INTRODUCTION DES OPERATIONS SUR LES NOMBRES RELATIFS EN CLASSE DE CINQUIÈME : UNE NOUVELLE SIGNIFICATION POUR LES SIGNES « + » ET « – »

Alexandra GOISLARD*

Résumé – Si les nombres négatifs ont été utilisés depuis longtemps en Chine ou en Inde, leur introduction en Europe a été relativement compliquée. Même si on en trouve des traces dès la fin du XV^e^ siècle, il a fallu attendre la moitié du XIX^e^ pour que leur existence soit acceptée par les plus grands scientifiques en tant que nombres et non en tant que quantités négatives. Comment peut-on alors imaginer que des collégiens puissent maîtriser aisément les opérations sur les nombres relatifs ? Après avoir analysé les différentes façons d'introduire les nombres relatifs, l'addition et la soustraction, dans les manuels de la classe de 5ème (élèves de 12-13 ans), nous avons expérimenté dans trois classes quelques-unes de ces activités pour introduire les opérations avec les nombres relatifs. J'ai particulièrement travaillé sur la distinction entre le signe du nombre et celui de l'opération.

Mots-clefs : Nombres relatifs, opérations, signe moins, signe du nombre, signe opératoire

Abstract – Though negative numbers have been used in China and India for a long time, it has been much more difficult to introduce them in Europe. The first references to this idea refer to the XVth century, but the existence of such quantities has not been approved before the middle of the XIXth century. Yet they were not accepted as numbers but only negative values. The most notable scientists at that time showed great difficulties to accept and understand negative numbers. Then, it is hard to believe that secondary school students can easily handle them and their operations. In a first part, we have analysed how the relative numbers and addition and subtraction are introduced in the textbooks of grade 7 (students of 12-13 years old). Then, we have chosen some activities we proposed in our classes in order to introduce relative numbers. We have particularly focused on the different meaning of sign "+" or "-".

Keywords: Relative numbers, operations, minus sign, number sign, operation sign

Dans le cadre de mon année de stage, j'avais en responsabilité des classes de cinquième (élèves de 12-13 ans). En étudiant les programmes officiels, j'ai remarqué que l'introduction des nombres relatifs prenait une place importante au cours de cette année scolaire et ces nombres seraient utilisés ensuite sans cesse dans la suite de la scolarité. Il m'a donc paru important de me questionner sur leur introduction et sur l'apprentissage des opérations avec ces nombres. En effet, cette introduction me paraît délicate car les élèves sont pour la première fois confrontés à des nombres qui ne représentent ni une quantité, ni une grandeur qu'ils ont l'habitude de manipuler. S'ils ont déjà effectué de nombreux calculs sur les grandeurs positives comme des prix, des masses ou des longueurs, ils ne l'ont pas encore fait avec des valeurs négatives.

Après discussion avec mes collègues expérimentés et des séances d'observations organisées dans leurs différentes classes de collège, j'ai pu déceler un certain nombre d'erreurs dues à une confusion entre les signes opératoires et les signes des nombres. Certains élèves ont une représentation erronée du symbole « − » dans des calculs du type 7 + (- 11). Ce signe représente pour eux une soustraction. Même si, dans ce cas, le résultat est juste, qu'en est-il pour le type de calcul 7 – (- 11) ? Lors d'une séance en troisième, nous avions proposé l'énoncé suivant : « Calculer la valeur de A = 7 x + 3 pour x = 2, puis pour x = - 5. ». Un élève a réussi le travail pour le nombre positif, mais il a répondu pour le nombre négatif : « Pour x = - 5 ; A = 7 – 5 + 3 = 5 ». Cette erreur semble provenir d'une confusion entre le nombre négatif et le signe de la soustraction.

* Collège la Plaine de l'Ain, Leyment – France – alexandragoislard@gmail.com
(Mémoire réalisé en collaboration avec Fabien Tulars)

© GOISLARD A. (2012) Introduction des opérations sur les nombres relatifs en classe de cinquième : une nouvelle signification pour les signes « + » et « - ». In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1569–1582). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Une autre difficulté concerne l'utilisation de la calculatrice avec des opérations utilisant des nombres relatifs. Les élèves ont parfois besoin de l'utiliser pour valider ou non leurs résultats. Mais ils le font sans faire la différence entre les signes opératoires et les signes du nombre alors que la plupart des modèles des élèves de la classe ont des touches distinctes suivant la signification du symbole.

A partir de ces observations, je me suis interrogée sur la manière d'introduire, l'addition et la soustraction des nombres relatifs en classe de cinquième pour éviter la confusion entre les différentes significations des signes « + » et « − ». Est-il alors intéressant de donner un sens aux nombres relatifs ? Faut-il donner une signification à leurs opérations ? Comment introduire ces nouvelles notions pour éviter les confusions entre les différentes significations des symboles ?

Pour m'aider à comprendre les difficultés remarquées, j'ai étudié dans un premier temps l'histoire des nombres relatifs puis l'évolution de l'introduction de ces nombres en France depuis la deuxième moitié du XIX^e^ siècle. Ensuite, j'ai analysé différentes activités introduisant l'addition et la soustraction de nombres relatifs dans les manuels scolaires. Enfin, j'ai construit et testé dans plusieurs classes une série d'exercices s'inspirant d'activités analysées dans les manuels. Ce test m'a permis d'observer la capacité des élèves à s'adapter à des contextes différents et à réinvestir les notions travaillées dans le chapitre.

I. LES NOMBRES RELATIFS DANS L'HISTOIRE

Même si les nombres négatifs sont utilisés depuis longtemps en Chine ou en Inde, leur introduction en Europe a été relativement compliquée et controversée (Gaud et Guichard 1991). Les Chinois manipulaient les nombres relatifs depuis le premier siècle de notre ère, pour faire leurs calculs, résoudre des équations et des systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Ils différenciaient les nombres positifs et négatifs à l'aide de représentation concrète, des bâtons de couleurs. L'addition se faisait alors par regroupement de ces différents bâtons. En Inde, les nombres relatifs servaient aussi à résoudre des équations. Depuis le VII^e^ siècle, ces nombres étaient maniés aisément à l'aide des notions de bien et de dette.

