrise d'outils techniques explicitement mentionnés ou de connaissances déclaratives, et, d'autre part, des tâches que nous avons qualifiées *d'application*, lesquelles demandent la mise en œuvre de procédures ayant été entrainées et automatisées en classe (il s'agit en général de l'application en situation d'un seul outil ou d'une seule notion mathématique). Ces dernières sont plus ou moins équivalentes aux problèmes basiques d'Houdement (2015, 2017), c'est avant tout l'utilisation du terme «problème» qui a été revue pour les raisons énoncées ci-dessus. Les deux autres types de tâches relèvent de la résolution de pro-

blèmes : les *problèmes*[4] qui correspondent à quelques situations près aux «problèmes complexes» d'Houdement (2015, 2017) et les *problèmes atypiques*, tâches demandant l'élaboration, par l'élève, d'une stratégie de résolution, pour lesquels nous avons repris sa terminologie.

Problèmes et problèmes atpyiques

Afin de préciser quelles tâches nous avons considérées comme correspondant à une résolution de problèmes, nous en explicitons quelques caractéristiques dans cette partie et les illustrons par quelques exemples.

Les problèmes

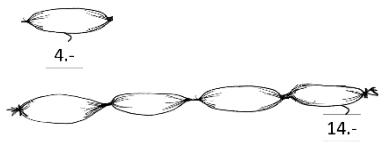
La catégorie de problèmes qu'Houdement (2015, 2017) distingue en tant que «problèmes complexes» est définie comme une combinaison et articulation de problèmes basiques :

> Résoudre un problème complexe nécessite de connecter des informations pour construire des sous-problèmes calculables, souvent basiques, et utiles pour avancer vers la réponse. Mais cela exige aussi de qualifier les résultats intermédiaires (pour rester dans le domaine des grandeurs contextualisées et garder le lien avec le contexte de départ) ; et même d'avoir pris conscience de la nécessité de ce travail de pensée (compétence métacognitive) (Houdement, 2017, p. 12).

Un tel problème comporte donc plusieurs étapes dans sa résolution – autrement dit la recherche non guidée de résultats intermédiaires – étapes qui peuvent faire appel à un ou plusieurs outils ou notions mathématiques. Intéressante à prendre en compte, une telle structure ne suffit cependant pas, selon nous, à qualifier une tâche de résolution de problèmes, dans la mesure où la résolution de telles tâches, même si elle implique plusieurs étapes, peut avoir été automatisée, puisqu'un critère indispensable au problème est une procédure de résolution non automatisée. L'élève doit, en quelque sorte, se demander par où commencer pour arriver à la solution et/ou à quelle(s) notion(s) faire appel. En voici des exemples :

4 Nous avons choisi de ne pas conserver le terme «complexe» qui, pour le public visé, pourrait être confondu avec le niveau de difficulté de la tâche.

1. Un boucher a préparé 60 saucissons. Il les vend 4 francs pièce. Cette semaine, il propose une action : si un client achète 4 saucissons, il ne paie que 14 francs.



À la fin de la journée, 20 clients ont acheté des saucissons. 8 d›entre eux ont profité de l›action et les autres se sont contentés d›un seul saucisson.

Combien d'argent le boucher a-t-il encaissé durant la journée grâce à la vente des saucissons ?

2. Il faut 400 litres de lait pour produire une meule de gruyère de 35 kg.



- Un producteur de gruyère vend son fromage 17 francs le kg.
- Cette année, ce producteur a gagné 29'750 francs en vendant tout son gruyère.

Combien de litres de lait a-t-il utilisés pour produire son gruyère ?

3. Pauline et Amélie sont deux amies qui ont moins de 70 ans. Pauline a une année de plus qu'Amélie. L'âge de Pauline est un multiple de 5 et l'année prochaine ce sera un multiple de 7. L'âge d'Amélie est un multiple de 9.

Quel âge ont ces deux amies ?

Figure 1 – Exemples de tâches de résolution de problèmes (créés par les auteures mais similaires à celles qu'on trouve dans les EC)

De notre point de vue, ces tâches présentent des caractéristiques propres aux problèmes et peuvent être considérées comme tels pour un.e élève de fin d'école primaire. En effet, le problème n°1 demande à l'élève d'organiser la mobilisation de savoirs et savoir-faire à déployer pour le résoudre (soustraction, multiplication, addition). Il en va de même pour le problème n°2, lequel nécessite toutefois la maitrise d'un seul outil mathématique, à savoir celui de la proportionnalité. Ici, l'élève ne peut appliquer ce concept entrainé sans se questionner quant à l'ordre et aux liens des données à traiter. Quant au problème n°3, bien que l'outil mathématique *multiple* soit mentionné, il nécessite de prendre en compte plusieurs données et les liens entre elles. Bien qu'il pourrait aussi entrer dans la catégorie des problèmes atypiques, la forte présence de ce type de problèmes dans les moyens d'enseignement romands officiels – et donc l'habitude des élèves à les résoudre – nous fait opter pour la catégorie *problèmes*, renvoyant au fait que ce n'est pas la tâche en soi qui est un exercice ou un problème, mais bien la relation entre l'individu et la tâche qui permet de le déterminer. Dans les trois cas, pour parvenir à la solution, l'élève doit impérativement trier, rechercher, décomposer, organiser et mettre en relation les données de l'énoncé. C'est donc la combinaison voire l'imbrication des différentes étapes qui en font des tâches de résolution de problèmes.

Les problèmes atypiques

La catégorie de problèmes que définit Houdement (2015, 2017) en tant que «problèmes atypiques» nous parait également faire sens en termes de résolution de problèmes. Si les précédents *problèmes* sont un possible moyen d'évaluation de l'utilisation adéquate d'outil(s) ou notion(s) mathématique(s), il s'agit ici de problèmes dont l'objet d'évaluation porte sur la stratégie de résolution. Sont concernés les cas où la recherche d'une stratégie est au cœur de la tâche.

Au regard des tâches proposées dans les EC, nous y classons notamment les situations pour lesquelles la stratégie de résolution correspond, pour l'élève, à son niveau, à une démarche *ad hoc*, à l'image de l'ajustement d'essais successifs. L'outil expert n'est pas disponible en tant que tel dans la mesure où il n'a pas (encore) été enseigné en classe. À titre d'illustration, en font partie des problèmes pouvant se résoudre par un système d'équations ou encore des problèmes de recherche de la loi de formation d'une suite de nombres. Relèvent également de cette catégorie les problèmes de logique (notamment de déduction à partir d'informations données) et ceux visant l'exhaustivité des cas. Dans les EC se trouvent quelques problèmes de ce type dont les stratégies à mettre en œuvre sont différentes, à l'image de la recherche de l'exhaustivité des réponses (en lien avec une organisation systématique de recherche) (A), l'ajustement d'essais successifs (B) ou encore l'identification d'une suite numérique (C), par exemple :

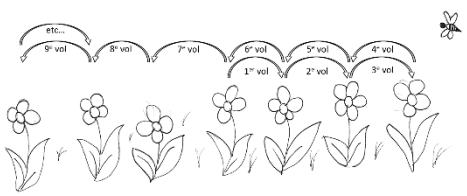
A. De combien de façons différentes peut-on obtenir 30 euros avec des pièces de 2 euros et des billets de 5 et 10 euros ?	B. Dans un parking sont garées des voitures et des motos. Un enfant y compte 30 rétroviseurs (2 par véhicule) et son camarde 44 roues. Combien y a-t-il de voitures et de motos dans ce parking ?	C. Une abeille vole de fleur en fleur dans un parterre qui compte 7 fleurs alignées. Elle est partie de la fleur centrale.  Sur quelle fleur sera-t-elle après 1000 vols ?

Figure 2 – *Exemples de problèmes atypiques (créés par les auteures mais similaires à ceux qu'on trouve dans les EC)*

À partir de notre nouvelle catégorisation explicitée ci-dessus, nous avons, pour chaque tâche des EC analysée, déterminé à quelle catégorie elle appartient. Ainsi, parmi les 515 tâches ne correspondant pas à des *tâches techniques isolées*, nous avons identifié dans notre corpus 351 *tâches d'application* (68%), 134 *problèmes* (26%) et seulement 30 *problèmes atypiques* (6%).

Les problèmes de géométrie

Si jusqu'ici nous avons essentiellement traité des problèmes numériques tels que ceux caractérisés par Houdement (2015, 2017), il nous semble que notre catégorisation peut être élargie aux tâches géométriques. En nous appuyant sur les tâches de ce type présentes dans les EC, nous nous sommes prêtées à l'exercice de leur classification, en conservant un certain parallèle avec la catégorisation des tâches numériques. Nous avons considéré comme *problèmes* de géométrie les tâches requérant une ou plusieurs étapes intermédiaires ou faisant appel à plusieurs notions, parfois imbriquées. En font par exemple partie, pour l'axe thématique *Grandeurs et mesures* du PER, le calcul d'aires composées, celui de volumes partiels, ainsi que, pour l'axe thématique *Espace*, la construction d'un assemblage de figures planes dépendantes les unes des autres, dont voici un exemple :

À l'aide de ton matériel de géométrie, construis précisément cette figure composée d'un rectangle, d'un triangle équilatéral et d'un demi-cercle selon les indications du croquis.

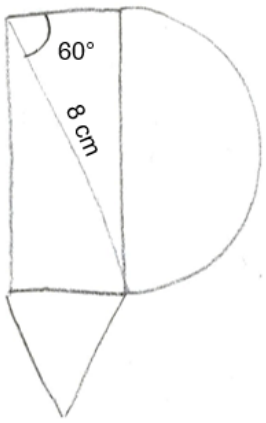


Figure 3 – *Exemple de problème de géométrie (créé par les auteures mais similaire à ceux qu'on trouve dans les EC)*

Quant aux *problèmes atypiques* de géométrie, ils rejoignent les caractéristiques de ceux numériques, à savoir toute tâche pour laquelle l'élève ne dispose pas de procédures ou d'outils formels. Ils nécessitent par exemple de faire des essais, à l'image de la recherche de tous les quadrilatères qu'il est possible de construire avec exactement quatre triangles rectangles identiques ou du coloriage des parties d'une figure complexe afin que celle-ci ait un nombre déterminé d'axes de symétrie.

Les tâches de résolution de problèmes dans les EC

Les *problèmes* et *problèmes atypiques* ont fait l'objet d'analyses fines, en vue de leur potentielle mise à disposition des enseignant.es romand.es. Nous avons notamment identifié le ou les axe(s) thématique(s) du PER concerné(s) par chaque problème (*Espace ; Nombres ; Opérations ; Grandeurs et mesures ; Modélisation*), ainsi que les chapitres et les progressions des apprentissages de ces axes auxquels il fait appel[5]. Un problème se rattachant souvent à plus d'un axe thématique, nous avons défini, pour chaque tâche de ce type, son axe principal au regard de son enjeu central :

5 Nous avons également inventorié les démarches potentiellement mises en œuvre par des élèves de fin de l'école primaire pour le résoudre, ainsi que les possibles erreurs attendues, différenciées selon leur type, à savoir les erreurs de calcul, de conversion d'unités, de précision de mesure, etc., celles de non prise en compte de données ou de contraintes et finalement les erreurs de mathématisation. Ces démarches prévues et erreurs attendues sont illustrées sur le site évoqué en introduction par des productions d'élèves.

	Espace	Nombres	Opérations	Grandeurs et mesures	Modélisation	Total
Problèmes	31	5	73	23	2	**134**
Problèmes atypiques	7	1	16	0	6	**30**

Tableau 1 – Axes thématiques concernés par les tâches de type problème et problème atypique des EC analysées

Ce tableau permet deux constats. D'une part, le décompte de la catégorie *problèmes* des tâches des EC liée aux axes thématiques *Espace* et *Grandeurs et mesures* (40%) met en évidence que les tâches de résolution de problèmes dans le domaine de la géométrie sont un peu moins étoffées que dans le domaine numérique. D'autre part, l'axe *Espace* offre visiblement des possibilités d'évaluation originales puisque, pour cet axe, on en compte 7 sur les 30 *problèmes atypiques* recensés.

Discussion et Conclusion

Pour pouvoir mettre à disposition des enseignant.es romand.es des ressources évaluatives de résolution de problèmes, un travail d'analyse préalable des matériaux évaluatifs a été nécessaire. Lors de l'analyse des *problèmes* et des *problèmes atypiques* des évaluations cantonales externes, nous nous sommes questionnées quant à l'utilisation de certains d'eux en évaluation certificative. En effet, certaines tâches de résolution de problèmes particulièrement intéressantes nous ont semblé mieux exploitables dans le cadre de l'enseignement en classe qu'en évaluation, notamment de par les bénéfices qu'une mise en commun ou des échanges relatifs à la tâche seraient susceptibles d'apporter. D'où la question : tout problème est-il apte à une évaluation certificative ? Comment différencier un problème d'enseignement d'un problème d'évaluation ?

Les ressources qui, à notre sens, constituent des problèmes pour les élèves au terme d'une séquence d'enseignement-apprentissage sont d'une part les *problèmes* et d'autre part les *problèmes atypiques*. L'enjeu de ces deux types de problèmes diffère. La première catégorie doit permettre de vérifier dans quelle mesure l'élève est capable de résoudre des problèmes par la mobilisation raisonnée d'outils qu'il ou elle devrait maitriser et avoir automatisés dans des situations simples. Les objets évalués sont prioritairement le choix et la mise en œuvre de notions mathématiques, l'élève devant se questionner quant aux procédures à combiner. Cependant, pour que leur mobilisation puisse être évaluée, seuls les outils enseignés et attendus devraient permettre d'arriver à la solution. En effet, qu'en est-il :

> […] des élèves qui ne produisent pas les réponses attendues, peut-on en conclure pour autant une non-maîtrise des savoirs en jeu ou bien seulement la mobilisation d'un autre savoir parce que le problème posé peut être résolu d'une autre façon ? (Coppé, 2018, p. 11).

Si le problème le permet, on ne peut considérer que l'élève n'ayant pas utilisé la démarche attendue ne la maitrise pas pour autant, il ou elle a simplement trouvé un autre chemin pour aboutir à la solution. Ainsi, le choix des problèmes évaluatifs n'est pas une mince affaire. Une analyse *a priori* fine de la tâche et des variables didactiques possibles est cruciale pour pouvoir déterminer le(s) objet(s) réellement évalué(s).

Pour leur part, les *problèmes atypiques* visent, selon notre définition, à vérifier comment l'élève met en œuvre des stratégies. Pour cette catégorie de problèmes, nous nous interrogeons plus spécifiquement quant aux conditions selon lesquelles ils ont leur place en évaluation certificative. À notre avis, pour pouvoir proposer de telles tâches en évaluation, il est indispensable que l'élève ait été confronté.e à des problèmes «pour chercher» (Charnay, 1992) : il ou elle doit avoir été entrainé.e à faire des essais, à être méthodique, etc. et le problème évaluatif proposé doit présenter une certaine analogie à ceux réalisés en enseignement. Cependant, notons qu'un *problème atypique*, à force d'entrainement d'une stratégie spécifique, peut aussi devenir un exercice. En effet :

on peut imaginer qu'après plusieurs problèmes se ressemblant, le contexte ou plus généralement la forme similaire du nouveau problème peut amener les élèves à recourir presque de facto au type de démarche ou raisonnement déjà utilisé, et ainsi limiter leur prise d'initiative et leur réflexion quant au choix de la démarche à adopter (Favier & Chanudet, 2021, p. 94).

Le statut d'une tâche, même en ce qui concerne les *problèmes atypiques*, n'est donc ni intrinsèque à celle-ci, ni étanche. La difficulté de proposer un *problème atypique* en évaluation certificative réside dans le fait qu'il ne doit pas trop ressembler à ceux travaillés en classe pour qu'il conserve son statut de problème.

Par ailleurs, nous avons été confrontées au fait que, pour certaines tâches de résolution de problèmes, les productions des élèves ne permettent pas d'appréhender la mise en œuvre des compétences que celles-ci étaient censées jauger, le processus mis en œuvre par l'élève n'étant pas visible et donc non identifiable. Étant donné qu'en résolution de problèmes, l'évaluation doit porter sur la démarche – par opposition à la seule exactitude de la réponse – il est nécessaire que la résolution des problèmes proposés permette d'obtenir des traces interprétables en termes de raisonnement, pour qu'il soit possible d'attester des compétences de l'élève. Pour les tâches pour lesquelles le support papier/crayon ne permet pas de voir la démarche mise en œuvre par l'élève, une évaluation informatisée gardant trace de toutes les étapes de résolution (ou les essais) pourrait-elle constituer une piste?

Références

Brun, J. (1990). La résolution de problèmes arithmétiques : Bilan et perspectives. *Math-Ecole, 141*, 2-15.

Charnay, R. (1992). Problème ouvert, problème pour chercher. *Grand N, 51*, 77-83.

Chanudet, M. (2019). *Étude des pratiques évaluatives des enseignants dans le cadre d'un enseignement centré sur la résolution de problèmes en mathématiques*. Thèse de doctorat : Université de Genève, 2019, no. FPSE 747 DOI : 10.13097/archive-ouverte/unige:125833

Conférence Intercantonale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (CIIP). (2010). *Plan d'Etudes Romand*. Consulté à l'adresse http://www.plandetudes.ch

Coppé, S. (2018). Évaluation et didactique des mathématiques : vers de nouvelles questions, de nouveaux travaux. *Mesure et évaluation en éducation, 41* (1), 7–39. https://doi.org/10.7202/1055895ar

De Ketele, J. (2010). Ne pas se tromper d'évaluation. *Revue française de linguistique appliquée, 1*(1), 25-37. https://doi.org/10.3917/rfla.151.0025

Favier, S. & Chanudet, M. (2021). Les démarches et modes de raisonnement en jeu dans les problèmes de « recherche & stratégies » en 10H. *RMé, 235*, 88-98.

Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100*, 59-78.

Houdement, C. (2015). Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes. https://docplayer.fr/61419188-Le-rmt-mediation-entre-enseignants-et-resolution-de-problemes-catherine-houdement-5.html

Monaghan, J., Pool, P., Roper, T., & Threlfall, J. (2009). Open-start mathematics problems: An approach to assessing problem solving. *Teaching Mathematics and Its Application, 28*, 21-31.

Mottier Lopez, L., Tessaro, W., Dechamboux, L. & Morales Villabona, F. (2013). La modération sociale : un dispositif soutenant l'émergence de savoirs négociés sur l'évaluation certificative des apprentissages des élèves. *Questions vives, 6* (18), 159-175.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press Inc.

Titre: Évaluation formative dans les pratiques des enseignants du Chili

Auteur: RUMINOT Carolina

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1002 - 1014

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Évaluation formative dans les pratiques des enseignants du Chili

RUMINOT Carolina

Résumé – Cette recherche examine l'état actuel des connaissances, des contraintes et des défis existants dans la pratique de l'évaluation formative chez des enseignants du primaire au Chili. D'après les résultats de dix-sept entrevues réalisées à la suite d'une formation de dix ateliers de développement professionnel, les enseignants de l'étude démontrent une préoccupation à repenser leurs pratiques évaluatives en salle de classe. Cependant, une approche pédagogique traditionnelle continue à être mobilisée, d'une part en raison du manque de formation et aussi en raison de la forte concentration du système éducatif sur l'évaluation standardisée.

Mots-clefs : Évaluation des apprentissages, enseignement des mathématiques, articulation des pratiques d'enseignement et d'évaluation, évaluation standardisée.

Abstract – This research examines the current state of knowledge, the constraints, and the existing challenges in the practice of formative assessment among primary school teachers in Chile. According to the results of 17 conducted interviews, following ten professional development workshops, the teachers show concern to rethink their assessment practices in the classroom. However, a traditional teaching approach continues to be used, partly because of the lack of training and also because of the strong focus on standardized assessment by the educational system.

Keywords: Assessment of learning, mathematics teaching, teaching and assessment practice harmonization, standardized assessment.

Introduction et problématique

Au niveau national au Chili, la mise en place d'évaluations formatives (Black et Wiliam 1998, Suurtamm et *al.*, 2016) en classe est une exigence ministérielle qui pèse sur les écoles. Il y a un fort intérêt à former les enseignants pour développer des compétences dans l'évaluation des apprentissages et la diversification des stratégies d'enseignement pour améliorer l'apprentissage chez les élèves. Cependant, il existe un système de responsabilité (*accountability*) ancré dans la culture nationale. Ce système d'évaluation est utilisé pour informer et prendre des décisions au niveau des politiques et des programmes, et est largement utilisé par les écoles pour préparer les élèves et, dans certains cas, pour définir des projets éducatifs spécifiques au sein de la plupart des établissements. (Ruminot, 2014; 2017).

L'investigation sur l'évaluation des apprentissages est en croissance constante, au niveau de la sphère internationale. Cependant, nous ne pouvons pas soutenir un tel argument dans le contexte chilien, car jusqu'à ce jour, peu d'écrits scientifiques rendent du potentiel de l'évaluation formative dans la formation des élèves. Malgré cette pénurie de travaux, le gouvernement de ce pays ne ménage point ses efforts pour améliorer les pratiques évaluatives des élèves, comme le montre l'élaboration de nombreux textes d'encadrement et d'orientation tels que le *Décret 67; Evaluación Formativa en el Aula: Orientaciones para directivos; Política para el Fortalecimiento de la Evaluación en Aula* (Mineduc, 2018). Dans ses nombreux textes visant à encadrer les pratiques d'évaluation au Chili, le Mineduc informe la communauté éducative sur les différentes régulations que doivent prendre en compte les responsables d'établissements scolaires de l'éducation de base au moment de la planification de leurs règlements en matière d'évaluation, de qualification et de promotion des élèves.

S'appuyant sur l'analyse d'entrevues menées auprès de 17 enseignantes d'une école de Santiago du Chili, la présente recherche examine l'état actuel des connaissances, les contraintes et les défis existants dans la pratique de l'évaluation et de l'enseignement des mathématiques chez les enseignants du primaire. L'étude s'intéresse aux pratiques d'évaluation formative et d'enseignement des mathématiques pour en comprendre les conceptions sur lesquelles elles sont fondées. Cet article s'organise autour de la question suivante : que savent les enseignants de l'évaluation formative et comment négocient-ils l'utilisation des évaluations sommatives et formatives ?

Conceptualisation théorique

L'évaluation constitue un essentiel dans la planification des pratiques d'enseignement-apprentissage (Ministère de l'Éducation de l'Ontario (MÉO), 2010 ; Pérez-Cotapos et Taut, 2016). Elle rend compte de l'état de progression et d'assimilation des activités (Ministère de l'Éducation du Chili, 2018 s.d.), et prépare la quête de procédés visant à combler les lacunes identifiées. De nombreux travaux ont révélé que l'évaluation est un incontournable dans le processus d'enseignement-apprentissage et c'est dans cette perspective que Pérez-Cotapos et Taut (2016) la conçoivent comme un processus

qui fournit des informations fiables au sujet des apprentissages de chaque élève (ses forces et ses faiblesses) et de la rétroaction afin d'améliorer les pratiques d'enseignement.

Évaluation formative

Il est difficile de définir avec précision les paramètres exacts dans lesquels prennent place les évaluations formatives, étant donné qu'il n'existe pas de consensus clair à ce sujet dans la communauté scientifique. Il apparait que ce terme tend à regrouper tout un éventail de pratiques formelles et informelles dont les enseignants font usage en salle de classe pour soutenir les élèves dans leur apprentissage. Black et Wiliam (2009) argüent que les évaluations formatives sont chapeautées par cinq stratégies qui, pour être matérialisées, nécessitent la collaboration de trois acteurs, à savoir l'enseignant, l'élève et les pairs. La fonction capitale dont est investi l'enseignant est de s'assurer que tous les moyens raisonnables sont mis en œuvre pour amenuiser toute distance ou obstacle séparant l'élève de son objectif. Pour ce faire, Black et Wiliam (2009) esquissent cinq stratégies : *établir les intentions et critères d'apprentissage ; favoriser les discussions de groupe ou autres tâches d'apprentissage ; fournir une rétroaction concourant au progrès des élèves; amener les élèves à travailler de concert ensemble; montrer aux élèves qu'ils sont les premiers artisans de leur succès*.

La différenciation des intentions des évaluations (MÉO, 2010) permet de mieux comprendre leur propos et les intégrer de manière pertinente au processus d'enseignement et d'apprentissage. *L'évaluation au service de l'apprentissage* a pour premier but, comme toute évaluation, d'améliorer l'apprentissage de l'élève. Elle vise à recueillir et à interpréter les preuves d'apprentissage lors des évaluations diagnostiques et formatives, afin d'informer tant au personnel enseignant qu'à l'élève des apprentissages cibles, d'établir où l'élève se situe dans son apprentissage et de déterminer ce qui doit être fait pour y arriver. Les pratiques courantes sont : résultats d'apprentissage[1], les preuves d'apprentissage[2], les critères d'évaluation[3] et la rétroaction descriptive. De plus, ici, les renseignements sont tirés de sources diverses, comme les observations, les conversations, les discussions, le questionnement, les conférences, les devoirs, le travail en équipe, les démonstrations, les projets, les portfolios, etc. *L'évaluation en tant qu'apprentissage* a pour but principal de favoriser l'autorégulation chez l'élève. Ses caractéristiques métacognitives amènent l'élève à apprendre par la rétroaction et à comprendre où elle ou il en est dans son apprentissage. D'après, Earl (2012) « il ne suffit pas de faire de l'élève un collaborateur du processus d'évaluation, mais un acteur critique qui fait le lien entre évaluation et apprentissage », c'est un moyen efficace pour mettre en place les stratégies d'évaluation

1. Ils sont des énoncés brefs, concis et précis qui décrivent, dans un langage que l'élève comprend, ce qu'elle ou il doit connaître et faire à la fin d'une leçon ou d'une série de leçons.

2. Ensemble d'évaluation (formative ou sommative) qui démontre de ce que l'élève connaît, peut faire et peut exprimer. Ils permettent à l'enseignant d'exercer un jugement professionnel de qualité au sujet de l'apprentissage de l'élève.

3. Ils sont des énoncés, élaborés idéalement avec les élèves, qui décrivent clairement ce qui est requis pour satisfaire les résultats d'apprentissage. Ils permettent de décrire à quoi ressemble une tâche réussie.

comme l'autoévaluation, l'évaluation par les pairs et d'objectifs d'apprentissage personnels[4]. *L'évaluation de l'apprentissage* est un processus qui consiste à juger la qualité du travail accompli par l'élève en fonction des normes de performance établies pour déterminer la note finale représentant cette qualité. Ce processus tient compte de toutes les preuves d'apprentissage provenant d'observations, de conversations et de productions, d'évaluation appelé par *triangulation* (Davis 2007). Pour Davies sont des preuves par *triangulation* c'est-à-dire par des observations, des conversations et des productions : *« En utilisant la triangulation, on tient compte de tous les styles d'apprentissage et l'on engage tous et toutes les élèves, y compris ceux et celles qui éprouvent de la difficulté à s'exprimer par écrit et ceux et celles qui n'ont pas l'habileté d'entreprendre une tâche d'évaluation écrite en vue de montrer leur apprentissage. »* — Anne Davies (Traduction libre)

Dilemmes d'évaluation

Appelés à diversifier leurs pratiques évaluatives qui s'inscrivent dans les postulats de l'école moderne, les enseignants se retrouvent à bien des égards voués à surmonter des défis que Suurtamm et Koch (2014) appellent les dilemmes d'enseignants. Le cadre de Windschitl (2002), adapté et repris par Suurtamm et Koch (2014) et Suurtamm *et al.*, (2016), présente quatre types d'enjeux propres au contexte d'enseignants dans leurs pratiques évaluatives ; ce même cadre servira de base d'analyse pour cette recherche. Les dilemmes peuvent être politiques, culturels, pédagogiques et conceptuels. Concernant le dilemme politique, les pratiques enseignantes entrent en tension avec l'école, le district ou les politiques provinciales en milieu éducatif, en ceci que les enseignants se voient responsables de suivre certains mandats ministériels et institutionnels en matière d'évaluation, notamment la passation des évaluations standardisées (Eizadirad, et *al.*, 2016). Cette contrainte provoque une tension ambivalente quant à la finalité éducative des contenus à faire apprendre aux élèves: est-ce pour le développement individualisé de leur potentiel ou pour créer des humains capables de répondre aux besoins administratifs, entrepreneuriaux et scientifiques du monde social actuel ? (Radford, 2020). Suurtamm et Koch (2014) relèvent justement ce dilemme politique qui est celui de la conciliation de la pensée actuelle entourant l'évaluation avec les contraintes pouvant être basées sur les bulletins préconçus, la représentation d'évaluations en pourcentages ou les exigences des évaluations en classe et à grande échelle. Les enseignants peuvent également faire face à des dilemmes culturels. Ceux-ci surviennent lorsque de nouvelles pratiques évaluatives tentent de changer la culture de la classe ou de l'école. Suurtamm et Koch (2014) citent l'exemple de l'influence des approches d'évaluation des collègues ou bien la rupture du contrat didactique, notamment dans la réponse aux attentes des élèves, des parents ou des administrateurs dans la notation. Ensuite, les dilemmes pédagogiques concernent l'enseignant lorsqu'il fait face à la conception et à la mise en place des outils et des tâches d'évaluation. Cela peut être le cas avec l'adoption de la triangulation des preuves d'apprentissages (Davies, 2007) où les élèves deviennent plus impliqués dans le processus d'évaluation et que de nou-

4. Grâce à la rétroaction, l'élève développe ses habiletés à s'autoévaluer, elle ou il reconnaît précisément ce qu'elle ou il doit faire pour améliorer son apprentissage et planifier les prochaines étapes.

velles grilles de correction sont mises en place (Suurtamm et Koch, 2014; Suurtamm et *al.*, 2016). Quant aux dilemmes conceptuels, Suurtamm et Koch (2014) les définissent comme des tensions entourant les buts de l'évaluation et de l'enseignement et apprentissage des mathématiques. L'enjeu de comprendre les différents objectifs de l'évaluation peut être un dilemme conceptuel, tout comme la tension entre les nouvelles approches en évaluation et l'approche traditionnelle vécue en tant qu'ancien élève (Fagnant et Goffin, 2017).

Méthodologie

Cette recherche a été réalisée auprès d'un groupe de dix-sept enseignantes du primaire (1er à la 3e année), moyen cycle (4e à la 6e année) dans une même institution éducative, à la suite de la présentation de notre projet, elles ont volontairement accepté de participer à cette recherche. Nous avons réalisé dix ateliers de développement professionnel dans le domaine de l'évaluation formative et de la diversification des stratégies d'enseignement des mathématiques. Spécifiquement, nous avons examiné les contenus associés au sens du nombre et sens des opérations arithmétiques. Les ateliers ont été dispensés sur dix semaines, chaque session durant une heure, après quoi nous avons interviewé chaque enseignant pendant une heure. Dans cette communication pour mettre en évidence l'état actuel des connaissances, des contraintes et des défis existants dans la pratique de l'évaluation formative chez des enseignants, nous nous concentrons sur les conversations avec les enseignantes lors des entretiens. Les données collectées des entrevues semi-dirigées reposent sur quatre volets :

- Expérience professionnelle. À travers ce volet nous avons voulu connaitre la formation initiale des enseignants, les années d'expérience en enseignement, en enseignement des mathématiques, depuis quand elles travaillaient dans cette école, ainsi que des responsabilités autres que l'enseignement dans l'institution éducative.

- Connaissance et formation continue sur le thème d'évaluation des apprentissages et enseignement des mathématiques. Deux questions très précises ont été posées concernant la formation continue lors des dix dernières années au sujet des politiques évaluatives, l'évaluation des apprentissages et l'enseignement des mathématiques (Exemples : cours, séminaires, experts à charge, etc.).

- Pratiques d'évaluation des apprentissages en mathématiques. Nous avons interrogé aux enseignantes dans le premier moment sur les types de pratiques plus présentes dans son enseignement et la façon dont elles intègrent ces pratiques d'évaluation à l'enseignement des mathématiques. Dans un deuxième moment, nous avons cherché à comprendre si les enseignantes saisissent que les pratiques d'évaluation améliorent l'apprentissage chez ses élèves et si elles rencontraient de défis dans la mise en œuvre des pratiques d'évaluation.

- Pratiques d'enseignement en mathématiques. Étant donné que ce projet s'inscrit dans un contexte de développement professionnel, nous avons accordé de nous centrer sur le thème de la diversification des stratégies dans l'enseignement des opérations arithmétiques. En conséquence, les discussions ont été autour des stratégies utilisées pour enseigner les quatre opérations chez les élèves.

Concernant l'analyse des données issues des entretiens semi-dirigés, une analyse thématique et une catégorisation des données ont été réalisées. Dans une première phase, une analyse préliminaire des transcriptions a été effectuée, qui a consisté en une lecture et une première catégorisation des données qualitatives. Puis, dans une deuxième étape d'analyse, les données ont été soumises à un processus d'analyse plus détaillé à l'aide du logiciel d'analyse de données qualitatives Nvivo, ce qui a permis d'identifier les nœuds et de coder les données, pouvant ainsi confirmer les catégorisations préconçues et identifier des thématiques émergentes répondant aux objectifs de la recherche. Pour mieux comprendre l'état des connaissances des enseignantes, nous nous appuyons des travaux de recherche principalement ceux de Black et Wiliam (1998; 2009) et Suurtamm *et al.* (2016). Pour répondre à la question de savoir comment les enseignantes négocient-elles la mise en application des évaluations.

Résultats et discussion

Formation initiale et continue des enseignants sur l'évaluation formative

Nous avons constaté que malgré la politique sur l'implantation de l'évaluation de formative ou appelée « de processus » du Décret 67 (Mineduc, 2018) les enseignantes ne se sont pas formées à travers un programme formel durant ces derniers dix ans pour ce type d'évaluation de salle de classe. Deux des dix-sept enseignantes participantes déclarent avoir été formées au sujet de l'évaluation des apprentissages. Une des enseignantes avait effectué une maîtrise en évaluation et l'autre avait fait une autoformation sur le sujet. Toutefois, les enseignantes ont déclaré d'utiliser différents types et pratiques d'évaluation. Parmi ceux-ci la rétroaction, l'évaluation diagnostique, l'auto-évaluation, l'évaluation par les pairs et des tâches formatives ont été évoquées. Faisant référence à la rétroaction, une enseignante souligne :

> « (…) en salle de classe, la rétroaction était constante. En regardant et observant directement, tout de suite. Comme on disait avec mes collègues (on peut observer)[5] comment ils tiennent un crayon jusqu'à leur langage corporel, leur aisance avec les mathématiques, ça nous renseigne sur ce qu'ils aiment, ce qu'ils n'aiment pas. C'est possible d'interpréter les actions des élèves, et la rétroaction est plus riche autant de façon formelle en disant à l'élève «tu as bien fait ici, on peut changer ici, on peut faire autrement. Qu'est-ce que tu ne comprends pas? Parce que cette partie est plus complexe, pourquoi tu ne comprends pas?» Même le pair peut m'aider dans ce cas-ci. »

5. Nous avons voulu garder les explications des enseignants, toutefois, nous a apparu nécessaire d'ajouter en parenthèses plus de détails dans leurs phrases pour les rendre plus claires.

Cette enseignante avait montré, une bonne compréhension des différentes intentions de l'évaluation, nonobstant, ses connaissances sur la rétroaction restent limitées. La deuxième enseignante nous a partagé différentes stratégies mises en place en salle de classe comme la création de grilles d'évaluation, l'évaluation par les pairs, la rétroaction et l'autoévaluation.

> « Je pars toujours avec l'évaluation diagnostique et souvent, je ne la présente pas comme une évaluation diagnostique […] Et parfois ça (l'évaluation diagnostique) me permet de savoir que je peux avancer un peu plus de ce qui m'est exigé, parce que parfois ils (les élèves) ont le niveau plus élevé. […] et parlant de l'autoévaluation, l'autoévaluation m'a été grandement utile, surtout dans la partie même de l'apprentissage, la partie émotionnelle des enfants, car elle m'a servi pour développer leur estime et la partie de l'honnêteté [...]. »

Concernant la formation initiale, deux enseignants qui venaient de compléter leurs programmes de formation à l'enseignement[6] affirment avoir reçu un cours sur l'évaluation. Le cours a été centré sur la création d'instruments d'évaluation sommative. L'un d'eux témoigne des intérêts de cette formation en ces termes:

> « Il y a eu un cours d'évaluation où on y enseignait seulement comment faire les épreuves (institutionnelles). Les types d'épreuves, on les a faits (appris) dans le cours qui avait des épreuves de sélection multiple, des questions ouvertes à réponse courte à développement, qui m'ont aidé (les informations apprises sur les évaluations) tout de même pour ensuite faire mes évaluations. »

Nous avons constaté lors des entretiens des dix-sept enseignantes, l'utilisation de l'évaluation formative comme la rétroaction, l'autoévaluation, l'évaluation par les pairs et les tâches formatives appelées billets de sortie[7], ainsi que l'évaluation diagnostique. En revanche, ces pratiques ne se rapportent pas forcément au cadre de référence. La façon dont ces pratiques ont été décrites nous montre des lacunes conceptuelles et des contradictions. L'évaluation diagnostique est désignée et appliquée au début de l'année scolaire et suivie d'une rapide mise à niveau dans certains cas, mais principalement elle est utilisée pour diagnostiquer les élèves qui ne possèdent pas les connaissances et les habiletés requises pour répondre aux attentes de leur niveau. Cette information permet de déterminer les élèves qui seront dérivés au service d'accompagnement. Cependant, durant l'année, ces enseignantes ne pratiquent pas l'évaluation diagnostique pour évaluer les connaissances préalables au début de chaque unité d'enseignement. La rétroaction n'est faite qu'en fonction de ce que l'élève comprend ou pas, spontanément, sans nécessairement s'appuyer des résultats d'apprentissage ni des critères d'évaluation associés. L'autoévaluation se centre principalement sur les aspects cognitifs

6. Le programme de formation à l'enseignement élémentaire correspond à un baccalauréat de 3 ans, plus 1 an de spécialisation dans un cycle et un domaine.

7. Les billets de sortie sont un outil d'évaluation formative qui permet aux enseignants d'évaluer dans quelle mesure les élèves comprennent ce qui leur est enseigné en classe. Cet outil peut être utilisé quotidiennement ou hebdomadairement.

et émotionnels de l'apprentissage, sans inclure les contenus mathématiques, par exemple, des questions comme : j'ai suivi les étapes; j'ai compris la question; j'aime l'activité. Les expériences collectées des enseignantes indiquent l'existence d'un écart important entre les politiques gouvernementales (Décret 67) et la formation initiale et continue en termes d'évaluation des apprentissages.

Conceptions des enseignants sur l'évaluation formative

Prise de conscience de la validité et fiabilité des évaluations

Déterminer les conceptions des enseignants au sujet de l'évaluation a été assez ambitieux dans le cadre de cette recherche. Nonobstant, nous croyons avoir rencontré des indices qui nous permettent de déterminer que les enseignantes ont un certain degré de compréhension des différents buts ou intentions de l'évaluation. La prise de conscience de la validité et fiabilité des évaluations (Davies, 2007; Sayac 2017; Suurtamm *et al.*, 2016) a été évoquée par rapport à l'évaluation nationale et aux évaluations institutionnelles. L'écart entre les réels apprentissages accompagnés d'une diversification des stratégies et le modèle institutionnel d'évaluation (QCM) a été formulé par des enseignantes. Étant donné que les évaluations institutionnelles de fin d'unité thématique sont créées par un groupe externe à l'institution, les enseignants ressentent une dichotomie entre la manière qui le contenu a été enseigné et évalué dans les évaluations sommatives. Nous entendons qu'il y a une distinction et une association entre apprentissages de processus et apprentissages de résultat. Le fait d'évaluer le résultat ne leur permettrait pas d'avoir une évaluation valide et fiable des apprentissages. À ce propos, une enseignante s'exprime de la façon suivante : « Je me rends compte que, bien sûr, qu'on laisse complètement le processus de côté au lieu de ça, c'est le résultat et voilà. » Nous avons remarqué d'une part que les enseignantes réalisent que le système évaluatif prédominant l'évaluation sommative ne nourrit pas le processus d'apprentissage chez les élèves. D'autre part, l'évaluation formative n'est pas suffisamment exploitée durant les processus d'apprentissage, même si les enseignantes déclarent s'en servir largement. Nous conjecturons que les enseignantes ont une bonne intuition par rapport aux bénéfices de l'incorporation de l'évaluation formative dans les pratiques d'enseignement.

Les dilemmes dans la négation des évaluations formatives et sommatives

La catégorisation par dilemmes nous a permis de mieux comprendre les discours des enseignantes par rapport aux tensions qu'ils vivent au moment d'équilibrer les évaluations sommatives et formatives, et d'articuler les pratiques d'enseignement et d'évaluation. Nous nous sommes servi des réponses des entretiens semi-dirigés pour connaître la réalité professionnelle de ces enseignantes.

Les dilemmes conceptuels font référence au questionnement des enseignantes pour comprendre et faire des liens entre les pratiques d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques et les évaluations. Nous avons pu observer que les enseignantes avaient de l'intérêt et de la motivation pour améliorer leurs actions, mais nous n'avons pas remarqué un discours critique réflexif sur

leurs pratiques. Exceptionnellement, deux enseignantes nous ont fait part de l'intégration de deux pratiques d'évaluation : l'utilisation des résultats d'apprentissage et de critères ou d'indicateurs de réussite. Nous n'avons pas trouvé dans le discours des enseignants des arguments qui démontrent explicitement un besoin d'articulation entre pratiques d'enseignement des mathématiques et évaluation formative. Le groupe des enseignantes a vivement partagé leurs expériences associées à l'intégration de l'évaluation formative, mais sans faire des liens avec l'aspect multidimensionnel des mathématiques et l'évaluation formative.

Les dilemmes pédagogiques montrent les réflexions des enseignants concernant à la création des tâches, la proposition des stratégies et l'élaboration des instruments d'évaluation, entre autres. Les enseignantes nous ont fait part de leurs pratiques avant et après la crise sanitaire liée à la pandémie. Elles nous ont aussi partagé la façon dont l'institution planifie et évalue de manière standardisée, les apprentissages des élèves par année scolaire. Les participantes s'organisent par niveau d'étude pour chaque année. Il y a un enseignant responsable d'élaborer le contenu du cours, les activités associées et les évaluations formative et sommative. Les critères d'échelles évaluatives sont décidés par département, à raison d'une échelle pour tous les niveaux. Les marges de manœuvre des enseignantes se trouvent principalement dans la mise en place de l'activité d'enseignement.

Les dilemmes culturels reflètent les changements de la culture de la salle de classe et dans l'institution sur l'évaluation. Nous avons remarqué des réalités très différentes entre les enseignantes. Toutefois, la plupart d'entre elles ressentaient des pressions institutionnelles associées à la notation :

> « Ici, on a un système de notation très stricte. Le processus exige à l'élève, on lui exige, on lui exige et en plus encore quand on doit passer le SIMCE[8]. Alors, ils (les élèves) sont constamment réactifs : que l'évaluation est quelque chose de mal, que l'évaluation c'est dangereux, c'est risqué. »

Les dilemmes politiques ont été fréquemment évoqués par les enseignants. Des tensions liées à la culture évaluative standardisée continuent d'être présentes chez les enseignants :

> « Nous sommes dans une école très béhavioriste. On ne peut pas la changer, je souhaiterais que nous puissions dire, et si l'on fait une évaluation d'une autre manière. Elle ajoute également « pour moi, le développement (des tâches) est important, mais à l'école, ils le négligent. »

Des principes associés à l'évaluative formative ont été exprimés par les enseignants, notamment, les fonctions cognitives qui sont largement exploitées dans le processus d'apprentissage. Les élèves jouent le rôle d'autoévaluateur et de coévaluateur, en plus de leur fonction d'étayage dans la rencontre des savoirs. La négociation entre les types d'évaluations semble provoquer des dilemmes

8. SIMCE (Système de mesure de la qualité de l'Éducation). C'est le système national d'évaluation des acquis d'apprentissage fondé en 1968 dans le but d'institutionnaliser diverses initiatives dans le domaine de l'évaluation et des politiques éducatives.

qui viennent de diverses sources. Nos données collectées ne nous permettent pas de peser l'impact d'un dilemme sur l'autre, cependant, les tensions associées aux résultats des évaluations standardisées institutionnelles et nationales empêcheraient l'implémentation de l'évaluation formative. Des remarques de ce type se répètent lors des entretiens « Nous entraînons les enfants comme pour des tests standardisés. Donc toujours avec une alternative (QCM) et ça » « Malheureusement, on marque une réponse et on ne voit pas l›évolution de l›exercice et surtout maintenant sur l›écran (cours en ligne) on leur envoie un résultat. »

Les analyses fournies dans l'étude révèlent des tensions dans la quête d'équilibre entre les évaluations formatives et sommatives. Les réflexions posées sur les connaissances des enseignants à l'égard des défis rencontrées dans leurs pratiques peuvent alimenter les réflexions pédagogiques quant à l'impact des évaluations standardisées sur les pratiques des enseignants et les apprentissages mathématiques chez les élèves.

Conclusions

Nous avons bien identifié l'existence des pratiques d'évaluation formative. Les enseignants témoignent l'utilisation constante de l'évaluation formative. Pourtant à la lumière du cadre conceptuel (Black & Wiliam 1998; Davies, 2008; Black et Wiliam, 2009; Wiliam, 2015; NCTM, 2014; Suurtamm *et al.*, 2016), nous remarquons que les concepts et les pratiques en lien méritent d'être approfondis. Les travaux de Pérez-Cotapos et Taut (2016) révèlent à suffisance le peu d'expérience dont les enseignants font preuve dans la mise en pratique du processus de l'évaluation formative. En effet, même s'ils affirment utiliser cette évaluation dans leurs salles de classe, les résultats des analyses effectuées par ces chercheurs mettent en lumière le fossé qui existe entre leurs déclarations et leurs pratiques sur le terrain. Il en ressort donc que les pratiques évaluatives effectuées par les enseignants observés n'intègrent pas des rétroactions adéquates aux élèves. Les enseignants ressentent fortement la pression pour bien réussir les tests standardisés. Considérant le cadre référentiel sur l'évaluation formative, on note l'utilisation de la rétroaction au mieux dans les pratiques pédagogiques. L'évaluation sommative s'accompagne principalement de pratiques pédagogiques traditionnelles, en mettant l'accent sur la résolution procédurale. Nous émettons l'hypothèse que tant qu'il n'y aura pas d'équilibre entre les évaluations, avec une forte concentration sur le type standardisé, les enseignants auront du mal à faire évoluer leurs pratiques et à comprendre la relation et le potentiel des évaluations formatives.

Références

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy, and Practice, 5*(1), 7-74.

Black, P. & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*(1), 5–31.

Black, P., Wilson, M., et Yao, S.-Y. (2011). Road Maps for Learning: A Guide to the Navigation of Learning Progressions. *Measurement (Mahwah, N.J.), 9*(2-3), 71–123. https://doi.org/10.1080/15366367.2011.591654

Clark, I. (2012). Formative assessment: assessment is for self-regulated learning. *Educational Psychology Review, 24*, 205–249. DOI: 10.1007/s10648-011-9191-6

Davies, A. (2008). *L'évaluation en cours d'apprentissage*. 2e édition. Les éditions de la Chenelière inc.

Eizadirad, A., Martinez, X., Ruminot C. (2016). Analysis and Comparison of the Educational Systems Of Accountability Of Ontario, *Canada And Chile: A Reflection On Quality of Education and Accountability. Interfaces Brasil/Canada, 16*(2), 54-88.

Earl, L. M. (2012). *Assessment as learning: Using classroom assessment to maximize student learning*. Corwin Press.

Fagnant, A., et Goffin, C. (2017). Les conceptions des futurs enseignants du secondaire en matière d'évaluation : entre un accord de principe et une vision limitée de l'évaluation formative. *Mesure et évaluation en éducation, 40*(1), 1-32. doi:10.7202/1041002ar

Gascón, J., & Nicolás, P. (2019). *Research ends and teaching ends in the anthropological theory of the didactic. For the learning of mathematics, 39*(2), 42 – 47.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario (2010), *Faire croître le succès: Évaluation et communication de rendement des élèves fréquentant les écoles de l'Ontario*.

Ministère de l'Éducation du Chile. (2018). Decreto 67. Aprueba normas mínimas nacionales sobre evaluación, calificación y promoción y deroga los decretos exentos nº 511 de 1997, nº 112 de 1999 y nº 83 de 2001, todos del ministerio de educación. https://www.bcn.cl/leychile/navegar?i=1127255&f=2018-12-31

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Nicol, D. J., et Macfarlane-Dick, D. (2006). Formative assessment and self-regulated learning: A model and seven principles of good feedback practice. *Studies in Higher Education, 31*(2), 199–218.

Panadero, E. et Broadbent, J. (2018). Developing evaluative judgement: A self-regulated learning perspective. Dans D. Boud, R. Ajjawi, P. Dawson & J. Tai (Eds.), *Developing évaluative judgement: Assessment for knowing and producing quality work* (pp. 81-89). Abingdon: Routledge.

Pérez-Cotapos, M. A., & Sandy Taut. (2016). Adaptación y Pilotaje de un Portafolio Para Evaluar Prácticas de Evaluación de Aprendizajes en el Aula en Profesores de Matemática de Segundo Ciclo Básico. Psykhe, 25, 1–14. https://doi.org/10.7764/psykhe.25.1.681

Radford, L. (2020). Les finalités éducatives scolaires en mathématiques : présupposés, égarements et quelques pistes pour retrouver la voie [The educational aims of school mathematics: presuppositions, diversions and some ways to find the way back]. Dans Lenoir,Y., Bourque, J., Hasni, A.,Nagy, R. et Priolet, M. (Eds.). *Les finalités éducatives scolaires. Pour une étude critique des approches théoriques, philosophiques et idéologiques. T. 2 : Conceptions des finalités et des disciplines scolaires chez des enseignants du primaire. Une étude comparative internationale* (pp. 353-371).

Ruminot, C. (2014) *Effet d'un système national d'évaluation sur l'enseignement des mathématiques : Le cas de Simce au Chili*. Thèse de doctorat, Paris: IREM de l'Université Paris 7

Ruminot, C. (2017). Los efectos adversos de una evaluación nacional sobre las prácticas de enseñanza de las matemáticas : Caso de SIMCE en Chile. *Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa. 10*(1) 69-87.

Sayac, N. (2017). Étude des pratiques évaluatives en mathématiques de 25 professeurs des écoles français : une approche didactique à partir de l'analyse des tâches données en évaluation. Mesure et évaluation en éducation, 40(2), 1–31. https://doi.org/10.7202/1043566ar

Suurtamm, C. & Koch, M.J. (2014), Navigating dilemmas in transforming assessment practices: experiences of mathematic teachers in Ontario, Canada. *Education Assessment, Evaluation and Accountability, 26*(3), 263-387.

Suurtamm, C, Denisse R., Thompson Rae Young Kim, Leonora Diaz Moreno, Nathalie Sayac, Stanislaw Schukajlow Edward Silver, Stefan Ufer, Pauline Vos (2016), *Assessment in Mathematics Education*, ICME- 13 Topical Surveys.

Wiliam, D. (2015). Assessment: A powerful focus for the improvement of mathematics instruction. In C. Suurtamm & A. Roth McDuffie (Eds.), *Annual perspectives in mathematics education: Assessment to enhance teaching and learning* (pp. 247–254). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematic

Windschitl, M. (2002). Framing constructivism in practice as the negotiation of dilemmas: An analysis of the conceptual, pedagogical, cultural, and political challenges facing teachers. *Review of educational research, 72*(2), 131-175.

Titre: De la faible performance en mathématiques au décrochage scolaire : quelle approche théorique d'analyse ?

Auteurs: SALIFOU Mohamadou et ALLADATIN Judicaël

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1015 - 1020

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

De la faible performance en mathématiques au décrochage scolaire : quelle approche théorique d'analyse ?

SALIFOU[1] Mohamadou – ALLADATIN[2] Judicaël

Résumé – Au cours des dernières années, un certain nombre de théoriciens ont examiné le sentiment d'appartenance des élèves dans le contexte scolaire, afin de mieux comprendre leur relation positive avec le rendement scolaire. Pour approfondir la compréhension de ces processus, nous proposons en nous appuyant sur le modèle d'Anderman et Freeman (2004) d'évaluer le rendement des élèves en mathématiques et voir comment ce sentiment peut amener un élève à décrocher.

Mots-clefs : performance mathématique, décrochage scolaire, engagement scolaire

Abstract – In recent years, a number of theorists have examined students' sense of belonging in the school context, in order to better understand its positive relationship with academic achievement. To deepen the understanding of these processes, we propose the model of Anderman and Freeman (2004) to evaluate the performance of students in mathematics and see how this feeling can cause a student to drop out.

Keywords: mathematical performance, school dropout, school commitment

1. Institut des Sciences de l'Education, Maroc, salifou.mohamadou@um6p.ma

2. Institut des Sciences de l'Education, Maroc, judicael.alladatin@um6p.ma

Performance en mathématiques et décrochage scolaire : proposition d'une approche

Modèle d'Anderman et Freeman (2004)

Anderman et Freeman (2004) présentent un modèle partiellement médiatisé (la mémoire de modèle expliquerait, en partie seulement, l'influence de la menace du stéréotype sur la performance en mathématiques) modélisant selon eux le mécanisme psychologique qui sous-tend la relation entre le sentiment d'appartenance, l'engagement scolaire, les affects positifs et le rendement scolaire (figure 1). Pour ces auteurs, le sentiment d'appartenance peut influencer directement une manifestation de la motivation comme l'engagement scolaire. Ce sentiment peut également avoir un effet indirect sur l'engagement scolaire, notamment par le biais de l'effet de médiation partiel des affects positifs des élèves (Anderman & Freeman, 2004). Anderman et Freeman (2004) suggèrent qu'une fois l'engagement scolaire suscité par le sentiment d'appartenance et les affects positifs, cette manifestation de la motivation (engagement scolaire) peut, à son tour, contribuer positivement au rendement scolaire.

Par ailleurs, la grande majorité des recherches qu'Anderman et Freeman (2004) ont recensées font peu de distinctions entre les trois types d'engagements scolaires soit, l'engagement comportemental, l'engagement affectif et l'engagement cognitif. L'engagement comportemental entraîne une conduite positive comme suivre les règles et adhérer aux normes de la classe, ainsi qu'à l'absence de comportements dérangeants. L'engagement affectif, de son côté, renvoie aux sentiments, à l'intérêt, aux perceptions et aux attitudes envers l'école. Enfin, l'engagement cognitif se rapporte à l'investissement psychologique dans l'apprentissage des matières scolaires (Fredricks, Blumenfeld, & Paris, 2004). La figure 1 présente une première tentative d'intégration des différentes composantes de l'engagement scolaire au sein d'un modèle de base qui intègre le sentiment d'appartenance et la réussite. Le modèle de la présente étude découle notamment des travaux d'Anderman et Freeman (2004) et se base sur la recension des écrits menée par Baumeister et Leary (1995). Selon ce modèle, les affects positifs sont susceptibles de médiatiser positivement la relation entre le sentiment d'appartenance et les processus motivationnels, dont l'engagement scolaire découpé en trois types : affectif, cognitif et comportemental.

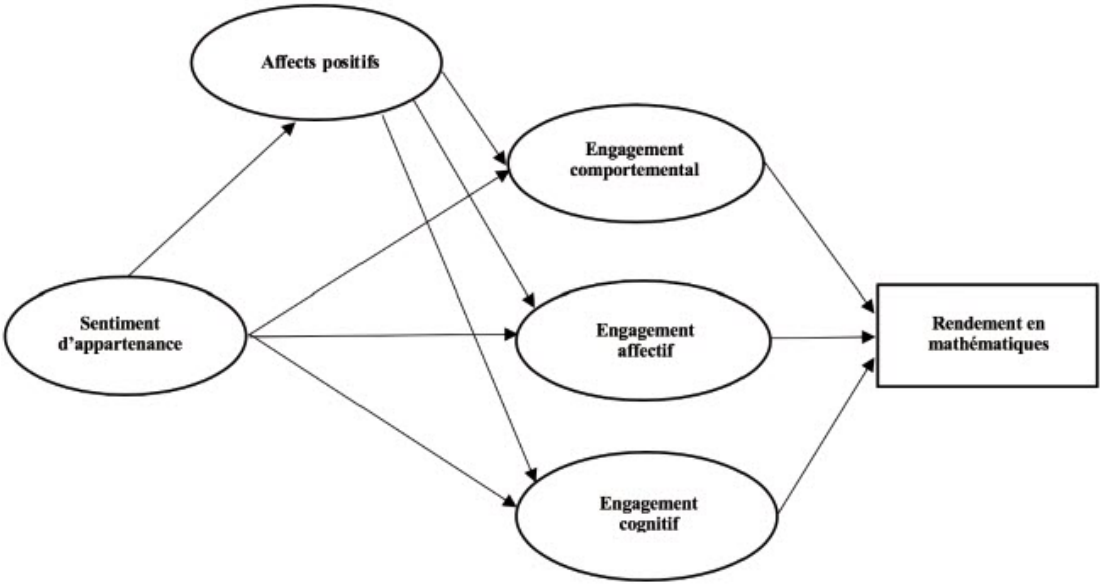


Figure 1- Modèle de base de la présente étude inspirée des travaux de Baumeister et Leary (1995).

Relation entre la performance mathématique et le décrochage scolaire

L'idée est de partir du modèle théorique d'Anderman et Freeman (2004) qui montre les déterminants du rendement scolaire en fonction de différents groupes de variables prédicatrices ; certaines de ces variables (le sentiment d'appartenance, l'expression des affects positifs) présentent plutôt des liens indirects avec le rendement scolaire, alors que d'autres variables (les trois types d'engagements scolaires des élèves) indiquent des liens directs (et proximaux) avec le rendement en mathématiques des élèves. La performance en mathématique à son tour peut être à la cause de la déception de l'élève et par ricochet conduire ce dernier au décrochage. Ce que corrobore les résultats obtenus par Sénécal et Vallerand (1992) et Fortin, Marcotte, Diallo, Royer & Potvin (2012) lorsqu'ils parviennent au fait que les décrocheurs présentent un sentiment de compétence moins élevé en français et mathématiques que les élèves diplômés. Aussi aboutissent-ils au même résultat avec les élèves ayant un niveau de motivation intrinsèque et une régulation identifiée plus faible que les élèves diplômés et présentent également une plus grande motivation et un plus fort niveau de régulation externe.

Pour ne pas conclure

Ce papier propose modèle théorique d'Anderman et Freeman (2004) qui met en lien certains facteurs (sentiment d'appartenance, etc) au rendement des élèves en mathématique, qui d'après certaines études dont celle de Fortin *et al*. (2012) est un facteur déterminant du décrochage scolaire. Pour cela, une étude longitudinale peut être faite pour le suivi d'une cohorte afin d'évaluer les compétences des élèves de cette cohorte en mathématique. Ainsi, lors de la transition d'un cycle scolaire à un autre (primaire vers le secondaire par exemple) on peut évaluer la chute des performances en

mathématique (et en français éventuellement). Mais avant des indicateurs tels que l'estime de soi de l'élève, son sentiment et appréhension de l'école et des mathématiques, l'accompagnement des parents (même non instruits) sont entre autres des facteurs qui peuvent peser dans la balance de la performance de ce dernier face au décrochage scolaire.

Bibliographie

Anderman, L. H. et Freeman, T. M. (2004). Students' sense of belonging in school. Dans M. M. Pintrich (dir.), *Advances in motivation and achievement: Motivating students, improving schools: The legacy of Caroll Midgley* (vol. 13, p. 27-63). Greenwich, CT : JAI Press. http://dx.doi.org/10.1016/S0749-7423(03)13002-6

Baumeister, R. F. & Leary, M. R. (1995). The need to belong: Desire for interpersonal attachments as a fundamental human motivation. *Psychological Bulletin, 117*(3), 497-529. http://dx.doi.org/10.1037/0033-2909.117.3.497

Fortin, L., Marcotte, D., Diallo, T., Potvin, P., Royer, E. (2013). A multidimensional model of school dropout from an 8-year longitudinal study in a general high school population. *European Journal of Psychology of Education*, n°28 (2), p.563-583.

Fredricks, J. A., Blumenfeld, P. C. et Paris, A. H. (2004). School engagement: Potential of the concept, state of the evidence. *Review of Educational Research, 74*(1), 59-109. http://dx.doi.org/10.3102/00346543074001059

Senécal, C. B., Vallerand, R. J., & Vallières, É. F. (1992). Construction et validation de l'Échelle de la Qualité des Relations Interpersonnelles (EQRI) [Construction and validation of a French scale «Qualité des Relations interpersonnelles» (EQRI)]. *European Review of Applied Psychology / Revue Européenne de Psychologie Appliquée, 42*(4), 315–324.

Titre: L'évaluation-régulation interactive dans la résolution d'un problème sous desmos : tensions entre collecte de traces et guidage

Auteurs: TREMBLAY Mélanie et DELOBBE Anne-Michèle

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1021 - 1037

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

L'évaluation-régulation interactive dans la résolution d'un problème sous desmos : tensions entre collecte de traces et guidage

TREMBLAY[1] Mélanie – DELOBBE [2] Anne-Michèle

Résumé – À partir d'une situation vécue en classe par deux enseignantes, le présent texte met en lumière des tensions portant sur les façons de mener l'évaluation-régulation interactive tout en ayant comme visée de recueillir des traces permettant d'apprécier les compétences mathématiques d'élèves de 15 ans dans la résolution d'un problème sous Desmos.

Mots-clefs : mathématiques ; évaluation ; régulation interactive; résolution de problèmes ; technologie

Abstract –Based on situations experienced in class with two teachers, this communication highlights questions about the ways of conducting interactive assessment-regulation while having the aim of collecting traces to assess the mathematical skills of 15 years old students solving a problem with Desmos.

Keywords: mathematics; assessment; interactive-regulation; problem solving; technology

1. Université du Québec à Rimouski, campus Lévis, Canada, melanie_tremblay@uqar.ca

2. Université du Québec à Rimouski, campus Lévis, Canada, anne-michele_delobbe@uqar.ca

Introduction

Prolongement de nombreuses consultations, au Québec, la Politique d'évaluation des apprentissages (MEQ, 2003) est motivée par la nécessité de se donner une vision commune de l'évaluation qui soit en conformité avec l'approche par compétences promue dans le programme de formation implanté quelques années auparavant. Dans ses orientations, le MEQ préconise une évaluation des apprentissages au service de l'élève, il renforce l'importance de la régulation et de l'exercice du jugement professionnel de la personne enseignante tant pour rendre compte des acquis que pour offrir du soutien aux élèves. Plus d'une décennie plus tard, le déploiement du Plan d'action numérique en éducation et en enseignement supérieur (PAN) articulé sous 12 dimensions de la compétence numérique (MEES, 2018) devient un levier supplémentaire pour les enseignants pour enrichir les pratiques évaluatives menées en classe. La mise en œuvre du PAN pousse les établissements scolaires du Québec à innover et à créer des environnements ainsi que des situations d'apprentissage et d'évaluation, où chaque élève pourra non seulement développer sa compétence numérique, mais aussi où l'enseignant·e pourra recourir au numérique pour évaluer. Cela exige de la personne enseignante qu'elle démontre elle-même des habiletés, parfois nouvelles, en matière d'utilisation du numérique. Échelonné sur trois ans, le projet de recherche-action ÉCRAN (Évaluation Collaborative Réussie des Apprentissages par le Numérique) a comme premier objectif de créer de nouveaux alignements dans la dynamique d'enseignement-apprentissage-évaluation[3] (E-A-E) appuyée par des technologies (ou plateformes) numériques. L'innovation y étant centrale, un processus de codesign est retenu. Ainsi, au cours de la première année du projet, des personnes enseignantes du primaire et du secondaire et des membres de l'Équipe de recherche-intervention (ÉRI) ont coélaboré et mis en oeuvre des séquences d'E-A-E qui exploitent les possibilités du numérique (Voogt *et al.*, 2015) afin d'examiner les conditions d'équité tout en augmentant un tant soit peu le « retour sur l'investissement » (ROI). Le ROI est ainsi perçu non pas uniquement en termes de réussite confirmée à l'aide d'un résultat chiffré, mais dans l'expression de l'engagement des élèves dans les processus de résolution de problèmes en collaboration qui permettront de reconnaitre et de rendre compte de la progression de manières d'interroger et d'investiguer les situations qui sont propres à chaque discipline. Pour l'équipe de recherche et d'enseignant·e·s s'intéressant aux mathématiques, il s'agit alors de concevoir et de piloter des situations qui encourageront le travail de modélisation, de généralisation ou d'argumentation mathématique en reconnaissant l'importance de la communication entre pairs. Or, pour la personne enseignante, rendre compte de l'agir mathématique des élèves en variant les modalités d'évaluation retenues et offrir une régulation constructive (Rodet, 2000) n'est pas simple. La dernière exige du même souffle de se familiariser avec de nouvelles stratégies de résolution qui n'étaient pas nécessairement anticipées et qui émergent par le recours au numérique. Ce sont des enjeux qui motivent à eux seuls

3. Lorsqu'il s'agit de rendre compte de l'évaluation-soutien aux apprentissages, les pratiques évaluatives et pratiques d'enseignement s'entremêlent. Adoptant une posture socio-historico-culturelle pour approcher les phénomènes de la classe, nous privilégions l'expression de dynamique d'enseignement-apprentissage-évaluation en qu'activité partagée par la personne enseignante et les élèves.

le travail de concertation entre les équipes enseignantes et l'ERI pour ainsi réfléchir ensemble sur ces objets. Le codesign collaboratif amorcé aborde à la fois la conception de l'évaluation et la place de la rétroaction, l'activité mathématique visée chez les élèves en portant une attention particulière aux nouvelles possibilités du numérique et au recueil de traces pour mieux apprécier les compétences des élèves. Ces composantes de réflexion du codesign ne vont pas de soi. Dans un précédent article (Nadeau-Tremblay *et al.*, 2022), à partir de l'analyse de récits d'enseignants, nous avons fait ressortir cinq principaux enjeux (innovation, rapport aux savoirs, institutionnel, alignement enseignement-apprentissage-évaluation et valeur ajoutée) et cinq catégories de défis (réciprocité, interprétation du curriculum, défi d'apprentissage pour les personnes enseignantes, défis didacticopédagogiques et technologiques) avec lesquels, lors de la première année du projet, elles ont eu à composer.

Nous abordons, dans cette communication, des aspects du travail de réflexion mené avec deux enseignantes de mathématique en 4e secondaire (élèves de 15 et 16 ans) au sujet d'un des enjeux d'alignement E-A-E portant sur l'exercice du jugement évaluatif. Ce dernier est approché sous l'angle du défi de réinterprétation et d'application des critères d'évaluation des compétences mathématiques proposées dans le programme québécois alors que ces enseignantes avaient aussi comme objectif de recueillir des traces permettant d'apprécier la compétence « Résoudre une situation-problème » à partir d'un problème à résoudre sous *Desmos*. La mise en lumière de leur façon de mener l'évaluation-régulation interactive alors qu'elles circulent d'équipe d'élèves en équipe d'élèves est l'un des principaux objets discutés lors des échanges réflexifs. Le cadre conceptuel qui suit expose ce qui soutient les analyses des activités de la classe ainsi que les réflexions partagées avec les enseignantes. Si on veut les amener à apprécier les compétences des élèves alors que ces derniers résolvent des problèmes en collaboration à l'aide du numérique, encore faut-il réfléchir à la conception que l'on se donne de l'évaluation et que l'on définisse ce que l'on souhaite évaluer. Dans ce dernier cas, on décidera si l'on portera notre attention uniquement sur les traces écrites ou si l'on souhaite plutôt apprécier le processus dynamique de résolution qui s'exprime dans les conversations des élèves et avec l'enseignante sous la médiation des outils.

Cadre conceptuel

La démarche d'évaluation en soutien aux apprentissages

Qu'il s'agisse de rendre compte des acquis à un instant donné ou de soutenir les apprentissages, le processus d'évaluation devrait répondre à l'objectif d'évaluation fixé préalablement[4]. Il faut ainsi que l'enseignant planifie la nature des apprentissages visés (p.ex. connaissances, compétences), la façon de les évaluer (p.ex. test papier-crayon, situation authentique) et à quoi serviront les informations recueillies (p.ex. décider d'un niveau de compétence, cumuler des traces). Dans une démarche

4. Cet objectif bien que pouvant être énoncé au préalable n'est pas protégé de nouveaux objets d'évaluation qui pourraient émerger en cours d'action lors des interactions entre enseignant·e·s et élèves.

d'évaluation en soutien aux apprentissages (Allal et Laveault, 2009), l'enseignant·e doit recueillir différentes informations sur les apprentissages de sorte à utiliser celles-ci pour aider les élèves à progresser (Wiliam, 2011). L'évaluation y est ainsi vue non pas uniquement comme une démarche formelle (p.ex. résolution de situations-problèmes écrites, questionnaire), mais également comme une démarche informelle (p.ex. recueil d'informations via des observations pendant la réalisation d'un problème ou par le biais d'espace où il est possible de revoir les actions posées par des élèves résolvant un problème en collaboration) qui se déroule de façon continue (Mottier Lopez, 2015a).

Dans cette perspective de l'évaluation-soutien aux apprentissages, Mottiez Lopez (2015b) évoque que l'évaluation et la régulation sont coconstitutives l'une de l'autre. D'où l'importance de mieux comprendre cette évaluation-régulation interactive qui va au-delà de la seule notion de rétroaction. Pour mieux appréhender la nature du guidage de l'enseignante dans les séquences interactives retenues pour leur fonction de soutien formatif à l'activité d'apprentissage de l'élève, Mottiez-Lopez (2015b) a développé un outil prenant la forme d'un continuum. Ce dernier aborde la nature du guidage et pour lequel elle retient cinq catégories de participation guidée où les conduites verbales d'initiation et de réponses sont qualifiées selon qu'elles soient de l'ordre de la restitution des savoirs en jeu ou plutôt décrites « à développement ». Dans le premier cas, elles sont « sous le contrôle de l'enseignant·e » qui mène le questionnement. Dans le second cas, le contenu de la discussion n'a pas été désigné préalablement par la personne enseignante, laquelle construit alors à partir des propos des élèves. Ainsi sur le continuum proposé, sous un pôle, nommé guidage ciblé, la gestion est sous le contrôle quasi exclusif de l'enseignant (p.ex. l'enseignant·e donne des consignes sans attendre de réponse verbale des élèves). À l'autre pôle, elle réfère à un guidage dit ouvert alors qu'il y a gestion partagée avec les élèves des interactions et de la structuration des contenus de savoir (Voir en Annexe 1, le continuum de Mottier-Lopez). Plus le guidage est ouvert, plus l'enseignant·e devra recourir au questionnement et à la reformulation dans le processus partagé visant les avancées des savoirs en jeu. Les capacités d'analyse des raisonnements mathématiques en cours d'élaboration sont ainsi fortement sollicitées. Dans le cadre du projet ÉCRAN, la motivation du guidage à mettre de l'avant a été approchée en interrogeant le rapport aux mathématiques des enseignant·e·s pour ainsi se donner une vision commune de ce que nous nommons l'agir mathématique espéré dans la classe.

