L'ESCALIER – UNE ACTIVITÉ SUR LES MULTIPLES ET DIVISEURS EN FIN DE PRIMAIRE EN SUISSE ROMANDE

Lucie PASSAPLAN* – Sébastien TONINATO*

Résumé – Ce texte s'inscrit dans le cadre d'une recherche en didactique des mathématiques[1] ayant pour objet l'expérimentation à Genève de l'activité « L'escalier », tirée du livre de l'élève de 5ème primaire (10-11 ans) et portant sur les multiples et les diviseurs. Nous dégageons les différentes variables didactiques et leurs valeurs respectives et nous exposons les stratégies possibles de résolution. Puis, nous donnons les conditions de l'expérimentation sur le terrain et relatons son déroulement. Enfin, nous effectuons une analyse a posteriori de l'activité en comparant les stratégies formulées dans l'analyse à priori avec celles utilisées effectivement par les apprenants.

Mots-clefs : Analyse a priori, stratégies visées, stratégies effectives, variables didactiques, multiples et diviseurs

Abstract – This text is part of research in mathematics education on the experimentation of the activity « The stairs » from the book of primary school (10 – 11 years old) and dealing with multiples and dividers. We point out the different didactical variables and their respective values and we discuss the possible strategies for resolution. Then we give the experimental conditions and observe its progress. Finally, we perform an a posteriori analysis of the activity by comparing the formulated strategies in the a priori analysis to those actually used by learners.

Keywords: a priori analysis, referred strategies, effective strategies, educational variables, multiples and dividers

I. INTRODUCTION

Notre texte propose l'analyse d'une activité de mathématiques destinée à des élèves de 5ème primaire (10 -11 ans). Pour ce faire, nous proposons en premier lieu une analyse *a priori* de l'activité concernée où nous dégageons les savoirs mathématiques visés, les variables didactiques et leurs valeurs ainsi que les stratégies possibles de résolution. Dans la deuxième partie, nous décrivons les caractéristiques de l'expérimentation qui nous ont permis de mettre en pratique l'activité. Puis, nous proposons une analyse *a posteriori* où nous relatons le travail effectué par les élèves et le mettons en relation avec notre analyse *a priori*. Un intérêt tout particulier est accordé aux stratégies effectives observées lors de l'expérimentation. Enfin, nous concluons sur les apports de ce travail dans notre formation.