En Europe, à la fin du XV^e^ siècle, l'un des premiers à isoler une valeur négative est le français Nicolas Chuquet. Ce type de valeurs se retrouve également dans les travaux de Jérôme Cardan sur les équations du troisième degré. Cependant, les solutions négatives trouvées sont aussitôt écartées. Elles ne sont pas considérées, à cette époque, comme des nombres. De même, dans d'autres disciplines, cette réticence se fait ressentir. Au début du XVIII^e^ siècle, Daniel Gabriel Fahrenheit conçoit un thermomètre pourvu d'une graduation évitant les températures négatives. Il faudra attendre un siècle et demi pour que les températures négatives soient alors acceptées. Au XVIII^e^ siècle, D'Alembert retient une définition des quantités négatives comme étant le contraire des positives, ce qui signifie qu'en géométrie « les négatives se prennent toujours du côté opposé aux positives. ». L'obstacle du zéro rend aussi difficile l'introduction des quantités négatives (Glière 2007). Progressivement, les négatifs sont soumis à des règles de calcul en prolongeant celles existantes sur les nombres positifs. Mais la multiplication de deux nombres négatifs a longtemps posé problème et ce n'est qu'en 1867 que Hankel donne des arguments qui permettent de trancher la question.

Les signes « + » et « − » restent les indications de l'addition et de la soustraction, le nombre négatif est représenté par d'autres symboles, comme par exemple $\bar{a}$ au lieu de –a. Ce n'est que plus tard qu'une même quantité pourra être considérée de deux manières opposées : elle pourra soit augmenter une autre quantité (c'est alors un bien), soit la diminuer (c'est alors une dette). Les signes vont alors permettre de marquer cette différence. Le signe « − »

représentera les dettes, le fait de retrancher. Ces quantités négatives ont depuis une existence aussi réelle que les positives, on peut donc les retrouver ensemble dans un même calcul. Ces quantités deviennent des nombres.

J'ai pu constater que les scientifiques du XVIII^{e} siècle ont eu de grandes difficultés à comprendre, puis utiliser les nombres relatifs. On peut alors imaginer que les élèves ont aussi des difficultés avec ces notions, même si aujourd'hui, les nombres négatifs sont utilisés très tôt pour représenter par exemple des températures ou différentes altitudes en comparaison avec le niveau de la mer. Ces représentations désignent alors les nombres relatifs comme étant des positions. Même s'il est facile d'ordonner des positions, peut-on utiliser ce sens pour enseigner les opérations sur les nombres relatifs ? Est-il nécessaire de donner une signification à ces opérations ? Je me suis alors intéressée aux manières d'introduire les nombres relatifs et leurs opérations dans les programmes de mathématiques depuis le XIX^{e} siècle jusqu'à aujourd'hui.

II. LES RELATIFS DANS L'ENSEIGNEMENT

Au cours du XIX^{e}, les quantités négatives ont été introduites dans l'enseignement comme étant solution d'équation du premier degré. Quelques années plus tard, en 1890, ces quantités négatives sont introduites d'une manière différente, elles apparaissent comme étant des nombres négatifs. Ils servaient alors à quantifier des grandeurs susceptibles d'être portées dans un sens ou dans le sens opposé.

Puis, dans les années 1970, les mathématiques modernes se servent de bilans comptables pour définir des classes d'équivalence. Chaque bilan est alors un nombre décimal relatif. Les règles d'addition et de soustraction sont alors introduites facilement par la suite. La multiplication reste difficile à expliquer à partir de cette situation concrète. Depuis les années 1978 (contre réforme des mathématiques modernes), les mathématiques doivent être abordées de manière plus concrète. On utilise alors les températures, le numéro des étages dans un ascenseur ou d'autres exemples pour introduire les nombres relatifs. L'addition est étudiée en utilisant des situations de gain-perte, l'altitude,… La calculatrice commence à être introduite dans les classes.

Dans les années 1980, l'introduction des nombres relatifs et leurs opérations se passe en deux temps. Tout d'abord, les nombres relatifs et l'addition sont travaillés en classe de sixième à l'aide de la droite graduée ; puis en cinquième, la soustraction est définie, on dit alors que la différence de $b - a$ est le nombre qu'il faut ajouter à a pour obtenir b.

Dans les années 1990, ces idées sont reprises mais la définition de la soustraction est enlevée des programmes pour laisser place à une règle de calcul : « Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute l'opposé de ce nombre ». Ceci est justifié par un travail avec des additions de plusieurs nombres relatifs et l'utilisation de la propriété : « la somme de nombres opposés est nulle ».

Aujourd'hui et depuis la rentrée scolaire de 2005, les élèves abordent l'introduction des nombres relatifs, de l'addition et de la soustraction avec ces nombres, en classe de cinquième. Avec ce nouveau programme, les élèves ont peu de temps pour faire fonctionner ces nouvelles notions même si en dehors de la discipline, ils ont certainement déjà pu observer des mesures négatives. De plus, pour la première fois dans leur cursus scolaire, les signes « + » et « − » ne sont plus à chaque fois associés à des opérations. Il va donc être nécessaire de clarifier les significations de ces symboles et distinguer le signe du nombre et le signe opératoire, pour ne pas induire des erreurs qui vont se reproduire tout au long du collège et qu'on va retrouver notamment en calcul littéral.

III. ETUDE DES MANUELS SCOLAIRES DE 5EME

Dans un premier temps, je me suis intéressée aux différentes manières d'introduire les nombres relatifs dans huit manuels français de cinquième. Cette étape d'analyse m'a paru importante pour comprendre les contextes utilisés lors des activités introduisant les opérations avec ces nombres.