Le rapport aux mathématiques – détour vers le programme

Les finalités du programme de mathématique québécois privilégient une conception des savoirs à faire apprendre non plus comme des objets à transmettre et à assimiler (savoir redire, savoir refaire), mais comme des objets dont l'appropriation sera rendue possible par le biais d'une orchestration didactique qui s'apparente à l'activité « véritable » des mathématicien·ne·s et qui se déploie par le développement des compétences mathématiques. La place prépondérante faite à la résolution de problèmes est ainsi articulée tant comme objet d'étude (compétence à développer chez l'élève) que comme formule pédagogique. En nous appuyant sur les propos de différents chercheurs (Ball & Bass, 2003; Boaler, 2003 Lampert, 1992) qui argumentent que la classe de mathématique doit être le lieu

dans lequel les élèves émettent leurs idées, cherchent à les justifier à leurs pairs et à convaincre ces derniers ainsi que l'enseignant·e de la valeur de leurs propos, il a été convenu d'accroître les occasions où les enseignant·e·s apprécient l'expression des compétences de leurs élèves alors que ces derniers interagissent entre eux. La technologie peut contribuer, d'une part, à favoriser la participation espérée des élèves et, d'autre part, à rendre compte de cette participation de façon différenciée comme, avec des outils tels que Virtual Math Team ou Desmos (Tan & Lee, 2018). Cela sera possible pour autant qu'il s'agira d'une visée pour l'enseignant·e.

L'activité d'enseignement-apprentissage-évaluation en mathématique avec le numérique

L'activité d'E-A-E qui se déroule moment par moment exprime « une forme de vie, une énergie qui est formée par les individus dans la poursuite de quelque chose en commun. Une énergie sensible et sensuelle, matérielle et idéationnelle, discursive et gestuelle » (Radford, 2019, p. 3066; traduction libre). Les outils (p.ex. environnement Desmos, règle, calculatrice) qui médiatisent l'activité sont considérés comme des constituantes de celle-ci (Radford, 2011). Différents chercheurs (Hoyles et Noss, 2009; Jackiw et Sinclair, 2009; Rabardel, 1995) qui se sont intéressés à l'intégration d'outils technologiques (p.ex. environnement de géométrie dynamique, simulateurs) expliquent comment leur intégration transforme l'activité d'E-A usuelle et ainsi la nature même des savoirs en jeu. Les outils technologiques (p.ex. traceurs et géométrie dynamique) facilitent certes la coordination de différents registres de représentation d'un même objet mathématique, mais du même souffle, ils donnent lieu à une compréhension du concept unique (Drijvers, Boon et VanReeuwijk, 2011). L'expérience mathématique proposée avec la technologie amène une nouvelle manière de percevoir, de façonner les objets mathématiques. En résolution de problème, le recours au numérique donne lieu à de nouvelles stratégies de résolution qui ne sont pas nécessairement anticipées par l'enseignant·e.

Les critères d'évaluation ministériels

Si les informations recueillies sur les apprentissages des élèves peuvent être obtenues de diverses façons et porter sur des contenus mathématiques de nature différente (connaissances ou stratégies ou généralisation de relations ou de propriétés), leur interprétation peut, elle aussi, se réaliser selon différents procédés (Scallon, 2004). Dans le contexte scolaire, une interprétation basée sur des critères clairement définis et cohérents aux intentions pédagogiques est fortement recommandée (Conseil supérieur de l'éducation, 2018). Le MEQ propose des cadres d'évaluation propres à chacune des disciplines scolaires dans lesquels sont présentés les critères sur lesquels les enseignant·e·s devraient se baser pour interpréter les informations recueillies. Le recours à des critères d'évaluation communs permet d'assurer une certaine uniformité lors de l'interprétation des apprentissages des élèves. En mathématique, les critères associés aux trois compétences sont exposés dans le Tableau 1.

Tableau 1- Critères de compétences

Résoudre une situation-problème	Déployer un raisonnement mathématique	Communiquer à l'aide du langage mathématique*
• Manifestation, oralement ou par écrit, de sa compréhension de la situation-problème • Mobilisation des savoirs mathématiques appropriés • Élaboration d'une solution appropriée • Validation appropriée des étapes de la solution élaborée*	Formulation d'une conjecture Formulation d'une conjecture appropriée à la situation Utilisation correcte des concepts et des processus mathématiques appropriés Mise en œuvre convenable d'un raisonnement mathématique adapté à la situation Structuration adéquate des étapes d'une démarche pertinente Justification congruente des étapes d'une démarche pertinente	Interprétation juste d'un message à caractère mathématique Production d'un message conforme à la terminologie, aux règles et aux conventions propres à la mathématique et en fonction du contexte
* Cet élément doit faire l'objet d'une rétroaction à l'élève, mais ne doit pas être considéré dans les résultats communiqués à l'intérieur des bulletins ◊L'évaluation de la maîtrise des connaissances est prise en compte dans Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques.		

Méthodologie

Le codesign est un processus considéré comme une forme de développement professionnel (Breuleux *et al.*, 2002; Voogt *et al.*, 2015) misant sur l'agentivité des acteur·e·s et au cours duquel les enseignant·e·s, les chercheur·e·s et les [autres professionnel·le·s] travaillent ensemble dans des rôles définis pour concevoir une innovation éducative (Collins, 1999; Roschelle *et al.*, 2006). Les deux enseignantes de mathématiques dont il est question dans le présent texte font partie d'un groupe d'enseignant·e·s accompagné par l'ERI prenant place dans une même école secondaire (nommé site) pour laquelle les cinq enseignant·e·s participants ont plus de quinze ans d'expérience en enseignement et interviennent de la première à la cinquième secondaire. Les deux enseignantes ciblées sont en classe de 4e secondaire auprès d'élèves qui ont eu de grandes difficultés en 3e secondaire. Elles collaborent dans la sélection de situations et échangent régulièrement. Avant que ne débute le projet, elles précisent ne pas ou peu recourir aux technologies dans leurs activités d'enseignement-apprentissage en mathématique. Aucune n'avait d'ailleurs envisagé l'usage du numérique aux fins d'évaluation bien que ce soit à leur demande que ce site a été choisi puisque l'évaluation était au cœur de leurs préoccupations. Le travail des élèves en équipe était utilisé de façon sporadique dans chacune des classes. Au cours de la première année, quatre rencontres ont eu lieu, la directrice de l'école et la conseillère pédagogique en mathématique se sont ajoutées aux enseignant·e·s. Les premiers temps de l'accompagnement ont été consacrés 1) à la compréhension du rapport aux savoirs, notamment sur « qu'est-ce que faire/apprendre des mathématiques? », 2) aux objets mathématiques et aux tâches retenus aux fins d'apprentissage/évaluation et 3) au choix des technologies en appui aux fins de collaboration entre les élèves. Le volet intervention a consisté à accompagner les enseignant·e·s dans le choix et

dans la mise à l'essai de situations d'apprentissage et d'évaluation. Cela nous a ensemble conduit à réfléchir aux conditions permettant de favoriser le développement des compétences disciplinaires en y intégrant le numérique. L'évaluation promue vise à apporter un soutien à l'élève – qui peut être de nature diverse selon le profil d'apprenant – dans des boucles de régulation interactive en cours d'apprentissage de sorte que chaque élève puisse progresser en vue d'atteindre la réussite. Dans ce prolongement, un accompagnement sur l'élaboration de grilles d'observation de l'activité des élèves a aussi débuté et une attention particulière a été portée à la formulation de rétroactions aux élèves. Afin de faciliter les échanges réflexifs portant sur l'exploitation des situations vécues en classe et plus précisément sur la façon de mener la régulation interactive, l'ERI a assisté à des séances de classe, agissant parfois à la manière d'un enseignant pour ainsi mener des échanges avec des élèves. Le volet recherche a ainsi consisté à repérer, à travers le déroulement de l'action, les enjeux et défis de l'accompagnement d'enseignant·e·s au regard de l'évaluation des apprentissages par le biais de situations de résolution de problèmes en collaboration à l'aide du numérique, lesquels deviennent des motifs des échanges aux rencontres suivantes.

Collecte et analyse de données

Toutes les rencontres où l'ÉRI était impliquée ont été filmées et un compte-rendu de chacune a été rédigé. Il en a été de même pour toutes les séances de classe où l'ERI a participé. Une membre de l'ERI suivait pas à pas l'enseignant·e pour ainsi filmer de façon plus étroite les interactions élèves-en-seignant·e. Afin de mieux cibler les enjeux et défis rencontrés par chacun·e des enseignant·e·s, un codage a été effectué à même les vidéos. Pour les unités de signification identifiées, les verbatim des propos tenus ont été rédigés. Lors des expérimentations sur Desmos, un membre de l'ÉRI a été identifié comme enseignant-collaborateur sur la plateforme de manière à pouvoir visualiser les tâches proposées ainsi que les rétroactions écrites laissées par l'enseignant·e. Pour donner suite à cette expérimentation, les enseignant·e·s devaient rédiger ou raconter, sur le dictaphone de leur téléphone intelligent ou encore à l'aide d'un enregistrement sur leur plateforme visioconférence, le récit de leur pratique limitée à la période enregistrée. Pour chaque tranche d'environ dix minutes, l'enseignant·e était invité·e à cibler l'intention didactique qui portait ses actions, le ou les outils utilisés ainsi que leurs usages. Si de la rétroaction avait été offerte aux élèves, l'enseignant·e devait en préciser l'objet (technique, savoir, stratégies de résolution) ainsi que sa forme (orale ou écrite). L'analyse des données de ces récits, par l'ÉRI, a permis de cibler des objets qui ont alimenté les discussions menées lors de la quatrième rencontre.

Tâche retenue

Les deux enseignantes, nommées ici Mireille et Nicole, ont choisi de proposer une tâche dite créative (source Récit MST, 2021) sur Desmos (géométrie dynamique avec grapheur) où les élèves ont dû représenter la vue de face d'une habitation de leur choix. Cette tâche fut proposée lors de la 3e pé-

riode d'une séquence d'E-A-E ayant pour intention de travailler la distinction des fonctions. Comme les élèves sont considérés faibles, la tâche créative est une occasion pour les deux enseignantes de réinvestir les connaissances sur la fonction du premier degré et rationnelle (forme générale) tout en consolidant le travail de définition du domaine d'une fonction et son impact sur la représentation graphique, objet nouveau du programme de 4e secondaire. Afin d'assurer le réinvestissement de différentes fonctions, les enseignantes ont ajouté différentes contraintes à respecter. Sur Desmos, différents écrans introduisent la tâche (voir annexe 2). Les élèves ont été placés en dyade, chacun devait réaliser son habitation. Sans l'imposer, les enseignantes anticipaient une première phase de représentation de l'habitation sous le format papier/crayon. Cette phase permettrait déjà, selon elles, d'évaluer la reconnaissance des fonctions contraintes imposées lors de la réalisation du schéma. Elles espéraient ensuite que les élèves s'engagent dans la recherche des règles de chacune des fonctions à partir de couples de points déterminés sur leur représentation papier/crayon et qu'ils en déduisent aussi le domaine de chacune des fonctions. Elles anticipaient aussi une autre phase de travail de représentation sous Desmos où la gestion du respect du domaine de chaque fonction serait un enjeu. Ne souhaitant pas intervenir sur les choix de stratégies de modélisation de la représentation de l'habitation, elles avaient précisé avoir planifié ces possibles phases qui exprimeraient le processus de résolution des élèves. Pour soutenir leur jugement évaluatif, les enseignantes ont créé un document d'accompagnement de la tâche qui contient aussi des grilles d'évaluation pour la compétence *Résoudre une situation-problème* (voir annexe 3). Ce document n'a été remis à l'ÉRI que la journée même de l'expérimentation. Les enseignantes précisent d'emblée qu'elles ne croient pas être en mesure de compléter les grilles durant la réalisation de la tâche, mais de plutôt y recourir pour apprécier les productions sous Desmos.

Résultats

Lors de la rencontre préalable au pilotage dans la classe, l'ERI avait invité les enseignantes à réfléchir aux rétroactions que pourrait fournir Desmos dans la réalisation de la tâche. Les enseignantes avaient avancé : la représentation graphique permettant « de voir si les côtés se collent ou s'ils dépassent [en référant ici à l'intersection des segments] à partir des règles entrées. Elles avançaient que deux erreurs pouvaient être possibles : une mauvaise règle entrée ou une mauvaise définition du domaine de chaque fonction.

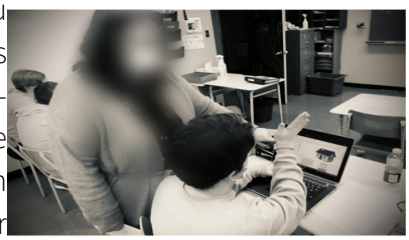
Lors de la réalisation de l'activité, diverses tensions ressortent de l'analyse de l'activité d'E-A-E menée dans chaque classe. Certaines tensions émergent par la comparaison de l'activité des enseignantes et la conception de l'ERI du développement et de l'appréciation de la compétence *Résoudre une situation-problème*. À titre d'exemple, le choix de fournir les grilles d'évaluation aux élèves est en soi une régulation offerte aux élèves. Elle permet certes de partager les critères d'évaluation aux élèves, mais l'ajout de descripteurs sur les attentes pour certains critères vient en quelque sorte miner le travail de modélisation des élèves, des stratégies de résolution (version d'essai dans le Carnet) étant proposées. D'autres tensions sont identifiées dans l'activité d'E-A-E menée par chaque enseignante.

Nous avons sélectionné deux épisodes dans chaque classe qui ont fait l'objet d'une première discussion et dont les tensions exprimées continuent de nourrir les échanges sur ce site ainsi que dans les deux nouveaux sites de l'an 2 du projet qui portent sur l'évaluation de la résolution de problèmes en collaboration à l'aide du numérique. Ces tensions portent sur la possibilité d'évaluer plus d'une compétence selon les interactions réalisées avec les élèves ainsi que la signification des critères initiaux d'évaluation lorsqu'il s'agit de prendre en compte les observations faites en classe alors qu'il y a aussi nécessaire familiarisation de l'outil Desmos pour les élèves, mais aussi émergence de nouvelles stratégies de résolution qui ne sont pas nécessairement anticipées par les enseignantes et enseignants. Ces deux tensions sont présentées sous forme synthétisée.

> *Quand l'affichage d'une fonction sur Desmos ouvre la porte sur l'appréciation du regard covariationnel ou… Quand la compétence retenue aux fins d'évaluation ne semble plus la bonne*

Deux élèves ont réalisé leur croquis sur papier/crayon et interpellent Mireille après avoir entré les points d'intersection de segments sur Desmos. Les élèves précisent éprouver des difficultés à représenter un segment qui constituerait la pente inclinée d'une portion de leur toit de maison. Mireille nous dira après coup qu'elle était intéressée à évaluer si les deux élèves comprenaient bien l'influence du taux de variation d'une fonction du premier degré sur la droite. Elle nous mentionne sentir avoir évalué plus qu'elle ne le fait d'habitude et même plus que ce que les guides d'administration des épreuves ministérielles ne le suggèrent. Elle précise que lorsqu'elle évalue sous format papier, elle a tendance à valider si une règle trouvée est correcte et si la représentation graphique est bien cohérente. En s'étant permise de poser des questions sur l'influence de la variation du taux sous un regard covariationnel, elle sent qu'elle est allée beaucoup plus loin et elle se demande si elle doit en tenir compte dans l'exercice de son jugement, soit au moment de mettre une cote (A à D). En supposant qu'elle allait dans ce sens, une tension s'exprime sur le choix de la compétence retenue aux fins d'évaluation. Elle évoque qu'elle ne sent plus qu'elle porte un jugement sur la compétence *Résoudre une situation-problème*, laquelle mise davantage sur la modélisation du problème (processus de résolution d'un problème selon Verschaffel et De Corte (2008), puisqu'elle va au-delà de la recherche du modèle pour plutôt apprécier la compréhension en profondeur d'un concept, ce qui serait davantage tourné vers la compétence *Déployer un raisonnement mathématique*.

Tout comme sa collègue, Nicole circule dans sa classe, elle répond aux questions de ses élèves ou, à son initiative, elle observe certaines équipes et les questionne sur les stratégies dont ils usent pour respecter les contraintes imposées. Dans la présente situation, l'élève, nommé Tom ici, a inséré une image d'une maison qui agit comme trame de fond. Il a déplacé les axes du plan cartésien pour répondre à la contrainte associée à la représentation dans le premier quadrant. À son arrivée près de l'élève, Nicole constate qu'il coordonne gestes de modification du pas de graduation et déplacement de l'image afin que certains points spécifiques (intersection de sections) se retrouvent sur des coordonnées entières. L'élève semble bien saisir l'influence de la variation de la valeur du taux de variation dans la fonction du premier degré. On assiste à un jeu d'essai-erreur contrôlé alors qu'il augmente la valeur du taux pour obtenir la bonne inclinaison de la droite. Avec sa main positionnée de manière à conserver l'inclinaison de la droite voulue, il balaie le dessus de son écran et cible la valeur approximative de la valeur initiale puis modifie la règle rédigée sur Desmos en incrémentant au dixième puis au centième près pour augmenter en précision. Alors que dans d'autres épisodes de régulation-interactive, on pourrait décrire le guidage de Nicole comme étant plutôt ouvert, Nicole se tourne vers l'autre élève de la dyade et lui demande s'il trouve la stratégie de son collègue adéquate. Ce dernier n'offre pas de rétroaction. Nicole verbalise ses attentes, soit que l'élève cherche la règle à partir des coordonnées de deux points. Son questionnement qui devait d'abord être tourné sur la compréhension de ce que fait l'élève devient alors plus directif pour plutôt imposer la façon de faire attendue. Lors de l'échange avec l'ERI qui a suivi cette séance de classe, Nicole et Mireille discutent de la variété des stratégies de résolution des élèves et de leur impression d'avoir obligé le calcul de taux de variation alors que ce n'était pas nécessaire pour évaluer la compréhension des élèves. Ramenées sur ce que pourraient être les objets d'évaluation-soutien d'apprentissage dans ce contexte particulier de situation avec Desmos, elles s'engagent alors dans la remise en question de leurs attentes. Rapportant la situation avec Tom, Nicole mentionnera avoir été surprise de constater que l'élève avait finalement bien saisi l'influence de la valeur du taux de variation sur l'inclinaison de la droite. Elle avouera toutefois ne pas avoir saisi l'opportunité pour valoriser son travail puisqu'il n'était pas celui anticipé et qu'avant même cet échange de codesign, elle se serait probablement ramenée à rechercher des traces écrites qui témoignent du calcul usuel attendu.



Conclusion

Le recours au numérique pour formuler et résoudre des problèmes peut amener de nouvelles stratégies de résolution mobilisées par l'élève. Bien que la régulation des apprentissages puisse être au cœur de la dynamique d'E-A-E, si les stratégies employées par les élèves ne sont pas anticipées par les personnes enseignantes ou que ces dernières éprouvent des difficultés à évaluer ces stratégies, ces deux aspects peuvent influencer la variation des guidages menés. En ayant comme visée d'évaluer dans une perspective de soutien aux apprentissages, la mise à profit de la rétroaction qu'offrent certains outils et plateformes numériques (coordination équations et représentations graphiques, déplacement de curseurs-paramètres et impact sur l'allure de la courbe) peut alors enrichir la régulation-constructive où l'étude du contrôle considéré partagé entre l'enseignant et l'élève s'appuierait sur les nouvelles opportunités offertes par la médiation de l'outil.

Références

Allal, L., & Laveault, D. (2009). Assessment for Learning : évaluation-soutien d'Apprentissage. *Mesure et évaluation en éducation, 32*(2), 99–106. https://doi.org/10.7202/1024956ar

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Towards a Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching. *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*. 24-28 May, 2002. Edmonton, AB, 3-14.

Boaler, J. (2003) When Learning no Longer Matters – standardized testing and the creation of inequality. *Phi Delta Kappan, 84*(7), 502-506.

Breuleux, A., Erickson, G., Laferrière, T., & Lamon, M. (2002). Devis sociotechniques pour l'établissement de communautés d'apprentissage en réseau : Principes de conception et conditions de réussite résultant de plusieurs cycles d'intégration pédagogique des TIC. *Revue des sciences de l'éducation, 28*(2), 411-434. http://www.erudit.org/revue/rse/2002/v28/n2/007361ar.html?vue=resume

Collins, A. (1999) The changing infrastructure of education research. In E. Lagemann & L. Shulman (Eds.), *Issues in education research* (pp. 289-298). Jossey-Bass.

Conseil supérieur de l'Éducation (CSE) (2018). Évaluer pour que ça compte vraiment, Rapport sur l'état et les besoins de l'éducation 2016-2018, Québec : Le Conseil.

Drijvers, P., Boon, P., & Van Reeuwijk, M. (2011). Algebra and Technology. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary Algebra Education*. (pp. 179-202). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-334-1_8

Hoyles, C., & Noss, R. (2009). The technological mediation of mathematics and its learning. *Human Development, 52*(2), 29-147.

Jackiw, N., & Sinclair, N. (2009). Sounds and pictures: dynamism and dualism in dynamic geometry. *ZDM, 41*(4), 413–426.

Lampert, M. (1992). Practices and problems in teaching authentic mathematics in school. In F. Oser, A. Dick, & J.-L. Patry (Eds.), *Effective and Responsible Teaching: The New Synthesis* (pp. 295-314). NY: Jossey-Bass.

Ministère de l'Éducation du Québec (MEQ). (2003). *Politique d'évaluation des apprentissages*. Gouvernement du Québec.

Ministère de l'Éducation. (2020). *Référentiel de compétences professionnelles de la profession enseignante*. Québec : Ministère de l'Éducation. Récupéré de https://cdn-contenu.quebec.ca/cdn-contenu/adm/min/education/publications-adm/devenir-enseignant/referentiel_competences_professionnelles_profession_enseignante.pdf?1606848024

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MEES). (2018). *Plan d'action numérique en éducation et en enseignement supérieur*. Québec : Gouvernement du Québec. Récupéré de http://www.education.gouv.qc.ca/dossiers-thematiques/plan-daction-numerique/plan-daction-numerique/

Mottier-Lopez, L. (2015a). *Evaluations formative et certificative des apprentissages*. De Boeck.

Mottier Lopez, L. (2015b). Évaluation-régulation interactive : étude des structures de participation guidée entre enseignant et élèves dans le problème mathématique « Enclos de la chèvre ». *Mesure et évaluation en éducation, 38*(1), 89–120. Récupéré de : https://doi.org/10.7202/1036552ar

Nadeau-Tremblay, S., Tremblay, M., Laferrière, T., & Allaire, S. (2022). Les enjeux et défis d'accompagnement d'enseignantes et d'enseignants dans l'évaluation des apprentissages à l'aide de technologies collaboratives au primaire et au secondaire. *Médiations et médiatisations, 9*, 7-27. https://doi.org/10.52358/mm.vi9.249

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01017462/document

Radford, L. (2019). On the Epistemology of the Theory of Objectification. In U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11, February 6 – 10, 2019) (pp. 3062-3069). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Rodet, J. (2000). La rétroaction, support d'apprentissage? *Distances, 4*(4), 45-74.

Roschelle, J., Penuel, W. R., & Schechtman, N. (2006). Co-design of innovations with teachers: Definition and dynamics. *Proceedings of the International Conference of the Learning Sciences*, Bloomington, IN.

Scallon, G. (2004). *L'évaluation des apprentissages dans une approche par compétences*. Éditions du Renouveau Pédagogique Inc.

Tan, S.C. & Lee, A.V.Y. (2018). Online Learning Communities in K-12 Settings. In Voogt J., Knezek G., Christensen R., Lai, KW. (Eds.), *Second Handbook of Information Technology in Primary and Secondary Education. International Handbooks of Education*. Cham :Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-53803-7_48-2

Verschaffel, L., & De Corte, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. In : M. Crahay (Ed.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques : Que disent les recherches psychopédagogiques* (p. 153-176). Louvain-la-Neuve : De Boeck Supérieur.

Voogt, J. M., Laferrière, T., Breuleux, A., Itow, R., Hickey, D. T., & McKenney, S. (2015). Collaborative design as a form of professional development. *Instructional Science, 43*, 259–282. doi: 10.1007/s11251-014-9340-7

Wiliam, D. (2011). What is assessment for learning? *Studies in Educational Evaluation, 37*(1), 3-14.

Annexe 1

Continuum de l'évaluation-régulation interactive tel que proposé dans Mottier-Lopez (2015, p. 100)

Contrôle de l'enseignant (E) de la gestion des interactions, de la gestion des apports et de la structuration du contenu			**Contrôle partagé entre l'enseignant et les élèves** de la gestion des interactions, de la gestion des apports et de la structuration du contenu	
Apports des élèves contraints par un **guidage ciblé** de l'E			Apports des élèves moins contraints, avec un **guidage ouvert** de l'E	
	Initiations/Réponses de restitution		**Initiations/Réponses de développement**	
L'E explique, présente, incite, donne des consignes.	L'E fait lire, sollicite des *éléments présents* (tableau, documents, consignes, etc.) en tant que référence externe à l'élève, une référence « culturelle », construite ou non par la classe.	L'E pose des questions ouvertes ou ciblées sur des éléments *qu'il attend* (mais qui ne sont pas directement présents).	L'E pose des questions ouvertes (dont le contenu *n'est pas de la restitution*) et fait expliciter des réponses. Si nécessaire, l'E fournit de l'étayage ciblé.	En plus, l'E sollicite des *échanges entre élèves*.
Les élèves écoutent.	Les élèves lisent ou citent les éléments présents.	Les élèves apportent des réponses essentiellement de restitution (souvent une seule réponse possible).	Les élèves donnent des réponses variées de développement (souvent plusieurs réponses et raisonnements possibles). Ils explicitent leur raisonnement, démarche, etc.	En plus, les élèves prennent des initiatives, par exemple l'élève pose une question à un pair, le contredit, interpelle l'E, formule des hypothèses, etc.
[PG-A]	**[PG-B]**	**[PG-C]**	**[PG-D (ou D-ciblé)]**	**[PG-E]**
[EV-E]: évaluation exclusivement sous la responsabilité de l'enseignant			**[EV-é+E]**: évaluation partagée avec les élèves	

Figure 1. L'évaluation-régulation interactive comme participation guidée

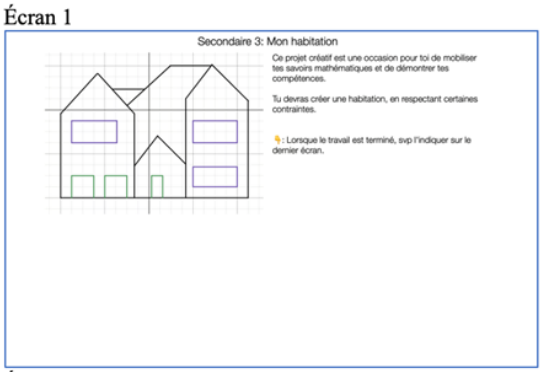
Annexe 2

Écrans Desmos du problème «Mon habitation »

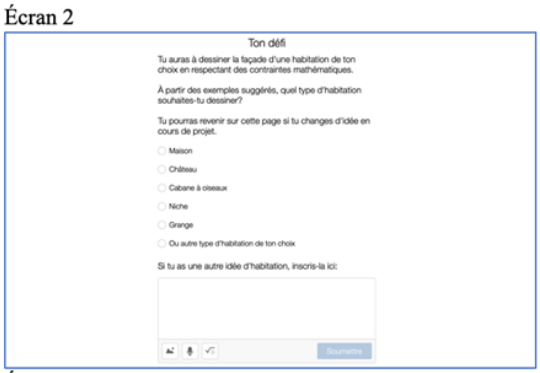
Idée originale de M. J. Simard. Modifiée dans le cadre d'un groupe de travail sur l'évaluation autrement avec le RÉCIT MST par M. C. Paquin. Disponible en ligne :

https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/61b791b54f6f1315d458cbbc?lang

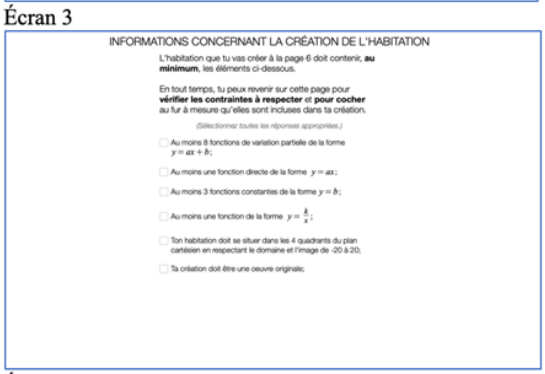
Écran 1



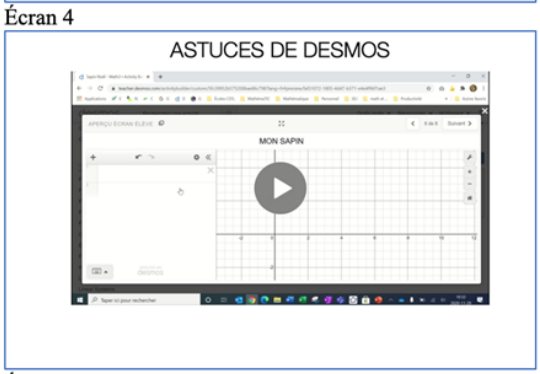
Écran 2



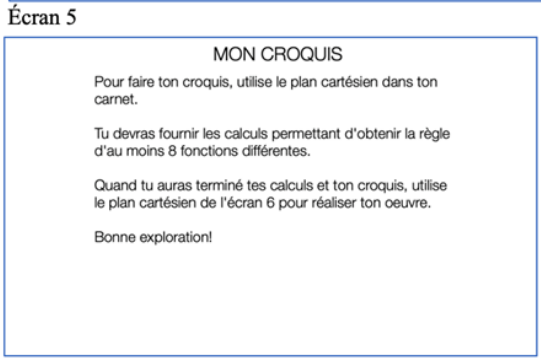
Écran 3



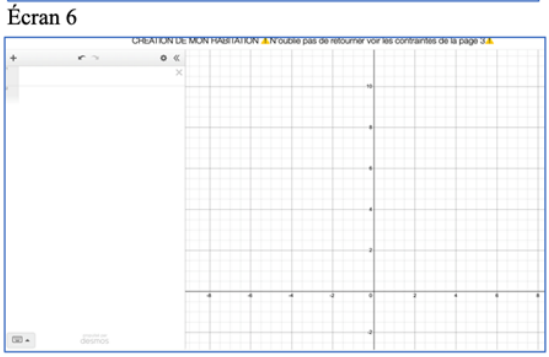
Écran 4



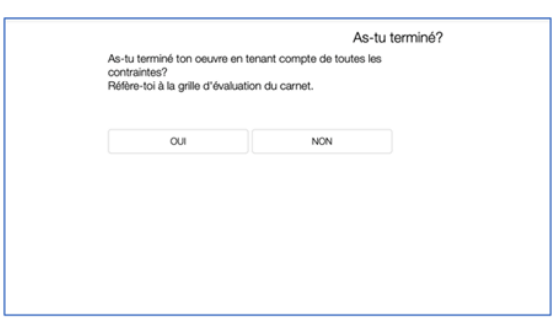
Écran 5



Écran 6



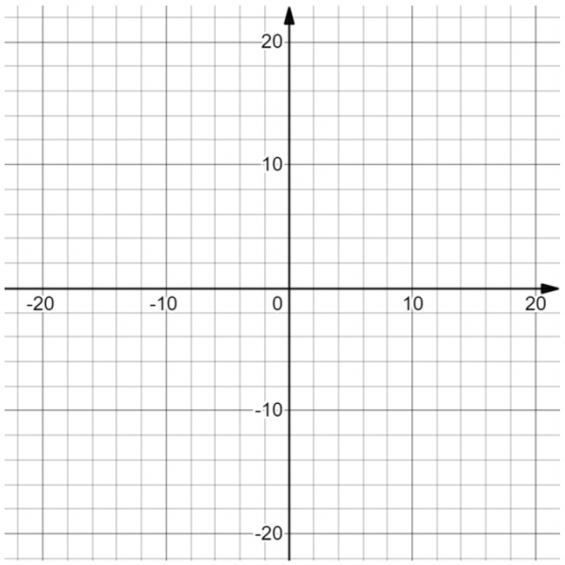
Écran 7



Annexe 3

Document d'accompagnement

Version d'essai



Mon habitation

Projet Desmos

Résolution de problème (CD1)

Nom : _____ sec.3



- Accéder au projet en allant dans votre compte Desmos.
- Sélectionner l'activité : Mon habitation.
- Prendre le temps de bien lire chacune des diapositives.

Bonne création!

Tes démarches :

Règle de la première fonction :	**Règle de la deuxième fonction :**
Règle de la troisième fonction :	**Règle de la quatrième fonction :**
Règle de la cinquième fonction :	**Règle de la sixième fonction :**
Règle de la septième fonction :	**Règle de la huitième fonction :**

Tâche *CD1 : Mon habitation (sec3)*

Grille d'évaluation

Critère 1 : Compréhension du problème	**Bleu**	**Vert**	**Jaune**	**Rouge**
A compris seul(e) les 6 contraintes de la tâche. - V.partielle - V.directe - V.constante - V. inverse - Les 4 quadrants - Création originale				
Planifie, élabore sa démarche - Version d'essai (carnet) - Version finale (Desmos) - Tableau des 8 règles (carnet)				
			Final	

Critère 2 : Mobilisation des connaissances mathématiques
Les contraintes sont-elles respectées ?
Avec ou sans erreur(s) ?

	Bleu	Vert	Jaune	Rouge
Variation partielle		11 et plus	8 à 10	0 à 7
Variation directe		2 et plus	1	0
Fonction inverse		2 et plus	1	0
Fonction constante		4 et plus	3	0
Utilisation des domaines	Aucune erreur ou erreur mineure	Peu d'erreurs	Quelques erreurs majeures	Plusieurs erreurs majeures
Création Originale	Impressionnant	Très bien	Correct	Ça manque d'amour !
Utilisation des 4 quadrants		oui		non
			Final :	

Critère 3 : Élaboration d'une solution appropriée de sa démarche	**Bleu**	**Vert**	**Jaune**	**Rouge**
Les traces de démarche et de calculs sont-elles complètes et organisées ?	Démarche complète et organisée	Démarche adéquate pouvant manquer de détails	Démarche incomplète	Aucune démarche ou complètement désorganisée
			Final :	

Titre: Bilan du groupe de travail n° 11 - Évaluations dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Auteurs: CHANUDET Maud, HOROKS Julie et TREMBLAY Mélanie

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1038 - 1045

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Bilan du groupe de travail nº 11

Évaluations dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques

Responsables
CHANUDET[1] Maud - HOROKS[2] Julie - TREMBLAY[3] Mélanie
Correspondant CS
SADJA-NJOMGANG[4] Judith

L'évaluation peut être utilisée en guise de soutien aux apprentissages, pour certifier les apprentissages (Mottier Lopez, 2015; William, 2011) ou réaliser des analyses comparatives des performances des élèves. Depuis plus d'une décennie, la question de l'évaluation sous une perspective didactique a officiellement donné lieu à la création du réseau thématique EVADIDA, au sein de l'ADMEE[5], et à de multiples travaux de recherche de plus grande envergure (ASSIST-ME[6], FasMed[7], ANR NeoPraEval[8], ECRAN[9]) . Elle a d'ailleurs motivé la tenue de projets spéciaux dans les précédents colloques de l'EMF. Ainsi, en 2009 et 2015, les dispositifs des évaluations nationales et internationales et l'interprétation des résultats ont notamment été étudiés. De même, le rôle des évaluations a aussi été abordé, en 2012, sous l'angle des transitions scolaires. Prolongement des préoccupations discutées en 2018 sur la nécessité de mieux saisir les pratiques évaluatives des personnes enseignantes dans la francophonie, c'est sous le thème « Évaluations dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques » et sous la forme d'un groupe de travail que plus d'une quinzaine de participant·e·s ont échangé dans le cadre du colloque EMF 2022 qui s'est tenu au Bénin.

1. Université de Genève, Suisse, maud.chanudet@unige.ch
2. LDAR, Université Paris Est Créteil, France, julie.horoks@u-pec.fr
3. Université du Québec à Rimouski (Campus de Lévis), Canada, melanie_tremblay@uqar.ca
4. Université de Yaoundé, Cameroun, judithnjomg@yahoo.fr ou jsadjakam@yahoo.fr
5. Association pour le Développement des Méthodologies d'Evaluation en Education
6. Assess Inquiry in Science and Mathematics Education
7. Formative Assessment in Science and Mathematics EDucation
8. Nouveaux Outils pour de nouvelles PRAtiques d'EVALuation et d'enseignement des mathématiques.
9. L'Évaluation Collaborative Réussie des Apprentissages par le Numérique.

Les trois axes proposés initialement pour ce GT11 étaient :

- Les évaluations externes ;
- L'évaluation dans la classe de mathématiques ;
- Les dispositifs, technologies et outils d'évaluation.

Sept contributions ont fait l'objet de discussion dans le groupe (6 communications et un poster) qui a accueilli jusqu'à 16 participants, de différents pays (Bénin, Mali, Maroc, Suisse, Canada, France) et de statut variés (chercheuses, inspecteurs, formateurs/trices, enseignant.es). Ces contributions ont approfondi l'un des trois axes initialement proposés ou croisé deux de ces axes. Les questions traitées dans ces présentations, avec des études très micro ou à très grande échelle, tournaient principalement autour :

- De l'évaluation (et enseignement) de contenus spécifiques (la résolution de problèmes dans 4 communications, l'algèbre dans 1 autre);
- Des outils pour analyser les tâches d'évaluation (et d'enseignement) sur un contenu spécifique (3 communications);
- Des pratiques enseignantes, déclarées ou effectives, pour évaluer les apprentissages des élèves (5 communications), dans leurs interactions avec les élèves, leurs choix de tâches, leurs représentations sur l'évaluation.

Nous avons choisi d'organiser nos sessions avec des temps de discussion avant et après les présentations, avec des relectures à faire en amont du travail de groupe.

La suite de ce bilan porte un regard transversal sur ces trois axes et illustre les apports des différentes communications que ce soit sur les épreuves à visée certificative, les pratiques d'évaluation déclarées ou les pratiques effectives des personnes enseignantes. Pour leur part, *Mohamadou Salifou et Judicaël Alladatin* proposent plutôt, dans leur présentation par poster, une approche systémique. Ils exposent une esquisse de modèle théorique leur permettant de saisir et de contribuer à la réduction du décrochage scolaire par les liens déjà documentés avec les faibles performances en mathématiques. Leur modèle met de l'avant les relations étroites qu'entretiennent le sentiment d'appartenance, l'engagement scolaire et l'affectif sur le rendement en mathématique.

L'étude des dispositifs d'évaluation à visée certificative

Rappelant d'abord que la résolution de problème peut être envisagée en tant qu'objet d'apprentissage en soi, deux communications (*Ruf et Weiss* ainsi que celle de *Chanudet et Favier*) se sont principalement intéressées aux évaluations à visée certificative ou plus précisément au travail de réflexion nécessaire sur la pertinence des choix des problèmes et des dispositifs associés.

Ainsi à la suite de l'étude de ce qu'elles nomment le matériau évaluatif composé de 1500 tâches issues d'évaluations cantonales externes en Suisse romande, *Isaline Ruf et Laura Weiss* ont catégorisé celles-ci en quatre catégories de tâches dont elles en retiennent deux (problèmes et problèmes atypiques) comme étant pertinentes pour évaluer la résolution de problèmes. Les enjeux différenciés entre la catégorie « problème » et la catégorie « problème atypique » sont aussi abordés en tenant compte des objets évalués (mobilisation raisonnée d'outils que l'élève devrait maîtriser vs stratégies de résolution) » Elles distinguent ainsi les problèmes dont l'exploitation leur semble plus propice, par le biais de mises en commun ou d'échanges, dans la classe plutôt que comme problème visant à certifier les apprentissages.

À partir d'un cadre permettant de distinguer les différents raisonnements mathématiques et démarches en jeu dans la résolution de problèmes, *Chanudet et Favier* proposent une analyse des problèmes visant à permettre aux personnes enseignantes de faire des choix quant à ceux qui semblent intéressants à proposer dans le cadre d'une évaluation à visée certificative. Par le biais de production d'élèves combinées à l'analyse des raisonnements en jeu, les chercheurs avancent que le choix du dispositif de narration de recherche n'est pas toujours pertinent considérant les multiples défis que rencontreront les élèves, par exemple dans des problèmes impliquant la mobilisation d'un raisonnement par implication logique.

L'étude des pratiques évaluatives et leurs dilemmes sous le filtre des pratiques déclarées

L'accompagnement des personnes enseignantes dans leurs pratiques d'évaluation nécessite de dresser un portrait général des façons dont elles s'actualisent dans le quotidien des professionnel·le·s. Deux communications (Horoks, Coppé, Grugeon-Allys et Pilet ainsi que celle de Ruminot) ont proposé des cadres différents pour les étudier.

À partir du cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2005), *Julie Horoks et ses collègues* ont développé, dans le cadre d'une étude nationale à grande échelle (1 200 enseignants), un questionnaire pour approcher les composantes institutionnelle, personnelle, sociale, cognitive et médiative des pratiques d'évaluation (formative, sommative et diagnostique) sur le sujet de l'algèbre. Cette enquête met de l'avant l'importance de mieux saisir, par le biais des types de tâches promues par les personnes enseignantes et de la façon dont ces tâches couvrent le domaine algébrique, leur représentation de l'enseignement - et de l'évaluation des apprentissages en l'algèbre. Elle permet aussi d'aborder plus largement la manière dont les personnes enseignantes impliquent ou non leurs élèves dans des processus d'évaluation plus ou moins formatifs.

Carolina Ruminot s'est intéressée pour sa part aux pratiques d'évaluation formative déclarées de 17 enseignantes et enseignants du Chili rencontrés en entretien. À partir du concept de dilemme, elle illustre des défis d'ordre conceptuel, pédagogique, culturel et politique que vivent les personnes enseignantes dans leur quotidien. Sa communication met de l'avant une conception de l'évaluation anxiogène chez les élèves dont la place importance des épreuves standardisées semble être la justification principale. Ruminot illustre les besoins encore bien présents de distinguer les fonctions de l'évaluation et d'accompagner les personnes enseignantes, d'une part, dans l'exercice de leur jugement sur l'activité d'élèves en cours d'action et, d'autre part, d'accroître leurs capacités d'analyse des raisonnements des élèves et de leur offrir de la rétroaction.

L'étude des pratiques évaluatives effectives

Une des principales visées de l'évaluation en tant que soutien aux apprentissages est la régulation des apprentissages des élèves (Allal, 2006; Heritage, 2018; Laveault, 2012). Le rôle de la personne enseignante est particulièrement important, puisque c'est grâce aux rétroactions (aussi nommée feedback) offertes que l'on accroît les occasions pour l'élève de prendre conscience de ses forces et de ses faiblesses en cours d'apprentissage, pour ainsi les ajuster et, ultimement, maîtriser les acquis nécessaires au champ disciplinaire (Perrenoud, 2001). Deux propositions (Blanchouin, Grapin et Mounier ainsi que Tremblay et Delobbe) se sont penchées sur l'étude des pratiques évaluatives menées en classe dans la résolution de problèmes.

À partir de problèmes caractérisés de basiques, *Aline Blanchouin, Nadine Grapin et Eric Mounier* proposent une méthodologie porteuse pour étudier l'activité évaluative à partir de ce qui est défini en termes de gestes évaluatifs, lesquels sont associés au recueil d'informations et à la rétroaction fournie à l'élève. Elles et ils illustrent notamment l'influence importante que joue l'avancée dans le scénario didactique de la séance sur les choix d'objets d'apprentissage évaluation ainsi que sur les opportunités, saisies ou non, de contribuer à la régulation des apprentissages des élèves par le biais de rétroactions.

Pour leur part, *Mélanie Tremblay et Anne-Michèle Delobbe* portent leur attention sur l'évaluation-régulation interactive menée par deux enseignantes au cours d'une séance où les élèves résolvent un problème à l'aide de l'outil Desmos. Le potentiel de ce dernier pour soutenir les avancées des élèves est en soi intéressant. S'appuyant sur le modèle de Mottier-Lopez (2015), la nature du guidage de chaque enseignante est le principal objet de la communication, lequel est étudié en termes de participation guidée, où les conduites verbales d'initiation et de réponses sont qualifiées selon qu'elles soient de l'ordre de la restitution des savoirs en jeu ou plutôt décrites « à développement ». Parmi les résultats mis de l'avant ressort l'importance pour la personne enseignante de pouvoir anticiper les stratégies de résolution pour mener une rétroaction interactive qui favorise la participation de l'élève. Le recours à un outil technologique peut ainsi entraîner des stratégies non-prévues qui méritent en elles-mêmes d'être étudiées.

Conclusion

Les différentes communications entendues dans le cadre de ce groupe de travail ont aussi été l'occasion de comparer l'enseignement et l'évaluation en mathématiques dans les différents pays représentés. Elles ont ainsi mis de l'avant l'importance de demeurer sensible aux contextes socio-culturels colorant l'étude des pratiques évaluatives. Ainsi, l'effectif et la constitution des classes, les attentes des institutions, les ressources mises à la disposition des personnes enseignantes, tant en termes d'outils technologiques que de temps de concertation offerts entre pairs ou pour participer à des projets de formation continue doivent être considérés. Ils ajoutent texture à la compréhension des difficultés de mise en œuvre de l'évaluation en tant que soutien d'apprentissage (évaluation formative) tout autant que dans la conception d'évaluations visant à rendre compte des acquis des élèves.

Des questions demeurent vives et pourront nourrir les réflexions d'un prochain groupe de travail sur l'évaluation lors du prochain colloque EMF. Elles concernent en particulier la formation des personnes enseignantes à l'évaluation des apprentissages de leurs élèves, en articulation avec l'enseignement des mathématiques. Ce travail de collaboration sur les ressources enseignantes est nécessaire pour les outiller dans le choix et la conception de tâches pertinentes, dans les façons de mener des régulations-interactives en classe, et aussi… enrichir leur conception de l'évaluation.

Références

Heritage, M. (2018). Assessment for learning as support for student self-regulation. *The Australian Educational Researcher, 45*, p.51-63.

Laveault, D. (2012). « Autorégulation et évaluation-soutien d'apprentissage », dans L. Mottier Lopez (dir.), *Modélisation de l'évaluation en éducation*, Bruxelles, De Boeck, p.115-130.

Mottier Lopez, L. (2015b). Évaluation-régulation interactive : étude des structures de participation guidée entre enseignant et élèves dans le problème mathématique « Enclos de la chèvre ». *Mesure et évaluation en éducation, 38*(1), 89–120. Récupéré de : https://doi.org/10.7202/1036552ar

Perrenoud, P. (2001). « Évaluation formative et évaluation certificative : postures contradictoires ou complémentaires? », *Formation professionnelle suisse, 4*, p.25-28.

Robert, A., & Rogalski, J. (2005). A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. In *Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classroom* (pp. 269-298). Springer US.

Wiliam, D. (2011). What is assessment for learning? *Studies in Educational Evaluation, 37*(1), 3-14.

Annexe

LISTE DES TEXTES DU GT 11 PAR ORDRE ALPHABETIQUE DU PREMIER AUTEUR

Communications

BLANCHOUIN, A., GRAPIN, N. & MOUNIER, E.

Étude de gestes évaluatifs en situation de résolution de problèmes au cycle 2

CHANUDET, M. & FAVIER, S.

Évaluer les compétences des élèves en résolution de problèmes : Réflexion sur la nature des apprentissages visés et les modalités d'évaluation

HOROKS, J., COPPE, S., GRUGEON-ALLYS, B. & PILET, J.

Une étude à grande échelle des pratiques enseignantes d'évaluation en algèbre au collège

FAGNANT, A. & AUQUIERE, A.

Impact des illustrations accompagnant les problèmes problématiques : focus sur le codage des réponses

RUF, I. & WEISS, L.

Tout problème est-il apte à une évaluation certificative ?

RUMINOT, C.

Évaluation formative dans les pratiques des enseignants du Chili.

TREMBLAY, M. & DELOBBE, A.-M.

L'évaluation-régulation interactive dans la résolution d'un problème sous Desmos : tensions entre collecte de traces et guidage

Affiche

SALIFOU, M. & ALLADATIN, J.

De la faible performance en mathématiques au décrochage scolaire : quelle approche theorique d'analyse ?

Titre: La pratique de la langue maternelle en éducation sociale à l'école primaire : avantages, difficultés et approches de solution

Auteur: CHOGOU Wangninan Freedy

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1046 - 1056

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

La pratique de la langue maternelle en éducation sociale à l'école primaire : avantages, difficultés et approches de solution

CHOGOU[1] Wangninan Freedy

Résumé – Pour un enfant la langue maternelle est l'un des premiers moyens de traduire le sens du monde et elle l'aide dans son développement. Dans le contexte socio-éducatif béninois, la langue maternelle est différente de la langue officielle, le français, dans laquelle les enseignements sont proposés. A travers l'exemple de la suite orale des premiers nombres, nous montrons un exemple de barrière linguistique et proposons un exemple de situation d'enseignement pour la surmonter.

Mots-clefs : langue maternelle, langue officielle, multiplicité des langues, éducation sociale, comptage

Abstract – For a child, the native language is one of the first means for translating the meaning of the world and it helps in his or her development. In the Beninese socio-educational context, the native language is different from the official language in which the lessons are offered. Through the example of the oral sequence of the first numbers, we show an example of a language barrier and propose an example of a teaching situation to overcome it.

Keywords: native language, official language, multiplicity of language, social education, counting

1. Enseignant, Bénin, chogouwangninan@gmail.com

Au Bénin, les apprentissages de l'école primaire sont décomposés en six champs de formation :

- le français qui regroupe la grammaire, la conjugaison, l'orthographe, la dictée, la lecture, le vocabulaire thématique, le vocabulaire fonctionnel, le vocabulaire systématique, la communication orale, l'expression écrite, l'écriture ;
- les mathématiques qui sont composées de l'arithmétique, la mesure et la géométrie ;
- l'éducation sociale, qui est composée de la morale, du civisme, de l'histoire, de la géographie, de la langue et de la culture ;
- l'éducation scientifique et technologique ;
- l'éducation artistique avec la poésie, le chant, le conte, la couture ;
- l'éducation physique et sportive.

Introduction

On ne saurait parler de langue maternelle en « Education Sociale » sans chercher à comprendre les raisons qui nous ont poussé à orienter notre étude sur ce chapitre. Dans notre contexte socio-éducatif, la langue maternelle est différente de la langue officielle (le français) dans laquelle les enseignements sont proposés à l'apprenant. Cette sorte de barrière linguistique ne permet pas à l'apprenant de vite cerner les apprentissages réalisés. De nos jours, tout le monde à tendance à remédier à ce problème par la pratique de la langue maternelle en éducation sociale, ce qui permet à l'enfant non seulement de vite saisir les apprentissages mais aussi de développer son patrimoine culturel qu'est sa langue maternelle. C'est l'un des constats qui nous a poussé à choisir ce thème et à étudier les avantages et les difficultés à la pratique de la langue maternelle en éducation sociale à l'école primaire, mais aussi à proposer des solutions pour pallier les difficultés liées à la pratique de la langue maternelle dans ce cadre.

Dans une première partie, nous dresserons un état des lieux autour de la pratique de la langue maternelle en éducation sociale, puis après avoir présenté les difficultés rencontrées par les enseignants pour mettre en œuvre cette enseignement, nous proposerons une approche de solution.

Pratique de la langue maternelle en éducation sociale

Clarification conceptuelle

Par la langue maternelle, il faut entendre la première langue parlée par un enfant selon le dictionnaire universel (édition 2008). La langue maternelle peut aussi être définie comme la langue que l'enfant apprend à parler auprès de sa mère. La pratique de cette dernière en Education Sociale à l'école primaire consiste à proposer à l'élève des situations d'apprentissage dans sa langue maternelle.

Importance de la pratique de la langue maternelle en Education Sociale

L'importance de la pratique de la langue maternelle en Education Sociale est due au fait que c'est dans cette langue que l'enfant apprend à parler et découvre progressivement son environnement technique. Les situations d'apprentissage devant être majoritairement tirées du vécu quotidien de l'enfant, on peut donc en déduire qu'on peut les proposer dans la langue maternelle de l'apprenant pour l'aider à réussir au mieux ses apprentissages.

Il est aisé de constater que dans nos écoles on accorde généralement peu d'importance à l'enseignement / apprentissage / évaluation de la langue maternelle en Education Sociale. En effet, les programmes d'études et les guides du Cycle 1 et du Cours préparatoire ne comportent pas de situations d'apprentissage répondant à cette particularité. Il n'y a que les programmes et les guides des niveaux II et III qui en font état.

Avantages et difficultés liées à la pratique de la langue maternelle en Éducation Sociale

Les avantages liés à la pratique de la langue maternelle en Education Sociale sont divers et variés. D'abord, il est intéressant de remarquer que dans notre contexte sociolinguistique, la langue maternelle n'est pas la langue officielle. Or c'est souvent dans la langue officielle que les autres matières sont enseignées. A partir de là, il convient de noter que la mise en relief de la langue maternelle à l'école contribue non seulement au développement de cette langue, mais aussi au développement des compétences des enfants dans la langue de la majorité de l'école. Surtout lorsque l'on sait que dans une école, la langue du milieu est souvent la langue de la majorité des populations par conséquence, la langue maternelle. De même, le taux d'analphabétisme étant encore élevé au Bénin, utiliser du temps à enseigner une langue minoritaire à l'école (c'est-à-dire le français) ne gêne pas l'apprentissage des matières enseignées à l'école dans la langue de la majorité pour ne pas dire dans la langue maternelle.

Pratiquer la langue maternelle n'est pas toujours une tâche facile pour l'enseignant, car il peut se trouver dans des situations où, dans une même classe, les élèves parlent une multiplicité de langues dont il comprend rarement la majorité. De plus si les enseignements et les apprentissages ne sont pas coordonnés, mis en synergie, s'ils sont considérés de manière isolée, voire si l'on craint toute confusion, la compétence plurilingue de l'enfant cesse d'être un atout. Les compétences chez les enfants sont fragiles et se perdent facilement si on ne les entretient pas ; par voie de conséquence, l'école qui rejette la langue de l'enfant le rejette.

C'est avec sa langue maternelle que l'enfant a appris à découvrir son environnement. Ainsi, les situations d'apprentissage, pour être accessibles et efficaces, devraient être tirées du vécu quotidien des enfants, surtout quand on sait que les premières connaissances de l'apprenant sont acquises dans sa langue maternelle. Alors, ne pas tenir compte du fait que la langue avec laquelle l'enseignant et l'enfant communiquent, contribue à créer une barrière linguistique qui ne favorisera pas les apprentissages, voire ne permettra pas de les développer : ce qui représente du temps perdu pour les apprenants et pour l'enseignant.

Exemple et approches de solution

Pour faciliter l'enseignement / apprentissage / évaluation de la langue maternelle au Cours Elémentaires 1 et 2 et aux Cours Moyens 1 et 2 (élèves âgés entre 7 et 11 ans), il serait souhaitable d'intégrer cette dernière dans le programme des niveaux précédents en la pratiquant surtout à l'oral. Par ailleurs, aux Cours Elémentaires, les guides et les programmes d'enseignement d'éducation sociale n'ont abordé le sujet de la langue maternelle qu'à la sixième situation d'apprentissage. Or, à cause des éventuelles perturbations de diverses natures (comme les grèves par exemple), bon nombre d'enseignants n'atteignent par ce niveau avant la fin de l'année scolaire. Si le thème de la pratique de la langue maternelle était inscrit entre la première et la troisième situation d'apprentissage, cela permettrait de l'aborder vite et bien. Il en est de même pour le Cours Moyen où ce thème n'est entamé qu'à la cinquième situation d'apprentissage.

Afin de montrer toute la complexité à pratiquer la langue maternelle en Education Sociale, nous illustrons d'abord notre propos par un exemple de suite orale de nombres entre 0 et 100 en fontgbé. Nous présentons ensuite une situation pédagogique permettant de pratiquer la langue maternelle tout en développant les apprentissages sur le dénombrement de collections.

Exemple de la suite orale des nombres dans une langue béninoise non officielle : le fongbé

Afin de montrer toute la complexité dans laquelle peut se trouver un enseignant, précisons d'abord que la suite orale des nombres a été déclinée en cinq langues en annexe 1. Revenons ici sur le fongbé : la suite orale des nombres dans cette langue, comme dans les autres langues parlées, respecte les bases qui s'étendent de 1 à 10. Les généralités du comptage en fongbé sont créés sur la base

additionnelle c'est-à-dire qu'au fur à mesure que le comptage va en ordre croissant, l'on ajoute une valeur supérieur pour avoir le nombre que l'on veut. Par exemple 1 se dit odé ou dokpé, et pour avoir 21, on va additionner, comme en français (« vingt et un ») et en anglais (« twenty-one »), ko (20) nukun (qui traduit l'addition) dokpò (1).

Il y a des particularités dans le comptage en fongbé. Notons quelques nombres particuliers comme dans les autres langues. Si nous prenons le nombre 15 : en français, il se dit « quinze » et non « dix et cinq » De la même façon en fongbé, le quinze (15) « afotòn » renvoie littéralement à trois pieds c'est-à-dire l'addition de tous les doigts de trois pieds cela fait 5 doigts x 3 = 15. De même certains nombres comme ko (vingt) et kanwé (quatre-vingts) constituent des nombres servant de base à construire d'autres. Pour traduire l'addition dans les nombres fon, l'utilisation d'un mot va retenir l'attention : nukùn littéralement. Ce substantif signifie «oeil». Son intégration dans les nombres en fongbé renvoie du fait que les parties du corps servent beaucoup dans le comptage dans certaines cultures. Ainsi pour dire 16, le fon dira fotòn nukùn dokpò, ce qui veut dire 3 pieds + 1 oeil = 16 et 17 se dit 3 pieds +2 «oeil», c'est-à-dire fotòn nukùn wè. En somme, le comptage en fongbé respecte certaines règles générales.

Fiche pédagogique

La fiche pédagogique insérée en annexe 2 retrace la démarche d'enseignement / apprentissage / évaluation d'une séquence de classe en Education sociale (langue et culture) portant sur le comptage en langue maternelle.

Cette séquence de classe a été mise en place au cours de mon stage de professionnalisation, et j'ai été surpris de constater que les enfants venaient de divers horizons, puisque dans ma classe, il y avait environ huit différentes langues parlées par les élèves. Certains ont pu compter dans leur langue couramment d'autres non, pourtant tous parlaient bien leur langue maternelle. Je ne comprenais pas toutes les langues pour les aider à dégager les dégager les règles de comptage spécifique à chacune de leur langue, cependant je regardais sur ma fiche et je leur disais le nom des nombres qu'ils ne connaissaient pas. J'ai également constaté qu'il y a des langues nationales qui se ressemblent, avec une même règle de comptage mais avec des accents différents.

La leçon a suscité l'engouement des apprenants. Plus tard j'ai poussé un peu plus loin ma curiosité et j'ai constaté que même certains adultes rencontrent des difficultés à compter dans leur propre langue maternelle alors qu'ils s'expriment bien dans cette langue.

Conclusion

La langue est non seulement une composante de la culture d'un individu voire d'une nation mais aussi et surtout un moyen de communication. Cependant, la mise en œuvre de la langue maternelle en situation de classe est confrontée à d'énormes difficultés parce que nous sommes dans une société où le brassage sociolinguistique est à son niveau le plus élevé. Au total, on peut retenir que la mise en œuvre effective de la langue maternelle en Education Sociale doit être une priorité pour tous les acteurs de l'Education. Car la langue faisant partie de la culture d'un pays, aucun développement durable n'est envisageable en dehors de l'attachement à sa culture.

Références

République du Bénin (2001) *Guide de l'enseignant– Enseignements Primaires – Champ de formation : Éducation Sociale – Cours Élémentaire 1ère et 2ème année*. Porto Novo : Ministère des enseignements Primaire et Secondaire.

République du Bénin (2001) *Programme d'études- Enseignements Primaire - Champ de formation : Éducation Sociale CE2*. Porto-Novo : Ministère des enseignements Primaire et Secondaire.

République du Bénin (2012) *Mesures correctives apportées dans les champs de formation Éducation Sociale et Éducation sportive du CI au CM2*. Porto Novo : Ministère des enseignements Maternel et Primaire.

Annexe 1 : le nom des nomrbes dans cinq langues différentes

	EN LANGUE :				
	FONGBÉ	GUN	YORUBA	BARIBA	MINAN
0	débu	ovô	odo		:balo
1	dokpo	odé	eni	tia	deka
2	ò-wè	awé	éji	yiru	eve
3	à-tàng	aton	eta	ita	etôn
4	e-nè	énin	érin	îne	ene
5	à – tòng	aton	màrùn	nɔbu	atô
6	à-yi-zéng	tchoudokpo	efà	nɔbatia	adé
7	te-we	tchanwé	éje	nɔba yiru	adr3
8	ta-ta	tchanton	ejo	nɔba ita	enyi
9	téng-nè	tchenin	esàn	nɔba îne	osidekè
10	wo	ao	ewà	wɔkuru	ewo
11	wo-dò-kpò	odokpo	òkanla	wɔkuratia	woedeka
12	we-wè kpò	wiawé	éjila	wɔkura yiru	Woewe
13	wa-tong	wiaton	etala	wɔkura ita	woetô
14	we –né-tong	wiènin	erinla	wɔkura îne	woene
15	à –fò-tòn	fôton	edogun	wɔkura nɔbu	weatô
16	à-fò-tòn-nù-king-dò-pò	fôton nou kou dokpo	érindinlogun	wɔkura nɔbu katia	woeadè
17	à-fò-tòng-nù-kùng-wè	fôton nou kou awé	étadinlogun	wɔkura nɔbu ka yiru	woeâdrê
18	à-fò-tòng-nù-kùng-à-tòng	fôton nou kou aton	ejindinlogun	wɔkura nɔbu ka îne	woenji
19	à-fò-tòng-nù-kùng-é-ne	ko é houé dokpo	okandinlogun	wɔkura nɔbu ka ita	weasideke
20	kò	ko	ogun	yêdu	blave
21	ko nukùun	ko nou kou dokpo	okanlelogun		
22	ko nukùn wè	ko nou kou awé	ejililogun		
23	ko nukùn atòn	ko nou kou aton	etalelogun		
24	ko nukùn ené	ko nou kou énin	érinlelogun		
25	ko atòòn	ko nou kou aton	marunlelogun		
26	ko atòòn nukùn dokpò	ko aton nou kou dokpo	erindinlogun		
27	ko atòòn	ko aton nou kou awé	étadinlogban		
28	ko atòòn nukùn atòn	ko aton nou kou aton	ejidinlogban		

29	ko atòòn nukùn ené	gban é houé dokpo	okandinlogbon		
30	gbàng	Gban	ogbon	tɛna	blatô
40	kàng-dé	kandé	ogoji	weeru	blane
50	kàng-dé –wo	kandé ao	adota	weera kuru	blaatê
60	kàng –dé-ko	kandé ko	adorin	wata	blaadé
70	kàng – dé gbàng	kandé gban	adorun	tâtaka wɔkuru	blaâdè
80	kàng-wè	kanwé	ogorin	wînɛ	bla âdrè
90	kàng-wè-wo	kanwé ao	adorun	wînɛ ka wɔkuru	blasideke
100	kàng – wè-kò	kanwé ko	ogorun	wunɔbu	alofodeka

Annexe 2 : Fiche pédagogique pour une séance en CE2

Durée : 30 min

SAN°6 : J'apprends compter dans ma langue maternelle

Séquence N°2

Titre : Je compte en langue maternelle de 0 à 40

Compétence disciplinaire : Interpréter le patrimoine culturel de son milieu et de sa région

Compétences transversales : 1-2-3-5-6 (cf.guide page 29)

Compétence transdisciplinaire : 1 (cf. guide page 29)

Connaissance et techniques : comptage de 0 à 40 en langue maternelle

Stratégie d'enseignement/ apprentissage/ évaluation : travail individuel, travail en groupe, travail collectif.

Matériel : fruits de la saison- divers objets.

DEROULEMENT

CONSIGNE	RESULTAT ATTENDUS
Activité préliminaire : rappel de la leçon précédente (PM)	
INTRODUCTION	
Mise en situation : tu accompagnes ta maman dans le verger de papa. Elle cueille des mangues mûres et de demande de les compter Dis en quelle langue tu as compté ces mangues	L'enfant a dit la langue dans laquelle il a compté les mangues.
Proposition de nouvelles acquisitions : aujourd'hui, nous allons apprendre à compter des objets dans nos langues maternelles.	
Pré-conception :	
- Nomme ta langue maternelle	L'enfant a dit le nom de sa langue maternelle
- Essaie de compter dans ta langue maternelle (l'enseignant recueille les réponses des enfants sans appréciation)	L'enfant a fait ses essais.
Pré-requis : (PM)	
Réalisation	
Activité de construction de nouveau savoir.	
L'exploration	L'enfant a rendu compte
- Observe dans ton groupe le matériel mis à ta disposition	Il a dit le nom de chaque matériel
- Rends compte de ton observation ;	Il a compté :
- Dis dans ta langue maternelle le nom de chaque matériel mis à ta disposition ;	- les objets de 1 à 40
- Compte ce matériel dans ta langue de 1 à 40	- de 0 à 40
Recherche	
- Compte des objets de 1 à 40 dans ta langue maternelle	Il a décompté selon le cas, les objets ou les nombres de 50 à 1 ou de 40 à 0.
- Compte sans objet les nombres de 0 à 40	
- Décompte les nombres de 40 à 0	Il a analysé les résultats
- Compte par bonds de 2,5 ou 10	
Traitement de l'information	Il a identifié les techniques
analyse les résultats de comptage et de décomptage	
identifie les techniques de comptage d'objets utilisés.	La règle ou la technique de comptage/ décomptage est dégagée et connue des enfants
Synthèse	Les comptages de tas d'objets ont été réalisés.
- Dégage la règle ou la technique de comptage/ décomptage au sein de son groupe sociolinguistique.	Le comptage des nombres de 0 à 40 a été fait
Application	Les décomptages d'objets et de nombres sont aussi réalisés par les enfants dans leur langue maternelle respective.
- Compte à haute voix un tas d'objets de ton choix de 1 à 40	L'enfant a déclaré ce qu'il a appris
- Compte les nombres de 0 à 40	Il a dit la démarche suivie ainsi que les stratégies mises en œuvre.
- Décompte un tas d'objets de ton choix de 40 à 1	Il a fait part de ses difficultés et les solutions apportées.
- Décompte les nombres de 40 à 0	Les enfants ont mené l'activité qui leur est proposée
Retour et projection	
Objectivation : dis ce que tu appris, comment tu l'as appris, tes difficultés et comment tu les as surmontées	
Évaluation : Proposer un tas d'objets à toute la classe et le faire compter et décompter de façon discontinue par plusieurs enfants de différents groupes sociolinguistiques.	
Projection : Dis ce que tu feras de ce que tu as appris.	L'enfant a dit

Titre: Les transformations géométriques dans les programmes de mathématiques au Sénégal

Auteurs: DIACK Thiendou, DIA EL Hadji Malick et BA Cissé

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1057 - 1069

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Les transformations géométriques dans les programmes de mathématiques au Sénégal

DIACK[1] Thiendou – DIA[2] EL Hadji Malick – BA[3] Cissé

Résumé – Au Sénégal, l'étude des transformations géométriques occupe une place importante dans l'enseignement des mathématiques, plus particulièrement dans les séries scientifiques, mais elle est souvent insuffisamment prise en charge dans le savoir enseigné. Une analyse du programme de mathématiques sénégalais a ainsi permis de déterminer les habitats et les niches des transformations géométriques dans les différentes réformes des programmes de mathématiques.

Mots-clefs : transformations géométriques, programme de mathématiques, écologie des savoirs, habitat, niche.

Abstract – In Senegal, the study of geometric transformations occupies an important place in the teaching of mathematics, more particularity in scientific series, but it is often insufficiently supported in the knowledge taught. An analysis of the Senegalese mathematics program has thus made it possible to determine the habitats and niches of geometric transformations in the various reforms of the mathematics programs.

Keywords: geometric transformations, mathematics program, ecology of knowledge, habitat, nest.

1. Doctorant en didactique des Mathématiques FASTEF/UCAD, Sénégal, diackthiendou@yahoo.fr

2. Enseignant/chercheur Département Mathématiques FASTEF/UCAD, Sénégal, el.dia@ucad.edu.sn

3. Enseignant/chercheur Département Mathématiques FASTEF/UCAD, Sénégal, cisse.ba@ucad.edu.sn

Au Sénégal, même si les transformations occupent une place prépondérante dans les programmes d'enseignement des séries scientifiques, le constat est qu'elles sont souvent insuffisamment prises en charge dans le savoir enseigné particulièrement en classe de première S2[4]. On sait que cette absence est souvent source de difficultés en terminale S2 lorsque le professeur aborde l'étude des similitudes directes. Il s'y ajoute que, dans la géométrie comme dans la vie courante, les transformations sont perçues comme des outils qui permettent grâce à leurs propriétés, de découvrir ou démontrer les propriétés des objets géométriques du plan et de l'espace, de créer des objets présentant certaines régularités (frises, rosaces, etc.) ou encore de classer des objets du plan ou de l'espace (cristallographie). Ces constats nous ont amené à réaliser un travail d'analyse des programmes du Sénégal sur les transformations géométriques dans les séries scientifiques de 1960 à nos jours. Dans les lignes qui suivent, après avoir donné un bref aperçu historique et épistémologique des transformations, nous présenterons le cadre théorique, puis la problématique et la méthodologie. Par la suite, nous ferons une analyse de l'évolution des programmes des séries scientifiques à propos de cet objet de savoir qui a marqué les différentes réformes à partir de 1960.

