UNE DEMARCHE EXPERIMENTALE EN MATHEMATIQUES PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT À UN CERCLE

Moumouni DIALLO*

Résumé – Dans notre contribution, nous avons essayé d'élaborer et de diriger une démarche expérimentale autour de la « puissance d'un point par rapport à un cercle ». Cette séquence d'enseignement/apprentissage a eu lieu pendant l'exécution du cours relatif au produit scalaire en 10ème Sciences (2nd C dans le système français). Elle se résume en trois phases : une stabilisation du milieu, une conjecture et une démonstration. Chacune de ces phases se compose de trois parties : la présentation de l'activité, l'analyse à priori et celle à postériori.

Mots clefs : démarche expérimentale, Mathématiques, essai, puissance d'un point par rapport à un cercle, produit scalaire

Abstract – In our contribution we tried to develop and lead an experimental approach around the "power of a point on a circle." This sequence of teaching / learning took place during the execution of the course on the scalar product in the 10th Science (2nd C). It can be summarized in three phases: a stabilization of the environment, a conjecture and a demonstration. Each phase consists of three parts: the presentation of the activity, the prior analysis and the post analysis.

Key-words: experimental approach, Mathematics, essay, power of a point on a circle, scalar product

I. INTRODUCTION

Dans nos établissements d'enseignement secondaire général (15 à 18 ans), la démarche expérimentale est seulement pratiquée dans l'enseignement/apprentissage de la biologie ou de la physique-chimie. Ceci nous a amené à nous poser la question suivante : Est-il possible de mener une démarche expérimentale en mathématiques dans notre classe ?

A partir des informations via Internet et revus, nous nous proposons d'explorer les possibilités offertes par ce type de situation d'enseignement/apprentissage des mathématiques au lycée en classe de 10ème S (équivalent de l'ancienne 2nde C en France, élève de 15 ans, début du secondaire 2, ayant été sélectionnés dans une orientation scientifique). Notre choix sur l'objet d'enseignement porte sur une notion de géométrie : la puissance d'un point par rapport à un cercle. Les connaissances nécessaires comme prérequis à l'étude de cette notion sont censées être disponibles chez les élèves de la 10ème S. Nous avons élaboré à cet effet une séquence expérimentale dans l'environnement papier/crayon qui a été conduite en classe.

II. CONTEXTE D'EXPERIMENTATION

1. *Situation du lycée d'expérimentation*

Cette expérimentation a eu lieu au lycée *Namankoro Sangaré* de Zégoua. Zégoua est à environ 13 km de Kadiolo (chef lieu de cercle) la ville où résident tous les professeurs de mathématiques du cercle. Elle est située le long de la route nationale n°7 (RN7) à moins de six kilomètres de la frontière ivoiro-malienne. Elle est à environ de 480 km de Bamako (capitale politique et économique du Mali).

L'établissement a environ 303 élèves parmi lesquels 18 sont en 10ème S. Ses élèves sont repartis entre 11 classes. En plus des heures au lycée public de Kadiolo (en moyenne 12 heures par semaine pour 134 élèves par professeur), nous sommes quatre professeurs de

* Professeur d'enseignement secondaire – Mali – moudiallo1@yahoo.fr

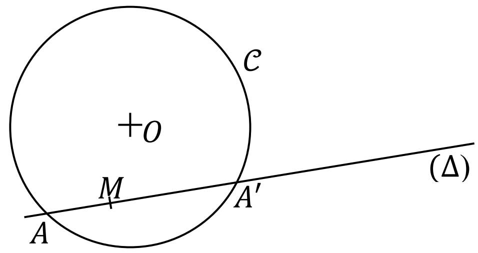
mathématiques évoluant dans ce lycée privé comme vacataires. Dans ce lycée, Il n'y a aucune bibliothèque, encore moins une connexion Internet. L'expérimentation a été faite dans l'environnement papier/crayon. Les matériels disponibles étaient : stylos, crayons, gommes, règles, compas, tableau et de la craie.