II. ANALYSE A PRIORI

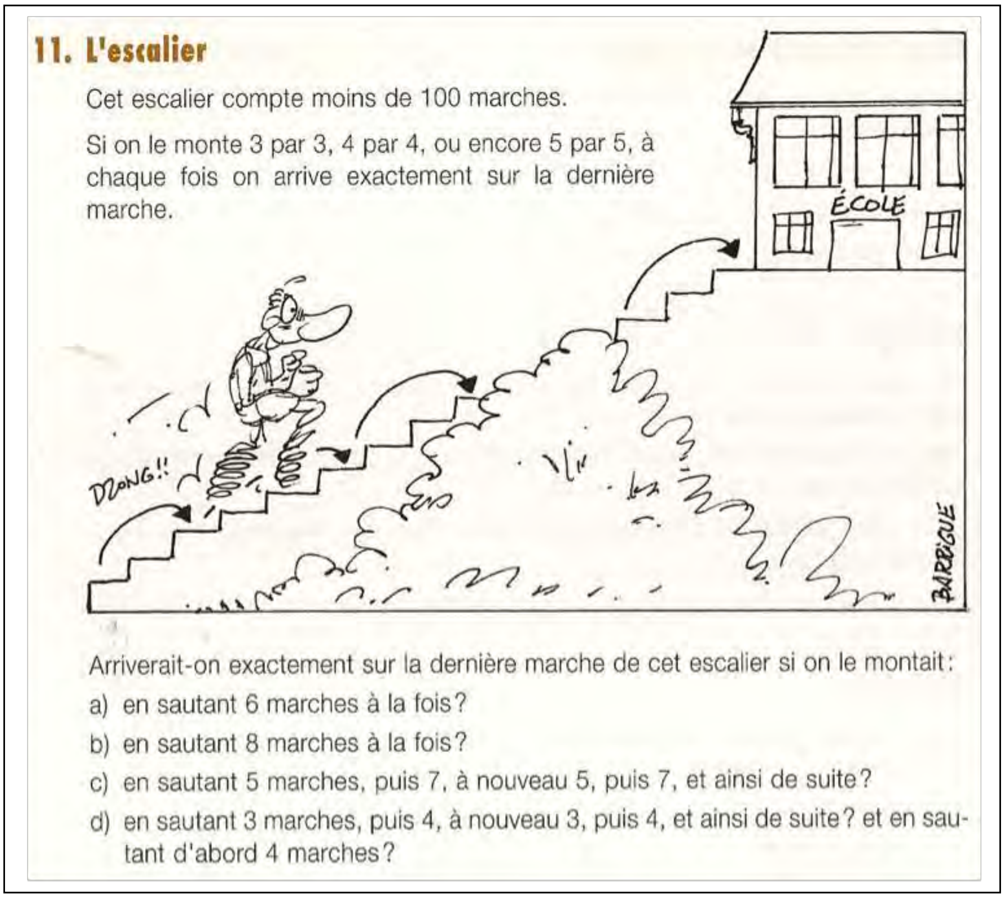
1. *Activité proposée*

L'activité « L'escalier » (Figure 1) se trouve dans les moyens d'enseignement romands de mathématiques de 5ème année primaire (Chastellain et Jaquet 2001, p. 52) et concerne des élèves de 10 à 11 ans. Elle se place dans le thème « multiples et diviseurs ».

* Université Genève – Suisse – passapl0@etu.unige.ch, toninat0@unige.ch

[1] Ce travail a été réalisé en collaboration avec une troisième étudiante Laura Petrucci.

© Passaplan L., Toninato S. (2012) L'escalier – Une activité sur les multiples et diviseurs en fin de primaire en Suisse romande. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1639–1648). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012



11. L'escalier

Cet escalier compte moins de 100 marches.

Si on le monte 3 par 3, 4 par 4, ou encore 5 par 5, à chaque fois on arrive exactement sur la dernière marche.

Arriverait-on exactement sur la dernière marche de cet escalier si on le montait :

a) en sautant 6 marches à la fois ?

b) en sautant 8 marches à la fois ?

c) en sautant 5 marches, puis 7, à nouveau 5, puis 7, et ainsi de suite ?

d) en sautant 3 marches, puis 4, à nouveau 3, puis 4, et ainsi de suite ? et en sautant d'abord 4 marches ?

Figure 1 *– Enoncé extrait du livre de l'élève*

Nous pouvons distinguer deux parties pour la résolution de cet exercice :

1ère partie

Identifier le nombre de marches de l'escalier, sachant qu'il compte moins de 100 marches et qu'il faut pouvoir le monter de 3 en 3, de 4 en 4 ou de 5 en 5, en arrivant exactement sur la dernière marche.

2ème partie

En se référant au nombre de marches trouvé ci-dessus, cette partie se penche sur différentes manières de gravir l'escalier, à savoir :

a) 6 marches à la fois

b) 8 marches à la fois

c) 5 marches, puis 7, et à nouveau 5 puis 7

d1) 3 marches, puis 4, et à nouveau 3 puis 4

d2) 4 marches, puis 3, et à nouveau 4 puis 3

Précisons qu'il est possible de répondre à l'item a) sans avoir défini préalablement la longueur de l'escalier. Toutefois, cette solution n'est pas à la portée des élèves observés et il est naturel de chercher à déterminer au plus vite le nombre de marches composant l'escalier. Nous allons effectuer une analyse a priori (cf. Bessot 2003, Brousseau 1986, 1998) de cette activité en vue de l'organisation et de l'observation de son expérimentation.

2. *Connaissances pré-requises et savoirs mathématiques visés*

Les connaissances en jeu pour la réalisation de cette activité touchent à l'établissement de suites numériques de multiples et à leur utilisation. Ainsi, afin d'être capables de résoudre ce problème, les élèves doivent savoir établir une liste de multiples, en utilisant leurs connaissances des livrets[2] ou en effectuant des additions successives ; ils peuvent également utiliser leurs connaissances des règles de divisibilité. En outre, cette activité exige aussi de la part des élèves la compréhension du problème, l'élaboration d'une stratégie, ainsi que la communication et l'explication du résultat ; plus encore que les connaissances mathématiques mobilisées sur les multiples, elle permet de tester la recherche et la mise en œuvre d'une démarche de résolution.