Apercu historique

La notion de transformation est apparue très tôt dans l'histoire des mathématiques, même si c'est de façon embryonnaire.

Les éléments d'Euclide

Dans Euclide (1990) elles apparaissent de manière sous-jacente à travers les demandes, notions communes et propositions.

Dans le livre 1, on peut citer trois endroits où apparait ce principe :

> « Notion commune 7 : Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elle. […]
>
> Demande 4 : Et que tous les angles droits soient égaux entre eux. […]
>
> Proposition 4 : Si deux triangles ont des côtés égaux chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, celui contenu par les droites égales, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent. […]»

Ce principe de superposition connaitra ses succès tout au long de l'histoire. La notion de coïncidence sera associée à la notion de mouvement et celle de déplacement apparaitra alors comme

4. Ancienne Série D : sciences expérimentales

une abstraction de la notion de mouvement. La transformation, vue au sens physique, exprimera la relation statique entre la position initiale et la position finale en se situant à la charnière entre la géométrie et la mécanique.

Les travaux de Desargues

Géomètre, architecte et ingénieur lyonnais, Desargues (1591-1661) peut être considéré comme le fondateur des transformations du plan au XV^{ème} siècle. En effet, suite à l'émergence des techniques de perspective, il se démarque de la tradition euclidienne et crée la « *démonstration par le relief* », c'est-à-dire par la perspective. Il utilise alors des considérations de géométrie dans l'espace pour établir des propriétés de géométrie plane. Il crée la « *méthode des transformations* » (Taton, 1949) qui consiste à prouver une propriété sur une configuration complexe (une conique quelconque) en la démontrant tout d'abord sur une configuration simple (le cercle) et en la transportant du cercle à la conique par perspective ou projection (Anglade & Briend, 2017, 2018).

Pascal et De La Hire généraliseront les méthodes de Desargues et utiliseront les transformations comme transfert de propriétés d'une configuration à une autre dans le cadre de la théorie des coniques. Newton utilisera cette méthode pour simplifier certains problèmes liés aux coniques, changer des figures en des figures du même genre : à chaque point M de la figure, on construit un point M'qui lui correspond. Ainsi, si M parcourt d'un mouvement continu la première figure, le point M'parcourra de même, par un mouvement continu tous les points de la nouvelle figure.

L'apport de Descartes

Au début du XVI^{ème} siècle, Descartes (1596-1650) va développer une nouvelle façon de résoudre les problèmes de géométrie dans son livre « la Géométrie » (1637). En effet, à la suite du calcul littéral développé à la fin du XVI^{ème} siècle, Descartes introduit le formalisme algébrique pour résoudre des problèmes géométriques. Apparaissent alors les notions de repère, d'équations de droites, etc. C'est la naissance de la géométrie analytique. Le plan sera considéré comme un ensemble de points avec des coordonnées. On assiste alors à un changement de point de vue, on passe du global au ponctuel. Une transformation géométrique plane n'est plus vue comme une action sur des figures planes mais plutôt sur les points du plan. Plus précisément, elles deviennent des bijections du plan dans lui-même.

Le programme d'Erlangen

Au début des années 1870, une nouvelle conception de la géométrie émerge, dans laquelle la notion de transformation occupe une place centrale et sera dotée d'un nouveau statut. Les travaux de Riemann et de Helmholtz ainsi que ceux de Galois et de Jordan sur la théorie des groupes eurent pour postérité immédiate ceux de Lie et de Klein. Klein imposa, à l'issue d'une synthèse originale

et novatrice, le point de vue selon lequel toute géométrie est caractérisée par un groupe de transformations. Son œuvre déterminante est connue sous le nom de « *Programme d'Erlangen* ». Klein commença par caractériser les propriétés qui font l'objet de la géométrie élémentaire par un groupe de transformations, le groupe principal.

La synthèse de Hilbert

Au début du XX^{e} siècle, le mathématicien allemand Hilbert (1862-1943) développera un large éventail d'idées fondamentales telles que l'axiomatisation complète de la géométrie. Dans « *Les fondements de la géométrie* » (1899), il approfondit l'aspect analytique des transformations, ce qui facilite leur manipulation dans la résolution des problèmes géométriques.

Cadre théorique

Ce bref aperçu historique nous a permis d'entrevoir le processus qui a conduit à ce niveau de maturation du concept de transformation qui a été développé dans différents cadres du géométrique à l'analytique en passant par l'algébrique. Pour l'analyse des programmes, d'un point de vue théorique, nous nous situons dans une perspective écologique, c'est-à-dire que nous identifions l'évolution de l'habitat et des niches des transformations géométriques dans l'approche de l'écologie didactique des savoirs (Chevallard, 1994) :

> « Les écologistes distinguent, s'agissant d'un organisme, son habitat et sa niche. Pour le dire en un langage volontairement anthropomorphe, l'habitat, c'est en quelque sorte l'adresse, le lieu de résidence de l'organisme. La niche, ce sont les fonctions que l'organisme y remplit : c'est en quelque façon la profession qu'il y exerce. (Chevallard, 1994, p. 142) »

En d'autres termes, l'habitat est le lieu où l'on peut trouver tel objet mathématique et les objets avec qui il entre en association. La niche étant relative à la fonction occupée par l'objet. Tandis que l'écosystème est un « lieu » réunissant les conditions écologiques où un objet peut vivre, il est défini comme un système d'êtres et de relations. À la suite de Chevallard, Artaud (1998) montre alors comment un objet émerge et peut vivre dans un écosystème didactique. Cette dimension écologique permet de questionner les objets mathématiques.

> « La problématique écologique se présente, d'emblée, comme un moyen de questionner le réel. Qu'est ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi ? Et qu'est-ce qui pourrait exister ? Sous quelles conditions ? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions ? (Artaud, 1998 p.1) »

L'analyse écologique vise ainsi à nous permettre de mettre à jour un réseau de conditions et de contraintes qui vont déterminer la place que peuvent occuper les transformations géométriques en mathématiques. Pour ce faire, nous allons analyser leur évolution au cours des différentes réformes qui ont marqué les programmes de mathématiques au Sénégal.

Problématique et méthodologie

La notion de transformation géométrique a eu plusieurs conceptions depuis les arabes du Moyen-Age jusqu'à la Renaissance avec la perspective (Vittori, 2009, p.62). Ces conceptions ont connu plusieurs mutations passant du cadre algébrique au cadre géométrique et vice versa. Ainsi, au fil du temps, plusieurs travaux de recherche ont été réalisés dans le cadre de l'étude des transformations géométriques. Grenier (1988) évoque les possibilités sur l'élaboration de problèmes susceptibles de remettre en question les conceptions erronées sur la symétrie orthogonale par exemple. Thienard (2006) a montré que les transformations géométriques ont été considérées sous trois aspects apportant des solutions à trois problématiques étrangères les unes des autres qu'il convient de bien discerner pour leur enseignement. Il a mis en évidence : le cadre de la géométrie des figures (théorie des coniques) ; la problématique de la refondation de la géométrie élémentaire et la notion de groupe de transformations pour la hiérarchisation des géométries (Klein, 1872). Enfin, Sangaré (2006) a illustré la notion de marque comme un objet de géométrie auxiliaire opératoire sur les transformations de figures géométriques.

Pour notre part, nous nous intéressons à la place des transformations dans les programmes sénégalais ainsi qu'au rôle qui leur est assigné dans l'enseignement des mathématiques et particulièrement dans l'enseignement de la géométrie. Dans ce texte, il s'agit de faire une analyse des programmes sénégalais des séries scientifiques de 1960 à nos jours suivant les différentes périodes liées aux grandes réformes de l'enseignement des mathématiques.

Analyse des programmes

Nous présentons les résultats de cette analyse selon cinq périodes : de 1960 à 1971, de 1972 à 1985, de 1986 à 1997, de 1998 à 2005 et de 2006 à nos jours.

Au lendemain des indépendances (1960 à 1971)

Juste après son indépendance, l'état du Sénégal, ne disposant pas encore de son propre programme scolaire, était obligé d'appliquer intégralement les programmes français (Coly, 2004). Puisque le Sénégal abritait la capitale de l'Afrique Occidentale Française (AOF), il disposait déjà de plusieurs établissements scolaires (Lycée Faidherbe, Lycée Van Vollenhoven, etc.) construits par les français où le programme français était souvent enseigné par des français.

Pendant cette période, les transformations géométriques qui étaient dans un habitat purement géométrique ont commencé à migrer vers un habitat algébrique.

> Dans son livre : « problèmes de constructions géométriques », J. Petersen met en évidence une classe de problèmes (environs 400), les constructions géométriques et les recherches de lieux géométriques, pour lesquels translation, rotation, homothétie, inversion,... trouvent un vaste champ d'application où elles s'avèrent très efficaces. Les exemples développés par J. Petersen seront la mine dans laquelle les auteurs de livres d'enseignement iront puiser leurs exercices sur le sujet jusqu'aux années 1970, qui marqueront la quasi disparition de l'enseignement de la géométrie « pure ». (Thienard, 2006)

Ainsi, les transformations opéraient sur les figures. Klein renouvelle ce point de vue en faisant opérer les transformations sur la totalité de l'espace. Il remarque alors que les déplacements de l'espace, les similitudes, les symétries et leurs composées, sont les transformations projectives conservant l'ombilicale, conique à l'infini appartenant à toutes les sphères ; ce qui permet de définir la géométrie élémentaire comme l'étude des propriétés des invariants par les transformations projectives conservant l'ombilicale (ce que Chasles considère comme le groupe des similitudes).

Ainsi, avec le programme d'Erlangen, retenons d'abord la place centrale de la notion d'invariant ; mais aussi la notion de l'espace comme objet géométrique. Klein achève ainsi la genèse d'une notion qui s'est dégagée des travaux sur la perspective d'une part et sur la mécanique d'autre part. Dans ce cadre, on comprend que l'habitat des transformations était dans l'algèbre et leur niche dans la théorie des groupes.

La première réforme des programmes au Sénégal (1972-1985)

C'est dans le décret numéro 72-861 du 13 Juillet 1972 portant sur l'organisation de l'enseignement moyen-secondaire qu'on trouve pour la première fois un programme d'enseignement dans le Sénégal post-indépendant. Ce programme inspiré du programme français d'alors très théorique et très axiomatique (période dite « des maths modernes »), laissait une grande place à la théorie des ensembles et aux structures algébriques.

Dans cette réforme, aucune place n'était réservée aux transformations géométriques pour les classes de sixième et de cinquième. C'est seulement à partir de la quatrième que l'on définit pour la première fois, une transformation[5] qui est la projection de direction donnée. Toujours, dans cette même optique, on introduit la symétrie centrale. Un an après, dans le programme de troisième, on introduit la projection orthogonale sur une droite et le rapport de projection orthogonale d'un axe sur un axe. Ensuite, on définit les isométries du plan euclidien comme « *les bijections du plan euclidien sur lui-même qui conservent les distances* ». L'introduction de la notion de groupe des isométries

5. Une transformation étant ici considérée comme une application du plan dans lui-même.

permet de définir un angle géométrique comme classe d'équivalence de couples de demi-droites isométriques de même origine.

A partir de la classe de seconde, on définit les homothéties vectorielles et les projections vectorielles. Ensuite, à partir de la projection orthogonale sur une droite, on aborde la notion de produit scalaire de deux vecteurs (bilinéarité et symétrie) puis on introduit et on utilise le groupe des homothéties et translations. Dans la partie géométrie métrique plane, on définit l'orthogonalité de deux droites comme une relation symétrique compatible avec le parallélisme. Ensuite on exploite l'invariance par translation et le rapport de la projection orthogonale d'une droite orientée sur une autre.

En premières C et D, on définit la rotation vectorielle mais aussi la composée de deux rotations vectorielles. A la fin de cette partie, on introduit le groupe des rotations vectorielles.

Dans le programme de terminale C, on introduit le groupe linéaire des homothéties vectorielles, des exemples de projection parallèle sur un sous espace affine, les involutions affines et leurs points fixes ainsi que la translation et l'homothétie. Dans le plan vectoriel et dans l'espace vectoriel de dimension trois, on insiste sur les éléments fixes des transformations orthogonales involutives (symétrie). On étudie aussi les rotations vectorielles de l'espace vectoriel euclidien de dimension trois et de là, on définit une telle rotation soit par l'identité, soit par une transformation orthogonale qui a pour seuls éléments fixes ceux d'une droite vectorielle. On introduit aussi le groupe des rotations vectorielles et l'orientation de l'espace. Enfin, on traite des exemples simples de groupe d'isométries laissant invariant un ensemble donné avant de terminer par le groupe des similitudes du plan et les sous-groupes remarquables.

Dans le programme de terminale D, dans la partie géométrie vectorielle, on donne une interprétation géométrique de l'application : (est une variable complexe) qui aboutit à l'identité, une rotation, une homothétie, une translation, ainsi qu'à leurs composées. Une conséquence de cette analyse est qu'il n'y a pas un chapitre spécifique dédié aux transformations mais leur utilisation se fait de manière transversale dans tout le programme.

Nous remarquons que le programme de mathématiques du second cycle de la réforme de 1972 avait réservé une grande partie aux transformations et sur toutes ses formes. Mais toutes les études des transformations aboutissaient aux groupes de transformations (groupes des isométries, groupe des similitudes, …) ce qui donnait plus d'importance à l'étude de l'algèbre et des structures algébriques dans la géométrie. Ainsi, la niche des transformations migre petit à petit vers une étude plus représentative des groupes. On peut noter aussi que les transformations sont utilisées en analyse pour la représentation graphique des fonctions associées à des fonctions simples. Pendant cette période, les habitats des transformations géométriques se retrouvent aussi bien en algèbre qu'en analyse.

La contre-réforme (1986-1997)

C'est la période de la contre-réforme de la réforme des mathématiques modernes, c'est pourquoi, on revient alors à des mathématiques moins formelles, où les liens avec les autres disciplines telles que la physique sont vus sous un jour nouveau. Notons qu'il y a une nette évolution de l'écriture et de la présentation des programmes déclinés d'abord sous forme de thèmes, de chapitres et de travaux pratiques, ensuite en termes de contenus, commentaires et compétences exigibles. C'est à cette période (en 1997), qu'un changement de dénominations des séries est opéré. Les séries scientifiques et techniques C, D et E deviennent S1, S2 et S3.

Dans les programmes de Terminale, il y a une partie relative aux transformations et configurations. On y traite les isométries (bijections conservant les distances), les déplacements (isométries conservant les angles orientés), l'action des isométries sur les vecteurs du plan et les similitudes planes directes. Cette partie s'achève par des travaux pratiques portant par exemple sur l'emploi de transformations planes pour l'étude des configurations et de la détermination de lieux géométriques. En revanche, dans les séries orientées vers les sciences expérimentales, les transformations ne sont abordées que dans le cadre strictement algébrique des nombres complexes. On y traite des exemples d'étude d'applications.

Pendant toute cette période, l'habitat des transformations se retrouve entre l'algèbre et la géométrie tandis que les niches sont dans la représentation graphique des fonctions associées en analyse et la construction géométrique des figures planes.

> « Il s›agit d›utiliser des transformations pour construire les représentations graphiques des fonctions associées à f à partir de la représentation de f » (Programme de mathématiques, 1997.)

Nous pouvons noter qu'il y a une grande différence entre la réforme des mathématiques modernes et la contre-réforme. Une illustration de ce fait est que les transformations géométriques quittent l'habitat algébrique pour migrer vers un habitat géométrique. Ainsi, toute notion de groupe de transformations a complètement disparu des programmes ; il n'y a plus de groupes des rotations, des isométries ou même des similitudes. La projection a également disparu des programmes sauf dans les séries S1 et S3.

Une consolidation de la contre-réforme : les programmes de 1997 et 2000

C'est la période de consolidation de la contre-réforme, l'élève est mis au cœur du système d'enseignement-apprentissage, mais les programmes ne changent pas fondamentalement. En effet, il est stipulé dans l'introduction de ces programmes que l'élève est responsable au premier chef de son apprentissage. On remarque qu'il n'y a relativement pas de différence entre les programmes de

1997 et les programmes de 2000 en ce qui concerne les transformations : les habitats et niches des transformations restent ainsi inchangés.

Migration vers un habitat analytique des transformations : les programmes de 2006

Dans le souci d'améliorer les apprentissages des mathématiques, des révisions pour une meilleure lisibilité des programmes n'ont cessé d'être mises en œuvre. C'est ainsi qu'en 2006 de nouveaux programmes de mathématiques voient le jour et ils sont toujours en vigueur.

Dans ces programmes, les transformations font leur entrée dès la sixième avec la symétrie orthogonale qui sera « introduite par le pliage ou par tout autre moyen pouvant aider l'élève à se faire une approche intuitive de la notion. » (CNM, 2006, p. 27) et qui permet par exemple de reconnaître deux figures symétriques par rapport à une droite.

On met en évidence le fait qu'un triangle qui a un axe de symétrie est isocèle et qu'un triangle qui a trois axes de symétrie, donc trois angles de même mesure est équilatéral. Mieux un triangle qui a deux axes de symétrie est un triangle équilatéral.

En classe de cinquième, les élèves arrivent à construire le symétrique d'un point, d'une figure simple et à trouver des centres de symétrie éventuels. C'est à partir de la quatrième que l'élève commence à rencontrer des transformations (translation et rotation) différentes des symétries. Enfin en classe de troisième, il y a un chapitre entier réservé aux transformations bien que l'on n'en définisse pas de nouvelles.

Dès la classe de seconde, le programme stipule que la pratique de la géométrie doit contribuer à développer le sens de l'observation et du raisonnement et à donner une bonne vision des objets du plan et de l'espace. En géométrie plane, l'objectif essentiel du programme est d'utiliser des outils vectoriels, analytiques, métriques et des transformations. Ainsi, le chapitre intitulé « transformations » rappelle toutes les transformations vues au collège et en introduit de nouvelles telles que l'homothétie, la composition des transformations (cette fois ci avec la loi : amorcée depuis la troisième avec deux symétries successives et deux translations successives) ainsi que l'étude de quelques exemples de lieux géométriques.

Ainsi, l'élève de seconde sera capable de bien manipuler les transformations en ayant la capacité de connaître et reconnaître les configurations liées aux propriétés des transformations étudiées concernant par exemple les distances, l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité, etc. Il est également attendu que l'élève détermine de façon analytique une translation, une symétrie centrale et une homothétie. La connaissance et l'utilisation des propriétés des transformations permettront ainsi de démontrer des égalités (de longueurs, de mesures d'angles), l'alignement de points, le parallélisme et l'orthogonalité de droites, mais aussi de construire une figure de justifier une construction et de

déterminer des lieux géométriques. On voit donc que c'est à partir de la seconde que les expressions analytiques des transformations font leur entrée dans le programme.

En premières S2 et S4 (Sciences Expérimentales), bien que les transformations (symétrie axiale, symétrie centrale, translation, etc.) soient des outils géométriques, elles seront utilisées en analyse plus particulièrement dans la représentation graphique des fonctions associées. L'élève de première doit connaitre les propriétés essentielles des transformations et doit savoir les mettre en œuvre dans des configurations simples. L'accent sera mis sur l'aspect méthodologique dans la résolution des problèmes. Ici, on insiste sur les expressions analytiques d'une translation, d'une rotation, d'une symétrie et d'une homothétie mais on traite aussi des exemples d'isométries laissant au moins un point invariant.

En premières S1 et S3, on commence par consolider les acquis de la classe de seconde puis on poursuit en étudiant les propriétés des isométries, en composant et décomposant en composées de symétries orthogonales. De plus, on introduit les notions de déplacement et d'antidéplacement. On utilise aussi les critères d'isométrie des triangles dans des résolutions de problèmes et les réciproques de transformations usuelles sont abordées.

Les classes de Terminales S2 et S4 sont des classes à vocation scientifique tournées vers les sciences expérimentales. En conséquence, l'analyse et la gestion des données y prennent une place prépondérante. Néanmoins, il y a une partie *algèbre et géométrie* qui est réservée aux nombres complexes et aux transformations. Dans cette partie, les transformations sont abordées sous un nouveau jour avec l'introduction de la similitude plane directe dans le plan complexe. L'utilisation des transformations est alors multiple : elles permettent par exemple à l'élève de Terminale S2 et S4 de déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe et de résoudre des problèmes y afférant.

Dans les programmes de Terminales S1 et S3, un seul chapitre, intitulé « similitudes planes directes », porte sur les transformations : les similitudes sont étudiées géométriquement et en utilisant les nombres complexes. Cette étude permet entre autres de déterminer l'image d'une figure simple par une similitude. En revanche, l'utilisation des transformations se fait de manière transversale tout le long du programme.

En conclusion, on remarque que dans le cycle moyen, les transformations apparaissent à tous les niveaux de la sixième à la troisième. Elles permettent à l'élève dès la sixième de commencer à voir les symétries et les similitudes dans les figures géométriques voire dans les objets qui l'entourent. A ce niveau, l'accent est mis sur le « transformé » et non sur l'application elle-même. Au fur et à mesure les transformations définies comme des applications du plan dans lui-même, vont passer d'actions sur les figures à des actions sur les points. A partir de la troisième, le concept de transformation se précise, on commence alors à introduire la notion de composition de transformations sans le formalisme lié à la loi . Par ailleurs, on remarque que les transformations permettent de démontrer beaucoup de résultats (le parallélisme et l'orthogonalité de droites ; la comparaison des longueurs, des aires ;

l'alignement de points, etc.). Ainsi l'élève de troisième est bien outillé en transformations pour entrer au lycée où les notions commencent à devenir de plus en plus abstraites. Nous constatons aussi que dans les programmes actuels, les transformations occupent une place primordiale dans chaque niveau de la sixième à la terminale. L'habitat demeure toujours géométrique avec des niches dans la représentation graphique des fonctions associées en analyse, dans les changements de repères et dans la recherche de lieux géométriques.

Conclusion

Les transformations géométriques ont toujours constitué un point nodal dans l'enseignement des mathématiques. Ainsi, depuis les arabes du Moyen-Age jusqu'à nos jours, elles passent d'un habitat algébrique à un habitat géométrique. Les niches ont débuté avec la résolution de problèmes géométriques (théorie des coniques), ensuite elles s'élargissent dans la hiérarchisation de la géométrie (Klein) et enfin dans la représentation graphique des fonctions simples en analyse. Le programme de mathématiques du second cycle de la réforme des mathématiques modernes avait réservé une place importante aux transformations mais dans un cadre algébrique. En effet, toutes les études sur les transformations aboutissaient aux groupes de transformations (groupe des rotations, groupes des isométries, groupe des similitudes, …). Ce qui donnait une importance capitale à l'étude de l'algèbre et des structures algébriques minorant ainsi la géométrie en tant qu'étude des figures.

Avec la réforme de 1972, nous constatons que les concepteurs des programmes concevaient les transformations géométriques comme mouvement sur les figures géométriques avant d'en arriver à une définition ponctuelle de la notion de transformation. Avec la contre-réforme de 1986, on a assisté à une évolution de l'écriture et de la présentation des programmes. C'est à cette période aussi qu'il y a un changement, car les transformations géométriques quittent l'habitat algébrique pour migrer vers un habitat géométrique.

Ainsi, cette étude des transformations géométriques a montré l'importance que l'on doit accorder à l'enseignement de ces objets de savoir qui n'a cessé de basculer entre l'habitat algébrique et l'habitat géométrique dans le savoir à enseigner. La suite de ce travail sera d'analyser les manuels les plus utilisés et les pratiques de classe à propos des transformations géométriques.

Références

Anglade, M. & Briend, J. Y. (2017) *La notion d'Involution dans le Brouillon Project de Girard Desargues*, HAL archives ouvertes.

Anglade, M. & Briend, J. Y. (2018). *L'usage de la combinatoire chez Girard Desargues : le cas du théorème de Ménélaüs, [Math.HO]*.

Artaud M. (1998) *Introduction à l'approche Ecologique du Didactique : l'écologie des organisations mathématiques et didactiques*. Actes de la IXème Ecole d'été de didactique des mathématiques. Houlgate, 101-139.

Chevallard Y. (1994) Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In G. Arsac (dir.), *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 135-180). Grenoble : La Pensée sauvage.

Coly, A. (2004). *Les associations de parents d'élèves à travers l'histoire de l'éducation au Sénégal : le cas de la Casamance*. [Thèse de doctorat]. Université de Limoges. France.

Euclide (1990). *Les éléments, Vol 1*, Traduction. B. Vitrac. Paris : PUF.

Grenier D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. [Thèse de doctorat]. Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Klein F. (1872). *Programme d'Erlangen*.

Taton R. (1949). La préhistoire de la géométrie moderne. R*evue des Sciences et de leurs applications, 2- 3*, 197-224.

Thienard J. C. (2000). Les transformations en Géométrie : Introduction à une approche historique, *Repères IREM, 63*, 27-52.

Sangare M. S. (2006), La marque d'une transformation géométrique : un exemple de modélisation didactique. *Educacão Mathemàtica Pesquisa, 8-2*, 225-266.

Vittori T. (2009). *Les notions d'espace en géométrie : De l'Antiquité à l'Âge Classique*. Collection Acteurs de la Science. L'Harmattan.

Titre: Développer le sens de vérification chez les élèves

Auteurs: DRAI Sami et ABOUHANIFA Said

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1070 - 1082

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Développer le sens de vérification chez les élèves

DRAI[1] Sami – ABOUHANIFA[2] Said

Résumé – Cet article vise à connaître dans quelle mesure les apprenants de 3ème année collégial possèdent des compétences de vérification. Nous avons introduit un test et un sondage à travers lesquels nous analysons la façon dont pensent les élèves et dont ils résolvent le test, créant en même temps l'existence ou l'absence de l'aspect de l'auto-vérification pendant le test. Nous concluons qu'il est pertinent d'examiner le travail personnel de l'élève et son mécontentement vis-à-vis de ses résultats.

Mots-clefs : Auto-vérification, Validation, Substitution, Comparaison, Représentations, Erreurs.

Abstract – This article aims to find out to what extent 3rd year college learners possess verification skills. We have introduced a test and a survey through which we analyze how students think and how they solve the test, creating at the same time the existence or absence of the self-checking aspect during the test. We conclude that it is relevant to examine students' personal work and their dissatisfaction with their results.

Keywords: Self-verification, Validation, Substitution, Comparison, Representations, Errors.

1. Lycée Farabi City Vectorial, Maroc, sami.drai14@gmail.com

2. CRMEF-CS Settat, Éducation et formation des enseignants, Maroc, saidabouhanifa@yahoo.fr

Introduction

Le problème de la gestion des erreurs dans les classes se pose à tout professeur au quotidien. Par exemple lorsque nous avons commencé à enseigner le calcul algébrique, nous nous sommes rapidement aperçus que beaucoup d'élèves rencontraient des difficultés, en particulier avec les notions de la résolution des équations, des inéquations et des situations problèmes. Nous avons alors émis l'hypothèse que l'utilisation de moyens de contrôle de ses résultats pourrait permettre à un élève de prendre conscience de ses erreurs, puis d'y remédier. C'est ainsi que nous avons orienté notre travail de recherche vers les vérifications dans le calcul algébrique. Nous avons donc élaboré, en nous appuyant sur des résultats de recherche concernant les vérifications dans d'algèbre, une typologie des processus de vérification pouvant être mis en œuvre par des élèves de 3ème année collégiale lors d'exercices. Nous avons alors conçu et réalisé une expérimentation visant à favoriser l'utilisation par les élèves de ces processus de vérification. Celle-ci s'est déroulée en trois temps : tout d'abord, un test diagnostique, afin de voir si les élèves vérifiaient spontanément leurs résultats et quels moyens ils utilisaient, puis, lors de la phase de synthèse, nous avons institutionnalisé des processus de vérification que nous avons utilisés dans les exercices, et enfin, nous avons testé la mise en œuvre et l'impact de ces vérifications sur les apprentissages des élèves. Pour résoudre une situation d'apprentissage, l'élève doit pouvoir vérifier les résultats et juger de leur crédibilité. Par conséquent, nous aborderons l'auto-vérification dans la phase collégiale.

Contexte et objectifs de la recherche

Pour résoudre une situation pédagogique dans cette matière, l'élève doit être en mesure de vérifier les résultats obtenus et de juger de leur crédibilité. Tout cela constitue ce que l'on appelle l'auto-vérification (Nimier, 1989) de l'élève, qu'il effectue lors de la réalisation d'une situation.

Par conséquent, à travers notre sujet, nous essaierons d'aborder la nature de l'auto-vérification dans la phase préparatoire. Et les actions automatiques des élèves (qu'elles se produisent ou non en raison de demandes publiques) sont loin d'être une vérification complète ! A minima, l'étape de vérification doit amener les élèves à se poser un certain nombre de questions liées aux différentes étapes de leur processus de résolution (Boufi & Abouhanifa, 2019) : ai-je bien analysé le problème ? Ai-je résolu le problème correctement ? Ai-je communiqué la solution correctement ?

Dans le problème d'étude, face à la production mathématique, l'élève doit pouvoir vérifier son résultat, juger de la cohérence, de la validité et de la rigueur de sa démarche et s'engager de manière réfléchie dans la décision, en faisant preuve de jugement. Ces procédures traduisent la maîtrise de l'élève sur l'activité mathématique et le développement de la pensée mathématique. Quel est le scénario proposé pour développer l'aspect d'auto-vérification des apprenants, et à partir de là, les questions générales mentionnées ci-dessus doivent être divisées en sous-questions plus spécifiques : quelle est l'étendue de la compétence ou de la technique d'auto-vérification des apprenants ?

Quelles sont les méthodes que l'enseignant doit suivre pour développer l'aspect d'auto-vérification des apprenants ? Quels sont les types d'activités qui jouent un rôle majeur dans le développement de l'aspect d'auto-vérification des apprenants ?

Et notre objectif dans cette étude est amener les élèves à développer des stratégies de vérification efficaces, savoir dans quelle mesure les apprenants ont maîtrisé la compétence d'auto-vérification à la lumière des résultats du test, suggérer les méthodes que l'enseignant devrait suivre pour développer l'aspect d'auto-vérification des apprenants et développer le scénario proposé sur les activités qui développeraient l'aspect d'auto-vérification des apprenants. L'importance de l'étude est donc de sensibiliser les confrères à l'importance et à la nécessité de l'auto-vérification à la lumière de l'approche par compétences, de soutenir les professeurs, en particulier les nouveaux diplômés, et leur fournir cette étude pour les aider à approfondir et à mettre à jour leurs connaissances dans le domaine de l'auto-vérification. L'étude répond à un désir personnel et à un intérêt scientifique pour nous, et elle nous aide à éliminer la barrière que l'apprenant ressent lorsqu'il résout une situation grâce à la compétence d'auto-vérification et au mécanisme d'auto-surveillance, ce qui peut augmenter la réussite scolaire et développer la pensée logique et mathématique des apprenants. De plus, l'élève doit être capable de décomposer ces questions générales en sous-questions plus spécifiques et disposer d'un certain nombre d'outils pour tenter d'y répondre correctement. Dans notre sujet, nous travaillerons sur le développement de la soi-disant «vérification».

À propos de la vérification

Aspect théorique

Le processus de production de l'apprenant se déroule en quatre étapes : préparation, collecte d'idées, éclairage (l'étape de test fait partie des méthodes de la solution observée) et vérification (confirmation de la cohérence du résultat avec le requis), voir Hadamard (1975). En effet, au cours de notre étude, nous avons constaté que le mécanisme de vérification ne peut être réalisé qu'en retenant ces quatre étapes. D'autre part, le processus de vérification consiste à déterminer si une tâche est achevée, si un résultat ou un raisonnement est accepté. Selon Balacheff (1988) le processus de vérification relève de la cohérence interne vis-à-vis des connaissances de l'élève et est de l'ordre de la conviction personnelle tandis que le processus de validation relève plutôt de la cohérence interne des savoirs mathématiques et relève aussi de l'ordre de la convention sociale, dans le sens où la preuve a pour but d'établir la vérité par un moyen socialement reconnu. Et nous avons aussi retenu l'importance de la situation dans laquelle se trouve l'élève et de l'évaluation qu'il fait des enjeux de la vérification, en particulier en temps limité. On distingue deux types d'auto-vérification : une vérification basée sur les anticipations et une vérification basée sur le retour à la situation-problème (Coppé, 1993).

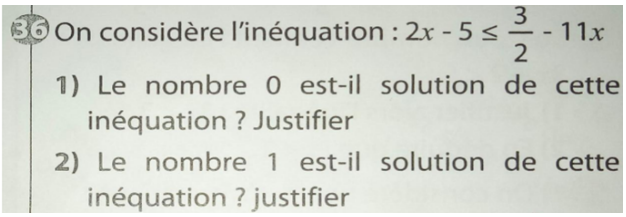
Analyse des programmes

Au Maroc, les équations du premier ordre sont introduites, dès la classe de 1ère année collégiale (élèves de 12-13 ans) et par prolongement en classe de 2ème année collégiale. D'autre part les inéquations sont étudiées par les élèves la première fois en classe de 3ème année collégiale. Les élèves de 1ère et 2ème année commencent juste à manipuler les inconnues mais aucune compétence en termes de travail sur des expressions algébriques n'est exigible. On peut constater que la notion de « test pour des valeurs » est au programme mais en lien avec l'approche de résolutions des équations. Le terme « tester » apparaît donc mais il n'est pas précisé si cette action est liée ou non à une vérification. Les programmes de 1ère, 2ème et 3ème année sont limités seulement à la vérification des solutions obtenues. Cependant l'institution scolaire ne demande pas explicitement aux élèves d'être capables de vérifier un résultat. Dans le programme de 3ème année collégiale, l'accent est mis sur le fait d'utiliser simultanément différents registres (graphique, numérique, algébrique, géométrique). Ainsi, en changeant de registre, on peut vérifier un résultat trouvé. Nous avons donc constaté que les vérifications étaient peu présentes dans les programmes du collège et que seules les vérifications par changement de registres étaient mises en avant dans les programmes de 3ème année.

Analyse des manuels scolaires

Nous avons étudié trois manuels de 1ère année, trois manuels de 2ème année et trois manuels de 3ème année. On peut constater que les vérifications sont peu présentes. Nous avons seulement trouvé les types de vérification suivants : techniques, par condition nécessaire et pas suffisante, par essais, par changement de cadre et par analogie avec un autre problème (Coppé, 1993).

Par exemple, dans le manuel de 3ème année *L'univers des maths* (2019), l'exercice (figure 1) pourrait constituer une vérification de type substitution, mais le terme n'est pas employé. De façon plus générale, nous avons remarqué que certains manuels proposaient des exercices dont la vérification est utilisée implicitement. Ce sont des tâches qui incitent les élèves à vérifier parmi les nombres cités ceux qui réalisent les inéquations.


36 On considère l'inéquation : $2x - 5 \leq \frac{3}{2} - 11x$

1) Le nombre 0 est-il solution de cette inéquation ? Justifier

2) Le nombre 1 est-il solution de cette inéquation ? justifier

Figure 1 – Exercice extrait du manuel « Univers maths » (2019)

Analyse *a priori* du test diagnostic

Dans ce document, nous ne discuterons que du test diagnostic (annexe 1). Ainsi que nous l'avons mentionné dans l'introduction, nous avons opté pour la question du test en relation avec les objets de connaissance : équation/inéquation et la situation problématique. Nous avons par conséquent construit une simulation comprenant trois exercices. Tout d'abord, nous avons suggéré un test diagnostic aux apprenants dans le but de mesurer leur perception du sens des résolutions d'équations, d'inéquations et situations problématiques. Ensuite, une évaluation en classe a été faite sous forme de sondage pour débattre du sens de ces concepts et pour élaborer des processus de vérification. Enfin, les apprenants ont dû utiliser ces processus dans un travail surveillé où les vérifications ont été importantes dans le sens de valider ou parvenir à une solution. Notre choix a été de fournir aux élèves des énoncés presque similaires pour permettre de comparer les résultats obtenus et de juger de tout éventuel progrès. Cette épreuve a été effectuée dans une école de la région de Casablanca-Settat avec une classe de 30 élèves de 3ème année collégiale. Le test a duré environ une heure. Les élèves ont été informés qu'ils devaient travailler en individuel et en silence.

Exercice 1

Pour le premier exercice (annexe 1), nous avons proposé trois équations de premier degré avec une seule inconnue afin qu'elles soient accessibles aux élèves de 3ème année collégiale. Le but est de vérifier les solutions proposées en remplaçant l'inconnue avec les valeurs proposées. Dans ce cas, le mécanisme de vérification consiste à revenir à l'équation et à remplacer x par les valeurs données. L'équation peut avoir une, plusieurs ou une infinité de solutions, et dans le deuxième cas l'inconnue peut être une variable (prend une infinité de valeurs). Nous avons également diversifié les équations pour nous assurer que l'élève est bien à utiliser le mécanisme de vérification en utilisant aussi des connaissances et des prérequis.

Exercice 2

Pour cet exercice, nous avons proposé encore trois inéquations du premier degré (ou qui se ramènent à une inéquation du premier degré) avec une seule inconnue. Le but est de vérifier les solutions proposées en remplaçant l'inconnue par les valeurs proposées. Dans ce cas, le mécanisme de vérification consiste à revenir à l'inéquation et à remplacer x par les valeurs données. L'inéquation peut avoir une infinité de solutions sur un intervalle ou pas de solutions. Et dans cet exercice, nous avons diversifié les inéquations pour nous assurer que l'élève est bien à utiliser le mécanisme de vérification en utilisant aussi des connaissances et des prérequis.

Exercice 3

Nous avons proposé une situation problématique issue de la situation sociale et économique de la société marocaine. Le but est de transformer le contexte en équation de premier degré avec une seule inconnue et ensuite la résoudre ; dans ce cas les apprenants doivent remplacer la valeur obtenue pour vérifier la réponse et donner une interprétation mathématique pour la vérification du résultat obtenu.

Analyse *a posteriori* **des résultats**

Analyse a posteriori pour l'exercice 1

	Les numéros des élèves : Niveau 9ème (30 élèves)																													Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Vérifier								+														+				+					3
Résoudre	+	+	+	+	+	+	+		+	+		+	+							+							+	+			14
Résoudre + Vérifier														+	+															+	3
Pas de réponse											+					+	+	+	+		+		+	+	+				+		10

(+) Signifie que la tâche est réalisée par chaque élève

Tableau 1 - Niveau 9ème (30 élèves), exercice 1

A travers les productions des élèves, nous avons remarqué que le mécanisme de vérification est très faible (tableau 1). Un certain nombre d'entre eux se limitent à résoudre les trois équations sans prédiction préalable à la vérification en substituant les valeurs de proposées dans les équations ; d'autres (E :14-15-30). résolvent correctement leurs équations et la vérification est faite en se référant à la solution de l'équation. D'autres encore, comme (E :1-2-3-4-5-6-7-9-10-11-12-13-20-27-28) ont commis des erreurs en résolvant les équations, d'où l'intérêt de vérifier les solutions proposées. Pour la première et la troisième équations la vérification a été facile pour les élèves (E :8-22-26). Quant à la deuxième équation, son inconnue x dans ce cas est une variable, étant donné que toutes les solutions proposées sont les solutions de la deuxième équation, cette équation demande un engagement réfléchi sur l'écriture, sur le sens de cette écriture algébrique et en résolvant cette dernière équation, on obtient la formule suivante : $0x = 0$. D'après le tableau 1, on observe qu'il y a 10% des apprenants qui vérifient leurs réponses d'une manière directe et 10% qui résolvent et vérifient leurs réponses. En revanche, 80% ne savent plus comment vérifier parce qu'il y a un problème de méta-connaissance, la méta-connaissance ne se situe pas au niveau de la connaissance mathématique (définitions, théorèmes, propriétés) mais plutôt au niveau d'une réflexion sur cette connaissance et par conséquence l'apprenant ici est incapable d'anticiper, de vérifier et de valider la consigne donnée. Dans la suite on choisit quelques productions des élèves qui n'arrivent pas à vérifier les solutions proposées.

L'élève E4 (Figure 2), au lieu de vérifier directement en remplaçant les suggestions données et voir si les équations sont vérifiées, a préféré résoudre les équations pour affirmer les solutions proposées. La vérification était absente chez cet élève.

L'élève E15 (Figure 3) a vérifié les solutions proposées dans la deuxième et la troisième équation mais dans la première équation on peut dire qu'il a préféré vérifier à résoudre l'équation et en général, le mécanisme de vérification a existé fortement chez l'élève E15.

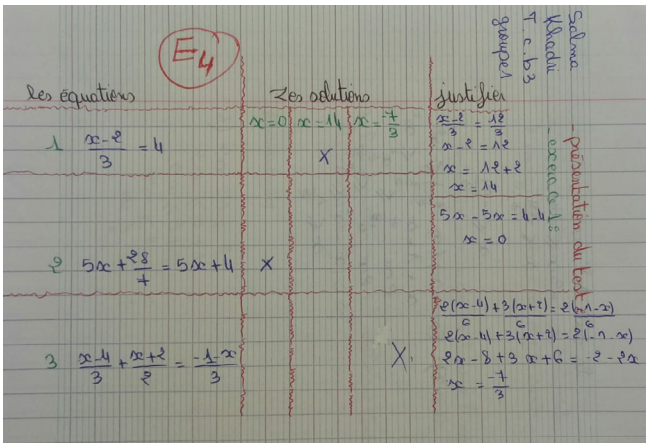


Figure 2 - Production de l'élève E4

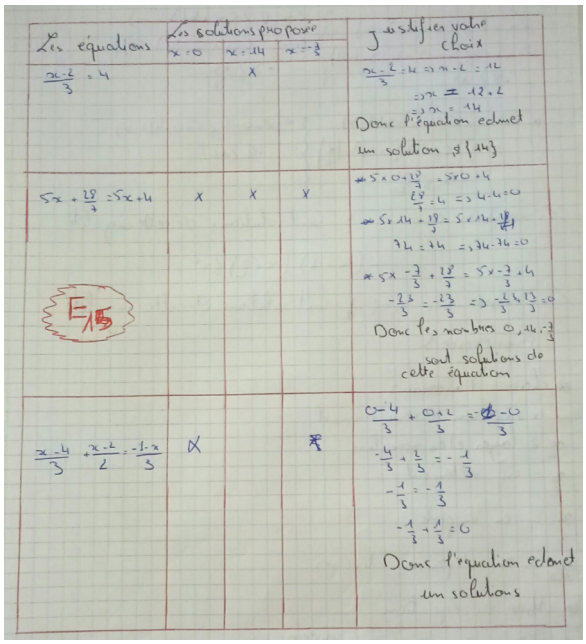


Figure 3 - Production de l'élève E15

Analyse a posteriori pour l'exercice 2

	Numéros des élèves : Niveau 9ème																												Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Vérifier					+										+													+			3
Résoudre	+		+	+			+	+		+	+	+	+			+		+			+	+				+					14
Résoudre + Vérifier		+												+																+	3
Pas de réponse						+			+								+		+	+			+	+	+		+		+		10

Tableau 2 - Niveau 9ème (30 élèves), exercice 2

Concernant les inéquations, le mécanisme de vérification est peu présent dans les réponses des élèves (tableau 2) ; ils se limitent toujours à résoudre des inéquations sans faire référence aux solutions proposées aux inégalités ci-contre sur le test, ils ne savent pas employer la vérification par comparaison en utilisant l'un des signes : < ou ≤ ou ≥ ou >, ce qui montre d'avantage que les élèves ne maîtrisent pas ce mécanisme en anticipant le résultat et que certains d'entre eux ne savent pas y parvenir. Par exemple, dans les trois inéquations, quelques apprenants ont donné une seule solution et d'autres ne parviennent pas (Figures 4 et 5), alors que toutes les réponses proposées sont correctes. Ici, le problème réside dans l'interprétation mathématique à travers l'anticipation des écrits obtenus auprès des apprenants. Par exemple la résolution de l'inéquation 2x-1≤3 conduit à x≤2 et la résolution de l'inéquation 2x-6 ≤ 5x+4 conduit à x≤18 et la résolution de l'inéquation $(x+1)\left(x-\frac{3}{2}\right) \leq x^2$ conduit à x≥-3. Certains apprenants ne réussissent pas à résoudre des inégalités ; Ils seront donc en mesure de se rendre compte de l'erreur, ce qui donne un sens au mécanisme de vérification. En revanche, il y a des élèves (E : 5-15-28) qui ont fait la bonne vérification à travers la substitution de l'inconnue x, ensuite ils ont anticipé le résultat en comparant les membres de l'inégalité.

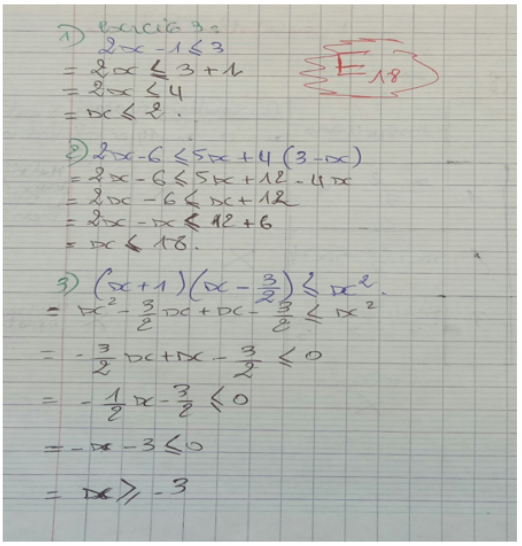


Figure 4 - Production de l'élève E18

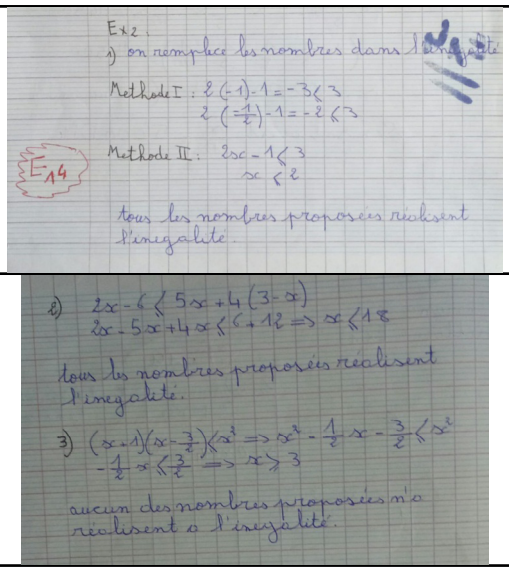


Figure 5 - Production de l'élève E14

L'élève E18 (Figure 4) ne sait pas comment vérifier les solutions proposées. On remarque que les démarches suivies dans les résolutions des trois inéquations sont correctes mais ne sont pas demandées et il n'a pas interprété les résultats obtenus car il y a un problème au niveau du contrôle sémantique pour avoir le sens des choses et un peu de méta-connaissance (définitions, théorèmes, propriétés) pour avoir anticipé que toutes les propositions sont justes pour les trois inéquations. pour une bonne validation, qui réalise une bonne auto-vérification, cela aussi obstrue le mécanisme de vérification.

Pour la première inéquation l'élève E14 (Figure 5) vérifie les solutions proposées par deux méthodes différentes, la vérification était correcte pour la première inéquation ; dans la deuxième et la troisième

inéquation, il a anticipé le résultat en résolvant les inéquations, alors il a choisi une stratégie plus efficace et moins coûteuse en temps. La composante du contrôle utilisée ici est le discernement, le choix éclairé de la stratégie pour faire la vérification.

Analyse a posteriori pour exercice 3

Quant au troisième exercice, il s'agit d'une situation problématique issue de la réalité sociale dont le but est de contrôler le mécanisme d'auto-vérification de l'apprenant. La majorité des élèves n'a pas bien compris le contexte : la plupart des élèves ont dû manquer de connaissances dans les apprentissages précédents, ce qui gêne l'application du mécanisme de vérification. 20 % des élèves ont pu poser l'inconnue, mettre en équation, la résoudre et à la fin ils n'ont pas vérifié leurs réponses. On observe qu'il y a 80% des élèves qui n'arrivent à répondre : il y a un problème avec les prérequis des consignes précédentes.

L'élève E14 (Figure 6) a bien choisi l'inconnue, il a transformé le contenu du contexte en équation, il l'a résolue mais il n'a pas vérifié la solution obtenue. Le problème demande de trouver un revenu, ici il faut encore anticiper que la valeur sera positive, cela demande un peu de méta-connaissance. Enfin la vérification reste toujours absente chez les élèves (E : 5,7,14, 15, 24,30).

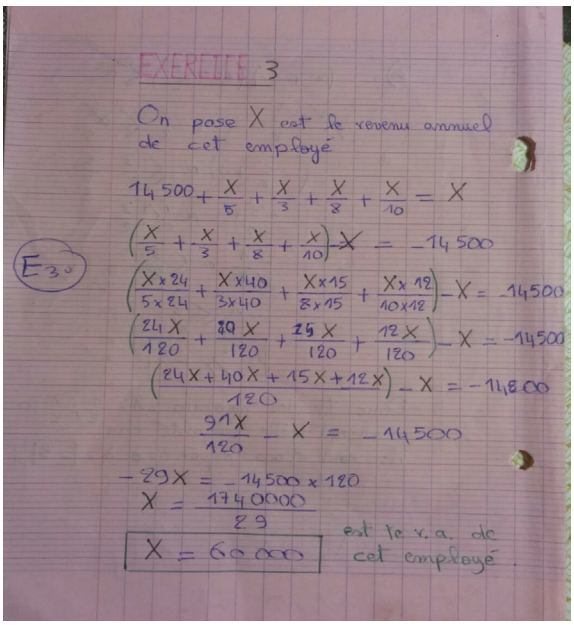


Figure 6 - Production de l'élève E14

Conclusion

Au fil des conversations et par le test diagnostic avec les élèves, il apparaît théoriquement et expérimentalement qu'il y a un problème dans les apprentissages précédents qui sont responsables de l'obstruction du mécanisme de vérification chez apprenant. Dans les différentes approches théoriques adoptées dans la résolution de situations, les théoriciens (Balacheff, 1987 ; Coppé,1993 ; Saboya, 2010) s'accordent sur l'importance de l'étape de vérification, et l'application de ce type de méthode difficile est considérée comme une caractéristique essentielle pour distinguer les experts des novices dans la résolution de problèmes ou de situations. Difficultés de vérification en tant qu'étape abstraite qui surgit dans la pensée de l'apprenant et qui ne peut être contrôlée par l'enseignant. Généralement, l'enseignant essaie de faire acquérir cette compétence à l'élève par des instructions telles que : « révisez votre papier » ou « vérifiez vos réponses ». Nous savons que cette méthode a un faible effet sur l'apprenant en vérifiant sa réponse spontanément, et l'apprenant préfère toujours que l'enseignant l'assure de l'exactitude de sa réponse (Coppé, 1993).

Les résultats apportent également un éclairage par rapport aux défis perçus en lien avec le problème proposé. Le besoin de développer des stratégies de vérification chez les élèves, par une formation massive. D'autres défis, selon les participants, résident dans l'aspect de la confiance en les mathématiques, car le manque de pratique et d'activation du mécanisme de vérification par ses élèves dans le domaine mathématique est perçu comme un obstacle au développement de la stratégie de vérification.

Références

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

Boufi N., Abouhanifa S. (2019) Analyse du processus de résolution d'un problème économique à travers les techniques d'optimisations. *American Journal of Innovative Research and Applied Sciences, 8*(5), 161-176.

Coppé, S. (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de premières scientifiques en situation de devoir surveillé*. Thèse de doctorat inédite. Université de Lyon.

Hadamard, J. (1975) *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*. Gauthier-Villars. Paris.

Nimier, J. (1989). *Entretiens avec des mathématiciens (L'heuristique mathématique)*. IREM de Lyon.

Saboya, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. Thèse de doctorat. Université du Québec à Montréal.

Annexe

Test diagnostic proposé aux élèves

❖ Présentation du test

Consigne : Les correcteurs blancs et les effaceurs sont interdits (barrer proprement en cas d'erreur). Les calculatrices sont autorisées mais il faut écrire sur cette feuille tous les calculs effectués avec.

➢ Exercice 1 :

Remplir le tableau ci-dessous en mettant le signe (x) dans les solutions proposées en justifiant tes choix .

Les équations		Les solutions proposées			Justifier votre choix
		$X = 0$	$X = 14$	$X = \frac{-7}{3}$	
1	$\frac{X-2}{3} = 4$				
2	$5X + \frac{28}{7} = 5X + 4$				
3	$\frac{X-4}{3} + \frac{X+2}{2} = \frac{-1-X}{3}$				

➢ Exercice 2 :

- Les nombres qui sont proposées sont :

$$-1 \quad ; \quad \frac{-1}{2} \quad ; \quad \frac{3}{2} \quad ; \quad 0$$

1. Choisissez parmi les nombres ci-dessus ceux qui réalisent l'inégalité suivante en justifiant votre choix : $2x - 1 \leq 3$
2. Choisissez parmi les nombres ci-dessus ceux qui réalisent l'inégalité suivante en justifiant votre choix : $2x - 6 \leq 5x + 4$
3. Choisissez parmi les nombres ci-dessus ceux qui réalisent l'inégalité suivante en justifiant votre choix : $(x+1)\left(x - \frac{3}{2}\right) \leq x^2$

➢ Exercice 3 :

Un employé dépense un tiers de son salaire en loyer et en nourriture, un huitième en vêtements, un cinquième en impôts et un dixième en dépenses diverses. Si vous savez que l'employé a économisé 14.500 dirhams cette année, quel est son revenu annuel

Titre: Lien entre jeu et apprentissage a travers l'exemple du math's up

Auteurs: DUVAL Alix et GELAMUR Antonin

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1083 - 1095

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Lien entre jeu et apprentissage a travers l'exemple du math's up

DUVAL[1] Alix, GELAMUR[2] Antonin

Résumé – Dans ce texte nous présentons une partie de notre recherche sur le lien entre le jeu et les apprentissages à partir d'une étude de cas sur le jeu Math's Up. Ce jeu consiste à faire deviner des mots en rapport avec des savoirs mathématiques par des formulations orales et par le dessin. Nous présentons le cadre théorique de notre recherche, notre méthodologie ainsi que nos résultats. Ce jeu permet l'apprentissage de la verbalisation et l'ancrage des notions ou une meilleure compréhension de celles-ci à travers différentes représentations.

Mots-clefs : jeu, verbalisation, contrat didactique et ludique

Abstract – In this text, we present a snippet of our research on the relation between game and learning based on a case study, the game called Math's Up. This game consists in allowing to guess words based on mathematical knowledge through oral formulations and drawings. We present the theoretical framework of our research, our methodology and our results. This game brings the learning of verbalisation and the anchoring of notions or a better understanding of them through different representations.

Keywords: game, verbalisation, didactical and play-based contract

1. Collège Pierre Sémard, Drancy, France, alixduval@hotmail.com

2. Collège Irène et Frédéric Joliot-Curie, Pantin, France, antonin.gelamur@gmail.com

Introduction

Le jeu et les mathématiques sont deux univers qui, pour beaucoup d'élèves et certains adultes, paraissent antinomiques. Pourtant, les mathématiques se prêtent au jeu, la Revue de Mathématiques pour l'école lui a même dédié un numéro spécial Jeux (n°231, 2019)[3]. Avant de décrire un certain nombre de jeux mathématiques, la revue propose une introduction historique du rapport entre jeu et apprentissage. Elle montre que dès l'Antiquité, les vertus du jeu sont reconnues et qu'il devient peu à peu pédagogique, essentiellement à partir du 18ème siècle. Claparède (2003) en vante également les mérites. Dans la cadre de la pédagogie fonctionnelle, « l'activité est toujours suscitée par un besoin » (Claparède, p.176). Le besoin spécifique de l'enfant étant, selon lui, précisément le jeu, toute activité présentée sous couvert du jeu « sera susceptible de libérer à son profit des trésors d'énergie » (Claparède, p.178). Nous avons donc décidé d'explorer le lien entre jeu et apprentissage dans le cadre d'un mémoire de recherche à l'INSPE[4] de l'Académie de Créteil, intitulé *Les Mathématiques par les jeux* (Duval & Gélamur, 2019). Pour cela, nous avons expérimenté le jeu Math's Up dans nos classes de sixièmes (11-12 ans) de Seine-Saint-Denis, en France, sur une période d'une année scolaire. Ce jeu dérive du Time's Up, jeu vieux de vingt ans qui consiste à faire deviner des personnages ou des objets en un minimum de temps. Nous avons pensé qu'il serait intéressant de l'adapter en remplaçant les mots à faire deviner par du vocabulaire mathématique. Nous avons ensuite découvert qu'une adaptation avait déjà été réalisée par Asius, Lemoine, et Michau (2017), ce qui a conforté notre choix. Nous nous sommes penchés sur les différentes formes d'apprentissage possibles inhérentes à l'activité produite par ce jeu, sur les mécanismes sous-jacents qui les soutiennent ou qui les freinent, ainsi que sur les moyens qui peuvent être mis en œuvre par le professeur pour les favoriser. Nous souhaitons ici rendre compte d'une partie de ces recherches, en nous focalisant sur nos résultats en termes d'apprentissages mathématiques. Nous commencerons par présenter le jeu et le cadre théorique de notre recherche. Nous exposerons ensuite la méthodologie que nous avons mise en place. Nous terminerons par rendre compte de nos résultats en nous focalisant sur les apprentissages mathématiques.

Présentation du jeu et cadre théorique de notre recherche

Présentation du Math's Up

Pour définir nos règles du jeu nous nous sommes inspirés de notre propre expérience du Time's Up ainsi que de l'adaptation réalisée par Asius, Lemoine et Michau (2017). Ce jeu se joue essentiellement avec deux équipes qui s'affrontent. Il consiste à faire deviner des mots en lien avec des savoirs de mathématiques. Ces mots ont été préalablement inscrits sur des cartes ou des morceaux de papier. Tour

3. https://www.revue-mathematiques.ch/files/1315/5385/2606/RMe-231-web.pdf

4. INSPE : Institut National Supérieur du Professorat et de l'Education

à tour, chaque joueur doit faire deviner à ses coéquipiers un maximum de mots en un temps limité. Lorsque le tas de carte est terminé, l'équipe qui a trouvé le plus de mots remporte la manche. Le jeu se joue en deux manches. Les mots sont à faire deviner par des explications orales lors de la première manche, puis par le dessin lors de la seconde manche. L'équipe gagnante est celle qui a remporté le plus de manches. S'il y a égalité, on peut départager les équipes en comparant le nombre total de mots trouvés sur les deux manches. Il s'agit là de notre adaptation de la règle initiale du jeu. Nous avons identifié plusieurs variables didactiques et ludiques, auxquelles il est possible de donner des valeurs différentes de façon à modifier l'activité mathématique et ludique de l'élève, comme expliqué plus loin.

Les éléments théoriques sur lesquels nous nous sommes appuyés

Pour tenter de savoir en quoi le jeu Math's Up contribue aux apprentissages des élèves et quels types d'apprentissages il permet, nous nous sommes inspirés du cadre théorique que Nicolas Pelay construit dans sa thèse intitulée « Jeu et apprentissages mathématiques » (2011).

Jouer au Math's Up se rapproche des situations d'enseignement dites adidactiques (Brousseau, 1998), c'est-à-dire des situations où les intentions didactiques de l'enseignant ne sont pas clarifiées et restent *a priori* non-identifiables par les élèves. Néanmoins, le Math's Up ne rentre pas exactement dans le cadre décrit par Brousseau dans le sens où ce jeu ne vise pas à faire émerger un savoir mathématique mais à réinvestir des connaissances déjà travaillées par les élèves pour faire deviner un mot le plus rapidement possible en prenant en compte d'éventuelles contraintes. Lorsque les élève jouent, leurs actions et leurs prises de décisions ne sont pas orientées par les intentions de l'enseignant et ce dernier laisse les élèves interagir et s'adapter à la situation sans apporter ses connaissances disciplinaires. Il se crée alors un paradoxe pour l'enseignant, entre la nécessité de veiller à l'exactitude des interactions en lien avec les mathématiques et la distance à prendre pour soutenir le caractère adidactique de l'activité. Cette distance est une condition nécessaire pour que la dévolution opère. L'enseignant doit donc accepter que des erreurs mathématiques soient commises sans intervenir. Dans le cadre proposé par Brousseau, la situation adidactique correspond à un problème pour lequel la procédure de base se révèle insuffisante ce qui contraint l'élève à faire évoluer sa stratégie. La situation est construite de façon à ce que la connaissance visée permette de passer de la stratégie de base à la stratégie optimale. Il distingue les situations d'action, au cours desquelles l'élève avance par tâtonnement et ajuste sa stratégie grâce aux interactions avec le milieu, les situations de formulation au cours desquelles il explicite ses actions, et les situations de validation qui lui permettent d'identifier (seul ou avec ses pairs) des erreurs et des théories locales. S'en suit une situation d'institutionnalisation, pendant laquelle les résultats et les preuves sont établis, le savoir mathématique peut ainsi être décontextualisé. Dans ce jeu les phases d'action et de formulation sont donc intrinsèquement liées. Les rétroactions sont le fait des réponses ou non-réponses des co-équipiers et correspondent aux situations de validation. En fonction des réponses, l'élève réajuste sa formulation, modifie sa stratégie pour faire deviner le mot revenant alors en situation d'action et de formulation, jusqu'à ce

que le mot soit deviné. Il sera donc intéressant d'observer comment ces phases d'action, formulation et validation s'entremêlent et servent les apprentissages.

Pelay (2011) s'inspire des travaux de Duflo (1997, dans ibid.) pour montrer qu'il est nécessaire, de donner la priorité aux enjeux ludiques plutôt qu'aux enjeux didactiques afin de soutenir le processus de dévolution. Selon eux, le contrat didactique n'est pas suffisant pour définir les interactions entre le professeur et les élèves. Il faut lui adjoindre un contrat ludique, défini comme étant « l'acte par lequel le joueur abandonne sa liberté individuelle pour se soumettre à une légalité arbitraire qui produit sa légaliberté qu'il obtient en échange » (Ibid.). Duflo, cité par ibid., a ainsi fait émerger le besoin de construire un modèle articulé autour de deux pôles dans lequel les enjeux ludiques et didactiques participent tous deux au processus d'apprentissage. Il a ainsi défini la notion de contrat didactique et ludique, comme « l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un « éducateur » et un ou plusieurs « participants » dans un projet, qui lie de façon explicite ou implicite jeu et apprentissage dans un contexte donné » (Ibid.). Ce contrat doit donc nécessairement être mis en place en amont et maintenu tout au long du jeu. Pour asseoir ce contrat il est possible de jouer sur un certain nombre de variables didactiques et ludiques comme décrit dans le paragraphe suivant.

Les variables didactiques et ludiques, atouts du Math's Up

Voici la liste non-exhaustive des variables didactiques et ludiques sur lesquelles il est possible d'agir pour garantir les apprentissages tout en restant dans les frontières du jeu définies par les cinq critères de Brougère (2005) : le second degré, la décision, la règle, la frivolité et l'incertitude. Nous détaillons certaines des valeurs que nous avons fait prendre à ces variables lors de nos expérimentations sans le faire sur toutes. Concernant le nombre de thèmes mathématiques abordés : nous avons à chaque fois intégré au jeu des cartes issues de plusieurs thèmes mathématiques ; le choix des thèmes relativement à leur positionnement dans la progression : les cartes étaient issues de séquences déjà abordées dans la progression ; le nombre de mots se rapportant à une même notion : par exemple, plus il y aura de mots se rapportant au cercle (par exemple : rayon, diamètre et corde), plus il faudra apporter de précisions aux formulations et aux schémas pour les différencier ; le(s) concepteur(s) des cartes : le professeur peut les concevoir seul ou peut choisir d'impliquer les élèves dans leur conception ; le contexte de compétition : faire jouer les élèves par équipe et opposer deux équipes, ou supprimer cet esprit de compétition entre équipes en demandant successivement à des élèves de faire deviner des mots à toute la classe ; les contraintes de temps : lorsqu'un élève fait deviner des mots, un chronomètre est enclenché. Une durée suffisamment longue est nécessaire pour que l'élève ose se lancer. Mais limiter ce temps va soutenir la dynamique de la partie ; les différentes phases de jeu jouées, et leur ordre : la phase de verbalisation orale, le dessin, le mot unique (faire deviner le mot avec un seul autre mot), le mime. Ces différentes parties du jeu permettent de solliciter des registres de représentation variés d'un même concept pour que l'élève soit plus enclin à s'approprier la notion ; des mots interdits ajoutés sur les cartes : par exemple, interdiction de dire « rond » pour faire deviner « cercle ». L'élève est ainsi incité à quitter le vocabulaire du quotidien pour aller vers l'utilisation d'un

vocabulaire mathématique ; le droit de passer pour l'orateur si une carte ne l'inspire pas. Cette variable permet de soutenir l'aspect ludique du jeu ; le nombre de réponses possibles à donner par les élèves qui devinent (limité ou illimité). L'orateur devra produire une formulation d'autant plus précise que le nombre de réponses autorisées sera limité ; l'accès à certains matériels : leçon, fiches, lexiques etc. ; les rôles donnés aux élèves : au-delà du caractère fictif apporté au jeu par les rôles, ils nous semblent très utiles pour occuper et responsabiliser les élèves de l'équipe dont ce n'est pas le tour de jouer. Il peut y avoir un élève en charge du chronomètre, un autre en charge de vérifier que l'orateur n'utilise pas un mot écrit sur la carte, etc. ; le type de reprise en fin de jeu : cette phase est très ouverte et peut prendre différentes formes. Le principe est de faire une mise en commun des éléments notables de la partie, soit sur les éléments mathématiques, soit sur le cadre du jeu, avec comme objectif de faire le lien entre le jeu et les apprentissages. Peuvent être abordés le respect des règles, l'évolution de ces dernières, l'attitude des élèves, les erreurs mathématiques. Il est également possible de discuter avec les élèves une notion mathématique et toutes les représentations associées à celle-ci. Les points abordés peuvent venir des élèves ainsi que du professeur en fonction des objectifs qu'il a fixés pour la séance. Riche de ces différentes variables didactiques et ludiques, le Math's Up possède de nombreux atouts. En effet, il repose principalement sur un travail de verbalisation et place ainsi la compétence « communiquer » au cœur de l'activité. Il permet la consolidation des connaissances mathématiques en travaillant sur les différents registres de représentation d'une même notion : par sa définition, par des oppositions, à travers des exemples ou des analogies, par le dessin. En réinvestissant des notions à différents moments de l'année, ce jeu contribue également à un ancrage durable des apprentissages. Il se joue en équipe, et développe ainsi des compétences transversales telles que la coopération entre élèves, le respect d'autrui et la confiance en soi. Les règles et la dynamique du jeu sont évolutives grâce aux nombreuses variables didactiques et ludiques. Cela permet d'éviter une lassitude et garantit une longue durée de vie au jeu. De plus, ce dernier est facile à mettre en place par le professeur en classe.

Problématique

Au regard de ces éléments théoriques nous souhaitons contribuer à l'analyse des liens entre jeu et apprentissage via la pratique du Math's Up. Comment prennent forme ces apprentissages au sein du jeu ? Nous avons analysé les échanges entre élèves et nous nous sommes demandés comment catégoriser leurs formulations et en quoi celles-ci pouvaient être le signe de la consolidation des notions. Nous avons également questionné la valeur ajoutée de la phase de dessin associée à la phase de verbalisation. Enfin nous avons étudié comment était traitée l'erreur par les élèves au sein du jeu, sans l'intervention du professeur.

Nous nous sommes également demandés comment favoriser l'implication des élèves dans le jeu et comment faire le lien entre l'expérience du jeu et les apprentissages. Mais nous ne détaillerons pas ces deux aspects ici.

Méthodologie

Plan d'expérimentation

Nous avons effectué au total six séances de Math's Up, d'une heure chacune, en demi-groupes, dans deux de nos classes de 6ème, c'est-à-dire trois séances avec chaque demi-groupe. Dans chaque demi-groupe, il y avait un ou deux groupes de jeu selon le nombre d'élèves de la classe, avec pour chaque groupe, deux équipent qui s'affrontent, comptant chacune entre 3 et 5 joueurs. Les équipes sont placées atour d'un îlot de tables, et assis en alternant les membres des deux équipes. Dans la suite de ce texte la classe n°1 désigne une classe de 6ème d'un collège REP (Réseau d'éducation prioritaire) de Drancy. La classe n°2 désigne une classe de 6ème d'un collège de Montreuil.

L'objectif de la première séance était de familiariser les élèves avec le cadre ludique et didactique pour la première manche du jeu qui consiste à faire deviner les mots à l'oral. Le jeu est alors constitué de 36 cartes préparées par le professeur, sur des thèmes précédemment abordés en classe. Les deux équipes jouent à tour de rôle. Pour responsabiliser l'équipe dont ce n'est pas le tour de jouer et maintenir les élèves actifs, nous avons distribué des rôles : le maître du temps, chargé du chronomètre, et le contrôleur, chargé de vérifier que l'orateur n'utilise pas un mot qui dérive tout droit du mot à faire deviner. Concernant le temps dont dispose chaque orateur, nous avons choisi une durée de 45 secondes pour les deux classes. Elle fut finalement abaissée à 30 secondes pour la classe n°2 compte tenu de la rapidité des élèves à faire deviner les mots. L'objectif de la deuxième séance était de consolider les acquis concernant le respect des règles et d'introduire la deuxième manche qui consiste à faire deviner les mots par le dessin. Nous avons donc réduit de moitié le nombre de cartes à faire deviner pour laisser le temps aux équipes de terminer le paquet lors des deux manches du jeu. Nous avons investi les élèves dans le choix des nouvelles cartes à jouer pour en étudier les effets. Dans un groupe de jeu de la classe n°2, une contrainte additionnelle a été testée : les joueurs de l'équipe qui devine n'ont eu le droit de proposer qu'une seule réponse à l'orateur. L'objectif de la troisième séance était de pouvoir recueillir des données vidéos des élèves en train de jouer et des reprises en fin de jeu. Par conséquent, elle a fait l'objet d'enregistrements vidéo qui ont été analysés de façon détaillée. De plus, nous avons noté nos observations dans des journaux de bord à l'issue de chaque séance.