2. Objet d'étude

Soit un point M et un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R du même plan. (Voir figure ci-contre)

Propriété : Pour toute droite (Δ) passant par M et sécante à $\mathcal{C}$ en A et A', le produit scalaire $\overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MA}$ reste invariant.

Définition : On a : $\overrightarrow{MA'}.\overrightarrow{MA} = \overline{MA'} \times \overline{MA} = OM^2 - R^2$. Cette constante est appelée puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$.



M intérieur au cercle

3. Prérequis nécessaires

- Le théorème de Pythagore (rappelé dans le chapitre intitulé : « trigonométrie dans un triangle rectangle »).
- L'arrondi d'ordre 0 ; 1… et la notion de « mesure algébrique » (chapitre « activité dans »).
- Les notions de vecteur et de produit scalaire (chapitre dans lequel se fait l'expérimentation).
- Les positions relatives d'une droite ou d'un point par rapport à un cercle.
- La mesure d'un segment donnée à l'aide de la règle graduée.

4. Objectifs Généraux de l'expérimentation

- Permettre aux élèves de $10^{ème}$ S de s'approprier un problème de découverte d'une propriété géométrique de façon expérimentale et de s'engager à l'établissement d'une preuve mathématique.
- Etudier les conditions effectives pour mener une démarche expérimentale en classe de mathématiques.

L'enjeu de cette séquence est le passage d'une conjecture obtenue de façon expérimentale à une démonstration mathématique de cette conjecture.

III. CONSTRUCTION ET ETUDE DE LA PREMIERE SITUATION

1. Présentation de l'activité

Objectifs

- Rappeler les différentes positions d'une droite ou d'un point par rapport à un cercle.
- Rappeler le caractère approché des mesures avec les instruments de géométrie.

Enoncé

– Quelles sont les différentes positions d'une droite par rapport à un cercle ?

- Quand dit-on qu'une droite est sécante ou tangente à un cercle de centre O?
- Construire un cercle de centre O. Placer un point A à l'intérieur, un point B à l'extérieur et un point C sur ce cercle.
- Avec quelle incertitude pouvez-vous faire vos mesures à l'aide de votre règle ? Justifier votre réponse.

Rôle du professeur

Il organise la classe. Il aide les élèves à surmonter les éventuelles difficultés. Et il veille au respect du temps donné.

Enjeu de l'activité

Cette activité permet de nous situer sur la disponibilité, chez les élèves, des pré-requis nécessaires à la réalisation des tâches liées aux activités postérieures.

2. Comportements attendus des élèves

Dans cette activité, la grande difficulté résulte de la quatrième question. En effet dans nos classes, la notion d'incertitude est beaucoup plus théorique. Elle est généralement donnée sinon calculée à partir de deux valeurs approchées (l'une par excès et l'autre par défaut). Il ne serait donc pas si facile pour les élèves de déterminer cette précision à partir de leurs règles.

Stratégie pour surmonter la difficulté

Pour les aider à surmonter cette difficulté, nous prévoyons les étapes suivantes :

Etape 1 : Faire comprendre à l'élève qu'une règle admet une incertitude.

Etape 2 : Aider l'élève à déterminer l'incertitude liée à la règle.

Exemple : Choisir un nombre α compris entre deux nombres successifs de la règle (voir Annexe, illustration). Puis nous lui demanderons de déterminer une valeur approchée de α et son incertitude.

3. Analyse des résultats

Dans cette activité, toutes les trois premières questions ont été répondues par chacun des élèves. Mais ces réponses ne sont toutes correctes.

Quant à la quatrième, nous avons adopté la stratégie prévue. Nous avons noté que les élèves sont unanimes que l'on peut construire avec exactitude un segment de mesure 4cm et 3,5cm. Cependant l'unanimité n'est pas faite autour de la construction exacte d'un segment de longueur 2,23cm (avec nos règles).

