ENSEIGNEMENT DES FONCTIONS ET ÉQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS UNE ECOLE SECONDAIRE PROFESSIONNELLE

Nicolas BARTHOLDI*

Résumé – Pour enseigner les fonctions du second degré et les équations du second degré, j'ai choisi de traiter ces deux sujets en parallèle, afin d'exploiter le mieux possible leurs nombreux liens, mais aussi de montrer ces liens aux élèves. Après une analyse épistémologique des deux sujets et de leurs connexions, j'étudie quelques types de tâches liés aux sujets et je montre les interactions entre étude de fonction, représentation graphique et résolution d'équation. Je présente ensuite brièvement ma séquence d'enseignement, avant d'en faire l'analyse a posteriori.

Mots-clefs : fonction du second degré, équation du second degré, représentation graphique, parabole

Abstract – In my teaching of quadratic functions and equations, I have chosen to teach these two subjects in parallel in order to put forward their numerous links and make them visible to students. After an epistemological analysis of the two subjects and their connections, I study some types of task on each of them and show how they interact in the study of the function, the drawing of the graph and the solving of the equation. Then I briefly present my teaching sequence and give an analysis of what happened

Keywords: quadratic function, quadratic equation, graphic representation, parabola

INTRODUCTION

1. Contexte

J'enseigne les mathématiques au niveau secondaire supérieur (élèves de 15 à 19 ans), dans une école professionnelle d'arts appliqués, à des élèves qui suivent une formation notamment en bijouterie, en création de vêtements, en dessin d'intérieur ou en création multimédia. Mon travail concerne la 2ème année, durant laquelle les élèves n'ont que 2 périodes de 45 minutes de mathématiques par semaine. Par ailleurs ils passent l'examen de maturité professionnelle à la fin de cette 2ème année, et ils n'ont plus de mathématiques dès l'année suivante.

Dans un tel contexte, il n'est pas facile de faire en classe une étude très approfondie du sujet, d'autant plus que les contraintes de calendrier limitent le temps qui peut lui être consacré. Ainsi, le plan d'étude suggère ceci :

> En MP artistique, on insistera beaucoup moins sur les démonstrations et on mettra l'accent sur les applications concrètes ; on évoquera aussi le plus souvent possible l'aspect historique des notions enseignées. (Plan d'études 2006, p. 46)

Suggestion que je n'ai malheureusement pas pu suivre complètement, surtout en ce qui concerne l'aspecthistorique…

Un autre trait caractéristique de l'école est la très grande hétérogénéité des niveaux des élèves, en particulier en mathématiques. Ainsi, certains élèves arrivent directement de l'école obligatoire (et n'étaient pas nécessairement bons en mathématiques), tandis que d'autres ont pu faire une ou deux années de lycée auparavant.

2. Expérience antérieure

J'ai déjà enseigné les fonctions et les équations du 2ème degré l'an dernier, dans une classe similaire. J'avais alors choisi de l'étudier en me basant entièrement sur la forme canonique des fonctions du 2ème degré. Le succès fut mitigé, mais surtout, le temps nécessaire pour arriver à

* DIP Genève – Suisse – nicolas.bartholdi@edu.ge.ch

© Bartholdi N. (2012) Enseignement des fonctions et des équations du second degré dans une école secondaire professionnelle. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1497–1506). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

un résultat acceptable était beaucoup trop long et m'avait contraint à quasi sacrifier plusieurs autres sujets en fin d'année. Je me devais donc, cette année, de trouver un nouveau moyen de l'enseigner plus rapidement, sans pour autant sacrifier certains objectifs. En revanche, j'ai gardé l'idée de traiter conjointement les deux sujets « fonctions du 2ème degré » et « équations du 2ème degré ».

II. ANALYSE EPISTEMOLOGIQUE

Pour ma séquence, j'ai fait le choix de réunir deux sujets bien distincts (même si cette distinction n'est pas toujours claire aux yeux des élèves) : les fonctions du 2ème degré et les équations du 2ème degré ; mon choix se justifie par le fait qu'il y a des connexions et des interactions très profondes entre ces deux sujets. Je vais donc commencer par traiter séparément chacun de ces sujets, avant d'étudier leurs liens.