Critères d'analyse des séances filmées

Chaque groupe de jeu était filmé par une caméra différente. Nous avons défini des critères d'analyse selon trois axes : la posture des élèves, leurs productions et la posture du professeur. Nous présentons ici uniquement les critères d'analyse des productions d'élèves :

- les stratégies de formulation : la définition, la phrase incomplète, l'exemple, les mots-clés, le contraire ou la mise en opposition, l'analogie avec la vie quotidienne, etc. ;

- les types d'erreur : confusion, manque de vocabulaire, conception erronée, etc. ;
- la gestion de l'erreur : effets d'autocorrection au cours du jeu, erreurs qui ne sont pas rectifiées, répétition des erreurs entre la première et la deuxième manche, etc.

Résultats des expérimentations

Nous présentons ici nos résultats concernant les apprentissages mathématiques. En revanche nous ne développerons pas notre analyse concernant le cadre nécessaire pour favoriser l'implication des élèves d'une part ainsi que la phase de reprise, qui garantit le lien entre jeu et apprentissages, d'autre part.

Les stratégies de formulation des élèves, signes d'apprentissages

Nous allons ici étudier les différentes stratégies de formulation utilisées par les élèves. Pour faciliter l'analyse, nous avons regroupé les stratégies de formulation des élèves selon la classification suivante : la définition, la phrase incomplète, l'opposition, les mots-clés et l'analogie.

L'énoncé d'une définition est une méthode experte, au sens mathématique, pour faire deviner un mot. Correctement dictée, la définition ne laisse aucune place au doute à condition de maîtriser le vocabulaire qui lui est associé. Les élèves ayant un bon niveau mathématique sont plus à même de les utiliser. Un extrait vidéo montre d'ailleurs une élève qui récite parfaitement la définition de la somme : « C'est le résultat d'une addition ! ». Mais face à l'échec de ses coéquipiers, elle leur reproche de ne pas connaître leur leçon. Or, pour certains mots, comme « somme », « produit », « parallèles », la définition est relativement courte, facile d'accès et a donc souvent été utilisée. Au contraire, pour d'autres mots comme « cercle », la définition, « ensemble de points étant situés à une même distance d'un autre point », n'a jamais été tentée. Le recours à la définition semble s'avérer contre-productif pour gagner si elle n'est pas à la portée des autres joueurs de l'équipe. D'autres stratégies, plus rapides et efficaces sont donc devenus très populaires. Les élèves ont souvent recours à la stratégie de « la phrase incomplète », moins exigeante que la définition. Pour faire deviner « confondues », ils diront par exemple : « C'est deux droites qui sont… ». Les élèves ayant le droit à plusieurs réponses tentent tous les mots auxquels ils pensent et finissent par trouver (ex : sécantes, parallèles, perpendiculaires, confondues). Cette stratégie est très efficace pour gagner mais ne pousse pas les élèves à construire des explications précises pour définir une notion. Pour cette raison, dans un groupe, nous avons ajouté une contrainte : autoriser une unique réponse à l'équipe qui devine. L'étude de ce groupe de jeu a confirmé nos attentes : dans un épisode une élève se lance pour faire deviner le mot « milliard » et se trompe en disant « il y a centaine, millième et… ». Un coéquipier répond alors « dix-millième » et puisqu'il n'y a pas de place ici pour se corriger la carte est perdue. Un peu plus tard la carte est piochée à nouveau, et le nouvel orateur prend le soin de dire « il y a mille, million et … » et parvient à faire deviner la carte. Les élèves se doivent de proposer une explication suffisamment précise pour ne pas

la confondre avec une autre notion. L'opposition (ou démarche dialectique) a été très utilisée. Elle a l'avantage d'être rapide à énoncer, parfois au détriment de la justesse mathématique. Par exemple, lors d'une séquence, un élève dit « l'opposition de parallèles » pour faire deviner « perpendiculaires ». La réponse est immédiatement trouvée alors que la formulation désigne plutôt des droites sécantes. Cependant, lorsqu'il y a plus de deux cartes caractérisant un même objet mathématique (ici les cartes « sécantes », « perpendiculaires » et « parallèles » pour caractériser des droites), cela complexifie le recours à l'opposition. Plus le nombre de cartes caractérisant un même objet mathématique est grand, plus la formulation exige de précision. Une autre stratégie de formulation consiste à faire des associations avec des mots-clés, proches de la notion à faire deviner. Par exemple ils diront « il y a les milliards et les… » pour faire deviner « millions ». Ces associations d'idées sont intéressantes pour ancrer le vocabulaire. Mais elles ne garantissent en rien la compréhension de la notion. Nous avons constaté la quasi-absence d'analogies dans les stratégies de formulation d'élèves entre les mots à deviner et les objets du monde réel. Par exemple, pour faire deviner le pavé droit, un élève a tenté en hésitant, « c'est comme une construction ». Un essai fructueux, puisqu'il a mené à la réponse attendue, mais insatisfaisant mathématiquement.

Clairement, la première manche supporte deux types d'apprentissages : elle aide à l'appropriation des notions par les élèves, notamment pour ceux qui ne les ont pas totalement assimilées et elle supporte la verbalisation pour tous les élèves.

Les dessins, plus faciles d'accès que la verbalisation

Globalement, les élèves ont eu plus de facilités à faire deviner les cartes lors de la phase de dessin. Toutefois, le degré de précision de ces dessins varie selon le niveau de compréhension de la notion. Lors d'un épisode filmé, un élève qui entoure un cercle pour faire deviner « périmètre ». Il a bien compris que cette notion n'est pas à confondre avec la surface intérieure, mais sa représentation mentale semble encore en voie d'acquisition. Cette phase de dessin apporte un registre supplémentaire de représentation des notions qui est fort utile pour leur compréhension. Certains commentaires d'élèves montrent que des déblocages ont lieu lors de cette phase. « Ah ! C'est ça le produit ! » s'exclame une élève dans un extrait vidéo.

Etant donné la plus grande facilité des élèves à dessiner plutôt qu'à verbaliser, il semble intéressant d'intervertir les deux manches en commençant par la phase de dessin. Il serait également possible de jouer sur cette variable pour permettre une différenciation en fonction des résultats aux évaluations de mathématiques des élèves.

La gestion de l'erreur

Nous avions évoqué le fait qu'il peut être frustrant pour le professeur de ne pas intervenir pendant le jeu sur l'aspect mathématique, notamment les erreurs. Mais en analysant les vidéos il est apparu

que la plupart des erreurs étaient corrigées au cours de la partie par les élèves eux-mêmes. Certaines erreurs de formulation ou de dessin sont corrigées dans l'immédiat, d'autres sont corrigées a posteriori au cours de la partie. Un exemple de correction immédiate :

> L'élève C a pioché le mot perpendiculaire et dit : « Il y a deux droites et après il y a un angle droit »
>
> L'élève D tente : « Sécantes »
>
> L'élève C : « Non »
>
> L'élève D tente : « Parallèles »
>
> L'élève C : « Non »
>
> L'élève D dit alors : « Perpendiculaire »

Pour les élèves qui devinent, les notions de parallèles, perpendiculaires et sécantes ne sont pas encore claires, mais ils se sont corrigés par eux-mêmes. Il n'est pas évident que la notion soit totalement consolidée à ce stade. Plus tard, lors de la 2ème manche de dessin, l'élève D a également pioché le mot « perpendiculaire ». Il commence par dessiner des droites parallèles au tableau. La notion n'est donc pas totalement stabilisée malgré la manche précédente.

> L'élèves C dit : « Parallèles ».
>
> L'élève D fait non de la tête et se rend compte que son dessin ne correspond pas à la notion de droites parallèles. Elle ajoute alors une droite qui semble perpendiculaire aux deux précédentes.
>
> L'élève A dit alors : « Perpendiculaires »
>
> L'élève D : « Réponse trouvée ! »

A nouveau, l'élève D fait une confusion entre « parallèles » et « perpendiculaires ». La confusion n'apparaît pas comme une erreur puisqu'elle est corrigée par l'élève elle-même suite aux réponses de ses pairs qui lui fournissent une rétroaction. Au cours de cette partie, ce groupe sera revenu quatre fois sur les mêmes notions à travers les cartes « parallèle » et « perpendiculaire », au cours des deux manches (orale et dessinée). Les élèves auront donc été confrontés à des formulations et à des dessins, tout en étant actifs et en ayant un retour rapide sur leurs productions. Il y a donc une vraie plus-value à ce que le jeu comporte plusieurs manches et des cartes avec des notions proches. Voici maintenant un exemple d'erreur corrigée *a posteriori* pendant la partie : l'élève A pioche le mot « rayon » mais il dessine un cercle avec un diamètre.

> L'élève B dit : « Un diamètre ».
>
> L'élève A répond : « Non ! ».
>
> L'élève B dit alors : « Un rayon ».
>
> L'élève A répond : « Oui ! ».

L'élève B, dit discrètement : « Mais c'est pas un rayon… »

L'élève A a donc confondu diamètre et rayon. Mais à la fin de cet épisode, il est peu probable que l'élève A ait entendu la remarque de l'élève B et donc probable qu'il reste avec cette confusion en tête. Six minutes plus tard, c'est au tour de l'autre équipe de faire deviner le mot « diamètre ». L'élève C dessine cette fois-ci un cercle avec un diamètre.

L'élève D dit : « Diamètre ».

L'élève C répond : « Oui ».

L'élève A dit alors : « Ah c'est ça un diamètre ? ».

L'élève B de l'autre équipe confirme : « Oui ».

Par conséquent, cette carte permet de revenir sur la confusion précédente. L'élève A prend d'ailleurs conscience de ce qu'est un diamètre, du moins visuellement. Le fait d'avoir des cartes dont les notions sont proches permet ainsi aux élèves de travailler sur la différence entre ces notions et de les ancrer davantage. Cependant certaines erreurs ou imprécisions ne sont pas corrigées au cours de la partie. Par exemple, au cours de la phase de dessin, un élève écrit « 1000 » pour faire deviner « millième » et cela fonctionne. Cet exemple devrait inciter l'enseignant à revenir sur la notion de « millième » pendant la phase de reprise.

Conclusion

L'analyse des stratégies de formulation met en évidence que les apprentissages dépendent des élèves. Si le jeu permet à certains de travailler la verbalisation, pour d'autres il est davantage l'occasion d'une meilleure compréhension et appropriation des notions. Les apprentissages sont notamment liés aux allers-retours entre des notions proches pendant les différentes phases du jeu, mais aussi aux stratégies de formulation des autres élèves qui, en utilisant leurs propres mots, permettent une meilleure compréhension de la notion. Si les différentes stratégies de formulation permettent à l'élève de développer plusieurs facettes de la représentation d'une notion, la phase de dessin vient la compléter. Pour aller davantage du concret vers l'abstrait, il semble pertinent de commencer la partie par la phase de dessin avant d'aller vers la phase de verbalisation. Dans tous les cas, enchaîner les deux manches est intéressant puisque cela permet d'associer différentes représentations mais aussi de faire émerger des confusions et de donner l'opportunité aux élèves de s'en rendre compte et de réajuster leur conception. En effet, dans le jeu, l'erreur n'est pas perçue négativement par l'élève. Il en prend souvent conscience par lui-même suite au retour de ses camarades et il a l'occasion de se corriger. Soulignons que le professeur peut avoir une influence sur le traitement de l'erreur en jouant sur la variable correspondant au nombre de cartes en lien avec des notions proches. Plus il y a de cartes en lien avec un même thème (par exemple : rayon, diamètre, corde), plus les confusions que les élèves peuvent avoir développées entre ces notions auront l'occasion d'émerger au cours du jeu et d'être corrigées pendant la partie.

La phase de reprise est l'occasion de faire le lien entre le jeu et les apprentissages, notamment pour les élèves plus en difficulté qui ne le font pas spontanément. Elle peut aussi être l'occasion de donner aux élèves des outils pour apprendre, par exemple avec la construction de cartes mentales. Si la conception de l'outil est importante, la question de son réinvestissement pendant l'année est cruciale pour qu'il soit réellement adopté par l'élève. Au-delà des apprentissages mathématiques, il est également apparu pour tous les élèves que jouer s'apprend, mais de façon particulièrement marquée chez ceux qui n'ont pas ou peu l'habitude de jouer. La phase de reprise est dans ce cas indispensable pour que l'élève prenne conscience des points positifs et des difficultés survenues au cours du jeu.

Références

Asius, L., Lemoine, N., Michau, C. (2017). Jouer en accompagnement personnalisé avec Math Speed et Math's Up. Dans *Académie de Créteil, Inspection pédagogique régionale de mathématiques* (dir.). Mathématiques revisitées au cycle 4, 181-186.

Brougère, G. (1997). Jeu et objectifs pédagogiques : une approche comparative de l'éducation préscolaire. *Revue française de pédagogie, 119*, 47 – 56. https://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1997_num_119_1_1166

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : la Pensée Sauvage.

Claparède, E. (2003). *L'éducation fonctionnelle*. Paris : Fabert.

Comité RMé. (2019). Le jeu en mathématiques. *Revue des mathématiques pour l'école*, 231.

Duval, A., Gélamur, A. (2019). *Les mathématiques par les jeux*. [Mémoire inédit]. Université Paris-Est Créteil Val de Marne, Paris, France. Disponible sur la plateforme Dumas : https://dumas.ccsd.cnrs.fr/MEM-UNIV-UPEC/dumas-02279836v1

Pelay, N. (2011). *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. [Thèse de doctorat inédite]. Université Claude Bernard, Lyon I, France.

Titre: Enseignement et apprentissage de la symétrie en 5ème : analyse des difficultés des apprenants et perspectives d'amélioration de l'enseignement

Auteur: EZIN Donatien

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1096 - 1109

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Enseignement et apprentissage de la symétrie en 5ème : analyse des difficultés des apprenants et perspectives d'amélioration de l'enseignement

EZIN[1] Donatien

Résumé - Au cours de notre stage, nous avons observé les élèves d'une classe de 5ème lors d'une séquence sur les notions de symétrie. Suite à l'observation de certaines difficultés chez les élèves, nous avons choisi d'étudier ce thème avec une analyse des difficultés des apprenants et une perspective d'amélioration de l'enseignement. Au terme de notre travail, nous avons élaboré quelques procédés didactiques que nous avons utilisés pour remédier aux difficultés observées chez les apprenants des classes de 5ème.

Mots-clefs : symétrie, apprentissage, difficultés, procédés didactiques, solutions.

Abstract - During our internship, we observed the students of a 5th grade class during the course of a lesson sequence and we noted some difficulties of these learners on the notions of symmetry. It is following these difficulties that we have chosen as the theme: teaching and learning of symmetry in 5th: analysis of learners' difficulties and prospects for improving teaching". At the end of our work, we developed some didactic processes that we used to remedy the difficulties observed among learners in 5th grade.

Keywords: symmetry, learning, difficulties, didactic processes, solutions.

1. Université d'Abomey-Calavi, Bénin, donatienezin@gmail.com
Voir https//www.educmaster.bj

Introduction

La géométrie est une branche des mathématiques qui a pour objet les propriétés des lignes, des surfaces, des volumes. L'étude théorique de ces propriétés est organisée dans un programme dans lequel les savoirs à enseigner, les capacités et habiletés à faire développer chez l'apprenant, sont indiqués que ce soit explicitement ou implicitement sous forme de contenu notionnel selon le niveau d'étude des apprenants. Le guide des programmes d'études de la classe de cinquième au Bénin[2] (2020) recommande que les savoirs à enseigner à ce niveau sur la symétrie par rapport à une droite et par rapport à un point soient notamment les figures symétriques par rapport à une droite, des figures symétriques par rapport à un point, des polygones réguliers inscriptibles dans un cercle (octogones), le symétrique du milieu d'un segment ; de même que le symétrique d'un cercle par rapport à une droite ou par rapport à un point, la notion d'axe et centre de symétrie. Cependant, l'enseignement et l'apprentissage de cette notion, dont l'utilité professionnelle n'est plus à démontrer, pose d'énormes difficultés tant au niveau de l'apprenant qu'au niveau de l'enseignant aussi bien sur le plan pédagogique que didactique. En grande partie, nous avons observé des difficultés de constructions des figures, d'identification des figures symétriques, d'identification d'axe et/ou centre de symétrie dans une figure donnée. Les causes pourraient trouver leurs sources non seulement au niveau des apprenants eux-mêmes mais aussi chez les enseignants, étant donné leurs pratiques pédagogiques et didactiques.

C'est au vu de ces difficultés que notre recherche s'est orientée vers la résolution des questions de programmes de construction, les techniques appropriées à apprendre aux apprenants pour les amener à identifier dans une figure donnée la perpendicularité et le parallélisme de deux droites, une droite (resp. un point) comme axe de symétrie (resp. centre de symétrie) et enfin l'utilisation des définitions et des propriétés pour justifier l'alignement des points. Nous avons consacré tout notre temps pendant la période de notre stage à la recherche des solutions satisfaisantes pour les questions posées ci-dessus.

Problématique

Au cours de notre stage, nous avons observé les apprenants de deux classes différentes de 5ème, face à de nombreuses situations-problèmes pendant l'enseignement et l'apprentissage de la notion de symétrie. Étant donné leurs difficultés à raisonner en utilisant les concepts propres aux mathématiques, ils n'arrivent pas à reproduire correctement un programme de construction, c'est à dire, une construction géométrique avec des instruments appropriés. Le constat amer, c'est la non-maîtrise des définitions et propriétés vues tant en 6ème qu'en 5ème. L'utilité de la symétrie dans la vie active n'étant plus à démontrer, nous avons donc choisi ce thème afin de permettre tant à l'enseignant qu'à

l'apprenant de pouvoir cerner la substance notionnelle de l'apprentissage et l'enseignement de la notion de symétrie.

Cadre de référence

La notion de symétrie est un sujet qui a été, qui est et qui sera toujours d'actualité aussi bien dans le monde que particulièrement dans nos pays où le développement industriel est encore souhaité de tous les vœux, sans doute parce qu'elle touche autant de mondes professionnels. En effet, de l'architecte aux maçons, passant par les ingénieurs des BTP, la symétrie est essentielle pour eux dans l'exercice de leur profession dans le choix des motifs, des modèles de constructions, de pavage, de miroitement, de carrelage, de vitrage, etc.

Plusieurs chercheurs se sont déjà penchés sur les difficultés relatives à l'enseignement et à l'apprentissage de la notion de symétrie. Parmi ces auteurs, évoquons Cassan (1996) qui s'est focalisée sur le thème : ‟Centre de symétrie d'une figure, comparaisons de productions d'élèves de CM2 et de cinquième. ″ L'objectif de sa recherche est de savoir si on peut envisager une même démarche, pour l'étude de la symétrie centrale en cinquième, c'est-à-dire construire cette notion à partir de l'étude de figures admettant un centre de symétrie. Au terme de sa recherche, elle conclut que « l'analyse de l'évaluation commune CM2-5ème a mis en évidence la prégnance de la notion d'axe de symétrie pour la réalisation de tâche mettant en jeu celle de centre de symétrie ». Au vu de l'article précité sur la notion de symétrie, il y a le volet difficulté qui n'a pas été pris en compte. Ce dernier fait justifie l'intérêt de ce travail. Le but de notre recherche est de collecter des informations relatives aux difficultés des apprenants sur la maîtrise de la notion de symétrie afin de proposer des approches de solutions pour y remédier. Pour bien mener cette étude, notre recherche s'articule autour de deux questions fondamentales :

- quels sont les programmes de constructions appropriés pour amener les apprenants à construire le symétrique d'une figure par rapport à une droite et par rapport à un point ?
- quelles sont les techniques appropriées à apprendre aux apprenants pour les amener à identifier dans une figure donnée une droite (resp. un point) comme axe de symétrie (resp. centre de symétrie) ?

L'analyse de ces questions nous amène à formuler deux hypothèses :

- la non-maîtrise des définitions et propriétés serait l'une des causes de la non-maîtrise de la notion de symétrie par les apprenants ;
- la non-maîtrise des programmes de construction serait l'une des causes des difficultés des apprenants à construire/justifier des figures.

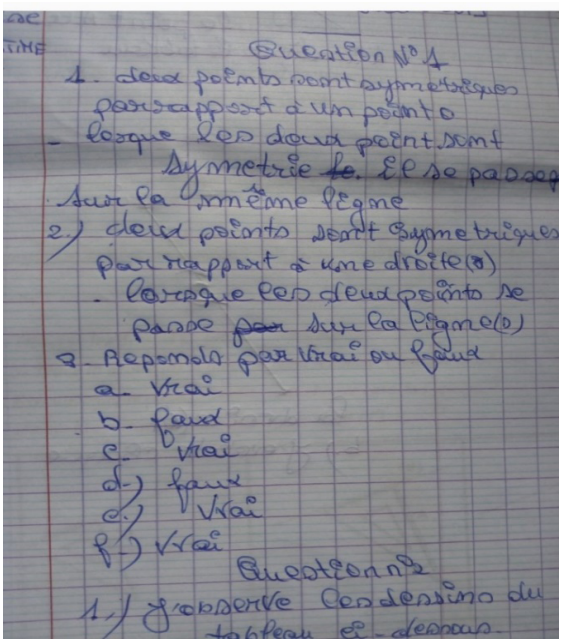
Méthodologie

Choix de l'échantillon

Nous avons ciblé deux populations différentes à savoir : les enseignants (un échantillon de 75 enseignants) ; les apprenants (un échantillon de 97 apprenants de 5ème). Avec des questionnaires appropriés (annexes 1 et 2), nous avons collecté des informations suivant les objectifs de recherche. Ensuite nous avons analysé les données recueillies, question par question afin de confirmer ou rejeter une hypothèse de recherche donnée. Avec les taux de participations de 96,67% pour les enseignants et 98% au niveau des apprenants, la certitude que les analyses et résultats de nos recherches sont bons est garantie.

Description du design.

Au cours de notre recherche nous avons adressé des questionnaires (annexe 1) aux élèves de façon individuelle. Nous les avons soumis ainsi à une composition mais sans tenir compte de la durée. En effet ceci nous a permis de laisser les apprenants restituer tout ce que chacun d'entre eux connait sans stress qui serait éventuellement causé par la durée. Voici en images quelques-unes des productions des apprenants enquêtés (Figures 1 et 2).



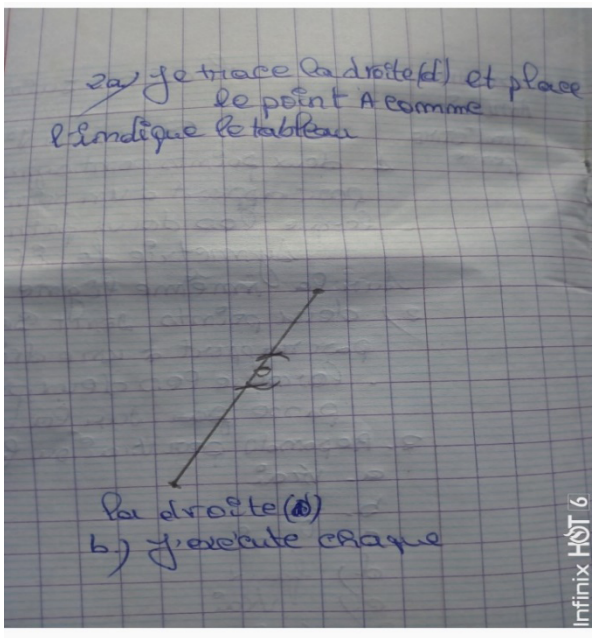


Figure 1 - Production d'un élève en réponse au questionnaire

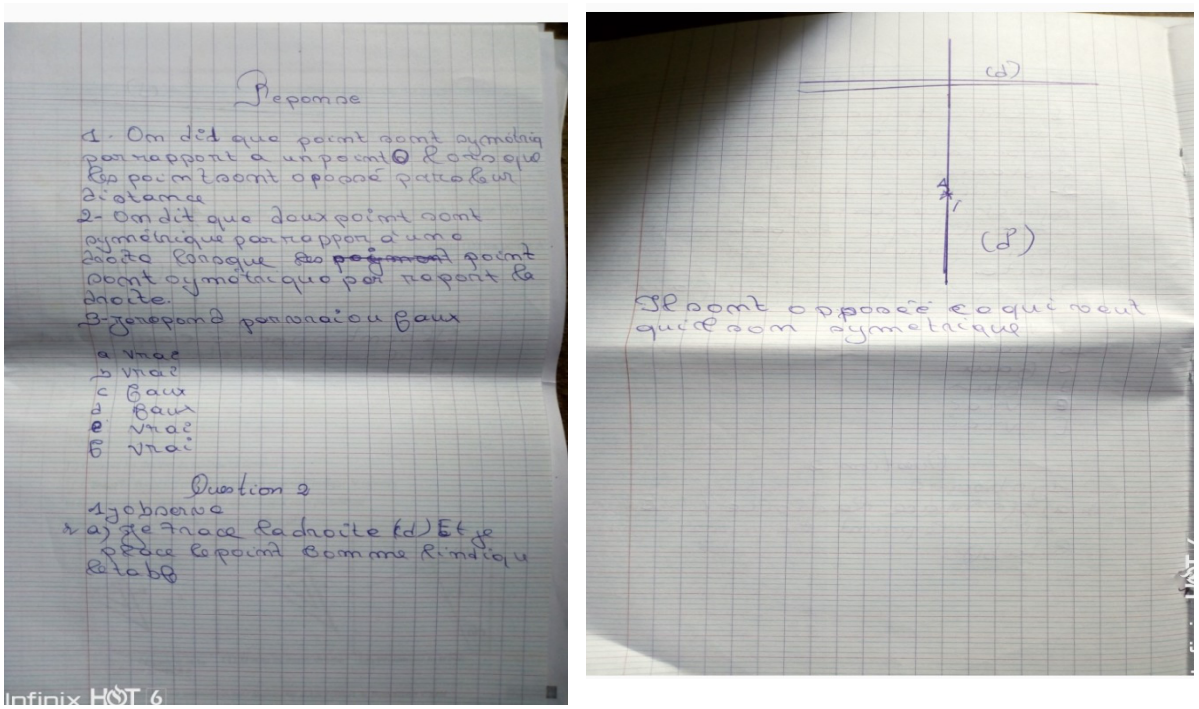


Figure 2 - Production d'un autre élève au questionnaire

Résultats issus du questionnaire

Causes des difficultés des élèves

D'après les résultats des enquêtes, entre 83,34% et 88,54% des apprenants enquêtés n'ont pas fourni au moins une définition ou une propriété sur la symétrie alors que 11,46% à 16,66% des apprenants ont réussi. De plus 82,30% des apprenants enquêtés n'ont pas pu schématiser correctement un programme de construction libellé soit en schéma ou écrit ; contre 17,70% qui ont réussi correctement et savent utiliser des instruments pour faire des constructions. Il s'en suit alors que la non-maîtrise des propriétés et définitions a entrainé chez des apprenants l'inaptitude face à des constructions géométriques. En effet, il est impossible de dissocier (en 5ème) une définition et sa méthode de représentation géométrique. De même, 13,54% des apprenants enquêtés ont pu donner un programme de construction approprié à la figure proposée. La mise en relation de toutes ces informations nous permet de dire que le faible niveau des apprenants par rapport à la notion de symétrie pourrait-être causé par la non-maîtrise des définitions et propriétés et la non-maîtrise des programmes de construction.

Au regard des résultats de l'enquête réalisée auprès des enseignants expérimentés il ressort que 83,33% des enseignants enquêtés estiment que plus de 87% des apprenants ne maîtrisent pas les propriétés et définitions sur la symétrie ; 61,12% estiment que plusieurs apprenants (environ 62,38%)

font une mauvaise manipulation des instruments de géométrie tandis qu'une proportion de 27,45%, bien qu'ils parviennent à réussir une construction, éprouvent des difficultés à choisir l'instrument approprié pour une construction donnée. Par ailleurs, 72,22% des enseignants enquêtés affirment qu'en moyenne 85,60% des apprenants ne sont pas capables de rédiger un programme de construction approprié à la construction d'une figure donnée.

Perspective de solution

Au regard de l'analyse des enquêtes effectuées auprès des élèves et auprès des enseignants, nous avons identifié quelques causes des difficultés des apprenants. Nous allons à présent donner quelques perspectives de solution pour l'amélioration de l'enseignement et apprentissage de la symétrie par rapport à une droite et par rapport à un point. Pour ces perspectives, nous allons fournir un « Panorama d'activités-type » que nous avions déroulé lors des séances de remédiation/consolidation avec près de 91% de succès.

La réflexion mathématique proposée à un élève ne saurait se limiter à la connaissance formelle de définitions, résultats, techniques et démonstration, il est indispensable que les connaissances aient pris du sens pour lui à partir des questions qu'il s'est posées, et qu'il sache mobiliser ces connaissances pour résoudre des problèmes. En ce sens, il convient de faire fonctionner à propos de nouvelles situations les notions et outils mathématiques antérieurement étudiés, c'est-à-dire une activité ayant un caractère de révision. Nous allons premièrement insister sur les constructions de droites perpendiculaires et droites parallèles. Voici ci-dessous (Figure 3) quelques activités et instructions que nous proposons pour améliorer l'enseignement de la symétrie conformément aux indications du guide des programmes d'études au Bénin.

Activité : Construction de la perpendiculaire à une droite passant par un point.

Consigne :

1. Observe les dessins du tableau ci-dessous
2. a) Trace la droite (d) et place le point A comme l'indique le tableau
   b) Exécute chaque consigne écrite sous chaque case du tableau.
3. Donne la position relative des droites (d) et (d').

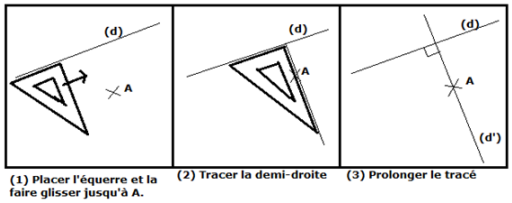


Figure 3 - Exemple d'une activité

Deuxièmement nous allons fournir quelques méthodes (instructions) permettant de bien concevoir un programme de construction (Figure 4).

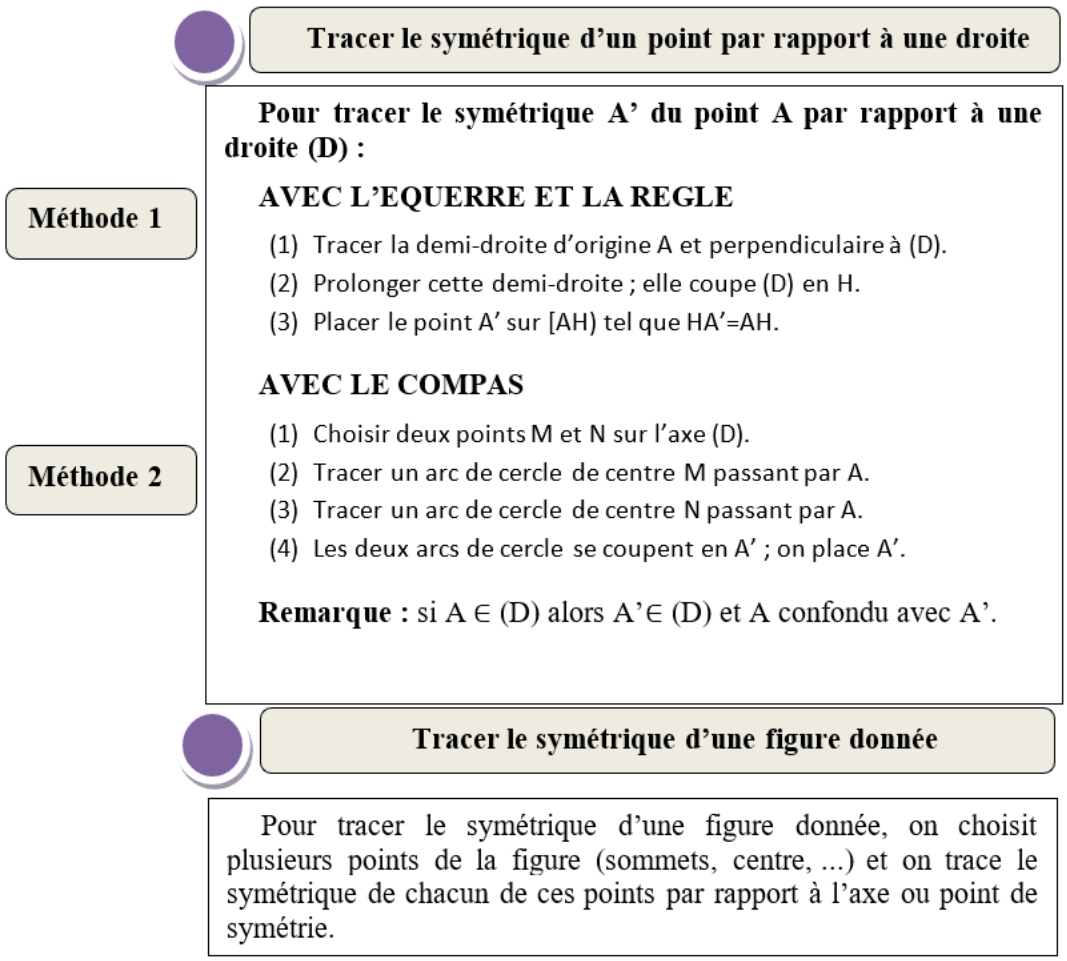


Figure 4 - Exemple d'une méthode

Conclusion

En somme, les difficultés des apprenants liées à la notion de symétrie nous ont amené à nous intéresser aux méthodes didactiques et pédagogiques jadis utilisées pour l'enseignement et l'apprentissage de la symétrie par rapport à une droite et par rapport à un point. Pendant notre stage de professionnalisation, nous avons pu faire des enquêtes qui nous ont permis d'identifier certaines causes des difficultés au niveau des apprenants. Grâce à ces enquêtes nous avons également trouvé des solutions à des questions de recherche. En nous appuyant sur des imperfections constatées par rapport aux formulations des consignes des « cahiers d'activités », nous avons élaboré des activités types qui ont été soumises à des apprenants des classes de 5ème. A l'issu des travaux, des améliora-

tions ont été constatées au niveau des apprenants. C'est donc parallèlement aux méthodes utilisées pour construire ces activités que nous avons proposé des perspectives d'amélioration de l'enseignement/apprentissage de l'enseignement de la symétrie. L'usage de nos perspectives contenues dans ce document pourra contribuer l'amélioration du niveau des apprenants.

Références

CASSAN, S. (1996) *Centre de symétrie d'une figure, comparaisons de productions d'élèves de cm2 et de cinquième*. Équipe Didirem, Irem de Paris VII

Collection CIAM. (1995) *Mathématiques 5 ème* édition EDICEF

Institut National d'Ingénierie de Formation et de Renforcement des Capacités des Formateurs (INIFRCF) (2020). *Guide pédagogique du programme d'études de mathématiques de la classe de cinquième*.

Institut National d'Ingénierie de Formation et de Renforcement des Capacités des Formateurs (INIFRCF) (2020). *Programme d'étude de la classe de cinquième*.

Annexe 1- Questionnaire adressé aux élèves

Question n°1: Tu vas répondre aux questions suivantes en te rappelant des notions vues en classe de 6ème sur la symétrie.

1. Quand dit-on que deux points A et B sont symétriques par rapport à un point O ?
2. Quand dit-on que deux points A et B sont symétriques par rapport à une droite (D) ?
3. Réponds par vrai ou faux aux affirmations suivantes :

a) Lorsque des points sont alignés, leurs symétriques par rapport à la droite (D) sont alignés.

b) Lorsque les points A et B ont pour symétrique par rapport à la droite (D) les points A' et B', les droites (AB) et (A'B') sont symétriques par rapport à la droite (D).

c) Lorsque les points A et B sont symétriques par rapport à la droite (D), les segments [AB] et [A'B'] sont symétriques par rapport à la droite (D).

d) Lorsque deux droites sont parallèles, leurs symétriques par rapport à la droite (D) ne sont pas parallèles.

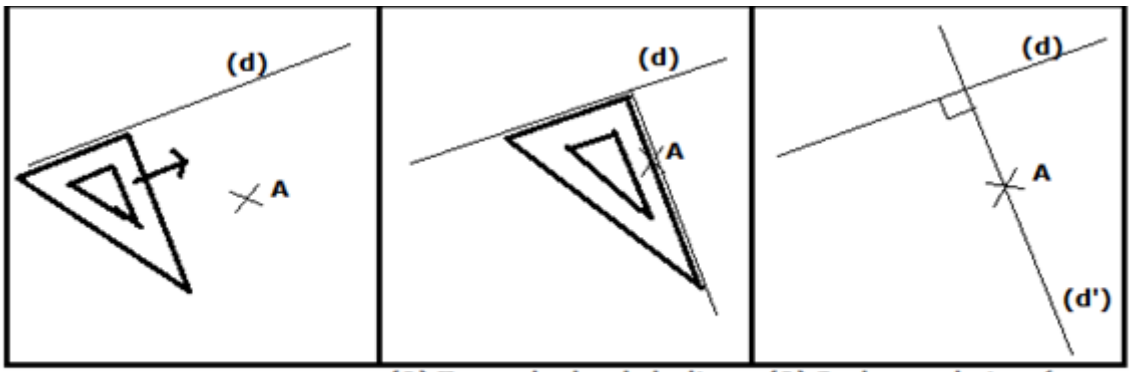
e) Deux segments symétriques par rapport à la droite (D) ont la même longueur.

f) Deux angles symétriques par rapport à la droite (D) ont la mesure.

Question n°2: Exécute la tâche 1 et la tâche 2 dans ton cahier d'exercice

Tâche 1 :

1. Observe les dessins du tableau ci-dessous
2. 2) a) Trace la droite (d) et place le point A comme l'indique le tableau
   b) Exécute chaque consigne écrite sous chaque case du tableau.
3. Donne la position relative des droites (d) et (d').



(1) Placer l'équerre et la faire glisser jusqu'à A. **(2) Tracer la demi-droite** **(3) Prolonger le tracé**

Tâche 2 :

1. Construis un triangle LMN tel que : MN=8cm, LM=6cm et mes $(\widehat{LMN}) = 110°$.
2. Trace la perpendiculaire à la droite (MN) passant par le point L : elle coupe (MN) en K.
3. a) Construis la médiatrice (D) du côté [MN] : elle coupe (MN) en I.
   b) Compare MI et NI en utilisant le compas et dis ce que le point I représente pour le segment [MN].

Question n°3 : Construis (s'il existe) le(s) axe(s) /centre de symétrie des figures 1 et 2.

Figure 1 :

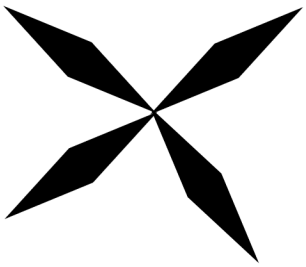
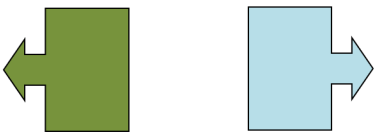
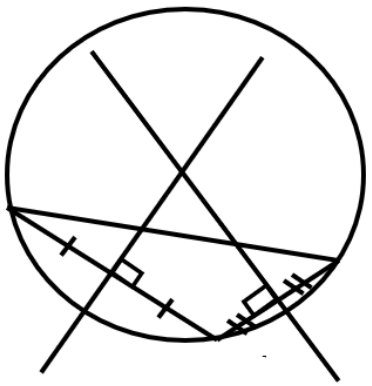


Figure 2 :



Question n°4 : Rédige un programme de construction qui permet de construire la figure suivante.



1-……

2- ……

3-……

Question 5 : Qu'est-ce que tu as gardé sur les applications du plan (SA 3) en 6ème ?

Annexe 2 - Questionnaire adressé aux enseignants

1-Avez-vous gardé une classe de 5ème au moins cinq (05) fois ?

Oui : □ Non : □

Licence classique	Licence professionnelle	BAPES	CAPES	Autres

Si oui répondez aux questions suivantes :

2- Abordez-vous toutes les fois la SA 3 ?

Oui : □ Non : □

Si oui :

3- Si vous évaluez les prérequis avant d'avant d'aborder la SA 3,

a) Quel est en pourcentage le nombre d'élèves ayant le prérequis minimum ? ……

b) Quel est en pourcentage le nombre d'élèves restituant les définitions et propriétés ? (en pourcentage %)……..

c) Combien d'élèves arrivent-ils à construire correctement des droites perpendiculaires/parallèles ? ……. (en pourcentage %)

4- Faites-vous schématiser des programmes de construction par les apprenants ?

Oui : □ Non : □

Si oui : Quel est en pourcentage, le nombre d'apprenants ayant réussi la schématisation complète et correcte de vos programmes de construction ? …… (en pourcentage %)

5- Combien d'élèves selon vous parviennent à rédiger correctement un programme de construction dans vos classes où vous intervenez ? …….. (en pourcentage %)

6- Quelles sont, selon vous les raisons qui expliquent les difficultés de vos apprenants ?

i - ……

ii - ……

Titre: Enseignement et apprentissage des nombres décimaux en classe de 4ème : Difficultés et approches de solutions

Auteurs: FANGNON Audrey et GBOLIBOCO Roland

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1110 - 1121

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Enseignement et apprentissage des nombres décimaux en classe de 4ème : Difficultés et approches de solutions

FANGNON[1] Audrey – GBOLIBOCO[2] Roland

Résumé – Lors de l'enseignement/apprentissage des nombres décimaux en classe de 4ème, nous avons constaté que les apprenants éprouvaient maintes difficultés pour manipuler des expressions contenant des nombres décimaux écrits sous la forme de produit d'une puissance de 10 par un entier relatif. Notre étude confirme ces difficultés, en révèle les éventuelles causes et propose également une approche de solution sous la forme d'une fiche pédagogique qui a été testée en utilisant un design spécifique.

Mots-clefs : nombres décimaux, puissances de 10, apprentissage, difficulté, solution.

Abstract – When teaching/learning decimal numbers in 8th grade, we have found that learners have many difficulties in manipulating expressions containing decimal numbers written as a product of a power of 10 by a relative integer. Our research confirms these difficulties, reveals the possible causes of them and proposes a solution approach in the form of an educational sheet which has been tested using a specific design.

Keywords: decimals, power of 10, learning, difficulty, solution.

1. Université d'Abomey-Calavi (UAC), Bénin, audreyfangnon@outlook.fr

2. Université d'Abomey-Calavi (UAC), Bénin, rolandgboliboco@gmail.com

Introduction

Il est fréquent de constater que les apprenants éprouvent beaucoup de difficultés à faire des opérations avec les nombres décimaux. En classe de 4ème, la notion de nombres décimaux est enseignée sous une forme particulière. En effet, le guide des programmes d'études de la classe de quatrième (INIFRCF, septembre 2020a, septembre 2020b) recommande l'écriture des nombres décimaux sous la forme avec et n des entiers relatifs. Cette forme d'écriture des nombres décimaux est à la base de certaines difficultés des apprenants à encadrer, à comparer et même à calculer le produit des nombres décimaux. Nous avons réellement fait le constat lors de la correction des copies des devoirs surveillés et interrogations que la majorité des élèves des classes de 4ème abandonne les questions relatives aux nombres décimaux. Ceux qui tentent de répondre à ces types de questions, fournissent souvent des résultats faux ou se contentent juste de recopier les nombres tels qu'ils ont été donnés dans la question. C'est dans l'optique de mieux comprendre l'origine de ces difficultés et d'y trouver des solutions que ce travail a vu le jour.

Cadre de référence et problématique

Plusieurs chercheurs se sont déjà penchés sur les difficultés relatives à l'enseignement et à l'apprentissage des nombres décimaux. Au nombre des auteurs lus, Roditi (2009) s'est focalisé sur la « comparaison des nombres décimaux, la conception et l'expérimentation d'une aide aux élèves en difficultés ». L'objectif de sa recherche est de comprendre les difficultés auxquelles sont confrontés les élèves pour comparer des nombres décimaux. Il conclut que :

> La procédure de comparaison des nombres décimaux ne repose pas seulement sur un traitement syntaxique de l'écriture décimale, elle repose aussi simultanément sur un traitement sémantique qui met en jeu l'ordre de grandeur des nombres à comparer (Roditi, 2009, p.23).

En effet, l'enseignement se focalise beaucoup plus sur le traitement de l'écriture numérique, ce qui ne facilite guère la tâche aux apprenants en difficulté. Ces derniers s'en sortent bien lorsque ces mêmes nombres sont introduits dans un contexte. D'autre part, Brousseau (1981) et El Baby (2016), vient compléter les conclusions de Roditi en faisant ressortir que certains enseignants et apprenants conçoivent les nombres décimaux comme un couple d'entiers séparé par une virgule. Ce qui serait à l'origine des erreurs comme : « 3,6 × 2 = 6,12 » ou encore « 47,2 < 47,123 ». Par ailleurs, Favre & Morel (2014) étudient l'existence éventuelle d'une corrélation entre la connaissance des nombres décimaux et les opérations avec ces nombres ; ils concluent qu'une bonne connaissance des nombres décimaux n'est pas liée à une bonne connaissance des opérations avec les nombres décimaux.

Au vu de tous les articles précités, le volet de la notation n'a pas été pris en compte. Ce dernier fait justifie l'intérêt de ce travail. Le but de notre recherche est ainsi de collecter des informations relatives aux difficultés des apprenants à manipuler la forme afin de proposer des approches de solutions

pour y remédier. Pour bien mener cette étude, notre recherche s'articule autour de deux questions fondamentales :

- Quelles sont les causes des difficultés des apprenants à concevoir les nombres décimaux écrits sous la forme $a \times 10^n$?
- Comment amener les apprenants à mieux comprendre les nombres décimaux écrits sous la forme $a \times 10^n$?

L'analyse de ces questions nous amène à formuler comme hypothèse que, la mauvaise compréhension de la définition des nombres décimaux et des propriétés relatives aux puissances de dix à exposants entiers relatifs serait à l'origine des difficultés que rencontrent les apprenants.

Méthodologie

Nous avons choisi comme échantillon expérimental, cent (100) apprenants de la classe de $4^{ème}$ du Collège d'Enseignement Général (CEG) Le Plateau qui se situe à Womey dans la commune d'Abomey-Calavi au Bénin.

Afin de mieux mener à terme notre étude, nous nous sommes conformés au plan d'action suivant :

- Élaboration d'un questionnaire pour vérifier l'effectivité des difficultés des apprenants à manipuler les nombres décimaux écrits sous la forme avec et n des entiers relatifs ;
- Administration et dépouillement des questionnaires ;
- Interprétation des résultats et proposition d'une approche de solutions ;

Présentation du questionnaire

Le questionnaire (annexe 1) est composé de six catégories de questions et sera administré uniquement aux apprenants de la classe de 4ème. La première question nous fournira la représentation que les apprenants ont des nombres décimaux alors que la deuxième question nous renseignera sur la compréhension de l'écriture des nombres décimaux sous la forme $a \times 10^n$ avec a et n des entiers relatifs. Puis vient la troisième question, qui nous informera sur la reconnaissance des nombres décimaux par les apprenants. Et enfin, les questions 4, 5 et 6 sont destinées à faire ressortir l'aptitude des apprenants à manipuler (comparer, faire des opérations arithmétiques, encadrer) les nombres décimaux écrits sous la forme $a \times 10^n$. Etant donné que chaque catégorie de questions est destinée à vérifier une aptitude précise chez l'apprenant, nous ferons l'analyse statistique des réponses des apprenants pour chaque catégorie de questions. Nous procéderons de cette manière dans l'optique d'identifier les éventuels problèmes des apprenants afin de proposer des approches de solutions idoines.

Choix de l'échantillon.

Au cours de notre investigation, nous avons adressé des questionnaires aux élèves de façon individuelle mais sans tenir compte de la durée. En effet, ceci nous a permis de laisser les apprenants travailler sans stress. Nous avons d'abord procédé au choix de 40 apprenants sur le total des 100 apprenants ayant participé au test pour former une *classe C*. Ensuite, nous avons effectué une subdivision de cette dernière (*classe C*) en deux sous-classes C_1 et C_2 en nous basant sur le classement obtenu à partir de la somme des indices[3]. Cette stratégie nous a permis d'avoir deux sous-classes bien équilibrées. La figure 1 ci-dessous montre comment la subdivision a été effectuée.

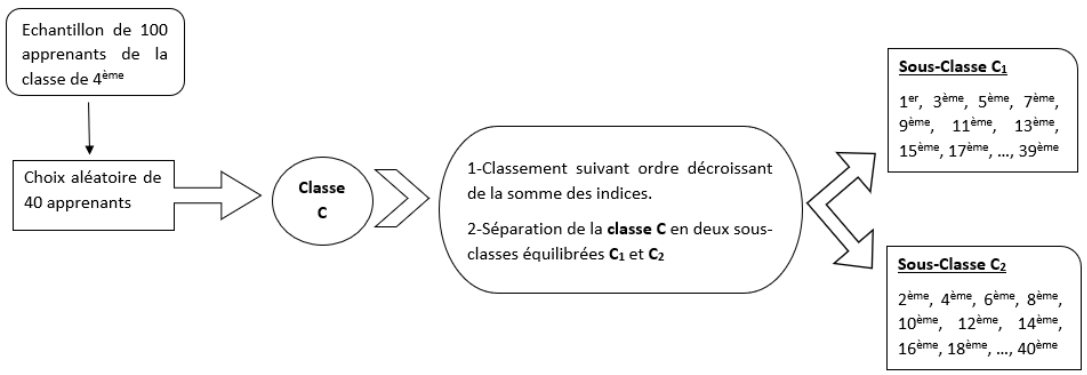


Figure 1 - Schéma explicatif de la subdivision de la **classe C**.

3. Somme des indices : c'est la note sur 20 correspondants à chaque questionnaire rempli. Chaque question du questionnaire valant une pondération égale à 1 point.

Description de l'activité de remédiation (fiche pédagogique).

Les interprétations résultant du dépouillement du questionnaire nous ont permis d'élaborer une activité de remédiation comportant des consignes spécifiquement élaborées pour résoudre les lacunes des apprenants. Notre fiche pédagogique comporte de manière générale trois activités. La première activité est subdivisée en quatre consignes abordant chacune une manipulation sur les nombres décimaux. La consigne 1 introduit les nombres décimaux (sous la forme a X 10^n avec a et n des entiers relatifs) à partir des fractions décimales et rappelle les propriétés sur les puissances de 10. Quant aux consignes 2, 3 et 4, elles s'intéressent respectivement à la multiplication, à l'encadrement et à la comparaison des nombres décimaux sous la forme a X 10^n. Ces consignes sont étoffées de remarques, de propriétés et d'astuces pour faciliter les manipulations. Ensuite, vient l'activité 2 titrée : « Réinvestissements » qui permet de mettre en application les connaissances acquises sur les nombres décimaux. Cette activité est immédiatement suivie par une évaluation formative qui amène les apprenants à s'auto-évaluer et à corriger les éventuelles erreurs qui persisteront. Enfin, l'activité 3 (Retour et projection) achève la fiche pédagogique en permet d'une part à l'enseignant de savoir si l'objectif pédagogique est atteint et d'autre part aux apprenants d'identifier des situations de la vie courante où les connaissances acquises seront utiles.

Description du design

Notre recherche étant menée vers la fin de l'année scolaire, il est à noter que les apprenants ont déjà suivi le cours sur les nombres décimaux avec leurs professeurs titulaires. Pour tester l'efficacité de notre activité de remédiation, nous avons élaboré un design. En effet cette phase de test s'est déroulée en deux étapes. D'une part, nous avons déroulé la fiche pédagogique uniquement avec la sous-classe C_1. Ce qui a été immédiatement suivi d'une première évaluation de tous les apprenants des deux sous-classes réunies. D'autre part, nous avons administré la même activité de remédiation à la sous-classe C_2 puis procédé à la seconde évaluation de tous les apprenants comme ce fut le cas lors de la 1ère évaluation. Cette seconde évaluation nous permettra d'évaluer l'efficacité de notre activité de remédiation. La figure 2 décrit dans les moindres détails le design utilisé.

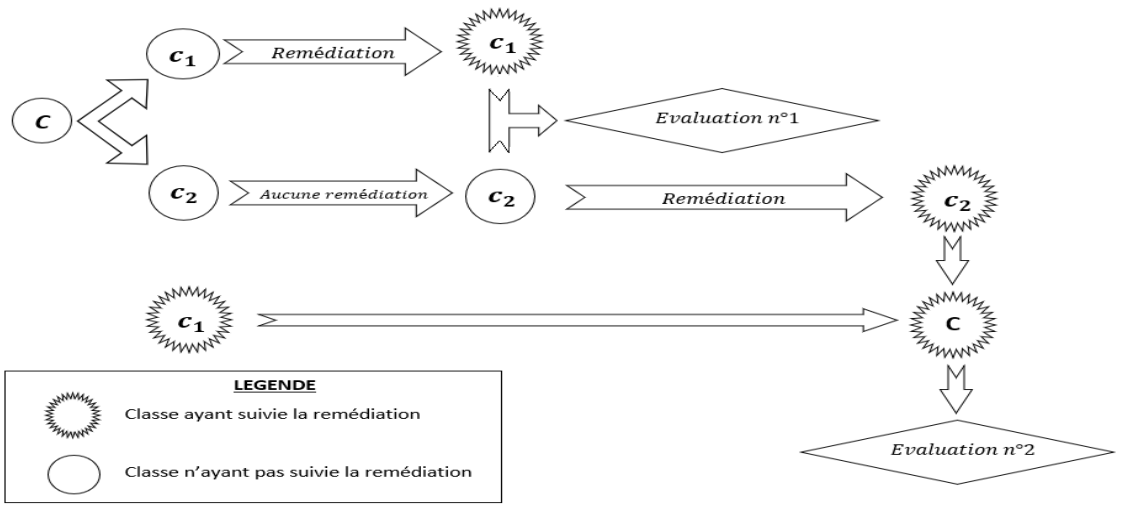


Figure 2 - Schéma du design

Résultats et analyse

Questionnaire de recherches

Après le dépouillement des réponses au questionnaire (annexe 1), les résultats issus de l'analyse statistique des réponses pour chaque question sont consignés dans le tableau 1 ci-dessous.

Questions		Bonne réponse par expression (%)	Moyenne des bonnes réponses (%)
1-Définition		05	05
2-Ecriture des nombres décimaux	Reconnais qu'il y a plusieurs écritures	44	44
	a) 125,8547	45	35,25
	b) 0,009856	52	
	c) 8525	14	
	d) $7/_{25}$	30	
3-Reconnaissance des nombres décimaux	a) 0,007	92	61,2
	b) 25	15	
	c) $3/_{2}$	80	
	d) $^{20}/_{30}$	26	
	e) 12,5	93	
4-Comparaisons	a) 47×10^{-6} et 47×10^{-7}	54	65,33
	b) 46×10^{-7} et 47×10^{-7}	69	
	c) 47×10^{-6} et 46×10^{-7}	73	

5-Opérations arithmétiques	a) $(4\times10^{-1}) + (3\times10^{2})$	01	04
	b) $(4\times10^{-2}) - (7\times10^{2})$	01	
	c) $3{,}201 \times (2\times10^{-2})$	04	
	d) $\frac{4\times10^{-3}}{2\times10^{-2}}$	10	
6-Encadrement par deux puissances de 10 d'exposants consécutifs	a) _ 8×10^{-7} _	23	22
	b) _ 4×10^{11} _	21	

Tableau 1 - Résultats statistiques des réponses par question.

Nous avons regroupé les réponses à la question 1 en trois catégories à savoir :

- Catégorie A : un nombre décimal est un nombre qui peut se mettre sous la forme d'un produit d'un entier par une puissance de 10.
- Catégorie B : un nombre décimal est un nombre qui comporte une virgule.
- Catégorie C : autres définitions incorrectes.

	Catégorie A	**Catégorie B**	**Catégorie C**
Pourcentage	5%	77%	18%

Tableau 2 - Détail sur la question 1 (Maîtrise de la définition)

Après le dépouillement des questionnaires, nous avons identifié plusieurs difficultés des apprenants. Primo, la majorité des apprenants considère les nombres décimaux comme étant des nombres comportant une virgule. Secundo, les apprenants ne savent pas qu'un nombre décimal peut s'écrire de diverses façons sous la forme de produit d'une puissance de 10 par un entier relatif. Tertio, moins de 4% des apprenants sont capables d'effectuer correctement des opérations arithmétiques avec les nombres décimaux écrits sous forme de produit de puissance de 10 par un entier. Du fait que ces écritures font intervenir les puissances de 10, on peut imputer ces mauvais résultats à la méconnaissance des propriétés sur les puissances de 10.

Activité de remédiation

Une fois l'activité de remédiation élaborée en prenant en compte l'interprétation des résultats issus du dépouillement des questionnaires, nous avons mis en application le design pour tester sa fiabilité. Le tableau 3, ci-dessous présente l'analyse statistique des résultats issus des évaluations 1 et 2 de notre design (annexe 2).

Evaluation	Sous-Classe	Notes < 10	Notes ≥ 10	Taux de réussite par sous-classe	Taux de réussite générale
Evaluation 1	C_1	04	16	80%	52,5%
	C_2	15	05	25%	
Evaluation 2	C_1	02	18	90%	80%
	C_2	06	14	70%	

Tableau 3 - Analyse statistique des notes obtenus lors des évaluations 1 et 2

Il ressort de l'analyse du tableau 3 qu'à la première phase du test sanctionné par l'évaluation 1, le taux de réussite des apprenants ayant suivi la remédiation (Sous-Classe C_1) est de 80% alors que celui des apprenants n'ayant pas suivi cette remédiation (Sous-Classe C_2) est de 25%. D'autre part, le taux de réussite général de la classe C qui était de 52,5% à l'issue de cette première phase est passé à 80% à la fin de la seconde phase. Cette dernière étant achevée par l'évaluation 2. Les différences significatives nous montrent clairement l'impact positif de notre activité de remédiation.

Conclusion

En somme, les difficultés des apprenants liées à la notion de nombres décimaux nous ont amené à nous intéresser aux méthodes didactiques et pédagogiques utilisées pour l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux en classe de $4^{ème}$. En nous appuyant sur les difficultés constatées par rapport à la manipulation des nombres décimaux écrits sous la forme de $a \times 10^n$ avec a et n des entiers relatifs, nous avons élaboré des remédiations auxquelles des apprenants des classes de $4^{ème}$ ont été soumis. A l'issue de ces travaux, des améliorations notables ont été constatées au niveau des apprenants. C'est donc parallèlement aux méthodes utilisées pour construire ces activités que nous avons proposé des perspectives d'amélioration de l'enseignement et de l'apprentissage des nombres décimaux en classe de $4^{ème}$.

Références

Brousseau, G. (1981). Problème de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 2*(3), 37-127.

Collection CIAM. (1995) *Mathématique 4ème édition* EDICEF

El Baby, K. (2016). *Les obstacles didactiques relatifs à l'enseignement des décimaux*. Mémoire professionnel du Master MEEF Professeur des écoles - Université TOULOUSE Jean Jaurès.

Favre, B., Morel, K. (2014). *Les nombres décimaux au secondaire 1*. Mémoire professionnel du master of arts et Diplôme d'enseignement pour le degré secondaire 1. Haute Ecole Pédagogique de Vaud.

Institut National d'Ingénierie de Formation et de Renforcement des Capacités des Formateurs - INIFRCF (septembre 2020a). *Guide pédagogique du programme d'études de mathématiques de la classe quatrième*. Benin

Institut National d'Ingénierie de Formation et de Renforcement des Capacités des Formateurs - INIFRCF (septembre 2020b). *Programme d'étude de la classe de quatrième*. Benin

Roditi, E. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 12*, 55-81.

Annexe

Annexe 1 : Questionnaire de confirmation du constat.

1-Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?

_ _ _ _

Annexe 2

- Evaluation formative n°1

EVALUATION FORMATIVE N°1

Classe : $4^{ème}$ **Durée** :20 min

On considère les nombres suivants : a = 0,00692 ; b = 4000 ; x = $\frac{a}{b}$ et y = 0,000095.

1- Ecris les nombres a, b et y sous la forme de $p \times 10^n$ avec p, n ϵ Z, puis en déduire l'écriture de x sous la même forme.

2- Donne un encadrement de x par deux puissances de 10 d'exposants consécutifs que tu préciseras.

3- Compare x et y.

- Evaluation formative n°2.

EVALUATION FORMATIVE N°2

On considère les nombres suivants :

$X = 0{,}0000014;$

$Y = 10^4 \times 10^{-7} \times \frac{1}{10^{13}}$;

$Z = 3145 \times 10^{20}$;

$T = 623 \times 10^{22}$;

$U = \frac{(10^{-4})^3}{10^{-7}}$

1) Ecris sous forme d'une puissante de 10 les nombres X, Y et U.

2) Compare Z et T.

3) Donne un encadrement de T par deux puissances de 10 d'exposants consécutifs que tu préciseras.

Titre: Lien entre jeu et apprentissages mathématiques à travers l'exemple du Math's UP

Auteurs: GELAMUR Antonin et DUVAL Alix

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1122 - 1135

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Lien entre jeu et apprentissages mathématiques à travers l'exemple du Math's UP

GELAMUR[1] Antonin et DUVAL[2] Alix

Résumé – Le Time's Up est un jeu qui consiste à faire deviner un maximum de mots à son équipe. Modifié et adapté au programme de mathématiques de sixième en France, celui-ci, renommé Math's Up, permet aux élèves d'enrichir entre pairs leurs connaissances mathématiques dans un contexte ludique. Cette étude se penche sur les postures d'élèves et sur celle de l'enseignant, prises durant le jeu du Math's Up, en lien avec les apprentissages mathématiques.

Mots-clefs : jeu, mathématiques, apprentissage, expérimentation, institutionnalisation.

Abstract – Time's Up is a game that consists of having your team guess as many words as possible. Modified and adapted to the sixth-grade mathematics program in France, renamed Math's Up, this game allows students to enrich their mathematical knowledge among peers in a fun context. This study focuses on the postures of the student and those of the teacher, taken during the game of Math's Up, in connection with mathematical learning.

Keywords: game, mathematics, learning, experimentation, teaching.

1. Enseignant de Mathématiques au Collège Irène et Frédéric Joliot Curie de Pantin, France, antonin.gelamur@gmail.com

2. Enseignante de Mathématiques au Collège Pierre Semard de Drancy, France, alixduval@hotmail.com

Introduction

Le jeu et les mathématiques sont deux univers qui, pour beaucoup d'élèves et certains adultes, paraissent antinomiques. Pourtant, les mathématiques se prêtent au jeu et il est possible, en classe, de faire des mathématiques en s'amusant.

Dans le cadre d'un co-mémoire de recherche à l'INSPE de l'Académie de Créteil sur une période d'une année scolaire, Alix Duval et moi-même avons expérimenté le Math's Up dans nos classes de sixième (élèves âgés de 11-12 ans) de Seine-Saint-Denis, en proche banlieue parisienne. Au travers d'associations d'idées, de formulations orales ou de schémas, ce jeu consiste à faire deviner des mots en lien avec les concepts mathématiques étudiés en classe. Il permet ainsi aux élèves de remobiliser leurs connaissances disciplinaires et développe leurs compétences en communication dans un contexte ludique.

Nous nous sommes penchés sur les différentes postures prises par les élèves-joueurs durant la partie et sur leurs liens avec les apprentissages, ainsi que sur les moyens qui peuvent être mis en œuvre par la personne enseignante pour favoriser les apprentissages.

Présentation

De nombreuses adaptations du jeu de base Time's Up sont possibles. Dans la version que nous avons proposée aux élèves, inspirée de celle d'Asius, Lemoine et Michau (2017), deux équipes s'affrontent. Il d'agit de faire deviner des mots en lien avec des savoirs mathématiques du programme de sixième en France, comme « milliard », « losange » ou encore « périmètre ». Ceux-ci ont été préalablement inscrits sur des cartes à jouer. Tour à tour, chaque joueur doit faire deviner un maximum de mots à ses coéquipiers en un temps limité. Une première manche n'autorise que les explications orales, une deuxième uniquement le dessin. Le joueur à qui revient le tour de faire deviner les mots est appelé « orateur » ou « dessinateur », selon la phase de jeu. Une équipe remporte une manche lorsqu'elle a trouvé plus de mots que son adversaire. Une règle du jeu plus complète est disponible dans notre mémoire (Duval & Gélamur, 2019, p. 67).

Le Math's Up possède de nombreux atouts. Il repose en partie sur un travail de verbalisation orale et permet des allers-retours entre différents registres de représentation d'une même notion mathématiques. L'élève-joueur choisit la façon de faire deviner un mot en s'appuyant sur la définition, sur une opposition ou bien encore sur une analogie avec la vie courante. Le Math's Up se jouant en équipe, il peut amener au développement de compétences de savoir-vivre transversales. Son utilisation sur une base régulière dans l'année permet le réinvestissement des notions. Enfin, l'activité mathématique et ludique est évolutive grâce aux nombreuses variantes que peut imaginer mettre en place l'enseignant.

Cadre théorique et problematisation

Il est essentiel ici de présenter les fondements théoriques sur lesquels nous nous sommes appuyés pour préparer notre travail. C'est en effet à partir de nos lectures que nous avons identifié les concepts et les mécanismes mis en œuvre dans la dialectique jeu-apprentissage de notre activité, puis que nous avons pu terminer d'échafauder les questionnements qui ont orienté nos expérimentations sur le terrain.

Le cadre théorique

Notre socle théorique s'inspire des écrits de Nicolas Pelay (2011). Il y reprend des concepts capitaux pour qui tente d'étudier les processus d'apprentissages mathématiques par le jeu.

Le jeu. Pelay rappelle les cinq critères de Brougère (2005) qui fondent les frontières du jeu:le second degré, la décision, la règle, la frivolité et l'incertitude.

La théorie des situations. Selon Brousseau (1998), le triangle didactique s'articule autour de trois pôles : l'enseignant, l'élève et la situation. Nous pensons que jouer au Math's Up se rapproche des situations d'enseignement dites adidactiques, c'est-à-dire que les intentions didactiques de l'enseignant ne sont pas clarifiées et restent a priori non-identifiables par les élèves. Les procédures employées par les élèves se construisent et s'adaptent en réponse aux rétroactions émises par la situation. A noter qu'ici les élèves ne sont pas dans une situation d'apprentissage à proprement parler puisqu'ils ne découvrent pas une nouvelle notion, mais mobilisent des notions déjà abordées en classe. Comme l'expliquent Boissière, Pelay et Rougetet (2017), le jeu est « un véritable moteur de la dévolution » (p. 67) des apprentissages. C'est-à-dire qu'il favorise le transfert des responsabilités vis-à-vis du savoir mathématique de l'enseignant vers les élèves. Selon nous, le Math's Up possède un potentiel ludique qui le rend adidactique aux yeux des élèves, à condition que l'enseignant n'intervienne pas pendant la partie pour des raisons liées aux savoirs mathématiques. Se crée alors un paradoxe pour l'enseignant qui doit accepter que des erreurs mathématiques soient commises. Assurément, la dévolution se prépare en avance avec les élèves.

Le contrat didactique et ludique. Pelay (2011) s'inspire aussi des travaux de Duflo (1997) pour montrer qu'il est nécessaire pour l'enseignant, de parfois donner la priorité aux enjeux ludiques plutôt qu'aux enjeux didactiques afin de soutenir le processus de dévolution et éviter de freiner les apprentissages. Le contrat didactique n'est donc pas suffisant pour définir les interactions entre le professeur et les élèves. Il faut lui adjoindre un contrat ludique, défini comme étant « l'acte par lequel le joueur abandonne sa liberté individuelle pour se soumettre à une légalité arbitraire qui produit sa légaliberté qu'il obtient en échange » (Pelay, 2011, p. 270). Duflo a ainsi fait émerger le besoin de construire un modèle dans lequel les enjeux ludiques et didactiques participent tous deux au processus d'apprentissage. Il a ainsi défini la notion de contrat didactique et ludique, comme « l'ensemble

des règles et comportements, implicites et explicites, entre un « éducateur » et un ou plusieurs « participants » dans un projet, qui lie de façon explicite ou implicite jeu et apprentissage dans un contexte donné » (Pelay, 2011, p. 314).

L'institutionnalisation. Sanchez & Romera (2020) mettent en lumière l'importance d'une phase de *débriefing* en fin de jeu. Selon eux, « pour apprendre du jeu, il faut quitter le jeu car on n'apprend pas en jouant mais en réfléchissant sur son expérience de jeu » (p.123). C'est l'institutionnalisation des savoirs qui assure le lien entre le jeu et les apprentissages et permet leur transposition ultérieure à d'autres cadres.

Ces apports théoriques nous ont permis de comprendre que l'enseignant doit penser le cadre ludique et didactique comme un tout. En prêtant une attention toute aussi rigoureuse sur les enjeux ludiques que sur les enjeux didactiques au sein de l'activité, puis en organisant des phases de reprises qui favorisent la conscientisation des savoirs en jeu, l'enseignant met toutes les chances de son côté pour que les objectifs d'apprentissages liés au Math's Up se réalisent.

Problématisation

Pour garantir la continuité du jeu, l'autonomie et l'engagement des élèves constituent un objectif majeur. Quels sont les leviers dont dispose l'enseignant pour construire et adapter au mieux le cadre ludique aux élèves-joueurs ? Le professeur est-il le seul garant de ce cadre ? Pour répondre à cela, nous avons établi en amont une liste des variables didactiques et ludiques pour ensuite évaluer leur impact sur l'implication des élèves dans le jeu.

De plus, en relation avec le rôle de l'enseignant et dans la mesure où celui-ci choisit de ne pas intervenir sur l'aspect mathématique pendant l'activité, la mise en place de phases de reprise hors du temps de jeu devient essentiel. Comment faire apparaître aux élèves le lien entre l'expérience de jeu vécue et les apprentissages disciplinaires ? Nous nous sommes demandés comment utiliser au mieux ce temps pour établir, avec les élèves, des bilans constructeurs et aussi pour leur apporter des outils de consolidation des apprentissages.

Méthodologie

A nous deux, nous avons effectué au total près de quinze séances de Math's Up, la plupart en demi-groupe (12-15 élèves). Nous avons noté nos observations dans des journaux de bord à l'issue de chaque séance. Notre dernière séance, filmée, a fait l'objet d'une analyse détaillée.

Les variables ludiques et didactiques

Ayant le souci de présenter aux élèves un cadre ludique et didactique précis, nous avons listé au préalable les variables sur lesquelles il est possible d'agir pour favoriser les apprentissages mathématiques (Duval & Gélamur, 2019, p. 16). Certaines de ces variables sont essentiellement ludiques, comme celle qui consiste à distribuer des rôles donnés aux élèves. Elle vient en effet renforcer le second degré caractérisé par Brougère (2005). La plupart d'entre elles ont cependant une double incidence, à la fois sur les enjeux ludiques et sur les enjeux didactiques, comme nous le verrons avec la contrainte de temps.