La plupart des manuels choisissent de se baser sur les connaissances communes des élèves pour présenter l'existence des nombres relatifs. Ils utilisent, par exemple, le thermomètre pour lire des températures ou travailler avec des variations entre différents moments donnés. D'autres utilisent des schémas avec différentes altitudes en comparaison avec le niveau de la mer. Enfin, en référence au cours d'histoire, on trouve aussi des frises chronologiques.

D'autres présentent des variations, par exemple de poids, et identifient les nombres relatifs à des augmentations ou des diminutions. On trouve également quelques introductions à l'aide de graphiques cartésiens déjà travaillés en géographie. Dans ce cas, cela permet de coder des déplacements sur un axe (par un nombre positif si l'on se déplace dans le sens de l'axe et par un nombre négatif dans le cas contraire).

Enfin, dans quelques activités, les nombres relatifs sont présentés comme étant solution de soustractions « impossibles » du type 5 – 7. Pour trouver les résultats de ces opérations, les manuels proposent parfois aux élèves d'utiliser leur calculatrice.

Toutes ces représentations sont exploitables par la suite dans l'introduction des opérations avec les nombres relatifs. Il nous semble important que les élèves aient des représentations différentes de ces nouveaux nombres.

1. L'addition des relatifs

Pour l'introduction de l'addition, nous avons repéré trois types d'activités.

L'addition par gains/pertes

Tout d'abord, toujours dans la tendance des années 80, on trouve des situations concrètes avec des bilans de variation gains/pertes, recettes/dépenses, montées/descentes ou d'autres suivant les cas. Elles sont généralement présentées sous forme de tableau récapitulant différents résultats et une colonne bilan, où intervient alors la modélisation de la situation par une addition de deux nombres relatifs.

L'addition à la manière des Chinois

Le deuxième type d'activités repéré dans les manuels utilise des symboles qui seront ensuite modélisés par des nombres relatifs comme dans cet exemple.

3. « Histoires de trolls »

Il y a très longtemps, une étrange malédiction vint s'abattre sur une forêt où vivaient des trolls bleus et des trolls rouges : lorsqu'un troll bleu rencontrait un troll rouge les deux créatures disparaissaient par enchantement. Un archéologue a retrouvé deux vieux parchemins sur lesquels différentes rencontres sont représentées par des marques et leurs résultats :

1) Le second parchemin a été en partie effacé. Recopie les informations en utilisant deux couleurs, et trouve le résultat de chaque rencontre.

2) Que se passe-t-il lorsque deux groupes de trolls de la même couleur se rencontrent ? Et lorsque les deux groupes sont aussi nombreux, mais de couleur différente ?

3) Trouve un moyen pour décrire une rencontre entre 237 trolls bleus et 354 trolls rouges. Quel est le résultat de cette rencontre ?

Figure 1 *– Activité à la manière des Chinois*

L'objectif est de donner une image mentale de l'addition sur laquelle les élèves pourront s'appuyer lorsqu'ils seront en difficulté. On présente des parchemins où sont représentés des bâtons bleus et rouges représentant des « trolls ». On retrouve ici l'idée des Chinois qui utilisaient des baguettes de couleurs pour représenter les nombres relatifs. Un modèle, sur le premier parchemin, permet de présenter la manière d'additionner les bâtons de différentes couleurs suivant la règle suivante, deux bâtons de couleurs différentes s'annulent. Aucun nombre relatif n'est utilisé ici. Les élèves doivent alors utiliser cet exemple pour retrouver les résultats perdus du deuxième parchemin et extraire implicitement les propriétés d'addition. Puis, on leur demande de décrire les manières de trouver leurs résultats en omettant toujours l'utilisation de nombres. Le cas particulier de la somme de deux nombres opposés est travaillé ici. Toutefois, il peut être long et fastidieux d'utiliser la technique décrite ici. Il est alors nécessaire d'introduire les nombres relatifs, ce qui est précisément l'objectif de la fin de l'activité. La représentation utilisée a ses limites, un autre code doit être trouvé pour travailler avec des valeurs plus grandes. Il risque cependant d'être difficile aux élèves de penser aux nombres relatifs car ici les signes « $-$ » et « $+$ » n'ont pas une signification claire et à aucun moment la consigne n'indique ce qu'il faut utiliser.

Avec la droite graduée

Le dernier type d'activités utilise la droite graduée. L'addition de deux nombres relatifs est alors introduite comme étant deux déplacements successifs dans le même sens. L'exercice est à chaque fois traité dans un cadre particulier, comme par exemple, le déplacement d'une tortue le long d'un axe ou la montée et descente d'une grenouille sur une échelle. Cette façon d'interpréter l'addition fournit à certains élèves un support matériel à leur compréhension. Je n'ai pas exploité ce type d'activités qui se présente rarement dans les manuels scolaires.