1. Fonctions du 2ème degré

Les fonctions du 2ème degré s'insèrent dans le thème plus général des fonctions réelles. Ce dernier inclut les fonctions constantes, linéaires ou affines, les fonctions polynomiales, mais aussi les fonctions rationnelles, trigonométriques, exponentielles ou logarithmiques, ou encore des fonctions bien plus exotiques, continues ou non. Ce thème est justement un des fils conducteurs du programme de l'année, ce dernier incluant également les fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmiques en plus des fonctions du 2ème degré.

De façon générale, les fonctions sont un outil essentiel en mathématiques, en tant qu'opérations agissant sur des nombres. Ainsi, les fonctions les plus élémentaires (comme $f: x \rightarrow x^2$, $f: x \rightarrow \sqrt{}(x)$, $f: x \rightarrow \sin(x)$, etc.) ont fait l'objet par le passé (et parfois encore aujourd'hui) d'apprentissage d'algorithmes par les élèves et d'élaboration d'algorithmes par les mathématiciens, et sont aujourd'hui directement accessibles par les touches des calculatrices. D'autre part, les fonctions sont un outil important dans la vie courante, afin de comprendre l'évolution de telle grandeur en fonction du temps (par exemple la température, la démographie, les indicateurs économiques, l'heure de lever ou de coucher du soleil), ou encore le lien entre plusieurs grandeurs (par exemple le temps de parcours, la consommation d'essence et la distance de freinage en fonction de la vitesse, ou la pression atmosphérique et la température d'ébullition de l'eau en fonction de l'altitude).

Du point de vue mathématique, les fonctions polynomiales sont les plus simples, puisque ce sont celles que l'on peut obtenir en utilisant uniquement les opérations « + », « - » et « · » (appliquées aux nombres et à la variable), autrement dit celles qui ne requièrent qu'une structure d'anneau commutatif. Et parmi celles-ci, après les fonctions constantes (de degré 0 et dépendant de 1 paramètre), linéaires (de degré 1 et dépendant de 1 paramètre) et affines (de degré 1 et dépendant de 2 paramètres), les fonctions du 2ème degré (qui dépendent de 3 paramètres) sont les plus simples.

Notons encore que l'ensemble des fonctions de degré $d \leq 2$ forme un espace vectoriel de base canonique $\{ f_1 : x \rightarrow 1 , f_2 : x \rightarrow x , f_3 : x \rightarrow x^2 \}$, ce qui donne un statut très particulier à la fonction élémentaire $f: x \rightarrow x^2$, la plus simple de toutes les fonctions du 2ème degré, à partir de laquelle on peut obtenir toutes les autres.

Tout cela confère un statut didactique très intéressant aux fonctions du 2ème degré : en effet, les fonctions constantes, linéaires et affines sont simples à étudier, tandis que celles du 3ème degré sont déjà beaucoup plus complexes et sont rarement étudiées pour elles-mêmes (en général, après l'étude du 2ème degré, on passe directement à l'étude des fonctions polynomiales en général). Du coup, les fonctions du 2ème degré présentent un niveau de complexité idéalement adapté à mes élèves, à la fois accessibles mais nécessitant un effort soutenu et des apprentissages importants ; et plus généralement, elles représentent une étape intermédiaire quasi-obligatoire entre les fonctions affines et les fonctions polynomiales en général. En bref, les fonctions du $2^{ème}$ degré représentent une occasion idéale de « faire de vraies mathématiques » avec ces élèves.

De plus, l'étude des seules fonctions affines nous retreint beaucoup (au niveau technologique aussi bien qu'au niveau conceptuel), tandis que les fonctions du $2^{ème}$ degré représentent un saut conceptuel essentiel qui ouvre la porte à toutes les fonctions continues. En effet, pour la première fois, une fonction n'est pas représentée graphiquement par une droite, ne peut être tracée à la règle mais nécessite une interpolation, et permet de décrire des processus dont l'évolution n'est pas régulière (dérivée non-constante). Cette complexité met aussi en évidence la nécessité d'avoir des connaissances théoriques beaucoup plus poussées afin de bien représenter graphiquement la fonction, nécessité qui ne saute pas aux yeux lorsqu'on se restreint aux fonctions du 1^{er} degré (les points calculés étant alignés, il est « évident » que le graphe est une droite)...