Nous présentons ici-bas les variables dont nous avons testé plusieurs valeurs lors de nos expérimentations.

La constitution des équipes : le nombre de joueurs varie en fonction de l'effectif total de la classe et des absences. Les équipes ont été composées de 3, 4 ou 5 joueurs, pour éviter que la responsabilité de deviner les mots ne soit portée que par un seul élève et pour que chaque joueur sente tout de même sa participation utile. Nous avons cherché à équilibrer le niveau des équipes en constituant des groupes hétérogènes, afin de maximiser l'incertitude des rencontres.

Le temps : lorsqu'un élève fait deviner des mots, un chronomètre est lancé. Une durée allongée permet à un élève de prendre son temps ou de rattraper une erreur mathématique (incidence sur l'enjeu didactique), alors qu'une durée plus courte permet de rythmer davantage la partie et de maintenir ainsi les élèves dans le jeu (incidence sur l'enjeu ludique).

Le(s) concepteur(s) des cartes : le professeur peut les concevoir seul ou les élèves peuvent être impliqués (en réinvestissant leur cahier de leçon).

La variété des phases de jeu : la phase de verbalisation orale et celle de dessin. Elles apportent chacune leur dimension ludique et permettent aux élèves de naviguer dans différents registres de représentation autour d'un même concept mathématique.

Les variantes et règles additionnelles : une première règle additionnelle octroie à l'orateur le droit de piocher à nouveau si la carte tirée carte ne l'inspire pas. Le fait de rester bloqué, voire muet, sur un mot trop longtemps diminue drastiquement la motivation de certains joueurs, en particulier l'orateur. Une seconde règle que nous avons eu envie de tester consiste à donner à l'équipe qui devine le droit de ne proposer qu'une seule réponse à l'orateur. En cas de réponse correcte, la carte est gagnée. Sinon, la carte est remise dans la pioche. L'objectif de cette règle est de rendre impossible une stratégie parfois utilisée qui consiste à deviner en énonçant toute une série de mots, au hasard, sans attendre de l'orateur une formulation précise. Cette stratégie, qui permet de trouver la réponse malgré l'absence totale d'analyse de la situation de jeu, détériore l'aspect ludique et condamne l'intérêt didactique du jeu.

Les rôles des élèves : au-delà du caractère fictif apporté au jeu, les rôles semblent utiles pour occuper et responsabiliser les élèves de l'équipe dont ce n'est pas le tour de jouer. Il peut y avoir un élève en charge du chronomètre, un autre en charge de vérifier que l'orateur n'utilise pas un mot écrit sur la carte, ou encore un autre chargé de conserver les papiers gagnés, etc. La reprise en fin de jeu : cette phase est très ouverte et peut prendre différentes formes, comme cela sera expliqué plus loin dans l'article.

Plan d'expérimentation

Notre plan d'expérimentation est présenté sous forme de tableau, détaillant notamment nos principaux tests didactiques et ludiques, séance après séance. Le détail des valeurs que prend chaque variable au cours des différentes séances est résumé dans le tableau 1. Les séances du mois de mars, filmées, sont détaillées ci-après.

Variables	Séances de décembre	Séances de février	Séance de mars
Manches jouées	1ère manche : verbalisation orale	1ère manche : verbalisation orale 2ème manche : dessin	
Joueurs/équipe	3, 4 ou 5 joueurs	3 ou 4 joueurs	3, 4 ou 5 joueurs
Décompte	30 ou 45 secondes		
Rôles distribués	Maître du temps, Contrôleur		
Nb. De cartes	36	18	
Thèmes des cartes	- Eléments de géométrie - Droites // et - Entiers, décimaux - Gestion de données	Deux ajouts : - Cercle - Opérations	Troisième ajout : - Aire et périmètre de figures usuelles
Concepteur des cartes	Professeur	Elèves et Professeur	Professeur
Règles additionnelles	L'orateur a le droit de changer la carte piochée, une fois	- L'orateur a le droit de changer la carte piochée, une seule fois - l'équipe qui devine n'a le droit de proposer qu'une seule réponse (testée sur un groupe)	
Phase de reprise	Bilan sur : - le respect des règles du jeu et des rôles - les types de formulation employés	Bilan sur le respect des règles du jeu et des rôles Bilan sur les types de formulation employées Elaboration de cartes mentales	

Tableau 1 – Choix didactiques et ludiques pour les différentes séances d'expérimentation

Critères d'analyse des séances filmées

Les séances vidéo du mois de mars ont constitué un support majeur pour notre étude. Nous avons pu revenir à loisir sur les échanges entre élèves, étudier leurs postures et observer d'un regard distancié les interventions du professeur, pendant le jeu et lors de phases de reprise. Chaque groupe de jeu était filmé par une caméra différente. Nous avons fait le choix de visionner et d'analyser conjointement une vidéo de chaque enseignant, pour profiter du point de vue distancié et dénué d'affect du collègue. C'est aussi le moyen de calibrer nos regards analytiques pour le visionnage des enregistrements additionnels qui ont donc été étudiés individuellement par l'enseignant qui animait. Afin d'exploiter au mieux les données vidéos, nous avons déterminé une grille de critère visant spécifiquement l'analyse de la posture des élèves et de celle de l'enseignant (Duval & Gélamur, 2019, p. 21).

La posture des élèves : le jeu facilitant la dévolution des apprentissages, le professeur est amené à maximiser l'autonomie des élèves dans l'activité. Notre regard lors du visionnage vidéo a donc porté sur l'ensemble des éléments qui maintenaient ou faisaient sortir les joueurs du cadre ludique. Nous avons retenu pour cela des critères portant à chaque fois sur les élèves : le respect des règles, l'implication dans le jeu ainsi que les autres interactions qui pourraient survenir sans rapport avec le jeu, et enfin leur regard critique post-jeu sur leur comportement durant la partie.

La posture de l'enseignant : nous avons analysé la posture de l'enseignant à travers deux axes : 1) Les types d'intervention pendant la phase de jeu : comment réagit-il face aux différentes sollicitations des élèves, tant pour le respect des règles du jeu que des règles de conduite ? 2) Les stratégies pour la phase de reprise : quels choix fait-il pour revenir sur le respect des règles et sur les erreurs observées pendant le jeu, quels outils donne-t-il aux élèves pour apprendre ?

Tous ces critères qualitatifs ont été scrutés lors du visionnage vidéo. Chacune des séquences commentées dans notre analyse a été numérotée afin de pouvoir la retrouver aisément. Nous avons répertorié toutes les séquences pertinentes dans un tableau afin de les classer en fonction des critères d'analyse (Duval & Gélamur, 2019, p. 75).

Résultats

Le cadre ludique et didactique mis en place doit favoriser l'implication des élèves

Il s'est révélé que le cadre ludique mis en place exerce une grande influence sur la motivation et la posture des élèves pendant le jeu. Dans la suite de l'article, la classe n°1 désigne une classe de 6ème (11 – 12 ans) d'un collège en Réseau d'Education Prioritaire, à Drancy. La classe n°2 désigne une classe de 6ème (11 – 12 ans) d'un collège de Montreuil.

Prendre en compte le contexte de la classe pour mettre en place le cadre

Lors de la première séance de Math's Up, il s'est avéré que la mise en route du jeu a été beaucoup plus facile dans la classe n°2 que dans la classe n°1, pour laquelle il a été nécessaire d'interrompre plusieurs fois l'activité afin de clarifier les règles, les rôles et la posture attendue des joueurs. Après sondage, une large majorité des élèves de la classe n°2 avaient l'habitude de jouer à des jeux de société et avaient déjà joué au Time's Up auparavant. Au contraire, parmi les élèves de la classe n°1, aucun ne connaissait ce jeu. Ils avaient moins, sinon pas, l'habitude de jouer à des jeux de société. L'origine socio-culturelle des élèves semble donc influencer le bon déroulement du jeu, du moins au départ. Les premiers apprentissages ne se sont donc pas situés au même niveau pour ces deux classes. Le jeu, l'incertitude de son dénouement, le contexte de compétition, le jugement des camarades de classe, la peur de l'erreur, sont autant d'éléments qui peuvent générer du stress et de la tension qu'il faut gérer. Ainsi, les élèves de la classe n°1 ont dû travailler l'intégration des règles du jeu et de la posture du joueur, tandis que les élèves de la classe n°2 ont eu plus de temps pour le jeu lui-même et ses apprentissages mathématiques.

Le niveau mathématique global de la classe est aussi à prendre en compte pour paramétrer les variables didactiques et ludiques. Dans la classe n°1, un compte à rebours de 45 secondes s'est avéré adapté toute l'année alors qu'il a vite été rabaissé à 30 secondes dans la classe n°2. Dans cette dernière, les élèves se sont montrés plus précis dans leurs formulations et plus disciplinés, moins enclins à entrecouper le temps de jeu de l'équipe adverse par divers commentaires protestataires ou perturbateurs. Avec 15 secondes supplémentaires, certaines équipes remportaient d'un coup un grand nombre de cartes, ce qui allait remettre en cause le critère d'incertitude de Brougère (2005) lié à l'issue de la partie : l'équipe gagnante s'annonçait trop vite, le jeu perdait son intérêt.

Le professeur peut adapter le cadre pour maximiser l'engagement des élèves.

Nous nous étions donnés pour mission de garantir le cadre ludique tout au long du jeu. Nous avons cependant observé au travers des analyses vidéo que la responsabilité de maintenir le cadre ludique

avait naturellement été déléguée aux élèves. Notre rôle fut donc essentiellement de mettre en place ce cadre lors des premières séances.

Au début de chaque séance, le professeur demandait aux élèves de répéter les règles du jeu et les règles de vie. On observe qu'à partir de la deuxième séance, les élèves sont tout à fait en mesure de les exprimer. Les groupes de jeu se mettent ensuite en place et on observe souvent, dans chaque groupe, un élève qui prend en charge l'organisation des équipes pour s'installer autour de la table, répartir les rôles et veiller au bon déroulé du jeu. On remarque aussi qu'ils interviennent eux-mêmes pour remettre leurs camarades dans le jeu s'ils se dispersent : « Regardez-vous ! », « Ecoutez ! ». Il en est de même pour ce qui est de faire respecter les règles en cours de jeu. Par exemple, une élève tente de faire deviner le mot « différence » par son sens non mathématique. Elle se fait réprimander par une coéquipière : « Hey, nan, pas de trichage hein ! ». On observe que l'élève ne proteste pas. Les règles ont été posées au départ et acceptées par tous les joueurs. Il s'avère ainsi essentiel pour l'enseignant de fixer le plus explicitement possible le cadre ludique pour que, dans le contexte de dévolution, les élèves-joueurs puissent endosser eux-mêmes le rôle d'arbitre et de garant du contrat ludique en général. Le Math's Up permet le transfert de ces responsabilités du professeur vers les élèves.

Une variable qui semble aussi favoriser la dynamique de jeu et l'apprentissage mathématique est l'hétérogénéité des groupes. Nous pouvons avancer que le groupement hétérogène a permis de créer une émulation positive autour des élèves plus solides qui réexpliquaient les règles, qui recadraient les camarades tentés de sortir du jeu et qui dynamisaient les performances de leur équipe (étant plus à même de connaître le vocabulaire et de se lancer dans des formulations ou des réponses cohérentes).

La phase de reprise garantit le lien entre jeu et apprentissages

La phase de reprise a un triple enjeu à destination des élèves : 1) les inciter à avoir un esprit critique sur leur attitude collective et individuelle pendant le jeu ; 2) revenir sur les difficultés rencontrées concernant certaines notions mathématiques ; 3) leur donner des outils pour apprendre et s'approprier les notions.

Ce moment de bilan est collectif et a lieu immédiatement après la séquence de Math's Up, afin que les élèves aient des souvenirs encore frais de leur expérience de jeu.

Lors de la première séance, les reprises des deux classes ont porté sur différents aspects du jeu du fait de la différence de public. Dans la classe n°1, le professeur a invité ses élèves à porter un regard critique sur leur respect des règles de vie et des règles du jeu, dans le but d'améliorer leur capacité à jouer ; puisque selon la théorie fondée par Duflo, les enjeux didactiques dépendent du respect du contrat ludique. Dans la classe n°2, la posture de joueur et les règles ont été correctement intégrées dès la première séance. L'enseignant a donc eu le temps de revenir sur les types de formulations existants pour faire deviner un mot. Ce format de reprise, focalisée sur un mot du jeu, a été repris par

la suite dans les deux classes. En mettant en commun leurs idées (et parfois guidés par l'enseignant), les élèves prennent conscience de la diversité des formulations (ou des représentations par le dessin) gagnantes.

La reprise pour favoriser les apprentissages mathématiques.

Prenons l'exemple d'une reprise avec les élèves de la classe n°2, observée lors de la séance filmée. Après avoir listé les mots qui avaient posé un problème pendant la partie, le professeur et les élèves se sont mis d'accord sur un mot à retravailler. La carte « multiple » a été retenue. L'objectif a ensuite été d'élaborer une carte mentale illustrant les différentes façons de faire deviner ce mot. A ce moment de la séance, l'aspect ludique de la partie est révolu. Il devient alors judicieux de soutenir la motivation des élèves pour entreprendre une reprise où les savoirs sont structurés. Un élève secrétaire est désigné pour animer les échanges et pour dessiner, pas à pas, la carte mentale du mot « multiple » (Annexe 1). Le professeur est là pour soutenir, réorienter ou invalider les propositions des élèves. Il nous est paru utile de nommer les différents types de formulation (définition, exemple, analogie avec la vie quotidienne, mot-clé, sens contraire ou opposé, etc.), car ceux-ci constituent différentes structures de la pensée qui pourront être réinvesties par les élèves pour chacun des autres mots du Math's Up. Par ce travail, les notions ou les objets du programme sont réétudiés au travers de différents registres de représentation. En devoir hors la classe, nous avons une fois demandé aux élèves de réaliser eux-mêmes une carte mentale sur un mot de leur choix parmi la liste proposée en début de séance, afin qu'ils s'approprient cet exercice (Annexe 2). Nous avons remarqué qu'une partie des élèves retenaient les formulations les plus efficaces (pour le gain du jeu) étudiées lors du débriefing et qu'ils les réutilisaient lors des parties suivantes.

Certaines erreurs ou imprécisions ne sont pas corrigées au cours de la partie. Par exemple, au cours d'une phase de dessin, un élève écrit « 1000 » pour faire deviner « millième » et cela fonctionne. On ne sait pas si l'élève fait une confusion ou bien si c'est une stratégie pour faire deviner rapidement. Toujours est-il que c'est un exemple de situation sur laquelle l'enseignant se doit de revenir en fin de séance. Evidemment, sans enregistrement vidéo, le professeur ne peut relever toutes ces erreurs, notamment lorsque plusieurs groupes jouent simultanément.

La phase de reprise, comme toute trace écrite qui suit une activité, nous paraît déterminante pour que les apprentissages du Math's Up se concrétisent. Nous avons dans un premier temps utilisé cette phase pour asseoir le cadre ludique et amener les élèves vers une meilleure autonomie dans le jeu. Nous avons ensuite pu travailler l'appropriation des notions mathématiques en nous concentrant sur les erreurs non corrigées pendant le jeu et sur la production de cartes mentales.

Conclusion

L'analyse approfondie de nos différentes séances nous a permis de tirer plusieurs conclusions.

Tout d'abord, le jeu permet de s'amuser en pratiquant une activité mathématique, ou l'inverse. Les élèves sont acteurs. Mais pour que l'élève reste impliqué dans le jeu il est nécessaire d'avoir établi en amont les règles explicites du contrat ludique et didactique, avant de le partager avec les élèves jusqu'à ce qu'ils se l'approprient. Jouer s'apprend. Cela est d'autant plus vrai pour un public qui n'a pas ou qui a peu l'habitude de jouer. On observe que le rôle de garant du cadre ludique est rapidement investi par les élèves eux-mêmes. Ils sont en mesure d'organiser le jeu et de faire respecter les règles en appelant le professeur pour arbitrer certaines situations si besoin. La phase de reprise reste indispensable pour que certains élèves prennent conscience des points positifs et des difficultés survenues au cours du jeu.

La reprise est aussi l'occasion de faire le lien entre le jeu et les apprentissages, notamment pour les élèves plus en difficulté qui ne le font pas spontanément. Elle peut aussi être l'occasion de donner aux élèves des outils pour apprendre, par exemple avec la construction de cartes mentales. Si la conception de l'outil est importante, la question de son réinvestissement pendant l'année nous paraît cruciale pour qu'il soit réellement adopté par l'élève.

Il est également pertinent de se poser la question de la fréquence à laquelle jouer au Math's Up au cours de l'année. A chaque séance de jeu, de nouveaux chapitres avaient été étudiés, ce qui permettait l'apparition de nouvelles cartes et un effet de surprise plutôt réussi. Il est possible de réutiliser le principe du jeu et de l'insérer sous d'autres formes dans nos séquences. L'année suivant ces expérimentations, l'un de nous a par exemple choisi de ritualiser la devinette d'une notion en début de séance, en classe entière. Cela permet aux élèves de tester leurs connaissances et de travailler la verbalisation des notions sans que cela prenne une séance entière. Enfin, cela permet aux élèves d'intégrer les règles du jeu avant de jouer par équipe.

Enfin, ce mémoire nous a permis de découvrir les potentialités d'une analyse de séance filmée. Elle permet d'observer puis d'analyser méticuleusement les comportements des élèves, nos propres interventions et les situations que nous aurions pu mal interpréter pendant le jeu, ainsi que les formulations d'élèves pour cibler les notions qui posent problème. La vidéo est un outil que nous réutiliserions volontiers pour d'autres types de séances ou pour la mise en place d'autres jeux en classe.

Références

Bloch, I., (2005). Activité… Le jeu des pourcentages. *Petit x, 067*, 77-78.

Boissière, A., Pelay, N., Rougetet, L. (2017). De la théorie des jeux à l'élaboration d'actions d'enseignement et de vulgarisation : le cas de jeux de type Nim. *Petit x, 104*, 67-69.

Brougère, G. (1997). Jeu et objectifs pédagogiques : une approche comparative de l'éducation préscolaire. *Revue française de pédagogie, 119*, 47-56. Repéré sur le site Persée : https ://www.persee.fr/doc/rfp_0556-7807_1997_num_119_1_1166

Duval, A. & Gélamur, A. *Les mathématiques par les jeux*, 2019, Mémoire de Master MEEF, sous la direction de Nadine Grapin. En ligne : https ://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-02279836

Guille-Biel Winder, C., (2017). Un jeu sur les fractions pour le cycle 3. *Petit x, 103*, 57-82.

Pelay, N. (2011). *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de l'Université Claude Bernard Lyon I.

Asius, L., Lemoine, N., Michau, C. (2017). Jouer en accompagnement personnalisé avec Math Speed et Math's Up. Dans Académie de Créteil, Inspection pédagogique régionale de mathématiques (dir.). *Mathématiques revisitées au cycle 4*, 181-186.

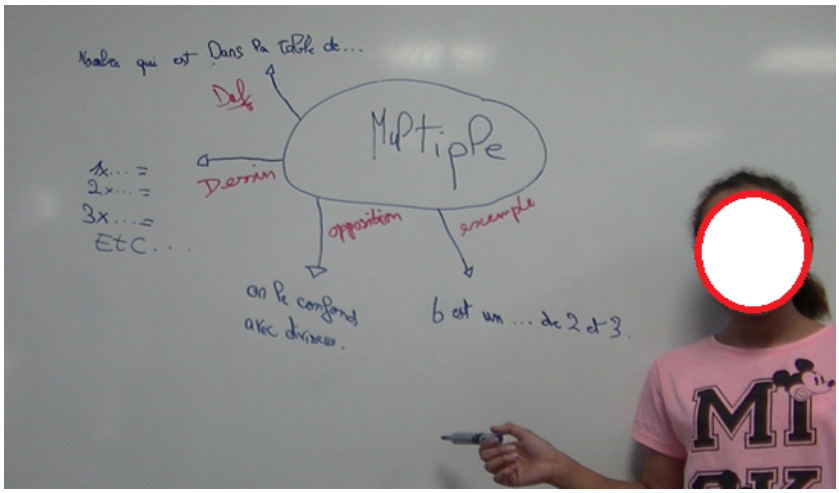
MEN (2016). Les mathématiques par les jeux. Repéré sur le site Eduscol : http ://cache.media.eduscol.education.fr/file/Maths_par_le_jeu/92/4/01-RA16_C3_C4_MATH_math_jeu_641924.pdf

Cartes Math's Up téléchargeables : http ://matheliers.eklablog.com/math-s-up-a185255952

Sanchez E., Romero M. (2020). *Apprendre en jouant*. Paris : Retz

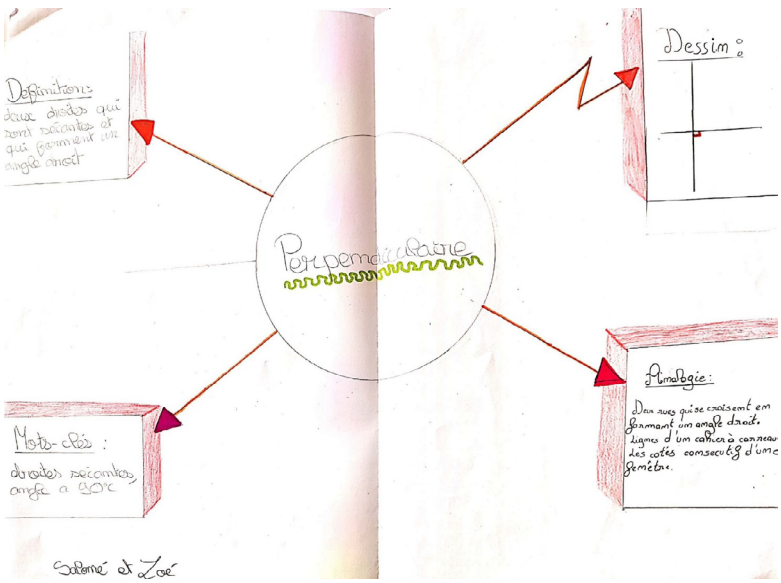
Annexe 1

Exemple de carte mentale réalisée lors de la phase de reprise



Annexe 2

Exemple de carte mentale réalisée en travail hors la classe



Titre: Manipuler les variables didactiques pour influencer le choix d'une procédure de calcul

Auteur: GRISARD Franck

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1136 - 1149

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Manipuler les variables didactiques pour influencer le choix d'une procédure de calcul

GRISARD[1] Franck

Résumé – Ce travail vise à comprendre comment construire un apprentissage dans le domaine des opérations additives et soustractives. Le but est d'amener des élèves de 3-4P (6-8 ans) à la découverte de la soustraction sans pour autant explicitement la leur présenter. Pour cela, une séquence est construite et analysée *a priori*. Les productions des élèves sont ensuite analysées en restant dans le cadre restreint des opérations : le raisonnement des apprenants, le chemin réflexif emprunté, la raison derrière leur réponse.

Mots-clefs : mathématiques, procédure, addition, soustraction, variables

Abstract – This work aims to understand how to build learning in the field of additive and subtractive operations. The aim is to bring pupils of 3-4P (6-8 years old) to the discovery of subtraction without explicitly presenting it to them. For this, a sequence will be constructed and analyzed beforehand. The students' productions are analyzed, while remaining within a rather restricted framework of mathematics, that of operations: the learners' reasoning, the reflexive path taken, the reason behind their answer.

Keywords: mathematics, procedure, addition, subtraction, variables

1. Université de Genève, Suisse, franck.grisard@etu.unige.ch

Introduction

Ma formation initiale d'enseignant primaire m'a amené à enseigner à des élèves de 6-8 ans à Genève (Suisse). Mon stage coïncidait, par ailleurs, avec la mise en place de nouveaux moyens d'enseignement de mathématiques. J'arrivais en classe à un point du cursus où la soustraction devait être introduite aux élèves. Plusieurs discussions et réflexions avec mon formateur universitaire en didactique des mathématiques, Jean-Luc Dorier, ont dirigé mon travail vers un questionnement sur l'introduction de la soustraction à l'école primaire.

Ce travail comporte deux objectifs. Premièrement, on cherche à comprendre comment construire un apprentissage dans le domaine des opérations additives et soustractives. Le but est d'amener des élèves de 3-4P HarmoS [2](6-8 ans) à la découverte de la soustraction sans pour autant explicitement la leur présenter. Pour cela, j'ai choisi de construire une séquence et d'en faire une analyse *a priori*. Dans un deuxième temps, les productions des élèves sont analysées, tout en restant dans un cadre assez restreint des mathématiques, celui des opérations. On observera notamment le raisonnement des apprenants, le chemin réflexif emprunté et la raison derrière leur réponse.

De ces deux objectifs, la construction et l'analyse préalable d'une séquence puis l'analyse des production d'élèves, découle la question de recherche suivante : quelles sont les connaissances, les pratiques et plus particulièrement les procédures d'élèves de 3-4P dans la résolution d'un problème additif ? Cette question très large peut éventuellement se resserrer au cours de la recherche, en fonction des découvertes qui y seront faites.

Cadre théorique

De nouveaux moyens d'enseignement (MER) en mathématiques (CIIP, 2019) ont vu le jour durant l'année scolaire genevoise 2019-2020. En plus de ces documents, le département de l'instruction publique (DIP) a proposé plusieurs formations continues données par des représentants de l'Université de Genève, pour présenter la nouvelle forme d'enseignement amenée avec ce recyclage de moyen. Bien que cette refonte concerne la totalité des thèmes de la 3P[3], on ne se concentrera que sur l'un d'eux. Le plan d'études romand (PER), sur lequel s'appuient les contenus des MER officiels, divise l'apprentissage des mathématiques en cinq axes principaux parmi lesquels seul « Opérations » apparaît dans mon travail. Le chapitre du plan destiné à l'enseignement des opérations aux élèves de la 1P à la 4P s'intitule « Résoudre des problèmes additifs ». Les nouveaux moyens, dont les auteurs ont préféré le titre « Addition et soustraction », s'articulent donc autour des différentes prescriptions du PER. En

2. Le terme HarmoS est utilisé par la Conférence suisse des directeurs cantonaux de l'instruction publique pour désigner un concordat intercantonal suisse sur l'harmonisation de la scolarité obligatoire entre les différents cantons suisses. Une classe à double degré 3P et 4P HarmoS correspondrait aux degrés CP et CE1 en France.

3. 3P signifie 3ème année du cycle primaire. À Genève, l'école primaire est obligatoire dès la 1P à l'âge de 4 ans et termine en 8P à l'âge de 12 ans. Il est aussi fréquent de trouver des classes à double degrés, qu'on signifie avec un tiret (ex. 3-4P).

s'appuyant sur ces éléments de la progression des savoirs mathématiques, quatre apprentissages visés (AV) ont été définis :

1. Additionner et soustraire en situation
2. Mémoriser le répertoire additif (somme inférieure ou égale à 10)
3. Utiliser des procédures de calcul réfléchi pour additionner et soustraire
4. Reconnaître et résoudre des problèmes additifs et soustractifs

À la présentation de ces apprentissages découleront parfois des variables didactiques autour desquelles les activités de la séquence analysée s'appuient. Une variable didactique est un élément du problème posé à l'apprenant que l'enseignant peut modifier et qui aura une incidence sur la résolution dudit problème et de fait sur les apprentissages. Les variables didactiques sont différentes en fonction de la tâche présentée. Par exemple, dans une activité de comptage, on demande à un élève de compter le nombre de pièces dans une boîte. On peut décider d'en mettre plus ou moins. On peut aussi les disposer en lignes ou en désordre. On peut enfin les fixer ou laisser l'élève les déplacer. Une analyse *a priori* d'un problème permet d'identifier les variables.

AV 1 – Additionner et soustraire en situation

Dans cet apprentissage, on va surtout aborder les différentes procédures de calcul employées par les apprenants. Comment peuvent-ils s'y prendre lorsqu'on leur demande d'additionner ou de soustraire les éléments de deux (ou plusieurs) ensembles entre eux ?

Dès la 3P, le PER prescrit l'utilisation du surcomptage. La technique opératoire demande à l'élève de compter une seule des deux collections qu'il faut additionner. L'élève doit donc être capable de mémoriser le cardinal d'un des deux ensembles - c'est ce qu'on appelle la conservation du nombre. Il part ensuite de ce dernier en « surcomptant » les objets du deuxième ensemble pour arriver à la somme des deux collections. L'élève s'aide alors d'une collection intermédiaire, souvent ses doigts, pour savoir jusqu'où surcompter. Quand sa valeur atteint celle du cardinal du deuxième ensemble additionné, l'élève s'arrête de compter. Le dernier mot-nombre compté est le résultat de l'addition. Le surcomptage peut être frontalement amené dans l'enseignement, mais il est aussi possible de modifier les valeurs à calculer, afin de favoriser son utilisation. On peut notamment décider d'utiliser des valeurs dont la somme est plus grande que 10 pour rendre le recomptage avec les doigts moins évident, procédure utilisée en 1-2P par laquelle l'enfant compte les objets des deux collections comme si elles n'en formaient qu'une. Le surcomptage devient alors plus pratique. La variable didactique en jeu est donc la valeur des nombres à calculer.

En modifiant encore cette variable, il est possible d'amener les élèves à utiliser une procédure de décomptage. Cette stratégie n'est pas mentionnée dans le PER, où l'on prescrit directement la mé-

morisation du répertoire soustractif. Contrairement au surcomptage, le décomptage amène à reculer dans la comptine numérique. Gvozdic et Sander (2018) posent l'énoncé suivant :

> Mary a 3 euros dans sa tirelire. Pour son anniversaire, elle reçoit de l'argent qu'elle rajoute à sa tirelire. Elle a maintenant 42 euros. Combien d'euros Mary a-t-elle reçus pour son anniversaire ? (p. 162)

On se rend bien compte que la stratégie additive avec surcomptage est beaucoup plus longue et risquée que la procédure soustractive avec décomptage que l'on peut opérer en retournant le problème et en soustrayant 3 à 42. La variable didactique du choix des valeurs est volontairement tirée vers un extrême. Les auteurs présentent cet énoncé comme un problème d'arithmétique mentale, parce que l'intuition de l'élève est secouée par l'incohérence de devoir soustraire dans une situation additive.

AV 2 – Mémoriser le répertoire additif (somme inférieure ou égale à 10)

Pour des élèves de 3-4P, le PER propose une « mémorisation du répertoire additif de 0+0 à 9+9 » (MSN 13, cycle 1). On veut que l'élève soit capable de mémoriser des additions simples de façon à pouvoir les résoudre spontanément sans avoir à calculer mentalement le résultat. Butlen (2007) souligne d'ailleurs l'importance de ce répertoire :

> En effet, à partir du CE2, les élèves abandonnent les techniques plus primitives de comptage pas à pas ou « dans la tête » pour mettre en œuvre des techniques utilisant des décompositions additives ou soustractives des nombres. Cette évolution est due en partie à une meilleure connaissance du répertoire additif. (p. 40)

On retrouve aussi dans les commentaires didactiques du livre du maître du *Cahier de calcul 3P* une liste des résultats mémorisés que les élèves doivent travailler jusqu'à la fin de leur passage à l'école primaire : les répertoires additifs, soustractifs et multiplicatifs, les compléments à 10, à 20, à 50 et à 100, ainsi que quelques multiples de 15 et de 25.

AV 3 – Utiliser des procédures de calcul réfléchi pour additionner et soustraire

Le PER tourne cet apprentissage ainsi : « Utilisation des propriétés du système de numération et de l'addition (commutativité, associativité, élément neutre) pour organiser et effectuer des calculs de manière efficace. » (MSN 13, cycle 1). En parcourant les activités proposées pour travailler cette notion, j'ai pu découvrir différentes formes de calcul réfléchi qu'on enseigne à des élèves de 3P pour améliorer leurs stratégies de calcul dans une addition.

Par exemple, une activité des moyens intitulée *10+* joue sur l'élément neutre « 0 » quand il est à la place de l'unité et qu'on lui additionne un nombre entre 1 et 9. Les élèves doivent d'abord trouver la réponse de plusieurs additions 10 + x, avec x compris entre 1 et 9. Les élèves devraient alors remar-

quer qu'une façon simple de trouver la réponse aux calculs est de systématiquement remplacer le chiffre 0 de 10 par le chiffre du nombre qu'on additionne à 10.

AV 4 – Reconnaître et résoudre des problèmes additifs et soustractifs

Ce quatrième et dernier apprentissage s'appuie sur deux entrées du PER. D'abord, on attend de l'élève qu'il arrive à « traduire des données d'un problème en opérations arithmétiques : additions et soustractions » (MSN 13, cycle 1). Ces problèmes peuvent être de plusieurs types, comme le mentionne la deuxième entrée : « Résolution de problèmes additifs et soustractifs (EEE, ETE, ECE). » (MSN 13, cycle 1). Ces acronymes font référence aux travaux de Vergnaud (1986) et notamment aux différents types de situations-problèmes. La typologie de Vergnaud se base sur les rapports qu'entretiennent les différents ensembles et calculs intermédiaires dans une opération.

- **EEE – état-état-état** : deux états de départ donnent un état d'arrivée

  Exemple : « Julie a 3 billes jaunes et 4 billes rouges. Combien a-t-elle de billes ? »

- **ETE – état-transformation-état** : un état de départ subit une transformation

  Exemple : « Julie a 3 billes. Elle en gagne 4. Combien a-t-elle de billes ? »

- **ECE – état-comparaison-état** : un état est comparé à un autre

  Exemple : « Julie a 3 billes. Daniel en a 4 de plus. Combien de billes a Daniel ? »

Le choix du type de situation-problème présenté à l'apprenant, ainsi que le choix de l'élément du problème à trouver (premier état, deuxième état, transformation…) sont deux autres variables didactiques qui viennent se rajouter au choix de la valeur des nombres à calculer.

Analyse *a priori* des activités

Trois activités sont présentées à une classe de 3-4P de 18 élèves (6 élèves de 3P, 12 élèves de 4P). Les deux premières ont pour but d'introduire la tâche et de sonder les différentes procédures qu'appliquent déjà les élèves, avant d'arriver à la troisième tâche qui favorisera le passage de stratégies normalement connues des apprenants à celle du décomptage. L'activité 1 se fait à l'oral. Les activités 2 et 3, quant à elles, donnent lieu à des productions écrites des élèves qui serviront à l'analyse des travaux.

Activité 1 – Grelin grelin

Grelin grelin est présentée dans les moyens d'enseignement comme une activité de tuilage. Elle est idéale pour identifier techniques opératoires des élèves pour additionner deux nombres. La règle du jeu se présente ainsi :

> Les élèves sont par deux et ont à disposition un sac avec dix à quinze billes (ou d'autres objets facilement manipulables). Un des deux élèves prend des billes dans sa main droite et d'autres dans sa main gauche. Il montre ses mains ouvertes et annonce le nombre de billes qu'il a dans chaque main. Il pose ensuite la question : « Grelin-grelin. Combien j'ai de billes dans mes mains ? ». L'autre élève donne sa réponse, puis ils vérifient ensemble si c'est juste.

Dans ce cas, l'élève questionné peut employer trois procédures : le recomptage, le surcomptage ou le répertoire additif. Les choix de valeurs de certaines variables didactiques de cet exercice vont plus ou moins influencer le choix de technique de l'apprenant.

Le nombre de billes dans le sac, entre 10 et 15, permet de freiner l'utilisation de la procédure de recomptage. Comme les élèves comptent souvent sur leurs doigts, passer au-dessus de 10 objets peut complexifier le comptage. Si on mettait moins de billes, les élèves pourraient plus facilement recompter. Ils auraient aussi plus facilement accès à leur répertoire additif qui souvent ne dépasse pas encore la somme de 10 en 3P.

La représentation physique des deux ensembles à additionner est aussi à prendre en considération et apparaît comme une autre variable didactique, soit le choix de proposer ou non une collection d'objets physiques. L'élève questionné a la possibilité de compter les objets des deux ensembles en les pointant, ce qui peut lui donner l'envie spontanée de recompter ou surcompter. Si le premier élève gardait les mains fermées et ne les ouvrait qu'au moment de la vérification, on peut penser que le choix de procédure pourrait être différent, car il s'appuierait sur une représentation mentale du problème.

Du point de vue de la typologie de Vergnaud, nous nous trouvons dans un problème de type *état-état-état*. Les deux états de départ sont donnés à l'élève. Il doit trouver le dernier, soit la somme des deux premiers.

Activité 2 – Grelo grelo

Cette deuxième activité, elle aussi présente dans les MER, est le prolongement de la première. La situation est la même : un élève prend des billes en main et pose une question à son camarade. Cependant, les informations transmises ne sont pas les mêmes :

> Les élèves sont par deux et ont à disposition un sac avec dix à quinze billes (ou d'autres objets facilement manipulables). Un des deux élèves prend des billes dans sa main droite et d'autres dans sa main gauche. Il ouvre une main et garde l'autre fermée. Il annonce combien il a de billes dans la main ouverte et combien il a de billes en tout. Il pose ensuite la question : « Grelo-grelo. Combien j'ai de billes dans ma main fermée ? ». L'autre élève donne sa réponse, puis ils vérifient ensemble si c'est juste.

Le principal changement se situe au niveau de l'élément recherché. Il s'agit toujours d'un problème de type état-état-état. En revanche, on ne cherche plus ici l'état final, mais l'un des deux états de départ. Donc, dans $m+n=r$, on cherche m ou n. Admettons que le nombre recherché est m. L'écriture $m+n=r$, bien qu'elle comprenne la réponse du côté des termes de l'addition, ne constitue plus une réponse aboutie. On attend généralement une opération dont le résultat, situé après le signe égal, est la réponse à la question du problème. Alors que la soustraction n'a pas encore été introduite, on bouleverse volontairement le contrat didactique pour mettre les élèves face à un problème qu'ils ne peuvent résoudre sans l'écriture soustractive $r-n=m$. Et c'est bel et bien l'enjeu de cette activité : amener les élèves à leurs premiers pas dans l'écriture soustractive.

Activité 3 – La tirelire

Cette troisième et dernière activité a pour but de pousser les procédures de calcul additives dans leurs retranchements afin de faire naturellement surgir chez les élèves des procédures soustractives comme le décomptage. Le problème s'inspire d'une activité proposée par une enseignante observée sur le terrain. Son énoncé est le suivant :

> Dans ma tirelire, j'ai m pièces. Mon copain m'offre un cadeau et rajoute des pièces à ma tirelire. J'ai maintenant n pièces dans ma tirelire. Combien de pièces est-ce que mon copain a rajoutées à ma tirelire ?

On passe d'un problème type EEE à ETE : état-transformation-état. L'élément recherché est la transformation. De cette façon, on confronte les élèves à des situations diverses. Ce type de problème présente l'avantage d'avoir une représentation des ensembles plus adéquate pour démontrer l'aspect soustractif visé dans cette séquence. Dans *Grelo grelo*, le nombre total de billes est séparé entre deux mains ; bien qu'il y ait un tout, il n'est pas localisé dans un seul et même espace, physique ou figuratif. Au contraire, la tirelire crée un unique espace dans lequel s'accumulent les pièces. Les élèves devraient mieux conceptualiser la soustraction en imaginant retirer des pièces d'une tirelire, plutôt qu'en retirant les billes d'une seule de deux mains.

Progression dans la séquence

Activité	*Grelin grelin*	*Grelo grelo*				*La tirelire*	
Itération	*(intro.)*	*1*	*2*	*3*	*4*	*1*	*2*
Valeurs x = réponse	Libres x = m+n	6+x=11 x = 5	8+x=15 x = 7	2+x=16 x = 14	14+x=16 x = 2	3+x=15 x = 12	2+x=19 x = 17

Tableau 1 – Progression des valeurs

Comme le montre le tableau 1, les valeurs des problèmes étaient toutes prédéfinies, sauf pour *Grelin grelin* où les élèves étaient libres de choisir le nombre de billes qu'ils souhaitaient prendre en main. À partir de la première itération de *Grelo grelo*, on constate que le nombre-réponse (*x*) suit une courbe croissante. Le but étant de mener les apprenants à repenser l'efficacité du surcomptage, il est nécessaire de faire grimper cette valeur au fil des itérations. Dans *Grelo grelo 1* et *2*, cette stratégie est encore valable car les valeurs présentées dans le problème s'y prêtent bien : le surcomptage ne dépasse pas 10, ce qui permet encore d'utiliser ses doigts sans devoir retenir une éventuelle dizaine. *Grelo grelo 3*, ainsi que *La tirelire 1* et *2*, emploient des valeurs volontairement plus grandes, afin d'encourager les élèves à décompter. Le terme de l'addition qui accompagne le nombre-réponse (respectivement 2, 3 et 2) se doit d'ailleurs d'être très petit si on veut qu'un élève de 3P puisse décompter. S'il avait été plus élevé, on aurait trouvé très peu de sens à exiger des élèves qu'ils soustraient, tant la résolution du calcul aurait été plus complexe pour eux que s'ils avaient surcompté.

Grelo grelo 4 apparaît comme une exception dans la croissance de la valeur x au fil des problèmes. Il fait directement suite à l'itération précédente ; on le constate d'ailleurs à l'inversion de place des valeurs. Cette étape a pour but de comparer la performance des élèves dans une situation de surcomptage complexe (*Grelo grelo 3*) à celle en situation simplifiée (4).

On retrouve d'un côté des problèmes-situations dont la résolution la plus efficace va dans le sens de l'opération apparemment nécessaire, ici l'addition. De l'autre, il y a les problèmes d'arithmétique mentale qui se résolvent plus facilement avec l'opération inverse, soit la soustraction. C'est aussi un des objectifs de cette séquence : faire comprendre à l'élève qu'il peut – doit ! – retourner certains problèmes pour simplifier leur résolution.

Traitement des réponses des élèves

Les productions des élèves sont traitées avant d'être analysées. Chacune des copies se voit attribuer un état. Il y a trois types de réponses :

- **Correcte** : le nombre-réponse apparaît dans la procédure de résolution de l'élève. La stratégie mise en place est mathématiquement juste.
- **Incohérente** : la réponse est juste mais la procédure notée n'est pas mathématiquement correcte, ou l'inverse. Cela peut souvent arriver si l'élève commet une erreur d'inattention.
- **Fausse** : le nombre-réponse n'est pas le bon. Cela découle d'une mauvaise stratégie de résolution du problème.

Analyse des réponses

88 productions ont été récoltées en tout (voir annexes 1 et 2). Tous les élèves, sauf absences éventuelles, ont pris part aux activités *Grelin grelin* et *Grelo grelo*. Cependant, pour des raisons d'organisation, seuls les douze élèves de 4P ont pu faire les deux activités *La tirelire*. Les résultats globaux de l'analyse des productions d'élèves sont présentés dans le tableau 2 suivant.

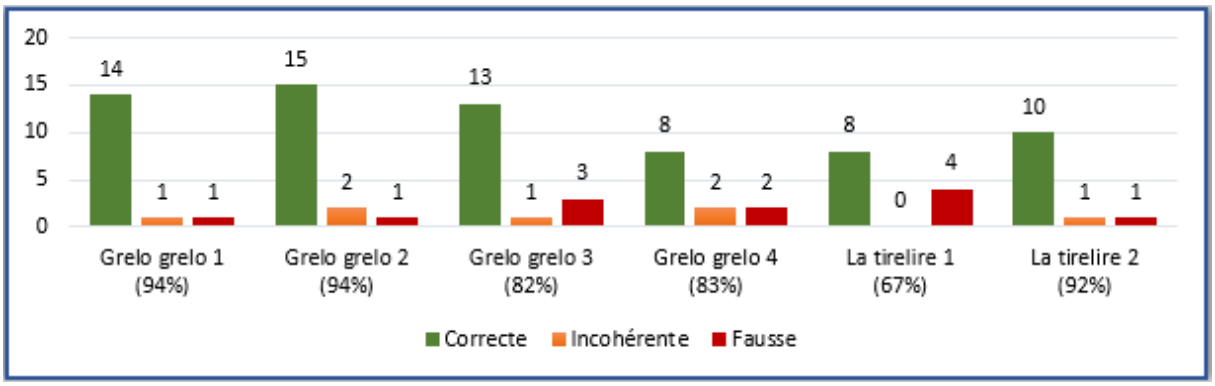


Tableau 2 – Taux de réussite des exercices

Les réponses incohérentes consistaient toutes en de simples erreurs d'inattention. À titre d'exemple, dans *Grelo grelo 4*, un élève a écrit 14+2=61, puis un autre 14+2+16. Ils voulaient certainement tous deux écrire 14+2=16 ; l'un a inversé les deux chiffres de 16, l'autre a écrit le signe « + » à la place du signe « = ». Ce ne sont pas des erreurs de calcul, mais plutôt d'écriture. On observe souvent ce genre de maladresses chez des élèves de cet âge, alors qu'ils rentrent dans les apprentissages de l'écriture. Afin de calculer les pourcentages de réussite des exercices, les réponses incohérentes équivalent donc à des réponses correctes.

On ne constate que très peu de différences dans les taux de réussite de chaque tâche. Le contexte joue un rôle important dans cette observation. D'une part, il est difficile de dresser une tendance avec un si petit nombre de productions. Les résultats ne sont pas forcément significatifs, mais permettent tout de même d'émettre certaines hypothèses. D'autre part, le niveau de réussite des élèves de la classe était particulièrement élevé. Seuls deux d'entre eux ont au moins deux résultats faux sur sept ; ce sont par ailleurs les deux élèves qui présentent plus de difficultés en mathématiques. C'est sûrement la raison pour laquelle il y a une grande majorité de réponses correctes, faisant passer les réponses fausses pour des cas isolés. Quelques points peuvent être néanmoins soulevés.

Les deux premiers exercices ont été mieux réussis que les suivants. La différence est d'autant plus intéressante si on ne les compare qu'avec *Grelo grelo 3* et *La tirelire 1*. On peut supposer que le changement de la valeur du nombre à surcompter y est pour quelque chose. Ils étaient volontairement élevés, plus grands que dix, dans le but justement de mettre à mal les procédures de calcul des élèves. Même si cela ne représente finalement que deux ou trois mauvaises réponses de plus, le passage d'un

taux de réussite aussi élevé à celui relativement plus bas de *La tirelire 1* laisse penser que la stratégie de surcomptage n'a effectivement pas bien fonctionné avec des valeurs plus complexes.

Les résultats très positifs de *La tirelire 2* ne suivent pas la tendance décroissante du taux de réussite qui était prévue dans la méthodologie, car une mise en commun et une forme d'institutionnalisation de la soustraction se sont faites à la fin de *La tirelire 1* (voir Figure 1). Ils avaient donc de meilleurs outils mathématiques pour réussir ce dernier exercice.

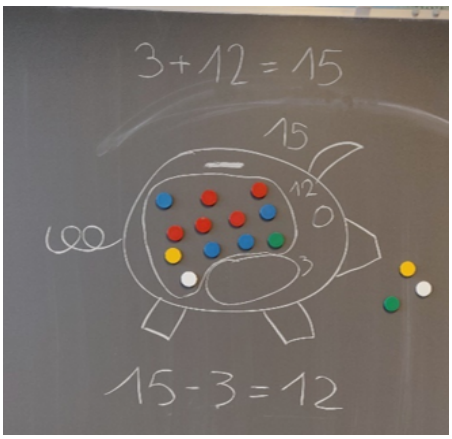


Figure 1 – Mise en commun de La tirelire 1

En revanche, le taux de réussite de *Grelo grelo 4* surprend. Il est identique à la tâche précédente alors que l'hypothèse de départ voulait que l'exercice soit plus largement réussi grâce au nombre à surcompter qui passait de 14 à 2. Deux élèves sur douze, un de chaque degré, s'y sont mal pris. L'un d'eux a posé un calcul en colonne 14+16, ce qui peut s'expliquer par le fait que leur enseignante leur avait présenté l'algorithme quelques jours plus tôt et il aurait donc confondu les stratégies.

Conclusion

Les stratégies mises en place pour résoudre ces problèmes sont diverses, mais elles n'ont pas toutes la même efficacité face à un énoncé donné. La modification de la variable didactique du choix des valeurs à calculer semble donc avoir eu un effet. Comme attendu, on constate que le nombre à sur- ou décompter va influencer le choix de procédure de l'élève. Il y a cependant un cap important à passer, celui de la reconceptualisation du problème additif pour y déceler une résolution soustractive. Cela ne peut se faire que lorsque l'élément recherché est un des termes de l'addition. Ces observations laissent donc penser que certains élèves, bien qu'ils soient très peu nombreux dans le contexte de cette recherche, sont capables d'en venir à cette réalisation par eux-mêmes. L'hétérogénéité des niveaux au sein d'une même classe est aussi à prendre en compte et a une influence sur les résultats. Certains enfants peuvent être plus avancés au moment de commencer la séquence. Tandis que d'autres apprenants auront besoin de plus d'étayage ; c'est à l'enseignant de connaître les capacités de ses élèves.

Références

Butlen, D. (2007). *Le calcul mental, entre sens et technique*. Besançon : Presses universitaires de Franche-Comté.

Conférence intercantonale de l'instruction publique (2010). MSN 13 – Résoudre des problèmes additifs (cycle 1). In *Plan d'études romand*. Neuchâtel : CIIP. Repéré à https://www.plandetudes.ch/web/guest/MSN_13/

Conférence intercantonale de l'instruction publique (2019). *Présentation du MER – Mathématiques 4e*. Vidéo consultable à https://edu.ge.ch/qr/4mN

Gvozdic, K., & Sander, E. (2018). When intuitive conceptions overshadow pedagogical content knowledge: Teachers' conceptions of students' arithmetic word problem solving strategies. *Educational Studies in Mathematics, 98*(2), 157-175.

Vergnaud, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, un exemple : les structures additives. *Grand N, 38*, 21-40.

Annexes

Annexe 1 Traitement des réponses d'élèves

exercice:	Grelo grelo 1	Grelo grelo 2	Grelo grelo 3	Grelo grelo 4	La tirelire 1	La tirelire 2
énoncé:	6 main droite, 11 en tout	8 main droite, 15 en tout	2 main droite, 16 en tout	14 main droite, 16 en tout	3 au départ, 15 à la fin	2 au départ, 19 à la fin
3P						
Lena	5 - réponse seule	7 - calcul seul	14 - calcul seul	*Absente*		
Marion	5 - dessin -> surcomptage	7 - calcul seul	8 - dessin	2 - calcul + dessin		
Alain	5 - dessin -> surcomptage	7 - dessin -> surcomptage	14 - dessin -> surcomptage	2 - "14 + 2 + 16"		
Zélie	5 - réponse seule	7 - calcul seul	8 - calcul seul	2 - réponse seule		
Kiara	5 - dessin -> retrait ?	7 (effacé) - récrit la comptine	14 - récrit la comptine	? - récrit la comptine		
Cédric	*Absent*	7 - dessin + calcul	14 - dessin -> surcomptage	2 - calcul seul		
4P						
Louise	5 - calcul seul	7 - calcul seul	14 - dessin + "2+14=19"	*Absente*	18 - "3+15=18"	17 - "2+17" et "19-2"
Nicolas	5 - surcomptage	7 - surcomptage + strat.	14 - "compte en arrière"	2 - surcomptage	12 - "3+12=15"	17 - "19-2=17"
Zinédine	5 - dessin + "6+11=5"	? - "15=3+11" + dessin	14 - dessin + calcul	2 - calcul + dessin	? - "15+3=12" et "3+7=15"	19 - calculs
Gaëlle	17 - "6+11=17"	7 - calcul seul	14 - "2+=16=14"	29 - "14+15(16)" en colonne	12 - dessin	17(19) - "19-2=19 (heu... 17!)"
Aurélie	5 - surcomptage + strat.	7 - surcomptage + strat.	*Absente*	2 - "14+2=61"	12 - réponse seule	17 - "19-2=17" + dessin doigts
Maude	5 - calcul seul	7 - "8+7=16"	? - pas de réponse	*Absente*	12 - décomptage	17 - décomptage
Elise	5 - calcul seul	7 - calcul seul (+ g/d)	14 - calcul seul (+ g/d)	2 - calcul seul (+ g/d)	18 - "15+3=18"	17 - surcomptage doigts + "19-2=17"
Amandine	5 - calcul seul	7 - dessin + calcul	14 - calcul seul	2 - réponse seule	12 - "3+12=15"	17 - "2+17=19" et "19-2=17"
Arya	5 - surcomptage	7 - surcomptage + strat.	14 - surcomptage	*Absente*	12 - "3+12=15"	17 - "19-2=17"
Noémie	5 - surcomptage	7 - dessin de mains + calcul	14 - surcomptage mains	*Absente*	12 - "3+12=15"	17 - "19-2=17"
Juliette	5 - surcomptage	7 - "8+?=15"	14 - dessin -> surcomptage	*Absente*	12 - "3+12=15" + dessin	17 - dessin -> surcomptage + "19-2"
Julien	*Absent*	7 - calcul seul	14 - calcul seul	2 - calcul + dessin	18 - "3+15=18"	17 - "19-2=17"
	Code couleurs :	Correcte et intéressante	Réponse correcte	Incohérente	Fausse	Fausse et intéressante

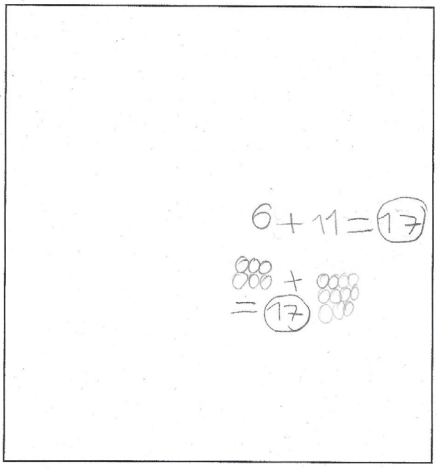
Annexe 2 : exemples de productions d'élèves

4P

Prénom : Gabrielle Date : 07.11.19

Grelo grelo

Écris ou dessine le calcul que tu fais pour savoir combien de jetons il y a dans la deuxième main de ton camarade.

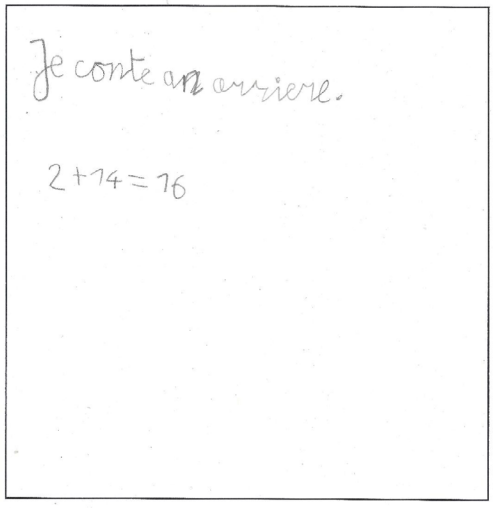


4P

Prénom : Nathan Date : 22.11.19

Grelo grelo 3

Écris ou dessine ce que tu fais pour savoir combien de jetons il y a dans la deuxième.



4P

Prénom : Zack Date : 6.12.19

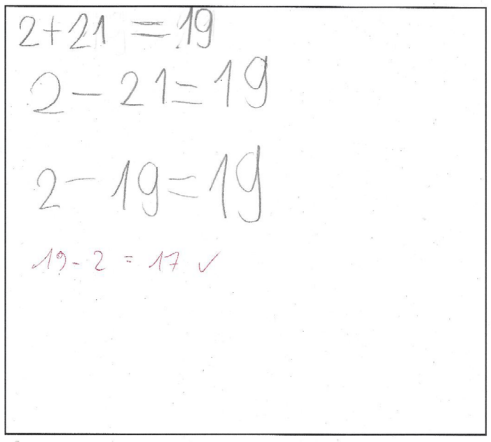
La tirelire, le retour



Dans ma tirelire, j'ai 2 pièces. Sans me prévenir, ma copine me fait un cadeau et rajoute des pièces à ma tirelire. J'ai maintenant 19 pièces dans ma tirelire.

Combien de pièces est-ce que ma copine a rajouté à la tirelire ?

Écris ou dessine le calcul que tu fais pour trouver la réponse



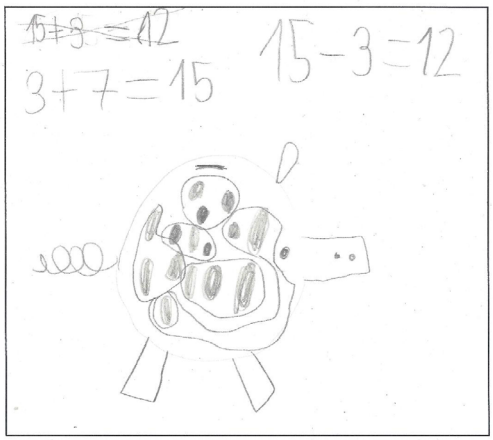
La tirelire



Dans ma tirelire, j'ai 3 pièces. Sans me prévenir, mon copain me fait un cadeau et rajoute des pièces à ma tirelire. J'ai maintenant 15 pièces dans ma tirelire.

Combien de pièces est-ce que mon copain a rajouté à la tirelire ?

Écris ou dessine le calcul que tu fais pour trouver la réponse



Titre: Récit d'une collaboration autour de l'intégration de l'approche subjective dans l'enseignement des probabilités au primaire

Auteur: HOMIER Marianne

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1150 - 1164

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Récit d'une collaboration autour de l'intégration de l'approche subjective dans l'enseignement des probabilités au primaire

HOMIER[1] Marianne

Résumé – Dans ce texte, nous présentons des résultats préliminaires de notre recherche de maitrise. Nous cherchons à documenter l'intégration de l'approche subjective dans l'enseignement des probabilités au primaire. Pour ce faire, nous présentons un récit dans lequel une place est laissée aux voix des deux enseignantes du primaire avec qui nous avons collaboré lors de la planification, du pilotage et de l'analyse réflexive autour d'une tâche probabiliste qui intègre l'approche subjective.

Mots-clés : Enseignement des probabilités, approche subjective, école primaire, recherche collaborative

Abstract – In this text, we present preliminary results of our master's degree research. We seek to document the integration of the subjective approach in the teaching of probability in elementary school. For this purpose, we present a story in which a place is left for the voices of the two primary school teachers with whom we collaborated during the planning, piloting and reflective analysis around a probabilistic task that integrates the subjective approach.

Keywords: Probability teaching and learning, subjective approach, primary school, collaborative research

1. Université de Sherbrooke, Canada, marianne.homier@usherbrooke.ca

Introduction

L'incertitude et les probabilités sont omniprésentes dans la vie de tous les jours et il est essentiel de développer des stratégies de prise de décisions au regard de situations incertaines (Albert, 2006 ; Batanero et al., 2016). Plusieurs systèmes d'éducation ont reconnu cette nécessité et ont conséquemment inclus l'enseignement des probabilités dans leurs programmes. Alors que certains l'introduisent seulement à partir du secondaire, comme c'est le cas notamment en France (Parzysz, 2017), cet enseignement est prescrit au Québec dès la première année du primaire (Gouvernement du Québec, 2009). Parmi les trois approches qui permettent d'aborder les probabilités, l'approche subjective semble présenter un potentiel pour le développement du raisonnement probabiliste des élèves (Huber et Huber, 1987 ; Kazak et Leavy, 2018 ; Savard, 2008). De ce constat découle néanmoins des questions quant à l'intégration de cette approche dans l'enseignement des probabilités au primaire.

Dans ce texte, nous présentons des résultats préliminaires de notre recherche de maitrise, effectuée au Québec, recherche dont l'analyse de l'ensemble des données est en cours. Tout d'abord, la présentation de notre problématique autour de l'enseignement-apprentissage des probabilités à l'école primaire permet de justifier la nécessité de documenter l'intégration de l'approche subjective dans l'enseignement des probabilités au primaire[2]. Puis, après avoir détaillé notre cadre théorique et nos choix méthodologiques, nous exposons nos résultats préliminaires. Ces derniers sont présentés sous la forme d'un récit dans lequel une place est laissée aux voix des deux enseignantes du 3e cycle du primaire (élèves de 10-12 ans) avec qui nous avons collaboré lors de la coélaboration, du pilotage et de l'analyse d'une tâche d'enseignement des probabilités qui intègre l'approche subjective.

Problématique

Les trois approches probabilistes

En didactique des probabilités, trois approches probabilistes sont généralement reconnues pour aborder l'incertitude : l'approche théorique, basée sur la réalisation de calculs théoriques ; l'approche fréquentielle, dans laquelle les résultats d'expérimentations de situations aléatoires sont pris en compte ; et l'approche subjective, qui repose sur l'estimation personnelle d'une probabilité (Albert, 2006 ; Eichler et Vogel, 2014 ; Kazak et Leavy, 2018 ; Thibault et Martin, 2018a).

2. Au Québec, l'enseignement primaire s'échelonne sur six années réparties en trois cycles : le premier cycle (1re et 2e années, élèves de 6 à 8 ans); le deuxième cycle (3e et 4e années, élèves de 8 à 10 ans); et le troisième cycle (5e et 6e années, élèves de 10 à 12 ans). Les probabilités sont l'un des cinq domaines mathématiques dont l'enseignement-apprentissage est prescrit dès la 1re année et tout au long du primaire (les quatre autres étant l'arithmétique, la géométrie, la mesure et la statistique).

Ces trois approches sont complémentaires et permettent d'aborder des situations différentes, par conséquent, un certain nombre de travaux de recherche soulignent qu'elles devraient toutes trois contribuer à l'enseignement des probabilités (Albert, 2006 ; Di Bernardo *et al.*, 2019 ; Eichler et Vogel, 2014 ; Savard, 2008). Or, ces approches semblent occuper des places inégales dans les programmes scolaires et dans les ressources didactiques de nombreux pays (Albert, 2006 ; Batanero *et al.*, 2016 ; Kazak et Leavy, 2018). Au Québec, les approches théorique et fréquentielle sont nommées explicitement dans la Progression des apprentissages en mathématiques au primaire (Gouvernement du Québec, 2009), mais l'approche subjective n'y est qu'implicite (par exemple dans l'idée de prédire qualitativement le résultat d'une expérience aléatoire). En outre, une analyse des tâches probabilistes de six ressources didactiques utilisées pour l'enseignement des mathématiques au primaire au Québec (Martin *et al.*, 2021 ; Martin et Malo, 2019) a montré que la majorité des tâches probabilistes analysées sont inscrites dans l'approche théorique, que les tâches inscrites dans l'approche fréquentielle sont plus rares, et que l'approche subjective est encore moins représentée dans ces ressources. Dans ces conditions, il parait difficile pour les personnes enseignantes de prendre une distance par rapport à la place prépondérante de l'approche théorique dans les programmes et les ressources didactiques. Or, cette distance apparait nécessaire pour être en mesure d'intégrer les trois approches probabilistes dans l'enseignement, en connaissant par exemple les types de situations incertaines que chacune permet d'approcher (Di Bernardo *et al.*, 2019 ; Eichler et Vogel, 2014).

Le potentiel de l'approche subjective pour le raisonnement probabiliste des élèves

Plusieurs personnes chercheures (Albert, 2006 ; Di Bernardo *et al.*, 2019 ; Kazak et Leavy, 2018) ont argumenté que l'intégration de l'approche subjective dans l'enseignement des probabilités dès le primaire pourrait contribuer à soutenir le développement du raisonnement probabiliste des élèves. Cette approche permet d'aborder des évènements incertains uniques et apparait ainsi étroitement liée au raisonnement probabiliste mobilisé au quotidien (Di Bernardo *et al.*, 2019 ; Kazak et Leavy, 2018). Or, comme les situations incertaines rencontrées dans la vie de tous les jours peuvent rarement être appréhendées uniquement de manière quantitative (Albert, 2006), l'approche subjective ajoute un potentiel pour soutenir l'utilisation d'un raisonnement probabiliste qualitatif au quotidien (Huber et Huber, 1987 ; Kazak et Leavy, 2018). L'approche subjective semble alors offrir des contextes porteurs favorisant une évolution constructive des intuitions probabilistes des enfants (Fischbein, 1975 ; Kazak et Leavy, 2018 ; Malaspina et Malaspina, 2020), en permettant d'établir des liens entre les situations rencontrées au quotidien, le vocabulaire utilisé dans la vie de tous les jours et l'apprentissage des probabilités. Enfin, d'autres travaux de recherche montrent le potentiel de l'approche subjective pour soutenir le déploiement d'une pensée critique lors de la prise de décisions (Huber et Huber, 1987 ; Malaspina et Malaspina, 2020 ; Savard, 2008). De plus, lors de l'évaluation d'une situation incertaine, il est important que les élèves prennent conscience par exemple qu'un résultat désirable peut leur sembler plus probable qu'il ne l'est réellement (Fischbein, 1975). Des situations probabilistes faisant intervenir l'approche subjective pourraient donc permettre aux élèves de mettre de côté leurs croyances personnelles, pour réfléchir aux informations qui ont réellement un impact

sur l'issue de la situation en jeu, en plus de soutenir une prise de décision éclairée et une évaluation du risque dans la vie de tous les jours (Albert, 2006 ; Fischbein, 1975 ; Savard, 2008).

Ces différents constats appuient l'idée que l'approche subjective devrait faire partie de l'expérience d'apprentissage des probabilités qui est offerte aux élèves dès le primaire. Or, ils nous amènent aussi à nous questionner quant à la place qu'elle occupe en classe du primaire.

L'approche subjective dans l'enseignement des probabilités au primaire

Peu de recherches ont documenté l'intégration de l'approche subjective dans l'enseignement au primaire. Néanmoins, une enquête sur les pratiques déclarées d'enseignement des probabilités, menée au Québec auprès de 626 personnes enseignantes du primaire et du secondaire (Martin et Thibault, 2017 ; Martin, Thibault et Roy, 2021), nous offre un éclairage sur la place que des personnes enseignantes disent lui accorder dans leur enseignement. Les résultats de cette enquête ont notamment montré que 13,1 % des personnes enseignantes du primaire ayant répondu (n = 237) affirment ne pas connaitre les trois approches probabilistes et que seulement 34,2 % des personnes enseignantes du primaire disent intégrer l'approche subjective en classe. Dans une deuxième phase de cette enquête (Martin *et al.*, 2019), il a été difficile, pour les huit personnes enseignantes rencontrées et retenues pour leurs pratiques déclarées d'enseignement des probabilités jugées comme exemplaires, de définir l'approche subjective ou de donner des exemples de son utilisation en classe, plusieurs déclarant même ne pas être familières avec cette approche. Bien que ces travaux apportent un éclairage sur les pratiques déclarées des personnes enseignantes pour l'enseignement des probabilités, des questions demeurent quant à son intégration en contexte réel d'enseignement. En effet, il apparait nécessaire de dépasser l'étude des pratiques déclarées des personnes enseignantes, pour étudier leurs pratiques effectives en classe ainsi que le regard qu'elles portent elles-mêmes sur leurs pratiques (Martin *et al.*, 2019 ; Martin, Thibault et Roy, 2021). Cette perspective de recherche pourrait apporter un éclairage

> sur le ou les sens donnés aux approches probabilistes par les personnes enseignantes […] alors qu'elles n'ont été décrites que sommairement dans notre questionnaire, ce qui pourrait avoir influencé leurs discours sur le recours à ces approches dans l'enseignement des probabilités. (Martin, Thibault et Roy, 2021, p. 613)

Dans ce contexte, notre recherche vise à documenter l'intégration de l'approche subjective en contexte réel d'enseignement des probabilités par des personnes enseignantes du primaire.

Cadre théorique

La définition de l'approche subjective

Il convient d'abord de noter qu'un certain flou terminologique autour de la définition de l'approche subjective se dégage des écrits consultés alors que, comme le souligne Chernoff (2014), de nombreux termes y sont utilisés, parfois de manière incohérente et inconstante. D'abord, dans plusieurs écrits en mathématiques, en psychologie et en didactique des mathématiques, l'expression *probabilité subjective* est utilisée. Or, Thibault et Martin (2018a) le soulignent, cette expression peut porter à confusion, car ce n'est pas la probabilité en soi qui est subjective, mais son estimation par une personne. Ensuite, le terme *croyance* qui se retrouve dans plusieurs travaux pourrait alimenter, selon nous, l'une des principales critiques adressées à l'approche subjective, alors qu'il lui est souvent reproché son absence apparente de base objective, donnant l'impression de confondre les sentiments et les faits (Batanero *et al.*, 2016 ; Borovcnik et Kapadia, 2014). Alors que des personnes chercheures en didactique des mathématiques (Malaspina et Malaspina, 2020 ; Savard, 2008) insistent sur l'importance de mobiliser une pensée critique dans l'approche subjective, en évaluant objectivement les informations disponibles et en prenant une distance avec les préférences ou les opinions personnelles, nous voyons un risque de glissement sémantique autour de l'utilisation du terme *croyance* dans la définition de l'approche subjective. Puisque cette approche permet d'estimer de manière subjective une probabilité, l'expression *estimation probabiliste*, utilisée dans plusieurs travaux (Albert, 2006 ; de Finetti, 1937 ; Eichler et Vogel, 2014 ; Kahneman et Tversky, 1972 ; Kazak et Leavy, 2018) nous apparait plus appropriée sémantiquement.

Afin de définir l'approche subjective, nous avons pris appui sur ses fondements théoriques en mathématiques (de Finetti, 1937 ; Lindley, 1965), cette approche ayant historiquement été développée en réaction aux approches théorique et fréquentielle, considérées comme des approches objectives (Batanero *et al.*, 2016 ; de Finetti, 1937 ; Eichler et Vogel, 2014). Elle prend appui notamment sur les travaux de Bayes, qui postulent que l'estimation de la probabilité d'un évènement peut être révisée à la lumière de nouvelles informations. Puis, nous avons consulté des travaux en psychologie (Fischbein, 1975 ; Kahneman et Tversky, 1972), desquels nous retenons l'idée que les estimations émises par une personne dans l'approche subjective peuvent devenir plus stables et cohérentes à mesure que cette personne développe une compréhension des probabilités. Enfin, nous avons analysé l'opérationnalisation de l'approche subjective dans des tâches issues de travaux en didactique des mathématiques (Albert, 2006 ; Di Bernardo et al., 2019 ; Eichler et Vogel, 2014 ; Kazak et Leavy, 2018 ; Malaspina et Malaspina, 2020), qui nous ont permis de faire ressortir des caractéristiques opératoires de l'approche subjective pour l'enseignement des probabilités, telles que l'utilisation d'un processus de graduation pour estimer la probabilité d'un évènement (par exemple sur une droite des probabilités). Ainsi, dans le cadre de notre recherche, l'approche subjective est définie comme une voie pour estimer une probabilité, dans laquelle une personne émet une estimation probabiliste en

se basant sur les informations disponibles, sur ses connaissances actuelles ou sur son expérience personnelle. L'estimation émise dans cette approche pourrait ainsi varier selon la personne qui l'émet (Thibault et Martin, 2018). Cette estimation probabiliste : peut être de nature qualitative ou quantitative ; peut s'exprimer notamment grâce à la mobilisation de processus mathématiques tels que la comparaison ou la graduation ; doit prendre appui sur des informations pertinentes à la situation, lesquelles peuvent être liées à l'expérience d'une personne ou être de nature théorique ou fréquentielle ; doit être cohérente d'un point de vue mathématique ; peut être amenée à évoluer à la lumière de nouvelles informations.

