

LES VÉRIFICATIONS DANS LE CALCUL LITTÉRAL EN CLASSES DE QUATRIÈME ET DE SECONDE

Bénédicte MARGET* – Amélia RAMPP**

Résumé – La question de la gestion des erreurs dans les classes se pose à tout professeur au quotidien. Par exemple, en calcul littéral, nous nous sommes aperçues que beaucoup d'élèves ont des difficultés, en particulier avec la distributivité. Nous avons alors émis l'hypothèse que l'utilisation de processus de vérification pouvait être une perspective de remédiation de ces erreurs. Nous avons donc élaboré, en nous appuyant sur des résultats de recherche concernant les vérifications et l'algèbre, une typologie des processus de vérification qui pouvaient être mis en œuvre par des élèves de quatrième ou de seconde lors d'exercices portant sur la distributivité. Puis nous avons conçu une expérimentation visant à développer l'utilisation de ces processus de vérification.

Mots-clefs : processus de vérification, validation, vraisemblance, distributivité, erreurs

Abstract – Everyday teachers wonder how to deal with the students' mistakes. For instance, we notice that many students have difficulties in algebra, especially with distributivity. So we have suggested that maybe new forms of correction could fix these mistakes. By using the results of researches concerning verification and algebra, we have worked out a list of verification processes, which can be used by students of eight-ten grade (14-16 years old) when they are doing distributivity exercises. After that, we have done an experimentation in order to use these methods.

Keywords: verification processes, validation, plausibility distributivity, mistakes

La question de la gestion des erreurs dans les classes se pose à tout professeur au quotidien. Par exemple lorsque nous avons commencé à enseigner le calcul littéral, nous nous sommes rapidement aperçues que beaucoup d'élèves avaient des difficultés, en particulier avec la notion de distributivité. Nous avons alors émis l'hypothèse que l'utilisation de moyens de contrôle de ses résultats pourrait permettre à un élève de prendre conscience de ses erreurs, puis d'y remédier. C'est ainsi que nous avons orienté notre travail de recherche vers les vérifications dans le calcul littéral. Toutefois, les erreurs fréquemment observées portant sur la distributivité, nous avons centré notre travail sur cette notion. Nous avons donc élaboré, en nous appuyant sur des résultats de recherche concernant les vérifications et l'algèbre, une typologie des processus de vérification pouvant être mis en œuvre par des élèves de quatrième ou de seconde lors d'exercices utilisant la distributivité. Nous avons alors conçu et réalisé une expérimentation visant à favoriser l'utilisation par les élèves de ces processus de vérification.

Celle-ci s'est déroulée en trois temps : tout d'abord, une évaluation diagnostique, afin de voir si les élèves vérifiaient spontanément leurs résultats et quels moyens ils utilisaient, puis, lors de la phase de synthèse, nous avons institutionnalisé des processus de vérification que nous avons utilisés dans les exercices, et enfin, nous avons testé la mise en œuvre et l'impact de ces vérifications sur les apprentissages des élèves.

I. QUELQUES ELEMENTS THEORIQUES

1. *Qu'est-ce qu'une vérification ?*

Une analyse des définitions issues de différents dictionnaires nous a tout d'abord permis de constater que les termes « vérifier » et « vérification » font partie du langage courant à la différence des termes « valider » et « démontrer » qui sont définis relativement à un ou

* Collège Victoire Daubié, Bourg-en-Bresse – France – benedicte.marget@ac-lyon.fr

** Collège Marc Seguin, Saint Etienne – France – amrampp@hotmail.com

plusieurs domaines. D'autre part, dans le sens courant, il arrive que les termes « valider » et « vérifier » apparaissent comme synonymes, puisqu'ils renvoient à la détermination de l'exactitude de quelque chose établie par une preuve.

Lorsqu'on se place dans notre domaine d'étude, c'est-à-dire l'enseignement des mathématiques, ces deux termes ont des significations distinctes. En effet, le problème sous-jacent à la vérification est le contrôle de la vraisemblance d'un résultat alors que celui de la validation est plutôt la recherche de preuve, donc de vérité d'une assertion. Une étude de différents travaux de didactique nous a permis de mettre en évidence que l'absence de vérification chez les élèves s'explique en partie par les effets de contrat didactique et que, lorsqu'elles sont mises en œuvre, les vérifications sont davantage liées à la vraisemblance qu'à la vérité, qu'elles se développent à partir d'un doute de l'élève à la suite d'un résultat identifié, et qu'elles peuvent éventuellement déboucher sur une phase de rectification. Enfin si on peut penser que les élèves ne vérifient pas, c'est parce que ces vérifications font partie du travail privé de l'élève et ne sont donc pas données à voir au professeur (Coppé 1993). Nous reprenons, la définition du terme « vérification » donnée par Coppé (1993) :

Dans une situation de résolution de problème, pour une question, un élève a identifié un résultat partiel ou final et il se pose la question de la validité de son résultat. Nous appellerons vérification tout argument avancé ou toute action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat, si l'élève en a besoin, à ce moment-là et dans cette situation. Une vérification a pour conséquence, soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement d'acquiescer la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement de déboucher sur une phase de rectification.

