Réflexions préliminaires sur les connaissances mathématiques des enseignants du secondaire : Connaissances factuelles et développement de connaissances

Jérôme Proulx, *Université du Québec à Montréal, Canada*

Résumé : Les recherches sur les connaissances *mathématiques* des enseignants se sont beaucoup centrées, implicitement, sur les connaissances factuelles des enseignants. Sans nier l'importance de ces dernières, une dimension complémentaire, mais tout aussi centrale, est proposée sur la base d'une analyse d'extraits tirés d'un projet de formation continue d'enseignants au secondaire : *la capacité à faire des mathématiques*. Les implications de la prise en compte de cette dimension en recherche sont proposées et discutées.

La mathématique qui se fait et non la mathématique toute faite.
– Claude Janvier, cité dans Bednarz, Golding & Lefevre, 1997, p. vi

Introduction

Les recherches sur les élèves en didactique des mathématiques au sujet de la résolution de problèmes nous ont permis assez rapidement de nous apercevoir qu'il y avait plus que les connaissances factuelles dont nous devions nous occuper dans l'éducation des élèves en mathématiques. Bien que l'éducation formelle semble fortement axée sur l'apprentissage de connaissances factuelles (Mason et Spence, 1999), on voit de plus en plus d'intérêt envers le travail de résolution de problèmes chez les élèves dans l'enseignement des mathématiques. Cette distinction, dès 1965, était bien présente chez George Polya :

> Knowledge consists partly of "information" and partly of "know-how." Know-how is skill; it is the ability to deal with information, to use it for a given purpose; know-how may be described as a bunch of appropriate mental attitudes, know-how is ultimately the ability to work methodically. In mathematics, know-how is the ability to solve problems, to construct demonstrations, and to examine critically solutions and demonstration. And, in mathematics, know-how is much more important than the mere possession of information. (p. 118)

Par contre, au niveau des recherches sur les connaissances des enseignants et les recommandations qui en découlent concernant leur formation, on peut avoir l'impression à l'occasion d'avoir oublié les progrès et travaux faits avec les élèves à ce sujet et que le tout reparte implicitement de la case départ mais maintenant avec des enseignants. En effet, la plupart des recherches que nous avons sur les connaissances mathématiques des enseignants de mathématiques du secondaire semblent davantage centrées sur les connaissances factuelles (le « quoi ») que sur leurs capacités à faire des mathématiques. De plus, comme l'expliquent Mason et Spence (1999), à l'intérieur de cette orientation de recherche, l'accent est plus souvent qu'autrement placé sur les difficultés vécues par les enseignants et les manques, menant malheureusement à tout le mouvement de recherches dites « déficitaires » concernant les connaissances mathématiques des enseignants.

Toutefois, ces études, il va sans dire, informent beaucoup sur les enseignants et leurs connaissances. En s'intéressant et soulignant ce que les enseignants savent ou ne savent pas, ce qu'ils conçoivent et comprennent, elles permettent de voir les limites et les conceptions au niveau des connaissances mathématiques chez les enseignants. C'est le cas, entre autres, des travaux faits avec les enseignants du secondaire (la même chose pourrait être dite pour ceux fait avec les enseignants de l'élémentaire). Par exemple, les études de Ball (1990) et Bryan (1999) montrent toute l'aisance des enseignants dans l'utilisation des procédures et algorithmes usuels en mathématiques, mais aussi leurs difficultés importantes à expliquer le sens derrière ces mêmes procédures (le pourquoi). Les études de Schmidt et Bednarz (1997) et de Van Dooren, Verschaffel et Onghena (2003) font état de l'aisance des enseignants du secondaire avec l'utilisation de l'algèbre pour résoudre les problèmes, mais de leurs difficultés à faire du sens et à apprécier l'utilisation de procédures arithmétiques comme solutions valides à ces mêmes problèmes. Celles de Even (1993) et Hitt-Espinoza (1998), sur les fonctions, montrent que les enseignants interrogés possèdent une « vieille » définition de fonction, restreinte à un tracé continu et fluide, qui les amène à ne pas reconnaître ou accepter des tracés différents pour représenter des fonctions en plus de les amener à transformer et traiter les fonctions discrètes comme des fonctions continues. Et d'autres études pourraient être citées, comme celles reportées dans Fennema et Franke (1992), ou encore celles de Lucus (2006) et Cooney (1999) axant sur les réponses des enseignants à des questions d'entrevue concernant les aspects importants à travailler lors de l'enseignement des fonctions.

Ces études nous permettent en effet de mieux connaître et comprendre qui sont les (futurs) enseignants, pouvant ainsi informer des perspectives pour la formation des enseignants. Par contre, elles en disent peu, ou ne se penchent simplement pas de façon explicite sur, les mathématiques que les enseignants *font*, sur leur *capacité* à pouvoir faire des mathématiques et à en apprendre. Personne ne peut évidemment nier ni la présence ni l'importance des connaissances mathématiques factuelles pour un enseignant, mais il semble sans contredit y avoir plus dans les connaissances mathématiques que les connaissances factuelles – surtout pour un professionnel de l'enseignement qui est constamment confronté dans sa pratique à des situations *mathématiques* imprévues (voir Ball et Bass, 2003; Bednarz, Gattuso et Mary, 1995; Margolinas, Coulanges et Bessot, 2005). Ce constat est apparu de façon marquante à l'intérieur d'un projet de recherche centré sur l'approfondissement des connaissances mathématiques d'enseignants du secondaire, et donc situé dans la tradition des recherches soulignées plus haut, alors que les enseignants, à travers les séances de formation, ont, en plus des connaissances factuelles, développé des *capacités à faire et comprendre des mathématiques*. Cette dimension apparaît importante à mieux comprendre et documenter, pour informer davantage à propos des (futurs) enseignants de mathématiques, et de comment la formation peut contribuer à leur développement.