3. *Description des variables didactiques et leurs effets attendus*

En étudiant l'activité, nous avons pu dégager plusieurs variables didactiques :

- <u>le nombre de marches de l'escalier</u> : dans l'énoncé, il est spécifié que le nombre de marches est inférieur à 100. Cette variable, dont la valeur est peu élevée si nous considérons le champ numérique, mais suffisante pour un escalier, permet d'entreprendre une démarche additive et n'incite pas les élèves à utiliser la multiplication et la division, ni les règles de divisibilité. Si un tel but était recherché, il faudrait proposer un énoncé avec un escalier comprenant un nombre plus important de marches, par exemple au-dessus de 400. De plus, le choix de limiter la grandeur de l'escalier à 100 marches restreint le nombre d'escaliers possibles. Ici, en particulier, il n'y a qu'une seule possibilité.
- <u>le nombre de marches à monter par enjambée</u> : correspondant au nombre de marches enjambées à chaque pas ; mathématiquement, il représente la donnée qui permet l'établissement de la liste des multiples, ces derniers étant primordiaux pour la recherche du multiple commun, qui permet, in fine, de définir le nombre de marches de l'escalier.

Plus précisément, la première partie de l'exercice demande l'établissement de listes de multiples, afin de trouver un multiple commun répondant aux critères. La première variable que nous identifions ici correspond aux nombres de marches avec lesquels nous pouvons monter l'escalier en arrivant exactement sur la dernière marche ; c'est une variable qui se présente sous la forme d'un n-uplet de nombres. La variabilité joue donc à la fois sur la valeur de n et sur les valeurs des nombres de marches. Dans l'exercice tel qu'il est proposé, n vaut 3 et les trois valeurs sont 3, 4 et 5. La valeur de la variable est donc le triplet (3, 4, 5). Le fait d'avoir un triplet (n=3) présente une certaine difficulté, puisqu'il s'agit de chercher les multiples communs à trois nombres. Le point important est que ces trois nombres sont premiers entre eux, c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de diviseur commun (mis à part 1). Ainsi, leur plus petit commun multiple (ppcm) est leur produit, c'est-à-dire 60, qui correspond au nombre de marches de l'escalier. Bien entendu, les élèves de 10 – 11 ans n'ont pas les connaissances pour appréhender cette stratégie experte, qui d'ailleurs ne leur sera pas expliquée. Ils peuvent par contre travailler à partir de listes des multiples communs ; dans ce cas, le facteur 5 facilite la recherche du multiple commun, étant donné qu'il ne peut s'agir que d'un nombre se terminant par 0 ou par 5 ; aussi, comme les multiples de 4 sont toujours pairs, ils peuvent déduire que le nombre d'escaliers se terminera par un 0. De ce fait, le champ de la recherche

[2] Les livrets désignent en Suisse romande ce que l'on nomme en France les tables de multiplication.

se retrouve déjà bien limité et ne nécessite pas, s'ils s'y prennent bien, l'écriture complète des trois listes de multiples.

Concernant la 2ème partie, pour les items a) et b), la réponse peut être trouvée en effectuant simplement une division, à savoir 60 : 6 et 60 : 8 ; si le reste dans la division euclidienne est zéro, cela signifie qu'il est possible de gravir les marches et d'atteindre la dernière ; par contre, si le reste n'est pas nul, cela signifie qu'il n'est pas possible de parvenir à la dernière marche en montant par enjambée ce nombre de marches. Cette méthode est valable pour n'importe quelle autre valeur de la variable « nombre de marches ». Une autre façon de faire est de chercher si 60 est dans la liste des multiples de 6 (respectivement de 8) ; c'est une méthode valable, mais plus longue, plus risquée (possibilité d'erreurs dans les tables de multiplication) et moins experte.

L'item c) présente une nouvelle difficulté, puisqu'il faut effectuer une suite inégale de pas, 5 puis 7, toujours dans cet ordre. Une première approche consiste à ne considérer que la succession, c'est-à-dire l'addition des deux enjambées. Ainsi, s'il est possible de monter l'escalier de 12 en 12 (5 + 7), et c'est le cas, la réponse est oui. Dans cette situation, n'importe quel choix de deux nombres dont la somme égale 12 (ou à tout autre diviseur de 60) aurait pu être résolu par le même raisonnement. Par contre, dans le cas où la somme des deux nombres n'est pas un diviseur de 60, il n'est pas correct de répondre immédiatement par la négative : il faut, en effet, vérifier s'il est possible d'atteindre ou non la dernière marche avec un nombre impair d'enjambée. Par exemple, pour les valeurs de l'item d), 3 puis 4, la somme faisant 7, et en reprenant le développement ci-dessus, nous constatons qu'il n'est pas possible d'arriver sur la 60ème marche, car 7 n'est pas un diviseur de 60. Par contre, après huit enjambées de 3 et de 4, la 56ème marche (8 x 7 = 56) est atteinte, mais le pas suivant étant 3, ceci nous amène sur la 59ème : il ne sera donc pas possible d'arriver exactement sur la 60ème marche. En revanche, si l'enjambement est d'abord de 4 marches, après 8 enjambées de 4 et 8 enjambées de 3, la 56ème marche est atteinte et l'enjambée de 4 mène exactement sur la dernière marche. Nous distinguons donc trois catégories de paires de nombres, qui déterminent les trois valeurs pertinentes de cette variable de paires inégales (n_1, n_2) de pas :