Nous avons relevé les erreurs suivantes :

E_1 : Une droite peut être la médiatrice de cercle.
E_2 : Une droite peut être l'équateur de ce cercle.
E_3 : Une tangente à un cercle est une droite qui passe et collée à l'extrémité du cercle.
E_4 : Une tangente est une droite qui frotte le cercle.
E_5 : On ne peut pas mesurer 2,23 parce que la graduation de la règle ne dépasse pas 2,10 et que 2,23 n'est pas sur la règle.
E_6 : … à l'aide d'une règle on peut tracer n'importe quel segment.

Ces erreurs peuvent être classées en deux types suivant leurs sources. Notre stratégie générale pour y remédier est : montrer à l'élève qu'il est en erreur et redresser les incorrections.

Type 1 il s'agit des erreurs E_1, E_2, E_3 et E_4

Les deux premières erreurs (E_1ou E_2) ont été relevées dans des réponses relatives à la position d'une droite par rapport à un cercle, alors que les deux dernières (E_3, E_4) sont relatives à la définition d'une tangente à un cercle.

Ce type d'erreur est lié à la confusion des objets mathématiques.

Ainsi avons-nous tenté d'établir les différences entre les objets : médiatrice, équateur et diamètre. Avec quelques échanges, les élèves semblent avoir compris que, contrairement aux deux premiers, le « diamètre » est propre au cercle.

Quant à E_3 et E_4, nous avons essayé de faire voir l'incompatibilité des mots « extrémité » et « cercle ». En fait, nous avons défini le premier comme une fin et le second comme une ligne fermée. Et qu'on peut parcourir un cercle, aussi longtemps qu'on veut, sans parvenir a sa fin. Donc un cercle n'admet pas d'extrémité.

Type 2 : il s'agit des erreurs E_5 et E_6

Ces deux erreurs ont été relevées pendant la stratégie faisant voir l'incertitude liée à une règle dans l'environnement papier/crayon.

Nous pensons que l'erreur E_5 est une lacune liée à la comparaison de deux nombres décimaux. Et des exemples de comparaison de nombres décimaux, nous ont semblés suffisants pour combler ces lacunes. Quant à l'erreur E_6, un exemple (voir Annexe, illustration) nous a permis de montrer une limite de la règle graduée.

IV. CONSTRUCTION ET ETUDE DE LA SECONDE SITUATION

1. Présentation de l'activité

Objectif : Amener les élèves à découvrir l'invariance des produits

Partie 1

1. Construire un cercle de centre *O*.
2. Placer un point *M* à l'intérieur du cercle et construire 5 sécantes au cercle passant par *M*.
3. a) Mesurer les distances *MX* et *MX'* où *X* et *X'* sont les points d'intersection des sécantes au cercle passant par *M*.
   b) Reproduire le tableau ci-dessous et mentionner les distances *MX* et *MX'* mesurées.

MX					
MX'					
MX×*MX'*					

Consigne : les mesures seront faites en centimètre et à l'arrondi d'ordre 1. Les produits seront donnés à l'arrondi à d'ordre 0. Les unités ne seront pas mentionnées dans le tableau.

Partie 2 : (question orale)

Quel résultat expérimental peux-tu énoncer à partir du tableau ?

Rôle du professeur

Il engage les élèves dans des débats et les dirige.

Analyse a priori

L'enjeu étant d'établir de façon expérimentale l'invariance de *MX*×*MX'*, la discussion entre élèves doit être orientée par le nombre de produits égaux. Pour engager le débat, nous nous appuierons sur les deux situations : ceux qui ont remarqué l'invariance et ceux ne l'ont pas remarquée.

Nous supposerons que l'objectif de cette partie est atteint que lorsqu'au moins un élève remarque l'invariant et que les élèves sentent la nécessité de s'engager dans la recherche d'une preuve mathématique. Dans le cas échéant, nous envisageons la même expérimentation au tableau. Ceci nous permettrait de decouvrir l'invariance et de passer à sa démonstration.

Analyse des résultats

Selon le plus grand nombre de produits égaux par production, nous résumons les résultats dans le tableau suivant.