Il semble donc intéressant et informatif de se servir de ces événements de formation pour arriver à mieux comprendre ce que recoupe cette dimension complémentaire des connaissances mathématique des enseignants. Pour ce faire, le contexte de recherche-formation du projet en cause est explicité et est suivi d'extraits illustratifs du travail des enseignants, permettant de rendre compte de cette capacité à faire et comprendre les mathématiques observée et développée chez les enseignants. Ces événements seront par la suite mis en relation avec certains écrits sur les connaissances mathématiques pour arriver à théoriser davantage sur ce que peuvent représenter diverses dimensions importantes de la connaissance *mathématique* des enseignants.

Contexte de recherche, orientations de formation et extraits de travail des enseignants

Une initiative de formation continue d'une année, à raison d'une rencontre de groupe par mois, a été mise sur pied avec des enseignants de mathématiques du secondaire qui voulaient revitaliser et améliorer leurs pratiques d'enseignement des mathématiques. Les six enseignants (Carl, Claudia, Éric, Gina, Lana, Linda) étaient similaires à ceux étudiés dans les recherches citées plus haut, c'est-à-dire à l'aise avec les procédures mathématiques, les algorithmes, mais ayant travaillé peu, et donc développé peu, les raisonnements sous-jacents aux concepts. Le commentaire suivant de Carl, enseignant participant dans le projet, résume bien la situation des enseignants que ceux-ci ont expliquée d'entrée de jeu dans le projet :

> *Vous savez pourquoi on n'est pas capable de résoudre par raisonnement? C'est parce que nous n'avons pas été enseignés à raisonner en mathématiques. Moi, j'ai fait copier-coller, répète et "let's go!" … et j'ai eu 95% en maths!*

Ces enseignants semblaient donc posséder ce que Skemp (1978) appelle une compréhension *instrumentale* des mathématiques, compréhension qu'il distingue d'une compréhension *relationnelle*. La compréhension relationnelle se décrit comme la connaissance de ce qu'il faut faire et du pourquoi il faut le faire, alors que la compréhension instrumentale est uniquement la possibilité de connaître comment faire, sans savoir pourquoi. Dans le cas d'un algorithme mathématique, par exemple, une compréhension relationnelle représente la connaissance du « comment » utiliser l'algorithme ainsi que du pourquoi il fonctionne, alors qu'une compréhension instrumentale se résume à uniquement savoir comment l'utiliser, étape par étape.

Ainsi, face à cet intérêt vibrant des enseignants envers le développement de leurs compréhensions mathématiques, le projet de formation continue s'est intéressé à faire travailler les enseignants en profondeur sur les concepts mathématiques du *curriculum scolaire*, les concepts mêmes qu'ils enseignent, pour arriver à en approfondir et enrichir les raisonnements mathématiques sous-jacents aux concepts. De ce contexte de formation, fort simple, les enseignants ont donc été invités à travailler sur des tâches mathématiques et à y explorer les concepts imbriqués. Par l'entremise de ces explorations, dont l'intention première était d'approfondir leurs compréhensions mathématiques, les enseignants du projet ont, tel que mentionné, développé plus que des connaissances factuelles sur les mathématiques, mais aussi d'importants savoir-faire et capacités à faire des mathématiques.

Cette capacité à développer des connaissances est apparue comme étant une dimension importante de la connaissance mathématique de ces enseignants. Cette dimension s'est observé chez ces enseignants autant dans (1) la *présence* de leur capacité à faire des mathématiques, malgré une situation qui semblait au départ pointer vers le contraire et qui aurait pu mener à dire que ces enseignants avaient des difficultés conceptuelles avec les concepts en présence, que dans (2) le *développement*, au fil des sessions, d'une capacité à faire des mathématiques et à les explorer. On parle donc ici non pas de connaissances mathématiques statiques et prédéterminées, mais plutôt de connaissances en continuelle évolution et développement, de « pratiques mathématiques » comme le dirait Bauersfeld (1994) et Denning (1997), alors que celles-ci ont été déployées par les enseignants à travers les sessions de formation. Dans ce qui suit, trois exemples illustratifs sont offerts et analysés.

Exemple 1. Division de fractions : Développer un sens en en faisant et en interagissant

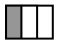
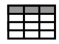
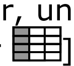
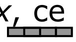
Ce premier exemple sur la division de fraction montre bien la différence entre les connaissances factuelles d'un enseignant et sa capacité à faire des mathématiques. Ces enseignants, axés sur les procédures, pouvaient répondre rapidement et sans erreurs à toute question posée sur la division de fractions – en utilisant l'algorithme « multiplier par l'inverse ». Par contre, lorsque questionnés, ils n'arrivaient pas à expliquer le raisonnement derrière cet algorithme. Lana, par exemple, expliqua de façon ironique son incapacité à aider ses étudiants :

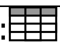
> *Quand mes élèves me demandent pourquoi ça marche [multiplier par l'inverse pour diviser des fractions], je leur dis simplement que c'est comme ça!*

Ainsi, dans le but de promouvoir le développement de compréhensions mathématiques chez les enseignants, de leur faire explorer les opérations sur les fractions et de rendre plus concret le sens de ces opérations, du matériel didactique divers (cartons d'œufs, feuilles de papier, blocs emboitables – voir les travaux de Kieren, sans date, et de Boissinotte, 1998) fut apporté pour travailler des problèmes calculatoires simples tels que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}\div\frac{1}{4}$. Après avoir travaillé l'addition, la soustraction et la multiplication de fractions, un travail fut démarré sur la division de fractions. Lorsque la division $\frac{1}{3}\div\frac{1}{4}$ fut offerte aux enseignants, la réaction des enseignants fut équivoque, comme le montre les propos de Carl et Éric (Tous les noms utilisés sont des pseudonymes. J. signifie le formateur, l'auteur du présent texte) :

Carl:	Moi, je ne suis pas capable de faire ça. Celui-là, je suis bloqué.
J.:	Et comment arrives-tu à trouver la réponse?
Carl:	Moi, je sais que la réponse est 1 et $\frac{1}{3}$.
J.:	Et comment tu y arrives?
Carl:	Technique [« mutliplier par l'inverse »]
J.:	Tu fais $\frac{1}{3}$ multiplié par 4 sur 1 ?
Carl & Eric:	[De concert] Oui!

