MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE DES PARTICULES PANORAMA D'UNE IDYLLE SCIENTIFIQUE[1]

Marcos MARIÑO[*]

Résumé – Depuis sa naissance, la physique quantique a établi une relation privilégiée avec les mathématiques modernes : plusieurs concepts qui sont apparus dans l'étude des particules élémentaires ont été redécouverts par les mathématiciens, alors que, réciproquement, des idées mathématiques abstraites se sont révélées essentielles pour la compréhension du monde microscopique. Cette idylle scientifique déjà ancienne entre les deux disciplines est aujourd'hui d'une importance capitale. Ainsi, d'un côté, les ingrédients mathématiques de la physique des particules seront mis à l'épreuve dans le nouvel accélérateur du CERN. D'un autre côté, la théorie des cordes, qui est née comme une théorie unifiée des particules élémentaires, a eu impact sans précédent dans les mathématiques pures. Dans cette contribution nous proposons un parcours de ces différents développements.

Mots-clefs : Physique des particules, mathématiques, Mécanique Quantique, théorie de cordes

Abstract – Since its inception, Quantum Physics has established an important relationship to modern mathematics. Many mathematical constructions, which appeared in the study of elementary particles, have been rediscovered by mathematicians, and conversely, abstract mathematical ideas have been crucial for the understanding of the microscopic world. This scientific «love affair » is still very relevant today: on the one hand, the mathematical ingredients of particle physics will be tested in detail in the new accelerator at CERN. On the other hand, string theory, which is born as a unified theory of elementary particles, has had a remarkable impact on pure mathematics. In this contribution we propose an overview of these developments.

Keywords: Particle Physics, Mathematics, Quantum Mechanics, String Theory

I. PHYSIQUE ET MATHEMATIQUES

Aujourd'hui, il nous semble naturel de penser que la physique et les mathématiques doivent être liées de façon intime, mais cela n'a pas été toujours le cas. La physique d'Aristote et des Grecs anciens n'avait pas un lien fondamental avec les mathématiques. Cette relation commence à s'établir avec Archimède[2], mais bien sûr c'est Galilée qui fera de cette relation la base de sa révolution scientifique. Cette révolution est aussi une révolution contre la tradition, et Galilée va opposer le livre de l'Univers aux livres d'Aristote. On pourrait dire que le texte fondateur de la physique moderne est ce fameux paragraphe de *Il Saggiatore*[3] :

> La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique, et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. Sans eux, c'est une errance dans une labyrinthe obscur.

L'approche méthodologique de Galilée s'est revélée d'une efficacité extraordinaire et, comme le remarque le physicien Eugene Wigner[4] dans un article fameux écrit en 1960, même « déraisonnable » :

> Le fait que le langage mathématique soit approprié pour la formulation des lois de la physique est un miracle que nous ne comprenons pas, et que nous ne méritons pas.

---

[1] Une vidéo de la conférence est en ligne sur le site : http://www.emf2012.unige.ch/

[*] Faculté des Sciences – Université de Genève – Suisse – marcos.marino@unige.ch

[2] Voir Russo, L. (2004), *The forgotten revolution*, Springer-Verlag.

[3] Livre publié à Rome par Galileo Galilei en octobre 1623, comme réponse à la polémique créée par le traité sur les comètes écrit en 1618 par le jésuite mathématicien Orazio Grassi, de l'Université pontificale grégorienne.

[4] Wigner E. (1960), « The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences », Commun. Of Pure and Applied Mathematics, vol. XIII, pp. 1-14.