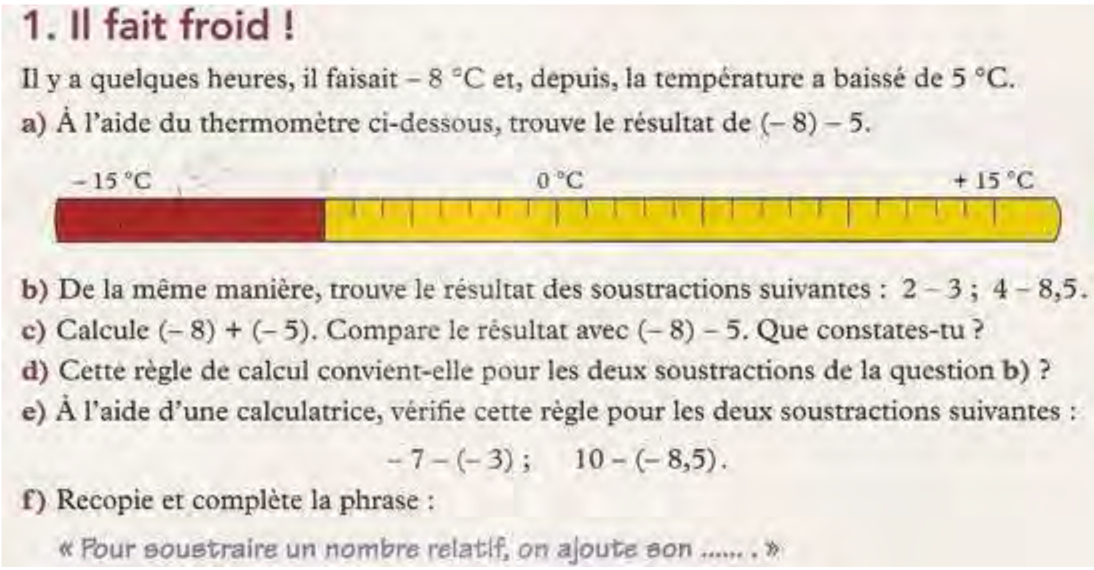
Toutes ces activités ont le même objectif, introduire l'addition de nombres relatifs. Dans les deux premières, les nombres relatifs à additionner n'ont pas été présentés comme des nombres mais comme des entités ou des variations pour permettre aux élèves d'avoir une meilleure interprétation de l'addition. On peut penser que ceux-ci garderont en tête ces conceptions, même s'ils doivent s'en détacher par la suite pour pouvoir réaliser des opérations simples. Ces deux activités pourraient alors se compléter par la dernière manière d'introduire l'addition par déplacement sur une droite graduée. Dans chaque cas, les signes des nombres « + » et « − » sont différenciés par des couleurs différentes ou des termes différents.

2. L'introduction de la soustraction

Concernant la soustraction dans les manuels, les propositions d'activités sont plus variées.

Droite graduée et utilisation de la calculatrice

Certains manuels scolaires utilisent des variations de température pour introduire la soustraction comme un déplacement vers la gauche sur une droite graduée. Les élèves doivent trouver une règle qui permet de calculer la différence entre deux nombres relatifs avec cette représentation, puis réaliser des vérifications à l'aide de leur calculatrice.


1. Il fait froid !

Il y a quelques heures, il faisait – 8 °C et, depuis, la température a baissé de 5 °C.

a) À l'aide du thermomètre ci-dessous, trouve le résultat de (– 8) – 5.

b) De la même manière, trouve le résultat des soustractions suivantes : 2 – 3 ; 4 – 8,5.

c) Calcule (– 8) + (– 5). Compare le résultat avec (– 8) – 5. Que constates-tu ?

d) Cette règle de calcul convient-elle pour les deux soustractions de la question **b)** ?

e) À l'aide d'une calculatrice, vérifie cette règle pour les deux soustractions suivantes :

– 7 – (– 3) ; 10 – (– 8,5).

f) Recopie et complète la phrase :

« Pour soustraire un nombre relatif, on ajoute son .... »

Figure 2 *– Introduction de la soustraction avec la droite graduée et la calculatrice*

Dès le début, les élèves doivent faire le lien entre une variation de température explicitée par une phrase et une deuxième sous forme de soustraction. Dans ces questions, des confusions peuvent être liées au manque de distinction entre le signe d'un nombre et d'une opération. Ensuite, l'activité propose d'utiliser la règle trouvée précédemment avec différents calculs et de valider ou non leurs résultats avec la calculatrice. Son utilisation peut provoquer quelques problèmes puisque certaines calculatrices ont deux touches différentes pour le signe moins, une de ce type « − » pour la soustraction et l'autre avec le même signe mais plus petit ou entre parenthèses. Les élèves doivent donc faire la différence entre les deux significations du signe « − » avant de composer les calculs sur leur calculatrice. Une fois cette expérimentation terminée, les élèves doivent construire une règle pour calculer les soustractions de nombres relatifs. Tout au long de cette activité, peu d'attention est portée sur la différence entre les signes d'opération et de nombre. De plus, dans l'ensemble du manuel, le signe « + » des nombres positifs apparaît très peu. Les deux significations du signe « − »ne sont pas mises en avant, seulement dans les opérations avec une soustraction suivie d'un nombre négatif où le nombre est mis entre parenthèses.

Les additions à trous

D'autres manuels ont choisi d'utiliser des additions à trous pour introduire la soustraction de deux nombres relatifs. Ils ont des présentations différentes, certains utilisent des pyramides, d'autres des calculs en ligne. Dans ce type d'activités, il y a deux temps : un premier pour établir une définition de la différence de deux nombres relatifs à l'aide d'additions à trous ; puis, dans un second temps est proposée une méthode pour calculer une différence, en utilisant la somme de deux nombres opposés.

« Soustraire un nombre relatif » c'est « ajouter son opposé »

Quelques livres commencent par proposer une soustraction avec des nombres relatifs dans l'objectif de montrer que soustraire un nombre relatif équivaut à ajouter son opposé. Ce type d'activité ne cherche pas à introduire la soustraction en essayant de lui donner une signification mais juste à illustrer une règle de calcul.

Dans un premier temps, on fait calculer aux élèves une somme E donnée. Puis, on ajoute à E un nombre opposé à un des termes de celle-ci. On répète ainsi l'opération pour chaque terme de la somme en utilisant le résultat trouvé pour E précédemment. Les différents résultats sont présentés dans un tableau pour pouvoir faire des comparaisons par la suite. On introduit alors la soustraction en « supprimant » un des termes de la somme E. Il reste alors une addition de plusieurs nombres relatifs, ces résultats sont aussi présentés sous forme de tableau. Le but est alors de comparer les résultats de ces calculs pour s'apercevoir qu'ils sont identiques et que donc pour soustraire un nombre relatif, il faut ajouter son opposé.

Cette activité introduit une méthode de calcul pour la soustraction qui ne met pas en évidence les différentes significations du signe « − », celui du nombre, de la soustraction mais aussi du nombre opposé.

