UN MILIEU CINÉMATIQUE POUR L'ÉLABORATION D'UNE PRAXÉOLOGIE « MODÉLISATION » DU THÉORÈME FONDAMENTAL DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Kevin BALHAN*

Résumé – Le présent texte concerne l'apprentissage du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral tel qu'étudié chez des élèves en dernière année de l'enseignement secondaire belge. Nous faisons une analyse épistémologique du théorème qui nous a inspiré la conception d'un milieu, composé de quatre situations, mobilisant mouvements rectilignes de vitesses variables ou non, lois de vitesses et de déplacements, aires, volumes et débits. Les stratégies proposées par les élèves pour répondre aux questions posées dans ces situations et les réactions qu'elles ont suscitées feront l'objet d'une analyse ultérieure.

Mots-clefs : modélisation, épistémologie, dévolution, cinématique, intégration

Abstract – The text is related to the calculus's main theorem learning as it is studied by students in the last year of Belgium secondary school. We make an epistemological analysis of the theorem that inspired us the set up of a situation composed of four mathematics statements and for which we need rectilinear movements with or without variable speeds, speeding and moving laws, areas, volumes and flows. The suggested strategies for these statements and the reactions will be analysed later.

Keywords: modeling, epistemology, devolvement, kinematics, integration

I. INTRODUCTION

Lorsqu'à la fin de leurs études, les nouveaux diplômés en sciences mathématiques en Belgique se lancent dans la profession d'enseignant, ils pensent bien souvent que l'essentiel est dans le rétroviseur et que ce qui reste à venir sera un long fleuve tranquille. Ce n'est pas si simple, il faut réapprendre à faire des mathématiques. Tout professeur qui prépare un cours se doit de se poser certaines questions et d'y répondre, à la fois pour lui-même et pour ses élèves. Des questions telles que : Quels sont les problèmes ou les tâches que l'on cherche à résoudre ou à effectuer ? Comment s'y prendre et pourquoi ? Comment le justifier ? Au-delà, des questions purement mathématiques se posent également des questions sur la manière de gérer les séquences d'enseignement. Dois-je me contenter de donner mon cours ex-cathedra ? Auquel cas, je risque de passer à côté du ressenti des élèves et je ne me donne pas l'opportunité de constater ainsi que de traiter certaines lacunes chez eux qui resurgiront plus tard sous forme d'erreurs. Au contraire, devrais-je plutôt leur donner à chacun une voix au risque de m'écarter de la question de départ dans les méandres de leurs réflexions ? N'y a-t-il pas un juste milieu à trouver entre ces deux pratiques ? Après deux ans d'enseignement, qui m'ont prodigué des grandes joies mais aussi certains malaises, le modeste professeur que je suis souhaite approfondir ces réflexions.

Le travail de recherche qui brièvement présenté ici est l'embryon d'une thèse dont l'idée émerge suite à la lecture d'un traité de didactique écrit Schneider (2008) et plus précisément d'une phrase de Brousseau s'y trouvant :

> Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement « historique » qui restaurerait une forêt de distinctions et de points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique [...] Il ne s'agit pas de reproduire le processus historique mais de produire des effets similaires par d'autres moyens. (Schneider 2008, p. 78)

* Athénée Royal d'Esneux – Belgique – kevin.balhan@hotmail.com

© Balhan K. (2012) Un milieu cinématique pour l'élaboration d'une praxéologie « modélisation » du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE1, pp. 1488–1496). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Dans cette optique, nous avons imaginé une ingénierie didactique composée de quatre situations fondamentales relatives au théorème fondamental du calcul différentiel et intégral visant à modéliser celui-ci et s'appuyant sur une vision épistémologique des sciences et des mathématiques. Après une investigation plus poussée, nous espérons que notre ingénierie pourra faire partie d'une praxéologie de modélisation du calcul intégral destinée à être utilisée dans les classes par des enseignants.