Ce type de commentaires, jumelé aux propos de Lana plus haut, peuvent, en toute logique, conduire à attester de difficultés conceptuelles importantes chez les enseignants en lien avec les concepts mathématiques qu'ils enseignent. Quoique assez juste comme évaluation lorsque celle-ci est faite à cet instant précis, c'est-à-dire au moment même où la question leur fut posée, les enseignants en sont néanmoins venus à développer une compréhension approfondie de l'opération de division avec les fractions, c'est-à-dire à donner du sens au concept. Les raisonnements que les enseignants ont pu mettre en route, soulevés dans l'extrait suivant, montre toute la *capacité* de raisonnement mathématique de ceux-ci concernant les opérations de division de fractions, malgré la présence de certains blocages conceptuels au départ.

Ainsi, le groupe d'enseignant (et le formateur), ne restant pas en plan face à cette question, s'est attardé à faire du sens de cette opération ⅓÷¼. La division fut ainsi verbalisée en termes de « combien de fois ¼ entre dans ⅓ ». En prenant une feuille de papier, un ⅓ est représenté par  et ¼ par  ou  [et ⅓ peut être représenté par ][1]. L'opération devenait donc *combien de fois 3 carreaux entrent dans 4 carreaux*, ce qui donnait un et un tiers : 3 carreaux  entrent 1 *et* ⅓ dans 4 carreaux  une solution-explication qui satisfaisait le groupe. Toutefois, les enseignants voulaient en savoir plus sur le sens du reste obtenu (c'est-à-dire, le ⅓). Carl proposa donc de regarder ce que serait le reste obtenu pour une autre division, cette fois $\frac{1}{3} \div \frac{1}{5}$. Pour démarrer, une grille fut divisée en 5 et ensuite en 3. Lana, qui avait été assez discrète depuis le début, s'objecta à cette façon de faire, menant à une discussion avec le formateur. Cette discussion, qui en premier lieu pourrait mener à dire qu'elle ne comprend pas le sens de la division en question, montre en fait toute sa capacité à faire du sens des idées et à réussir à développer son propre raisonnement mathématique.

Lana:	Pourquoi dites-vous tous $\frac{1}{3}$? Pourquoi divisez-vous tous par 5 en premier ? Est-ce que c'est le $\frac{1}{3}$ qui est divisé par le $\frac{1}{5}$? Pourquoi diviser la feuille en cinquièmes ?
J.:	Parce que je veux savoir ce que vaut $\frac{1}{5}$.
Lana:	Non, mais quand tu lis, c'est $\frac{1}{3}$ divisé par $\frac{1}{5}$. Donc, je partirais avec… j'ai de la misère… Je ne suis pas capable de comprendre ce que vous faites.
J.:	Comment le ferais-tu toi ?
Lana:	Bien, je partirais avec le premier. On a fait ⅓ ÷ ¼, j'ai dessiné ⅓ comme ça [montre une partie de sa feuille divisée en trois parties].
J.:	Et …
Lana:	Et ensuite j'essaie de comprendre ce que c'est.
J.:	C'est bon, donc combien de quarts vont entrer dans ça [montre le ⅓] ?
Lana:	Oui mais qu'est-ce que ¼ représente ?
J.:	C'est exactement ça! Tu dois trouver ce que représente ¼. Ce que ⅓ vaut est ceci [pointe le ⅓ sur la feuille].
Lana:	Ouais.
J.:	Et ¼, je vais essayer de voir ce qu'il vaut. Donc, si je prends la même feuille et je la divise en 4…
Lana:	Ah! Ok!
J.:	Un quart vaut ceci [montre trois carreaux dans la rangée: ]
Lana & Eric:	Oui !

[1] Il est à noter ici qu'un travail préalable avaient été fait, à travers les trois autres opérations (+,–,×), sur le concept de référence au tout et de changement de tout. Par exemple, avec des problèmes du type « *Si Marie dépense la moitié de son avoir et Jean dépense le quart de son avoir, qui dépense le plus d'argent en tout ?* » (Hart, 1981) ou « *Comment se fait-il que lorsque j'additionne la demi d'une quantité à elle-même, celle-ci vaut soudainement le tiers de ma quantité ?* ». Pour plus de détail, voir Proulx (2007a, Appendice B, pp. 250-270).

J.:	Je compare donc deux quantités d'une certaine façon. Combien de fois *dans ceci* [montre] entrera celui-ci [montre] ? Ils entre une fois et un tiers.
Lana:	Ok, ok, ok. Ici tu as ton $\frac{1}{3}$ [montre sa feuille] et tu te dis que tu veux le diviser par $\frac{1}{4}$, mais tu dois savoir ce que ton $\frac{1}{4}$ représente…
J.:	C'est ça, tu dois trouver ce que ton $\frac{1}{4}$ représente parce que c'est par lui que tu divises.
Lana:	Ok, $\frac{1}{4}$ c'est trois carreaux.
J.:	Exactement, combien de fois trois carreaux entrent dans quatre carreaux.
Eric:	Exactement!
J.:	Un et un tiers.