Donner la règle

D'autres livres, n'ayant pas trouvé d'introduction de la soustraction des relatifs « satisfaisante » (au dire des guides d'activités), ont préféré donner directement la règle « Soustraire un nombre relatif, revient à ajouter son opposé » accompagnée de schémas et d'exemples, puis de calculs d'applications. D'autres encore se basent sur des séries de calculs vraies ou fausses pour lesquels les élèves doivent dégager eux-mêmes une règle permettant de calculer une soustraction de relatifs.

Cette étude de manuels nous a montré la diversité des approches sur l'addition et soustraction des relatifs : certaines étant basées sur des activités qui peuvent leur donner un sens, d'autres illustrant les règles, d'autres enfin confiant à la calculatrice la responsabilité de donner cette règle.

IV. EXPERIMENTATION EN CLASSE DE CINQUIEME

A la suite de cette analyse, j'ai élaboré deux chapitres qui ont été expérimentés avec trois classes de $5^{ème}$. Le premier s'intitule « Les nombres relatifs » composé de trois parties, l'introduction des nombres relatifs, le repérage dans le plan et la comparaison des nombres relatifs. J'ai aussi choisi d'introduire les nombres relatifs à partir d'un exemple concret, la coupe verticale d'une région des grands lacs d'Amérique du Nord. Ce travail m'a permis de définir ces nombres et de fixer le vocabulaire associé. Puis, j'ai travaillé le chapitre « Opérations avec les nombres relatifs » (huit séances) dans lequel ont été introduites l'addition et la soustraction de nombres relatifs. La distance entre deux points sur une droite graduée a été introduite dans ce chapitre ainsi que l'utilisation des écritures simplifiées. Voici les principales activités que j'ai proposées dans mes classes.

1. Addition par gains/pertes

Dans cette activité (voir Annexe 1) qui nous a servi de référence, l'addition de nombres relatifs est introduite à l'aide d'un contexte connu et facilement exploitable par les élèves : un jeu vidéo où l'on étudie les gains et les pertes de points à la fin d'une journée. A la fin de cette activité un organigramme a été réalisé par les élèves pour clarifier les différentes méthodes permettant d'additionner deux nombres relatifs.

Dans la première partie, les résultats sont trouvés aisément par les élèves puisque le contexte les aide à imaginer la situation. Ils ont utilisé pour beaucoup d'entre eux des symboles pour représenter les différents cas. Lors de l'expérimentation, certains ont eu des difficultés à trouver le bilan de la journée où le joueur perdait dès la première partie ; cela montre déjà un problème d'interprétation des nombres négatifs même si pour le moment aucun symbole « - » n'est utilisé. Après avoir fait ces bilans, les élèves doivent modéliser ces résultats à l'aide de nombres relatifs et pour cela, traduire « gagne » et « perd » à l'aide des signes « + » et « − ». Le bilan de la journée est traduit par une addition. Il faut insister sur le passage du langage courant (« et » ou « puis ») au langage mathématique (« + » ou « ajouter »). Dans le cas où les deux parties de la journée sont interprétées par des nombres de même signe, les élèves n'ont eu aucune difficulté. Par contre, pour des résultats de signe différent, pour insister sur la variation, certains élèves ont ressenti le besoin de soustraire les deux nombres. On note ici une difficulté à comprendre la différence entre les signes opératoires et les signes des nombres.

Ensuite, les élèves doivent généraliser la modélisation pour les autres jours. Il faut faire une analogie entre les situations de gain/perte rencontrées dans le jeu vidéo et ces additions. Les élèves peuvent alors dégager des techniques de calcul utilisées pour ajouter deux nombres relatifs. Même si certains ont fait très rapidement le lien entre les deux parties, d'autres ont eu des difficultés à additionner des nombres de signes différents. Ils ont systématiquement ajouté les distances à zéro des deux nombres relatifs. Pour le signe, ils ont eu deux stratégies différentes : soit prendre le signe du premier nombre, soit celui du nombre qui avait la plus grande distance à zéro.

Cette activité a permis d'introduire des techniques de calcul mais également d'avoir une situation de référence pour les élèves. A la fin de cette activité, les élèves ont ainsi rencontré, pour la première fois, deux significations du signe « + », le signe de l'opération associée au terme « bilan » et le signe du nombre associé au terme « gagne ».

2. Soustraction à l'aide de la correction d'une copie d'élève

J'ai introduit la soustraction avec une activité s'appuyant sur une copie d'élève fictif. Comme la copie est corrigée, les élèves doivent, à partir de leurs observations, trouver la règle générale, « Soustraire un nombre, reviens à ajouter son opposé ».

Pour réaliser les soustractions, les élèves ont majoritairement basé leurs observations sur les symboles « + » et « − ». Plusieurs stratégies ont été utilisées, soit ils ont construit une règle des signes avec les différents cas, soit ils ont modifié tous les signes pour obtenir une addition et réinvestir leurs connaissances, soit ils ont transformé les nombres négatifs en leurs opposés et ont conservé les soustractions, puis ont utilisé les propriétés de l'addition. On observe donc une confusion entre les signes opératoires et les signes des nombres. Les élèves ont souvent évité l'utilisation de la soustraction en revenant à l'addition. Dans ces conditions, il a été difficile de mettre en place la propriété attendue. Il a donc fallu utiliser des codes de couleurs différents pour les signes des opérations et les signes des nombres relatifs.

On peut noter que le temps d'appropriation du contexte a été relativement important et les élèves ont eu des doutes quant à la transformation systématique de la soustraction en addition à cause du manque de justification dans cette activité. Les exercices d'applications réalisés à la suite de cette activité ont généré un certain nombre d'erreurs et d'incompréhensions dues au manque de signification donnée aux signes « + » et « − » par les élèves, notamment pour mener des calculs avec des additions et des soustractions.