S'ajoute à cela la grande utilité des fonctions du $2^{ème}$ degré – et des paraboles, qui sont leurs représentations graphiques – pour modéliser ou décrire des situations concrètes. D'une part, à petite échelle, toute fonction lisse peut être très bien approximée par une fonction du $2^{ème}$ degré ; ainsi, par exemple, la forme d'un câble suspendu peut être approximée par une parabole (même si c'est en réalité quasi une chaînette, c'est-à-dire le graphe d'un cosinus hyperbolique). D'autre part, de nombreuses situations font apparaître, de façon exacte ou presque, des fonctions du $2^{ème}$ degré ou des paraboles : ainsi, une aire en fonction de la longueur d'un côté, mais aussi la hauteur ou la trajectoire d'un objet lâché ou lancé, la distance parcourue par une voiture freinant avec une décélération constante, etc. Les fonctions du $2^{ème}$ degré apparaissent aussi souvent dans des problèmes d'optimisation (typiquement, l'aire d'un rectangle de périmètre donné en fonction d'un de ses côtés). Notons toutefois que, dans les situations concrètes, la question du domaine de définition se pose, ce dernier devant parfois être restreint par des contraintes liées à la situation.

Quant aux paraboles, qui sont donc les représentations graphiques des fonctions du $2^{ème}$ degré, elles font désormais partie du langage courant grâce aux antennes paraboliques, plus connues que les miroirs paraboliques des télescopes (ce sont en fait des paraboloïdes de révolution, obtenus par la rotation dans l'espace d'une parabole autour de son axe).

Enfin, du point de vue purement géométrique, les paraboles constituent un sujet à part entière, intégré dans le thème plus large des coniques. Ces dernières étant les intersections d'un cône de révolution avec un plan, la parabole est le cas particulier obtenu lorsque le plan est parallèle à un plan tangent au cône. On peut alors définir le foyer et la droite directrice de la parabole, cette dernière étant alors le lieu géométrique (dans le plan) des point à égale distance du foyer et de la directrice. Notons encore que les paraboles ont un axe de symétrie, et que les représentations graphiques des fonctions du $2^{ème}$ degré sont toujours des paraboles à axe de symétrie vertical.

2. *Équations du $2^{ème}$ degré*

L'étude des équations du $2^{ème}$ degré est beaucoup plus ancienne que celle des fonctions du $2^{ème}$ degré, et remonte même à l'antiquité. Là aussi, elles s'insèrent dans le thème beaucoup plus large des équations, à un niveau de difficulté intermédiaire entre celles du 1^{er} degré (faciles à résoudre), celles de degré 3 ou 4 (très difficiles à résoudre de façon exacte) et celles de degré supérieur ou non-polynomiales (le plus souvent impossible à résoudre de façon exacte, sauf cas particuliers). Comme pour les fonctions, les équations du $2^{ème}$ degré présentent donc l'intérêt didactique majeur d'être accessibles aux élèves, tout en les mettant en difficulté et en les forçant à développer de nouvelles connaissances et compétences.

Les équations du 2$^{\text{ème}}$ degré les plus élémentaires sont de la forme $x^2 = a$; de même que pour les fonctions du 2$^{\text{ème}}$ degré, il y a la fonction élémentaire $f: x \rightarrow x^2$. Ainsi, ces équations élémentaires servent par exemple à déterminer la longueur du côté d'un carré d'aire a, ou le rayon d'un cercle d'aire $\pi \cdot a$, voire la tension à appliquer aux bornes d'une ampoule pour obtenir une puissance donnée, etc. De plus, grâce au théorème de Pythagore, elles servent aussi à calculer la longueur de la diagonale d'un rectangle (voire d'un parallélépipède rectangle) et la longueur du 3$^{\text{ème}}$ côté d'un triangle rectangle dont on connaît la longueur des deux autres côtés.