Par conséquent, bien que cette approche permette d'estimer de manière subjective une probabilité, l'expression *estimation probabiliste*, utilisée par plusieurs personnes auteures (Albert, 2006 ; de Finetti, 1937 ; Eichler et Vogel, 2014 ; Kahneman et Tversky, 1972 ; Kazak et Leavy, 2018) nous apparait plus appropriée sémantiquement.

L'orientation de notre recherche au regard de l'analyse des pratiques enseignantes

Comme nous l'avons souligné, il semble primordial de documenter les pratiques dites *effectives* des personnes enseignantes (Deaudelin *et al.*, 2005) en intégrant le regard réflexif des personnes enseignantes elles-mêmes par rapport à leurs propres pratiques. En ce sens, comme Bednarz et al. (2001), nous reconnaissons la capacité des personnes enseignantes à participer à la construction de connaissances liées à leur pratique, construction qui « ne peut se faire, selon nous, sans prendre en compte, dans la conceptualisation même des moyens élaborés, le point de vue des [personnes praticiennes], leur savoir d'expérience, leur contexte particulier d'intervention, leurs routines d'interprétation et d'action, leurs contraintes » (Ibid, p. 44). Dans cette perspective, nous accordons une place centrale à la notion de viabilité (Bednarz *et al.*, 2001). En effet, aussi pertinente qu'elle puisse l'être pour le développement du raisonnement probabiliste des élèves, l'intégration de l'approche subjective se doit d'être viable dans le contexte réel d'enseignement. Le concept de rationalité pratique (Schön, 1983), selon lequel les personnes praticiennes exercent leur jugement en contexte réel de pratique, alors que les situations de pratique sont souvent indéterminées et imprévisibles, nous permet d'apporter un éclairage sur cette idée. Ainsi, le contexte réel de pratique dans lequel s'inscrivent les personnes enseignantes aura nécessairement un rôle central à jouer lors de l'intégration de l'approche subjective dans leur enseignement et il serait impensable de ne pas le considérer dans notre recherche. De plus, les personnes enseignantes, dans leur pratique, doivent choisir et élaborer des tâches mathématiques pour leurs élèves, leur donner des exemples, répondre à leurs questions, faire des retours sur leurs productions, évaluer leurs solutions, etc. Selon nous, l'activité professionnelle des personnes enseignantes confrontées à ces tâches est appelée à s'ajuster dans l'action. Nous rejoignons ainsi des travaux en didactique des mathématiques qui ont documenté les pratiques enseignantes, soulignant que les gestes professionnels des personnes enseignantes se développent dans l'action (Roditi, 2013 ; Rogalski et Robert, 2015).

Méthodologie

Nous reconnaissons la capacité des personnes enseignantes à expliciter leur expérience professionnelle par une réflexion (Bednarz, 2013). Il nous parait alors primordial de documenter l'intégration de l'approche subjective dans leur contexte réel de pratique, en faisant une place à leurs voix tout au long du processus de recherche. Ces préoccupations, qui prennent racine dans notre sensibilité pratique (Desgagné, 2007), ont forcément influencé nos choix méthodologiques. Dans un souci de faire de la recherche *avec* plutôt que *sur* les personnes enseignantes (Lieberman, 1986), nous nous inspirons de la recherche collaborative (Bednarz, 2013 ; Bednarz *et al.*, 2001 ; Desgagné, 2007). Le modèle de recherche collaborative proposé par Desgagné et Bednarz s'articule autour de trois étapes : les étapes de cosituation, de coopération et de coproduction. Chacune de ces trois étapes est liée à un critère de double vraisemblance, s'appuyant sur l'idée que des personnes chercheures et enseignantes ont des activités différentes et des contraintes différentes, et que chacune doit pouvoir tirer profit de la collaboration à sa manière. Lors de la cosituation, dans un souci de double pertinence sociale, il s'agit de choisir un objet à explorer qui soit pertinent pour toutes les personnes qui s'engagent dans une démarche collaborative. À l'étape de coopération, une démarche réflexive devra offrir à la fois une occasion de collecter des données pour la personne chercheure et une occasion de développement professionnel pour les personnes enseignantes, dans un souci de double rigueur méthodologique. Enfin, lors de la coproduction, dans un souci de double fécondité des résultats, il s'agit de veiller à ce que les retombées de la recherche collaborative soient pertinentes pour la communauté scientifique et utiles pour la communauté de pratique.

Nous avons collaboré avec deux enseignantes du 3e cycle du primaire (5e et 6e années, élèves de 10-12 ans), Blanche et Isabelle (prénoms fictifs), qui enseignent au primaire depuis respectivement 11 et 18 ans. Elles travaillent depuis trois ans dans la même école, située dans une région rurale. Cette année, les deux enseignantes ont choisi de faire du co-enseignement (*team teaching*). Elles enseignent ainsi conjointement à un total de 41 élèves, dont 25 sont en 5e année et 16 en 6e année. Lors de l'étape de coopération, des données ont été recueillies à trois moments de l'activité des personnes enseignantes, alors qu'elles ont intégré l'approche subjective dans leur enseignement des probabilités. Lors d'une première rencontre collective (deux heures), nous avons coélaboré une tâche inscrite dans l'approche subjective (moment 1). Les enseignantes ont ensuite piloté conjointement cette tâche dans leur classe (moment 2). Une deuxième rencontre collective, d'une durée d'une heure et demie, nous a finalement offert une occasion de poser un regard réflexif sur les étapes précédentes (moment 3). Un journal de bord collaboratif, des enregistrements audios des rencontres collectives et des enregistrements vidéos des séances en classe ont permis de récolter des données. Dans ce texte, nous présentons des résultats préliminaires, issus d'une première analyse de ces données, néanmoins nous avons regardé et écouté plusieurs fois les enregistrements afin de nous familiariser avec le corpus (Powell *et al.*, 2003). Ces résultats sont présentés sous la forme d'un récit des trois moments de la collaboration, une démarche qui nous permet de restituer le discours des personnes enseignantes, tout en ciblant des passages liés à notre objectif.

Présentation et interprétation préliminaire des résultats

Moment 1 : la coélaboration

Au début de la collaboration, j'ai[3] d'abord présenté des tâches d'enseignement des probabilités qui intègrent l'approche subjective[4] aux deux enseignantes. Blanche et Isabelle ont affirmé dès le départ ne pas connaitre les trois approches probabilistes. Elles ont aussi souligné à plusieurs reprises que les tâches que je leur ai présentées leur semblaient très différentes de ce qu'elles font habituellement dans leur enseignement.

> *I* : Sincèrement, je ne suis jamais allée aussi loin que ça dans les probabilités, jamais. Vraiment.

À ce moment, alors qu'elles affirmaient ne pas être familières avec l'approche subjective et, conséquemment, ne pas l'intégrer dans leur enseignement, leur discours semblait cohérent avec les résultats de Martin et Thibault (2017). Or, lorsqu'elles ont présenté à leur tour des tâches qu'elles utilisent dans leur enseignement des probabilités, j'ai vu des liens directs avec l'approche subjective. Par exemple, Blanche propose à ses élèves de positionner sur une droite différents évènements incertains, qui ne peuvent pas tous être abordés par les approches théorique ou fréquentielle (par exemple, la probabilité de boire du lait ce soir). J'ai souligné que cette tâche me semblait non seulement permettre d'intégrer l'approche subjective, mais aussi qu'elle était très similaire à une des tâches que je leur avais présentées plus tôt.

> *C* : Tantôt tu disais « on ne va vraiment pas aussi loin », mais honnêtement, ça fait vraiment directement écho à la tâche [de la droite probabiliste], dans le sens qu'il y des évènements qui sont calculables, alors qu'il y en a d'autres qui peuvent être très subjectifs. Est-ce qu'il y a des moments où les élèves réagissent ?
>
> *B* : Oui, il y a des discussions, on le fait en grand groupe, ceux qu'on ne sait pas où placer, on demande de l'aide, puis ça devient une discussion. Ça dépend toujours des élèves, boire du lait, il y en a qui n'en boivent pas du lait, puis pour eux ça peut être impossible.

En dépit des liens que je fais entre cette tâche et l'approche subjective, et bien qu'elles disent animer des discussions avec leurs élèves sur la possibilité qu'une estimation probabiliste peut différer d'une personne à l'autre selon son expérience personnelle (Thibault et Martin, 2018), les deux enseignantes affirment qu'elles ne l'intègrent pas vraiment dans leur enseignement.

3. Dans la présentation des résultats, la première personne du singulier est utilisée par la chercheure.

4. J'ai présenté trois tâches : 1) un bingo où les élèves doivent choisir une carte qui leur semble favorable (Homier *et al.*, 2021) ; 2) une tâche dans laquelle les élèves sont amenés à estimer les probabilités associées aux positions d'un pince-feuilles (Thibault et Martin, 2018b) ; et 3) une droite probabiliste qualitative sur laquelle les élèves placent des évènements de la vie (Homier et Martin, 2021).

I : Oui on a des discussions des fois, mais… j'ai l'impression que ce sont des discussions qui sont un peu spontanées. Quand on fait des trucs comme ça, les élèves vont dire « OK, mais telle chose, ça m'est déjà arrivé », puis là on suit les élèves, mais ce n'est pas l'objectif de la période.

L'utilisation spontanée de discussions subjectives, dans leur enseignement des probabilités, peut ainsi être vu comme une adaptation à leur contexte (Schön, 1983), un ajustement de leur pratique, dans l'action, en réponse aux questionnements ou aux réflexions des élèves. Cette idée renvoie à ce que Mason et Spence (1999) nomment un *savoir agir dans le moment*. Les enseignantes mobilisent ce savoir agir dans l'action, en réagissant sur le coup, en réfléchissant aux possibilités, en inventant de nouveaux exemples, etc. Alors que les discussions apparaissent comme une voie empruntée pour répondre à l'imprévisibilité des questions des élèves, les enseignantes ne semblent pas les voir comme une manière d'intégrer de manière formelle une approche d'enseignement des probabilités. Puis, c'est en prenant appui sur des éléments qu'elles ont identifiés comme riches et réalistes dans leur contexte que nous avons coélaboré la tâche des pince-feuilles. Elles ont souligné que cette tâche pourrait permettre de faire émerger des réflexions chez leurs élèves, mais aussi qu'elles la voient comme une piste de développement professionnel pour elles-mêmes.

I : J'aimerais qu'on fasse une tâche dans laquelle il y a beaucoup de place à la réflexion, parce que j'ai des élèves en tête que j'ai hâte de voir comment ils réagiraient, ce serait quoi leur réflexion, jusqu'où ils iraient. (…) Parce que c'est justement des choses qu'on ne fait pas tant en probabilités en temps normal, donc d'expérimenter ça, avec un support, je pense que ça va nous être bénéfique à long terme.

Bien qu'il s'agisse d'une adaptation d'une des tâches que je leur avais présentées en amont, Blanche et Isabelle lui donnent un sens, se l'approprient et y apportent des ajustements en considérant leur contexte réel de classe. Cette démarche permet d'assurer à la tâche, qui avait d'abord été pensée uniquement pour son potentiel au regard du développement du raisonnement probabiliste des élèves, une viabilité dans leur pratique (Bednarz *et al.*, 2001).

Moment 2 : le pilotage

La tâche des pince-feuilles a été pilotée par les deux enseignantes, un peu à la manière d'une démarche scientifique. Elles ont d'abord amené leurs élèves à émettre des hypothèses quant à la probabilité qu'un pince-feuille tombe dans différentes positions (Figure 1).

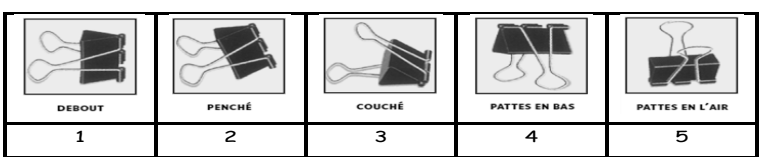


Figure 1 – Différentes positions possibles du pince-feuille

En équipe, les élèves devaient positionner, de manière intuitive, les différents cas possibles sur une droite qualitative (*impossible* à *certain*). Les enseignantes ont souligné que les élèves pourraient ainsi partager leurs arguments, pour peut-être faire évoluer leurs estimations. En ce sens, les élèves d'une équipe ont eu une discussion sur l'endroit où placer la probabilité de la position *couché*, alors qu'un élève voulait lui assigner la probabilité *certain*. Après avoir discuté, les élèves ont finalement choisi de revoir légèrement à la baisse leur estimation.

> *I* : Le pince-feuille couché, vous l'avez placé où ?
>
> *Élève* : Une ligne avant certain.
>
> *I* : Une ligne avant certain. Pourquoi ?
>
> *Élève* : Parce qu'en fait, il y a d'autres possibilités pour les autres positions. Mais si c'était certain, les autres ne pourraient pas [être possibles].
>
> *I* : Ha ! C'est bon ça ! C'est excellent comme réflexion, bravo !

À ce moment, Isabelle a souligné l'importance que l'estimation soit cohérente mathématiquement. Ensuite, après avoir lancé le pince-feuille une seule fois, elle a affirmé de manière ironique que cette information lui permettait de tirer une conclusion. Elle a ainsi animé une discussion autour de l'idée qu'on doit posséder suffisamment de données pour qu'une expérimentation soit concluante. Les enseignantes ont alors beaucoup questionné les élèves sur la pertinence des informations pour tirer une conclusion. Après que les élèves ont expérimenté en compilant les résultats de plusieurs lancers de pince-feuilles, les enseignantes les ont amenés à réviser leurs hypothèses de départ à la lumière des nouvelles informations disponibles, qui sont, ici, de nature fréquentielle. Pendant les séances de pilotage, j'ai ainsi pu observer que Blanche et Isabelle ont mobilisé plusieurs éléments-clés liés à l'approche subjective.

Moment 3 : l'analyse réflexive

Les éléments observés lors des séances de pilotage m'ont amenée à considérer que les enseignantes intégraient l'approche subjective dans leur enseignement, en dépit du fait qu'elles avaient affirmé le contraire à la première rencontre. Isabelle a rapidement appuyé mes propos.

> *I* : En le faisant, je me suis rendue compte qu'on le faisait plus qu'on pensait. Tout ce discours-là, de les amener plus loin à réfléchir, je pense qu'on le fait plus qu'on pensait au départ à notre première rencontre. En le faisant, je me suis dit « il me semble que ce n'est pas si loin de ce qu'on fait habituellement ».

En formulant cette réflexion, Isabelle a pris conscience d'une facette de sa pratique professionnelle qui était jusqu'à maintenant implicite ou spontanée. Elle a souligné qu'elle n'a pas appris à intégrer l'approche subjective, mais elle a pris conscience qu'elle le faisait déjà. Les deux enseignantes, lors de la rencontre d'analyse réflexive, ont souligné l'apport de leur collaboration à la recherche, alors que grâce à cette prise de conscience de l'existence de l'approche subjective, elles pourraient continuer à l'intégrer, mais de manière plus planifiée. Elles font ainsi preuve d'une capacité à poser un regard réflexif sur leurs pratiques d'enseignement (Bednarz, 2013 ; Roditi, 2013), notamment en croisant leurs réflexions avec mes interprétations (Bednarz *et al.*, 2001). Enfin, nous avons discuté pendant une bonne partie de cette dernière rencontre sur les nouveaux possibles qui s'ouvrent à elles, dans leur enseignement des probabilités. Isabelle a souligné par exemple que l'approche subjective lui semble permettre de saisir plus les opportunités, de faire une place à la spontanéité et de parler de probabilités même quand ce n'est pas planifié. Blanche a renchéri en disant qu'elle voit un potentiel très intéressant de l'approche subjective pour réfléchir à des évènements incertains significatifs pour les élèves, par exemple liés à des enjeux sociaux ou environnementaux.

Conclusion

Notre recherche a permis d'apporter une contribution au champ de la didactique des probabilités, par un éclairage sur l'intégration de l'approche subjective dans l'enseignement des probabilités au primaire en contexte réel de pratique. Néanmoins, la démarche méthodologique mise en place nous permet aussi de souligner les retombées en termes de développement professionnel chez les personnes enseignantes qui ont collaboré à la recherche, alors que cette collaboration leur a offert une occasion de réfléchir sur leurs pratiques d'enseignement des probabilités et sur l'intégration de l'approche subjective dans ces pratiques. Alors que les résultats de Martin et Thibault (2017) montraient que peu de personnes enseignantes du Québec déclaraient intégrer l'approche subjective dans leur enseignement, on peut se demander si, comme Blanche et Isabelle, d'autres personnes enseignantes l'intègrent déjà, sans que cette intégration soit faite de manière intentionnelle ou planifiée. Enfin, nous voyons une piste pour des recherches futures dans l'idée de réfléchir aux nouveaux possibles qui s'ouvrent par l'intégration de l'approche subjective dans l'enseignement des probabilités.

Références

Albert, J. (2006). Interpreting probabilities and teaching the subjective viewpoint. Dans G. F. Burrill et P. C. Elliott (dir.), *Thinking and reasoning with data and chance. 68th NCTM Yearbook* (p. 417-433). National Council of Teachers of Mathematics.

Batanero, C., Chernoff, E. J., Engel, J., Lee, H. S. et Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability. ICME-13 Topical Surveys*. Springer.

Bednarz, N. (dir.) (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante. Regarder ensemble autrement*. L'Harmattan.

Bednarz, N., Poirier, L., Desgagné, S. et Couture, C. (2001). Conception de séquences d'enseignement en mathématiques : une nécessaire prise en compte des praticiens. Dans A. Rouchier, G. Lemoyne et A. Mercier (dir.), *Le génie didactique : Usages et mésusages des théories de l'enseignement* (p. 43-69). De Boeck Supérieur.

Borovcnik, M. et Kapadia, R. (2014). A historical and philosophical perspective on probability Dans E. Chernoff et B. Sriraman (dir.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (p. 7-34). Springer.

Chernoff, E. J. (2014). Will the real Bayesian probability please stand up? Dans K. Makar, B. de Sousa et R. Gould (dir.), *Proceedings of ICOTS 9* (p. 1-6). IASE.

de Finetti, B. (1937). La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, 7*(1), 1-68.

Deaudelin, C., Lefebvre, S., Brodeur, M., Mercier, J., Dussault, M. et Richer, J. (2005). Évolution des pratiques et des conceptions de l'enseignement, de l'apprentissage et des TIC chez des enseignants du primaire en contexte de développement professionnel. *Revue des sciences de l'éducation, 31*(1), 79.

Desgagné, S. (2007). Le défi de coconstruction de « savoir » en recherche collaborative : autour d'une démarche de reconstruction et d'analyse de récits de pratique enseignante. Dans M. Anadón (dir.), *La recherche participative : multiples regards* (p. 89-122). Presses de l'Université du Québec.

Di Bernardo, R., Mellone, M., Minichini, C. et Ribeiro, M. (2019). Subjective approach to probability for accessing prospective teachers' specialized knowledge. Dans M. Graven, H. Venkat, A. A. Essien et P. Vale (dir.), *Proceedings of PME43. Volume 2* (p. 177-184). University of Pretoria.

Eichler, A. et Vogel, M. (2014). Three approaches for modelling situations with randomness. Dans E. Chernoff et B. Sriraman (dir.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (p. 75-99). Springer.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive source of probability thinking in children*. Reidel.

Gouvernement du Québec (2009). *Progression des apprentissages au primaire : mathématique*. Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport.

Homier, M., Martin, V. et Thibault, M. (2021). Les approches probabilistes : la complémentarité d'un trio. *Vivre le primaire, 34*(1), 12-15.

Homier, M. et Martin, V. (2021, octobre). *De l'estimation probabiliste dans l'enseignement des probabilités au primaire : focus sur l'approche subjective* [atelier]. Congrès de l'AMQ.

Huber, B. L. et Huber, O. (1987). *Development of the concept of comparative subjective probability*. Journal of Experimental Child Psychology, 44, 304-316.

Kahneman, D. et Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive psychology, 3*(3), 430-454.

Kazak, S. et Leavy, A. M. (2018). Emergent reasoning about uncertainty in primary school children with a focus on subjective probability. Dans A. M. Leavy, M. Meletiou Mavrotheris et E. Paparistodemou (dir.), *Statistics in early childhood and primary education: Supporting early statistical and probabilistic thinking* (p. 37-54). Springer.

Lieberman, A. (1986). Collaborative research: Working with, not working on… *Educational Leadership, 43*(5), 29-32.

Lindley, D. V. (1965). *Introduction to probability and statistics form a bayesian viewpoint. Part 1 – Probability*. Cambridge University Press.

Malaspina, M. et Malaspina, U. (2020). Game invention as means to stimulate probabilistic thinking. *Statistics Education Research Journal, 19*(1), 57-72.

Martin, V. et Malo, M. (2019). L'analyse des tâches probabilistes proposées dans des ressources québécoises utilisées pour l'enseignement des mathématiques au primaire. Dans V. Martin, M. Thibault et L. Theis (dir.), *Enseigner les premiers concepts de probabilités : un monde de possibilités!* (p. 71-98). Presses de l'Université du Québec.

Martin, V. et Thibault, M. (2017). Enquête sur les pratiques déclarées d'enseignement des probabilités au primaire et au secondaire au Québec : esquisse d'un portrait statistique. *Actes du colloque 2017 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 179-195.

Martin, V., Héroux, S., Homier, M. et Thibault, M. (2021). L'analyse de tâches probabilistes proposées dans des cahiers d'apprentissage destinés à l'enseignement des mathématiques au primaire au Québec: exemplification de tâches inscrites dans l'approche fréquentielle. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education, 21*(1), 145-165.

Martin, V., Thibault, M. et Homier, M. (2019). Poursuite d'une enquête sur les pratiques déclarées d'enseignement des probabilités au primaire et au secondaire au Québec : rencontre avec des enseignantes et enseignants au profil jugé exemplaire. *Actes du colloque du 2019 Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 156-171.

Martin, V., Thibault, M. et Roy, N. (2021). Pratiques déclarées d'enseignement des probabilités: enquête auprès de personnes enseignantes du primaire et secondaire au Québec. *Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education, 21*(3), 596624.

Mason, J. et Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1-3), 135-161.

Parzysz, B. (2017). Les probabilités dans l'enseignement secondaire, d'hier à demain. Dans L. Vivier (dir.), *Les probabilités et la statistique au lycée. Pour un enseignement et une formation sans alea... ou presque* (p. 17-55). Presses universitaires de Franche-Comté.

Powell, A. B., Francisco, J. M. et Maher C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 405–435.

Roditi, É. (2013). Une orientation théorique pour l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques, 2013/1*(15), 39-60.

Rogalski, J. et Robert, A. (2015). De l'analyse de l'activité de l'enseignant à la formation des formateurs. Le cas de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. Dans V. LussiBorer, M. Durand et F. Yvon (dir.), *Analyse du travail et formation dans les métiers du supérieur* (p. 95-114). De Boeck Supérieur.

Savard, A. (2008). *Le développement d'une pensée critique envers les jeux de hasard et d'argent par l'enseignement des probabilités à l'école primaire : Vers une prise de décision* [thèse de doctorat, Université Laval].

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner*. Basic Books.

Thibault, M. et Martin, V. (2018a). Confusion autour du concept de probabilité. *For the Learning of Mathematics, 38*(1), 12-16.

Thibault, M. et Martin, V. (2018b). Le lancer du pince-feuilles pour faire des probabilités en classe. *Envol, 172*, 14-19.

Titre: Pourquoi étudier les gestes professionnels et la posture de l'enseignant ?

Auteur: IHNE Arnaud

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1165 - 1179

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Pourquoi étudier les gestes professionnels et la posture de l'enseignant ?

IHNE[1] Arnaud

Résumé – Un jeune enseignant, malgré ses années de formation terminées, continue son apprentissage lors de ses années d'enseignement. S'il veut faire partie prenante des choix qu'il fait pendant sa carrière, et ne pas seulement suivre les manuels et pratiques des collègues, des outils didactiques existent. Cet article en évoque certains, utilisés sur la base d'une séquence d'enseignement faite par moi-même, et filmée.

Mots-clefs : gestes, postures, praxéologie, analyse a priori, analyse a posteriori

Abstract – A young teacher, despite having completed his training, continues to learn during his teaching years. If he wants to take part in the choices he makes during his career, and not only follow the manuals and practices of his colleagues, didactic tools exist. This article evokes some of them, used on the basis of a teaching sequence made by myself, and filmed.

Keywords: gestures, postures, praxeology, a priori analysis, a posteriori analysis

1. Collège de Cayla, Suisse, arnaud.ihne@edu.ge.ch

Introduction

Un jeune enseignant, malgré ses années de formation terminées, continue son apprentissage lors de ses années d'enseignement. S'il veut faire partie prenante des choix qu'il fait pendant sa carrière, et ne pas seulement suivre les manuels et pratiques des collègues, des outils didactiques existent. A la fin de ma formation d'enseignant, à l'université de Genève, on m'a proposé d'analyser une séquence de mon enseignement avec le modèle du mutli-agenda de Bucheton & Soulé (2009) :

> Il (ce modèle) cherche à faciliter la compréhension des gestes professionnels des enseignants pour s'ajuster à la grande diversité des variables de toute situation (gérer le temps, les interactions, les savoirs, les tâches, le rapport au savoir, les attitudes des élèves, les artefacts, etc.). Il cherche à rendre compte de la manière dont diverses configurations de gestes (des postures) peuvent générer différentes dynamiques cognitives et relationnelles dans la classe (p.29).

Cadre de reference

Comme énoncé plus haut, j'utilise dans cette étude le cadre d'analyse du multi-agenda de Dominique Bucheton et Yves Soulé. Les chercheurs de leur équipe venant de disciplines différentes (psychologie sociale, sciences du langage, didactique de plusieurs disciplines, didactique générale, sciences de l'éducation) ont pour but de mieux instrumenter la formation des enseignants. Selon eux, on peut répartir les gestes enseignant en quatre catégories : pilotage, atmosphère, tissage et étayage. Ces catégories co-agissent les unes avec les autres, ayant pour cible un apprentissage de quelque nature qu'il soit. Ici, nous utilisons le modèle anthropologique de Chevallard (1999) afin de définir les savoirs visés.

Pilotage : il a pour fonction de gérer les contraintes. Il organise la cohérence et cohésion de la séance, gère aussi le temps et l'espace à disposition. « Le pilotage conjugue la dynamique tranquille de la durée nécessaire à l'incorporation des savoirs avec la force de l'instant, de la rencontre qui déstabilise et avive la curiosité. » (Bucheton & Soulé 2009, p.34).

Atmosphère : « Colore les interactions avec une certaine tonalité : sérieuse, ludique, tendue, ennuyeuse, inquiétante, etc. » (Bucheton & Soulé, 2009, p.34). La gestion de l'atmosphère passe par des gestes d'enrôlement, de maintien de l'attention, d'écoute attentive, de plaisanteries, de réprimandes, etc. Ces gestes d'atmosphère relèvent d'une éthique professionnelle : respect de l'élève et désir de le faire progresser.

Tissage : Souvent sous-estimé à l'école, le tissage contextualise le savoir, met en relation la tâche en cours avec des tâches passées et futures. « Les bons élèves tissent eux-mêmes les liens laissés à l'état implicite par l'enseignant. » (Bucheton & Soulé, 2009, p.34).

Étayage : « Il désigne toutes les formes d'aide que le maître s'efforce d'apporter aux élèves pour les aider à faire, à penser, à comprendre, à apprendre et à se développer sur tous les plans. » (Bucheton & Soulé, 2009, p.36).

A partir de l'analyse de ces gestes, on peut caractériser la posture de l'enseignant et les postures d'apprentissage des élèves. Celles-ci sont énoncées dans le même article, et résumées sur le tableau ci-dessous (Figure 1). De la première à la cinquième colonne, nous avons les postures de l'enseignant au regard de chaque catégorie de gestes. La dernière concerne la posture de l'élève en fonction de la posture de l'enseignant.

Posture d'étayage de l'enseignant	Pilotage	Atmosphère	Tissage	Objets de savoir	Tâche élèves postures
Accompagnement	Souple et ouvert	Détendue et collaborative	Très important Multi directif	Dévolution Émergence	« Faire et discuter sur » : posture réflexive, créative
Contrôle	Collectif Synchronique Très serré	Tendue et hiérarchique	Faible	En actes	« Faire » : Posture première
Lâcher prise	Confié au groupe, autogéré	Confiance, refus d'intervention du maître	Laissé à l'initiative de l'élève	En actes	Variables : faire Discuter sur
Enseignement Conceptualisation	Le choix du bon moment	Concentrée, très attentive	Liens entre les tâches Retour sur	Nommés	Verbalisation post-tâche posture réflexive (secondarisation)
Magicien	Théâtralisation, mystère, révélation	Devinette, tâtonnement aveugle, manipulation	Aucun	Peu nommés	Manipulations, Jeu : posture ludique

Figure 1 - Les postures d'étayage : une organisation modulaire de gestes et leurs visées (Bucheton & Soulé, 2009, p.41).

Finalement, une analyse est proposée par rapport aux influences réciproques entre posture de l'enseignant et postures des élèves.

Analyse d'une séquence d'enseignement – analyse *a priori*

La leçon analysée a pour thème l'encadrement et l'arrondi d'un nombre à une précision donnée. Cette analyse *a priori* se concentre sur les objectifs de la leçon, ainsi que sur les techniques visées en lien avec ceux-ci.

Objectif général (OG) et Objectifs spécifiques (OS) fixés

Objectif général : Durant cette leçon, l'élève développe la capacité à relativiser l'aspect universel qu'on peut penser des mathématiques. Les définitions connues ne sont qu'une convention faite entre communautés scientifiques. Si une notion n'est pas bien définie, il faut simplement se mettre d'accord et apporter la précision qu'on aura décidé. Cet OG sera enrichi je l'espère par une discussion

autour de l'exercice 2 point b) (cf. Annexe 2). Est-ce qu'on écrit 701,4 < 701,5 < 701,6 ? Est-ce que ça a un sens d'encadrer un nombre qui a la même précision que les nombres avec lesquels on l'encadre ?

Objectifs spécifiques

A la fin de cette leçon, l'élève est capable de :

OS1 : savoir à quoi correspond l'unité, le dixième, etc (est rappelé en classe si je constate une incertitude sur cette compétence chez plusieurs élèves) ;

OS2 encadrer un nombre décimal à la précision demandée.

Eléments de praxéologie

Les techniques visées sont chacune en lien avec un des deux OS fixés.

Technique OS1 : se repérer à l'aide d'un tableau des décimaux si nécessaire. Afin d'identifier où se trouve la précision demandée par rapport au nombre à encadrer l'élève peut placer ce nombre dans ce tableau.

Technique OS2 A : appelée « technique Thomas » dans ce dossier, car proposée par cet élève pendant le déroulement de la leçon. Pour un nombre décimal à encadrer selon une précision donnée, cette technique consiste à (par exemple pour encadrer 0,245 au dixième) :

- identifier le chiffre correspondant à la précision (ici 2), remplacer les chiffres suivants par 0, ce qui donnera le nombre plus petit recherché (0,2). On notera bien sûr que les éventuels zéros évidents sont à identifier et à enlever.
- ajouter une unité de précision (ici, 0,1) à ce nombre, ce qui donne le nombre plus grand recherché (0,2+0,1=0,3).

Technique OS2 B : créer une droite graduée afin d'y placer le nombre à encadrer, puis identifier les deux nombres recherchés sur cette droite. Cette technique a été présentée aux élèves en début de leçon afin de donner du sens à la tâche, mais elle n'a pas été utilisée par la suite car trop coûteuse.

Pour ce qui est de la **technologie souhaitable**, voici les mots que Thomas utilise pour décrire sa technique d'encadrement (OS2 A), ici pour une précision à la dizaine : *« On prend le nombre de la dizaine, soit on ajoute 1 ou on enlève 1, après on enlève les virgules du nombre »*. On note ici que l'élève utilise le mot « nombre » pour désigner le chiffre, ce qui me permet de rappeler à la classe la différence entre nombre de dizaines et chiffre des dizaines (cf. transcription points 9 à 25, dans la partie suivante du texte). La suite de sa description paraît confuse. Pourtant, en observant son travail, cet élève à ce moment de la leçon était capable d'effectuer ce type de tâche. Je précise ensuite, en explicitant la technique de Thomas, la technologie souhaitée par rapport à cette technique. Cet

extrait n'est pas présent sur la vidéo, mais ce que je dis ressemble à la description de la Technique OS2 A décrite précédemment.

Justifications théoriques : la technique OS2 A fonctionne parce que la précision demandée correspond à une puissance de 10, et que nous avons une notation positionnelle du nombre, de base 10, justement. Par rapport à l'autre technique possible, celle qui utilise la droite graduée, vu que les nombres sont rangés dans l'ordre croissant sur une droite réelle, si l'échelle est de la précision demandée, après avoir placé le nombre à encadrer dessus, on aura de chaque côté de ce nombre l'encadrement recherché.

Responsabilité de la validation

En rapport aux exercices donnés, nous avons affaire à une validation par autorité, faite par l'enseignant pendant une mise en commun (correction). Cependant, en lien avec l'OG de la leçon, la définition de l'encadrement d'un nombre qui est déjà arrondi à la précision demandée est choisie et validée par le groupe classe.

Analyse des gestes enseignant et des postures respectives de l'enseignant(e) et des élèves

Afin d'analyser les gestes enseignants, j'ai commencé par identifier dans la transcription des vidéos analysées les préoccupations de l'enseignant, en utilisant le cadre d'analyse du multi-agenda (Bucheton & Soulé 2009). Celles-ci sont réparties assez équitablement sur l'ensemble de la leçon. Les extraits cités sont tirés de la transcription de la séquence analysée. À chaque prise de parole correspond un nouveau numéro, il y en a 82 en tout.

Description pour chacune des quatre catégories

Pilotage : l'enseignant organise la cohérence de la leçon en ramenant au sujet traité des élèves qui parlent d'un sujet qui n'est jugé pas pertinent par l'enseignant.

22. Jacques : Il veut arrondir.

23. Ens : Alors arrondir ça viendra plus tard. Pour l'instant on encadre.

La cohésion est facilitée par certaines remarques de l'ordre du pratique, qui permet d'avoir une avancée efficace de la leçon.

28. Ens : Le temps que je vous ai donné est fini. On va discuter de ces exercices-là, j'ai eu des questions intéressantes, surtout (?). Pour la correction on va faire la technique du serpent, c'est comme ça que vous l'appelez ? On va commencer par Alberto, et on va continuer sur Amaia.

Au niveau de la gestion du rythme, on peut relever quelques gestes en fin de leçon qui servent à ne pas finir le cours sur une sonnerie qui retentirait au milieu d'une discussion, mais de se donner le temps de clore la leçon.

79. Luka : J'ai une question pour le d).

80. Ens : Pour le d) ? Mais on n'a pas le temps, je suis désolé.

Atmosphère : on peut observer quelques phases d'enrôlement, et de sollicitation à la participation.

46. Ens : Je vais revenir sur une question que j'ai reçue de Amaia… Qu'est-ce que tu as dans la main ? Tu peux.. ? Euh, que j'ai eue de Grace et Amaia, qui était intéressante, et je pense que si vous êtes arrivés à ce point-là, vous auriez pu vous poser la même.

On peut aussi relever de la part de l'enseignant quelques gestes qui témoignent d'une considération de leurs préoccupations et du respect des élèves.

64. Ens : Moi je comprends tout à fait, je m'attendais à ce que vous ayez des questions par rapport à celui-là. Parce que c'est pas très clair. Si on regarde la théorie… Regardons aussi ce que je vous donne dans la théorie (cf. Annexe 1).

On relève très peu de demande de silence ou de remarques concernant la discipline.

Etayage : les questions de l'enseignant sont partagées assez équitablement vers un élève (5 questions) ou à la classe (4 questions). La validation est faite par l'enseignant à 6 reprises. En début de leçon, l'enseignant demande à Thomas d'éclaircir la description de sa technique par un guidage qui laisse un peu de marge de manœuvre à l'élève.

8. Thomas : On prend le nombre de la dizaine, soit on ajoute 1 ou on enlève 1, après on enlève les virgules du nombre.

9. Ens : D'accord. Alors déjà il y a beaucoup de choses à éclaircir. Prendre le nombre de la dizaine, ça veut dire quoi ?

10. Thomas : Ça veut dire par exemple dans 378,19 la dizaine c'est 7.

11. Ens : Alors ça c'est le chiffre des dizaines. Mais le nombre de dizaines, c'est quoi ?

12. Thomas : C'est 78.

13. Ens : Il y a combien de dizaines dans 378, Jacques ?

14. Jacques : 370.. euh 37.

15. Ens : Il y a 37 dizaines, ouai.

16. Thomas : C'est ce que j'avais dit.

17. Ens : C'est ça que tu pensais peut-être.

18. Thomas : Oui.

19. Ens : Il y a 37 dizaines dans ce nombre, du coup qu'est-ce qu'on fait avec ça ?

20. Thomas : Au 7, on ajoute 1 et on enlève 1.

21. Ens : Aaah, c'est ça que tu veux dire.

Tissage : la fin de la leçon est en lien avec l'OG fixé. C'est pourquoi on observe beaucoup de tissage à partir du point 64. Ce tissage fait un lien entre la tâche en cours et celles qui la précède (retour sur les éléments de théorie point 64) et qui la suivent (encadrer dans le but d'arrondir, point 64 aussi). Cela permet aussi de parler du concept de définition mathématique comme consensus fait dans une communauté, en s'appuyant sur des exemples de la vie courante des élèves.

66. Ens : Il y a plein de choses, définitions, qui sont communes à tout le monde scientifique en math, mais il y en a qui ne le sont pas. En fait les définitions qu'on se donne, c'est des choses décidées par les hommes, et c'est des ententes entre communautés scientifiques, ils se disent : « ah, toi aussi tu veux dire ça comme ça, ça a l'air d'être bien défini, ça a l'air d'être intéressant de le définir comme ça, on va se mettre d'accord, ok on fait comme ça ». Les math c'est pas quelque chose, c'est pas une vérité absolue qu'on découvre, dans les définitions, c'est vraiment juste qu'on se met d'accord. Là c'est ce qu'on fait ici. On se met d'accord sur ce qu'on va faire dans cet exemple-là. Du coup, et il y a des fois des gens qui se mettent pas d'accord. Par exemple, euh… est-ce que vous connaissez des choses qui sont différentes selon les pays, par rapport aux nombres ? Moi j'ai des ex.. Colette ?

67. Colette : Bah la Suisse et la France. On dit pas pareil

68. Ens : Ah oui la prononciation des nombres, voilà. Et ça on le travaille aussi. Comment écrire un nombre en lettres, septante et nonante, on s'est pas mis d'accord, c'est des conventions. Grace ?

69. Grace : Ben même dans le canton de Vaud, eux ils disent huitante

70. Ens : Huitante aussi. Ca c'est aussi des conventions, juste comment on va prononcer le nombre. Eux ils ont une certaine logique, ils ont une justification là-dessus, qui est très plausible. Dire quatre-

vingt, c'est 4 fois 20, autant dire huitante, moi je le comprends tout à fait. Si je reviens sur l'exemple du cours, et on va finir avec ça, euh.. Alors, hop. Ce qu'on va faire.. Moi j'ai d'autre exemples aussi, des trucs vraiment mathématiques. Par exemple les entiers naturels, les nombres entiers positifs, il y a des pays qui disent le zéro en fait partie, d'autres pays qui disent non. Il y a aussi le système métrique, avec le monde anglo-saxon, tout ce qui est Etats-unis et Angleterre, ils utilisent pas les mètres, ils utilisent…

71. La classe : Ah oui, ils utilisent quoi ?

72. Ils ont de toutes autres unités, c'est que des conventions faites dans le monde scientifique.

Analyse des postures de l'enseignant

Posture d'accompagnement : l'enseignant évite de donner directement les réponses, mais cherche à retourner les questions à leurs auteurs ou à leurs pairs, à provoquer des échanges.

26. « Ouai, je m'attendais à ce genre de question. J'espère que d'autres vont la poser, on va en discuter, d'accord? »

62. « La proposition de Thomas, ça vous convainc ? Luka? »

Posture de lâcher-prise : l'enseignant laisse libre le choix de la méthode d'encadrement lorsque le nombre à encadrer est déjà à la précision donnée. Cela permet d'amener les élèves à réfléchir sur les différentes méthodes des uns et des autres et de se mettre d'accord sur une méthode commune à toute la classe.

74. « Il faut juste qu'on se mette d'accord. Moi ça me va la règle qu'on va se donner maintenant, c'est celle qu'on va utiliser à partir de maintenant. Tant que c'est convenu entre nous. Du coup, est-ce que vous voulez faire comme a dit Thomas ? »

Posture de contrôle : pilotage serré de l'avancée de tâches.

23. « Alors arrondir ça viendra plus tard. Pour l'instant on encadre »

72. « On va arrêter avec les exemples, on va finir sur »

Posture d'enseignement : l'enseignant formule les savoirs.

43. « Le zéro, on vous a appris que les zéros après la virgule, s'il n'y avait rien à sa droite, c'est inutile de les mettre. »

64. « [...] encadrer c'est trouver un nombre plus grand et plus petit que ce nombre [...] »

Posture réflexive : les élèves sont amenés à réfléchir quant aux différentes méthodes pour encadrer et aux choix qu'ils font lorsqu'ils encadrent (Ex. 2 b par exemple) et quant à l'utilité de l'encadrement (facilite l'arrondi).

Posture scolaire : les élèves cherchent à répondre aux attentes de l'enseignant.

Analyse *a posteriori*

Le minutage des différentes phases du plan de la leçon correspond plus ou moins à ce qu'il s'est passé. Nous sommes revenus sur certaines notions qui n'étaient pas prévues, comme la distinction entre nombres et chiffres, ou si oui ou non, il est correct d'écrire un nombre avec un ou plusieurs zéro(s) évident(s) pour ce type de tâche. Il est difficile d'inclure l'étude de ces notions dans l'analyse *a priori*, cela dépend des interventions des élèves, et c'est alors à l'enseignant de juger sur le moment de la pertinence ou non de les traiter sur le moment. Il pourrait aussi être parfois judicieux de reporter à un autre cours des rappels comme ceux-ci, afin de pouvoir prendre le temps de les préparer.

Certains élèves ont essayé d'expliquer leur technique pour encadrer un nombre à la précision donnée, comme Thomas avec la **Technique OS2 A**, mais avaient du mal à se faire comprendre par l'enseignant ou par leurs camarades. Par une meilleure analyse des techniques et technologies atour de l'encadrement faite en amont du cours, j'aurais peut-être été en mesure de mieux comprendre les discours de Thomas ou Luka lorsqu'ils expliquaient leur technique. On peut noter aussi que la théorie donnée aux élèves sur l'encadrement d'un nombre manque de précision. Voici ce qui est dit dans la théorie (voir annexe 1 pour le document entier) *« Encadrer un nombre signifie trouver un nombre plus grand et un nombre plus petit que ce nombre avec une précision donnée. »* Il n'est pas précisé que nous voulons les nombres les plus proches possibles du nombre à encadrer.

Comme soulevé lors de la description des quatre catégories, plusieurs passages des extraits vidéo sélectionnés témoignent d'une considération de leurs préoccupations et du respect des élèves. Ceci aide à l'instauration d'un respect élèves-enseignant qui permet une tonalité sérieuse et studieuse à la leçon. Les élèves sont d'ailleurs preneurs des différentes tâches que je leur propose d'accomplir, c'est pourquoi on observe peu de lassitude chez ceux-ci. Ils sont aussi assez efficaces, et les quelques gestes de pilotage faisant mention d'un manque de temps en fin de cours ne sont pas dus au fait que le groupe classe avance trop lentement par lassitude, mais au contraire c'est l'intérêt des élèves qui les pousse à poser des questions qui malheureusement ne peuvent pas toutes être traitées dans les temps. Cette relation cordiale élève-enseignant participe à des postures réflexive et scolaire des élèves.

Si un cours comme celui-ci était à refaire, je prendrais donc plus de temps et d'énergie pour l'analyse des différentes techniques possibles et leur technologie. De plus, en faisant attention à créer un support de cours de qualité, la phase d'institutionnalisation serait grandement facilitée et beaucoup mieux acceptée par les élèves. Cette piste a d'ailleurs été mentionnée récemment lors d'un entretien post-observation avec mon maître éducateur, par rapport à un autre cours que j'ai donné récemment. C'est donc un problème récurrent, que je dois améliorer au plus tôt.

Conclusion

Dès la première année d'enseignement, on nous donne la pleine responsabilité du métier. Ce début peut paraître brutal, on peut rapidement se sentir désœuvré et seul devant les difficultés qu'on rencontre. Il est alors important de continuer à se former efficacement, et pour cela le modèle décrit dans cet article est tout à fait approprié. Cette étude m'a permis de prendre du recul sur ma façon d'enseigner, et de prendre conscience de choix implicites que je fais constamment. En repérant les influences réciproques entre ma posture et celles des élèves, je peux mieux identifier les conditions favorables au développement des élèves.

Références

Bucheton D., Soulé Y. (2009). Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : un multi-agenda de préoccupations enchâssées. *Éducation et didactique*, 29-48. vol 3 - n°3 [En ligne], | URL : http://journals.openedition.org/educationdidactique/543 ; DOI : 10.4000/educationdidactique.543.

Chevalard Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique*. Actes de l'Université d'été de didactique des mathématiques à La Rochelle, IREM de Clermont-Ferrand.

Matheron Y., Noirfalise R. (2006). Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques. *Petit x 70*, 30-47.

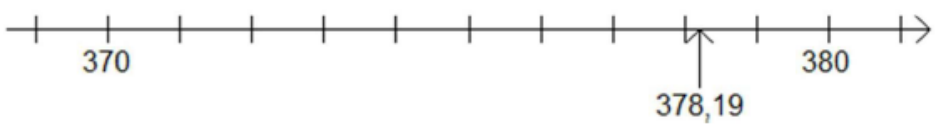
Annexes

Annexe 1 –Théorie

Encadrer

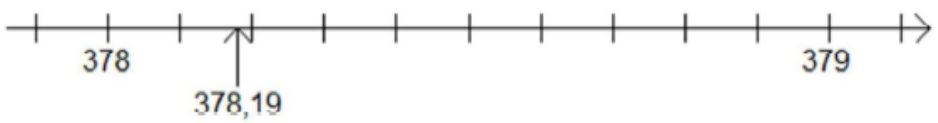
Encadrer un nombre signifie trouver un nombre plus grand et un nombre plus petit que ce nombre avec une précision donnée. Voici quelques exemples.

- On peut encadrer un nombre à la **dizaine :**



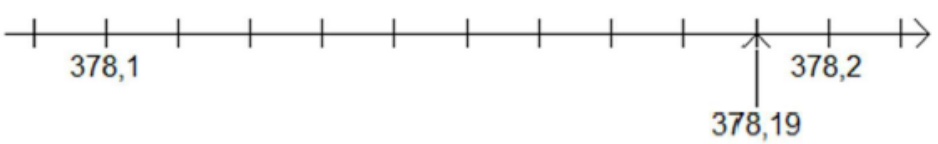
donc $370 < 378{,}19 < 380$

- On peut encadrer un nombre à l'**unité :**



donc $378 < 378{,}19 < 379$

- On peut encadrer un nombre au **dixième :**



donc $378{,}1 < 378{,}19 < 378{,}2$

Exercice 1 :

Encadrer les nombres suivants à l'unité, puis au dixième :

a) 7,853
b) 81,01
c) 122,99
d) 7,691
e) 12,74
f) 199,09

Exercice 1



b) $81 < 81,01 < 82$
$81,0 < 81,01 < 81,1$



a) $7 < 7,853 < 8$
$7,8 < 7,853 < 7,9$

c) $122 < 122,99 < 123$
$122,9 < 122,99 < 123,0$

d) $7 < 7,691 < 8$
$7,6 < 7,691 < 7,7$

e) $12 < 12,74 < 13$
$12,7 < 12,74 < 12,8$

f) $199 < 199,09 < 200$
$199,0 < 199,09 < 199,1$

Exercice 2 :

Encadrer les nombres suivants au rang demandé :

a) 8,45 à l'unité
b) 701,5 au dixième
c) 0,145 au dixième
d) 991 à la dizaine
e) 8,9025 au millième
f) 0,076 au dixième
g) 35920 au millier
h) 2,193 au centième

b) $701,4 < 701,5 < 701,6$

a) $8 < 8,45 < 9$

c) $0,1 < 0,145 < 0,2$

d) $990 < 991 < 1000$

e) $8,902 < 8,9025 < 8,903$

f) $0,0 < 0,076 < 0,1$

g) $35\,000 < 35\,920 < 36\,000$

h) $2,19 < 2,193 < 2,2$

Titre: Bilan du projet spécial n° 1 - La parole aux jeunes enseignants francophones : formation et entrée dans le métier

Auteurs: DOSSOU DOSSA Pierre, ESSONNIER Nataly, FAVIER Stéphane, GRAPIN Nadine et JEANNOTE Doris

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1180 - 1183

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Bilan du projet spécial nº 1

La parole aux jeunes enseignants francophones : formation et entrée dans le métier

DOSSOU DOSSA[1] Pierre – ESSONNIER[2] Nataly – FAVIER[3] Stéphane – GRAPIN[4] Nadine – JEANNOTE[5] Doris

Ce projet spécial trouve son origine dans le premier colloque à Grenoble en 2000, où une délégation de jeunes enseignant.e.s québécois.es était venue suivre diverses activités avant le colloque officiel de EMF. L'idée de ce projet spécial est de créer des liens entre les enseignant.e.s participant.e.s de différents pays (voire de susciter des engagements dans des formations à la recherche en didactique au niveau maîtrise et doctorat). Sauf exceptions, l'expérience a été renouvelée à tous les colloques EMF suivants avec, à chaque fois, une vingtaine de participant.e.s provenant d'une dizaine de pays de la francophonie.

Au delà de l'expérience personnelle que représente une telle participation, un tel projet vise à donner aux colloques EMF une bouffée d'air frais et à capitaliser sur l'avenir quant à l'investissement de ces jeunes pour essaimer autour d'eux l'attrait pour la collaboration au sein de la francophonie et développer une meilleure connaissance des différents systèmes éducatifs et des questions d'enseignement. Il est à noter que quelques un.e.s des participant.e.s se sont engagé.e.s dans des études supérieures de maîtrise ou de doctorat par la suite et certain.e.s d'entre eux et d'entre elles ont participé au colloque EMF de cette année.

Pour EMF 2022 à Cotonou (Bénin), nous avons accueilli 10 jeunes enseignant.e.s des pays suivants : Bénin (3), France (2), Maroc (1), Suisse (2), Québec (1), Sénégal (1). Du jeudi 8 au dimanche 11 décembre, tous les jeunes enseignant.e.s ont été pris.e.s en charge dans le cadre du pré-colloque. Trois types d'activités ont été menés :

- Présentation du système d'enseignement et de formation des enseignants pour chacun des pays. Cela a été l'occasion de moments de partage très enrichissants et d'une ouverture aux mondes scolaires ainsi qu'à leurs visées parfois fort différentes.

- Observation de classes béninoise d'école primaire, de collège et de lycée. Afin de découvrir

1. Inspecteur de mathématiques, Cotonou, pierredossoudossa@yahoo.fr

2. Pôle Formation UIMM Savoie, La Motte-Servolex, France, n.essonnier@formation-industries-savoie.fr

3. DiMaGe, Université de Genève, Suisse, stephane.favier@unige.ch

4. Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Est Créteil, France, nadine.grapin@u-pec.fr

5. Université du Québec, Montréal, jeannotte.doris@uqam.ca

le système d'enseignement au Bénin, une demi-journée a été consacrée à l'observation de classes dans la ville de Cotonou. Les visites se sont effectuées par groupes de 2-3 jeunes, pour une durée de une à deux heures par classe. Les chercheur.se.s responsables du projet spécial ont accompagné les jeunes durant ces observations et un temps d'échange avec les enseignant.e.s des classes béninoises a eu lieu. Ces observations de classe ont été précédées d'un temps de préparation lors de la première journée de travail et elles ont été suivies d'un bilan de chacun des groupes.

- Réflexions sur les buts et finalités de l'enseignement des mathématiques à travers quelques activités proposées par les chercheur.se.s responsables.

- Visites culturelles. Les jeunes enseignant.e.s ont pu découvrir sur une demi-journée la ville de Porto Novo, qui est la capitale du Bénin ; un guide local leur a permis de visiter notamment le palais des anciens rois de Hogbonou, et de découvrir la culture et l'histoire béninoise. Ils et elles ont pu également profiter de la visite du Centre de Promotion de l'Artisanat à Cotonou.

Durant le colloque EMF lui-même, les jeunes enseignant.e.s ont choisi un groupe de travail à suivre sur l'ensemble du colloque. Dans le temps imparti aux projets spéciaux, ils et elles ont présenté leurs travaux de fin d'études (voir la liste ci-dessous). Au total, 10 exposés sur des sujets variés ont été proposés, tant par les niveaux scolaires en jeu que par les types de problématiques et les degrés de préparation des mémoires (de fin d'études, de maîtrise) dans les différents pays.

A la suite du colloque, fin mars 2023, quelques jeunes enseignants (T. Diack, S. Drai, D. Ezin, A. Fangnon, M. Homier) ont témoigné de leur participation au projet dans le cadre du Télé-Séminaire des IREM (https://www.univ-irem.fr/SemIREMI). Ils sont revenus sur la thématique de leur mémoire, mais aussi sur ce que le colloque leur a apporté d'un point de vue personnel et professionnel.

Les textes que regroupent ces actes sont donc très divers, tant par leurs sujets que par leurs formes, et attestent du dynamisme et du professionnalisme naissant de ces jeunes qui se sont investi.e.s avec un grand enthousiasme dans ce projet. Les thèmes abordés sont divers, certains portent sur l'enseignement au primaire (suite orale des nombres, probabilités, calcul) d'autres au secondaire (nombres décimaux, géométrie, algèbre) ou encore sur l'étude de thèmes plus généraux (jeux mathématiques, postures et gestes professionnels). Ils présentent pour la plupart des études bien documentées avec des références théoriques en didactique des mathématiques et souvent en lien avec des expérimentations de terrain.

Contributions aux actes des participants au SPE 1

CHOGOU Wangninan Freedy (Bénin)	La pratique de la langue maternelle en éducation sociale : avantage, difficultés et approches de solution.
DIACK Thiendou (Sénégal)	Les transformations géométriques dans les programmes de mathématiques au Sénégal.
DRAI Sami (Maroc)	Développer le sens de vérification chez les élèves
DUVAl Alix (France)	Lien entre jeu et apprentissages mathématiques à travers l'exemple du Math's Up (1)
EZIN Donatien (Bénin	Enseignement et apprentissage de la symétrie en 5ème : analyse des difficultés des apprenants et perspectives d'amélioration de l'enseignement
FANGNON Audrey (Bénin)	Enseignement et apprentissage des nombres décimaux en classe de 4ème : difficultés et approches de solutions
GELAMUR Antonin (France)	Lien entre jeu et apprentissages mathématiques à travers l'exemple du Math's Up (2)
GRISARD Franck (Suisse)	Manipuler les variables didactiques pour influencer le choix d'une procédure de calcul
HOMIER Marianne (Canada)	Récit d'une collaboration autour de l'intégration de l'approche subjective dans l'enseignement des probabilités au primaire
IHNE Arnaud (Suisse)	Pourquoi étudier les gestes professionnels et la posture de l'enseignant ?

Titre: Fonder son enseignement sur des problèmes de recherche en mathématiques : quels impacts sur les élèves ?

Auteurs: ALDON Gilles, DI FRANCIA Miriam et GUISE Antoine

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1184 - 1203

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Fonder son enseignement sur des problèmes de recherche en mathématiques : quels impacts sur les élèves ?

ALDON[1] Gilles – DI FRANCIA[2] Miriam – GUISE[3] Antoine

Résumé – La présente communication porte sur la mise en œuvre d'une démarche d'investigation en mathématiques à différents niveaux scolaires. Nous étudions les effets d'une démarche d'enseignement fondée sur la recherche de problèmes, dans les classes participant au lieu d'éducation associé (LéA), sur les apprentissages des élèves et leurs conceptions vis-à-vis des mathématiques tant du point de vue scientifique que comme discipline scolaire à travers un questionnaire de début et de fin d'année et des tests.

Mots-clefs : recherche de problème, situations didactiques, apprentissage des mathématiques, valeurs, conception.

Abstract – This paper focuses on the implementation of an inquiry-based approach in mathematics at different school levels. We study the effects of a teaching approach based on problem solving, in the classes participating in the Associated educational Places (LéA in French), on the students' learning and their conceptions of mathematics both from a scientific point of view and as a school discipline through a questionnaire at the beginning and end of the year and tests.

Keywords: problem solving, didactical situations, mathematics learning, values, design

1. ENS de Lyon, France, gilles.aldon@ens-lyon.fr

2. IREM de Lyon, France, miriam.di-francia@ac-lyon.fr

3. IREM de Lyon, France, antoine.guise@ac-lyon.fr

Introduction

Cette proposition se situe dans le premier axe de l'appel à communication du projet spécial « La démarche d'investigation et la résolution de problèmes dans la classe de mathématiques ». Elle s'appuie sur le travail de l'équipe DREAM de l'IREM de Lyon (Aldon *et al.*, 2018, Aldon, 2021, Front, 2015, Gardes & Yvain, 2014) et en particulier s'intéresse à l'opérationnalisation en classe de la démarche d'investigation en posant la question des apprentissages, quand des élèves sont confrontés à des Situations Didactiques de Recherche de Problème (SDRP dans la suite) (Gardes, 2013). L'hypothèse que nous mettons à l'épreuve consiste à affirmer qu'un enseignement fondé sur les SDRP permet aux élèves de développer des compétences et des connaissances mathématiques et dans le même temps de donner une image positive de la discipline. Dans cette proposition de communication, nous nous intéressons à un des aspects du travail mené dans l'équipe de recherche et qui consiste à mettre à l'épreuve cette hypothèse. Après une présentation de l'épistémologie sous-jacente à ce travail et une description de la méthode utilisée, nous discuterons de la pertinence de l'approche à travers les premières analyses des données recueillies durant l'année universitaire 2021-2022, qui seront complétées en amont du colloque EMF 2022.

Contexte de l'étude et questions de recherche

Contexte de la recherche et cadres théoriques

L'équipe DREAM travaille depuis son origine dans une perspective de recherche collaborative regroupant des enseignants de différents niveaux (primaire, collège, lycée, université) et des chercheurs en mathématiques et en didactique des mathématiques. Ce sont les points de vue croisés des enseignants et des chercheurs qui ont déterminé les questions de recherche et permis la conception et la mise en œuvre de la méthodologie. Les cadres théoriques qui fondent nos recherches sur les problèmes dans la classe de mathématiques s'appuient sur la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) et sur des fondements épistémologiques mettant en évidence les problèmes de mathématiques comme constituant le cœur de l'activité mathématique (Pólya & Szego, 1925/1972, Schoenfeld, 1988, 2016, XX) et le lieu de mises à l'épreuve de connaissances dans une perspective de création de savoirs nouveaux. Dans le processus de mathématisation verticale sur lequel se concentre notre travail, un problème est une question qui implique, dans sa résolution, à la fois l'utilisation d'un raisonnement reconnu comme valide et la manipulation de concepts et d'objets mathématiques. Les élèves sont ainsi confrontés, à partir de leurs connaissances informelles fondées sur leur appréhension de l'espace et du temps, et des connaissances déclaratives issues de leur apprentissage des mathématiques, à la construction de procédures logiques de déduction à travers des règles, de calculs, de raisonnement, plus généralement de manipulation d'objets mathématiques (Schoenfeld, 1988). C'est dans ce cadre épistémologique que l'équipe DREAM a conçu une approche de l'enseignement des mathématiques s'appuyant sur la recherche de problèmes. Les Situations Didactiques de Recherche

de Problème (SDRP[4]) sont définies comme étant des situations didactiques, au sens de Brousseau (1998), c'est-à-dire des situations dans lesquelles s'effectue un transfert de responsabilité entre le professeur qui propose cette situation et l'élève qui accepte de jouer ce jeu dont le gain est le savoir. Mais ce sont aussi des situations dans lesquelles il ne s'agit pas de viser un savoir précis, mais plutôt de laisser l'élève explorer une situation et tisser les liens de ses connaissances pour découvrir une petite partie des mathématiques ; en s'appuyant sur des expériences qu'il peut mener dans le milieu proposé par l'enseignant, l'objectif de telles situations est de conforter les connaissances des élèves et d'en explorer de nouvelles à travers le processus de recherche et de résolution d'un problème. Le rôle de l'enseignant est alors dans un premier temps de proposer un problème et un milieu (Brousseau, 1998, Margolinas, 2004) suffisamment riche pour que ses rétroactions permettent la construction de connaissances. C'est dans ce contexte que les expérimentations menées dans les classes nous ont conduits à considérer les SDRP comme des jalons de l'enseignement des mathématiques (Aldon et al., 2018) en proposant de fonder l'enseignement des mathématiques sur les problèmes (Gardes, 2018, Aldon et al. 2014). Nous nous situons cependant dans le respect des programmes officiels de l'Éducation Nationale en France et les références aux connaissances et aux compétences présentes dans l'article renvoient aux textes institutionnels.

Questions de recherche

La pertinence de ce travail pour les apprentissages des élèves dans une classe ordinaire est ainsi un enjeu majeur de la diffusion des travaux de l'équipe de recherche. L'évaluation de ce dispositif est essentielle, d'une part, pour s'assurer que les élèves des classes dans lesquelles les expérimentations ont lieu reçoivent un enseignement qui leur permet de s'inscrire dans le cours normal des études et donc d'engranger les compétences et les connaissances prévues dans le curriculum, et d'autre part pour diffuser à l'extérieur du groupe de recherche les méthodes et les principes de cette construction didactique (Aldon *et al.*, 2017). Ainsi, depuis la participation de l'équipe au réseau des Lieux d'Éducation Associés (LéA) de l'Institut Français de l'Éducation, nous avons mis en place une méthodologie spécifique pour répondre aux enjeux majeurs que posent ces questions de transfert. C'est ainsi que nous sommes amenés à traiter les questions : le déploiement d'une organisation annuelle de l'enseignement fondée sur la recherche de problèmes permet-il aux élèves concernés, en s'appuyant sur leur travail et leurs réflexions dans l'activité mathématique, de mobiliser les savoirs présents dans les programmes et de progresser dans leurs compétences et connaissances mathématiques? Les conceptions des mathématiques en tant que science et en tant que discipline scolaire évoluent-elles chez ces élèves?

4. https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/icap_website/1324/34784

Cadre théorique et Méthode

De façon à répondre à ces questions, nous avons collectivement construit une méthode fondée sur des prises de données qualitatives, l'observation en classe et l'analyse des séances, mais aussi sur un suivi plus spécifique de certains élèves tout au long de l'année (observation des moments de recherche, recueil des cahiers, entretiens particuliers). Ainsi, le recueil de données a été réalisé, en tenant compte du grand nombre d'élèves impliqués, dans une perspective quantitative avec deux questionnaires (en début et en fin d'année) et des pré et post tests entourant des séquences fondées sur des SDRP.

Questionnaires

Le recueil de données a été effectué sur 14 classes, soit 330 élèves répartis de la manière suivante : 8 classes de cycle 3 (178 élèves) ; 4 classes de cycle 4 (84 élèves) et 2 classes de lycée (68 élèves). Le deuxième recueil s'est déroulé en juin en utilisant le même questionnaire avec les effectifs suivants : 171 élèves de cycle 3, 89 élèves de cycle 4, 63 élèves de lycée pour un effectif total de 323 élèves.

Les questions ont été regroupées en deux grandes parties, la première interroge les élèves sur l'image qu'ils ont des mathématiques et des mathématiciennes et mathématiciens, la seconde s'intéresse à leur position d'élèves face à la discipline « mathématiques » enseignée à l'école, au collège ou au lycée (Voir annexe 3).

Pour fonder la méthode de recueil de données, nous nous sommes appuyés sur les idées de Bishop (1988, 2008) pour lequel le savoir est considéré comme le résultat d'une genèse sociale prenant en compte les dimensions historiques, culturelles, mais aussi plus localement les dimensions liées à l'environnement, la classe, l'enseignant, et la culture personnelle ; les valeurs dans l'enseignement des mathématiques sont les qualités affectives profondes que l'éducation favorise à travers l'enseignement. Elles nourrissent profondément les conceptions des élèves vis-à-vis de la discipline elle-même et sont des résultats effectifs de l'enseignement *"more than procedural or conceptual knowledge"* (Bishop, 2008, p. 232). Les valeurs peuvent ainsi être conceptualisées en valeurs idéologiques, individuelles et sociales. Dans chaque niveau, les valeurs sont proposées comme des paires modélisant une tension entre deux extrêmes :

> "I have described them as complementary pairs, where rationalism and objectivism are the twin ideologies of Mathematics, those of control and progress are the attitudinal values which drive Mathematical development, and, sociologically, the values of openness and mystery are those related to potential ownership of, or distance from Mathematical knowledge and the relationship between the people who generate that knowledge and others." (Bishop, 1988, p.82)

À un niveau idéologique, le Rationalisme met l'accent sur l'argumentation, le raisonnement, l'analyse logique et les explications. L'Objectivisme, désigné aussi par le mot "empirisme" (Bishop et al., 2005) met l'accent sur un enseignement transmettant les valeurs d'objectivation, de concrétisation, de symbolisation, de lien au concret et à l'application des mathématiques.

Au niveau individuel, le Contrôle met l'accent sur la puissance et la maîtrise des règles, des procédures, des raisonnements et des vérifications dans la connaissance mathématique et se réfère plutôt au mode de raisonnement déductif quand le Progrès insiste sur la construction des idées en maths, le développement de nouvelles méthodes, la multiplicité des solutions et l'exemplification se référant plutôt à un mode de raisonnement inductif.

Enfin, au niveau social, l'Ouverture insiste sur des valeurs de démocratisation du savoir en reliant les démonstrations à la conviction et aux explications personnelles et en encourageant la créativité, tandis que le Mystère renvoie à des valeurs mettant en avant la fascination, le merveilleux de la construction mathématique et en encourageant l'exploration d'un monde des idées.

Pour chacune des questions du questionnaire, nous nous sommes mis collectivement d'accord pour attribuer un coefficient aux valeurs, après que chacun individuellement a déterminé le degré de tension exprimé par la question entre les deux extrêmes dans les paires des composantes idéologiques, individuelles et sociales. Ainsi, pour chacune des questions, les réponses fournies par les élèves attribuaient un poids entre 0 et 5 aux valeurs exprimées dans chacune des composantes. Par manque de place, nous ne donnerons pas dans ce texte les résultats auxquels nous sommes arrivés qui seront, en revanche, présentés lors de la communication.

Pré-tests et post-tests

Pour nos classes, nous avons choisi de proposer un pré-test et un post-test entourant une séquence fondée autour d'une SDRP. Nous appelons séquence un ensemble de séances (durée 55min.), et dont le contenu est cohérent autour d'objets de savoirs mathématiques présents dans les programmes de la classe. Les tests ont été créés en analysant les contenus mathématiques visés de la séquence ainsi que les prérequis théoriques des élèves issus des programmes des années antérieures. Le pré-test et le post-test d'une même séquence sont identiques et sont proposés avant et après la séquence dans les mêmes conditions de réalisation. Nous analyserons dans ce document deux pré-test-post-test, un en collège et un en lycée. Nous avons utilisé un t-test apparié en posant l'hypothèse nulle : la moyenne des deux tests est la même et en considérant l'hypothèse alternative comme "la moyenne a augmenté" en choisissant le risque de première espèce, alpha=5%.

Discussion

Les réponses au questionnaire

Nous nous appuyons ici sur les réponses en début et fin d'année du questionnaire de façon à pouvoir mettre en évidence les évolutions.

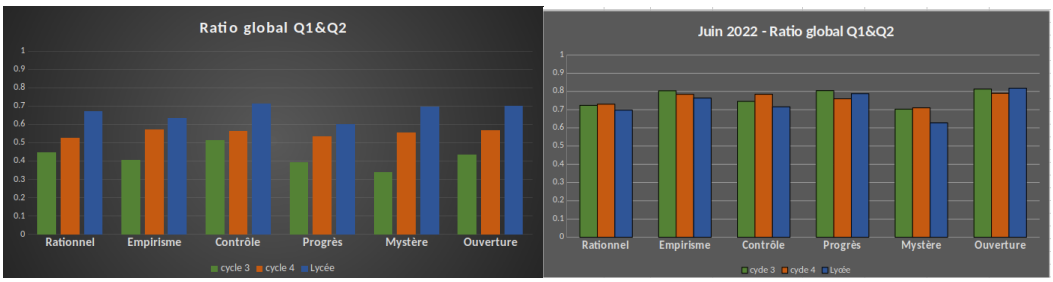


Figure 1a et b - Résultats des questions relatives aux mathématiques comme science

En nous appuyant sur le cadre théorique présenté ci-dessus, nous avons analysé les réponses des élèves, d'une part dans leur globalité et d'autre part par niveaux (cycle 3 : *grade* 4 - 6, cycle 4 : *grade* 7 - 9, lycée : *grade* 10 - 12). Les représentations graphiques données dans ce paragraphe montrent ce positionnement tel qu'ils l'ont exprimé en début d'année scolaire. L'axe des ordonnées représente la moyenne des réponses pondérées par les coefficients attribués à chaque question.