Valeur n° 1 : n_1+n_2 est un diviseur de 60 ; dans ce cas, il est possible de parvenir sur la dernière marche avec un nombre pair d'enjambées.

Valeur n° 2 : n_1+n_2 n'est pas un diviseur de 60, mais est un diviseur de 60-n_1. Autrement dit, le reste de la division de 60 par n_1+n_2 est n_1. Dans ce cas, la (60-n_1)ème marche est atteinte avec un nombre pair d'enjambées et le pas suivant de n_1 marches amène sur la dernière.

Valeur n°3 : n_1+n_2 n'est ni un diviseur de 60, ni un diviseur de 60-n_1. Autrement dit, le reste de la division de 60 par n_1+n_2 n'est égal ni à 0, ni à n_1. Dans ce cas, il n'est jamais possible d'arriver exactement sur la dernière marche.

Ainsi, l'item c) correspond au choix d'un couple de la forme de la valeur n° 1 ; l'item d), l'ordre 4 puis 3 correspond à la valeur n° 2 et l'ordre 3 puis 4 à la valeur n° 3.

Il faut noter que, dans le cas où la somme des termes est un diviseur du nombre de marches totales (comme la valeur n° 1), l'ordre des nombres à additionner ne porte pas à conséquence. Par contre, pour les items d1) et d2), il est impératif de respecter l'ordre des enjambées. En effet, alors que les deux facteurs sont des diviseurs de 60, il serait tentant de répondre, de façon erronée, que ces deux façons de monter l'escalier permettent d'atteindre la 60ème marche. Par contre, la somme de ces termes n'étant pas un diviseur de 60, il n'est donc pas suffisant d'effectuer simplement une division euclidienne par 7, il faut aussi vérifier si le reste vaut ou non le premier terme (3 ou 4). Néanmoins, cet item peut aussi être résolu en effectuant des additions successives des termes, en respectant, comme déjà mentionné, l'ordre des enjambées ; cette stratégie est possible, car 60 est un nombre assez petit. A noter qu'au niveau des élèves interrogés, ce sera sûrement le seul moyen correct mis en œuvre.

Le fait de choisir ces valeurs (3 + 4 et 4 + 3) est très judicieux. En effet, il n'y a que peu de nombres possibles qui permettent une réponse affirmative et une réponse négative à la question avec deux diviseurs de 60. Un autre couple possible aurait été 6 et 2, mais l'écart est plus grand : 3 et 4 sont donc le meilleur choix.

- l'organisation sociale : le professionnel a le choix de faire résoudre cette tâche aux élèves de manière individuelle ou en groupe. Cette seconde solution permet une confrontation des stratégies résultant d'un conflit cognitif des élèves du même groupe.

4. *Stratégies possibles de résolution*

Tout d'abord, pour pouvoir entrer correctement dans le problème, il faut déterminer le nombre de marches (même si nous avons dit plus haut qu'il est possible de s'en passer pour l'item a), cela ne concerne pas nos élèves !). Or, pour déterminer le nombre de marches de l'escalier, il est indispensable d'avoir compris que la possibilité de monter l'escalier, par exemple de 4 en 4, signifie que le nombre de marches est un multiple de 4. A priori, il nous semble que tous les groupes (si ce n'est tous les élèves) devraient être capables d'utiliser cette procédure. Toutefois, si cela devait poser problème pour un groupe, nous prévoyons de les aider à identifier cet élément, sans lequel le traitement du problème serait compromis.

1ère partie

La stratégie experte consiste ici à utiliser le fait que les multiples communs sont les multiples du ppcm. Dans notre cas, le ppcm de 3, 4 et 5 est égal à leur produit, c'est-à-dire 60. De plus, seul 60 convient, car il s'agit du seul multiple commun inférieur à 100. Comme nous l'avons dit, cette stratégie n'est pas accessible, ni même visée, pour les élèves de ce niveau.