Les équations de ce type, si elles ont l'air très simple à première vue, cachent déjà une première grande difficulté, liée à l'ensemble de nombres dans lequel on travaille : tant que nous travaillons avec les nombres réels positifs, ces équations ont pour unique solution $x = \sqrt{(a)}$; toutefois, dès lors que nous prenons en considération les nombres négatifs, cette équation peut avoir deux solutions si $a > 0$, et aucune si $a < 0$; point peu intuitif qui pose régulièrement de grosses difficultés aux élèves. De plus, si nous nous restreignons aux nombres rationnels, l'existence ou non de solutions fait appel à des notions théoriques beaucoup plus avancées et relevant d'autres domaines des mathématiques (la théorie des nombres).

Mais en général, les équations du 2$^{\text{ème}}$ degré sont beaucoup plus difficiles à résoudre que l'équation élémentaire, et requièrent soit la connaissance de techniques appropriées, soit une grande ingéniosité. Ces équations apparaissent notamment dans de nombreux problèmes d'optimisation ou de physique (par exemple, pour déterminer le temps de chute et la vitesse lors de l'impact au sol, lorsqu'on lâche un objet d'une certaine hauteur), et en fait dans toutes les situations où des fonctions du 2$^{\text{ème}}$ degré peuvent apparaître.

Notons encore qu'historiquement, avant l'invention du zéro et des nombres négatifs, les équations du 2$^{\text{ème}}$ degré ne pouvaient pas être réunies sous une même forme générale comme aujourd'hui (par exemple $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$), mais devaient être classifiées en plusieurs types bien distincts (par exemple $A \cdot x^2 + B \cdot x = C$, $A \cdot x^2 + C = B \cdot x$, $A \cdot x^2 = B \cdot x + C$, etc.), chaque type requérant une technique de résolution particulière.

3. Liens entre fonctions et équations

Comme nous l'avons déjà dit, la notion d'équation est beaucoup plus ancienne que la notion de fonction. Pourtant, l'étude des fonctions est extrêmement utile pour résoudre les équations – de manière approximative, il est vrai. En effet, en l'absence de technique de résolution exacte de type algébrique, on est ramené à trouver une valeur approchée la plus proche possible de la solution, et donc à faire varier la valeur de x, qui du coup n'est plus l'inconnue mais devient une variable ! Ce changement fondamental de point de vue, en passant de l'équation à la fonction, permet d'utiliser tous les outils élaborés pour analyser les fonctions : dérivée, interpolation, recherche des sommets, de la croissance et de la courbure, etc. Et il est aussi possible d'utiliser la représentation graphique de la fonction pour localiser, dénombrer et approcher les valeurs des solutions de l'équation.

D'autre part, dans de nombreux cas, des fonctions peuvent conduire à des équations (qui n'auraient peut-être pas été posées autrement). Cela peut bien entendu se faire pour des raisons purement mathématiques (recherche des antécédents ou pré-images), mais cela peut aussi s'appliquer à des situations concrètes : ainsi par exemple, si l'on sait que la hauteur d'un objet lâché à l'instant $t = 0$ d'une hauteur de 10m est approximativement donnée par la formule $h(t) = 10 - 5 \cdot t^2$, alors on peut en déduire que, pour connaître la durée de la chute, il faut résoudre l'équation $h(t) = 10 - 5 \cdot t^2 = 0$.

4. *Prérequis*

Pour pouvoir étudier les fonctions et équations du 2ème degré, il convient de maîtriser au préalable les compétences suivantes :

- être capable de calculer avec les nombres réels (notamment les racines carrées) ;
- être capable de calculer sur les polynômes (à une variable) ;
- être capable de tracer approximativement la représentation graphique d'une fonction (en plaçant des points et en interpolant) ;
- être capable de lire sur un graphique les coordonnées d'un point ;
- être capable de repérer un axe de symétrie sur une figure géométrique ;

De plus, les compétences suivantes sont également fort utiles :

- être capable de mettre en évidence un monôme dans une expression algébrique ;
- connaître et être capable d'utiliser le produit remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

III. ANALYSE PRAXEOLOGIQUE

Nous faisons ici usage de la notion de praxéologie mathématique au sens de Chevallard (2002). Une praxéologie est un moyen de décrire toute activité humaine, donc en particulier les activités mathématiques ; elles est constituée d’un quadruplet comprenant un type de tâche T, une technique τ pour résoudre cette tâche, une technologie θ permettant de justifier la technique et une théorie Θ expliquant la technologie. Cet outil est un moyen d’analyser le découpage du travail mathématique.