Dans une première section, nous proposons une vision épistémologique et panoramique des idées qui ont mené au théorème fondamental ainsi qu'une liste des différents problèmes ayant motivé le calcul infinitésimal.

Nous verrons ensuite que le théorème fondamental a été entrevu par plusieurs prédécesseurs de Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), bien que la paternité du théorème leur échoît. Les raisons pour lesquelles leurs prédécesseurs sont passés à côté de celui-ci peut nous renseigner sur la façon d'organiser les situations fondamentales à dévoluer aux élèves ou encore à détecter certains obstacles épistémologiques qu'ils pourraient rencontrer. De plus, bien que Leibniz et Newton soient tous deux arrivés aux mêmes paradigmes, les historiens s'accordent à distinguer leurs démarches. Ces deux visions différentes du théorème pourraient être rencontrées dans les classes chez nos élèves et s'apparentent chacune à des problèmes distincts.

Enfin, nous présenterons à la section 3, les situations imaginées et soumises aux élèves sans discuter des propos recueillis mais simplement en explicitant les raisons de nos choix. Nous ne pourrons ici malheureusement présenter les contributions des élèves faute de place.

II. ANALYSE EPISTEMOLOGIQUE DU CALCUL INFINITESIMAL ET DU THEOREME FONDAMENTAL

1. *Raisons d'être du calcul infinitésimal*

La paternité du calcul infinitésimal dont fait partie plus localement le théorème fondamental revient à Newton et Leibniz. Cependant, ils n'ont pas été les seuls à s'y intéresser. Nous verrons à la section suivante que d'autres scientifiques tels que Galilée, Torricelli, Fermat ou encore Barrow ont chacun apporté leur contribution. La plupart des historiens, tels que Kline (1972), relèvent quatre principales catégories de problèmes ayant constitués une source de motivation du calcul infinitésimal :

> 1. Déterminer la vitesse et l'accélération d'un mobile quand on connaît l'espace qu'il parcourt. Inversement, trouver la vitesse d'un mobile et la distance parcourue par celui-ci, à partir de son accélération ;
> 2. Trouver la tangente à une courbe en un point. Ce problème, déjà envisagé dès l'Antiquité à propos des coniques, réapparaît au XVII^{e} siècle, à propos d'autres courbes, dans différents contextes: celui de l'optique où l'on cherche, pour appliquer la loi de réfraction d'un rayon lumineux à travers une lentille, l'angle formé par ce rayon et la normale à la courbe qui délimite la lentille ; également dans l'étude des mouvements non rectilignes où la direction du mouvement d'un mobile en chaque point de sa trajectoire est donnée par celle de la tangente à celle-ci ;
> 3. Optimiser: maximiser la portée d'un canon, déterminer les meilleurs proportions d'un tonneau, les distances extrêmes d'une planète au soleil... ;
> 4. Calculer la longueur d'une courbe, les aires délimitées par des courbes, les volumes délimités par des surfaces courbes, déterminer le centre de gravité de solides curvilignes. Ces problèmes, déjà abordés par les Grecs, sont remis au goût du jour, par le biais de l'astronomie où l'on souhaite calculer la distance parcourue par une planète en un temps donné, l'attraction exercée par un corps non ponctuel sur un autre. (Cité par Schneider-Gillot 1988, p. 153)

Raymond (1976) signale encore deux domaines où l'infini semble engagé :

1. L'arithmétique et la combinatoire: De Roberval à Pascal et Leibniz, les savants prennent l'habitude d'utiliser le triangle arithmétique pour opérer des calculs d'aires par sommations d'infinitésimaux ;
2. La géométrie: La liste des domaines où apparaît le thème infinitiste au XVII siècle ne serait pas complète si l'on n'y faisait pas mention des réflexions de Desargues sur l'infini en géométrie projective. (Cité par Schneider-Gillot 1988, p. 154)

Afin de construire notre ingénierie didactique, nous avons cherché des sources d'inspiration dans les quatre premières catégories. Le savoir que l'on vise à enseigner aux élèves étant le théorème fondamental, lui-même faisant partie du cours d'analyse, mais loin de nous l'idée que les deux derniers domaines ne soient pas digne d'intérêt.