En fait, la recherche des multiples étant ici limitée à ceux inférieurs à 100, des stratégies de recherche exhaustive dans les listes de multiples sont tout-à-fait efficaces. Cette dernière consiste à écrire in extenso les trois listes de multiples et à chercher ceux qui sont communs. Une autre façon du même type consiste à écrire la liste des nombres jusqu'à 100 et à biffer ceux qui ne conviennent pas ou, au contraire, à entourer en trois couleurs ceux qui conviennent. L'avantage d'une stratégie exhaustive est qu'elle permet une bonne justification ; en revanche, elle est un peu laborieuse et risque de ne pas être souvent employée.

Enfin, une autre stratégie dite de « réduction » consiste à réduire peu à peu la liste des multiples possibles. La façon la plus rapide consiste à voir que les multiples communs de 5 et de 4 sont dans les multiples de 10 : ceci peut s'argumenter par le fait que les multiples de 5 se terminent par 0 ou 5 et que seuls ceux qui se terminent par un 0 sont pairs donc susceptibles d'être des multiples de 4. Nous pouvons bien sûr aussi affirmer que les multiples de 5 et de 4 sont les seuls multiples de 20, mais il n'est pas sûr que cet argument soit accessible à beaucoup d'élèves. Il reste ensuite à discerner que dans les dizaines restantes, seul 60 convient ! Cette stratégie se rapproche plus de la stratégie experte, mais par manque de connaissances théoriques sur les multiples communs, elle risque de conduire à des réponses insuffisamment argumentées.

2ème partie

Pour les items a) et b), la stratégie la plus accessible aux élèves concernés est l'établissement de listes de multiples, en prenant comme facteur le nombre de marches par enjambée. Idéalement, l'apprenant doit stopper son énumération à 60 (= nombre de marches de l'escalier déterminé par la 1ère partie de l'exercice), ou au multiple le plus proche ; toutefois, le fait de continuer la liste des multiples ne porte pas préjudice à la résolution de cet exercice. Puis, il doit contrôler si le nombre 60 figure bien dans sa liste ; si oui, il est possible de monter les marches et de s'arrêter sur la dernière ; si non, il est impossible de monter les marches et de s'arrêter sur la 60ème. La stratégie visée est de diviser le nombre total de marches de l'escalier, c'est-à-dire 60, par le nombre de marches enjambées ; si le résultat de la division euclidienne est nul, il est possible de monter les marches en atteignant la dernière ; si le résultat n'est pas égal à zéro, il n'est pas possible de parvenir directement à la dernière marche.

Pour l'item c), la stratégie de base consiste en l'addition successive des termes $5 + 7$ jusqu'à l'obtention de 60, ce qui prouve qu'il est possible de monter l'escalier en faisant une enjambée de 5, puis une de 7 et ainsi de suite, jusqu'à la 60ème marche. La stratégie visée est d'additionner $7 + 5 = 12$, afin de poursuivre la résolution avec la solution valable pour les items a) et b), c'est-à-dire en effectuant la division $60 \div 2$.

Pour l'item d), les élèves peuvent utiliser la même méthode décrite ci-dessus, à savoir l'addition successive des termes $3 + 4$ et $4 + 3$. La stratégie experte est d'utiliser le terme 7, résultant de l'addition $3 + 4$ et de s'approcher, grâce aux multiples de 7, du nombre 60 ($7 \times 8 = 56$). Puis, l'énoncé requiert de faire d'abord une enjambée de 3 marches, donc $56 + 3 = 59$; ceci prouve qu'il n'est pas possible de monter 3 puis 4 marches et de parvenir sur la 60ème. La deuxième proposition est de faire un pas de 4 marches : $56 + 4 = 60$, ainsi la dernière marche est atteinte. A noter que cette stratégie n'est pas accessible aux élèves de ce niveau.

III. CONTEXTE DE L'EXPERIMENTATION

Dix élèves de 5P (10 -11 ans) ont pris part à notre expérimentation. L'enseignante nous a informés qu'elle avait déjà proposé un exercice du même genre à ses élèves et expérimenté la recherche du ppcm dans une tâche du même type. Avec son aide, trois groupes homogènes, en fonction de leur niveau mathématique, ont été formés, deux de trois élèves et un de quatre élèves. De plus, nous avions convenu d'intervenir le moins possible durant la résolution de l'exercice. Nous ne le ferions que dans le cas où les élèves ne parviennent pas à rentrer dans la tâche. Mise à part pour un groupe qui n'avait pas bien compris la consigne, nous sommes restés en retrait pendant leurs discussions pour ne pas biaiser leurs recherches.

