DIFFICULTES DES ETUDIANTS DE PREMIERE ANNEE UNIVERSITAIRE AVEC LA NOTION DE LIMITE

Ilyesse BOUZINA*

Résumé – Nous examinons dans ce texte quelques difficultés que rencontrent les étudiants universitaires de première année de la filière mathématiques-informatique avec la notion de limite. Nous présentons d'abord comment la notion de limite est enseignée au niveau de l'enseignement secondaire en analysant le manuel scolaire de Terminale et en examinant les difficultés des élèves sur un exercice. Nous examinons ensuite comment la notion de limite est abordée en première année universitaire. On constate que les problèmes persistent encore avec la définition. Nous analysons de plus près ces difficultés à travers deux exercices proposés aux étudiants. En conclusion, nous proposons quelques recommandations pour atténuer les difficultés vis à vis de cette notion à la fois au lycée et en première année universitaire.

Mots-clefs : limites, fonctions, suites, enseignement supérieur

Abstract – In this text, we analyse some difficulties encountered by students in their first year of science university in Algeria about the notion of limit. We first analyse how this concept is presented in the end of secondary school, in the official textbook and through students' solving of one exercise. We then present what is at stake about the notion of limit in first year of university and we show that difficulties with the definition still remain. We analyse in more detail students' difficulties through the solving of two exercises. Finally in conclusion we suggest some recommendations for the teaching of the limit in order to overcome the difficulties analysed.

Keywords: limits, functions, sequences, higher education

I. INTRODUCTION

Le cours d'analyse au lycée contient, entre autres, des notions de base pour les mathématiques mais surtout pour les mathématiques universitaires. La maîtrise de ces notions par les élèves s'avère indispensable, non seulement, pour le bon déroulement du cours au lycée en niveau de la Terminale car il est formé par plusieurs parties qui s'enchainent et qui sont dépendantes les unes des autres. Mais aussi pour pouvoir suivre, plus tard à l'université, ce même cours qui se refait mais en travaillant les notions en profondeur. Nous examinons dans cette étude quelques difficultés que rencontrent les étudiants universitaires de première année de la filière mathématiques-informatique avec la notion de limite. Nous nous sommes intéressés à cette notion vue son importance dans les programmes des mathématiques depuis le lycée et surtout au cours d'analyse à l'université. Ce dernier cours qui contient en grande partie l'étude d'une fonction réelle à variable réelle commence au début par les suites numériques avec lesquelles on aborde pour la première fois la notion de limite avec la définition ε-δ. Nous avons remarqué que cette définition cause beaucoup de problèmes aux étudiants ce qui parfois les empêche à poursuivre l'étude du reste de ce cours puisque plus tard, cette même définition se répète avec les limites d'une fonction et avec la continuité des fonctions.

II. LA NOTION DE LIMITE AU LYCEE

Le lycée représente le troisième niveau dans le système éducatif algérien (secondaire supérieur), les élèves y restent trois années et ont une moyenne d'âge entre 16 et 19 ans. A la fin de la troisième année (Terminale), les élèves passent un examen national, le *Baccalauréat* qui présente l'examen d'entrée aux universités.

* Université de Médéa – Algérie – bilyes.87@gmail.com

© Bouzina I. (2012) Difficultés des étudiants de première année universitaire avec la notion de limite. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1516–1521). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Selon le manuel scolaire de Terminale (*Bac maths et science*) qui est seul et unique pour tout le territoire algérien, la grande partie du cours sur la notion de « limite » est basée sur les calculs directs de limites où l'élève n'a qu'à appliquer quelques transformations algébriques. La plupart des formes indéterminées sont rencontrées avec quelques techniques pour les traiter. Cependant, la définition de la limite avec ε - δ et donnée dans le manuel sous forme de phrase non formelle, juste quelques exercices sont proposés pour appliquer cette définition. Néanmoins, nous avons pu constater, en posant des questions aux étudiants de première année universitaire sur leurs cours précédents de Terminale, que ces exercices sont souvent omis par les enseignants qui estiment que ces types d'exercices n'ont pas d'intérêt en Terminale puisque tout est basé sur le calcul direct au niveau des mathématiques du lycée. Nous croyons que ceci est la cause principale du fait que les élèves ne comprennent pas vraiment la définition de la limite au niveau du lycée et donc arrivent démunis sur ce thème à l'université.