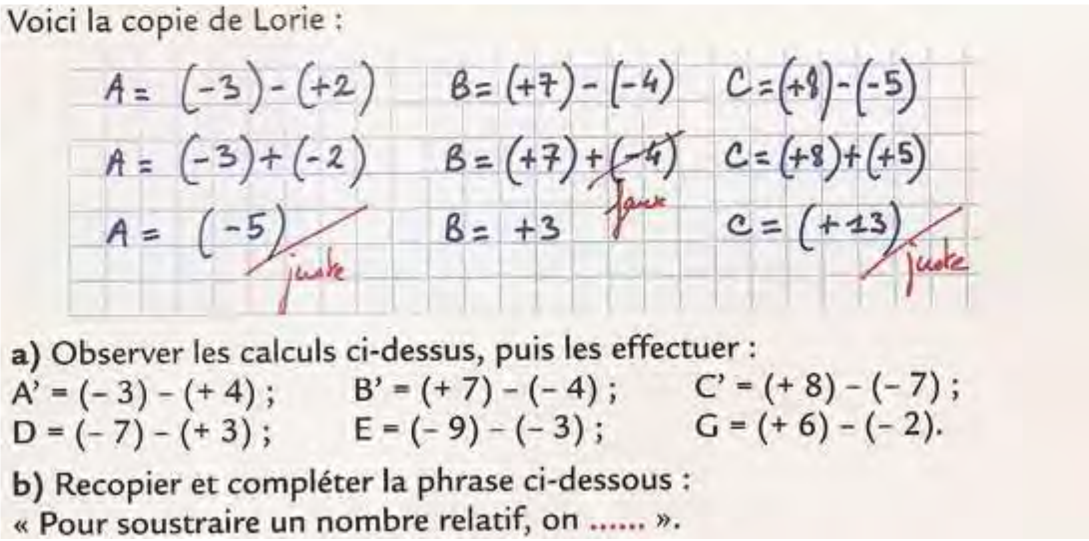


Figure 3 *– Introduction de la soustraction à l'aide d'une copie d'élève*

3. Test utilisant différentes activités analysées

Pour terminer, j'ai construit un test (voir Annexe 2) inspiré des activités analysées dans les différents manuels. Il est composé de cinq exercices : un questionnaire à choix multiple et quatre exercices d'application. Mon objectif était, d'une part, d'observer la capacité de mes élèves à se détacher des représentations travaillées dans les chapitres et, d'autre part, de vérifier si la différence entre les signes des nombres et les signes des opérations était comprise.

Pour le questionnaire à choix multiple, j'ai choisi de présenter différents calculs pour réinvestir les propriétés d'addition et de soustraction travaillées dans ce chapitre. Chaque réponse proposée met en avant la différence entre les signes du nombre et les signes opératoires et la confusion entre les différentes propriétés. L'exercice suivant présente deux pyramides à compléter à l'aide d'additions et de soustractions. Le choix du remplissage des cases est fait pour inciter les élèves à utiliser des soustractions. Puis, je propose une activité dans laquelle les élèves doivent corriger les calculs proposés par un élève.

Dans les exercices 4 et 5, les élèves doivent utiliser les opérations dans différents problèmes de niveaux de difficultés différents. Les questions utilisent des représentations de droite graduée, sous forme de thermomètre, d'échelle ou encore de frise chronologique.

Grâce à ce test, j'ai pu repérer les différents types d'erreurs commis par les élèves. Pour pouvoir les interpréter, il a fallu les classifier, regarder si les mêmes erreurs se reproduisaient sur l'ensemble d'une copie ou seulement dans un même type de tâche, observer les erreurs produites à cause de la présentation de l'exercice. Certaines sont dues au manque d'assimilation de la technique de l'addition, les élèves pensent encore que pour additionner, il faut ajouter les parties numériques. Certains élèves font des erreurs pour trouver le signe d'une somme, ils ont mis en place une règle de calcul erronée, utilisée pour la multiplication. Dans les soustractions, les élèves ont du mal à faire la distinction entre les signes d'opération et de nombre, ils transforment alors tous les signes « $-$ » en signe « $+$ ». On remarque aussi des difficultés face aux écritures simplifiées.

L'exercice sur les pyramides a généré plus de difficultés, certains élèves ont été complètement déstabilisés par ce type de représentations qu'ils n'avaient pas rencontré auparavant. Il a ainsi fallu leur donner un exemple de pyramide avec uniquement des nombres entiers positifs pour qu'ils comprennent le fonctionnement de la règle. Différentes stratégies ont alors été employées, soit effectuer la soustraction, soit utiliser des soustractions à trous. Il y a toutefois deux limites à cette technique : d'une part, les élèves sont plus concentrés sur la valeur absolue du nombre que sur son signe, ce qui peut amener dans le cas présent des erreurs de signes ; d'autre part, il faut alors plus de temps pour trouver le résultat de l'opération quand les nombres sont un peu plus compliqués (comme dans la deuxième pyramide).

Les deux premiers problèmes ont posé peu de difficultés si on regarde uniquement les résultats. Mais en nous intéressant plus particulièrement aux procédures mises en jeu ici, nous nous sommes aperçus que l'interprétation des problèmes a été source d'erreurs. Pour le troisième problème, les parties numériques des nombres relatifs étant plus grandes, il leur a été donc plus difficile de les représenter. Par contre, dans l'exercice où une frise chronologique leur était proposée, les élèves ont fait moins d'erreurs (certainement parce que nous avions déjà travaillé sur ce support). Certains élèves ont utilisé des opérations à trous pour obtenir le résultat des problèmes.

V. CONCLUSION

L'étude que j'ai faite m'a montré qu'il y a un grand nombre de façons d'introduire les nombres relatifs et les opérations qui leur sont associées. Il apparaît tout à fait essentiel d'introduire les nombres relatifs en s'appuyant sur des exemples plus ou moins concrets, tels que la température ou l'altitude. Mais ensuite, au cours de leur apprentissage, il sera nécessaire de sortir de ces contextes, par exemple, pour donner des solutions à des soustractions auparavant impossibles et ensuite pour faciliter l'apprentissage de la multiplication et la division en classe de quatrième.