Nombre de produits égaux	0	2	3	4	5	Total
Effectifs	0	4	6	3	5	18
Pourcentage	0	22%	33%	17%	28%	100

On remarque que tous les élèves ont obtenu au moins deux produits égaux. Cinq élèves, soit 28% des élèves, ont eu tous les produits égaux.

La discussion fut engagée et tournait autour de la réponse à la quatrième question de l'enseignant (« Quel résultat expérimental peux-tu énoncer à partir du tableau ? »). Après cette question orale du professeur, voici les premiers échanges :

Le premier élève à intervenir dit : « Monsieur on remarque que tous les produits sont les mêmes. »

Un autre intervenant : « Monsieur, moi je trouve que 3 sont égaux. »

Le premier intervenant dit subitement : « C'est faux, tu as mal mesuré ! »

Après ces interventions, nous avons assisté à un remue-ménage. Certains se déplaçaient par-ci par-là certainement pour convaincre et d'autres, sans rien dire, se mettaient à remesurer et/ou recalculer.

Pour réinstaller l'ordre, nous avons jugé bon de reprendre l'activité au tableau. Ensemble et avec plus attention, nous sommes arrivés à un compromis : accepter l'invariance des produits MX×MX' et s'engager dans la recherche d'une preuve mathématique.

En effet, ce compromis était perçu différemment. On pouvait sentir la joie, une certaine fierté ou une certaine grandeur chez certains. D'autres, se demandant d'où venait leurs différences, se réservaient de trop parler. Malgré cette différence, tous les élèves étaient pour la recherche d'une preuve.

Pour le facilitateur (l'enseignant), ce compromis marque la fin d'une partie expérimentale comblée et le début d'une recherche de preuve mathématique.

V. CONSTRUCTION ET ETUDE DE LA TROISIEME SITUATION

1. *Présentation de l'activité*

Objectifs

- Amener les élèves à démontrer l'invariance de $\overrightarrow{MX}.\overrightarrow{MX'}$.
- Faire découvrir par les élèves que le produit $\overrightarrow{MX}.\overrightarrow{MX'}$ ne dépend que du cercle et de la distance du point au centre de ce dernier.

Énoncé

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre *O* et de rayon *R*. *M* est un point du plan intérieur au cercle. Les points *A* et A' sont les points d'intersection d'une sécante au cercle passant par *M*. Le point *H* est le projeté orthogonal du point *O* sur la droite (*AA'*).

a) Exprimer les distances *MA* et *MA'* en fonction de *OM* et de *R*. En déduire le produit $MA \times MA'$ en fonction de *OM* et de *R*.

b) Exprimer $\overline{MA} \times \overline{MA'}$ en fonction $MA \times MA'$. Déduire de ce qui précède que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$ ne dépend pas de la droite (*AA'*).

Consignes

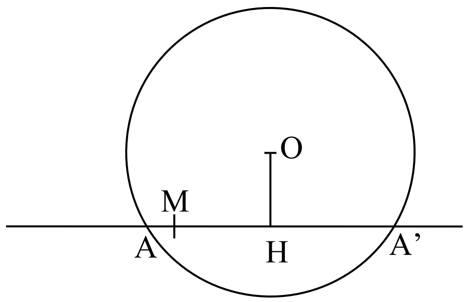
Cette activité est à faire à domicile pour une semaine. Les copies seront ramassées et corrigées. Chaque copie doit appartenir à une et une seule personne. En effet, ce temps leur permettrait, non seulement d'assoir les nouvelles compétences relatives aux produits scalaires mais aussi de combler eux-mêmes les éventuelles lacunes.

Rôle du professeur

Il veille au respect du temps imparti. Il engage et dirige des débats dans le sens de la résolution de l'activité. Il fait voir aux élèves les éventuelles erreurs commises. En plus, il les engage à la recherche de piste de résolution.