Dans notre cas, il est intéressant d’analyser comment les fonctions, les équations et les représentations graphiques, ainsi que les différentes façons d'écrire une fonction du 2ème degré, entretiennent des liens à travers les différentes praxéologies qui les concernent.

1. *Fonctions, équations et représentations graphiques*

Comme nous l'avons déjà dit, il y a des liens très forts entre ces trois sujets (au point d'entretenir une certaine confusion chez les élèves). Nous allons brièvement mentionner ci-dessous quelques-uns de ces liens, d'un point de vue praxéologique : Nous ne reprenons pas ici l’analyse de toutes les praxéologies en jeu, mais signalons comment un savoir d’un des domaines peut servir de technique, voire d’élément technologico-théorique, pour permettre de résoudre un type de tâche, ou justifier une technique, qui appartient à un autre des domaines.

La représentation graphique permet :

- de faire une étude approximative de la fonction (allure, sommet, symétrie) ;
- de comprendre et prévoir le nombre de solutions d'une équation ;
- d'approximer les solutions d'une équation.

L'étude de fonction permet :

- de justifier certaines propriétés de la représentation graphique (convexité, symétrie, dérivabilité au sommet) ;

- de tracer une bonne représentation graphique (allure, sommet, symétrie) ;
- d'étudier le nombre de zéros d'une fonction ;
- de mettre en évidence la symétrie (d'axe vertical passant par le sommet), bien visible dans la Formule de Viète (ou formule du discriminant).

La résolution d'équation permet :

- de trouver les zéros de la fonction ;
- ...d'où son axe de symétrie, son sommet et sa représentation graphique !

Du coup, il est extrêmement profitable d'utiliser ces trois cadres et de jouer sur leurs liens pour aborder le sujet. De plus, cela permet aux élèves d'avoir une approche plus riche des mathématiques ; en effet :

> une part importante du travail des mathématiciens est consacrée à interpréter les problèmes qu'ils se proposent de résoudre, à changer de point de vue [...], à les formuler autrement, à les transporter d'un cadre dans un autre... (Douady 1986, p. 10)

2. *Différentes façons d'écrire une fonction du 2ème degré*

Une fonction du 2ème degré peut s'écrire sous au moins quatre formes principales :

- $f(x) = a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c$ (forme développée)
- $f(x) = a \cdot (x^2 + B{\cdot}x + C)$
- $f(x) = a \cdot (x-s)^2 + m$ (forme canonique)
- $f(x) = a \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\beta)$ (forme factorisée)

Les méthodes utilisées pour étudier les fonctions – notamment pour déterminer leurs zéros – et du coup pour résoudre les équations du 2ème degré, dépendent fortement de la forme choisie ! Ainsi, la forme canonique est particulièrement adaptée à la recherche du sommet de la parabole, autrement dit de l'extremum de la fonction, tandis que la forme factorisée permet d'en trouver facilement les zéros. Un des enjeux, dans l'étude de ce sujet, consiste donc à être capable de passer d'une des formes à une autre.

Notons encore que la forme factorisée n'existe pas toujours si l'on travaille avec les nombres réels, et n'existe même que rarement si l'on travaille avec les nombres rationnels (car elle fait souvent apparaître des racines carrées qui ne sont pas toujours des nombres rationnels ou même réels) ; en revanche, elle existe toujours si l'on travaille avec les nombres complexes.

IV. SEQUENCE D'ENSEIGNEMENT

Au vu de l'analyse qui précède, un de mes objectifs essentiels était de bien articuler et combiner les deux sujets « fonctions du 2ème degré » et « équations du 2ème degré », et ce pour deux raisons. D'une part à cause de tous les liens entre ces deux sujets, l'étude de l'un permettant de mieux comprendre l'autre et de lui apporter de nouveaux outils d'analyse. Mais aussi car établir des liens entre différents sujets des mathématiques est un but en soi, qui donne sens et unité à la discipline. Ceci fait d'ailleurs écho au plan d'étude : en effet, dans la liste des objectifs fondamentaux, on trouve l'objectif suivant : « Établir des liens entre des situations qui font intervenir diverses notions mathématiques » (Plan d'études 2006, p. 46).