On entend ainsi qu'un processus de vérification est un processus de contrôle permettant à un sujet de déterminer si une tâche est achevée, si un résultat est acceptable, visant à accroître la vraisemblance voire la certitude alors qu'un processus de validation renvoie plutôt au processus de preuve et vise à établir la vérité d'une affirmation, d'un résultat ou d'un raisonnement. La première notion relève de la cohérence interne vis-à-vis des connaissances de l'élève, tandis que la seconde notion relève plutôt de la cohérence interne des savoirs mathématiques. Ainsi, la vérification est de l'ordre de la conviction personnelle alors que la validation relève plutôt de l'ordre de la convention sociale, dans le sens où la preuve a pour but d'établir la vérité par un moyen socialement reconnu. On peut toutefois noter que cette distinction n'est pas forcément faite par l'élève.

D'autre part, nous avons aussi retenu l'importance de la situation dans laquelle se trouve l'élève et de l'évaluation qu'il fait des enjeux de la vérification, en particulier en temps limité, ce qui est souligné par Balacheff (1988) :

Lorsque j'achète un livre et que le libraire me rend vingt pence de monnaie, je suis « tout à fait certain » que les deux pièces ne sont pas des contrefaçons [...]. Si quelqu'un me demandait « êtes-vous certain que la pièce dans votre main est une pièce de dix pence? », je lui jetterais peut-être un nouveau coup d'œil et dirais « oui ». Mais si quelque chose d'important dépendait de la vérité de mon jugement, je pense que je prendrais la peine de me rendre dans la banque la plus proche et de demander au caissier d'examiner la pièce ; et si la vie d'un homme en dépendait, j'essayerais même de voir le chef cashier de la banque d'Angleterre, et je lui demanderais de certifier l'authenticité de la pièce.

Nous voyons donc que la mise en œuvre de processus de vérification ou le problème de la vraisemblance ou celui de la réduction du doute, va dépendre fortement des enjeux de la situation et donc de l'analyse qu'en fait l'élève : il va évaluer rapidement l'intérêt qu'il a à faire une vérification et même dans certains cas, laquelle. De ce fait, nous constatons qu'il y a non seulement des enjeux, mais aussi des degrés dans les vérifications : certaines seront simples et rapides mais d'autres pourraient être plus longues, plus complexes et nécessitant des connaissances mathématiques plus élaborées. C'est pourquoi il est important d'étudier les différents objets sur lesquels peuvent porter les processus de vérification.

2. *Sur quoi porte-t-elle ?*

Prenons un exemple dans le cas de la factorisation d'une expression littérale.

Le premier objet sur lequel peut porter la vérification est le résultat. Par exemple, après avoir factorisé, l'élève pourrait développer l'expression obtenue et la comparer à celle de départ ou bien remplacer la variable par un nombre.

Le deuxième est le procédé, la méthode de résolution. Par exemple, pour vérifier qu'il a bien factorisé, l'élève pourrait vérifier chacune des étapes de sa transformation. Ainsi il contrôlerait pas à pas son procédé de factorisation. Ces premiers objets renvoient plutôt à l'aspect technique dans la mesure où l'élève refait le calcul soit de la même manière, soit d'une manière un peu différente mais sans changer de cadre.

Le troisième objet sur lequel peuvent porter les vérifications sont les critères qui ont permis de déterminer le choix de la méthode. Par exemple, après avoir factorisé, l'élève peut vérifier que les conditions d'application de la procédure qu'il a choisie étaient réunies. Par exemple, il peut contrôler si le facteur commun était apparent ou s'il était caché (ce qui est le cas dans l'exemple suivant : $(x + 1)(x - 2) - x - 1$), afin de déterminer si la méthode choisie était la bonne. Cet objet renvoie au contrat didactique dans la mesure où l'élève va choisir sa méthode de résolution parmi celles qu'il aura abordées en classe, mais implique qu'il ait compris ces différentes méthodes.

Enfin, le dernier objet est l'adéquation question/réponse. Par exemple pour vérifier sa factorisation, l'élève regarderait si l'expression obtenue est bien un produit. Cette vérification porte donc sur l'aspect structural de l'expression algébrique dont nous parlerons plus loin.

On voit donc que les vérifications peuvent porter sur différents objets et avoir lieu à différents moments de la résolution. Cette analyse des différents objets sur lesquels portent les vérifications nous amène à proposer une typologie des vérifications.

3. *Typologie des vérifications*

Nous reprenons rapidement la classification des vérifications de Coppé (1993) qui distinguait tout d'abord deux catégories en fonction du caractère plus ou moins mathématique des savoirs en jeu. Les vérifications de type interne qui reposent sur des connaissances et des savoir-faire mathématiques (comme dans l'exemple ci-dessus) et les vérifications de type externe, qui ne font pas vraiment appel aux connaissances mathématiques mises en jeu mais plutôt à l'expérience de l'élève ou au contrat didactique.

Nous appellerons processus de vérification interne tout processus de vérification mettant en jeu des savoirs ou des savoir-faire typiquement mathématiques, ne dépendant pas nécessairement de la situation dans laquelle on les utilise. Ces processus sont davantage utilisés par les experts surtout s'ils nécessitent des connaissances mathématiques non triviales. Enfin, certains processus peuvent être longs et prendre du temps.