La discussion mena ensuite à compléter l'opération $\frac{1}{3} \div \frac{1}{5}$ de cette façon: $\frac{1}{3}$ est 5 carreaux et $\frac{1}{5}$ est 3 carreaux, donc 3 carreaux entre 1 *et* $\frac{2}{3}$ dans 5 carreaux . Ensuite, pour s'éloigner des fractions unitaires, la division $\frac{1}{3} \div \frac{3}{4}$ fut explorée. Après peu de temps, Lana s'écria, toute excitée : « $\frac{4}{9}$! Il y a 4 qui entrent dans les 9 » [$\frac{1}{3}$ est 4 carreaux et $\frac{3}{4}$ est 9 carreaux , donc 9 carreaux entrent $\frac{4}{9}$ de fois dans 4 carreaux], illustrant bien tout le chemin qu'elle avait parcouru et le raisonnement qu'elle arrivait à faire par rapport à cette opération. Les enseignants étaient en fait impressionnés par la profondeur des compréhensions mathématiques qu'ils venaient de développer vis-à-vis ces opérations et comment, comme Carl le mentionnait, « un élève qui comprend ceci possède un niveau de compréhension des fractions qui est supérieur » – montrant bien comment les enseignants réalisaient toute la profondeur et richesse mathématique sous-jacente à cette opération et comment le développement de ce sens mathématique était nouveau pour eux.

Ce qu'on voit ici dans cet extrait, et principalement au niveau de Lana, est l'exemple d'une enseignante éprouvant certaines difficultés à comprendre le sens sous-jacent à l'opération de division proposée, mais qui en discutant et en questionnant en arrive à faire du sens de l'opération. Lana montre clairement qu'elle ne reste pas « coincée » avec le sens qu'elle fait (ou ne fait pas) de l'opération de division, alors qu'à force de se questionner, de questionner les autres, de creuser et de réfléchir elle en arrive, pour $\frac{1}{3} \div \frac{3}{4}$, à raisonner à son tour l'opération et son sens. Ce n'est donc pas tant ici la nature du sens développé par Lana (car plusieurs autres avenues auraient pu être empruntées que les feuilles de papier et le raisonnement qui le sous-tend), que le fait que ce sens ait été développé par Lana. Le cas de Lana personnifie bien le cheminement des enseignants à travers ces explorations mathématiques sur les fractions (et sur les autres contenus travaillés durant l'année). Et, fait à noter, ces enseignants ne s'étaient jamais vraiment penchés de cette façon, en profondeur, sur le sens à donner à la division de fractions, quelque chose qui peut facilement expliquer les difficultés conceptuelles qu'ils ont exprimées au début du travail sur la division.

On voit aussi que le formateur joue un rôle significatif ici, et avec raison puisque ces enseignants n'étaient jamais entrés en profondeur de la sorte sur ces notions. Le formateur jouait ici le rôle de déclencheur, autant pour proposer et discuter avec les enseignants certaines avenues possibles (dont uniquement une des possibilités à été discuté ici, alors que d'autres furent travaillées, voir

Proulx, 2007a, Appendice B, pp. 250-270), que pour interagir avec les enseignants sur le sens développé et offrir des clarifications ou poser des questions sur ce dernier au besoin. Toutefois, ce qui est ici important n'est pas les pistes ouvertes ou proposées par le formateur, car les recherches sur l'enseignement et la formation ont montré depuis des années que les explications de l'éducateur et les compréhensions de l'apprenant vont rarement de pair, mais bien le sens que les enseignants ont pu développer en lien avec ces pistes potentielles proposées et expliquées par le formateur.

Ainsi, ce que ce court extrait offre est une illustration non pas de ce que les enseignants connaissent ou ne connaissent pas, mais bien ce qu'ils peuvent arriver à comprendre en explorant les concepts mathématiques. En effet, plongés dans un environnement favorable, les enseignants en sont arrivés à construire un sens aux divisions proposées alors qu'ils ne le pouvaient pas au début et qu'ils restaient accrochés à l'algorithme. Ceci peut sembler banal puisque la formation visait le développement de leurs connaissances mathématiques, mais ce qui frappe, et est peut-être tout aussi évident, est que les enseignants ont été capables de développer un sens à ces opérations et donc ne sont pas restés bloqués avec leurs compréhensions antérieures. Autant ces enseignants ont développé un sens supplémentaire et approfondi pour les concepts, autant ils ont montré une capacité à construire et développer un sens des concepts. Ceci peut en fait permettre de nuancer le jugement « négatif » sur le fait que les enseignants « ne savaient pas » donner un sens à l'algorithme au départ, puisque lorsque placés dans un environnement à l'intérieur duquel ils ont l'occasion de creuser et explorer les concepts et faire du sens de ces derniers, ils ont fait du sens et ont développé leurs raisonnements mathématiques. Ces enseignants ont donc montré une capacité à faire du sens des concepts mathématiques ; cette *capacité* à faire du sens faisant partie intégrante de leurs connaissances mathématiques.

Exemple 2. Du volume à l'aire : La capacité d'étendre vers d'autres sujets non-travaillés

Ce deuxième exemple montre comment le travail approfondi d'un concept peut stimuler le développement de capacités à faire les mathématiques que les enseignants transportent avec eux à l'extérieur de la formation continue. En effet, suite au travail du sens de différents concepts, les enseignants ont commencé à faire des liens et réfléchir à d'autres sujets et contenus mathématiques en dehors des sessions de formation, par eux-mêmes.