© Mariño M. (2012) Mathématiques et physique des particules : panorama d'une idylle scientifique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (Plénières, pp. 2–6). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

En effet, pourquoi une structure développée par le cerveau humain –la mathématique– serait-elle appropriée pour décrire le monde physique ? Dans d'autres domaines de la science, ces vertues miraculeuses du langage mathématique sont plus controversées, et le mathématicien Israel Gelfand a même parlé de la déraisonnable inefficacité des mathématiques dans les sciences de la vie (sans parler de ce que l'on appelle les « sciences économiques »...). On pourrait même avancer l'hypothèse que, plus complexe est un système naturel, moins sophistiquée peut être la mathématique qui le décrit. En tout cas, c'est un fait historique que la physique des systèmes fondamentaux a utilisé des outils mathématiques des plus en plus sophistiqués. Tous les exemples que donne Wigner de la « déraisonnable efficacité » des mathématiques viennent en fait de la physique fondamentale (Mouvement des corps célestes, Mécanique Quantique, Physique Atomique …).

Quels types de relations la physique peut-elle entretenir avec la mathématique ? En schématisant un peu, on pourrait distinguer trois types de relations possibles :

1) Relation simultanée : les outils mathématiques sont développés en même temps que les problèmes physiques (et quelquefois par la même personne). L'exemple le plus connu de ce type de relation est peut-être l'invention du calcul infinitésimal par Newton.

2) Avance des mathématiques sur la physique : les physiciens utilisent des outils déjà développés par les mathématiciens. Un bon exemple est le calcul tensoriel, inventé par Tulio Levi-Civita et utilisé par Einstein pour construire la Relativité générale.

3) Avance de la physique sur les mathématiques : les physiciens développent des outils mathématiques et/ou anticipent des résultats qui ne seront prouvés mathématiquement que plus tard. Un exemple récent est la découverte en 1990, par le théoricien des cordes Edward Witten, d'une connexion profonde entre les systèmes intégrables et la géométrie algébrique des surfaces de Riemann, qui ne fut prouvée que plus tard par Maxim Kontsevich.

On pourrait dire que, historiquement, et jusqu'au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, la simultanéité était la règle, tandis que pendant les XIX$^{\text{ème}}$ et XX$^{\text{ème}}$ siècles, les mathématiques sont en avance, et les physiciens n'ont qu'à trouver la bonne référence.

II. PHYSIQUE DES PARTICULES

Le but de la physique des particules est d'isoler les ingrédients fondamentaux de la matière et de décrire leurs interactions. Ce programme est déjà implicite chez Galilée : il faut trouver l'alphabet du livre de l'Univers, que l'on exprime avec des signes mathématiques, mais aussi les règles pour les *combiner*. Il s'agit donc d'un programme delibérement *réductionniste* qui a eu un énorme succès.

La physique de particules modernes naît avec la Mécanique Quantique, dans les années 1900-1925. Un aspect très intéressant de cette théorie, du point de vue de ce qui nous occupe, est qu'elle exige une formulation mathématique plus sophistiquée et abstraite que celle que l'on trouve dans la Mécanique Classique. Comment décrit-on une particule ponctuelle dans la physique classique ? On donne tout simplement sa position q et son impulsion p, soit deux nombres pour chaque dimension. De façon plus abstraite, on dit qu'un état d'une particule classique est un *point dans l'espace de phases*. Ces points évoluent dans les temps, gouvernés par des équations différentielles, dont il y a plusieurs formulations possibles (Newton, Lagrange, Hamilton, ...). Donc, la mathématique des particules élémentaires dans la Mécanique Classique est essentiellement l'analyse et l'étude de ces équations dans l'espace de phases.

Le formalisme moderne de la Mécanique Quantique naît en 1925, quand Werner Heisenberg montre que, en réalité, la position et l'impulsion doivent être promues à des *matrices*. Les valeurs expérimentales de ces quantités sont des nombres, qu'il faut identifier avec les *valeurs propres* de ces matrices, associées à des vecteurs propres. Donc, en Mécanique Quantique, l'état d'une particule sera un *vecteur* dans un espace de Hilbert (car les matrices qui apparaissent peuvent être de taille infinie) et les quantités physiques sont des opérateurs dans cet espace de Hilbert. C'est un vrai saut dans l'abstraction ! La structure linéaire de cet espace implique que les combinaisons linéaires des états sont aussi des états possibles –ce qui éventuellement donne des « paradoxes » comme celui du chat de Schrödinger. Donc la Mécanique Quantique introduit toute une mathématique très différente de celle qui caractérise la Mécanique Classique (les espaces de Hilbert, la théorie des opérateurs, l'analyse fonctionnelle, ...) qui était déjà assez développée au début du XX^{ème} siècle.