D'autre part, malgré le peu de temps disponible pour traiter le sujet, il me paraissait essentiel d'aller plus loin qu'une simple maîtrise des techniques, et d'essayer de donner une certaine compréhension du sujet aux élèves – ce que les changements de cadre et l'explicitation des liens entre sujets connexes peuvent permettre. Ceci fait aussi écho à une certaine philosophie des mathématiques, que je partage et qu'il me semble important de transmettre aux élèves, sur le fait que les mathématiques ne se réduisent pas un une série de formules, mais qu'elles font sens et apportent du sens. Enfin, cet objectif est important dans la mesure où, dans quelques années (peut-être moins...), les élèves auront sans doute oublié toutes les formules, mais garderont peut-être quelques souvenirs des liens et de la logique sous-tendant le tout. Le fait que les élèves dont il est question ici fassent leur dernière année de mathématique doit nous inciter d'autant plus à réfléchir à plus long terme.

De ce point de vue, le sujet « fonctions et équations du 2ème degré » me paraissait le sujet idéal pour viser cet objectif, d'une part en raison de ces nombreux liens et jeux de cadres, mais aussi en raison de son niveau de difficulté qui me paraissait idéalement adapté au niveau de mes élèves : comme je l'ai déjà dit, les fonctions du 2ème degré représentent une occasion idéale de « faire de vraies mathématiques » avec ces élèves. Ceci justifiait, à mes yeux, de passer un peu plus de temps sur ce sujet, quitte à rogner un peu sur d'autres sujets de l'année.

Néanmoins – en lien avec le plan d'étude – il me paraissait important d'aborder quelques situations concrètes où des fonctions ou équations du 2ème degré peuvent apparaître, afin de motiver les élèves. J'ai décidé en particulier de baser la première rencontre des élèves avec le sujet sur des problèmes concrets, suivant en cela les recommandations de Matheron et Noirfalise (2009) :

> ... Il va falloir exhiber, montrer, faire rencontrer par les élèves l'une au moins des raisons d'être de ce type de tâches ; sinon l'enseignement est purement gratuit, et un savoir immotivé ne résiste guère plus que le temps que les élèves veulent bien consacrer à son étude... (Op. cité, p. 19)

1. Choix didactiques

Comme il me paraissait essentiel, malgré tout, de leur donner des outils leur permettant de déterminer le sommet d'une parabole et de résoudre des équations du 2ème degré, et vu l'expérience mitigée de l'an passé (j'avais tenté l'approche par complétion du carré, mais celle-ci avait posé trop de problèmes techniques aux élèves), je me suis résolu à leur apprendre les formules de Viète.

Cependant, de crainte que les formules de Viète court-circuitent tout l'intérêt mathématique de la séquence, j'ai décidé de les laisser « pour la fin », et de faire l'essentiel de la séquence avec les outils les plus élémentaires possibles : représentation graphique, développement d'expressions algébriques, résolution d'équations déjà factorisées, recherche de sommet de paraboles dont l'équation est déjà mise sous forme canonique. Ceci dans le but de rendre tout cela accessible aux élèves, sans qu'ils soient bloqués par les difficultés techniques, ou par l'hermétisme de formules efficaces mais peu compréhensibles.

Du coup, j'ai fait le pari de jongler entre les formes développée, canonique et factorisée des fonctions du 2ème degré, en utilisant dans chaque situation celle qui était la plus simple. Je n'exigeais pas des élèves qu'ils soient eux-mêmes capables de passer d'une forme à l'autre, mais qu'ils comprennent que la même fonction pouvait s'écrire sous différentes formes, que chacune avait son utilité propre, et qu'ils soient capables, en développant, de vérifier s'il s'agissait bien de la même fonction.

Je les ai également fait travailler le lien entre étude de fonction et représentation graphique, d'abord en partant des représentations graphiques (construites point par point) pour leur faire découvrir certaines propriétés des paraboles (sommet, symétrie), puis en partant de l'étude de fonction pour tracer rapidement un croquis détaillé ; mais aussi le lien entre résolution d'équations et recherche des zéros de fonctions.