Le cas de Gina est parlant ici. Lors d'une session axée sur le concept de volume de solides, les enseignants ont été progressivement amenés à construire un sens au concept de volume de prismes et de pyramides, sur la base de situations tirées des travaux de Janvier (1992, 1997) qui permettent de relier ensemble tous les prismes et cylindres ainsi que les différentes pyramides en plus de les mettre en relation avec les prismes, réduisant alors à deux le nombre de formules pour le volume de solides : « *Aire de la base* $\times$ *hauteur* » pour les prismes et « (*Aire de la base* $\times$ *hauteur*) $\div$ *3* » pour les pyramides[2]. Lors de la rencontre de formation suivante, alors que nous démarrions une discussion sur les concepts d'aire de figures, Gina exprima au groupe qu'elle avait réfléchi à la suite de la séance précédente à une façon similaire à celle du volume pour faire

[2] Pour plus de détails sur les différentes étapes de cette séquence, et les situations exploitées avant d'arriver à cette formule, voir Janvier (1992, 1997).

du sens des concepts et formules d'aire. Elle expliqua alors qu'on pourrait aussi réduire le tout à deux formules, celle du rectangle « *Base* $\times$ *hauteur* » et celle du triangle « (*Base* $\times$ *hauteur*) $\div 3$ » ; plutôt que la panoplie de formules que l'on retrouve dans les manuels scolaires (rectangle [$L\times l$], parallélogramme [$B\times H$], carrés [c^2], losange [$(D\times d)/2$], etc.).

Cet exemple, tout simple, est une belle illustration de ce que le travail approfondi de certains concepts, ici le volume de solides, a permis à Gina de réaliser. Ainsi, Gina a développé une capacité à pousser ses réflexions et connaissances sur d'autres contenus, ici l'aire, et en est arrivée à développer son propre sens des concepts. [D'autres exemples auraient pu être cités, entre autres celui soulevé dans Proulx, 2007b, sur le travail des conventions.] Donc, non seulement Gina a pu développer sa compréhension du volume lors de la séance de formation, mais a aussi développer des capacités à arriver *par elle-même* à faire du sens et à approfondir sa compréhension de la notion d'aire de figure. On parle donc ici de connaissances de deuxième ordre, au niveau du développement d'aptitudes à faire et comprendre les mathématiques. Skemp (1978) parle en fait de l'impact possible que le travail en profondeur, au niveau du développement d'une compréhension relationnelle des concepts, peut avoir chez les gens:

> The connection with [motivation] is that if people get satisfaction from relational understanding, they may not only try to understand relationally new material which is put before them, but also actively seek out new material and explore new areas, very much like a tree extending its roots or an animal exploring new territory in search of nourishment (p.13).

Ainsi, non seulement parle-t-on ici de développer des connaissances sur un contenu, mais aussi de stimuler la capacité à connaître d'autres contenus en profondeur, à pousser la réflexion mathématique, la construction de sens. Le travail en profondeur des concepts avec les enseignants semble avoir agit sur deux niveaux, un premier concernant les connaissances mathématiques et un deuxième concernant leur capacité à connaître les mathématiques.

Exemple 3. Division de fractions : Développer un nouvel algorithme

Ce troisième exemple illustre ici non pas uniquement la capacité des enseignants (développée ou non) à faire des mathématiques, mais aussi la réalisation des enseignants qu'ils peuvent ou ont la capacité de faire du sens et développer des concepts mathématiques. Gina sera ici aussi pris en exemple pour arriver à comprendre en détail cet aspect.

À la suite des événements en lien avec l'exemple 1 sur les divisions de fraction et le sens donné par le pliage de feuilles de papier, Gina expliqua au groupe que ces diverses explications, en plus de donner du sens à l'algorithme « multiplier par l'inverse », lui faisait réaliser que cet algorithme était en fait un truc, quelque chose qu'elle n'avait jamais vu sous cet angle auparavant, alors qu'elle traitait cet algorithme comme un simple fait mathématique à savoir. Ceci a donc fait réaliser à Gina que les supposés « faits » mathématiques peuvent être raisonnés et qu'elle peut elle-même faire du sens de ces faits et trucs mathématiques qu'elle a plus souvent qu'autrement mémorisé lors de son parcours scolaire. En lien avec les commentaires précédents faits par rapport à Skemp et le développement de la compréhension relationnelle, ce type de réalisation montre comment les enseignants pouvaient questionner leurs compréhensions actuelles en mathématiques et ouvrir vers d'autres réalisations. Mais il y a plus encore à cette démarche de réalisation chez Gina.

À la session suivante, une procédure d'élève fut apportée aux enseignants :

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3 \div 1}{4 \div 2} = \frac{3}{2}$$

Les enseignants, surpris de cette procédure et du fait qu'elle fonctionnait, se demandaient pourquoi cet algorithme n'était pas utilisé dans les écoles. Ils réalisèrent toutefois que cet algorithme avait ses limites et qu'il n'était pas utile dans tous les cas, par exemple lorsque les numérateurs et les dénominateurs n'ont pas de facteurs communs entre eux, comme ici :

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3 \div 2}{4 \div 5} = \frac{3/2}{4/5}$$

Dans ce cas, la division demeure. L'algorithme lui-même donne une réponse adéquate, malgré que peu utile, et copie le chemin utilisé pour multiplier des fractions (ici, les numérateurs et les dénominateurs sont divisés plutôt que d'être multipliés – sur ce point, voir Proulx, 2007c). Pour que l'algorithme donne un meilleur aperçu de la réponse, comme les enseignants ont expliqué, des facteurs communs sont nécessaires entre les numérateurs et entre les dénominateurs, pour que les nombres se simplifient entre eux (comme dans le cas de $3/4 \div 1/2$, avec 3 et 1 et 4 et 2). Cette réalisation amena Gina à parler de l'utilisation du concept de dénominateur commun et d'une façon générale d'opérer sur les fractions.