2. *Raisons d'être du théorème fondamental*

Bien que la découverte du théorème fondamental de l'Analyse soit généralement attribuée à Newton et Leibniz. Celui-ci avait pourtant été entrevu par certains de leurs prédécesseurs. En effet, il apparaît déjà sous forme embryonnaire, dans les recherches cinématiques de Galilée. Ce dernier avait pris l'habitude de représenter le mouvement rectiligne d'un point animé d'une vitesse variable au moyen du graphe vitesse/temps. Il interprétait l'aire située sous ce graphe comme la distance totale parcourue par le point. Sachant cela, Torricelli réalise qu'un problème de taux de variation est l'inverse d'un calcul d'aire: calculer d'une part la vitesse connaissant l'espace et d'autre part l'espace au départ de la vitesse sont des problèmes en quelques sorte inverses. Or la vitesse est le taux de l'espace parcouru et l'espace est l'aire sous le graphe de la vitesse. Néanmoins, Torricelli n'en a tiré aucune idée sur un moyen de calculer une aire en général.

Fermat a, quant à lui, développé une technique consistant à rectifier les courbes en jouant conjointement sur le tableau des quadratures et sur celui des tangentes. Voici comment Boyer (1949) décrit sa procédure.

Prenons un point *P* quelconque sur une parabole semi-cubique ($y=kx^{3/2}$) d'abscisse $OQ=a$ et d'ordonnée $PQ=b$. Fermat détermine tout d'abord la sous-tangente: $TQ=2a/3$. Si l'on élève une ordonnée $P'Q'$ jusqu'à la tangente, à une distance $QQ'=E$ de l'ordonnée PQ, la longueur du segment PP' s'exprime, en fonction de a et de E, comme

$$PP' = E(9k^2 \frac{a}{4} + 1)^{\frac{1}{2}}$$

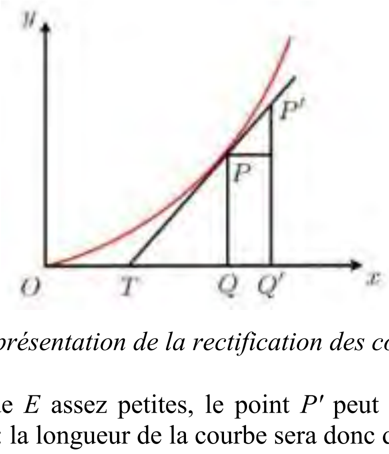

Figure 1 *– Représentation de la rectification des courbes chez Fermat*

Mais, si l'on prend des valeurs de *E* assez petites, le point *P'* peut être considéré comme appartenant autant à la courbe qu'à la tangente: la longueur de la courbe sera donc donnée par une somme de segments tels que *PP'*. Par ailleurs, la somme de ces segments peut être regardée comme l'aire sous la courbe

$$y^2 = 9k^2 \frac{x}{4} + 1$$

L'emploi des tangentes montre donc que la quadrature de cette dernière fournit la rectification de la première. (Cité par Schneider-Gillot 1988, p. 189)

> Fermat perçoit la liaison entre les deux questions de la quadrature et de la tangence, mais sans la thématiser pour elle-même ni la traiter sur le seul plan algébrique" (Raymond cité par Schneider-Gillot 1988, p. 190)

Barrow, quant à lui, obtient un résultat géométrique qui contient le germe du théorème fondamental. Il s'énonce comme suit: soit *y=f(x)* une fonction croissante et positive et *z=A(x)* l'aire sous *y=f(x)* entre les bornes 0 et *x*. Soit encore les points $D(x_0, 0)$;$E(x_0,f(x_0))$;

$F(x_0, A(x_0))$ et *T* le point de O_x tel que $DT=DF/DE=A(x_0)/f(x_0)$.