L'évolution de la physique des particules dans le XX^{ème} siècle va montrer de façon de plus en plus évidente le pouvoir « déraisonnable » et presque magique des mathématiques pour dévoiler le monde, mais aussi le pouvoir de la physique pour anticiper certains développements en mathématiques. Un exemple assez extraordinaire de ce deux phénomènes est l'équation de Dirac. En 1928, Paul Adrien Maurice Dirac formule une équation pour décrire l'état quantique d'un électron – la seule particule vraiment élémentaire connue à l'époque. Cette équation marque un tournant dans l'idylle entre mathématiques et physique, pour plusieurs raisons.

1) Premièrement, Dirac obtient cette équation *à partir de contraintes purement formelles*, essentiellement : elle doit être compatible avec la Relativité restreinte d'Einstein et avec la Mécanique Quantique.

2) Deuxièmement, l'équation obtenue de cette façon n'est pas seulement la bonne description de l'électron : elle prédit l'existence du positron (une particule élementaire avec la même masse que l'électron mais avec charge électrique positive), et plus généralement de l'anti-matière. Cette prédiction fut vérifiée spectaculairement peu après, en 1932, par Carl Anderson, qui trouva des positrons dans les rayons cosmiques.

3) Finalement, pour écrire cette équation, Dirac doit introduire un nouveal espace – l'espace des spineurs– et un nouvel opérateur sur cet espace *–l'opérateur de Dirac*. Celui-ci peut être regardé comme la « racine carrée » du Laplacien qui apparaît dans l'équation de Schrödinger. De la même façon, l'espace des spineurs peut être regardé comme une « racine carrée » de l'espace vectoriel tridimensionnel ordinaire, et donc plus fondamental.

L'opérateur de Dirac fut redécouvert par Michael Atiyah et Iz Singer dans les années 1960, dans leurs études fondamentales sur la connexion entre opérateurs et topologie (théorie de l'indice). Il est aujourd'hui l'ingrédient basique de cette théorie. En parlant de cette « redécouverte », Atiyah écrivait en 1988[5] :

> Si l'on avait eu une meilleure éducation en physique, ou si l'on avait eu le contact avec les physiciens qui est plus commun aujourd'hui, on aurait obtenu ces résultats bien avant.

L'équation de Dirac eût un impact épistémologique considérable. Elle montrait aux théoriciens qu'il était possible de percer la réalité physique avec une argumentation « spéculative » et une mathématique sophistiquée. Avec la Relativité générale, elle deviendra l'exemple-type d'une stratégie de recherche en physique théorique basée sur le « spéculatif »,

[5] Atiyah M. (1998) The Dirac equation and geometry p. 116, in A. Pais, M. Jacob, D. Olive and M. Atiyah, *Paul Dirac. The man and his work*, Cambridge University Press.

la consistance formelle, et la beauté mathématique. Cette stratégie se trouve incarnée, aujourd'hui, dans la théorie des cordes.

Dans le développement de la physique de particules au XX^{ème} siècle, d'autres parties des mathématiques vont jouer un rôle très important. Premièrement, les symétries qui organisent le monde des particules auront leur expression mathématique dans la *théorie des groupes*. Deuxièmement, on découvrira dans les années 1970 que toutes les interactions entre les particules élémentaires, sauf la gravité, sont décrites par des *théories de Yang-Mills*. Ces théories font intervenir pour la première fois, dans la physique des particules quantiques, des ingrédients *géométriques* et *topologiques* (les espaces fibrés).