2. Réponses aux questions

$\mathcal{C}$ un cercle de centre *O* et de rayon *R*. *M* est un point du plan intérieur au cercle. Les points *A* et A' sont les points d'intersection d'une sécante au cercle passant par *M*. Le point *H* est le projeté orthogonal du point *O* sur (*AA'*). (Voir figure ci-contre)



a) Expression *MA* et MA' en fonction *OM* et *R*.

$$AM = AH - MH \text{ et } A'M = A'H + MH$$

$$AM = \sqrt{AH^2} - \sqrt{MH^2} \text{ et } A'M = \sqrt{A'H^2} - \sqrt{MH^2}$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles *MHO* , *A'HO* et *AHO* rectangles en *H*, on a : $AH^2 = OA^2 + MH^2$ et $MH^2 = OM^2 - OH^2$; d'où :

$AM = \sqrt{OA^2 - OH^2} - \sqrt{OM^2 - OH^2}$ et $A'M = \sqrt{A'O^2 - OH^2} + \sqrt{OM^2 - OH^2}$ ou encore :

$AM = \sqrt{R^2 - OH^2} - \sqrt{OM^2 - OH^2}$ et $A'M = \sqrt{R^2 - OH^2} + \sqrt{OM^2 - OH^2}$

b) *M* étant pris à l'intérieur du cercle, les mesures algébriques $\overline{MA} \times \overline{MA'}$ ont des sens contraires, dans ce cas $\overline{MA} \times \overline{MA'} = -MA \times MA'$.

Les points *A*, A' et *M* étant alignés on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = \overline{MA} \times \overline{MA'}$.

Des réponses précédentes on déduit que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = -MA \times MA'$.

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = (\sqrt{R^2 - OH^2} - \sqrt{OM^2 - OH^2})(\sqrt{R^2 - OH^2} + \sqrt{OM^2 - OH^2})$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} = -(R^2 - OH^2) + (OM^2 - OH^2) = OM^2 - R^2$$

3. Connaissances mobilisables

La bonne exécution de cette activité nécessite la maitrise de certaines connaissances comme :

- Le théorème de Pythagore.
- La définition du produit scalaire en fonction des mesures algébriques.

4. Difficulté possible

La grande difficulté résulte dans l'établissement des expressions des distances *MA* et *MA'* en fonction de *OM* et *R*. En fait, la réponse relative fait intervenir la distance *OH* qui n'est pas signalée dans la question.

5. Comportements attendus des élèves

Par rapport à la question relative à l'expression de *MA* en fonction de *OM* et *R*, on peut s'attendre à des raisonnements suivants :

$$OA^2 = MA^2 + MO^2 \Rightarrow MA^2 = OA^2 - MO^2 \Rightarrow MA = \sqrt{OA^2 - MO^2}$$

Effet, sachant que *AOM* est un triangle et que le plus grand coté est apparemment *OA*. Le théorème de Pythagore étant la relation entre les cotés d'un triangle (rectangle), en négligeant la condition liée au triangle, l'élève serait tenté par le raisonnement ci-dessus.

Pour remédier à ces lacunes nous prévoyons suivre les deux étapes suivantes :

- Faire voir par l'élève que sa conception est erronée, en le mettant face à une situation particulière.
  Exemple : faire vérifier son raisonnement dans un triangle dont les longueurs des trois cotés sont connues.
- Rappeler le théorème de Pythagore en insistant sur l'expression « dans un triangle rectangle », donner un exemple ou un contre-exemple si nécessaire.

6. Analyse des résultats

Pendant la période de recherche, aucune difficulté n'a été signalée. Et au terme des 7 jours, nous avons collecté 18 copies, mais presque toutes identiques.

L'analyse des productions nous a permis de remarquer que toutes les questions ont été répondues ; c'est dire que les élèves n'ont pas rencontré de difficultés ou ont pu les surmonter (à leur manière). En outre, le théorème de Pythagore a été correctement appliqué.

Cependant, en plus des erreurs accidentelles, nous avons relevé deux autres erreurs.