Gina:	L'autre question que je me pose est pourquoi on ne les a pas placées sur un dénominateur commun ? On montre aux élèves à faire l'addition et la soustraction avec le dénominateur commun et soudainement lorsqu'on travaille la multiplication et la division, on l'enlève.
J.:	C'est qu'en fait ça change pas grand-chose [à la réponse].
Gina:	Mais ça marche autant.
J.:	Oui, mais si j'ai ¾ x ½, même si je les mets sur 4, comment tout cela m'avantage-t-il ?
Gina:	Ça donne 2/4.
J.:	Ça me donne 6/16. Que je multiplie 4 par 4 ou 4 par 2…
Gina:	Oui, en effet ça ne donne pas grand-chose…
J.:	Est-ce que ça change quelque chose pour la division ?
Gina:	Non, ça marche aussi.
J.:	Humm… donc, tu parles d'offrir une façon générale de travailler les opérations, c'est-à-dire de les placer sous un dénominateur commun…
Gina:	[rires] Je fais juste jouer à l'avocat du Diable ici, parce qu'on cherchait une autre méthode.

Ce questionnement sur l'idée d'une approche « générale » à offrir pour opérer sur les fractions stimula une réflexion chez Gina alors qu'elle réalisa que si les fractions étaient placées sous le même dénominateur, l'algorithme deviendrait très efficace, puisque les deux dénominateurs s'annuleraient et donnerait une division par 1 :

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \div \frac{2}{4} = \frac{3 \div 2}{4 \div 4} = \frac{3 \div 2}{1} = 3/2$$

Cette réalisation provoqua un moment fort d'excitation dans le groupe, une sorte d'Eureka!, alors que les propos de Gina offraient un passage vers cette méthode « générale » pour les opérations sur les fractions par le passage par le dénominateur commun. Cette « découverte », inattendue, a surpris tout le groupe, enseignants et formateur inclus ; personne n'ayant pensé à regarder le problème sous cet angle. Gina devint alors très excitée et fière.

Gina:	Hey! Hey! Bingo!
J.:	Oh ! … On vient de trouver un nouvel algorithme !
Gina:	[enjouée] Je te gage que ça marche tout le temps, parce que tu obtiens toujours 1 au dénominateur. C'est incroyable !

Ce que cet extrait montre, à travers toute l'excitation que cette réalisation a provoquée, est tout l'intérêt et la capacité créatrice des enseignants pour construire un sens. Les enseignants (ici Gina) ont été intrigués par cette procédure, ont tenté de la comprendre et ont développé un sens à cette dernière au point de la rendre plus largement efficace, avec tous les nombres. On entrevoit bien ici ce deuxième niveau de compréhension mathématique, alors qu'on va plus loin qu'un simple apprentissage de faits et de savoirs établis et on produit, on fait et on établi des mathématiques. On parle en effet ici d'« une mathématique qui se fait », comme dirait Janvier ; les enseignants approfondissant leurs compréhensions, non pas par l'apprentissage de savoirs établis, mais par la production de concepts mathématiques.

Complémenter notre compréhension des connaissances mathématiques des enseignants

On voit donc, à travers les trois extraits offerts, un certain besoin de s'attarder à plus que les connaissances factuelles des enseignants de mathématiques et à porter une attention particulière sur leur capacité à connaître les mathématiques. Certains auteurs ont souligné l'importance d'éléments similaires en tant que connaissance fondamentale pour les enseignants. C'est le cas de Davis (Davis, 2008; Davis et Simmt, 2006), qui insiste sur le besoin pour les enseignants de connaître autant ce qu'il appelle les mathématiques établies (*knowledge of established mathematics*), que la façon avec laquelle ces connaissances sont établies et se développent (*knowledge of how mathematics is established*). Toutefois, cette distinction demeure, implicitement à un niveau quelque peu factuel. On peut en effet connaître comment les mathématiques se sont établies historiquement, comment les preuves mathématiques ou les définitions sont et se sont construites et établies et le rôle qu'elles jouent et ont joué, que les conventions sont établies d'un commun accord entre les acteurs de la communauté mathématique, que certaines exceptions sont traitées à part pour éviter les contre-exemples, que les erreurs de parcours ont donné lieu à des développements importants, que certaines erreurs sont demeurées cachées longtemps, que les articles de revues mathématiques abondent d'erreurs mathématiques, etc., sans pour autant pouvoir produire et faire des mathématiques soi-même. Ainsi, non seulement semble-t-il important, comme le soulignent ces auteurs, de connaître la façon avec laquelle un champ de connaissance se développe et se produit (une certaine épistémologie du champ de connaissance), mais aussi, comme il est souligné dans ce texte, d'avoir la capacité de développer, de faire et d'établir des mathématiques. On voit donc apparaître une troisième dimension aux niveaux de connaissances mathématiques « souhaitables » pour un enseignant :

- Une connaissance des mathématiques établies (une connaissance factuelle) ;
- Une connaissance de la façon avec laquelle les mathématiques s'établissent (un savoir épistémologique) ;
- Une capacité à faire et développer des mathématiques (une pratique mathématique).

Ces trois dimensions ne sont pas indépendantes l'une de l'autre et sont plutôt en interaction continuelle. Par exemple, les connaissances factuelles permettent d'entrer dans certains problèmes, ce qui contribue évidemment au développement de façons de faire les mathématiques, et cette production mathématique en retour, comme le montre l'exemple sur Gina et les fractions, contribue (implicitement ou non) à la compréhension de comment les mathématiques se construisent et se développent. Un autre exemple est aussi relié au fait que le connaissance sur la façon avec laquelle les mathématiques se développent peut amener l'apprenant à voir que les mathématiques ne sont pas « statiques » ou prédéterminées, ouvrant ainsi la possibilité pour lui-même de faire des mathématiques, d'en produire, ce qui en retour peut contribuer au développement de connaissances factuelles acquises en cours de route.