La figure 1 donne les positionnements suivant les cycles d'enseignement par rapport aux questions portant sur la conception des élèves vis-à-vis des mathématiques comme science (1ère grande partie du questionnaire évoquée dans la section III-1) et l'évolution des réponses entre septembre et juin. En septembre, il apparaît clairement que les élèves de primaire ont des idées très vagues sur ce que peuvent être les mathématiques et ce que font les mathématiciens et mathématiciennes. Au fur et à mesure de l'avancée dans les études, une conscience plus grande apparaît. Les valeurs moyennes obtenues peuvent être considérées comme des coefficients barycentriques entre les valeurs extrêmes. Le positionnement des valeurs idéologiques se situe ainsi pour les trois niveaux à peu près au milieu (un peu plus vers le Rationalisme pour les élèves de lycée et de primaire, un peu plus vers l'Empirisme pour les élèves de collège). En ce qui concerne les valeurs attitudinales, la position moyenne est plus dans le Contrôle. Du point de vue des mathématiques dans la société, elles apparaissent plus dans l'Ouverture pour les élèves de primaire et la différence diminue jusqu'au lycée pour atteindre à ce niveau une position médiane, entre Mystère et Ouverture. En juin, la figure 1-b montre à la fois un tassement des réponses entre les cycles et une affirmation des avis ; en ce qui concerne les valeurs idéologiques, le positionnement des trois niveaux se situe cette fois plus vers l'Empirisme avec une plus grande cohérence entre les cycles. L'évolution des positionnements concernant les valeurs attitudinales montre un équilibre pour les trois cycles avec cependant pour l'école et le lycée une tendance à favoriser les valeurs de Progrès (0,75-0,80 pour le cycle 3 et 0,72-0,79 pour le lycée et une

stabilité, 0,78-0,76 pour le cycle 4). Enfin, le positionnement est clairement en faveur de l'Ouverture pour les trois cycles, ce qui montre une évolution de l'image des mathématicien.nes et des mathématiques en tant que science pour les élèves interrogés.

Le positionnement des élèves sur les mathématiques d'un point de vue individuel (2ème grande partie du questionnaire évoquée dans la section III-1) montre nettement, et quels que soient les niveaux de classe, un positionnement mettant en avant la valeur de Progrès lorsque la discipline scolaire mathématique est évoquée (Fig. 2). Les réponses de juin ne font qu'affirmer cette tendance à tous les niveaux de classe. En revanche, dans la situation de recherche de problèmes (situation évoquée dans la question Q4), il y a un mouvement inverse suivant les niveaux de classe, Progrès du côté de l'école primaire et dans une moindre mesure au collège où les poids s'équilibrent presque et au contraire Contrôle au lycée, ce qui se confirme en analysant plus précisément les réponses à la quatrième question (Fig. 3).

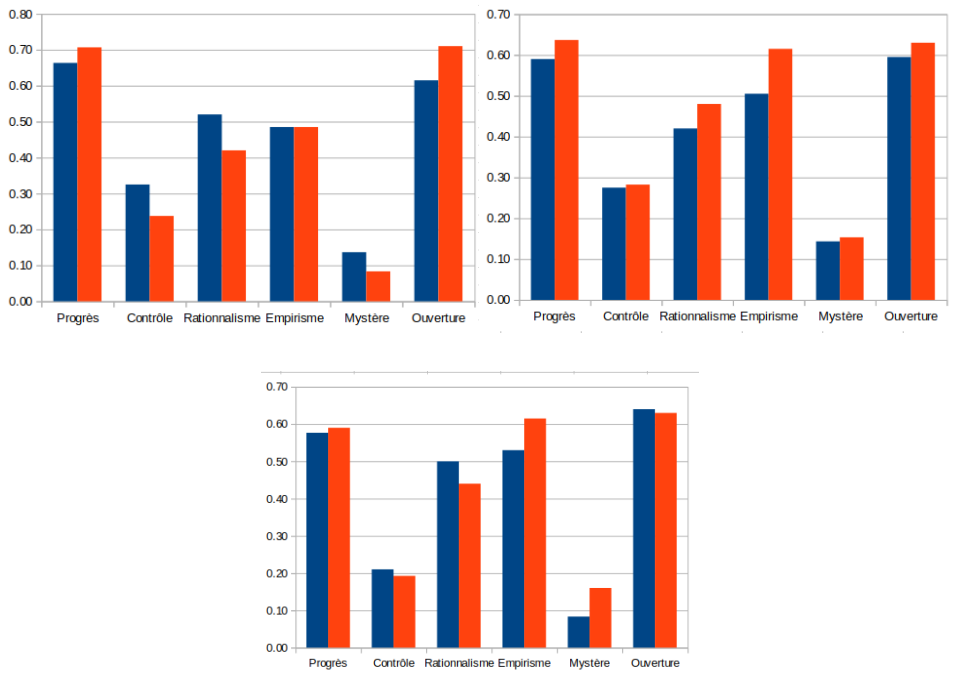


Figure 2 - Résultats relatifs aux mathématiques comme discipline scolaire (question Q3). Dans l'ordre de gauche à droite : cycle 3, cycle 4, lycée

Par ailleurs, la vision Empirique, Objective des mathématiques est plus présente que celle de Rationalisme et, là encore, à la fois dans tous les niveaux scolaires et en nette augmentation, ce qui tend à montrer que l'enseignement actuel des mathématiques fait un effort pour exemplifier, représenter et montrer les applications des mathématiques et que l'enseignement fondé sur les problèmes renforce cette tendance.

Enfin, la figure 3 montre que les élèves de primaire sont motivés par la recherche de problèmes (plus de 60% des réponses en septembre et en juin et en légère augmentation). Ils sont aussi captivés et attirés par les moments de recherche de problèmes dans la classe même si ces sentiments semblent décroître dans l'année, et si l'indifférence et l'angoisse ne sont pas absentes de leurs sentiments. Cette indifférence croît au long des études, parallèlement à l'angoisse et dans une moindre mesure à l'ennui qui apparaît décroître au fil de l'année pour les élèves de lycée et de collège. Si les élèves de lycée restent motivés et attirés (en forte augmentation dans l'année), il n'en est pas de même pour les élèves de cycle 4 qui paraissent perdre cette attirance même si plus d'un tiers des élèves cite cette qualité.

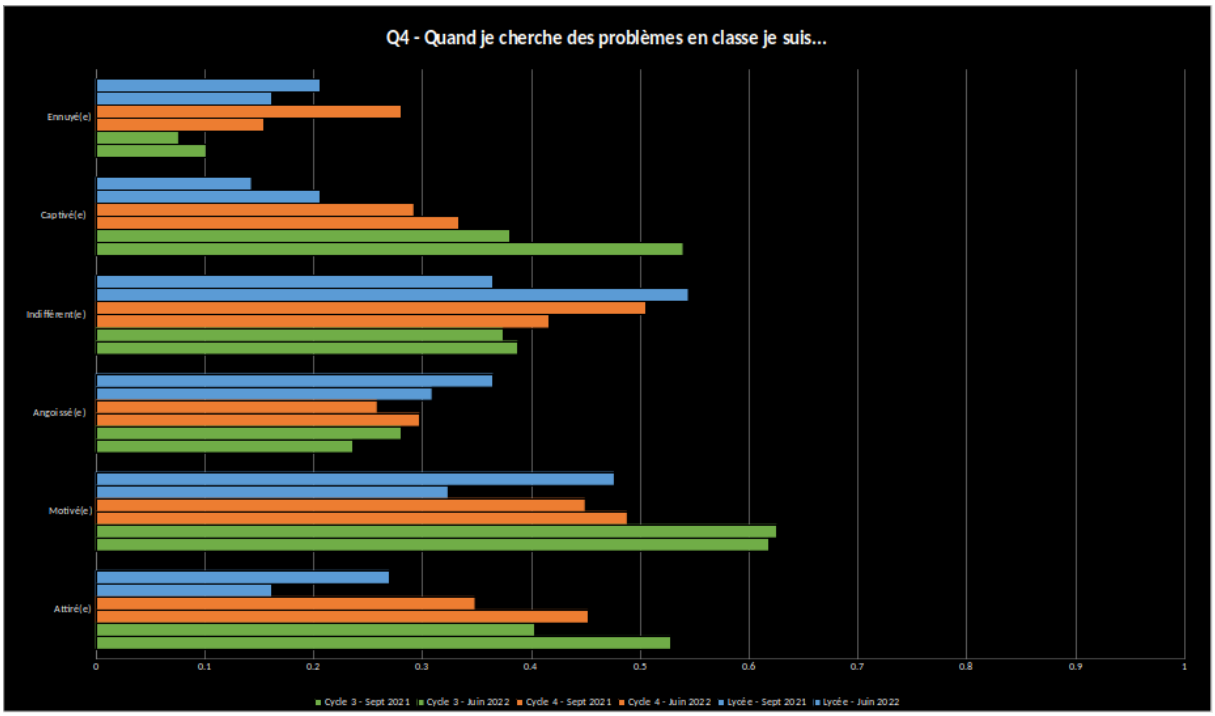


Figure 3 - Attitudes des élèves devant la recherche de problèmes

Analyse des tests

En ce qui concerne le lycée, nous nous appuyons sur les tests entourant la situation des nombres trapézoïdaux. Il s'agit de déterminer les nombres entiers naturels qui sont la somme de deux ou plus nombres consécutifs[5]. Pour chercher ce problème, les élèves disposent d'un temps relativement long pour travailler seuls, en groupes et confronter leurs résultats. Ce travail est résumé dans un "bilan de recherche". Ce bilan contient de nombreuses conjectures arithmétiques formulées par les élèves comme, par exemple, "tous les nombres impairs sont des nombres trapézoïdaux, ils sont la somme de deux entiers consécutifs" ou "la somme de 5 entiers consécutifs est un multiple de 5" ou encore

5. https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/clarolinepdfplayerbundle/pdf/2655427

“toutes les puissances de 2 et 0 ne sont pas des nombres trapézoïdaux”, pour en citer quelques-unes… et c’est alors que le calcul littéral apparaît comme un outil redoutable de démonstration. La recherche de ce problème prend tout son sens dans la classe de seconde, car il met en relation deux thèmes centraux : l’arithmétique et le calcul littéral. Notamment, il permet de caractériser les nombres (pairs, impairs, multiples de …, consécutifs) de manière littérale et donc indépendamment de la base de numération dans laquelle ils sont écrits. Pour mettre en avant ce lien fondamental, la suite de la séquence s’organise autour de plusieurs prolongements qui permettent d’une part de démontrer les conjectures formulées et d’approfondir la recherche de ce problème et d’autre part de renforcer le lien entre arithmétique et calcul littéral au travers d’exercices plus conventionnels[6].

Le pré/post-test utilisé pour mesurer la progression des élèves sur ces deux thèmes (arithmétique et calcul littéral) est composé de trois parties (voir le test en annexe 1). La première partie comporte trois exercices d’arithmétique dans un registre numérique, pré-requis théorique, mais nécessaire chez les élèves. Une deuxième partie comporte quatre exercices plus algébriques contenant également de l’arithmétique (mais abordée du point de vue littéral) ainsi que des questionnements d’égalités littérales. La dernière partie comporte deux questions ouvertes portant sur des démonstrations arithmétiques et plus spécifiques aux attentes du programme de seconde.

	t	p-valeur	Réponse
Question 1	-1.0561	0.1497	On ne peut pas rejeter l’hypothèse nulle
Question 2	-4.9576	1.427e-05	Il y a une augmentation significative de la moyenne
Question 3	-1.1707	0.1264	On ne peut pas rejeter l’hypothèse nulle
Question 4	-3.088	0.002257	Il y a une augmentation significative de la moyenne
Question 5	-1.2477	0.1111	On ne peut pas rejeter l’hypothèse nulle
Question 6	-1.1661	0.1264	On ne peut pas rejeter l’hypothèse nulle
Question 7	-3.6184	0.0005384	Il y a une augmentation significative de la moyenne
Question 8	-6.5527	2.463e-06	Il y a une augmentation significative de la moyenne
Question 9	-2.3591	0.01669	Il y a une augmentation significative de la moyenne

On voit que pour 5 questions sur 9, il y a une augmentation significative de la moyenne.

Il est intéressant de creuser un peu les questions pour lesquelles le test ne permet pas de montrer une progression, à savoir les questions 1, 3, 5 et 6. En ce qui concerne la première question : 13 élèves sur 34 ont progressé (3 n’avaient pas répondu dans le pré-test) et seulement 2 élèves ont régressé, les autres conservant la même note. Les moyennes aussi bien du pré-test que du post-test sont élevées : 4,86/7 et 5,13/7. En ce qui concerne la question 3 : 13 élèves sur 34 ont progressé, 1 élève n’a pas répondu à cette question dans les deux tests, 5 élèves ont régressé, les autres conservant la même note. Les moyennes à cette question sont assez basses : 1,71/4 et 2,11/4. Pour la question 5 : 11 élèves sur 34 ont progressé, 6 élèves ont régressé. Les moyennes sont respectivement 3,67/6 et 3,96/6. Pour

6. Pour une description plus complète de SDRP voir : https://math.univ-lyon1.fr/dream/?page_id=103

la question 6 : 16 élèves ont progressé, 8 élèves ont régressé. Les moyennes sont respectivement 6,71/10 et 7,26 sur 10.

La figure 4 présente la distribution relative des notes pour ces 4 questions en particulier.

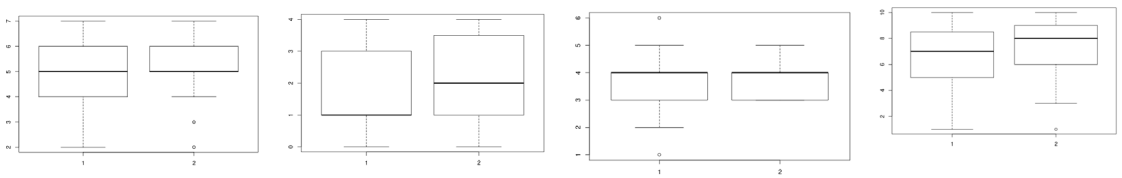


Figure 4 : Répartition des notes dans les questions 1, 3, 5 et 6

Globalement, les élèves ont progressé dans cette séquence et en plus des progrès signalés par l'analyse de ces pré-tests, on constate en classe une réelle implication de la plupart des élèves durant la phase de recherche ce qui facilite la mise en commun et les échanges qui suivent.

Au collège, nous nous appuyons sur les tests entourant la situation de la boîte sans couvercle[7] dans laquelle les élèves ont à chercher le patron d'une boîte parallélépipédique sans couvercle de plus grand volume construite à partir d'une feuille de papier A4.

Une séquence a été articulée autour de cette recherche de problème, ayant comme objectif principal la découverte de la notion de fonction. Au fil de la recherche en groupe, les élèves ont réinvesti et, parfois, découvert des notions autour du volume du parallélépipède rectangle, et de la dépendance des trois dimensions dans le contexte de l'expérience. Le lien entre le cadre bidimensionnel (patron) et tridimensionnel (perspective cavalière, boite en papier effectivement réalisée) a été l'occasion de représentations multiples d'un même objet en travaillant sur le passage entre la manipulation d'un patron papier et sa schématisation, ils ont dû avancer dans leur appréhension du passage de la manipulation à la verbalisation. Lors de la mise en commun de la recherche, la dépendance du volume de la boîte et de la hauteur choisie a été mise en évidence par les conjectures et les réflexions des élèves ; ce travail a débouché sur l'écriture de formules algébriques qui avaient été peu ou prou proposées dans les comptes rendus. Dans l'avancement de la recherche de la solution du problème, la notion de fonction a été explicitée en action, les différentes représentations d'une fonction, numérique, graphique et symbolique ont été utilisées et liées entre elles ; la mise en commun a permis d'introduire les notations et le vocabulaire des fonctions comme l'image dans l'écriture d'une fonction. Le calcul d'antécédent n'a pas été abordé : ni dans la recherche, ni dans la mise en commun ; cette question qui aurait pu déboucher sur la notion d'équation n'a pas émergé des recherches. Cette absence peut se comprendre parce que les élèves n'ont jamais, jusqu'à cette séquence, abordé cette connaissance dans leurs cours de mathématiques de quatrième ou troisième. Il a donc été décidé de ne pas traiter cette notion dans cette séquence pour la travailler plus tard dans l'année.

7. Voir à ce propos les résultats d'une expérimentation : https://math.univ-lyon1.fr/dream/?page_id=69

Les pré et post tests ont là encore été les mêmes et ont été construits autour de dix questions dont sept questions à choix multiples (QCM) et trois questions à réponse ouverte (voir le test en annexe 2). Cinq questions avaient pour but de réactiver les pré-requis liés à la séquence : calcul littéral, modélisation d'une situation géométrique ou un programme de calcul par une expression littérale, résolution d'équation (dont on a vu dans précédemment qu'elle n'est pas apparue, et donc qu'elle n'a pas été traitée dans les prolongements de la situation) ; quatre questions concernaient ensuite des connaissances propres à la séquence, des objets que l'on souhaitait que les élèves découvrent : le lien entre les différentes représentations d'une fonction, la compréhension de notion de fonction comme explicitation du lien entre deux grandeurs, visualisation de l'évolution d'une grandeur en fonction de l'autre. Enfin, une question pour évaluer l'attitude envers la "recherche" : oser aborder la situation de modélisation proposée, utiliser l'espace mis à disposition pour chercher, tester.

Le nombre d'élèves de la classe étant nettement inférieur à 30 (23 élèves), nous n'avons pas fait de test statistique pour comparer les moyennes des pré et post tests en collège. En revanche, nous avons détaillé les réponses des élèves exercice par exercice pour mettre en évidence les progressions. Il s'avère que dans cinq QCM sur sept, les réponses justes proposées ont été plus nombreuses dans le post-test que dans le pré-test. Dans les deux questions QCM restantes en revanche, les réponses correctes n'ont pas progressé. Il est bien sûr important d'analyser plus finement les réponses à ces questions et les raisons qui ont conduit à cette régression.

Si on regarde les réponses individuelles des élèves, 13 élèves sur 21 ont progressé, 3 élèves ont régressé et les autres ont obtenu le même nombre de réponses exactes. D'une façon générale, on peut admettre une progression globale de la classe en termes de connaissances et compétences mathématiques.

Conclusion

L'étude qui sera présentée repose sur la comparaison tentant de mettre en évidence les évolutions des élèves quant à leurs apprentissages et leurs conceptions des mathématiques comme science et comme discipline scolaire. Les premiers résultats concernant les apprentissages des élèves sont probants tels que montrés dans les résultats comparés des pré et post tests, l'analyse des réponses des élèves montre clairement une évolution de leur positionnement à la fois vis-à-vis des mathématiques comme science et comme discipline scolaire.La présentation finale mettra également en avant d'autres outils utilisés pour analyser plus finement les impacts sur les apprentissages et les conceptions des mathématiques chez certains élèves, en alliant les approches quantitatives aux analyses d'observation d'un point de vue qualitatif. Pour prolonger ces analyses, nous montrerons comment un enseignement fondé sur la recherche de problèmes peut à la fois viser des connaissances précises et laisser aux élèves une autonomie suffisante pour exprimer leur créativité permettant de modifier durablement leur rapport aux mathématiques.

Références

Aldon G. (2021) Dans quelle mesure est-il important de résoudre et de faire résoudre les problèmes ?. *Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula, (10)*, 9 – 28.

Aldon G., Front M., & Gardes M.-L. (2018) Analyse des effets d'un enseignement fondé sur la recherche de problèmes, in Aboud, M. (Ed.) *Actes du colloque EMF 2018 : Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines*, Paris, Editions de l'IREM de Paris. pp 1085-1093.

Aldon G., Front M., & Gardes M.-L. (2017) Entre élaboration et usage, comment poser la question de la cohérence des ressources ?, *Education & didactique, (11)* 3, 9-30.

Aldon G., Durand-Guerrier V., et Ray B. (2014) Des problèmes pour favoriser la dévolution du processus de mathématisation : un exemple en théorie des nombres et une fiction réaliste. In Aldon (Ed.), *Mathematics and realities* (p. 146-150).

Bishop A. J. (1988) *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education. Dordrecht*, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bishop A. J. (2008) Mathematics Teaching and Values Education – An Intersection in Need of Research, *ZDM: the international journal on mathematics education 31*(1):231-238.

Brousseau G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques*. La Pensée Sauvage.

Front M. (2015) Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan. *Thèse de doctorat*, Université Claude Bernard Lyon 1.

Gardes M.-L., & Yvain S. (2014) Un dispositif original pour appréhender le réel en mathématiques : la résolution collaborative de problème. In Aldon, G. (Ed.), *Mathematics and realities* (p. 361-366), *Actes de la 66e* CIEAEM, 21-25 Juillet 2014, Lyon.

Gardes M.-L. (2013) Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. *Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1*.

Gardes M.-L. (2018) Démarches d'investigation et problèmes de recherche. In G. Aldon, *Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux !* (pp.73-96). Canopé Editions.

Margolinas C. (2004) Points de vue de l'élève et du professeur. essai de développement de la théorie des situations didactiques. *HDR* de l'Université de Provence-Aix-Marseille I.

Pólya G., & Szego G. (1925/1972) Aufgaben und Lebrsätze aus der Analysis I. Springer. An English version, Problems and theorems in analysis I (D.Aeppli,Trans.), Springer.

Schoenfeld A. H. (1988) Problem solving in context (s). *The teaching and assessing of mathematical problem solving, 3*, 82-92.

Schoenfeld A. H. (2016) Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of education, 196*(2), 1-38.

Annexe 1 : Pré-post-test Nombres trapézoïdaux

1. Parmi les nombres entiers suivants, cochez ceux qui sont - de manière certaine - des nombres impairs (avec n entier) : 20 ; 401 ; 2^{100} ; 2n ; 5^{20} ; 2n+1 ; 3n.

2. Parmi les nombres entiers suivants, cochez ceux qui sont - de manière certaine - des multiples de 5 (avec n entier) : 20 ; 401 ; 2^{100} ; n+5 ; 5^{20} ; 2n+1 ; 5n.

3. Parmi les expressions suivantes, cocher celle(s) qui est(sont) égale(s) à x(3x-1)+3x (avec x réel) : $3x^2+2x$; x(3x+2) ; $2x^2+3x$; $3x^2 + 3x + 1$

4. Parmi les expressions suivantes, cocher celle(s) qui est(sont) égale(s) à x + (x+1) + (x+2) + (x+3) (avec x réel) : 4x+6 ; 2(2x+3) ; $x^4 + 6$; 10x

5. Parmi les affirmations suivantes, cocher celle(s) qui est(sont) vraie(s) : 15 est un multiple de 5 ; 3 est divisible par 9 ; 3 et 5 sont les seuls diviseurs communs à 30 et 45 ; 27 est un nombre premier; 1 est un multiple commun à 7 et 3 ; 6 est le plus grand diviseur commun à 12 et 24

6. Cocher le(s) nombre(s) qui sont premier(s) : 1 ; 2 ; 5 ; 9; 12 ; 15 ; 21 ; 19 ; 27 ; 30

7. Cocher tous les diviseurs de 24 : *choix possibles, tous les entiers de 1 à 24*

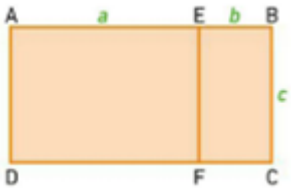
8. Question ouverte : la somme de 3 entiers consécutifs est-elle toujours un multiple de 3 ? Prouvez-le.

9. Question ouverte : Prouver que la somme de deux nombres, qui sont tous les deux multiples de 5, est encore un multiple de 5.

Annexe 2 : Pré-post-test Boîte sans couvercle

1. Combien vaut l'expression $B=5\times(x^3-6)$ pour $x=3$?

1. 105
2. 15
3. 129
4. -30

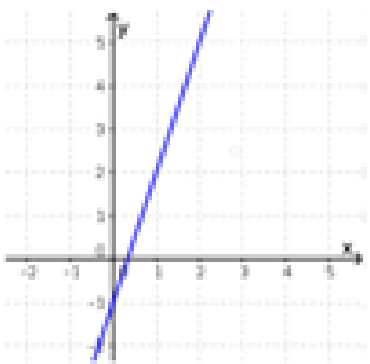


2. Exprime l'aire du rectangle ABCD en fonction de a, b, c :

1. (a+b)c b)
2. ac+bc
3. a+b+c
4. 2(a+b+c)

3. Traduis le programme de calcul « choisis un nombre. Soustraire 7. Doubler le résultat » en expression littérale.

1. (x-7) X 2
2. 2x-7
3. x-7 X 2
4. -12



4. A quoi est égale l'expression $x(3x^2-1)$?

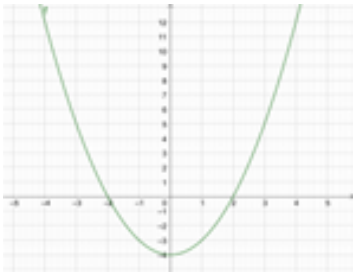
1. $2x^3$
2. $3x^3-1$
3. $3x^3-x$
4. $x+3x^2-1$

5. A quelle expression correspond la représentation graphique ?

1) f(x)=4x-1 2) f(x)=3x+1 3) f(x) = 3x-1 4) f(x)=x/3-1

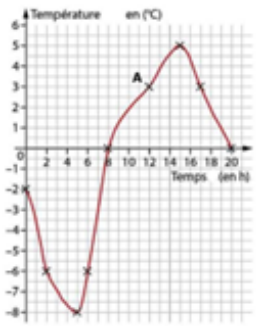
6. Quel tableau de valeurs correspond à la représentation graphique ?

Antécédent	-4	-2	0	2	3
Image	12	0	-4	0	5
Antécédent	12	0	-4	0	5
Image	-4	0-2	0	2	3
Antécédent	-4	-2	0	2	3
Image	12	0	-4	0	-5



7. Entoure une expression algébrique qui corresponde au tableau de valeurs ci-dessous :

x	-2	-1	0	1	2	3	1) f(x)=x2+1	2) f(x)=2x+1
f(x)	5	2	1	2	5	10	3) f(x)=x+1	4) f(x)=x+7



8. Résoudre l'équation suivante : 9*x*-16=29

9. Exprime le nombre de points en fonction de l'étape *n* :

étape 1 ** étape 2 **** étape 3 ******

10. Quelles informations peut-on tirer de ce graphique ?

Annexe 3 : questionnaire

Première partie – La recherche en mathématiques

Q1 – D'après toi, le travail d'un mathématicien consiste essentiellement en : (coche une réponse par ligne) Tout à fait d'accord, Plutôt d'accord, Plutôt pas d'accord, Pas du tout d'accord, Je ne comprends pas

Faire des calculs.

Résoudre de nouveaux problèmes.

Démontrer des théorèmes.

Apprendre des théorèmes existants

Présenter leurs résultats de recherches pour le grand public.

Se poser de nouvelles questions.

Rédiger des démonstrations.

Écrire des articles dans des revues scientifiques à destination des autres mathématiciens.

Faire des essais, tester des hypothèses, expérimenter.

Proposer des notations pour expliquer aux autres des notions mathématiques

Construire ses propres représentations de notions mathématiques pour son expérience personnelle

Avoir une super idée (une illumination) pour résoudre un problème en faisant des liens entre différentes parties des mathématiques

Q2 – Attribuez une note de 0 à 5 à chacune des qualités nécessaires pour être un chercheur en mathématiques de inutiles (0) à essentielles (5) ?

Concentration

Patience

Rigueur

Créativité

Passion

Organisation

Persévérance

Logique

Deuxième partie - La recherche de problèmes en classe de mathématiques

Q3 – Quelles phrases correspondent le mieux à ce que tu penses des mathématiques ? (Tu peux cocher plusieurs réponses).

Tout le monde peut apprendre les maths.

Faire des maths signifie explorer et expérimenter.

Faire des maths signifie résoudre beaucoup d'exercices similaires.

Les maths s'apprennent mieux en faisant des activités pratiques.

Il n'y a pas de place pour réfléchir dans le cours de maths.

Les maths se comprennent mieux en collaborant avec les autres.

Les maths sont réservées aux forts en maths !

Les maths se comprennent mieux seul(e).

Les maths s'apprennent en apprenant son cours par cœur.

Les maths sont utiles pour comprendre d'autres matières (Physique, histoire-géo, techno,...)

Q4 – En classe, quand je cherche des problèmes, je suis : (Tu peux cocher plusieurs réponses)

Ennuyé(e), j'attends que la prof me donne la réponse.

Captivé(e), je ne peux plus m'arrêter de chercher jusqu'à ce que je trouve.

Indifférent(e), c'est un exercice comme un autre, je le fais parce que je suis à l'école.

Angoissé(e), j'ai l'impression que je n'y arriverai pas.

Motivé(e), car j'aime chercher des problèmes, c'est un peu comme une énigme à résoudre.

Attiré(e), il y a un défi à relever !

Autre :

Q5 – Pour terminer, compléter la phrase :

«Pour moi, faire des mathématiques, c'est :

Titre: L'évolution dans la construction du concept de fonction des élèves dans des activités de résolution de problèmes : une étude de cas

Auteurs: DE SIMONE Marina et BURGERMEISTER Pierre-François

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1204 - 1218

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

L'évolution dans la construction du concept de fonction des élèves dans des activités de résolution de problèmes : une étude de cas

DE SIMONE[1] Marina – BURGERMEISTER[2] Pierre-François

Résumé – Dans cet article nous analyserons les interactions d'un groupe de trois élèves en 1e année du Collège de Genève (élèves de 15-16 ans) qui a travaillé sur une situation de résolution de problèmes proposée par l'enseignant en introduction du travail sur le concept de fonction. Nous documenterons en particulier l'évolution des conceptualisations de la notion de fonction d'une élève de ce groupe, Mélanie, grâce aux interactions entre pairs pendant des activités de résolution de problèmes.

Mots-clefs : résolution de problèmes, fonctions, travail de groupe, registres de représentation sémiotique, perspectives

Abstract – In this article we will analyse the interactions of a group of three students in the first year of secondary school in Geneva (students aged 15-16) who worked on a problem-solving situation proposed by the teacher as an introduction to work on the concept of function. In particular, we will document the evolution of the conceptualizations of the notion of function of one student in this group, Mélanie, thanks to the interactions between peers during problem-solving activities.

Keywords: problem solving, fonctions, registers of semiotic representation, perspectives

1. Université de Genève, Suisse, marina.desimone@unige.ch

2. Université de Genève, Suisse, pierre.burgermeister@edu.ge.ch

Introduction

Cette contribution s'encadre au sein d'un travail plus large de l'équipe DiMaGe de didactique des mathématiques de la section des sciences de l'éducation de l'Université de Genève, qui a travaillé pendant plus de quatre ans à un projet intitulé : « La résolution de problèmes comme objet ou moyen d'enseignement au cœur des apprentissages dans la classe de mathématiques » piloté par Sylvie Coppé et Jean- Luc Dorier et financé par le Fonds National Suisse pour la recherche (FNS - Subside n°100019_173105/1 - Période du 31.08.2017 au 31.01.2022). La recherche présentée dans cet article porte sur la résolution de problèmes comme outil pour l'enseignement des fonctions en 1ère année du Collège de Genève (élèves de 15-16 ans). En particulier, nous analyserons le travail des élèves lors d'une situation de résolution de problèmes tirée d'une séquence sur l'enseignement des fonctions que nous avons conçue et mise en œuvre dans différentes classes genevoises. Cette séquence est caractérisée par une place importante accordée, d'une part, à la résolution de problèmes et, d'autre part, aux tâches nécessitant une ou plusieurs conversions de registres de représentation sémiotique (Duval, 1993, 2006). Le focus sur les conversions de registres est justifié par le fait que, d'un point de vue épistémologique, le concept de fonction est étroitement lié à l'articulation de différents registres de représentation sémiotique. D'un point de vue didactique, afin d'opérationnaliser ce travail sur les registres, nous émettons l'hypothèse qu'il est nécessaire de passer par une démarche de résolution de problèmes dont l'objectif vise à rendre les élèves « opérationnels » par rapport à ces conversions de registres. Plus particulièrement, nous pensons que, sur le long terme, la résolution de problèmes permet aux élèves de rendre les conversions de registres des connaissances 'disponibles' au sens de (Robert, 1998), c'est-à-dire que les élèves sont capables de les mobiliser d'eux-mêmes sans qu'elles soient explicitement indiquées dans l'énoncé du problème. La séquence d'enseignement a été conçue en se référant aux programmes institutionnels du canton de Genève. La résolution de problèmes et la conversion de registres qui caractérisent notre séquence se retrouvent très clairement dans ce qui est préconisé institutionnellement.

Dans cet article, nous nous focalisons sur la situation « Les vases », intervenant dans la première partie de la séquence qui vise, à travers une série de problèmes basés sur des situations pseudo-concrètes, à renforcer la perception de la co-dépendance de deux grandeurs variables. La situation « Les vases » est une activité de résolution de problèmes prévue pour être travaillée par groupes de quatre élèves visant à créer des interactions épistémologiquement riches, c'est-à-dire qui contribuent à étoffer la conceptualisation de la notion de fonction, encore embryonnaire à ce stade de l'apprentissage. Notre analyse s'appuiera donc sur deux outils théoriques : les registres de représentation sémiotique (Duval, 1993) et les perspectives ponctuelles, locales et globales (Rogalski, 2008). C'est le croisement de ces deux outils qui nous permettra de repérer et décrire certaines évolutions dans les conceptualisations. Nous présentons ces deux outils d'analyse au point II et notre méthodologie de recherche au point III. Le point IV montre quelques éléments d'analyses a priori de la situation « Les vases » et d'une autre situation de notre dispositif, « Le circuit », ce qui nous permet d'expliciter comment nous investisserons par la suite nos deux outils d'analyse. Les points V et VI constituent le corps de cet

article. Ils sont consacrés à l'analyse des interactions d'un trio d'élèves pendant leur résolution du problème des vases. Nous concluons au point VII en donnant des éléments de réponses concernant l'évolution dans les conceptualisations d'une élève en particulier, Mélanie, et en évaluant l'efficacité et les limites de notre dispositif de recherche.

Cadrage théorique

Nous présentons ici les deux outils théoriques que nous avons mobilisés pour effectuer des analyses a priori et a posteriori de nos situations de RP : les registres de représentation sémiotiques (Duval, 1993, 2006) et les perspectives de Rogalski (2008).

Les registres de représentation sémiotiques

La notion de fonction, comme tout objet mathématique, est un concept abstrait, qui n'est « pas directement accessible[s] dans la perception, ou dans une expérience intuitive immédiate, comme le sont les objets communément dits "réels" ou "physiques" ! Il faut donc pouvoir en donner des représentants. » (Duval, 1993, p. 38). Ses représentants les plus courants dans l'enseignement des mathématiques sont l'expression analytique, la courbe représentative et le tableau des valeurs. Chacun de ces représentants se matérialise dans un registre de représentation sémiotique propre : les registres de l'écriture algébrique, de la représentation graphique et de l'écriture numérique. Or, une construction consistante de la notion de fonction requiert de maitriser plusieurs de ses représentations, le « recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations » (Ibid., p. 40). De plus, il ne s'agit pas seulement de maîtriser la notion de manière cloisonnée dans plusieurs registres de représentation distincts, mais aussi de pouvoir convertir dans l'un les informations récoltées dans l'autre, et vice-versa, c'est-à-dire d'être capable de coordonner ces différents registres de représentation. Duval pose le postulat suivant : « La compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion » (Ibid., p. 51). C'est bien ce que nous visons dans la situation « Les vases », où l'élève doit pouvoir coordonner deux registres de représentation : le registre des dessins géométriques (formes des vases) et le registre des représentations graphiques (les graphiques de remplissage associés à ces vases). Or, il a besoin pour cela de se créer une représentation mentale du processus de remplissage de chaque vase en tenant compte du fait que le débit ne varie pas. Par exemple, il doit pouvoir se représenter que le niveau de remplissage du vase cylindrique monte à vitesse constante. Duval affirme que « les représentations mentales recouvrent l'ensemble des images et, plus globalement, des conceptions qu'un individu peut avoir sur un objet, sur une situation, et sur ce qui leur est associé » (Ibid., p. 38-39). Dans notre cas, nous dirons que l'élève doit pouvoir s'appuyer sur une représentation mentale dynamique de la situation de remplissage pour pouvoir coordonner adéquatement les deux registres de représentation présents

dans l'énoncé de la situation. Notre premier outil d'analyse consiste donc à étudier les conversions entre registres de représentation sémiotiques avec les représentations mentales dynamiques de la situation. Cependant, il nous est apparu qu'une analyse se basant uniquement sur ce premier outil ne suffisait pas à décrire l'élaboration des constructions du concept de fonction durant les situations analysées. En effet, différents élèves peuvent mobiliser un même registre de représentation, par exemple graphique, en y lisant des éléments différents qui dépendent du regard porté sur cette représentation. Pour combler cette lacune, nous avons utilisé un deuxième outil d'analyse tiré de (Rogalski, 2008), visant à distinguer les différents points de vue portés sur une même représentation (sémiotique ou mentale).

Les perspectives ponctuelle, locale et globale

À la suite de Rogalski (2008), nous estimons qu' « un enjeu important de l'enseignement des fonctions est certainement de développer chez les étudiants une prise de conscience de l'existence de points de vue spécifiques sur les fonctions, associés à ces trois perspectives, ainsi qu'une mise en fonctionnement de toutes ces perspectives d'une fonction » (Vandebrouck, 2011, p. 5). Plus précisément, chacune de ces perspectives correspond au regard porté sur les différentes propriétés (ponctuelle, locale, globale) de la fonction considérée (Rogalski, 2008, p. 66) :

1. Propriété ponctuelle : c'est une propriété d'une fonction f relativement à un point x0 qui ne dépend que de la valeur de f au point $x0$. Par exemple, énoncer que $f(x0) = 3$ est une propriété ponctuelle.

2. Propriété locale : c'est une propriété d'une fonction f en un point $x0$ qui ne dépend que des valeurs de f sur un voisinage de x_0, aussi petit soit-il. Par exemple, la propriété « f est croissante en x_0 » est une propriété locale.

3. Propriété globale : c'est une propriété d'une fonction f sur un intervalle donné I faisant intervenir toutes les valeurs de f sur l'intervalle. Par exemple, la propriété « $f(x) > 0$ pour tout x de I » est une propriété globale de même que la propriété « f admet exactement trois minima locaux sur I ».

Méthodologie de recherche

Dans cette recherche, nous nous focalisons sur le travail d'un groupe d'élèves d'une classe de 1e année (« Math niveau normal ») du collège de Genève ayant travaillé sur l'activité « Les vases » et « Le circuit ». Le problème « Le circuit » avait été proposé aux élèves dans un « prétest » conçu afin d'obtenir une évaluation diagnostique des connaissances « déjà-là » relatives au concept de fonction. La phase de travail de groupe analysée ici fait suite à une phase de travail individuel des élèves et précède la phase de la mise en commun. Nous avons filmé le travail du trio dans son intégralité, et nous avons transcrit leurs échanges, que nous avons analysé en termes de coordination de différents registres de représentation sémiotique et de mobilisation de différents points de vue sur chacune de

ces représentations. Nous avons cherché ainsi à mettre en lumière les moments caractérisés par ces éléments afin de documenter l'évolution des élèves dans leur conceptualisation du phénomène en jeu : la variation de la hauteur de remplissage atteinte en fonction du temps écoulé, telle qu'elle se déduit des caractéristiques géométriques du vase et telle qu'elle se représente graphiquement. Dans cet article, nous nous focalisons en particulier sur les évolutions d'une élève du trio, Mélanie. Afin de documenter l'évolution de sa construction de la notion de fonction, nous allons nous intéresser au traitement qu'elle fait à deux problèmes « Le circuit » et « Les vases ». Nous allons tout d'abord présenter quelques éléments d'analyse a priori de ces deux problèmes.

Analyses *a priori*

« Le circuit »

En Annexe 1 nous présentons l'énoncé du problème « Le circuit » (Figure 4). Dans le Tableau 1 nous mettons en correspondance, pour chacun des points de vue (global, local, ponctuel) portés sur l'évolution de la vitesse de la voiture pendant une boucle du circuit, les aspects qui relèvent du registre graphique (représentation graphique de la vitesse en fonction de la distance parcourue) avec ceux qui relèvent du registre dessin (dessin stylisé du circuit), ceci en explicitant l'expérience mentale dynamique (EMD) qui permet de faire le lien entre les deux. Notons que les éléments d'une ligne du tableau peuvent se lire aussi bien de droite à gauche (conversion du registre dessin au registre graphique) que de gauche à droite (conversion du registre graphique au registre dessin).

« Les vases »

Comme pour « Le circuit », nous présentons l'énoncé du problème « Les vases » (Figure 5) et dans le Tableau 2 nous mettons en correspondance, pour chacun des points de vue (global, local, ponctuel) portés sur la vitesse d'élévation du niveau d'eau dans certains vases (nous avons choisi de ne présenter que les éléments les plus saillants), les aspects qui relèvent du registre graphique avec ceux qui relèvent du registre dessin, ceci en explicitant l'expérience mentale dynamique qui permet de faire le lien entre les deux. Noter que les éléments d'une ligne du tableau peuvent se lire aussi bien de droite à gauche (conversion du registre dessin au registre graphique) que de gauche à droite (conversion du registre graphique au registre dessin).

Analyse *a posteriori* **de la situation « Les vases »**

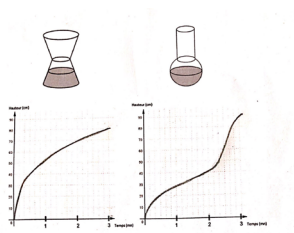
Nous présentons ci-dessous quelques extraits des échanges entre trois élèves (Luca, Mélanie et Sara) au cours de leur résolution de la situation « Les vases » (partie 1 et 2, cf. Annexe 2). Dans ce qui suit, nous nous focalisons plus particulièrement sur les interactions entre Luca et Mélanie qui ont

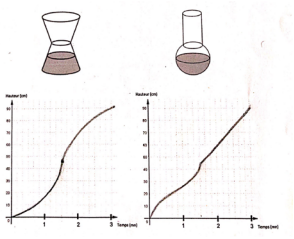
mené l'essentiel des échanges. Cela nous permettra de documenter de manière détaillée l'évolution notamment dans la construction de la notion de fonction de Mélanie.

Les tableaux montrent les échanges entre les élèves du groupe. Dans les transcriptions, nous avons utilisé différentes couleurs pour distinguer les différents registres convoqués par les élèves et pour souligner le recours à l'expérience mentale dynamique du processus de remplissage des vases. En violet : convocation de la part des élèves du registre dessin ; en rouge : recours à l'expérience mentale dynamique, en vert : convocation du registre graphique.

1	Luca (L) à Mélanie (M) : « mais pourquoi t'as mis ça toi ? » (en pointant le graphique a et à propos du vase 3)
2	M : « bah lui (en pointant le vase 1) il se remplit genre lentement parce qu'il a beaucoup de (…) surface enfin beaucoup de volume par rapport à lui (en pointant le vase 3) »
4	[…] M : « je sais mais là (pointe le vase 1) ça va se remplir plus lentement que si le truc il était comme ça (*resserre les deux mains*), du coup, là (en pointant le graphique b) ça va prendre plus de temps tandis que là (en pointant la base du graphique a) ça prend genre très peu de temps. Mais ce que je veux dire c'est que là (en pointant le vase 3) ça va se remplir plus vite au début mais à la fin ça va se (…) « désaccélérer ». Du coup, là (en pointant la base du graphique a) ça va aller hyper vite, et puis après progressivement plus lentement »
9	[…] L à M : « parce qu'en fait tu vois ici (en pointant le vase 1) le bas il est plus fin (en pointant le bas), le milieu (en pointant le milieu) c'est plus large, d'accord ? oui ou non ? et en haut (en pointant le haut) ça redevient fin. Et du coup, là on voit la même chose (il pointe le graphique a), au début c'est fin, il se remplit plus vite, il arrive vers le milieu (pointant le milieu du graphique a) c'est lent c'est lent et là (pointant le haut du graphique a) il ré-accélère (…), tu vois ? »
24	[…] *Luca explique à Sara pourquoi l'association 1-b n'est pas correcte* : L : « mais regarde parce qu'ici (en pointant le haut du graphique b) il accélère pas du tout, il reste tout le temps … tout le temps lent (pointant le graphique b)) … du genre à la fin … à la fin d'accord ce sera plus rapide (pointant le haut du vase 1)… pas là (pointant le haut du graphique b)), là tu vois c'est lent alors qu'à la fin (pointant le haut du vase 1) il est fin, ça devrait être trop rapide, tu vois ce que je veux dire ? »
25	M : « ouais … ouais »
26	Sara (S) : « ouais c'est vrai ça t'as raison »
27	*M parcourt lentement la courbe b avec son index (Fig. 4) puis* : « oui puis en plus ici (en pointant le milieu de la courbe b) c'est rapide alors que (en pointant le milieu du vase 1) c'est (…) »
28	M : « oui, c'est juste »
29	*Mélanie corrige sa production : elle avait mis 1-b et 3-a et maintenant elle associe correctement 1-a et 3-d.*

Ci-dessous les productions individuelles de la deuxième partie réalisées par les élèves avant le travail de groupe (Figure 1, Figure 2, Figure 3)





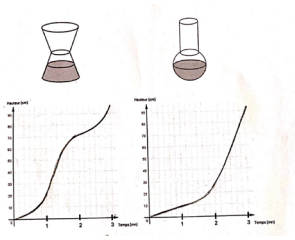


Figure 1. Production de Sara **Figure 2.** Production de Luca. **Figure 3.** Production de Mélanie

54	M : « bah moi j'ai mis genre court (en pointant la première partie de son graphique a), après j'ai mis deux fois comme ça, j'ai mis deux fois parce qu'il est serré (en pointant le milieu du vase 1). C'est vrai que c'est au milieu que c'est vraiment serré, puis après j'ai mis ça (M montre le haut de son graphique) »
55	L : « pourquoi tu as mis deux fois serré ? »
56	M : « parce que genre là (en dessinant un disque dans la partie supérieure du vase 1) je pensais que ça allait être comme ça, tu vois ? et du coup je me suis dit que là (en pointant le haut de la partie inférieure du vase 1) c'était serré comme là (en pointant le bas de la partie supérieure du vase 1) c'était serré. »
57	M : « genre j'ai mis la même, la même … le même temps »
58	L : « genre la partie en bas c'est la même chose que la partie en haut (en pointant le graphique a de M). »
59	L : « Non parce qu'à la fin (en pointant le haut du graphique de M) tu mets que ça va plus vite »
60	M : « ouais »
61	*M. efface d'abord le haut de son graphique et puis elle décide de tout effacer pour intégrer le point de vue ponctuel de L. M hésite puis déclare :*
62	M : « Je pense que ça n'a pas grande importance de le mettre au milieu, non ? de mettre 45 »
63	L : « bah si c'est important parce que c'est au milieu que … enfin si tu veux être précis c'est important »
64	M : « ah, c'est au milieu du temps »
65	(*moment d'hésitation*)
66	M : « Ça peut prendre un certain temps et après ça peut aller plus vite. »
67	L : « Non le débit il est toujours le même »
68	M : « Ouais mais au début ça se remplit plus lentement (en pointant le graphique) puis après d'un coup ça va aller plus vite et puis après ça va se (…) boucher »
69	L : « oui c'est pour ça, regarde, au milieu ça se resserre (en pointant son graphique a) parce que tu vois c'est rapide »
70	M : « ouais, mais le temps je sais pas si je suis d'accord mais ça (pointant l'axe vertical) 45 je suis d'accord »
71	L : « pourquoi le temps ? »
72	M : « mais parce que là ça va prendre peut-être … »
73	L : « ça va prendre trois minutes, peu importe la forme, ça prend trois minutes »
74	M : « bon, enfin c'est pas grave »
75	L : « mais faut qu'on se mette d'accord, le but c'est qu'on se mette d'accord pour proposer quelque chose »
76	*Mélanie place le point de coordonnées (1,5 ; 45) sur son graphique qui est resté vierge (depuis la ligne 62).*
77	M : « mais je sais pas si je suis d'accord, là ça va prendre par exemple 45 secondes (en pointant la partie grisée du vase 1) puis là ça va en prendre peut-être 10 (en pointant le milieu du vase 1) mais même si ça va prendre trois minutes à la fin, et bah peut-être 45 secondes il va arriver là (en pointant l'axe horizontal) puis après ça va aller genre … »
78	L : « une minute trente »
79	M : « ouais mais là ça va prendre 45 secondes (elle montre simultanément la partie grisée du vase 1 et le début de l'axe horizontal du graphique a) puis là ça va peut-être en prendre genre … deux petites là (en pointant le milieu du vase et l'axe horizontal à peu près à une minute) et puis (inaudible) »
80	L : « non, parce que ça va prendre trois minutes. Tu vois ça (pointant le vase 1), la partie d'en bas et la partie d'en haut elles ont le même volume. Puis si ça a le même volume ils vont prendre le même temps pour se remplir »
81	M : « ah ouais, du coup genre … ouais »
82	S : « mais peut-être c'est le même truc, hein ? »
83	M : « bah on fait comme ça (elle trace sa nouvelle courbe correcte pour le vase 1) »

Discussion

Dans leurs travaux individuels (avant le travail en groupe) sur la situation « Les vases », Mélanie et Sara semblent être restées au niveau global sans tenir compte de variations locales et sans prendre en compte les éléments ponctuels pertinents, alors que Luca coordonne les trois perspectives. Luca convoque de manière pertinente l'EMD pour justifier ses réponses ; il semble que le passage par l'EMD pour coordonner les registres dessin et graphique soit naturalisé chez Luca. Durant les échanges, Mélanie fait évoluer ses points de vue ; c'est aussi le cas pour Luca mais dans une moindre mesure. Dans le problème « Le circuit », Mélanie choisit le circuit numéro 5, très vraisemblablement parce qu'elle y retrouve globalement le dessin de la courbe, et elle place le point de départ (D) en bas à gauche du circuit pour parfaire la correspondance globale avec le graphique. Il semble donc que Mélanie ait utilisé un point de vue global sur le graphique : la correspondance des profils entre le graphique et le cinquième circuit est tellement frappante que cela ne l'a certainement pas amené à recourir à l'expérience mentale dynamique. Un point de vue uniquement global pourrait néanmoins amener à une analyse plus pertinente, à condition toutefois d'être accompagné de l'expérience mentale dynamique. Dans ce cas, Mélanie aurait pu discerner par exemple la présence de trois minima locaux et y associer la présence de trois virages sur le circuit, réflexion qui aurait pu lui permettre d'éliminer les circuits 1 et 5. Dans la première partie de la situation « Les vases », Mélanie convoque de manière adéquate l'expérience mentale dynamique pour coordonner les registres dessin et graphique. Cette compétence s'observe également très clairement dans son discours lors du travail sur la deuxième partie de la situation, en particulier, lorsqu'elle coordonne explicitement ces deux registres avec une gestuelle des deux mains et un discours reflétant une expérience mentale dynamique : « ouais mais là ça va prendre 45 secondes (elle montre simultanément la partie grisée du vase 1 et le début de l'axe horizontal du graphique a, Fig. 17 , ligne 76) puis là ça va peut-être en prendre genre … deux petites là (en pointant le milieu du vase et l'axe horizontal à peu près à une minute, Fig. 18, ligne 76) ». Pour en revenir à la première partie de la situation, les erreurs qu'elle commet pour les vases 1 et 3 semblent dues à des interprétations erronées des dessins, alors que son interprétation dynamique des graphiques, elle, est pertinente comme on peut le constater dès le début de l'échange à propos du vase 1 : « Du coup, là (en pointant la base du graphique a) ça va aller hyper vite, et puis après progressivement plus lentement » (ligne 4). Néanmoins, son interprétation des pentes des différentes parties d'un graphique en tant que vitesses d'élévation du niveau d'eau n'est pas encore naturalisée comme on le voit dans son hésitation sur les termes employés ci-après : « parce que là c'est court (pointant la base du graphique d), parce que là (pointant la base du graphique d) … ça prend … c'est rapide et ensuite (pointant le haut du graphique d) c'est plus lent » (ligne 23). On peut d'autre part remarquer qu'au début de l'échange concernant la première partie de la situation, Mélanie porte spontanément un regard local sur les graphiques alors que son regard sur les dessins est essentiellement global (« il se remplit genre lentement parce qu'il (vase 1) a beaucoup de (…) surface enfin beaucoup de volume par rapport à lui (vase 3) » ; « je sais mais là (pointe le vase 1) ça va se remplir plus lentement que si le truc il était comme ça (*resserre les deux mains pour mimer un vase étroit*, Fig. 3) » (ligne 2)). Ses points

de vue s'enrichissent au cours de cet échange et lui permettent finalement de coordonner adéquatement un regard à la fois global et local sur le dessin et le graphique correspondant. On retrouve cette vision iconique de Mélanie sur les dessins dans son discours explicatif concernant le vase 1 de la deuxième partie, vase 1 qu'elle considère en trois secteurs, deux « larges » et un « serré », sans distinguer dans chacun de ces secteurs les variations au niveau local et sans accorder d'attention particulière au point de jonction des deux parties de ce vase (point de vue ponctuel) : « Ouais mais au début ça se remplit plus lentement (en pointant le graphique) puis après d'un coup ça va aller plus vite (…) » (ligne 66). Ajoutons que cette dernière intervention manifeste de la part de Mélanie un point de vue local sur le graphique puisqu'elle mobilise la notion de vitesse d'élévation du niveau d'eau. La confrontation avec Luca à propos de la réalisation du graphique correspondant à ce vase 1 de la deuxième partie fait évoluer Mélanie vers une première prise en compte du point de vue ponctuel sur le graphique ainsi que vers une meilleure prise en compte du point de vue local sur le graphique. Nous l'observons, d'une part, dans sa remarque « c'est vrai que c'est au milieu que c'est vraiment serré » (ligne 54) où elle montre un point de vue ponctuel susceptible d'amener de plus un regard local sur le secteur « serré » puisque le resserrement y est maintenant perçu comme variable. Nous le voyons d'autre part dans sa réflexion sur l'emplacement du point du graphique correspondant au point de jonction des deux parties du vase. En effet, Mélanie prend le temps de réfléchir à l'affirmation de Luca concernant l'appartenance nécessaire du point (1,5 ; 45) à la courbe en tant que point central et de chercher à expliciter son propre point de vue à ce propos : elle déclare d'abord « Je pense que ça n'a pas grande importance de le mettre au milieu, non ? de mettre 45 » (ligne 61), puis dans un deuxième temps « ouais, mais le temps je sais pas si je suis d'accord mais ça (pointant l'axe vertical) 45 je suis d'accord » (ligne 68) et elle expose que la première partie du vase peut se remplir plus lentement que la deuxième, vraisemblablement parce qu'elle n'a pas intégré dans sa réflexion la notion de débit constant. Finalement, à la fin de l'échange, Mélanie finit par adhérer entièrement au point de vue ponctuel de Luca (M : « ah ouais, du coup genre … ouais », lignes 78-80).

Conclusions

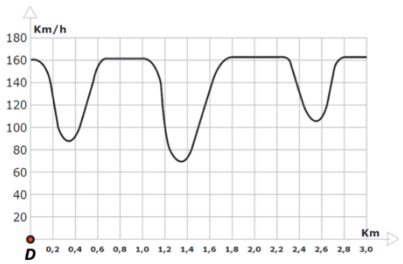
Rappelons que notre questionnement initial consiste à documenter l'évolution des constructions de la notion de fonction d'élèves qui interagissent entre eux pendant des activités de résolution de problèmes. L'analyse des échanges au sein du trio d'élèves présentée dans cet article montre que cette situation a amené des interactions épistémologiquement riches entre Luca et Mélanie : elles ont en effet contribué à faire évoluer la construction de Mélanie du concept de fonction par des points de vue plus riches sur les représentations graphiques et sur les dessins correspondants en renforçant leurs liens, à travers l'EMD, avec le phénomène décrit ; elles ont aussi amené Luca à expliciter ses points de vue et, ce faisant, à parfaire sa conceptualisation des représentations graphiques en jeu dans cette situation. Le croisement de nos deux outils d'analyse s'est révélé fécond en nous permettant de récolter des informations précises sur l'évolution des conceptions des élèves au cours de leur travail. Nos deux outils d'analyse nous ont donc permis de repérer des évolutions dans les

conceptualisations des élèves dans le contexte d'une situation de RP. Mais les mêmes évolutions auraient-elles pu s'opérer tout aussi bien à travers un dispositif d'enseignement plus frontal, dans lequel la RP ne jouerait, au plus, qu'un rôle secondaire ? Nous pensons avoir montré que le contexte d'une activité de recherche en groupe a amené Mélanie et Luca à s'impliquer fortement dans la réflexion en y investissant leurs points de vue initiaux, puis en parvenant à les enrichir par confrontation avec ceux de leurs pairs.

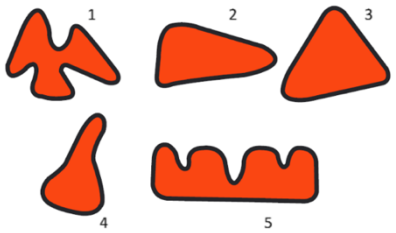
Annexe 1

Question 4

Ce graphique représente les variations de la vitesse d'une voiture de course lors de son 2e tour sur un circuit plat de 3 km de longueur.



Voici les tracés de cinq circuits :



a) A partir du graphique ci-dessus, identifier sur lequel de ces cinq circuits la voiture roulait. Entourer votre réponse.

b) Indiquer sur le circuit que vous avez identifié :

- à quel endroit se situe le point de départ ***D***.
- dans quel sens tourne la voiture.

Figure 4. Enoncé de l'activité « Le circuit »

	GRAPHIQUE	EXPÉRIENCE MENTALE DYNAMIQUE (EMD)	DESSIN
GLOBAL	Il y a trois minima locaux	La voiture ralentit trois fois	Il y a trois virages
PONCTUEL	Le minimum global est le deuxième des trois minima locaux	Le plus fort ralentissement est le deuxième	Le virage le plus serré est le deuxième
LOCAL	Le point de départ est situé immédiatement avant un intervalle de décroissance (à la fin du plus court intervalle de vitesse constante) Le plus grand intervalle de vitesse constante arrive après la plus petite valeur de minimum local	La voiture ralentit immédiatement après avoir franchi la ligne de départ La voiture maintient le plus longtemps une vitesse constante après le plus fort ralentissement	Le point de départ est situé peu avant un virage La plus longue ligne droite est parcourue après le virage le plus serré

Tableau 1 Registres et points de vue croisés pour le problème « Le circuit »

Annexe 2

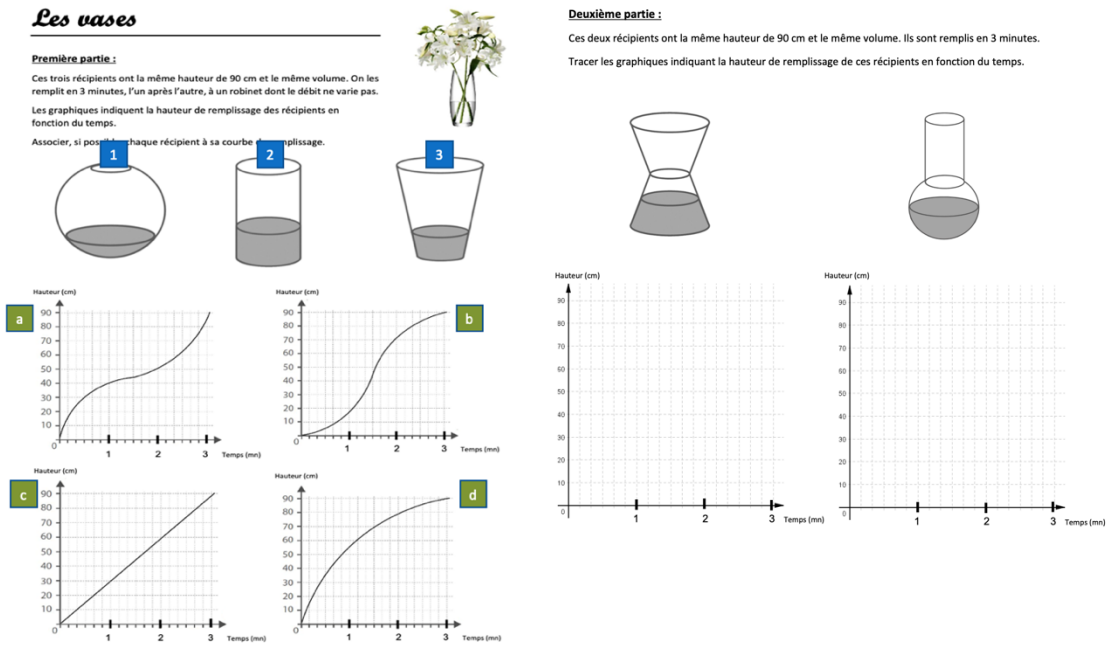


Figure 5 Énoncé de la situation «Les vases» (première et deuxième parties)

	Graphique	Expérience mentale dynamique (EMD)	Dessin
Les Vases Première partie			
Global	La troisième représentation graphique est linéaire	La vitesse d'élévation du niveau d'eau est constante	Les sections horizontales du vase cylindrique sont toutes identiques
Ponctuel	La courbe passe par le point milieu (1,5 ; 45)	Les deux hémisphères ayant même volume leurs durées de remplissage respectives sont identiques	Le vase sphérique possède le même volume en haut et en bas (les deux hémisphères sont identiques).
Local	1. Sur le graphique d, la croissance est d'abord rapide et puis de plus en plus lente 2. Sur le graphique a, la croissance est d'abord rapide, puis de plus de plus lente, et puis elle devient de plus en plus rapide	1. La vitesse d'élévation du niveau d'eau est d'abord rapide et puis de plus en plus lente 2. La vitesse d'élévation est d'abord rapide puis de plus de plus lente et puis à nouveau de plus en plus rapide	1. L'aire des sections horizontales du vase conique croissent du bas vers le haut 2. Les sections horizontales du vase sphérique sont d'abord étroites, puis large, puis à nouveau étroites lorsque l'on se déplace du point le plus bas au point le plus haut

Les vases Deuxième partie			
Global **1er vase**	La courbe est constituée par deux parties identiques symétriques par rapport au point milieu.	La variation de la vitesse d'élévation dans la première partie du vase (lent puis rapide) est l'inverse de celle de la deuxième partie (rapide puis lent).	Le vase est constitué de deux parties identiques, symétriques l'une de l'autre.
Ponctuel **1er vase**	Le milieu de la courbe est « lisse »	La vitesse d'élévation varie continument lorsque l'eau atteint le milieu du vase	Le diamètre d'ouverture du sommet de la partie basse du vase correspond à celui du socle de la partie haute
Local **1er vase**	1. La croissance est d'abord lente puis de plus en plus rapide puis à nouveau de plus en plus lente. La pente au point milieu est faible.	1. La vitesse d'élévation du niveau d'eau est d'abord lente et puis de plus en plus rapide et à nouveau de plus en plus lente. 2. Lorsque le niveau d'eau atteint le milieu du vase la vitesse d'élévation reste relativement modeste.	1. Les sections horizontales vont en décroissant jusqu'au milieu puis en croissant à nouveau. 2. D'autre part ce diamètre commun reste relativement important.

Tableau 2 Registres et points de vue croisés pour l'activité des vases

Références

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*(1), 37-65.

Duval R. (2006) Transformations de représentation sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXII^e Colloque COPIRELEM* (pp. 67-89). Strasbourg : IREM.

Rogalski M. (2008) Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. *Didactique, épistémologie et histoire des sciences : Penser l'enseignement*.

Vandebrouck F. (2011) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16*, 149-185.

Titre: Bilan du Projet Spécial n° 2

Auteurs: DE SIMONE Marina, ROUAN Omar et SAVARD Annie

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1219 - 1227

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Bilan du Projet Spécial nº 2

Responsables
DE SIMONE[1] Marina – ROUAN[2] Omar – SAVARD[3] Annie
Correspondant CS
SABOYA[4] Mireille

Préambule

Le faible nombre des contributions reçues et acceptées et celui des participants présents à Cotonou (Bénin) du 13 au 17 décembre 2022 pour le GT5 *Modélisation, interdisciplinarité et complexité* (3 communications) et pour le SPÉ2 *La démarche d'investigation et la résolution de problèmes dans la classe de mathématiques* (2 communications) a amené les organisateurs à regrouper ces deux groupes de travail. Cela s'est révélé un ajustement intéressant qui a permis de trouver des synergies dans les deux thèmes et de donner plus de place aux discussions des textes. De plus, les débats ont été d'autant plus riches que les personnes présentes étaient toutes très impliquées.

Introduction

Concernant le SPÉ2, qui a travaillé de façon conjointe au GT5, la démarche d'investigation (DI) a été discutée pour la première fois lors de la rencontre EMF en 2012 (voir Matheron, Morselli, René de Cotret & Schneider, 2012) et a fait l'objet d'un numéro spécial dans Springer en 2013, *Implementation of Inquiry-Based Learning in Day-to-Day Teaching*. Cette thématique a été débattue par la suite dans le groupe de travail 10 en 2015 (voir Gandit, Morselli & Sokona Bekaye, 2015) et 2018 (voir Mansour, Burgermeister & Ouvrier-Buffet, 2018) et elle s'insère dans la continuité des travaux conduits dans les cadres de l'IBE (Inquiry-Based Education), de l'IBL (Inquiry-Based Learning) et de l'IBSME (Inquiry-Based Science and Mathematics Education) au niveau international. Dans les écrits scientifiques, la DI est considérée soit comme une approche d'enseignement, soit comme un processus, ou soit comme un objet d'apprentissage (Aulls et Shore, 2008). Une définition généralement acceptée présente la DI comme une approche pédagogique centrée sur l'élève (Chichekian, Savard, & Shore, 2012). Celui-ci explore une situation, la questionne et expérimente en utilisant sa propre solution, il argumente et justifie (Maass & Artigue, 2013).

1. Institut Universitaire de Formation des Enseignant-es (IUFE) de l'Université de Genève, Genève, marina.desimone@unige.ch

2. GREDIM, ENS de Marrakech, Maroc, omarrouan@gmail.com

3. Département des Études intégrées à la Faculté des sciences de l'éducation de l'Université McGill, Canada, annie.savard@mcgill.ca

4. Département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal (UQAM), Canada, saboya.mireille@uqam.ca

Compte tenu de cette riche littérature, les responsables ont inscrit la thématique de la résolution de problèmes et de la démarche d'investigation (DI) dans trois axes : l'opérationnalisation en classe de la DI, les aspects épistémologiques de la DI en mathématiques et la formation des enseignants et des formateurs des enseignants. Les questions posées concernant principalement la DI ont trouvé peu d'échos auprès des contributeurs. Cela n'a cependant pas empêché des échanges très riches, entre autres avec les contributeurs du GT5.

Le Groupe de Travail GT5 *Modélisation, interdisciplinarité et complexité* s'intéresse au rôle des mathématiques en tant qu'outil privilégié de *modélisation* des situations relevant ou non de la vie quotidienne, des situations singulières dans leurs manifestations ou communes à une catégorie donnée. Dans le domaine savant, la *modélisation* ne prend vraiment sens que dans *l'interdisciplinarité* entre les différents domaines d'étude qui contribuent à appréhender les comportements des êtres vivants, des groupes sociaux, ainsi que les phénomènes naturels ou artificiels. La *modélisation* peut alors être considérée comme un processus central en mathématiques (Barry & Saboya, 2015). Ces modèles, plus ou moins élaborés, tout en dépendant des ressources mobilisées pour les générer, constituent des outils puissants de compréhension, de prévision, de décision, pour ne donner que quelques exemples, comme le montre Mawhin (2017). Déjà Galilée pressentait l'efficacité des mathématiques pour expliquer le monde avec sa célèbre phrase « l'univers est écrit en langage mathématique » (Galileo, 1623).

Les questions auxquelles les auteurs des contributions à ce GT5 pourront répondre sont :

- Quelle place et quel rôle, les mathématiques peuvent-elles et doivent-elles jouer comme outil de modélisation de situations ?
- Comment ce rôle peut-il être traduit dans l'enseignement et la formation pour donner un réel statut à l'interdisciplinarité à l'école ?
- Comment enseigner la modélisation en tant qu'outil de pensée et non d'apprentissage de modèles tout faits ?

Organisation et thématique abordées

Le groupe spécial SPÉ2 a vu la présence de Gilles Aldon, Antoine Guise et Miriam Di Francia (France) et Marina De Simone (Suisse). On trouve leurs communications dans les actes, à savoir "Fonder son enseignement sur des problèmes de recherche en mathématiques : quels impacts sur les élèves ?" pour les trois premiers et "L'évolution dans la construction du concept de fonction des élèves dans des activités de résolution de problèmes : une étude de cas".

Malgré le titre du groupe spécial et les axes proposés dans le texte de cadrage, les deux contributions ont porté sur la résolution de problèmes en mathématiques ce qui correspond à la deuxième partie de l'intitulé du groupe. C'est pour cette raison que les trois axes proposés qui concernaient

la démarche d'investigation (DI) n'ont pas été investis. En effet, les deux contributions reçues s'intéressent à la résolution de problèmes. Pour la première, les contributeurs ont conçu un dispositif s'étalant tout au long de l'année scolaire où la résolution de problèmes joue le rôle tant d'objet que d'outil d'apprentissage des mathématiques. La deuxième contribution analyse les effets d'une ingénierie didactique basée sur la résolution de problèmes pour l'enseignement-apprentissage du concept de fonction. Dans ce cas, la résolution de problème a un statut d'outil d'enseignement-apprentissage.

Le groupe de travail SPÉ2 comptait 4 participants présents : Assiba Thérèse Akoua Dahouessa (Côte d'Ivoire), Faguèye Ndiaye et Cissé Ba (Sénégal) et Jannick Trunkenwald (France).

Leurs communications figurent dans les actes et répondent principalement à la première et à la deuxième question. En particulier, Assiba Thérèse Akoua Dahouessa apporte une contribution aux questions sur la modélisation et l'interdisciplinarité en proposant : "Analyse des erreurs des élèves de la seconde C à propos des outils mathématiques en physique", alors que Faguèye Ndiaye et Cissé Ba traitent du problème de l'interdisciplinarité à l'école et en formation d'enseignants à travers "Modélisation mathématique : outil efficace d'enseignement-apprentissage des mathématiques et de résolution de problèmes". Quant à Jannick Trunkenwald, il a réfléchi avec son collègue Dominique Laval à la question de la complexité en présentant un article dont le titre est "Connexions entre espaces de travail : une étude entre probabilités et algorithmique".