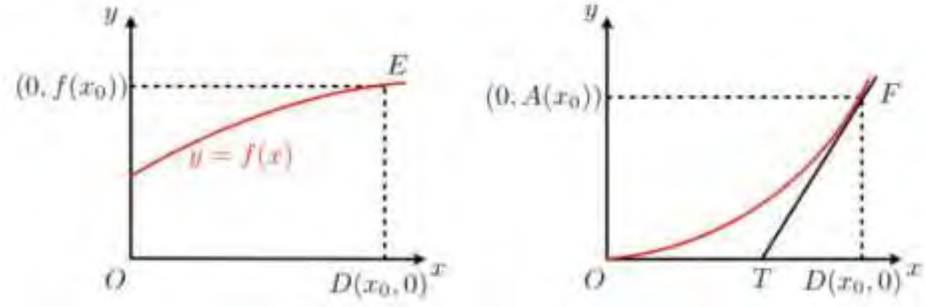

Figure 2 *– Germe du théorème fondamental*

Barrow affirme et démontre que la droite *TF* rencontre la courbe *z=A(x)* au seul point *F*. Ce résultat signifie que la pente $A'(x_0)$ de la tangente *TF* égale $f(x_0)$. Barrow considère la tangente comme une droite qui touche la courbe en seul point, et non comme une droite dont la pente est donnée par la limite d'un taux de variation.

> Torricelli, Fermat et Barrow sont passés bien près du théorème fondamental de l'analyse. Mais ils n'ont pas su en dégager le sens profond. […] Tous trois n'entrevoient dans leurs découvertes respectives qu'un fait de nature tantôt cinématique, tantôt géométrique et non des exemples de ce qui pourrait devenir un nouvel algorithme de calcul. […] En ce sens, Newton et Leibniz sont bien les fondateurs du calcul infinitésimal. […] Il a fallu attendre Newton et Leibniz pour que soit mis en évidence le lien de réciprocité des processus d'intégration et de dérivation. (Schneider-Gillot 1988, p. 190)

Percevoir intuitivement une parenté entre les différents problèmes mobilisant le processus de différentiation est une chose, mais voir dans cette parenté la présence d'un calcul nouveau en est une autre.

3. Deux approches distinctes du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Distinguons deux formulations de ce théorème qui, d'un point de vue épistémologique, sont fort éloignés l'un de l'autre.

<u>Théorème 1</u> : Si *f* est continue sur [*a,b*], alors elle admet des primitives sur cette intervalle, et, pour toute primitive *F* de *f* sur [*a,b*], on a

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

<u>Théorème 2</u> : Si *f* est de classe C_1, alors

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Considérons la représentation graphique de la fonction *f* sur laquelle porte l'hypothèse du théorème dans chacun des deux cas.