Elle cite les vérifications techniques (VI 1), les vérifications par condition nécessaire et pas suffisante (VI2), les vérifications par essais (VI 3), les vérifications par changement de cadre (VI 4) et les vérification par analogie avec un autre problème (VI 5).

Les autres processus qui utilisent des connaissances portant sur d'autres savoirs ou savoir-faire moins mathématiques (notamment ceux qui utilisent la logique du problème mais qui dépendent davantage du contrat) seront appelés des vérifications de type externe. Ces processus ont la propriété d'être généralisables à tous les problèmes ou à des classes de problèmes très étendues, par exemple les problèmes de géométrie plane ou les problèmes d'analyse. Certains peuvent être courts et/ou se limiter à des arguments simples.

Elle cite les vérifications faisant référence au contrat didactique (VE1), au texte de l'exercice (VE2), à une certaine connaissance de la réalité (VE3) à la mémoire du savoir enseigné (VE4) et par analogie de certitude (VE5).

Avant de préciser davantage les types de vérification rencontrés dans notre domaine d'étude, nous allons nous intéresser au statut de l'algèbre ainsi qu'à sa place dans l'institution scolaire.

II. LA DISTRIBUTIVITE, LE CALCUL LITTERAL

Voici une définition de la distributivité du point de vue du savoir savant (d'après La bibliothèque des mathématiques en ligne [bibm@th¹](http://www.bibmath.net/)) :

Une opération notée multiplicativement (\times) se distribue sur une opération notée additivement (+) si, quels que soient les nombres a , b et c , on a : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

Par exemple, la multiplication est distributive par rapport à l'addition sur l'ensemble des nombres réels.

La factorisation est la démarche qui consiste, dans une somme de termes qui sont des produits, à repérer ce qu'on appelle un facteur commun, c'est à dire un terme commun dans chaque produit. On utilise alors la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition pour exprimer l'expression sous la forme d'un produit. Par exemple, dans l'expression : $(x - 7)(2x + 1) - (x - 7)(x + 3)$ le facteur $(x - 7)$ est commun à ces deux produits. On le met en facteur, pour obtenir : $(x - 7)[(2x + 1) - (x + 3)] = (x - 7)(x - 2)$ ».

1. Analyse des programmes

En France, la distributivité est introduite, pour la première fois, en classe de cinquième (élèves de 12-13 ans). Les élèves commencent juste à manipuler les lettres mais aucune compétence en termes de travail sur des expressions littérales n'est exigible. On peut constater que la notion de « test pour des valeurs » est au programme mais en lien avec l'approche des équations et non avec la vérification d'une expression littérale distribuée ou factorisée. Le terme « tester » apparaît donc mais il n'est pas précisé si cette action est liée ou non à une vérification.

Dans les programmes de quatrième et troisième, aucune référence n'est faite à la vérification ; à aucun moment, le terme ou la tâche « vérifier » ne sont mentionnés. L'institution scolaire ne demande donc pas explicitement aux élèves d'être capables de vérifier un résultat.

Dans le programme de seconde, l'accent est mis sur le fait d'utiliser simultanément différents registres (graphique, numérique, algébrique, géométrique). Ainsi, en changeant de registre, on peut vérifier un résultat trouvé.

Nous avons donc constaté que les vérifications étaient peu présentes dans les programmes du collège et que seules les vérifications par changement de cadres étaient mises en avant dans les programmes de seconde.

2. Analyse des manuels scolaires

Nous avons étudié cinq manuels de quatrième, deux manuels de troisième et trois manuels de seconde. On peut constater que les vérifications sont peu présentes. Nous avons seulement trouvé les types suivants : VI 1, VI 2, VI 3, VI 4 et VE 4. Par exemple, dans le manuel de seconde suivant (Hyperbole, 2009), voici ce qui pourrait constituer une vérification de type VI 3, mais le terme n'est pas employé :

¹ <http://www.bibmath.net/>

On considère l'expression algébrique suivante : $A = (2x + 5)^2 + (2x + 5)(x - 4) + 2x + 5$.

Hervé doit factoriser A. Voici sa copie :

$$A = (2x+5)(2x+5+x-4)$$

$$A = (2x+5)(3x+1)$$

Tester l'égalité obtenue par Hervé pour $x = 0$. Que peut-on en conclure ?

Figure 1 – Exercice du manuel « Hyperbole » (2009)

De façon plus générale, nous avons remarqué que certains manuels proposaient des exercices intitulés « copie d'élève ». Ce sont des tâches à erreur qui incitent les élèves à vérifier les résultats d'autres personnes. Ici le terme « vérifier » est explicitement employé.