Enfin, j'ai introduit le sujet par des exemples concrets, afin de motiver les élèves ; et j'ai clos le sujet en analysant ces exemples à l'aide des outils étudiés entre deux. J'aurais souhaité faire plus d'exemples concrets ; mais mes choix didactiques et le peu de temps à disposition m'ont empêché d'en faire plus. De plus, j'ai hélas dû totalement renoncer à l'approche historique, pour la même raison.

2. Plan de la séquence

- Dans les leçons précédant la séquence : représentation graphique de fonctions, résolution graphique d'équations, quelques rappels de calcul littéral.
- Pour introduire la séquence, deux exemples concrets : la hauteur d'un objet lâché par la fenêtre et la distance parcourue par une voiture qui freine. Ces deux exemples conduisent à des fonctions du $2^{\text{ème}}$ degré, dont on est amené à chercher les zéros (pour étudier l'impact de l'objet par terre), respectivement le maximum (pour déterminer l'instant où la voiture s'arrête). Ainsi, dès le départ, fonctions, paraboles et équations, sommets et zéros sont associés.
- Tracer, puis décrire et comparer la représentation graphique de la fonction $f : x \to x^2$, puis d'autres fonctions du $2^{\text{ème}}$ degré. Effet du paramètre a sur la forme et l'orientation de la parabole.
- Mise en évidence (graphiquement, puis algébriquement) du fait que $(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 5 = (x-1) \cdot (x-5)$. Description des différentes façons d'écrire une fonction du $2^{\text{ème}}$ degré (formes développée, canonique et factorisée), et discussion des avantages de chacune.
- Détermination du sommet et de l'axe de symétrie, à partir de la forme canonique.
- Détermination des zéros, à partir de la forme factorisée.
- Croquis détaillé d'une fonction donnée simultanément sous les trois formes.
- Résolution graphique, puis algébrique, d'équations du type $x^2 = a$.
- Formules de Viète : extremum d'une fonction, solutions d'une équation (données sous la forme développée).
- Retour aux exemples d'introduction, et nouvel exemple concret (optimisation).

V. ANALYSE A POSTERIORI

Mon objectif d'apporter une certaine compréhension du sujet, des liens et des jeux de cadre aux élèves, était très ambitieux. Le danger était de perdre les élèves entre ces différents cadres (représentations graphiques, fonctions, et équations), ces différentes façons d'écrire une fonction et les différentes techniques associées. J'ai voulu montrer aux élèves un large panorama sur la richesse et la complexité du sujet, en courant le risque que certains élèves s'y noient...

Mon principal objectif (faire travailler des mathématiques plus riches aux élèves) étant à la fois difficile à évaluer, et basé sur le long terme, il m'est actuellement très difficile de dire dans quelle mesure je l'ai atteint. Toutefois, je peux déjà me baser sur quelques indices.

Tout d'abord, globalement, j'ai l'impression que les élèves ont pu mieux entrer dans le sujet que l'an dernier. J'attribue cela au fait que j'ai écarté autant que possible les difficultés techniques qui constituaient le principal obstacle l'an dernier (en particulier la maîtrise de la formule $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et la transformation d'une fonction de la forme développée vers la forme canonique). Ainsi, quelques élèves plutôt en difficulté jusque-là ont assez bien réussi à suivre. Toutefois, dans une des deux classes dans lesquelles j'ai passé la séquence, quelques élèves qui étaient relativement bons jusque-là ont petit à petit décroché, et leurs résultats ont chuté. Peut-être se sont-ils perdus entre ces différents cadres, peut-être n'ai je pas été suffisamment clair dans ma présentation ? Peut-être ont-ils été décontenancés par mon approche, peu habituelle en cours de mathématiques ? Heureusement, d'autres élèves de la même classe ont bien réussi à suivre jusqu'au bout.

Ensuite, j'ai été intrigué et frappé par des remarques que m'ont faites deux très bonnes élèves de l'autre classe. L'une trouvait bizarre ma façon de présenter le sujet, alors qu'on pouvait tout simplement donner les formules... Je suis d'accord avec elle, c'est un choix qui paraît bizarre et qui est très peu « scolaire » ; mais c'est un choix que j'assume. L'autre m'a fait la remarque que mon cours était difficile, car il fallait tout le temps passer d'une façon de voir les choses à une autre, et faire le lien (je pense que cette élève y arrivait très bien, mais devait constater les difficultés de ses camarades.) J'ai abondé dans son sens, et j'étais même très heureux de sa remarque, car elle montre que je touchais à mon principal objectif – au moins pour cette élève, et pour quelques autres ! En bref, j'avais réussi à mettre partiellement de côté les difficultés techniques, afin d'attaquer de front les difficultés conceptuelles !