Plusieurs difficultés apparaissent chez les élèves en Terminale, pour en identifier la nature, nous avons mis en place le dispositif suivant. Nous donnons la définition telle qu'elle a été donnée dans le manuel scolaire, puis nous demandons une application directe avec un exemple simple d'une fonction.

1. Limite d'une fonction à l'infini (selon le manuel de Terminale)

Définition : Soit f est une fonction définie sur l'intervalle $\left[x_0,+\infty\right[$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On écrit : $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell$.

A travers l'exercice suivant, nous voulions voir à quel point cette définition est assimilée, et à quel niveau les difficultés se présentent pour des étudiants entrant à l'université.

Exercice : Soit f la fonction définie sur $\left[3,+\infty\right[$ par : $f(x) = \frac{2}{x-3}$. En utilisant la définition, montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Tous les étudiants interpellent l'enseignant dès le début, en disant : « Monsieur, je vous demande le point de départ ! ». Ainsi, la majorité des élèves sont bloqués au début et n'arrivent pas à démarrer, ils ne voient pas non plus ce qu'ils doivent faire, car ils ne comprennent pas comment traduire la définition formellement c'est-à-dire en symboles mathématiques. Moi-même, j'ai trouvé cette difficulté, je n'arrivais pas à expliquer l'exercice sans introduire le formalisme.

Nous avons soulevé l'obstacle du formalisme chez les élèves. D'une part, le livre évite le formalisme en donnant des définitions sous forme de phrases non formelles mais d'autre part, les élèves ne les comprennent pas et il nous semble que seul le formalisme pourrait atténuer cette difficulté.

Nous avons soulevé les mêmes problèmes avec la définition de : $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$.

2. Limite d'une fonction en un point

Nous voulions étudier de près comment les élèves considèrent la limite à gauche et la limite à droite au lycée. Selon programme du manuel et les cours donnés par les enseignants, il apparaît que l'on insiste sur les calculs des limites à gauche et à droite sans aller au-delà pour faire sortir le sens de ces calculs. Nous voulions alors découvrir les méthodes que les élèves utilisent pour effectuer leurs calculs.

Exercice : Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Calculer $\lim_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x)$ et $\lim_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x)$.

Les réponses des étudiants sont divisées en deux catégories :

1. Certains disent directement que $\lim_{\substack{< \\ x\to 2}} f(x) = -\infty$ (resp. $\lim_{\substack{> \\ x\to 2}} f(x) = +\infty$) car la limite à gauche, pour eux, est toujours associée au signe moins (–) (resp. la limite à droite au signe plus (+)) et donc en remplaçant x par 2, ils obtiennent la forme indéterminée $\frac{1}{0}$ qu'ils identifient à ∞ puis ils ajoutent directement le signe (–).

2. D'autres remplacent x par une valeur très proche de 2 et inférieure à 2 (par exemple : 1,99) pour la limite à gauche, et supérieure à 2 (par exemple : 2,01) pour limite à droite.

Nous avons relevé, entre autres, que les étudiants ne font aucune remarque et n'ont aucune réaction quand les deux limites (à gauche et à droite) sont différentes ou égales.

3. Les formes indéterminées

Les élèves au niveau du lycée savent que ($\frac{\infty}{\infty}, +\infty - \infty, \frac{0}{0}$) sont des formes indéterminées, mais est-ce qu'ils savent en exprimer le sens ?

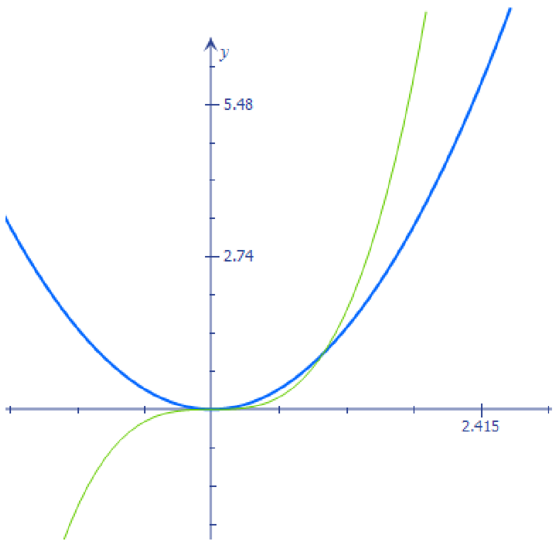
Exemple : Si on donne deux fonctions f et g d'une variable réelle x avec : $g(x) \neq 0$ et $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$

Les étudiants n'ont aucun problème à voir que l'on obtient un cas indéterminé. Mais à la question : comment traiter ce cas ? Ils ne savent pas répondre et ne comprennent même pas cette question. Nous les avons testés pour savoir s'ils pouvaient entrevoir parmi ces deux fonctions la quelle tend vers l'infini plus rapidement.