Les élèves étaient informés que, pour chaque groupe, un élève devrait, après le temps de travail, présenter les résultats au rétroprojecteur. Cette mise en commun avait pour but de confronter et discuter les différentes stratégies de résolution entre chacun des groupes.

A la fin des présentations, nous avons mené une mise en commun, ayant pour but de valider les stratégies et les résultats, ainsi que de proposer éventuellement d'autres résolutions. Au cas où il nous restait du temps, nous avions prévu un exercice de prolongement, afin de vérifier les acquis et la compréhension des élèves.

IV. ANALYSE A POSTERIORI

Avant tout, nous remarquons que les trois groupes ont rapidement compris qu'il s'agissait d'un problème concernant les multiples, ceci étant en plus favorisé par la connaissance du thème (thème 5 : multiples et diviseurs).

Pour la suite, nous avons choisi d'analyser, en premier, les sources des erreurs ; puis, nous exposons les stratégies effectives des élèves.

1. *Observations des erreurs*

Les erreurs que nous avons constatées proviennent principalement d'une mauvaise lecture de l'énoncé et plus rarement de l'utilisation de stratégies erronées. Par exemple, un groupe n'a pas identifié que le nombre de marches de l'escalier n'était pas donné : pour eux, l'escalier comptait 100 marches. Dans ce cas particulier, l'observateur n'a rien précisé de suite, espérant qu'un élève se rendrait compte de cette mauvaise interprétation de l'énoncé ; comme ceci n'a pas été le cas, une intervention a été nécessaire pour la bonne réalisation de la suite de la tâche. De plus, d'autres élèves n'ont pas remarqué immédiatement que l'item d1) comprenait deux questions ; cet oubli a été réparé lors de la mise au net précédant la présentation orale. Concernant l'utilisation de stratégies erronées, nous n'avons constaté que peu de cas. Toutefois, certains élèves n'ont pas saisi que le nombre de marches devait être commun à toutes les enjambées (3, 4 et 5) et n'ont identifié que $M3 \cap M4$, $M3 \cap M5$ ou $M4 \cap M5$.

Nous pouvons aussi signaler quelques erreurs de calcul qui n'ont pas permis aux élèves une bonne réalisation de la tâche, spécialement pour les items c) et d) qui demandaient l'addition de termes successifs.

2. *Stratégies effectives*

Pour la résolution de la 1$^{\text{ère}}$ partie de l'exercice, les élèves ont établi les listes de multiples de 3, 4 et 5. Ensuite, ils ont repéré les multiples communs. Seul un groupe a sélectionné, dans les multiples de 3 et 4, ceux se terminant par 5 et 0.

Pour la 2$^{\text{ème}}$ partie, nous indiquons les stratégies employées pour chaque item :

a) Les élèves ont écrit une liste des multiples de 6 et contrôlé si le nombre 60 était dans cette liste. Il est intéressant de noter que lors de l'écriture sur le transparent, les groupes ont proposé une justification (6x10=60) se rapprochant plus de la stratégie visée : diviser 60 par 6.

b) Tous les élèves ont établi une liste des multiples de 8 et contrôlé si le nombre de 60 était dans cette liste. Pour la justification d'un groupe notée $7 \times 8 = 56 + 8 = 64$, ce dernier s'est approché de la stratégie visée : diviser 60 par 8. En effet, par ce calcul, ils ont montré que 60 n'est pas un multiple de 8. A noter que cette écriture de justification est incorrecte, mais c'est une erreur classique qui porte sur la signification du signe « = ».

c) Ils ont additionné les termes 5 + 7 à plusieurs reprises, jusqu'à obtenir si possible 60. Aucun n'a pensé à additionner les deux enjambées et à résoudre cet item avec le nombre 12.

d) Ils ont additionné les termes 3 + 4 à plusieurs reprises, jusqu'à obtenir si possible 60. Ils ont fait de même pour 4 + 3.