Les efforts de cinquante ans de théorie et expériences dans la physique des particules ont culminé dans la formulation de ce que l'on appelle le *modèle standard* des particules et des forces. Pourtant, la culmination des interactions entre mathématiques et physique des particules ne va pas se produire dans le cadre du modèle standard, mais au sein d'une théorie dont le but est d'aller *au-delà* de ce modèle, et en particulier d'incorporer la force de la gravité : la *théorie des cordes*.

III. THEORIE DES CORDES

L'hypothèse fondamentale de la théorie des cordes est que les différentes particules élémentaires sont des vibrations d'un objet étendu unidimensionnel et unique, ou *corde*. Une conséquence surprenante de cette théorie est la présence de dimensions supplémentaires : le nombre de dimensions spatiales doit être neuf, au lieu de trois. Les six dimensions supplémentaires sont *compactifiées* dans un espace de taille minuscule. Les propriétés *géométriques* des ces espaces se manifestent directement dans les propriétés *physiques* des particules.

La théorie des cordes reste un sujet controversé du point de vue physique. Comme elle n'a pas encore permis de faire des prédictions précises pour la physique des particules ordinaires, on l'a accusée de ne « pas être même fausse » (« *not even wrong* »). Par contre, elle a eu un impact énorme dans les mathématiques (mais aussi dans d'autres domaines, comme la physique des trous noirs et même la physique de la matière condensée). Une raison de cet impact mathématique est que la théorie des cordes fait intervenir de façon essentielle la *géométrie des surfaces de Riemann*, un domaine assez sophistiqué des mathématiques modernes. En particulier, la théorie des cordes donne des idées profondes sur les différentes configurations géométriques des surfaces de Riemann à l'intérieur des espaces qui forment les dimensions supplémentaires, appelés *espaces de Calabi-Yau*.

De plus, la théorie de cordes « prédit » des résultats mathématiques surprenants sur ces espaces. Par exemple, deux espaces de Calabi-Yau a priori très différents peuvent avoir des propriétés géométriques intimement liées. Cette découverte, appelée *symétrie miroir*, est une contribution fondamentale de la théorie des cordes à la géométrie moderne.

Une des applications les plus frappantes de la symétrie miroir et de la théorie des cordes concerne ce que l'on appelle la *géométrie énumérative.* Cette application a commencé en 1990, quand Philip Candelas, Xenia de la Ossa et leur groupe de recherche ont utilisé la symétrie miroir pour compter de façon précise les configurations possibles des surfaces de Riemann à l'intérieur des espaces de Calabi-Yau. Leurs résultats, obtenus avec les techniques de la théorie des cordes, allaient bien au-delà de ce que les experts en géométrie étaient capables de faire à l'époque. On sait aujourd'hui que ce résultat est mathématiquement correct, mais il a fallu l'effort de plusieurs mathématiciens (y compris deux médailles Fields!) pour en trouver une preuve rigoureuse.

La symétrie miroir n'est qu'un exemple d'une nouvelle idylle entre mathématiques et physique : les théoriciens de cordes font des « prédictions », et les mathématiciens jouent le rôle d'« expérimentateurs » qui vérifient ces prédictions avec leur propres techniques[6]. Inversement, les vérifications mathématiques confirment les idées physiques que les théoriciens des cordes ont utilisées pour développer leur théorie. On ne peut qu'espérer que les développements à venir en physique des particules et en mathématiques vont renforcer cette belle relation.

REFERENCES

Bartocci C., Odifreddi P. (Eds.) (2011) *La Matematica*. Vol. 4, Ed. Einaudi.

Pais A., Jacob M., Olive D., Atiyah, M. (1998) *Paul Dirac. The man and his work*. Cambridge: Cambridge University Press.

Russo L. (2004) *The forgotten revolution*. Springer-Verlag.

Wigner E. (1960) The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, *Commun. Of Pure and Applied Mathematics*. Vol. XIII, 1-14.

6 Pour un parcours plus technique et détaillé de cette relation, voir Mariño M. (2011), ? La teoria della stringhe ? In C. Bartocci and P. Odifreddi (Eds.) *La Matematica*. vol. 4, Ed. Einaudi.