On prend par exemple les fonctions $f(x) = x^3$ et $f(x) = x^2$.

On construit alors le tableau et les graphes suivants :

x	1	10	100	1000	10000	…	10^{10}
$f(x)$	1	10^3	10^6	10^9	10^{12}	…	10^{30}
$g(x)$	1	10^2	10^4	10^6	10^8	…	10^{20}



De ce tableau découle que pour chaque valeur de x assez grande, $f(x)$ dépasse de plus en plus $g(x)$, et donc $f(x)$ tend vers l'infini plus rapidement que $g(x)$. C'est pour cela que $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Nos investigations montrent que les formes indéterminées restent ambiguës pour les élèves et que la manière de les traiter n'est pas une tâche abordée au lycée. Ceci nous indique comment les élèves travaillent les mathématiques au niveau du secondaire. On remarque beaucoup plus un travail procédural qui consiste à faire des calculs et appliquer des astuces, sans réellement travailler le sens et le concept ou le pourquoi et le comment. Même si ces concepts se présentent d'une manière très simple comme dans le cas des deux fonctions données en exemple.

III. LA NOTION DE LIMITE EN PREMIERE ANNEE UNIVERSITAIRE

Nous nous sommes intéressé aux étudiants de première année universitaire de la filière mathématiques-informatique dans laquelle les étudiants se spécialiseront en deuxième année soit en mathématiques, soit en informatique. Parmi les étudiants de la filière mathématiques, se formeront les futurs enseignants de mathématiques de tous les niveaux (moyen, secondaire et universitaire).

Après quelques discutions avec les étudiants de première année universitaire, on a constaté que plusieurs d'entre eux ne comprennent pas le sens de la définition formelle de la limite et donc sont incapables de la retenir. Cette définition est la suivante :

$$(\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell\,) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in D_f\colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon).$$

On a demandé aux étudiants de faire le lien entre cette définition et la première donnée au lycée.

Voici quelques réponses des étudiants :

- Cette proposition contient deux membres équivalents, le premier est simple, par contre, le deuxième est très compliqué, il contient les symboles de logique mathématique $(\Rightarrow, \Leftrightarrow)$ et les quantificateurs logiques $(\forall, \exists)$.
- Les nombres réels (ε, δ) sont des valeurs exactes ou variantes, petites ou grandes ?
- Pourquoi on met la valeur absolue ?
- On commence la démonstration par le deuxième membre de l'implication logique ou par son premier membre ?
- Qu'est-ce qu'on cherche exactement ?

Plusieurs constats émergent de ces réponses :

1- Certains étudiants ne comprennent pas le passage du premier membre vers le deuxième membre de l'équivalence, car ils ne comprennent pas la définition de la limite écrite formellement et sans interprétation géométrique. Cette nouvelle définition génère plusieurs problèmes et soulève pas mal de questions chez les étudiants : pourquoi mettre une valeur absolue ? Quel est le but voulu par cette définition exactement ? Comment faire pour s'en servir ?, quelles sont les variables et les constantes ? Quel est le lien entre toutes ces données ? Comment procéder dans la solution ?

2- Certains étudiant ne comprennent pas que ε est donné et que c'est δ qui est l'inconnue, ils ne voient pas alors que le principe de cette définition est un problème d'existence de δ, en plus certains croient que la valeur de δ est unique.

3- Certains étudiants ne comprennent pas ce qu'est une variable infiniment grande ou infiniment petite et comment utiliser ceci dans ces définitions. Ainsi ($|f(x) - \ell| < \varepsilon$) reste dépourvu de sens.

4- Certains étudiants ne voient pas la relation avec le premier membre de l'implication surtout que pendant la démonstration, on cherche une condition seulement suffisante car ce n'est pas une équivalence. Ceci est tellement compliqué pour les étudiants qu'ils ne s'en sortent jamais même après plusieurs exemples et beaucoup de temps.

L'utilisation par les étudiants de la définition de la limite

Examinons deux exercices pour expliquer comment les étudiants utilisent cette définition.

Exemple 1 : Soit (u_n) est une suite numérique définie par $u_n = \frac{1}{n}$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Solution : $(\lim_{n\to+\infty} u_n = 0) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0 : n > N \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon)$.