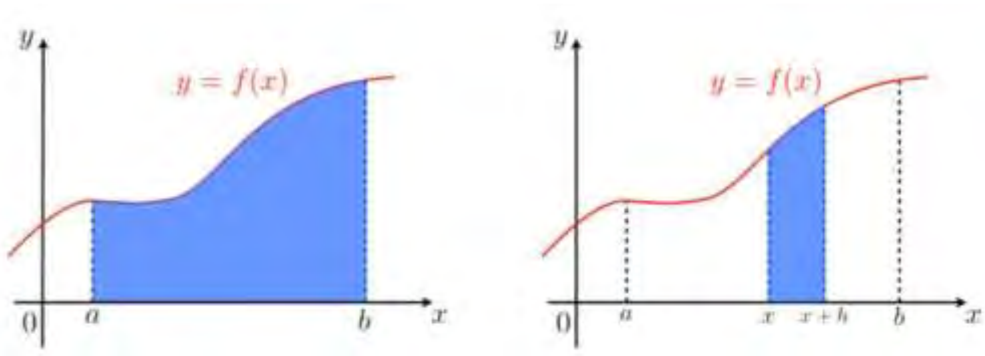

Figure 3 *– Représentation graphique du théorème fondamental chez Newton*

Dans le premier énoncé, l'intégrale en question représente l'aire sous la courbe représentative de *f* entre les bornes *a* et *b*. Pour prouver que le calcul de cette aire s'obtient en soustrayant l'image en *a* d'une primitive *F* de *f* de son image en *b*, on démontre que le taux d'accroissement de la fonction intégrale possède une limite égale à *f(x)* :

$$\lim_{Dx \to 0} \left[\frac{\int_{x}^{x+Dx} f(u)\,du}{Dx} \right] = f(x)$$

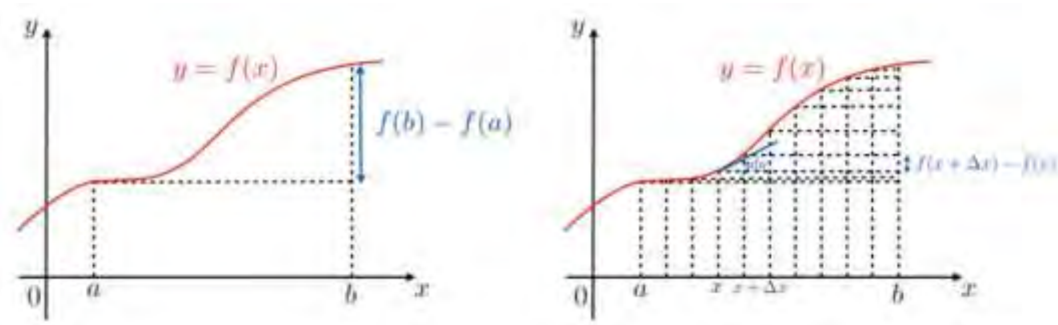

Figure 4 *– Représentation graphique du théorème fondamental chez Leibniz*

Dans le second énoncé, l'intégrale en question mesure la « dénivellation » de la courbe représentative de *f*, entre les bornes *a* et *b*, soit *f(b)-f(a)*. Chaque dénivellation partielle de la fonction, correspond à un « petit incrément » *dx* et est approximée par *dy = f'(x) dx* que nous appelons « différentielle ». La dénivellation totale de la fonction, entre les bornes *a* et *b*, qui est la somme de ses dénivellations partielles, vaut donc la limite, pour *dx* tendant vers 0, de la fonction définie par la somme de ces différentielles depuis *a* jusque *b*. Nous désignerons cette limite par « intégration des différentielles » et nous la noterons

$$\lim_{dx \to 0} \left(\sum dy \right)$$

Dans cette première vision, on dérive la fonction intégrale ; autrement dit, l'opérateur de dérivation succède à l'opérateur d'intégration. L'opérateur de dérivation porte sur la fonction définie par la « somme ». Dans la seconde vision, on intègre des différentielles c'est donc l'opérateur de dérivation qui intervient en premier et celui d'intégration en second. L'opérateur de dérivation intervient sur les termes de la somme. Ce qui fait que l'idée de somme passe à l'arrière-plan dans le premier cas et reste à l'avant-plan dans le second.

III. UNE INGENIERIE DIDACTIQUE QUI S'INSPIRE DE L'HISTOIRE

Nous avons proposé une suite de problèmes à des élèves de dernière année du Secondaire en Belgique (17-18 ans) ayant choisi une option forte en mathématiques (8h par semaine) et en sciences (7h par semaine). On peut donc supposer qu'ils ont acquis les compétences relatives aux concepts de fonction, de limite et de dérivée mobilisés dans le théorème fondamental. Dans un premier temps, le professeur s'abstenait de tout commentaire à propos des problèmes proposés. Il s'est contenté de leur demander de former des groupes de trois ou quatre élèves afin de favoriser les débats et leur a expliqué qu'il n'interviendrait que pour les relancer « sans leur vendre la mèche » au cas où ils seraient bloqués dans leurs démarches. Il demandait également aux élèves de répondre individuellement et par écrit à chacun de ces problèmes.