34 Copie d'élève

Voici un extrait de la copie d'Amélie. Elle pense avoir réduit chaque expression. Vérifier et corriger si besoin ses réponses.

$$-4x - 9x = 13x$$

$$6x + x = 6x$$

$$12x - 15x = -3x$$

$$-x + 7x = 7$$

Figure 2 – Exercice du manuel « Maths 4ème » Bréal(2007)

A partir de ces deux exercices, on peut penser que les auteurs des manuels n'emploient pas les termes « tester » et « vérifier » comme synonymes. En effet, dans le second exercice, ils emploient le terme « vérifier » selon le sens courant puisque l'élève doit s'assurer de l'exactitude de la réponse d'Amélie et, dans le cas contraire, la corriger, alors que dans le premier exercice, on demande à l'élève de « tester » le résultat d'Hervé pour une valeur numérique donnée, et ce qu'il peut en conclure. Pour nous, cet exercice propose à l'élève de vérifier, au sens de la définition retenue pour notre étude, en lui donnant une méthode : la vérification par essais, VI 3, mais cela n'est pas explicite pour l'élève qui peut considérer cela comme une tâche isolée. Ainsi, le terme « tester », nous semble-t-il, est utilisé dans ce manuel pour faire référence au processus de vérification de type VI 3, alors que le terme « vérifier » est utilisé selon le sens courant.

3. Classification des processus de vérifications

Grâce à l'analyse des programmes et des manuels, nous avons créé une typologie des processus de vérification liés au calcul littéral.

PV 1 : Reprise étape par étape des calculs

PV 2 : Transformation d'expressions afin de les comparer

Par exemple, si la consigne est de factoriser l'expression $E = 15 - 3x$, l'élève peut développer et réduire l'expression $E = 3(5 - x)$ qu'il a obtenue et vérifier qu'elle est égale à celle de l'énoncé. Il est parfois nécessaire, pour les comparer, de développer et réduire l'expression de départ comme dans l'exemple suivant : $(x - 1)^2 - 16$ se factorise en $(x - 5)(x + 3)$, il faut donc développer et réduire les expressions initiale et finale pour les comparer : $(x - 1)^2 - 16 = x^2 - 2x - 15$ et $(x - 5)(x + 3) = x^2 - 2x - 15$.

PV 3 : Vérification du terme constant et du terme de plus haut degré.

Par exemple, dans l'expression $(x - 2)(3x + 4)$, le produit des coefficients des termes en x est égal à 3 et le produit des termes constants est égal à -8 , ce qui correspond bien au coefficient devant le terme de plus haut degré et au terme constant de l'expression $3x^2 - 2x - 8$.

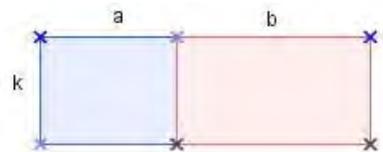
PV 4 : Vérification de la forme de l'expression obtenue ainsi que du nombre de termes
 Dans les manuels scolaires, on trouve les définitions suivantes : « Développer, c'est transformer un produit en une somme » et « Factoriser, c'est transformer une somme en un produit ». Dans le cas d'un développement, il s'agit de vérifier que l'expression que l'on vient de développer (avant réduction) est bien une somme de deux termes dans le cas de la simple distributivité, et de quatre termes dans le cas de la double distributivité. Par exemple, l'expression $2x(x - 1)$ se développe en $2x^2 - 2x$, qui est bien une somme de deux termes.

PV 5 : Test avec des valeurs numériques

PV 6 : Test de $(n+1)$ valeurs dans des polynômes de degré n
 Pour vérifier qu'une expression est bien factorisée, le mathématicien peut utiliser la propriété suivante : « Deux polynômes de degré n sont égaux s'ils sont égaux pour $n+1$ valeurs numériques distinctes ». Par exemple, les expressions $5(x + 2)$ et $5x + 10$ sont de même degré et sont égales à 10 pour $x = 0$ et à -5 pour $x = -3$, on peut donc en déduire l'identité suivante : $5(x + 2) = 5x + 10$.

PV 7 : Utilisation de l'aire des rectangles

Afin de vérifier le développement ou la factorisation d'une expression littérale utilisant la simple ou double distributivité, l'élève pourra s'aider du cadre géométrique. En effet, à l'aide de calculs d'aire de rectangles, il est possible de retrouver l'identité de simple et de double distributivité, comme par exemple.



$$k(a + b) = ka + kb$$

PV 8 : Utilisation de la calculatrice graphique

L'utilisation de la calculatrice permet à l'élève de tracer la courbe représentant l'expression de départ et celle représentant l'expression d'arrivée. Ainsi, il peut vérifier que son résultat est correct en comparant ces deux courbes (bien sûr, sur une fenêtre graphique limitée).

PV 9 : Vérification par multiplication posée

Il s'agit de vérifier un développement en posant la multiplication.

Cette classification, ainsi qu'une étude des situations propices à la mise en œuvre de processus de vérification, nous ont permis de construire une expérimentation que nous allons désormais présenter.

III. EXPERIMENTATION

Celle-ci a été conçue en trois temps et avec différents types de questions.

1. *Présentation de l'expérimentation*

Tout d'abord nous avons proposé une évaluation diagnostique (cf. annexe A), pour déterminer si les élèves utilisent des moyens de vérification et lesquels, composée de deux parties : la première place les élèves en situation de résolution d'exercices et leur demande leur degré de certitude, la seconde est un questionnaire d'ordre général qui permet d'évaluer le rapport des élèves à la vérification. Chaque élève répondait individuellement en laissant les traces de sa recherche, et des éventuelles vérifications et rectifications qu'il pouvait faire.