A partir des deux textes de cadrage, il s'est agi de trouver des synergies entre les thèmes des deux groupes. Pour cela, les participants ont été invités à constituer une carte conceptuelle autour des termes "modélisation" et/ou "modéliser" initialement, puis à propos de la "résolution de problèmes" et de la "démarche d'investigation".

En effet, il nous a semblé que les premiers termes qui concernent surtout le GT5 pouvaient jouer un rôle d'introduction à une réflexion sur la résolution de problèmes car pour résoudre le problème une modélisation est nécessaire, que ce soit pour un problème issu de la vie quotidienne ou de différentes disciplines scientifiques ou même intra-mathématique.

Concernant les productions des participants et la discussion qui s'en est suivie à propos du terme "modélisation", elles font ressortir le concept de "va et vient" entre le monde réel (à gauche dans la fig.1) et le modèle (à droite dans la fig. 1), ce "va et vient" étant décrit par tous les mots apparaissant en bas de la figure 1.

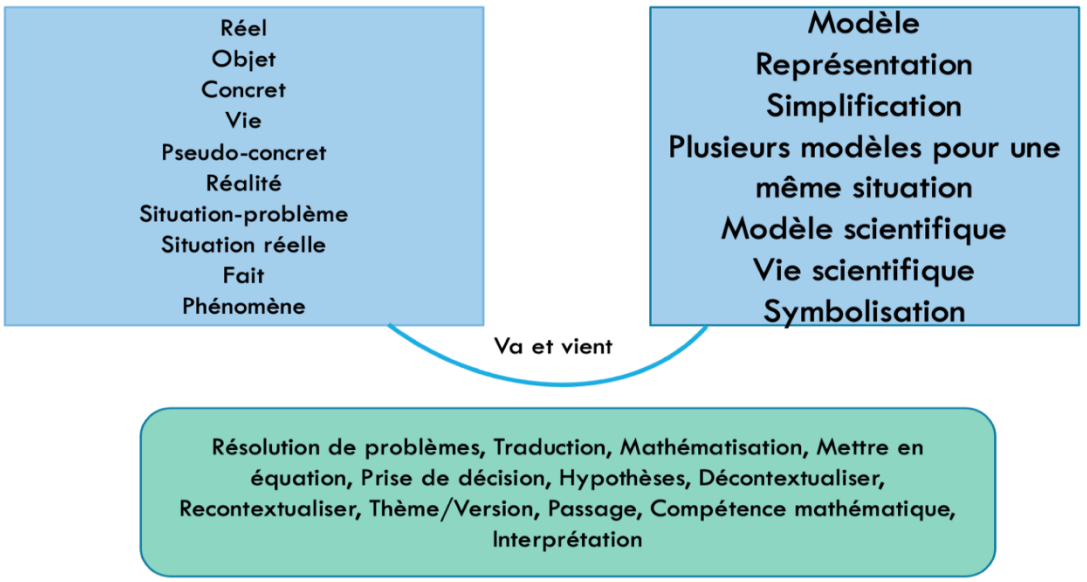


Figure 1 – Synthèse des cartes conceptuelles des participants

Pour mettre en évidence la fréquence relative des différents mots proposés par les participants, nous avons créé un nuage des mots (fig. 2). La fréquence importante des mots ”modèle”, ”modélisation” et ”résoudre” fait bien apparaitre le lien prévu entre modélisation et résolution de problèmes.

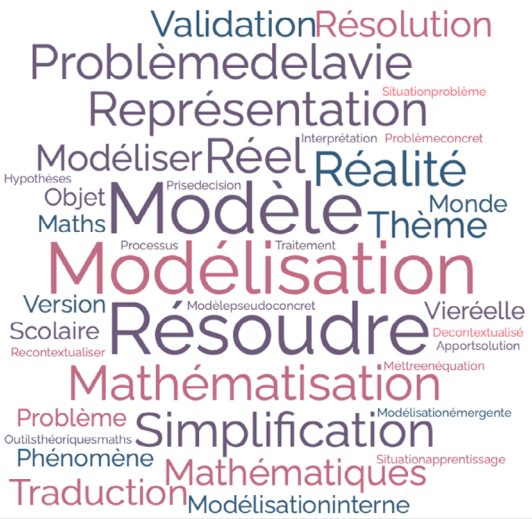


Figure 2 – Nuage de mots issu des cartes conceptuelles des participants autour des termes “modéliser” et “modélisation”

Le même exercice de nuage de points à partir des cartes conceptuelles des participants à propos de la résolution de problèmes (RP) et de la démarche d’investigation (DI) a produit le nuage de mots de la figure 3. Comme dans la figure 2, la relation entre DI, RP et modélisation apparait fortement.



Figure 3 – Nuage de mots issu des cartes conceptuelles des participants autour des termes “résolution de problèmes” et “démarche d’investigation”.

Résumé des discussions

Le lien entre les 2 groupes GT5 et SPÉ2 s’est fait facilement, car les présents se sont accordés sur le fait que pour résoudre des problèmes, mais aussi pour résoudre une situation scientifique, on modélise. Toutefois, quand il met en place une situation-problème l’enseignant doit se garder d’influencer les élèves avec le modèle qu’il a anticipé. Le rôle essentiel du choix des variables didactiques a alors été souligné.

Un débat a aussi porté sur la distinction à faire entre modèle et modélisation, ce deuxième terme décrivant le processus alors que le premier correspond au produit. Cependant reste en discussion si l’application d’un modèle enseigné préalablement participe à la modélisation : il semble que l’application du modèle général à la situation particulière doive être aussi considéré comme de la modélisation. D’un point de vue plus particulier, un domaine des mathématiques qui se sert de la modélisation sont les probabilités comme cela a été montré par une des contributions au GT5.

En ce qui concerne la résolution des problèmes, nous avons discuté de ses trois finalités ; la résolution de problèmes vue comme

- moyen (outil) d’introduire des nouvelles connaissances mathématiques ;
- objet d’enseignement-apprentissage (apprendre des stratégies, des procédures, des démarches, des modes de raisonnement, etc.) ;
- évaluation de l’enseignement-apprentissage des concepts et notions mathématiques.

Nous avons aussi convenu que la résolution de problèmes pourrait permettre de faire émerger et rendre « disponibles » le travail dans différents registres sémiotiques, si le problème est conçu de manière suffisamment riche à permettre différentes approches de résolution qui convoquent et coordonnent différents registres de représentation.

En ce qui concerne la démarche d'investigation, les participants ont provisoirement conclu qu'elle concerne plutôt les sciences expérimentales (modélisation horizontale) alors que la résolution de problèmes est souvent interne aux mathématiques (modélisation verticale).

Conclusion et perspectives

Contrairement au groupe correspondant de l'Espace mathématique francophone 2018 (GT10), le groupe SPÉ2 de 2022 a vu cette année une faible participation. Faut-il imputer cette relative désaffection à une diminution d'intérêt des chercheurs et des enseignants pour la démarche d'investigation, comme si, depuis qu'elle est étudiée, on en avait fait le tour ? Symbolique pour cela le fait que les deux communications présentées portent sur la résolution de problèmes qui est peut-être plus spécifique à la discipline des mathématiques par opposition à d'autres disciplines scientifiques. Toutefois la réunion des deux groupes SPÉ2 et GT5, portant entre autres sur la modélisation et l'interdisciplinarité, a permis lors des riches discussions d'intégrer le lien avec les sciences et leur rôle comme source de problèmes mathématiques. Il est donc licite de se demander si pour un EMF futur ces deux thématiques importantes dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques à l'école et dans la formation des enseignants ne pourraient pas à nouveau être réunies.

Références

Aulls M. W., & Shore B. M. (2008) *Inquiry in education (Vol. I): The conceptual foundations for research as a curricular imperative*. New-York, NY : Erlbaum.

Barry S., & Saboya M., (2015) Un éclairage sur l'étape de co-situation de la recherche collaborative à travers une analyse comparative de deux études en didactique des mathématiques. *Recherches Qualitatives, 34*, 49-73.

Chichekian T., Savard A., & Shore B. M., (2012) Les troncs communs et les trajectoires divergentes dans les langues françaises et anglaises de l'approche par démarche d'investigation. *Grand N, 90*, 33-48.

Chauviré C., Guiducci M., & Chauviré C., (1979) *L'essayeur de Galilée*. Les Belles Lettres.

Mahwin J., (2017) *Les modèles mathématiques sont-ils des modèles à suivre ?* Bruxelles : l'Académie en poche.

Gandit M., Morselli F., & Sokona Bekaye S., (2015) Rôles et responsabilités des professeurs et des élèves dans les démarches d'investigation et dans la résolution de problèmes. In L. Theis (Ed.), *Actes du colloque Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (pp. 829-836). Alger : Université d'Alger.

Maass K., &, Artigue M., (2013) Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: A synthesis. *ZDM : The International Journal on Mathematics Education, 45*(6), 779-795.

Mansour A., Burgermeister P.F. & Ouvrier-Buffet, C. (2018) Analyse des démarches d'enquête et d'investigation. In M. Abboud (Eds.), *Actes du colloque Mathématiques en scène, des ponts entre les disciplines* (pp. 1079-1084). Paris : Gennevilliers.

Matheron Y., Morselli F., René de Cotret S., & Schneider M., (2012) La démarche d'investigation dans la classe de mathématiques, fondements et méthodes In J.-L. Dorier &, S. Coutat (Eds.), *Actes du colloque Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle* (pp. 1259-1281). Genève : Université de Genève.

Annexe

ALDON G., GUISE A. & DI FRANCIA M.

Fonder son enseignement sur des problèmes de recherche en mathématiques : quels impacts sur les élèves ?

DE SIMONE M. & BURGERMEISTER P.F.

L'évolution dans la construction du concept de fonction des élèves dans des activités de résolution de problèmes : une étude de cas

Titre: Projet d'étude des ateliers récréatifs à l'aide de l'Analyse des intéractions

Auteur: Groupe AlPaGe

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1228 - 1238

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Projet d'étude des ateliers récréatifs à l'aide de l'Analyse des intéractions

Groupe AlPaGe[1]

Résumé – Dans cet article nous présentons un projet d'étude basé sur l'Analyse de interactions élèves/enseignant présentée dans (Kiwan-Zacka & Roditi, 2019). Cette étude portera sur les ateliers récréatifs tels que présentés au Mathscope et aura trois buts principaux : mieux comprendre le rôle joué par les médiateurs lors de l'activité, faire prendre conscience des pratiques et ainsi mieux former les médiateurs et enfin comprendre les différences entre les divers ateliers du Mathscope.

Mots-clefs : Analyse des interactions, ateliers récréatifs, formation des médiateurs, conscientisation des pratiques

Abstract – In this article we present a study project based on the Analysis of student/teacher interactions presented in (Kiwan-Zacka & Roditi, 2019). This study will focus on the recreational workshops as presented at Mathscope and will have three main goals : to better understand the roleplayed by the mediators during the activity, to foster reflexive practices and thus better train the mediators and finally to understand the differences between workshops of Mathscope.

Keywords: Analysis of interactions, recreational workshops, training of mediators, awareness of practices

1. *alpage@unige.ch

Pierre Audin, Retraité du Département de Mathématiques, Palais de la découverte, Paris, France

Hacène Belbachir, Faculté des Mathématiques, USTHB, Laboratoire RECITS, Alger, Algérie

France Caron,Département de didactique, Université de Montréal, Canada

Pierre-Alain Cherix, Shaula Fiorelli, Mathscope, Section de Mathématiques, Université de Genève, Suisse

Robin Jamet, Département de Mathématiques, Palais de la découverte, Paris, France

Christian Mercat, Université de Lyon, Université Lyon 1, École Normale Supérieure de Lyon, S2HEP, EA 4148, France

Benoît Rittaud, Université Paris-13, Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, France

Introduction

Cet article présente un projet d'étude qui sera réalisée au Mathscope de l'Université de Genève durant l'année 2023. Il détaille la pertinence d'une méthodologie d'observation basée sur la théorie des interactions présentée dans (Kiwan-Zacka & Roditi, 2019). L'idée est d'appliquer l'analyse des interactions au couple médiateur-participant d'un atelier récréatif. Cette analyse portera sur trois points importants liés à ce type de médiation : la meilleure compréhension du rôle du médiateur, les différences entre les ateliers proposés et la formation desmédiateurs.

Dans un premier temps, nous allons rappeler la théorie des interactions et présenter sa transposition dans un contexte de médiation. Nous allons ensuite expliquer en quoi nous pensons qu'elle sera utile pour une meilleure compréhension de nos pratiques et nous détaillerons finalement le protocole de l'étude.

L'analyse des intéraction médiateur/participant

Dansleurarticle,Kiwan-ZackaetRoditi(2019)présententunoutild'analysedesrégulations interactives faites en classe par l'enseignant. Par régulation interactive, on entend les interactions (feedback ou relances) faites par l'enseignant à un élève ou à plusieurs élèves travaillant en groupe. Ces relances sont une réponse à une production de l'élève. Ces productions peuvent être de trois sortes comme expliqué ci-dessous:

> [On]associeàl'élève(lesujet)unétatdeconnaissancequiluipermetd'analyserlasituationetderedéfinir la tâche prescrite par l'enseignant pour mettre en œuvre une procédure conduisant à une production (orale ou écrite). L'élève effectue généralement cette activité en pensée, il peut aussi l'effectuer verbalement ou parécrit.Laproductionobservabledesonactivitépeutêtreunrésultatmathématique,maisilsepeutaussi qu'elle soit la procédure qu'il a mise en œuvre (s'il s'explique sur sa démarche) ou qu'il doit mettre en œuvre pour réaliser la tâche (s'il indique ce qu'il doit faire). Il se peut aussi que la production soit une connaissance ; nous considérons que c'est le cas lorsque l'élève justifie la procédure mise en œuvre ou à mettre en œuvre selon lui. (Kiwan-Zacka & Roditi, 2019, p.1018)

Cette production est l'information que reçoit l'enseignant et qui nécessite une action de sa part. Cette action peut à son tour porter sur l'un des trois aspects décrits ci-dessus (Résultat, Procédure ou Connaissance).

> Notre cadre conduit, de manière analogue, à distinguer les manières d'agir de l'enseignant suivant qu'elles portent sur le résultat seulement (par exemple, indiquer que la réponse est fausse), sur la procédure (celle de l'élève ou celle à mettre en œuvre) ou sur les connaissances

(celles de l'élève ou celles qui fondent la procédure à mettre en œuvre). (Kiwan-Zacka & Roditi, 2019, p.1018)

En se basant sur cette approche, on peut dès lors consigner tous les échanges entre un enseignant et un élève comme des couples Information-Action que l'on peut décrire dans le tableau suivant.

Résultat		Action (de l'enseignant ou du médiateur)		
		Procédure	Connaissance	
Information (production de l'élève ou du participant)	Résultat	RR	RP	RC
	Procédure	PR	PP	PC
	Connaissance	CR	CP	CC

Tableau 1 – Classification des régulations didactiques (Kiwan-Zacka & Roditi, 2019)

Transposition de l'analyse des intéractions dans un contexte de médiation

Un atelier récréatif[2] peut être assimilé à une séquence de travail où le médiateur joue le rôle de l'enseignant et les participants celui des élèves. Peut-être encore plus qu'un enseignant en classe, le rôle du médiateur est d'être à l'écoute des participants et de proposer des relances adéquates pour que l'activité reste un plaisir et ne devienne pas une source de frustration.

Comme illustré dans la Figure 1, on peut retracer une activité de vulgarisation et plus spécifiquement un atelier récréatif comme un chemin parcouru par un participant au cours du temps et de la difficulté de la tâche. Le rôle du médiateur se situe essentiellement dans l'accroche puis dans les différentes relances. C'est ces relances que nous souhaitons étudier ici.

2. Pour une définition détaillée d'un atelier récréatif, voir par exemple (AlPaGe, 2019)

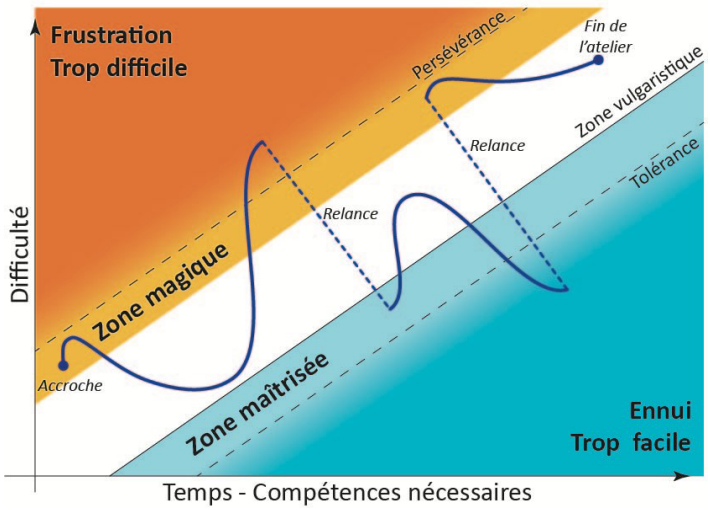


Figure 1 – Graphique d'une activité de vulgarisation
La zone vulgaristique (assimilée à la Zone Proximale de Développement de Vygotsky) est la zone optimale dans laquelle doit évoluer le travail des participants.
Synthèse de (Csíkszentmihályi, 1990), (Liljedahl, 2016) et (Pelay & Mercat, 2012), tiré de (AlPaGe, 2019)

Comment se déroule un atelier du Mathscope

Pour mieux comprendre en quoi cette analyse nous paraît pertinente, nous expliquons ici ce qu'est le Mathscope et comment s'y déroule un atelier récréatif.

Laboratoire public de l'Université de Genève, le Mathscope accueille gratuitement des groupes scolaires et grand public de 10 à 25 personnes. Des ateliers interactifs d'une heure, animés par deux médiateurs, permettent de se confronter à des concepts fondamentaux des mathématiques : grandeurs, symétrie, représentation des nombres, combinatoire, probabilités, notion de preuve, pour ne citer que les principaux.

L'idée principale est de mettre les participants en situation de recherche au travers d'un ou plusieurs problèmes ou activités. Les médiateurs proposeront une question aux participants, répartis en groupes de deux à six personnes selon l'activité, et dirigeront les réflexions pour aboutir plus ou moins à un résultat final. La question est souvent liée à du matériel spécifique que les participants ont la possibilité de manipuler. Par exemple, avec des pièces d'un jeu de Tangram,combien de carrés différents peut-on réaliser? Ou encore, est-il possible de découper n'importe quel polygone pour en faire un carré?

Les médiateurs passent entre les groupes, discutent avec les participants, répondent à leurs questions, les aident à déterminer s'ils ont atteint leur but et posent de nouvelles questions pour faire avancer les réflexions. Des mises en commun permettent de mettre au même niveau tous les participants pour repartir ensuite sur une base commune ou conclure l'activité.

Les interactions sont nombreuses entre les médiateurs et les participants, et, tout comme dans un contexte d'enseignement, les informations obtenues des participants et les actions du médiateur peuvent porter sur le résultat (R), la procédure (P) ou les connaissances (C). C'est pourquoi il nous paraît pertinent d'appliquer cette analyse dans le contexte des ateliers du Mathscope.

Analyse des intéraction - Pourquoi?

Lors d'un atelier récréatif, nous l'avons dit, le rôle du médiateur est prépondérant pour la bonne marche de l'activité. C'est au travers de ses relances et de ses discussions avec les participants que les réflexions des participants aboutissent petit à petit au résultat recherché.

Avec l'analyse des interactions entre médiateurs et participants, nous souhaitons pouvoir répondre à différentes questions afin de mieux comprendre le rôle joué par les médiateurs lors de l'activité. En outre, cela nous parait une méthode pertinente pour faire prendre conscience des pratiques et ainsi de mieux former nos médiateurs. Finalement, une telle analyse devrait nous permettre de mieux comprendre les différences entre les divers ateliers du Mathscope.

Rôle du médiateur et Formation

L'intérêt principal de cette analyse sera de contribuer à enrichir la formation des médiateurs. Au Mathscope, celle-ci se fait en majeure partie par compagnonnage : un médiateur novice anime une activité avec un médiateur plus expérimenté. En observant ce dernier, le novice découvre les mécanismes de l'activité ainsi que les questions posées et les techniques utilisées pour faire avancer les participants dans leurs recherches.Les médiateurs novices possèdent bien sûr par ailleurs leurs propres techniques, développées dans des contextes extérieurs au Mathscope et qu'ils n'hésitent pas à utiliser. Toutefois, sur une activité spécifique, on a l'impression que les techniques utilisées par les différents médiateurs sont souvent semblables. Bien que l'analyse ne pourra pas nous dire si cette impression vient vraiment du fait du compagnonnage ou bien d'autres facteurs, elle pourra, en la quantifiant, l'infirmer ou la confirmer.

Nous espérons aussi que cette analyse permettra de répondre à la question récurrente que se posent les médiateurs entre eux: « Comment tu fais pour leur faire comprendre que…? ».Être conscient du type d'interaction permet de comprendre quel levier utiliser pour susciter une certaine réponse et ainsi mieux cibler les relances. Ce dernier point, nous paraît important à souligner lors de la formation des médiateurs. Plus généralement, conscientiser les pratiques est une étape importante non seulement pour comprendre le rôle du médiateur mais aussi pour proposer une meilleure formation des novices. Les différents types d'interaction, tels que déclinés dans le Tableau 1 pourraient ainsi être étiquetés par des concepts.

Intuitivement, on se rend compte que certains ateliers sont plus axés sur la résolution d'un problème particulier et donc insistent plus sur un résultat, tandis que d'autres sont plus axés sur une problématique plus large et offrent donc une plus large place au développement de techniques. De manière naïve, on aurait tendance à penser que les interactions des premières seront plus axées sur les résultats tandis que les deuxièmes seraient plus axées sur les procédures. Il sera dès lors très intéressant d'observer les résultats de l'étude en examinant aussi si ces deux types d'ateliers se distinguent par la place laissée aux connaissances des participants.

Les questions auxquelles ont souhaite répondre

Nous présentons ci-dessous les cinq questions auxquelles nous souhaitons répondre avec l'analyse des interactions entre médiateurs et participants. Quatre questions (1, 2, 3 et 5) portent principalement sur le rôle joué par les médiateurs et l'analyse de leurs pratiques dans le but de les conscientiser et d'améliorer la formation. Trois questions (4 et en partie 1 et 3) traitent des différences entre nos ateliers. Les questions 2 et 4 comportent aussi une variante qui permet d'affinerl'analyse.

Nous avons pris en compte trois paramètres que l'on peut aisément faire varier ou conserver constants : l'atelier(A), le médiateur (M) et l'âge des participants (G). On peut éventuellement tenir-compte d'un quatrième paramètre, à savoir le groupe, mais à moins qu'un groupe revienne plusieurs fois, ou qu'on puisse caractériser finement les groupes, il est difficile de le garder constant. Ceci nous a aidé à formuler nos questions de sorte qu'elles couvrent au mieux les différentes possibilités (paramètres tous variables ou un ou deux paramètres fixes) comme récapitulé dans le Tableau2.

> **Question1.** *Est-ce que les interactions des médiateurs se concentrent plus sur les procédures, les connaissances ou les résultats?*

Pour cette question, pour une première approche, nous allons considérer l'ensemble des résultats en gardant variables tous les paramètres (M), (A) et (G).

Naïvement, on s'attendrait du médiateur qu'il joue plus sur les procédures que sur les résultats; le but plus ou moins avoué d'un atelier n'étant pas vraiment de parvenir à un résultat mais de comprendre comment on y parvient. Certes le résultat est un aboutissement mais la manière d'y parvenir est un apprentissage en soi qui suscite de nouvelles questions et ouvre sur de nouvelles perspectives plus que le résultat lui-même. Toutefois, si la frustration de ne pas arriver au résultat devient trop grande, il n'est pas rare qu'un participant, voire le groupe tout entier, se désengage de l'activité ; interagir sur le résultat devient alors une nécessité pour canaliser cette frustration.

De plus, il est vrai que, comme on l'a dit plus haut, certains ateliers sont plus axés sur la résolution d'un problème particulier. Dans ces ateliers, on verra peut-être plus d'interactions liées au résultat.

Il sera finalement intéressant de voir quand et comment les médiateurs jouent sur les connaissances. Si dans un atelier on cherche à faire bouger certaines connaissances, par exemplelanotiond'écriture-reparpositionlorsd'unateliersurl'écriturebabylonienne,ils'agira de voir comment les médiateurs s'appuient sur les connaissances des élèves dans leurs interactions. En effet, s'il s'agit d'un groupe scolaire, on peut déduire du degré quelles sont les connaissances qu'ils sont susceptibles de connaître. On peut aussi demander à l'enseignant si telle notion a été abordée ou pas. Cependant, un savoir peut avoir été vu par une classe mais pas assimilé par la totalité des élèves et dès lors les connaissances de chacun peuvent êtres non homogènes. S'il s'agit d'un public hétérogène, c'est encore plus délicat, car il est difficile, voire impossible, de savoir quelles sont les connaissances communes. Dès lors, se baser sur une éventuelle connaissance partagée non ou mal connue risque de désengager le public et consolider dans l'esprit collectif que les maths sont une matière élitiste. Le « de toute façon, je n'ai jamais rien compris aux maths » estproche.

Les résultats de l'étude nous diront si cette approche naïve reflète vraiment une réalité.

> **Question 2.** *Existe-t-il une certaine uniformité dans le type d'interactions pour un même médiateur sur différentes activités ? ou au contraire cela dépend-il vraiment de l'activité?*
>
> **Question 3.** *Existe-t-il une certaine uniformité dans le type d'interactions des différents médiateurs sur une même activité ? ou au contraire cela dépend-il vraiment du médiateur ?*

Ces deux questions sont essentiellement duales mais il nous paraît intéressant de les garder toutes les deux, car elles échangent les points de vue. La première formulation se concentre sur le rôle de médiateur ((M) fixe, (A) et (G) variables) tandis que la deuxième se focalise sur l'atelier ((A) fixe, (M) et (G) variables), ceci pour mieux comprendre le rôle du médiateur sur un atelierdonné.

Dans un deuxième temps, on peut affiner l'analyse de la Question2 en considérant l'âge des participants ((G) fixe). Autrement dit:

> **Variante Question 2.** *Pour un âge donné, existe-t-il une certaine uniformité dans le type d'interactions pour un même médiateur sur différentes activités?*

L'équivalent de cette variante pour la Question 3 est formulé par la Question 4 :

> **Question 4.** *Existe-t-il une grande variabilité selon l'âge des participants sur une même activité ?*

Ici, on garde l'activité (A) et l'âge (G) fixes et on fait varier le médiateur (M). Autrement dit, pour une activité donnée, on regardera les interactions classe d'âge par classe d'âge pour comprendre si les leviers sont très différents ou pas.

Au premier abord, on pourrait se dire que selon l'âge des participants, les interactions ne seront pas les mêmes. Les questions d'enfants de 4 ans ou d'adolescents de 15 ans sont *a priori* différentes et les buts recherchés ne sont pas les mêmes. Cependant, l'analyse des interactions va au-delà du sens de la question, elle souligne ce sur quoi porte la question. Il sera intéressant devoir si pour une même activité proposée à des classes d'âges différentes les interactions sont finalement semblables ou fondamentalement différentes.

Dans un deuxième temps, on pourra regarder si cette variabilité ou non-variabilité reste constante sur l'ensemble des activités ((G) fixe et (M) et (A) variables). Autrement dit :

> **VarianteQuestion4.** *Pour un âge donné, existe-t-il un certaine uniformité dans le type d'interactions?*
>
> **Question5.** *Peut-on associer un type d'interaction à un certain type de situation?*

Cette question cherche à répondre à la question « Comment tu fais pour leur faire comprendre que… ? ». On pourrait la reformuler en « existe-t-il une manière efficace ou privilégiée de répondre à une certaine situation ? ». Cette dernière question est plus difficile à formuler en termes des trois variables et nécessitera une analyse beaucoup plus fine des échanges entre médiateurs et participants. L'idée sera de regarder si, à situation semblable, les médiateurs jouent sur les mêmes leviers (Résultat, Procédure ou Connaissance) pour y répondre.

Pourrécapituler,nousprésentonsdansletableauci-dessouslesparamètresfixésdanschaque question. Pour mémoire, les trois paramètres sont l'atelier (A), le médiateur (M) et l'âge des participants(G).

Question		Question 1	Question 2	Question 3	Question 4	Question 5
Paramètres fixes	Question initiale	Tous variables	(M)	(A)	(A) et (G)	Ne porte pas sur les paramètres
	Variante	—	(M) et (G)	—	(G)	—

Tableau 2 – Résumé des questions selon les paramètres fixés

Shéma de l'étude

Nous présentons ici le protocole d'étude que nous souhaitons mettre en place au Mathscope.

Il s'agira en un premier temps de choisir deux à trois activités à étudier, idéalement parmi les plus représentatives de la démarche des ateliers du Mathscope, mais aussi parmi les plus populaires pour avoir un échantillon varié et représentatif de situations. Nous visons pour cela environ une dizaine de séances par activité, réalisées par différents médiateurs avec différents groupes d'âge.

Il s'agira ensuite d'enregistrer les séances. L'utilisation de la vidéo nous semble pertinente. Toutefois nous pensons aussi équiper les médiateurs de micros pour que leurs interactions soient audibles. Cette approche est aussi due au fait que les ateliers du Mathscope sont animés par deux médiateurs qui circulent entre les différents groupes. Équiper les médiateurs de micros permettra d'enregistrer intelligiblement toutes les interactions. Pratiquement, on équipera les deux médiateurs d'une caméra GoPro qui permet à la fois d'enregistrer les interactions et de voir par la suite combien de participants elles impliquaient et la situation sur laquelle portait l'échange.

Viendra ensuite l'étape de retranscription et d'analyse avec les outils de la théorie des interactions. Il s'agira donc de classer chaque interaction selon qu'elle porte sur le résultat, la procédure ou les connaissances. Nous nous laissons la liberté d'utiliser aussi la catégorie « consigne » concernant l'information reçue par le médiateur. Cette catégorie, présentée dans (Ceroni & Rei Moreira, 2021) nous semble intéressante, car, comme le disent les auteures :

> Il nous parait nécessaire de distinguer la consigne de la connaissance. La consigne est une connaissance choisie et fournie dans le but de lancer l'élève dans une activité de résolution, alors que la connaissance de l'élève peut être issue d'inférences (cela signifie donc qu'il est déjà dans l'activité de résolution) ou de savoirs plus généraux, non spécifiques à l'activité de mathématiques. (Ceroni & Rei Moreira, 2021, p.7)

Enfin, on pourra analyser les résultats selon l'activité ou selon le médiateur pour tenter de répondre aux questions ci-dessus. Il faudra aussi mettre en regard, selon une manière qui reste à définir, le ressenti du médiateur à l'issue de l'activité. En effet, il nous paraît important de compléter le dispositif par un questionnaire pour le médiateur au sujet de sa satisfaction sur le déroulé de l'activité, lui demandant par exemple s'il pense que ses explications ont été efficaces ou non, et les éléments sur lesquels il s'appuie pour formuler une telle évaluation.

Conclusion

Nous avons montré en quoi la théorie des interactions de Kiwan-Zacka & Roditi, développée dans le cadre des pratiques enseignantes nous paraît pertinente pour analyser les situations de médiation et caractériser le travail et la posture d'un médiateur face à un public donné. Nous avons décrit le protocole que nous allons suivre au Mathscope où cet outil sera utilisé comme un moyen de formation et de développement professionnel des médiateurs. Nous comptons rendre compte des résultats de cette étude au prochain EMF.

Références

AlPaGe. (2019). Regards sur les ateliers récréatifs. Dans M. Abboud (Éd.), *Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines - Actes du colloque EMF 2018* (pp. 1298-1309). Paris: IREM de Paris.

Ceroni, N., & Rei Moreira, C. (2021). Les interventions de l'enseignante : une dimension essentielle pour la résolution d'un problème mathématique? *Revue de Mathématiques pour l'école, 236*, pp. 4-12.

Csíkszentmihályi, M. (1990). *Flow: The Psychology of Optimal Experience*. New York, NY: Harper and Row.

Kiwan-Zacka, M., & Roditi, E. (2019). Régulations ditactiques et pratiques enseignantes. Dans

M. Abboud (Éd.), *Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines - Actes du colloque EMF 2018* (pp. 1015-1023). Paris: IREM de Paris.

Liljedahl,P.(2016).Flow : A Framework for Discussing Teaching. Dans C. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitányi (Éd.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol.3*, pp.203-210. Szeged, Hungary : PME.

Pelay, N., & Mercat, C. (2012). Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques. Dans J.-L.Dorier, & S.Coutat (Éd.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF 2012*, (pp. 1914-1925).

Titre: Discussion programmée N° 1 - Neurosciences cognitives et didactique des mathématiques

Auteurs: RODITI Éric, BARALLOBRES Gustavo, BERGERON Laurie, GARDES Marie-Line, GIROUX Jacinthe et MAHEUX Jean-François

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1239 - 1245

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Discussion programmée nº 1

Neurosciences cognitives et didactique des mathématiques

RODITI[1] Éric, BARALLOBRES[2] Gustavo, BERGERON[3] Laurie, GARDES[4] Marie-Line, GIROUX[5] Jacinthe et MAHEUX[6] Jean-François

Présentation de la thématique de la discussion programmée

Les recherches en neurosciences cognitives occupent une part croissante de l'espace médiatique dédié aux questions d'éducation : elles multiplient les conférences, articles et formations en direction des enseignants. Certains intègrent les instances qui influencent les décideurs de l'éducation. Nombre de leurs travaux débouchent sur des perspectives relatives à l'enseignement, et en particulier à celui des mathématiques. Cela invite à réfléchir à la portée et à l'usage éventuel de ces productions scientifiques pour notre discipline.

En quoi les recherches en neurosciences cognitives se distinguent-elles ou se rapprochent- elles de celles développées en didactique des mathématiques quant à l'approche des questions éducatives ? La production en didactique est-elle prise en compte dans les recherches en neurosciences cognitives, comment ? Les résultats de ces recherches peuvent-ils nous conduire à modifier nos problématiques, voire nos méthodes ? dans quel sens ? Comment les neurosciences abordent-elles les troubles de l'apprentissage en mathématiques et quelles propositions didactiques suggèrent-elles ? Les recherches en neurosciences cognitives renouvellent-elles les apports de la didactique ? La didactique des mathématiques pourrait-elle tirer parti des travaux en neurosciences, à quelles conditions, suivant quelles précautions ? Pour quels objectifs et selon quelles modalités didacticiens des mathématiques et neuroscientifiques pourraient-ils s'engager conjointement dans des recherches interdisciplinaires ?

Telles sont, entre autres, les questions que nous nous sommes posées et au sujet desquelles nous avons échangée lors de la « discussion programmée 1 » du colloque EMF 2022.

1. Université Paris Cité, Laboratoire EDA, France, eric.roditi@u-paris.fr

2. Université du Québec À Montréal, Canada, barallobres.gustavo@uqam.ca

3. Université du Québec À Montréal, Canada, bergeron.laurie.2@uqam.ca

4. HEP du Canton de Vaud, Suisse, marie-line.gardes@hepl.ch

5. Université du Québec À Montréal, Canada, giroux.jacinthe@uqam.ca

6. Université du Québec À Montréal, Canada, jfuqam@gmail.com

Sont indiquées ci-dessous :

- les communications présentées durant la discussion programmée ;
- des textes des personnes qui ont communiqué durant la discussion programmée ;
- des suggestions de lectures de textes qui nourrissent la réflexion des personnes qui ont communiqué durant la discussion programmée.

Un fichier comportant les diaporamas des communications ainsi que des publications des communicants et des textes d'autres auteurs ayant nourri la réflexion des communicants est téléchargeable en cliquant sur le lien suivant :

https://cloud.parisdescartes.fr/index.php/s/XHyd4xZGPqdDKF3

Communications présentées durant la discussion programmée

Communication n°1

Barallobres, G. & Bergeron, L. (2022). Positionnement(s) des chercheurs en neurosciences cognitives vis-à-vis de l'éducation et plus particulièrement de l'enseignement des mathématiques. Communication à l'Espace mathématique francophone 2022, Cotonou, Bénin.

Communication n°2.

Maheux, J.-F. (2022). *Objets de recherche, méthodes et données produites : de la psychologie du développement aux neurosciences cognitives et réflexion du point de vue de l'éducation mathématique*. Communication à l'Espace mathématique francophone 2022, Cotonou, Bénin.

Communication n°3.

Giroux, J. (2022). *Différentes approches de la difficulté d'apprentissage en mathématiques et de l'intervention scolaire selon l'ancrage scientifique : psychologie, didactique et neurosciences cognitives*. Communication à l'Espace mathématique francophone 2022, Cotonou, Bénin.

Communication °4.

Roditi, E. (2022). *Analyse d'une recherche en neurosciences cognitives sur la comparaison des nombres décimaux*. Communication à l'Espace mathématique francophone 2022, Cotonou, Bénin.

Gardes, M.-L. (2022). *Intérêts d'une collaboration entre chercheurs en didactique des mathématiques et chercheurs en neurosciences cognitives : témoignages et réflexions*. Communication à l'Espace mathématique francophone 2022, Cotonou, Bénin.

Textes des personnes qui ont communiqué lors de la discussion programmée

Les personnes qui ont préparé cette discussion programmée et qui y ont communiqué suggèrent la lecture de quelques-uns de leurs publications.

Ces publications sont téléchargeables en cliquant sur le lien suivant :

https://cloud.parisdescartes.fr/index.php/s/XHyd4xZGPqdDKF3

Références

Barallobres, G. (2018). Réflexions sur les liens entre neurosciences, mathématiques et éducation. *McGill Journal of Education, 53*(1), 169-188.

Gardes, M.-L. & Prado, J. (2016). Entre neurosciences et éducation : les chainons manquants, *Les Cahiers Pédagogiques, 527*, 35-38.

Gardes, M.-L. & Prado, J. (2018). Les recherches en neurosciences cognitives : quels apports pour l'enseignement des mathématiques ? In J.-L. Dorier, G. Gueudet, M.-L. Peltier, A. Robert & E. Roditi (dir). *Enseigner les mathématiques. Didactique et enjeux de l'apprentissage* (pp. 237-246). Paris : Berlin.

Gardes, M.-L., Croset, M.-C., Courtier, P. & Prado, J. (2021). Comment la didactique des mathématiques peut-elle informer l'étude de la cognition numérique ? L'exemple d'une étude collaborative autour de la pédagogie Montessori à l'école maternelle. *Raisons éducatives, 25*, 237–259. https://doi.org/10.3917/raised.025.0237

Gardes, M.-L., Prado, J. (2019). Aux racines de la cognition numérique : Comment les nombres sont liés à l'espace dans l'esprit humain ? *La Gazette des mathématiciens, 159*, 39-46.

Giroux, J. (2010). Pour une différenciation de la dyscalculie et des difficultés d'apprentissage. Dans V. Freiman, A. Roy & L. Theis (éds). Actes du colloque du *Groupe de Didactique des Mathématiques du Québec* (pp. 148-158). Moncton, Université de Moncton.

Hirsch, M. & Roditi, E. (2022). Neurosciences cognitives et apprentissage des nombres rationnels : un point de vue didactique. *Petit x, 116*, 51-74.

Maheux, J. F. (2017). Trois principes (à se rappeler) de la Neurodidactique. Chroniques. www.chroniques.uqam.ca

Roditi, E. & Noûs, C. (2021). Didactique des mathématiques et neurosciences cognitives : une analyse des contributions à la recherche sur l'apprentissage d'un contenu scolaire, *Revue française de pédagogie, 211*, 103-115.

Suggestions de lecture de la part des personnes qui ont communiqué lors de la discussion programmée

Les personnes qui ont préparé cette discussion programmée et qui y ont communiqué suggèrent la lecture de quelques textes qui nourrissent leur réflexion sur la thématique « neurosciences cognitives et didactiques des mathématiques ».

Ces publications sont téléchargeables en cliquant sur le lien suivant :

https://cloud.parisdescartes.fr/index.php/s/XHyd4xZGPqdDKF3

Références

Roell, M., Viarouge, A., Hilscher, E., Houdé, O. & Borst, G. (2019). Evidence for a visuospatial bias in decimal number comparison in adolescents and in adults. *Scientific Reports, 9*. En ligne : <https://doi.org/10.1038/s41598-019-51392-6>.

Borst, G. (2019). Maths : une génération sacrifiée ? *Cerveau & Psycho, 112*, 68-73.

Dehaene, S. (1992). Varieties of Numerical Abilities. *Cognition, 44*, 1-42.

Dehaene, S. (2010). Le cerveau calculateur. *Bulletin de l'APMEP, 488*, 312-326.

Dehaene, S., Potier-Watkins, C., Xi He, C. & Lubineau, M. (2022). Évaluer la compréhension des nombres décimaux et des fractions : Le test de la ligne numérique. *Note du CSEN, 5*.

Brault Foisy, L.-M., Masson, S. & Dehaene, S. (2016). Quand le cerveau se « recycle » pour apprendre à lire et a compter. *Vivre le primaire, 29*(3), 57-59.

Keller, O. (2014). Existe-t-il un sens du nombre ? *Actes des Journées nationales de l'APMEP 2014*. En ligne : https://www.apmep.fr/IMG/pdf/P1-28-compte-rendu.pdf

Geay, B. & Joshua, S. (2018). Les neurosciences comme idéologie. Dans A. Trani (dir.), *Blanquer : un libéralisme autoritaire contre l'éducation* (pp. 121-139). Paris : Éditions Syllepse.

Meirieu, P. (2018). Les neurosciences ne feront jamais la classe. Dans P. Meirieu, *La riposte* (pp. 167-179). Paris : Éditions Autrement.

Bowers, J. S. (2016). Psychology, not educational neuroscience, is the way forward for improving educational outcomes for all children: Reply to Gabrieli (2016) and Howard-Jones et al. (2016). *Psychological Review, 123*(5), 628–635

Bowers, J. S. (2016). The practical and principled problems with educational neuroscience. *Psychological Review, 123*(5), 600-612.

Bruer, T. (2016). Where is educational Neuroscience? *Educational Neuroscience, 1*, 1-12.

Gabrieli, J. D. E. (2016). The promise of educational neuroscience: Comment on Bowers (2016). *Psychological Review, 123*(5), 613–619.

Goswami, U. (2006). Neuroscience and education from research to practice. *Nature reviews neuroscience, 7*(5), 406-413.

Purdy, N. & Morrison, H. (2009). Cognitive neuroscience and education: unravelling the confusion. *Oxford Review of Education, 35*(1), 99-109.

Szűcs, D. & Goswami, U. (2007). Educational neuroscience: Defining a new discipline for the study of mental representations. *Mind, Brain, and Education, 1*(3), 114-127.

Thomas, M. S., Ansari, D. & Knowland, V. C. (2019). Annual research review: Educational neuroscience: Progress and prospects. *Journal of Child Psychology and Psychiatry, 60*(4), 477-492.

Howard-Jones, P. A., Varma, S., Ansari, D., Butterworth, B., De Smedt, B., Goswami, U., Laurillard, D. & Thomas, M. S. (2016). The principles and practices of educational neuroscience: Comment on Bowers (2016). *Psychological Review, 123*(5), 620–627.

Bowers, J. S. (2016). The practical and principled problems with educational neuroscience. *Psychological Review, 123*(5), 600–612.

Deshaies, I., Miron, J.-M. & Masson, S. (2020). Effets d'une intervention pédagogique visant l'apprentissage du contrôle inhibiteur sur le développement de prérequis liés à l'arithmétique chez les élèves du préscolaire âgés de 5 ans. *Neuroéducation, 6*(1), 49-64.

Bennett, C. M., Miller, M. B. & Wolford, G. L. (2009). Neural correlates of interspecies perspective taking in the post-mortem Atlantic Salmon: An argument for multiple comparisons correction. *Journal of Serendipitous and Unexpected Results, 1*(1)**,** 1-5.

Roiné, C. (2010). Caractérisation des difficultés en mathématiques des élèves de SEGPA. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation, 52*(4), 73-87.

Campbell, S. & Pagé, P. (2012). La neuroscience éducationnelle : enrichir la recherche en éducation par l'ajout de méthodes psychophysiologiques pour mieux comprendre l'apprentissage. *Neuroéducation, 1*(1). 115-144.

Feuillet, L., Dufour, H. & Pelletier, J. (2007). Brain of a white-collar worker. *The Lancet, 370*(9583), 262.

Forsdyke, D. R. (2015). Wittgenstein's certainty is uncertain: Brain scans of cured hydrocephalics challenge cherished assumptions. *Biological Theory, 10*(4), 336-342.

Monnin, C. (2011). De jeunes cerveaux à formater. Contre la neuro-éducation. *Argument, 13*(1).

Titre: Discussion programmée 2 - Bi-plurilinguisme et apprentissages mathématiques

Auteurs: DURAND-GUERRIER Viviane et SALONE Jean-Jean-Jacques

Publication: Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone – EMF 2022

Directeur: Adolphe Cossi Adihou, Université de Sherbrooke (Canada/Bénin) avec l'appui des membres du comité scientifique et des responsables des groupes de travail et projets spéciaux

Éditeur: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke

Année: 2023

Pages: 1246 - 1250

ISBN: 978-2-7622-0366-0

URI:

DOI:

Discussion programmée n° 2

Bi-plurilinguisme et apprentissages mathématiques

DURAND-GUERRIER Viviane[1] – SALONE Jean-Jean-Jacques[2]

Résumé – Nous présentons dans ce texte les principaux éléments qui ont été présentés et discutés lors des deux sessions de la discussion programmée autour du thème du bi-plurilinguisme dans les apprentissages mathématiques organisée dans le cadre du colloque EMF 2022 à Cotonou (Bénin).

Mots-clefs : bi-plurilinguisme ; apprentissages mathématiques ; langue d'enseignement ; langue vernaculaire

Abstract – In this text, we present the main elements that were presented and discussed during the two sessions of the programmed discussion organised around the theme of bi-plurilingualism in mathematical learning as part of the EMF 2022 conference in Cotonou (Benin).

Keywords: bi-plurilingualism; learning mathematics; language of instruction; vernacular language

1. Université de Montpellier, France

2. Université de Mayotte, France

Motivation

Les *discussions programmées* visent à permettre aux participants qui le souhaitent de se retrouver pour discuter et réfléchir sur des thèmes qui ne sont pas traités dans les groupes de travail et dans les projets spéciaux, mais qui ont des liens avec le thème du colloque. L'enjeu est de débattre autour de thèmes connexes. Elles font l'objet d'un appel à proposition. Avec Jean-Jacques Salone, nous avons coordonné une discussion programmée sur *Bi-plurilinguisme et apprentissages mathématiques*. Il s'agit d'une question particulièrement vive dans l'espace mathématique francophone en raison de la grande diversité des contextes linguistiques. En effet, le bi-plurilinguisme est une situation très largement partagée qui d'une part comporte de nombreux défis, et d'autre part ouvre des opportunités.

Contextes BI/plurilingues dans l'espace mathématique francophone

Une plage a été consacrée à la présentation de différents contextes bi-plurilingues dans l'espace mathématique francophone et a été suivie d'une discussion avec les participants. Nous avions retenu quatre exemples de contextes bi-plurilingues : Départements et territoires d'outre-mer en France : Mayotte, présenté par Jean-Jacques Salone (France), la Polynésie et la Guyane française, présentées par Eléda Robo[3] (France) ; le Cameroun, présenté par Judith Njomgang Ngansop[4] (Cameroun) et la Tunisie, présentée par Faiza Chellougui[5] (Tunisie). Notre collègue Mangary Ka[6] (Sénégal) a pour sa part présenté le projet ELAN. Les présentations ont mis en valeur la diversité des formes de bi-plurilinguisme selon les contextes. A Mayotte, département français d'outre-mer la langue d'instruction est le français, mais celui-ci n'est pas parlé dans la famille, ni dans la vie de tous les jours ; le *shimahore*, langue d'origine Bantu avec des emprunts à l'arabe et au français, et le *kibushi*, langue polynésienne d'origine malgache, sont les deux principales langues vernaculaires. En Guyane Française, collectivité territoriale, les programmes sont les programmes nationaux français. On y parle plus de 40 langues, dont une dizaine de langues régionales ; 40% des enfants de 10 ans parlent au moins trois langues ; avant d'être scolarisés, trois quarts des enfants ne parlent pas le français. En Polynésie, collectivité d'outre-mer autonome, les programmes de 2020 sont adaptés à la Polynésie : tous les champs disciplinaires des mathématiques peuvent être enseignés en langues polynésiennes. On y trouve sept langues régionales ; la grande majorité des enfants, surtout à Tahiti, ne parle pas de langue polynésienne. Au Cameroun, il y a deux langues officielles, le Français et l'Anglais et deux systèmes éducatifs indépendants avec des programmes distincts, l'un francophone l'autre anglophone. Le choix du

3. Université de Montpellier, France

4. Université Yaoundé 1, Cameroun

5. Faculté des Sciences de Bizerte, Université de Carthage, Tunisie

6. Faculté des Sciences et Technologies de l'Éducation et de la Formation (FASTEF), Université Cheikh Anta Diop, Sénégal

système éducatif se fait dès la maternelle, et se poursuit dans le primaire et le secondaire. A côté des deux langues officielles, on trouve environ deux cent trente langues locales classées en six grands groupes. Dans les grandes villes, le français est dominant à l'école et jusque dans les familles, tandis que dans les villages, les langues locales sont prédominantes et sont utilisées à l'école entre élèves. En Tunisie, actuellement, la scolarité commence à six ans. L'arabe littéral est la langue d'instruction tout au long de l'école de base (de 6 à 15 ans). Au lycée, les matières scientifiques sont enseignées en français. Il n'y a pas de prise en charge des effets du changement de langue sur les apprentissages mathématiques. L'arabe dialectal est la langue vernaculaire du quotidien. Lors de la discussion qui a suivi les présentations, d'autres exemples de contextes ont été donné (Algérie, Bénin, Burkina Faso, Côte d'Ivoire), venant confirmer la grande diversité des formes de bi-plurilinguisme selon les contextes. Le projet ELAN (École et langues nationales) présenté par notre collègue Mangary Ka vise à proposer aux douze pays engagés (Bénin, Burkina-Faso, Burundi, Cameroun, Côte d'Ivoire, Guinée, Madagascar, Mali, Niger, Rep. Démocratique du Congo, Sénégal, Togo) une démarche commune d'enseignement/apprentissage afin que les élèves apprennent mieux les mathématiques en contexte bilingue, tout en conservant la langue seconde comme médium. La démarche articule enseignement en langue nationale (L1) et en langue seconde (L2) en considérant que certains acquis en L1 sont transférables en L2.

Des réseaux internationaux et/ou pluridisciplinaires pour partager les questionnements, les initiatives et les recherches

La deuxième plage a été consacrée à la présentation de quatre réseaux internationaux et/ou pluridisciplinaires pour partager les questions, les initiatives et les recherches. Le Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques en Afrique (GREMA) a été présenté par Alexandre Mopondi[7] (République Démocratique du Congo) l'un des fondateurs du groupe, et par Jannick Trunkenwald[8] (France), co-encadrant du groupe. GREMA[9] est un groupe de l'IREM de Paris. Patrick Frétigné[10] (France) a présenté la commission InterIREM International,[11] qui regroupe des membres de différents pays et propose un télé-séminaire international en ligne. Catherine Mendonça Dias[12] et Christophe Hache[13] (France) ont présenté le groupe PluriMaths[14], pratiques du plurilinguisme et enseignement des ma-

7. Université Pédagogique Nationale de Kinshasa, UPN (République Démocratique du Congo)
8. Lycée Fénelon (Académie de Paris, France)
9. http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/sections/groupe_grema/
10. Université de Rouen (France)
11. https://www.univ-irem.fr/-cii-international-
12. Université Sorbonne Nouvelle (France)
13. Université Paris Cité (France)
14. https://irem.u-paris.fr/groupe-plurimaths

thématiques, et Jean-Jacques Salone a présenté le réseau RIICLAS[15], Recherches Interdisciplinaires sur les Interactions entre Cultures, Langues et Apprentissages Scolaires.

Des échanges à poursuivre au sein de l'espace mathématique francophone

La participation aux deux séances et les échanges qui ont suivi les présentations ont confirmé l'intérêt croissant de notre communauté pour prendre en compte la question des langues dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, en considérant les spécificités des contextes linguistiques et culturels ; les défis auxquels les enseignants doivent faire face ; les opportunités offertes par la prise en compte explicite du bi-plurilinguisme dans la classe de mathématiques. Peu présente jusqu'à récemment dans l'espace mathématique francophone, cette question a été étudiée depuis des décennies dans les contextes anglophones. On peut faire l'hypothèse que l'appui sur les études anglophones pourrait nourrir les recherches en cours et à venir dans l'espace francophone. Il ressort des échanges lors des deux sessions et d'échanges informels après les sessions que ce thème devrait trouver dans le prochain colloque EMF une place centrale car cette question est cruciale dans l'espace mathématique francophone.

Un dossier comportant des documents ayant nourri la réflexion dans le cadre de l'activité « Discussion programmée 2 » peut être consulté et téléchargeable en cliquant sur le lien ci-dessous :

https://www.dropbox.com/scl/fo/pq2e0pszlbzjmms12j8wk/AB9PJbDJpQoOWLeWddc8RxU?rlkey=luzt08hgyow7hvtqqncvboltm&st=t6smjlfr&dl=0

15. http://inspe.upf.pf/riiclas/

Liste des communicant.e.s

Abouhanifa Saïd	Abtahi Yasmine
Acher-Spitalier Safia	Achtaiche Naceur
Adel Fadhel	Adihou Adolphe
Affognon Gervais Marc A	Aissani Djamil
Ait Ounejjar Lahoussaine	Akrouti Inen
Aldon Gilles	Allard Cécile
Anassay Saadia	Arnoux Pierre
Artaud Michèle	Assude Teresa
Athias Francine	Atkins Isabelle
Atta Kouadio Yeboua Germain	Audin Pierre
Ba Cisse	Bacon Lily
Barallobres Gustavo	Barwell Richard
Batteau Valérie	Battie Véronique
Bednarz Nadine	Belbachir Hacène
Ben Nejma Sonia	Benrherbal Abderrahmane
Bergé Analia	Blanchouin Aline
Bloch Isabelle Bloch	Boulais Pascale
Brini Mohamed	Brinsi Lamjed
Bronner Alain	Bunzli Luc-Olivier
Burgermeister Pierre-François	Caron France
Chanudet Maud	Chellougui Faïza
Cherix Pierre-Alain	Chesnais Aurélie
Chogou Freedy	Ciavaldini Jérôme-Ange
Clivaz Stéphane	Conceicao Manuel Célio
Constantin Céline	Coppé Sylvie
Coulange Lalina	Coulibaly Togora Hawa
Coutat Sylvia	Dahouessa A. Thérèse Akoua
Daina Audre	Dandjinou Henri
David Benoit	De Simon Marina
Delobbe Anne-Michèle	Demailly Marie-Claire
Demonty Isabelle	Di Francia Miriam
Dia El Hadji Malick	Diack Thiendou
Diomandé Mariam	Djoue Boa Ekora Hélène
Dorier Jean-Luc	Dossou Dossa Pierre
Douamba Kirsi Jean-Pierre	Drai Sami
Dupré Frédéric	Durand-Guerrier Vivianne
Duval Alix	El Ibbaoui Mohamed

El Idrissi Abdellah	El M'Hamedi Zahid
Ennassiri Brahim	Ézin Donatien
Fangnon Audrey	Favier Stéphane
Fernandes Daniela	Fiorelli Shaula
Frauchiger Thomas	Freiman Viktor
Fumo Paulino	Gbaguidi Ahonankpon Florent
Gboliboco Roland	Gelamur Antonin
Géron Christine	Ghailane Oumama
Gibel Patrick	Grapin Nadine
Gravas Julien	Grisard Franck
Groupe AlPaGe	Grugeon-Allys Brigitte
Guillemette David	Guise Antoine
Haddad Sabah	Hanin Vanessa
Hirsch Micaela	Homier Marianne
Horoks Julie	Houdement Catherine
Houle Virginie	Ibn Haj Ali Najoua
Ihne Arnaud	Jamet Robin
Jeannotte Doris	Judicaël Alladatin
Kaba Guy-Roger	Khalloufi-Mouha Faten
Knoll Eva	Kouame Akissi Marie-Noëlle
Kouamé Koffi Pierre	Koudogbo Jeanne
Laguerre Eric	Lajoie Caroline
Laval Dominique	Lecorre Thomas
Le-Men Karine	Lhachimi Mohamed Younes
Magloire Cossou	Maheux Jean-François
Mamas Mavoungou E. Libert	Mamouni My Ismail
Marchand Patricia	Martin Vincent
Masselot Pascale	Matri Sabrina
Megherbi Djamila	Mercat Christian
Mesouaki Hajar	Mesquita Ana
Million-Faure Karine	Mouboli Victor
Mounier Éric	Mrabet Slim
Mugaru Dawa Benjamin	Najar Ridha
Nana Rasmané	Ndiaye Fagueye
N'goran Kouassi	Nguembou Nana Giscard
Nicole Aimée Ambomo	Njomgang Judith
Nouhou Abdoul Massalabi	Nseanpa Casimir Jojo
Oke Sègbégnon Eugène	Passaro Valériane
Patronis Tasos	Pavlopoulou Kallia

Pellet Jean-Philippe	Peltier-Barbier Marie-Lise
Petitfour Edith	Pilet Julia
Presutti Sara	Rittaud Benoît
Robert Virginie	Roditi Éric
Rouan Omar	Ruf Isaline
Saboya Mireille	Sacre Annick
Salifou Mohamadou	Salone Jean-Jacques
Sawadogo Timbila	Seddoug Belkacem
Sofonea Carmen	Sokhna Moustapha
Soltani Walid	Squalli Hassane
St-Cyr Marie-Frédérick	Tambone Jeannette
Tanguay Denis	Tchassama Ati-Mola
Tchonang Youkap Patrick	Tempier Frédérick
Theis Laurent	Tiemian Bi Djangoneti Marcel
Touali Hamid	Train Grégory
Tremblay Mélanie	Trunkenwald Jannick
Venant Fabienne	Vendeira Céline
Volkov Alexei	Wardi Ouni Mohamed
Weiss Laura	

Les participants et les participantes au Colloque

NOM	PRÉNOM	NATIONALITÉ	ADRESSE COURRIEL
ABOUHANIFA	Said	Marocaine	saidabouhanifa@yahoo.fr
ADIHOU	Adolphe Cossi	Canadienne/Béninoise	Adolphe.Adihou@USherbrooke.ca
AFFOGNON	Gervais Marc Adégbola	Béninoise	marcafffr@yahoo.fr
AFFOGNON	Hyacinthe Septime Adéléké	Béninoise	affognhs@yahoo.fr
AGBODJOGBE	Djessounoukon Basile	Béninoise	agbobasiledjogbe@gmail.com
AKOUA DAHOUESSA	Assiba Thérèse	Ivoirienne	glitherapp@yahoo.fr
ALDON	Gilles	Française	gilles.aldon@ens-lyon.fr
ALI SABI	Ismaïla	Béninoise	ialsab1@yahoo.fr
ALLARD	Cecile	Française	cecile.allard@u-pec.fr
ALPHA	Ousmane	Malienne	oalphaoumar@yahoo.fr
AMBOMO	Nicole aimée	Camerounaise	nicoleaimeea@yahoo.fr
AMÉDIN	Celse Kafui	Canadienne	celse.kafui.amedin@usherbrooke.ca
ARTIGUE	Michèle	Française	michele.artigue@gmail.com
ATHIAS	Francine	Française	francine.athias@univ-fcomte.fr
ATINDOKPO	Célestin	Béninoise	degnon61@gmail.com
ATKINS	Isabelle	Canadienne	i.atkins@hotmail.com
ATOUN	Carlos Emery Hyacinthe	Béninoise	carlosatoun@yahoo.fr
ATTIKLEME	Yaovi Olivier Audrey	Béninoise	attiklemeolivier@yahoo.fr
ATTIKLEME	Kossivi	Béninoise	attiklemkossivi@yahoo.fr
AYIHATI MPNDE	Lazare	Béninoise	lzayih@yahoo.fr
BA	Cissé	Sénégalaise	cisse.ba@ucad.edu.sn
BARRY	Souleymane	Canadienne/Sénégalaise	souleymane.barry@uqac.ca
BARWELL	Richard	Canadienne	richard.barwell@uottawa.ca
BATTEAU	Valérie	Française	valerie.batteau@hepl.ch
BATTIE	Véronique	Française	vbattie@univ-lyon1.fr
BEN NEJMA	Sonia	Tunisienne	sonianejma@yahoo.com
BENOIT	David	Canadienne/Québécoise	david.benoit@uqo.ca
BENRHERBAL	Abderrahmane	Marocaine	abderrahmane.benrherbal@um6p.ma
BERGÉ	Analia	Canadienne/Argentine	analia_berge@uqar.ca
BOA ÉPOUSE DJOUE	Ekora Hélène	Ivoirienne	ekorahelene@gmail.com
BUTLEN	Denis	Française	denis.butlen@cyu.fr
CAKPO	Désiré Eric Codjo	Béninoise	ericcakpo146@gmail.com
CHABI COBI BIO	Aboubakar	Béninoise	achabicobi@yahoo.fr
CHANUDET	Maud	Française	maud.chanudet@unige.ch
CHOGOU	Wangninan Freddy	Béninoise	chogouwangninan@gmail.com
CIAVALDINI	Jérôme	Française	Jerome-Ange.Ciavaldini@ac-montpellier.fr

CORTELLA	Anne	Française	anne.cortella@umontpellier.fr
COSSOU	Edmond Magloire	Béninoise	mag.cossou@gmail.com
COULANGE	Lalina	Française	lalina.coulange@gmail.com
COULIBALY	Hawa épouse Togora	Malienne	hawacoul64@gmail.com
CUVELIER	Arnaud	Française	cuvelier.arnaud@numericable.fr
DANDJINOU	Henri	Béninoise	hdandjinou@yahoo.fr
DE SIMONE	Marina	Italienne	marina.desimone@unige.ch
DI FRANCIA	Miriam	Italienne	miriam.di-francia@ac-lyon.fr
DIA	El hadji Malick	Sénégalaise	el.dia@ucad.edu.sn
DIACK	Thiendou	Sénégalaise	diackthiendou@yahoo.fr
DIOMANDE	Mariame	Ivoirienne	mdiomande25@yahoo.fr
DJOHI	Etienne Agossou Maranatha	Béninoise	bolzanodeam@gmail.com
DORIER	Jean-Luc	Suisse/Française	Jean-Luc.Dorier@unige.ch
DOSSOU DOSSA	Pierre	Béninoise	pierredossoudossa@yahoo.fr
DOUAMBA	Kirsi Jean-Pierre	Burkinabè	kjpdouamba@gmail.com
DOUMATE	Têlé Jonas	Béninoise	jonas.doumate@fast.uac.bj
DOUMBIA	Cheick Oumar	Malienne	cheickodoum@gmail.com
DOVONOU	Thierry	Béninoise	dovonouthierry5@gmail.com
DUPRE	Frédéric	Française	frederic.dupre@inshea.fr
DURAND-GUERRIER	Viviane	Française	viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr
DUVAL	Alix	Française	alixduval@hotmail.com
EL IDRISSI	Abdellah	Marocain	abdellah_elidrissi@yahoo.fr
EZIN	Donatien	Béninoise	donatienezin@gmail.com
EZIN	André Comlan	Béninoise	andrecomlanezin@gmail.com
EZIN	Jean-Pierre	Béninoise	
FANGNON	Kouessi Audrey	Béninoise	audreyfangnon@outlook.fr
FAVIER	Stéphane	Française	stephane.favier@unige.ch
GBAGUIDI	Ahonankpon Florent	Béninoise	florent.gbaguidi@imsp-uac.org
GELAMUR	Antonin	Française	antonin.gelamur@gmail.com
GHAILANE	Oumama	Canadienne	ghailane.oumama@uqam.ca
GIBEL	Patrick	Française	Patrick.Gibel@u-bordeaux.fr
GODONOU	Sonagnon Boris Parfait	Béninoise	borisparfait@gmail.com
GRAPIN	Nadine	Française	nadine.grapin@u-pec.fr
GRISARD	Franck	Belge	franck.grisard@etu.unige.ch
GUILLEMETTE	David	Canadienne	guillemette.david@uqam.ca
GUISE	Antoine	Française	antoine.guise@ac-lyon.fr
HADJ-MOUSSA ARAB	Mériem	Algérienne	meriem.hadj-moussa@cyu.fr
HOMIER	Marianne	Canadienne/Québécoise	marianne.homier@usherbrooke.ca
HONVO	Laurent	Béninoise	lhonvo@yahoo.fr

HOROKS	Julie	Française	jhoroks@gmail.com
HOTESSOU	Oké martin	Béninoise	hotessoumartin@yahoo.fr
HOUEDOUTO	Laurent	Béninoise	houelau@gmail.com
HOULE	Virginie	Canadienne	houle.virginie@uqam.ca
HOUNNOU	Missokemahou Augustin	Béninoise	hmaugust@yahoo.fr
HOUNSOUVO	Agossa Honoré	Béninoise	hhounsouvo@yahoo.com
IHNE	Arnaud	Suisse	arnaud.ihne@edu.ge.ch
KAKPO	Bessan Philippe	Béninoise	philippe_bessan_kakpo@yahoo.fr
KHALLOUFI-MOUHA	Faten	Tunisienne	fkhalloufi@yahoo.fr
KOUAMÉ	Koffi Pierre	Ivoirienne	koffipierrekouame@yahoo.fr
KOUDOGBO	Jeanne	Canadienne/Béninoise	Jeanne.Koudogbo@USherbrooke.ca
LAGUERRE	Eric	Française	eric.laguerre@univ-tlse2.fr
LANGUEREAU	Hombeline	Française	hombeline.languereau@univ-fcomte.fr
LOKONHOUNDE	Charlemagne	Béninoise	lokoncharlemagne@yahoo.com
MAGBONDE	Koba Charles	Béninoise	makosabi@gmail.com
MAHEUX	Jean-François	Canadienne	jfmaheux@mail.com
MARCOS	Aboubacar	Béninoise	abmarcos@imsp-uac.org
MARTIN	Vincent	Canadienne	vincent.martin@usherbrooke.ca
MEGHERBI	Djamila	Algérienne	djamila.megherbi@liad-alger.fr
MERCAT	Christian Joseph Antoine	Française	christian.mercat@univ-lyon1.fr
MOPONDI BENDEKO MBUMBU	Alexandre	R. D. Congolaise	bendekomopondi@yahoo.fr
MOUBOLI	Victor	Canadienne	vmouboli@yahoo.fr
MULLER	Gilles	Française	gilles.muller@cyu.fr
NDIAYE	Faguèye	Sénégalaise	fagueye.ndiaye@ucad.edu.sn
NDIAYE	Lamine	Sénégalaise	lam4ndiaye@gmail.com
NENY	Florence	Française	floneny@gmail.com
NGUEMBOU NANA	Giscard	Camerounaise	giscardnana@yahoo.fr
NOUHOU	Abdoul Massalabi	Nigérienne	massalabiabdoul@gmail.com
OCENI	Saliou	Béninoise	ocenis64@gmail.com
OGA	Ferdinand Mensan	Béninoise	ferdysonfr@yahoo.fr
OGOUYANDJOU	Carlos	Béninoise	ogouyandjou@imsp-uac.org
OGUEBOULE	Bachar Moba-Ola-N'lé	Béninoise	oguboulebacharmoba@yahoo.fr
OKE	Sègbégnon Eugène	Béninoise	eugene.oke@imsp-uac.org
PAVLOPOULOU	Kalliopi	Hellénique	kalliapavlopoulou@gmail.com
PETITFOUR	Edith	Française	edith.petitfour@univ-rouen.fr
PILET	Julia	Française	julia.pilet@u-pec.fr
ROBERT	Virginie	Canadienne	virginie.robert2@usherbrooke.ca
RODITI	Eric	Française	eric.roditi@u-paris.fr
RUMINOT	Carolina	Chilienne	cruminot@uottawa.ca

SABOYA	Mireille	Canadienne	saboya.mireille@uqam.ca
SALL	Serigne Touba	Sénégalaise	salltouba@gmail.com
SALONE	Jean-Jacques	Française	jean-jacques.salone@univ-mayotte.fr
SAWADOGO	Timbila	Burkinabé	sawtimbs@yahoo.fr
SENOU	Brice	Béninoise	rsenou2@gmail.com
SENOU	Nestor	Béninoise	senounestor15@gmail.com
SOKHNA	Moustapha	Sénégalise	moustapha.sokhna@ucad.edu.sn
SONON AÏSSE	Comlan Marius Towanou	Béninoise	sononmarius7@gmail.com
SQUALLI	Hassane	Canadienne/Marocaine	Hassane.Squalli@USherbrooke.ca
ST-CYR	Marie-Frédérick	Canadienne	marie-frederick.st-cyr@usherbrooke.ca
TCHASSAMA	Ati-Mola	Togolaise	atimola1111@yahoo.fr
TCHINKOUN	Kokou Cyrille	Béninoise	tnorafifa@gmail.com
TCHOKOTE EPSE KAMGA	Alice	Camerounaise	al_kamga@yahoo.fr
TCHONANG YOUKAP	Patrick	Camerounaise	patricktchonang@yahoo.fr
THEIS	Laurent	Canadienne	laurent.theis@usherbrooke.ca
TIEMIAN	Bi Djangonéti Marcel	Ivoirienne	tiemianmarcel@yahoo.fr
TOFFI	Louis	Béninoise	toffilouis4@gmail.com
TOSSA	Joël	Béninoise	joel.tossa@imsp-uac.org
TOUKOUROU	Bouraïma	Béninoise	toukouroub@yahoo.fr
TOURÉ	Saliou	Ivoirienne	pr_stoure@yahoo.fr
TREMBLAY	Mélanie	Canadienne	melanie_tremblay@uqar.ca
TRUNKENWALD	Jannick	Française	jannick.trunkenwald@yahoo.fr
VENDEIRA	Céline	Suisse	celine.marechal@unige.ch
VIANOU	Victorin	Béninoise	vianoudenakpo@gmail.com
WEISS	Laura	Suisse	laura.weiss@unige.ch
ZOUNMENOU	Kpèdékpo	Béninoise	zounmenouk@gmail.com
ZOUNNON	Inès	Béninoise	ines.zounnon@imsp-uac.org