Ceci amène à une complexification de la nature des connaissances mathématiques des enseignants. La capacité à développer et construire un sens aux concepts semble ici figurer en tant que dimension supplémentaire, et complémentaire il va sans dire, des connaissances mathématiques. Maturana (1987), avec son concept de *conduite adéquate*, va même plus loin en affirmant que si l'on veut savoir si quelqu'un sait et comprend, il faut le placer dans une situation appropriée et le regarder faire. Pour savoir si quelqu'un sait jouer de la trompette, il faut lui donner une trompette. Dans le cas présent, on pourrait dire que si l'on veut voir si un enseignant comprend les mathématiques et que l'on veut évaluer le tout, il faut le regarder faire des mathématiques et le laisser les explorer. Dans le cas des extraits ci-haut, lorsque placés dans un environnement favorisant l'exploration et la production de raisonnements mathématiques, les enseignants ont montré qu'ils avaient la capacité à faire du sens des mathématiques, voire même qu'ils ont développé cette capacité à en faire davantage à travers ces explorations – ce que leurs premières réactions laissaient peu entrevoir. C'est de cette façon que ces enseignants ont montré qu'ils connaissaient les mathématiques. Leurs connaissances mathématiques, qui dans plusieurs cas auraient pu être jugées comme étant incomplètes ou faibles (par exemple, avec la division de fraction), arrivent à être vues sous un autre angle alors qu'ils en sont arrivés à, ils avaient la capacité de, déployer des raisonnements mathématiques fort élaborés au fil des séances.

Toutefois, cette capacité à faire les mathématiques n'est pas facilement « mesurable » par la réponse à une question lors d'un test ou d'une entrevue, alors qu'on la voit ici être déployée à travers un travail sur des activités relatives au contenu à mesurer en question. Comme l'explique Mason et Spence (1999), tout ce qu'une mesure de la connaissance factuelle offre comme indication est au mieux un aperçu de l'état courant – disant peu sur la nature même de la connaissance de la personne, connaissance qui est elle-même en continuelle évolution. Un exemple tiré de l'étude de Davis et Simmt (2006) sur la formation continue des enseignants est très parlant à cet égard. Questionnés sur le sens de la multiplication, les enseignants participant aux séances de formation ont fait ressortir uniquement deux sens au concept, soit « addition répétée » et

« groupes de … », pouvant mener à la conclusion que la compréhension du concept de multiplication de ces enseignants était quelque peu limitée et restreinte à une compréhension simpliste du concept de multiplication. Toutefois, tel que l'explique les auteurs, placés par la suite dans une situation où ils ont eu à partager ensemble leurs idées sur la multiplication, les enseignants en sont venus à élaborer une liste très complexe de significations, de raisonnements et de métaphores pour faire du sens du concept de multiplication. Ainsi, en plus de « addition répétée » et « groupes de … », les enseignants ont fait ressortir d'autres dimensions, telles que « sauts sur la droite », « *multi*-pliage », « aires de terrains », « changement de dimensions », « étirement ou compression de la droite », etc. Cet exemple permet en fait de tracer une belle distinction sur la nature des connaissances des enseignants entre les connaissances factuelles que l'on connaît sur le champ et la *capacité à faire du sens d'un concept en le travaillant*.

Ainsi, cette dimension complémentaire soulevée ici nuance bien le jugement que l'on peut faire des connaissances mathématiques des enseignants, en plus de complexifier ce que connaître les mathématiques peut signifier pour un enseignant. Il est évident qu'un enseignant ne peut tout connaître sur un contenu mathématique à un temps précis. Par exemple, un excellent enseignant ayant enseigné lors des cinq dernières années à des élèves de 13-14 ans pourra sembler limité, lorsqu'interviewé sur le champ, à propos des raisonnements importants à faire ressortir et à travailler avec des élèves plus âgés autour du concept de fonction, voire même limité dans les réponses fournies à des questions mathématiques précises sur le concept. Par contre, si cet enseignant possède et a développé une capacité à faire du sens des mathématiques, une certaine pratique mathématique qu'il peut déployer pour creuser et explorer un sujet mathématique, il pourra, lorsqu'il aura effectivement à enseigner les fonctions à ses élèves, se replonger dans les concepts, les travailler et les comprendre tout aussi profondément et en détail que les contenus qu'il enseigne depuis cinq ans à ses élèves de 13-14 ans. Ainsi, ne pas répondre adéquatement à des questions lancées sur le champ ne doit pas nécessairement être vu comme étant une défaillance mathématique des enseignants en question, car d'autres dimensions semblent pouvoir leur permettre, avec le temps et le bon contexte, à arriver à faire du sens des concepts en question. Et ceci apparaît être une dimension de la connaissance fort importante, comme le souligne Sullivan (2003), car, tel que mentionné, l'acte d'enseigner lui-même regorge de situations inattendues et imprévues avec lesquelles l'enseignant doit travailler et donner du sens ; par exemple les raisonnements mathématiques proposés et non-planifiés des élèves. La capacité à faire des mathématiques et leur donner du sens devient ici un atout central pour l'enseignant.

Ainsi, comme le disait Polya (1965), en plus du travail des connaissances factuelles en mathématiques, qui sont aussi, on se doit de l'admettre, une dimension importante, le développement d'aptitudes à faire des mathématiques, de capacités à pouvoir connaître et faire du sens des mathématiques (nouvelles, oubliées, peu travaillées, etc.) semble être tout aussi important, sinon plus. En ce sens, et ceci était souligné déjà dans les travaux de Polya, des contextes d'exploration des contenus mathématiques semblent fondamentaux au niveau de la formation des enseignants, et ce, non seulement pour comprendre les concepts explorés (connaissances factuelles), mais aussi et surtout pour faire développer chez les enseignants des aptitudes d'exploration mathématique ; celles-ci pouvant être réinvesties sur d'autres sujet (le cas de Gina sur l'exploration de l'aire des figures en est un bon exemple). Il y a donc ici un besoin de repenser la préparation mathématique des enseignants, les amenant à développer ces aptitudes d'exploration[3].