Dans un second temps, nous avons choisi d'institutionnaliser certains processus de vérification afin de donner des moyens de contrôle aux élèves (cf. annexe B). Ceci a été fait lors d'une phase de synthèse en classe, après avoir corrigé les exercices du test diagnostique, et organisé un débat au sujet des vérifications. En classe de quatrième, quatre processus de vérification (PV 1 ou PV 2 selon la classe, PV 4, PV 5 et PV 7) ont finalement été institutionnalisés puis réinvestis dans les exercices de calcul littéral. En classe de 2nde la progression ne permettait pas cette institutionnalisation.

Enfin, nous avons donné une évaluation finale composée de quatre parties (cf. annexe C) dans le but de répondre aux questions suivantes : est-ce que les élèves mobilisent spontanément les processus de vérification dans des exercices de calcul littéral ? Quels sont les procédés de vérification qu'ils ont retenus ? Est-ce que le fait d'avoir à disposition des moyens de vérification les aide à mieux appréhender et conceptualiser la notion de distributivité ?

Dans la première partie, nous avons proposé des exercices de développement et réduction sans induire de vérification dans la consigne. Dans la deuxième partie, nous avons proposé le même type d'exercices en demandant, cette fois-ci, de préciser le degré de certitude. Nous voulions voir si les élèves pensaient à mobiliser des processus de vérification dans le but d'augmenter leur certitude et dans ce cas, quels procédés ils utilisaient. Dans la troisième partie, nous demandions aux élèves si des réponses d'élèves fictives étaient correctes, puis de corriger celles qui ne l'étaient pas. Nous avons donc induit fortement l'utilisation de processus de vérification dans le but d'observer ceux que les élèves savent mobiliser, mais aussi les conclusions, correctes ou non, qu'ils savent en tirer.

Enfin, nous avons élaboré une dernière partie, sous forme de questionnaire plus général, dans le but de répondre aux deux dernières questions.

Nous allons maintenant décrire les différentes conclusions que nous pouvons tirer des analyses a posteriori de ces différentes phases et voir si elles correspondent à ce que nous avons prévu dans l'analyse a priori (que nous ne donnerons pas ici).

2. *Résultats sur l'évaluation diagnostique et le questionnaire*

Tout d'abord, nous pouvons retenir de la partie « exercices » de l'évaluation diagnostique, que les élèves de quatrième ne sont globalement pas sûrs d'eux lorsqu'ils résolvent des exercices de calcul littéral, mais qu'ils mobilisent très peu de processus de vérification, contrairement à ce que nous avons prévu. Ils mobilisent essentiellement PV 2 et PV 5. Nous pensons que les élèves ont tenté de répondre, par effet de contrat didactique, mais qu'ils n'étaient globalement pas sûrs d'eux, comme le précise l'élève EC-B : « *Je n'ai pas compris ce qui était demandé* » ou encore CV-F : « *je n'ai pas fait* ». Nous pouvons expliquer le fait qu'ils ne mettent pas en œuvre de processus de vérification par leur difficulté à produire une réponse, qu'ils ne veulent donc pas remettre en cause, ou par manque de connaissances.

En classe de seconde, les élèves ont mobilisé un champ de vérification plus large : trois types de vérifications externes VE 1, VE 2 et VE 4 et quatre types de vérifications internes PV 1, PV 2, PV 4 et PV 5 sont apparus. Nous pouvons expliquer cette différence par le recul qu'ont les élèves de seconde sur l'algèbre, contrairement aux élèves de quatrième qui débutent dans ce domaine. Comme nous avons vu dans la partie théorique, les processus de vérification que les élèves peuvent mettre en œuvre pour augmenter leur degré de certitude nécessitent certaines connaissances des notions mathématiques en jeu.

A l'opposé, nous avons observé que certains élèves sont sûrs d'eux mais pour différentes raisons : la plupart des élèves de quatrième sont sûrs que leur réponse est fautive alors qu'un nombre important d'élèves de seconde n'a pas conscience de ses erreurs. Dans les deux cas, les élèves ne ressentent pas le besoin de réduire le doute, puisqu'ils n'en ont pas, et n'ont donc aucun intérêt à mettre en œuvre des processus de vérification pour réduire le doute. Toutefois, nous avons été surprises de constater qu'au moins la moitié des élèves sûrs de leurs réponses n'avaient pas laissé de traces de vérification. Pour ces élèves, ce ne serait donc pas la vérification qui contribuerait à augmenter la certitude. Cependant, nous émettons quelques réserves car nous sommes conscientes que certains élèves n'ont pas retranscrit sur papier tout le travail et les réflexions qu'ils ont pu faire dans leur tête. En particulier, les vérifications de type externe ou les vérifications de type PV 4 basées uniquement sur la perception de la forme (on a bien un produit de facteurs, ou une expression sans parenthèses) sont peut-être plus difficilement transposables sur papier car elles peuvent relever du subjectif et certains élèves n'ont peut-être pas « osé » les écrire.

Mais le résultat le plus frappant est le fait qu'une grande partie des élèves qui ne sont pas sûrs de leur réponse ne mobilisent pas de procédés de vérification, contrairement à ce que nous attendions. C'est comme si les élèves étaient capables de vérifier uniquement dans le cas d'expressions simples, car certains procédés sont faciles à mettre en œuvre.