3. *Présentation des groupes*

Comme prévu, les groupes ont présenté leurs résultats au rétroprojecteur les uns après les autres. Il n'y a pas eu de question, étant donné qu'ils avaient tous procédé de la même manière. Il y a eu néanmoins une intervention lors de la présentation du groupe 1. Un élève a expliqué leur stratégie de résolution pour le d1) comme suit : « On a fait… on a fait les multiples de 3 et après de 7 et après ça nous fait… et ça fait que ça peut pas marcher le premier ». Après l'exposé, nous avons demandé aux élèves de reformuler cette stratégie. En effet, s'ils étaient parvenus à comprendre que faire des enjambées de 3, puis de 4, correspondait à faire des sauts de 7 en 7, ils se rapprochaient de la stratégie optimale. L'étudiant a posé la question. « J'ai pas compris le d)… le d1) vous avez fait les multiples de

3 et les multiples de 7 ? ». La réponse a été donnée par un autre élève que celle qui avait présenté : « Non. En fait on a fait… on a fait… là on a fait 3 + 4, 7, 7 + 3, 10 et ainsi de suite. ». Les multiples de 7 ne sont donc pas réapparus.

4. *Mise en commun*

L'un de nous (que nous appellerons l'enseignant) s'est chargé de l'institutionnalisation devant la totalité des élèves. Il a validé les stratégies de chaque groupe : établir la liste des multiples de 3, 4 et 5 et observer lesquels sont communs (en l'occurrence 60). Il a également mis en évidence l'erreur d'un groupe qui avait compris que l'escalier faisait 100 marches et souligné l'importance d'une lecture précise de l'énoncé. Il a aussi discuté du fait qu'il n'y avait pas besoin d'écrire tous les multiples ; il suffisait d'écrire les multiples de 5, qui sont les plus faciles, puis d'entourer dans cette liste les multiples de 3 et ensuite ceux de 4 : cette stratégie était moins coûteuse et il y avait moins de risque de faire une erreur. Pour la deuxième partie de l'exercice, il a d'abord validé les stratégies employées par les groupes, à savoir : établir la liste des multiples de 6 et voir si 60 y apparaît. Il a également mis en avant le risque de faire des erreurs en écrivant la liste. Puis, il a demandé aux élèves s'ils pensaient nécessaire d'établir la liste des multiples jusqu'à 100. Les élèves ont répondu que non alors que, dans l'exercice, la plupart l'ont fait. Finalement, l'enseignant a souligné que certains groupes avaient écrit une autre justification sur leur transparent que lors de la résolution : « c'est possible, car 10 × 6 = 60 ». En partant de cette justification, il a alors demandé aux élèves de chercher une stratégie de résolution moins coûteuse que l'établissement de la liste de tous les multiples ; mais les élèves n'y sont pas parvenus. L'enseignant a donc institutionnalisé la possibilité de diviser le nombre de marches par la valeur des sauts pour savoir si c'était possible : « si on prend 60 et qu'on divise par 6, on trouve 10 et un reste de 0. Cela signifie qu'en 10 sauts, on arrivera pile sur la dernière marche ». Les élèves ont semblé comprendre cette stratégie.

b) Après une validation des stratégies proposées, l'enseignant a amené les élèves à transférer la technique décrite en a). Les élèves sont parvenus à dire qu'il suffisait de diviser 60 par 8 et voir si cela donne un reste de 0 ; si c'est le cas, cela fonctionne. Il a alors effectué la division au tableau en se faisant dicter par les élèves. Le reste étant de 4, les élèves ont conclu que le b) n'était pas possible.

c) L'enseignant a, une nouvelle fois, validé la stratégie des élèves tout en soulignant que le risque d'erreur était élevé. Il a ensuite demandé aux élèves comment il était possible d'utiliser la nouvelle stratégie vue en a) et b) pour cet exercice. Les élèves ont proposé de diviser par 5 et de diviser par 7 et d'observer les restes. Cette stratégie n'étant pas correcte, l'enseignant a mis en évidence que faire une enjambée de 5, puis une enjambée de 7 correspond à faire une longue enjambée de 12. Les élèves n'ont pas compris ce rapport. Il a alors noté la liste des sauts au tableau : 5, 12, 17, 24, 29, 36, 41, 48, 53, 60. Puis, il a entouré les multiples de 12 pour montrer qu'ils étaient tous présents. Finalement, il a ramené cela à la stratégie vue et a) et b). Faire des sauts de 5, puis des sauts de 7 revient à faire des sauts de 12 tous les deux sauts ; alors, si le reste de la division de 60 par 12 est 0, on arrive pile sur la dernière marche. La plupart des élèves n'ont pas du tout compris cette stratégie. L'enseignant a alors pris un autre exemple : « un saut de 8, puis un saut de 4, puis un nouveau saut de 8, etc. Est-ce qu'on arrive sur la dernière marche ? » Il a demandé à un élève de répondre à cette question en utilisant la stratégie qui venait d'être expliquée. L'élève est parvenu à trouver la réponse avec un peu d'aide de la part de ses camarades.