Remarques finales

De façon implicite, les études sur les connaissances des enseignants ont majoritairement porté sur les connaissances factuelles et les compréhensions sur-le-champ des enseignants. Mais, on s'en rend bien compte, les connaissances factuelles n'expliquent pas tout ; il y a plus. Malgré que l'aspect « capacité » est beaucoup plus difficile à « mesurer » proprement dit, soit par une entrevue ou un test-questionnaire, car on parle ici d'un développement à long terme ou du moins se déroulant sur une certaine période de temps, une dimension significative de la connaissance mathématique des enseignants semble avoir été oubliée. Celle-ci se doit d'être étudiée davantage et mieux comprise. Ainsi, ceci ouvre un tout nouveau champ d'études, alors que cette capacité à connaître est, d'une part, très peu étudiée chez les enseignants de mathématiques et, d'autre part, peu d'attention à été placée à travailler son développement à travers des initiatives de formation. Tel que le souligne Davis et Simmt (2006), il y a un intérêt à étudier non pas les connaissances que les enseignants ont, mais plutôt les connaissances que les enseignants mettent en route lorsque placés dans des situations mathématiques spécifiques, et à s'intéresser, tout simplement, aux apprentissages mathématiques construits dans ces contextes pour arriver à identifier et mieux comprendre les connaissances que les enseignants mettent en action sur des nouveaux problèmes ou des situations mathématiques connues.

Ceci ouvre en fait sur un nouveau paradigme de recherche pour les connaissances mathématiques des enseignants, où les méthodes deviennent implicitement *éducatives*, puisqu'elles ne s'intéressent plus uniquement à identifier ce qui *est*, mais contribuent aussi à la production de nouvelles connaissances par les enseignants (Davis et Simmt, 2006), alors que l'attention est portée sur la façon et la capacité d'apprendre des enseignants, et non sur ce qu'ils savent explicitement et arrivent à répondre sur la champ. Comme l'explique Mason et Spence (1999), l'étude de cette nouvelle dimension nécessitera toutefois de nouveaux moyens d'étude et d'analyse, puisque la notion de connaissance prend une signification différente, passant d'une perception de la connaissance statique à une perception de la connaissance dynamique, située et évolutive ; mais cette perspective offrira en retour une compréhension autrement plus complète des connaissances des enseignants.

[3] Un démarrage de réflexions à ce sujet est présenté dans Proulx et Bednarz, à l'intérieur de ce groupe de travail.

References

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In E. Simmt & B. Davis (Eds.), *Proceedings of the 2002 meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, Canada: CMESG.

Battista, M. T. (1999). The mathematical miseducation of America's youth. *Phi Delta Kappan*, *80*(6), 424-433.

Bauersfeld, H. (1994). Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire. *Revue des Sciences de l'Éducation*, *20*(1), 175-198.

Bednarz, N., Gattuso, L., & Mary, C. (1995). Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin AMQ*, *35*(1), 17-30.

Bednarz, N., Golding, G. A., & Lefevre, J. (1997). In Memoriam – Claude Janvier. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), v-vii.

Boissinotte, C. Des fractions de papier. *Envol: Revue du groupe des responsables en mathématiques du Québec*, *102*, 45-50.

Bryan, T. J. (1999). The conceptual knowledge of preservice secondary mathematics teachers: How well do they know the subject matter they will teach? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal. Volume 1: Content Knowledge*. http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/journal.shtml

Cooney, T. J. (1999). Conceptualizing teachers' ways of knowing. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1-3), 163-187.

Davis, B. (2008, juillet). *"Concept study": open vs. closed understandings of mathematical ideas*. Texte présenté à ICME-11, Topic Study Group 27. Monterey, Mexico.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics*, *61(3)*, 293-319.

Denning, P. J. (1997). Quantitative Practices. In L. A. Steen (Ed.), *Why Numbers Count: Quantitative Literacy for Tomorrow's America* (pp. 106-117). New York: College Board.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 94-116.

Fennema, E., & Franke, M. L. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York: Macmillan.

Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics*. London, UK: John Murray.

Hitt-Espinosa, F. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*(1), 7-26.

Janvier, C. (1992). Le volume mais où sont les formules? Un vidéo sur l'enseignement des mathématiques au secondaire [VHS/couleur/33mins.]. Mont-Royal, Qc : Modulo.

Janvier, C. (1997). Grandeur et mesure: la place des formules à partir de l'exemple du volume. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, *37*(3), 28-41.

Kieren, T. E. (sans date). Pizza Fractions Kit – Explorational activities for home and school.
Lucus, C. A. (2006). Is subject matter knowledge affected by experience? The case of composition of functions. In J. Novotná et al. (Eds.), *Proc. 30th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 97-104). Prague: PME.
Margolinas, C., Coulange, L., & Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom? *Educational Studies in Mathematics*, *59*(1-3), 205-234.
Mason, J., & Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1-3), 135-161.
Maturana, H.R. (1987). Everything is said by an observer. In W.I. Thompson (Ed.), *Gaia: A way of knowing* (pp. 65-82). New York: Lindisfarne Press.
Polya, G. (1965). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving* (vol. II). New York: John Wiley & Sons.
Proulx, J. (2007a). *(Enlarging) secondary-level mathematics teachers' mathematical knowledge: An investigation of professional development*. Thèse de doctorat, Université de l'Alberta, Canada.
Proulx, J. (2007b). Addressing the issue of the mathematical knowledge of secondary teachers. *Proceedings of the 31st conference of the international group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89-96). Seoul: PME.
Proulx, J. (2007c). La division de fractions vue sous l'angle des multiplications : Quelques réflexions sur le sens derrière ces procédures. *Envol : Revue du groupe des responsables en mathématiques du Québec, 138*, 9-11.
Schmidt, S., & Bednarz, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes : Difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 127-155.
Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9-15.
Sullivan, P. (2003). Editorial: Incorporating knowledge of, and beliefs about, mathematics into teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(4), 293-296.
Van Dooren, W., Verschaffel, L., & Onghena, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(1), 27-52.