Erreur 1 : La linéarité de la fonction racine carrée : la racine carrée d'une somme est la somme des racines carrées.
Exemple : $MA = \sqrt{OM^2 - R^2}$(voir annexe, *production 2*)

Erreur 2 : Application de la relation de Chasles aux mesures algébriques. (Voir annexe, *production 2*)

Pour remédier à ces lacunes nous avons adopté des stratégies, selon les différentes erreurs :

Erreur 1 : Pour corriger cette erreur, nous leur avons montré le caractère erroné de leurs conceptions à partir d'exemples simples comme $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$ (le premier membre est 5 alors que le second est égal à 7).En fait, nous avons fait remarquer que de façon générale : $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ou $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$

Erreur 2 : Nous leur avons fait savoir qu'à la différence de la relation de Chasles appliquée aux vecteurs, la relation $\overline{MA} = \overline{MO} + \overline{OA}$ n'est possible que si les trois points sont sur une même droite (points alignés).

En plus nous avons remarqué que le dessin a été particularisé. En effet *M* est placé de sorte qu'il coïncide avec le point *H*, le projeté orthogonal de *O* sur [*AA'*]. (Voir annexe, *production 1*). Nous pensons que cela n'est pas une erreur mais ne permet pas de conclure. Donc nous nous sommes engagés à montrer le caractère particulier de leur dessin par rapport aux données de l'activité. Aussi avons-nous mis en exergue quelques insuffisances que cette particularisation engendre.

VI. CONCLUSION

Cette séquence est composée de trois activités. Une des particularités de ces activités est les relations des unes aux autres. En effet, chacune d'elles a, non seulement, des objectifs bien précis, mais aussi la réalisation d'un objectif favorise celle de l'activité suivante.

Contrairement aux activités ordinaires, ces activités ne sont pas seulement des tests de compétence pour les élèves. Ce sont des situations où les apprenants se voient forgerons de leur savoir. En effet, après plusieurs essais, les élèves arrivent à une proposition provisoire. Et pour lever toute équivoque autour de celle-ci, ils décident d'apporter des preuves mathématiques.

Ce fut une première où le tâtonnement et les erreurs ne sont pas dramatisés. En un mot, à la différence de nos méthodes quotidiennes, dans la démarche expérimentale, les erreurs, les changements de pistes de recherche, les débats contradictoires, semblent être tolérés dans la recherche de solution au problème posé.

En outre, dans une expérimentation, le professeur change son rôle habituel : au lieu du savant ou de l'envahisseur il devient l'organisateur ou le facilitateur. Il élabore des situations et oriente la séance selon les moyens du bord, les compétences des apprenants et l'objectif visé.

La démarche expérimentale en mathématique dans cette classe de 10$^{\text{ème}}$ Sciences fut un travail de réinvestissement. Les élèves sont partis de compétences simples vers une autre relativement complexe. En fait, elle a permis aux élèves de combiner des objets mathématiques, d'observer les produits qui en résultent, de formuler une « loi » et de tenter de démontrer la conjecture.

Ce fut un moment d'échanges francs (oral et écrit) entre les élèves d'une part et avec le professeur d'autre part. Le professeur a saisi cette opportunité et mis en exergue la place d'une conjecture et celle d'une démonstration en mathématique.

Cette expérimentation s'est déroulée, certes avec un certain succès et bénéfice, mais a aussi été entachée d'insuffisance. Par exemple, le temps de l'activité 1 a été plus long que prévu du fait que plusieurs lacunes nous ont échappé dans l'analyse a priori. Aussi, dans l'activité 2, nous avons relevé une difficulté dans la gestion des marges d'erreur due à la diversité des cercles (de rayons différents). Cette difficulté serait surmontée en imposant le rayon du cercle.