D'autre part, quelques élèves (ayant eu des cursus divers) avaient déjà vu les équations du $2^{ème}$ degré. De ce point de vue, mon approche différente avait l'avantage de leur montrer les choses d'une façon différente, plutôt que de refaire exactement ce qu'elles savaient déjà. Néanmoins, j'ai eu la grande surprise de constater qu'une de ces élèves, lors de l'épreuve, pour résoudre l'équation $-2 \cdot (x+12) \cdot (x-7{,}8) = 0$, a tout développé et résolu par la formule de Viète (sans faute !)... alors que nous n'avions étudié que la résolution à partir de la forme factorisée !!! Cela montre que cette élève a préféré utiliser la méthode qu'elle connaissait précédemment, même dans un cas où la méthode que j'avais présentée en cours était nettement plus efficace !

VI. CONCLUSION

En définitive, vu les contraintes liées à l'horaire, au calendrier et au niveau des élèves, et en comparaison avec mon expérience de l'an dernier, je suis plutôt satisfait des choix didactiques que j'ai faits. En effet, en y passant beaucoup moins de temps que l'an dernier, j'ai pu respecter le plan d'étude de mon école – en particulier apprendre aux élèves les savoir-faire indispensables, comme résoudre une équation du $2^{ème}$ degré, déterminer le sommet de la parabole et étudier graphiquement une fonction du $2^{ème}$ degré – tout en leur donnant un aperçu des concepts et méthodes mathématiques sous-jacents à ce sujet, et sans être trop bloqué par les difficultés techniques des élèves. Certes, par manque de temps, j'ai dû renoncer à l'approche historique du sujet, et j'ai dû limiter le nombre d'exemples concrets ; mais mon choix de mettre ces derniers en introduction et en conclusion du chapitre me paraît bon, car ils ont pu éveiller l'intérêt des élèves pour le sujet et leur servir de motivation. Le fait de revenir à ces exemples tout à la fin permet aussi de constater les apprentissages effectués, et en quelque sorte de « boucler la boucle ». Peut-être toutefois qu'un plus grand nombre d'exemples concrets aurait plus motivé certains élèves qui ont un peu décroché.

Cependant, je suis conscient que mes objectifs ont été atteints de façon extrêmement variable selon les élèves, et que si certains en ont probablement beaucoup profité, d'autres ont eu beaucoup de mal à entrer dans la démarche, somme toute très exigeante. Si j'ai pu limiter les difficultés liées aux techniques, j'ai en revanche attaqué de front les difficultés conceptuelles, liées notamment au jeu de cadres et aux différentes façons d'écrire une fonction. Cela a posé des problèmes aux élèves, mais c'est sans doute inévitable (dans une certaine mesure) dès lors qu'on s'attaque aux difficultés. J'ai également pu constater que quelques élèves, peu à l'aise techniquement, ont relativement bien réussi, tandis que quelques autres, quoique très à l'aise techniquement, ont eu de la peine à établir les liens et à jongler entre les différents cadres.

Ceci dit, il m'est très difficile de juger déjà maintenant de l'efficacité de mes choix didactiques, car j'ai du mal à juger de ce que les élèves en retiendront à long terme.

En définitive, je pense poursuivre dans cette direction l'année prochaine. Et si le calendrier le permet, j'espère pouvoir y ajouter un petit aperçu historique, ainsi que quelques problèmes concrets supplémentaires.

REFERENCES

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5-31.

Matheron Y., Noirfalise A. (2009) *Enseigner les mathématiques à l'école primaire - Les 4 opérations sur les nombres entiers. Formation initiale et continue des professeurs des écoles.* Paris : Vuibert.

Plan d'études cantonal de Maturité Professionnelle (2006). Département de l'instruction publique de la République et Canton de Genève.