L'introduction de l'addition se fait dans la majorité des manuels à l'aide de bilans. Les signes des nombres sont alors associés à des augmentations ou des diminutions et le signe opératoire représente l'accumulation de plusieurs évolutions. Les élèves ont facilement conceptualisé cette situation, cela leur a permis d'acquérir rapidement des automatismes pour réaliser des additions avec plusieurs nombres relatifs. En revanche, il est plus difficile d'introduire la soustraction de deux nombres relatifs de cette façon.

Dans les manuels, j'ai pu constater qu'il n'y avait aucune uniformité au niveau des types d'activités introduisant la soustraction. Celle-ci a pris plus de temps à être assimilée dans nos classes. Certains élèves n'arrivent pas à conceptualiser cette opération à cause justement de la difficulté de contextualisation par rapport à l'addition. La méthode énoncée pour réaliser une soustraction a entraîné des confusions au niveau des signes « $+$ » et « $-$ » qui se sont répercutées parfois sur les calculs d'addition auparavant acquis. Mais donner un sens à la soustraction semble difficile : toutes les situations ne peuvent pas être rassemblées sous un seul exemple ou contexte. Si on utilise des variations de température pour l'illustrer, on peut modéliser cette situation que par des soustractions par un nombre positif. Si on s'appuie sur les distances entre deux points d'une droite graduée, tous les résultats seront positifs.

Après un certain nombre d'exercices de réinvestissement, j'ai remarqué que certains élèves n'avaient toujours pas réussi à faire la différence entre les signes des nombres et les signes opératoires. Pour y remédier, j'ai choisi de différencier les signes des nombres et des opérations avec deux couleurs différentes pour que les élèves fassent la distinction entre les symboles. Après avoir classifié les signes en deux groupes de couleurs, j'ai travaillé avec les signes opératoires, en listant les additions et les soustractions. Le fait de coder la ligne de calcul avec des couleurs leur a permis de mieux visualiser les opérations à réaliser. Nous avons alors pu utiliser les propriétés des opérations, dans un premier temps celles de la soustraction, puis celles de l'addition. Grâce à ce mode de fonctionnement, les élèves en difficulté ont pu comprendre plus facilement les techniques de calculs à utiliser pour réaliser des suites d'addition et de soustraction de nombres relatifs. Il paraît donc nécessaire de présenter les signes « $+$ » et « $-$ » avec différents codages dès leur introduction dans les opérations, quitte à garder cette présentation pendant un certain temps. Le choix fait dans mes chapitres a été de différencier le signe opératoire « $-$ » et le signe du nombre « - » et d'utiliser des couleurs pour visualiser les opérations et les nombres dans une ligne de calcul.

En conclusion, je peux dire qu'il est important de donner un aspect théorique aux nombres relatifs, en s'aidant d'une soustraction impossible par exemple. L'addition est assez simple à conceptualiser pour les élèves et ils peuvent ainsi maîtriser les règles de calculs rapidement. Avant d'introduire la soustraction, il est important de s'assurer que les élèves ont compris et savent réinvestir l'addition des nombres relatifs et la compréhension des différents sens des signes. Il semble nécessaire de bien séparer dans le temps l'apprentissage de ces deux opérations. Il est important que chaque élève ait compris la différence entre les signes des nombres et les signes des opérations et acquis les règles de calculs de l'addition et de la soustraction pour pouvoir aborder sereinement les simplifications d'écriture ainsi que la multiplication et la division de nombres relatifs.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Benard D. (2002) Nombre et calculs au collège : instituer une cohérence. *Repères IREM* 47, 5-16.

Gasser J.-L. (2003) Evolution de la notion de nombre au collège. *Repères IREM* 51, 59-103.

Gaud D., Guichard J.-P. (1991) Les nombres relatifs : histoire et enseignement. *Repères IREM* 2, 93-123.

Glière A. J. (2007) *Histoire et épistémologie des nombres négatifs de d'Alembert à nos jours Le passage des quantités aux nombres.* Thèse de l'EHESS, Paris.

Lamande P. (2004) La conception des nombres en France autour de 1800 : l'œuvre didactique de Sylvestre François Lacroix. *Revue d'histoire des mathématiques* 10(1), 45-106.

Groupe didactique de l'IREM de Bordeaux (2008). Enseigner les nombres relatifs au collège. *Repères IREM* 73, 59-72.

Manuels scolaires

Math 5ème (2006). Collection Nouveau Décimale. Paris : Belin.

Maths 5ème (2006). Paris : Bréal.

Maths 5ème (2006). Collection Babylone. Paris : Bordas.

Math 5ème (1997). Collection Cinq sur Cinq. Paris : Hachette.

Maths 5ème (2006). Collection Diabolo : Paris : Hachette.

Mathématiques 5ème (2006). Collection Phare. Paris : Hachette.

Mathématiques 5ème (2006). Collection Triangle. Paris : Hatier.

Maths 5ème (2001). Paris : Magnard.

ANNEXE 1 : ACTIVITÉ D'INTRODUCTION DE L'ADDITION PAR GAINS/PERTES

Activité d'introduction n°1 :

Julien joue à un jeu vidéo, dont le héros ramasse (ou perd !) des pièces d'or. Il a déjà beaucoup de pièces. Il fait deux parties par jour. Chaque soir, il remplit un tableau récapitulant ses gains et ses pertes :

1) Complète la colonne « Bilan de la journée » du tableau ci-dessous :

	1ère partie	***2ème partie***	**Bilan de la journée :**
1er jour	perd 8	perd 7	perd 15
2e jour	*gagne 10*	*gagne 5*	
3e jour	*gagne 10*	perd 3	
4e jour	perd 11	*gagne 7*	
5e jour	*gagne 10*	perd 15	
6e jour	*gagne 7*	perd 7	
7e jour	*gagne 0*	perd 7	

2) Pour aller plus vite, Julien cherche une écriture mathématique qui permet de remplacer les résultats du 1er jour : « perd 8 » et « perd 7 ».

   a) Quelle notation peut-il utiliser ?

   b) En utilisant la notation de la question a), quelle opération permet de retrouver le bilan du 1er jour et quel est le résultat ?