D'autre part, comme nous nous y attendions, les élèves ont beaucoup de difficultés à utiliser PV5 correctement car pour cela, les notions sous-jacentes, comme le statut de la lettre, du signe égal ou d'identité doivent être assimilées. Comme nous l'avons vu dans la partie théorique, la conceptualisation des notions en jeu et l'utilisation bénéfique des vérifications sont intimement liées.

Enfin, la partie « questionnaire » de l'évaluation diagnostique a montré que la situation dans laquelle se trouve l'élève a un impact important sur la mise en œuvre de processus de vérification. En effet, il ressort que les élèves vérifient leur résultat lors de devoirs surveillés pour s'assurer que leur réponse est correcte. Cela s'explique par la volonté d'avoir une bonne note, et donc par des effets de contrat didactique. Cependant, lors d'exercices, ils ne vérifient pas leur résultat par manque de temps, de moyens et surtout parce qu'ils n'en ressentent pas le besoin, alors que la majorité des élèves pensent que c'est important pour eux.

Intéressons-nous maintenant aux résultats de l'évaluation finale pour pouvoir appréhender l'impact de l'institutionnalisation des vérifications auprès des élèves.

3. Résultats sur l'évaluation finale

Nous pouvons noter que des progrès importants ont été réalisés par les élèves après le test diagnostique concernant la distributivité. Nous pouvons supposer que l'enseignement des processus de vérification semble y avoir contribué. De plus, on peut penser que cela les a aidés à prendre confiance en eux. Même si l'évaluation finale a permis de mettre en évidence essentiellement l'utilisation des processus VE 4 et PV 5, puis des processus PV 2 et PV 1, peu d'élèves mobilisent spontanément des processus de vérification dans les exercices de calcul

littéral. Toutefois, nous avons remarqué que, d'une part, contrairement à l'utilisation de VE 4, peu d'élèves ayant utilisé le processus PV 5 ont donné une réponse erronée, et d'autre part, l'utilisation de PV 2 était rarement vue comme un processus de vérification par les élèves. Enfin, comme prévu dans l'analyse a priori, les élèves n'ont pas eu la même faculté à intégrer les différentes méthodes de vérification. Quant à l'aide qu'a pu apporter le fait de les enseigner, les réponses ont été partagées, car comme nous l'avons constaté dans l'évaluation diagnostique, le bienfait des vérifications est intimement lié à la représentation et au degré de conceptualisation, suffisant ou non, qu'a l'élève des notions en jeu. Toutefois, l'évaluation finale a permis de mettre en avant l'aspect positif de la vérification, à savoir la réduction du doute.

IV. CONCLUSION

Nous avons étudié la place et l'impact que peuvent avoir les vérifications dans l'apprentissage des élèves. Nous pensons que vérifier pouvait être un moyen pour les élèves, de surmonter leurs difficultés. Nous avons testé notre hypothèse dans le domaine de l'algèbre, et plus particulièrement sur la distributivité. Nous pouvons retenir de cette expérimentation que la vérification peut aider à mieux conceptualiser les notions mathématiques en jeu, à condition qu'elle ne soit pas enseignée de manière théorique et obligatoire. Il est important que chaque élève se l'approprie lorsque sa conceptualisation est suffisamment avancée, c'est-à-dire à un moment propre à lui, sinon les vérifications peuvent freiner ses apprentissages à cause d'une surcharge cognitive, comme nous l'avons constaté sur certains élèves de quatrième. D'autre part, nous retenons la difficulté méthodologique à avoir accès au travail privé même si l'évaluation diagnostique leur a permis de se familiariser avec le type de questionnaire proposé, et nous a ainsi permis d'entrevoir une partie de leur travail privé. Enfin, nous regrettons ne pas avoir observé plus souvent la rectification de leur réponse après avoir vérifié. Ceci témoigne également du fait que la conceptualisation des notions en jeu est essentielle pour mobiliser et tirer profit des processus de vérification.

Cette étude a été particulièrement enrichissante dans la mesure où elle nous a permis de réfléchir sur nos pratiques enseignantes. En effet, l'étude théorique du statut de l'algèbre nous a montré les obstacles que les élèves doivent surmonter lors de l'introduction de l'algèbre, et l'étude des différentes définitions des termes « vérifier » et « vérification » ainsi que la typologie des processus de vérification établie nous ont permis de réfléchir et de nous interroger sur des méthodes de remédiation. Enfin, nous avons trouvé très intéressant de se pencher sur le travail privé de l'élève et sur son ressenti face à ses réponses car ces temps d'échanges ne sont pas prévus officiellement dans l'institution scolaire.

A l'avenir, dans nos pratiques professionnelles, nous serons encore confrontées à des erreurs dans les calculs littéraux. Même si les vérifications peuvent être un obstacle supplémentaire pour certains élèves, nous pensons qu'en leur donnant du sens et en les institutionnalisant plus systématiquement, elles peuvent devenir un outil de remédiation et d'auto-évaluation pour l'élève, augmentant ainsi leur confiance.