On a $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, donc il suffit de prendre $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$,

Alors, si $n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1, \frac{1}{n} < \varepsilon$, ce qui montre que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Exemple 2 : Montrer que $\lim_{x\to0}(x + 1) = 1$

Dans cet exemple, on donne la solution en détail en expliquant toutes les étapes :

$(\lim_{x\to0}(x + 1) = 1) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - 0| < \delta \Rightarrow |(x + 1) - 1| < \varepsilon)$.

Or $|(x + 1) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$

Donc il suffit de prendre $\delta = \varepsilon$, en effet alors : $|x - 0| < \varepsilon \Rightarrow |(x + 1) - 1| < \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

Après cet exemple l'étudiant comprend comment utiliser la définition pour trouver et démontrer la limite d'une fonction quand x tend vers x_0,

On passe à un autre exercice que les étudiants devaient faire tous seuls pour comprendre comment manipuler la définition

Exemple 3 : Montrer que $\lim_{x\to1} x^2 = 1$

Plusieurs étudiants ont donné la solution suivante :

$(\lim_{x\to1} x^2 = 1) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| < \delta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon)$.

On a : $|x^2 - 1| < \varepsilon \Rightarrow |(x - 1)(x + 1)| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1||x + 1| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{|x+1|}$

A ce niveau, ces étudiants sont bloqués. En effet, bien que tous les étudiants sachent commencer et développer quelques étapes, ils n'arrivent pas à dépasser la difficulté de la majoration de $\frac{1}{x+1}$.

Finalement la question que se posent les étudiants revient à savoir s'il existe une méthode générale pour majorer la distance $|f(x) - \ell|$ par la distance $|x - x_0|$. La réponse est malheureusement non. Ceci n'arrange pas les étudiants qui se demandent sans cesse comment faire. tant ils restent attachés à des mathématiques procédurales comme au lycée.

La solution de l'exercice par l'enseignant

$(\lim_{x\to1} x^2 = 1) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| < \delta \Rightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon)$.

On a : $|x^2 - 1| = |(x-1)^2 + 2(x-1)|$ donc $|x^2 - 1| \leq |(x-1)^2| + 2|x-1|$

Or $|x^2 - 1| < \delta \Rightarrow |(x-1)^2| + 2|x-1| < \delta^2 + 2\delta$

Si $\delta < 1$ alors $\delta^2 + 2\delta < 3\delta$, ainsi il suffit de prendre $\delta = \inf\left(1, \frac{\varepsilon}{3}\right)$.

Cette résolution fait apparaître que la technique consiste à majorer la distance $|x^2 - 1|$ en fonction de la distance $|x - 1|$ pour faire une majoration de la première qui marche en fonction d'une majoration de la deuxième.

IV. CONCLUSION

Nous avons dans ce texte mis à jour plusieurs difficultés à la fois au niveau secondaire et universitaire concernant la notion de la limite, ceci nous amène à constater que cette notion reste délicate à enseigner et à apprendre par les étudiants. Le fait qu'elle se présente à la fois au lycée et à l'université n'aide pas puisque la notion n'est pas travaillée au lycée de façon à bien l'introduire à l'université. Au niveau universitaire, les outils nécessaires pour réellement comprendre les limites ne sont pas toujours donnés, ce qui rend la tâche difficile à la fois aux enseignants et aux étudiants.

Dans l'état de nos réflexions nous pouvons avancer les recommandations suivantes, qu'il conviendra de mettre à l'épreuve :

- Donner un cours ou des exercices sur les inégalités et les encadrements avant d'entamer les cours sur les notions de la limite.
- Au niveau du lycée placer le cours sur les suites numériques avant le cours sur les limites des fonctions, parce que dans le cas des suites il n'y a qu'un seul cas de calcul de limite ($\lim_{n\to\infty} u_n$), et la définition est plus simple que pour les fonctions.
- Utiliser les graphes pour interpréter les limites.
- Expliquer la différence entre l'implication et l'équivalence et l'ordre d'apparition des quantificateurs logiques.

REFERENCES

Allab K. (2008) *Eléments d'analyse, tome 1*.Alger : Offices des publications universitaires.

Piskounov N. (1980) *Calcul différentiel et intégral, tome 2, 9^e*. Moscou : édition MIR.

MANUELS SCOLAIRES

Manuel Algérien. (2010) Mathématiques, 3ème année de l'Enseignement Secondaire, Section : Maths-Sciences expérimentale et Maths-Technique, République Algérienne, Office national des publications scolaires.