3) Complète le tableau ci-dessous avec la notation utilisée dans la question 2 :

	Bilan de la journée avec la nouvelle écriture :	***Résultat :***
1er jour		
2e jour		
3e jour		
4e jour		
5e jour		
6e jour		
7e jour		

4) Effectuer les calculs suivants :

(– 7) + (+ 3) = ……………; (– 11) + (– 3) = ……………; (+ 15) + (– 2) = ……………;

(+ 14) + (+ 3) = …………; (– 11) + (– 12) = ……………; (– 9) + (+ 12) =…………….

ANNEXE 2 : TEST FINAL INSPIRÉ DES ACTIVITÉS DE DIFFÉRENTS MANUELS SCOLAIRES

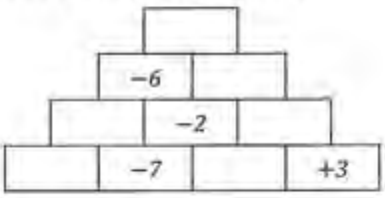
EXERCICE 1

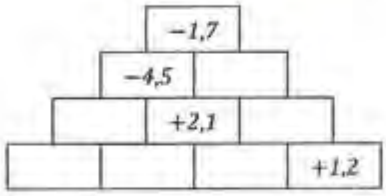
Pour chacune des questions suivantes, entourer la (ou les) bonne(s) réponse(s)

Enoncé	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
$(-5{,}1)+(-4{,}3)$ est égal à :	$(-0{,}8)$	$(-9{,}4)$	$(+0{,}8)$	$(+9{,}4)$
$(-56)-(+33)$ est égal à :	$(+89)$	(-20)	$(+20)$	(-89)
$(+56)+(-64)$ est égal à :	(-8)	(-120)	$(+120)$	$(+8)$
$(-1{,}7)-(-2{,}4)$ est égal à :	$(-0{,}7)$	$(-4{,}1)$	$(-5{,}1)$	$(+0{,}7)$
$(-8)-(-7)$ est égal à :	$-8+7$	$-8-7$	-1	-15
$(+20)-(+4{,}8)$ est égal à :	$(+24{,}8)$	$-4{,}8+20$	$(-24{,}8)$	$15{,}2$
$-14+9-12$ est égal à :	-11	-17	-35	-15
$37-11{,}7-(-3{,}2)$ est égal à :	$(+37)+(-11{,}7)+(+3{,}2)$	$22{,}1$	$28{,}5$	$-28{,}5$
L'égalité $7-x=9$ est vraie pour :	$x=2$	$x=-2$	$x=16$	$x=-16$
L'égalité $-y-8=12$ est vraie pour :	$y=20$	$y=-4$	$y=4$	$y=-20$

EXERCICE 2

Complète les pyramides suivantes sachant que le nombre contenu dans une case est la somme des deux nombres situés en-dessous de lui.





EXERCICE 3

Fred ne maîtrise pas encore les soustractions et certains calculs sont faux. Indique les erreurs commises et corrige-les.

$A=-6-(-15)$ $A=(+6)+(+15)$ $A=(+21)$	$B=6-11$ $B=(+6)+(-11)$ $B=(-17)$
$C=4{,}8-6{,}3$ $C=4{,}8+(-6{,}3)$ $C=-1{,}5$	$D=-5-(-9{,}3)$ $D=-5+(-9{,}3)$ $D=-14{,}3$

EXERCICE 4

Traduis chaque texte suivant par une opération avec des nombres relatifs puis réponds à la question.

a) Hier, à 22 heures, il faisait $+3$°C. La température a baissé de 8°C cette nuit. Quell e température fait-il ce matin ?

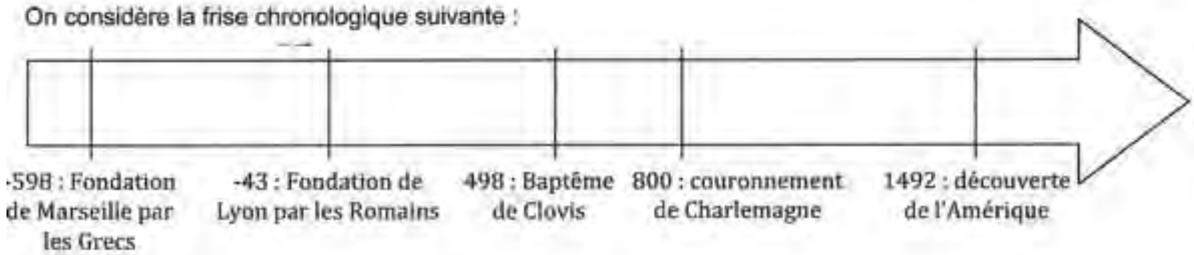
b) Le frère de Dimitri fait un stage de plongée, il descend à -14 mètres. Le lendemain, avec l'accord de son moniteur, il descend de 5 mètres supplémentaires. A quelle profondeur se trouve-t-il alors ?

c) Pythagore est né en Grèce en – 570. On lui attribue un théorème célèbre étudié en quatrième. Quel âge aurait Pythagore aujourd'hui ?

d) Un ascenseur se trouve au $2^{ème}$ étage d'un immeuble de 8 étages. Il monte de 4 étages, puis descend de 3 étages et remonte de 5 étages. A quel étage se trouve-t-il alors ?

EXERCICE 5

On considère la frise chronologique suivante :



Pour chacune des questions suivantes, écrire l'opération nécessaire pour répondre et donner le résultat

a) Combien d'années se sont écoulées entre la fondation de Marseille et celle de Lyon ?

b) Combien d'années se sont écoulées entre la fondation de Lyon et la découverte de l'Amérique ?

c) Combien d'années se sont écoulées entre le baptême de Clovis et le couronnement de Charlemagne ?