REFERENCES

- Balacheff N. (1988) Processus de preuve et situations de validation. *Educational studies in mathematics* 18(2), 147-176.
- Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique – Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions, deuxième édition augmentée, 1991.
- Chevallard Y. (1988) Sur l'analyse didactique. Deux études sur les notions de contrat et de situation. *IREM d'Aix Marseille* 14.
- Coppé S. (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*. Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.
- Douady R. (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* 7.2, 5-31.
- Petit Larousse en couleurs (1991).
- Petit robert (1989) *Les dictionnaires LE ROBERT*.
- Manuel Hyperbole 2nde (2009). Editions Nathan.
- Manuel Mathématiques 4ème (2007). Editions Breal.

SITOGRAPHIE

- L'algèbre au collège et en classe de seconde, Les vérifications, http://web.lyon.iufm.fr/UCDmath/algebre/outils_prof/verifF.htm). Document issu d'un site internet consacré à l'enseignement de l'algèbre au collège et en classe de seconde réalisé par un groupe de travail (constitué de Sylvie COPPE, Serge BETTON et de professeurs de mathématiques).
- http://media.education.gouv.fr/file/special_6/52/5/Programme_math_33525.pdf . Programme de mathématiques du collège.
- http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf f. Document d'accompagnement du collège sur le thème : Du numérique au littéral.
- http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/1/Doc_ressource_fonctions_109181.pdf Document d'accompagnement du lycée sur le thème des fonctions
- http://media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf Programme de mathématiques de la classe de seconde.
- La bibliothèque des mathématiques, Le dictionnaire, <http://www.bibmath.net/dico/index.php3?action=affiche&quoi=./d/distributif.html>

ANNEXE A :

EVALUATION DIAGNOSTIQUE

Nom :**Prénom :**

Consigne : Ce questionnaire ne sera pas noté. Les correcteurs blancs et les effaceurs sont interdits (barrer proprement en cas d'erreur). Les calculatrices sont autorisées mais il faut écrire sur cette feuille tous les calculs effectués avec.

I. **Exercices (Classe de quatrième) :**

1. a) Développe l'expression suivante : $6 \times (4 + x)$.

Es-tu sûr/e de ta réponse ? Donne une note de 1 (pas du tout sûr/e) à 5 (sûr/e de toi) qui exprime ton degré de certitude sur ta réponse. **Expliquer pourquoi.**

b) Développe l'expression suivante : $-5(3 - 2x)$.

Es-tu sûr de ta réponse ? Donne une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de toi) qui exprime ton degré de certitude sur ta réponse. **Expliquer pourquoi.**

2. a) Réduire l'expression suivante : $8x - 3x$.

Es-tu sûr de ta réponse ? Donne une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de toi) qui exprime ton degré de certitude sur ta réponse. **Expliquer pourquoi.**

b) Réduire l'expression suivante : $x - 2 - 5x$.

Es-tu sûr de ta réponse ? Donne une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de toi) qui exprime ton degré de certitude sur ta réponse. **Expliquer pourquoi.**

3. Lors d'un devoir, les élèves de 5A ont eu à factoriser l'expression suivante : $12 - 3x$.

Voici les réponses de plusieurs élèves :

| | |
|-----------------------|----------------------------|
| Hugo : $3(4 - x)$ | Alice : $3(12 - x)$ |
| Mehdi : $9x$ | Selim : $(4 - x) \times 3$ |
| Yasmine : $3(-x + 4)$ | |

Qui a répondu correctement ? Comment fais-tu pour le savoir ?

I. **Exercices (Classe de seconde) :**

1. a) Développe l'expression : $(x + 3)(x - 2)$

Es-tu sûr de ta réponse ? Mets une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de vous) qui exprime ton degré de certitude sur la réponse que tu as donnée. **Explique pourquoi.**

| | |
|-----------|-----------|
| Brouillon | Réponse : |
|-----------|-----------|

- b) Développe l'expression : $5x - (2x + 4)(3x - 2)$

Es-tu sûr de ta réponse ? Mets une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de vous) qui exprime ton degré de certitude sur la réponse que tu as donnée. **Explique pourquoi.**

2. a) Factorise : $x^2 - 7$.

Es-tu sûr de ta réponse ? Mets une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de vous) qui exprime ton degré de certitude sur la réponse que tu as donnée. **Explique pourquoi.**

- b) Factorise l'expression : $(x + 1)(3x + 5) - x - 1$

Es-tu sûr de ta réponse ? Mets une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de vous) qui exprime ton degré de certitude sur la réponse que tu as donnée. **Explique pourquoi.**

3. Au brevet, Ryan, Lina et Téo ont eu à développer puis factoriser une expression. Ils ont notés sur un brouillon leur réponse :

Ryan :

a) $E = 15x^2 + 4x - 4$

b) $E = (5x - 2)(3x - 6)$

Lina :

a) $E = 8x^2 + 4x - 4$

b) $E = (5x - 2)(3x + 2)$

Téo :

a) $E = 15x^2 + 4x - 4$

b) $E = (5x - 2)(3x + 2)$

Nassim, en lisant les brouillons dit immédiatement à Ryan et Lina : « Vous avez certainement fait une erreur ». Comment Nassim s'y est pris ? Le résultat de Téo est-il juste ou faux??Propose au moins deux méthodes différentes.

Nom :**Prénom :****II. Ton avis :**

1. Lorsque tu résous un problème ou un exercice de calcul littéral, est-il important pour toi de vérifier ton résultat ? Pourquoi ?