Quant à l'activité 3, tous les élèves ont fait une construction particulière (voir annexe *production 1*). De ce fait nous pensons qu'il serait prudent de joindre une figure à l'énoncé. En outre, nous pensons qu'il faut rappeler qu'une « démarche expérimentale en

Mathématiques » est une pratique inhabituelle dans nos classes. Or tenter de rompre avec une habitude n'est chose facile ; elle tente toujours à rattraper son sujet.

Malgré les insuffisances, nous pensons que cette expérimentation peut contribuer à faire prendre conscience aux élèves qu'une expérimentation n'est pas seulement l'apanage de la physique-chimie et de la biologie. Aussi, aiguiserait-elle leur curiosité, avec en plus la persévérance, la patience, l'engagement dans la recherche, et celui du travail entre les élèves. En plus, elle pourrait constituer une source de motivation pour les mathématiques souvent jugées trop abstraites.

Les nombreux avantages de cette méthode d'enseignement/apprentissage nous incitent à nous interroger sur la possibilité d'insérer, à l'instar de la biologie et de la physiques-chimie, la démarche expérimentale dans le programme d'enseignement secondaire de mathématiques au Mali ? Il nous parait difficile d'appliquer cette méthode dans une classe pléthorique, mais est-ce impossible ? Il faudrait alors résoudre les questions de ressources pédagogiques ainsi que celle de la formation initiale et continue des professeurs de mathématiques.

REFERENCES

Bkouche R., Lehman D. (1988) *Initiation à la géométrie*. Paris : PUF.
Perrin D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Petit x* 73, 6-34.

Textes Officiels

Le programme et le savoir- faire de la 10ième S.

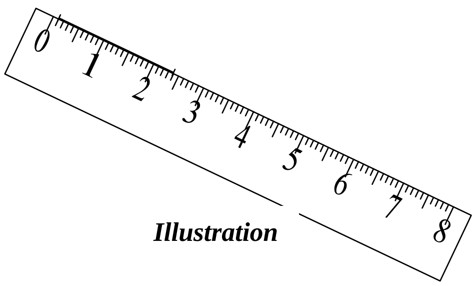
Livres scolaires

Géométrie 2nde CT. Collection IRMA, Tome 2
Mathématique 2nde. Collection CIAM.
Mathématiques analyse 1ère S et E, collection Terracher.

Sites Internet

Dias T. (2004) Le recours à l'expérience dans la construction des connaissances mathématiques. www.lyon.iufm.fr/pole_recherche/archives/premst_archives/texte_dias_2
Activités scientifiques et technologiques: Démarche expérimentale.
http://eduscol.education.fr/D0049/cahier_demarche_exp.pdf –
http://diophante.fr/pages/geometrie.htm#D226 : un site d'activité de géométrie.
http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Geometri/TroiCerc.htm#Pythagore : Cercle (c'est un site de théorème démontré relatif au cercle).
Euclid's elements book III – Proposition 35.
http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookIII/propIII35.html

ANNEXES



Illustration

B Pour le point M à l'intérieur.

1) D'après pythagore
calculons la distance MA et MA' en fonction de OM et R.
Considérons le triangle OMA rectangle en M.
$AO^2 = MA^2 + MO^2$
$MA^2 = MO^2 - R^2$
$MA = \sqrt{MO^2 - R^2}$
$MA = ||MO|| - ||R||$.
Dans le triangle OMA' rectangle en M.
$A'O^2 = A'M^2 + MO^2$
$MA'^2 = MO^2 - AO^2$
$MA' = \sqrt{MO^2 - AO^2}$
$MA' = ||MO|| - ||R||$.

Production 1

3) Exprimons $\overline{MA} \times \overline{MA'}$ en fonction $MA \times MA'$
$\overline{MA} \times \overline{MA'} = (\overline{MO} + \overline{OA}) \times (\overline{MO} + \overline{OA'})$
$= MO^2 + 2\overline{MO} \cdot \overline{OA} \cos(\widehat{OM, OA}) + OA^2$
$\overline{MA} \times \overline{MA'} = (MO + R)^2$
$\boxed{\overline{MA} \times \overline{MA'} = MA \times MA'}$

Production 2