d) Faute de temps, cette partie de l'exercice n'a pas pu faire l'objet d'une mise en commun. Nous pensons qu'il aurait été difficile pour les élèves de comprendre la stratégie adéquate : 3 + 4 ou 4 + 3 valent 7 et vu que le reste de la division de 60 par 7 est non-nul, les élèves auraient sans doute trouvé qu'il n'était pas possible d'arriver sur la dernière marche. Nous pensons qu'il aurait été intéressant de réécrire la liste des sauts et d'entourer les multiples de 7 pour montrer qu'on passait bien par ces nombres. Mais qu'en est-il des autres ? Quand on fait 3 + 4 + 3 + 4, etc. on passe aussi par 3, 10, 17, 24 et ce ne sont pas des multiples de 7. Nous pensons que la stratégie optimale, qui consiste à comprendre qu'on arrive sur la dernière marche si c'est un multiple de 7 ou un multiple de 7 plus 4 aurait été difficile d'accès pour ces élèves en si peu de temps. De plus, il aurait fallu soulever le fait que le nombre par lequel on commence a une influence.

5. *Synthèse de l'analyse a posteriori*

Les élèves ont su se débrouiller seuls pour trouver le bon raisonnement et ont employé la plupart du temps la stratégie de base. L'un des groupes a même utilisé la stratégie visée pour l'un des items, mais au moment de la présentation, ils ont choisi de justifier leur réponse par la stratégie de base ; ceci indique que la stratégie visée n'était peut-être pas encore très bien acquise. Au moment de la présentation, tous étaient d'accord sur les résultats, qui avaient été validés par l'ensemble du groupe avant le report sur l'acétate. Ainsi, ils ont été capables d'expliquer leur manière de procéder. Ils se sont écoutés et ont aidé leurs camarades qui avaient des difficultés » cela montre une réelle implication des élèves dans la tâche.

Durant la mise en commun les élèves ont eu de la peine à comprendre les stratégies expertes que l'enseignant a proposées » elles n'avaient que peu de sens pour eux, car leurs méthodes de résolution étaient déjà bien intégrées et il était difficile, à ce moment, de leur en faire accepter d'autres. De plus, leurs méthodes avaient parfaitement fonctionné et les élèves ne cernaient donc pas l'utilité d'en changer. Si nous souhaitons que les élèves soient forcés de mobiliser une stratégie « experte », il convient d'agir sur les valeurs des variables de cet exercice : il serait tout à fait pertinent d'augmenter le nombre de marches de l'escalier tout en gardant les mêmes sauts. Avec un escalier de 600 marches par exemple, les élèves comprendraient que l'établissement de la liste des multiples est une stratégie trop coûteuse. En effet, ils réaliseraient qu'elle demande trop de temps et seraient contraints de trouver une autre façon de faire ; c'est de cette manière que les élèves vont, peu à peu, se rapprocher d'une stratégie « experte ».

V. CONCLUSION

Pour conclure, nous avons trouvé beaucoup d'intérêt à réaliser cette expérimentation qui était la première de notre cursus universitaire. L'approfondissement d'une tâche spécifique nous a incités à nous questionner sur les variables didactiques et les moyens mathématiques à disposition des enseignants. Concernant la tâche « l'escalier », , nous avions remarqué durant l'analyse *a priori* qu'elle comportait des valeurs de variables très intéressantes. L'exercice est pensé dans une certaine progression et les valeurs des différentes enjambées sont parfaitement pertinentes. Par contre, nous avions aussi observé qu'avec un escalier de seulement 60 marches, les élèves ne voient pas l'intérêt de chercher et de mobiliser d'autres stratégies que celles qu'ils maîtrisent déjà ; cela s'est vérifié dans notre expérimentation. Nous pensons qu'il aurait été intéressant de refaire l'activité dans les mêmes conditions, mais avec un escalier plus long. Ainsi, nous pourrons observer l'émergence de nouvelles stratégies.

REFERENCES

Bessot A. (2003) *Une Introduction à la Théorie des Situations Didactiques*, Cahier du laboratoire Leibniz n° 91. http://www.leibniz.imag.fr/lescahiers/.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Brousseau G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques* (textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chastellain M., Jaquet F. (2001) *Mathématiques cinquième année, Livre de l'élève.* Fribourg : Office romand des éditions et du matériel scolaire.