En devoir surveillé, est-ce que tu vérifies ton résultat ? (entoure la réponse)

| | |
|-----|-----|
| Oui | Non |
|-----|-----|

Si oui, tu le fais : (entoure ta réponse)

| | | | |
|-----------------------|--------------|------------------------------|-------------------|
| Dans ta tête | Au brouillon | Sur ton cahier (ou ta copie) | A la calculatrice |
| Autres (à préciser) : | | | |

Si non, pour quelles raisons ? (entoure la réponse)

| | | | |
|-----------------------|------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| Je n'ai pas le temps | Je ne sais pas comment faire | Ce n'est pas à moi de vérifier | Je n'en ressens pas le besoin |
| Autres (à préciser) : | | | |

Pour les exercices (en classe ou à la maison), vérifies-tu tes résultats ? (entoure la réponse)

| | |
|-----|-----|
| Oui | Non |
|-----|-----|

a. Si oui, tu le fais : (entoure la réponse)

| | | | |
|-----------------------|--------------|------------------------------|-------------------|
| Dans ta tête | Au brouillon | Sur ton cahier (ou ta copie) | A la calculatrice |
| Autres (à préciser) : | | | |

b. Si non, pour quelles raisons ? (entoure la réponse)

| | | | |
|-----------------------|------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|
| Je n'ai pas le temps | Je ne sais pas comment faire | Ce n'est pas à moi de vérifier | Je n'en ressens pas le besoin |
| Autres (à préciser) : | | | |

ANNEXE B :

ENSEIGNEMENT DE LA DISTRIBUTIVITE EN CLASSE DE QUATRIEME

II. SIMPLE DISTRIBUTIVITE

1. Développer et réduire une expression littérale :

Propriété fondamentale : distributivité

Pour tout nombre $a, b, \text{ et } k$, on a : $k(a + b) = ka + kb$.

Définitions : Développer c'est transformer un produit en une somme. Factoriser c'est transformer une somme en un produit.

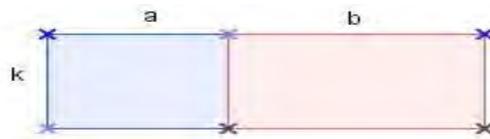
Applications :

1. Pour développer : $-3(x + 6) = -3 \times x + (-3) \times 6 = -3x + 6$
2. Pour factoriser : $6x - 12 = 6 \times x - 6 \times 2 = 6(x - 2)$
3. Pour réduire : $5x - 2x = x(5 - 2) = 3x$

Exemple des carreaux colorés : $4(c - 1) = 4c - 4$ et $2c + 2(c - 2) = 2c + 2c - 4 = 4c - 4$

Méthodes de vérification : Pour vérifier que l'on a bien distribué une expression littérale on peut :

- a. Pour tester le résultat d'un calcul littéral, il suffit de remplacer la lettre par un même nombre dans l'expression de départ, puis dans le résultat.
- b. Si le teste donne deux valeurs différentes, alors il y a une erreur. Attention ! Si le test réussit, cela ne garantit pas l'exactitude du résultat, mais cela augmente la confiance dans le résultat trouvé. Calculer l'aire du rectangle de deux façons différentes. On obtient : $k(a + b) = ka + kb$



- c. Vérifier chacune des étapes de calcul (4F) ; Refaire la transformation inverse (4B)
- d. Vérifier que l'expression obtenue est bien sous la forme d'une somme (pour un développement) ou d'un produit (pour une factorisation).

ANNEXE C :

EVALUATION FINALE

Consignes : ce questionnaire ne sera pas noté. Les correcteurs blancs et effaceurs sont interdits (barrer proprement en cas d'erreur). Les calculatrices sont autorisées mais il est demandé d'écrire sur cette feuille **tous** les calculs effectués (y compris les calculs mentaux et les calculs faits avec la calculatrice).

I. Exercices :

Exercice 1 :

1) Développer l'expression $A = 5(3x - 2)$.

| | |
|-------------|-----------|
| Brouillon : | Réponse : |
|-------------|-----------|

2) Réduire l'expression $B = 6x - (x - 3)$.

Exercice 2 :

1) Développer l'expression $C = -2(x + 1)$.

Es-tu sûr de ta réponse ? Donne une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de toi) qui exprime ton degré de certitude sur ta réponse.

2) Réduire l'expression $D = (5 - x^2) - (6x^2 + 2)$.

Es-tu sûr de ta réponse ? Donne une note de 1 (pas du tout sûr) à 5 (sûr de toi) qui exprime ton degré de certitude sur ta réponse.

Exercice 3 :

Certains élèves de 4^{ème} ont développé, puis réduit l'expression $E = 4(3x - 2) - (2x + 6)$. Voici leurs réponses.

Hugo : $E = 4(3x - 2) - 2x - 6$

Flora : $E = 10x - 8$

Chloé : $E = 10x - 14$

Jérémy : $E = x - 4$

a) Thomas constate que certains de ses camarades n'ont pas répondu correctement à la question. Lesquels ?

b) Comment Thomas a-t-il pu procéder pour vérifier le résultat de chacun de ses camarades ?

c) Corriger leurs erreurs.