Nous n'analyserons pas ici, faute de place, les propos et les travaux recueillis chez les élèves interrogés. Nous nous contenterons d'expliquer ce qui a motivé le choix des problèmes que nous leur avons soumis. Voici les quatre questions qui ont été dévoluées aux élèves :

1. Le graphe ci-dessous exprime, à chaque instant, la vitesse d'un mobile qui se meut sur un axe horizontal. Quel est l'espace parcouru par ce mobile entre les instants $t = 0$ et $t = 4$?

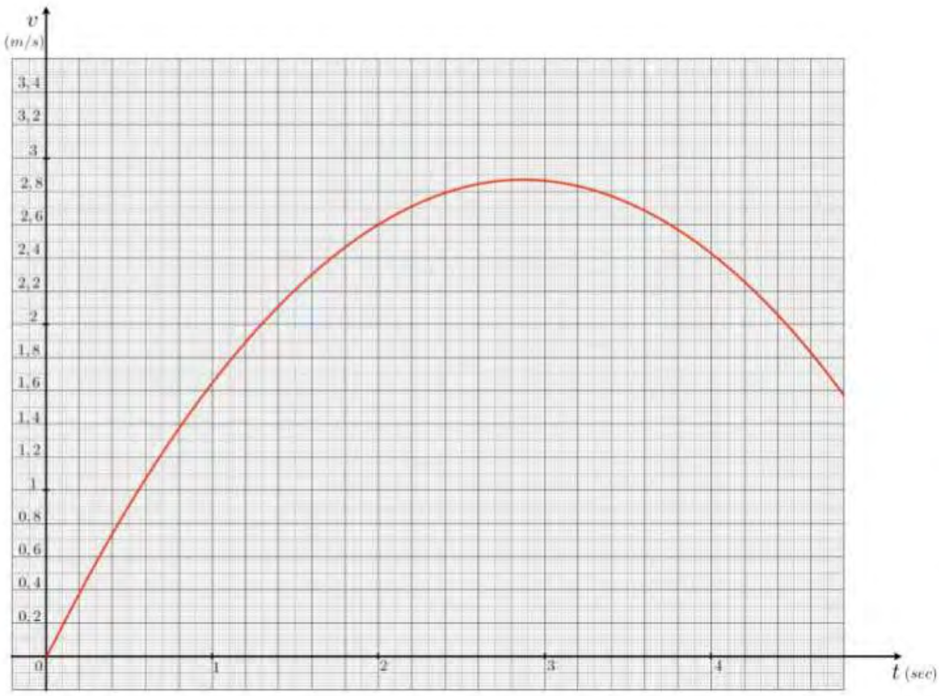

Figure 5 – *Graphe vitesse/temps d'un mobile se mouvant sur un axe horizontal*

2 . Considérons un mobile en mouvement sur un axe horizontal dont la vitesse à chaque instant est décrite par la loi $v(t) = -t^2/3 + 2t$. Nous savons que l'espace parcouru par ce mobile est de 9m à l'instant $t = 0$. Comment déterminer l'espace parcouru par le mobile à chaque instant ?

3. Trouver une méthode qui permettrait de déterminer l'aire d'une région S délimitée par le graphe d'une fonction continue f (où $f(x)$ est positif ou nul), les droites $x = a$, $x = b$ et l'axe O_x.

4. Considérons une citerne en forme de cylindre droit de section parabolique. Une pompe alimente cette cuve ; elle est réglée de telle sorte que le niveau y monte régulièrement de 1 cm/min. A quel moment le débit de la pompe sera-t-il de 100 cm^3/min ?

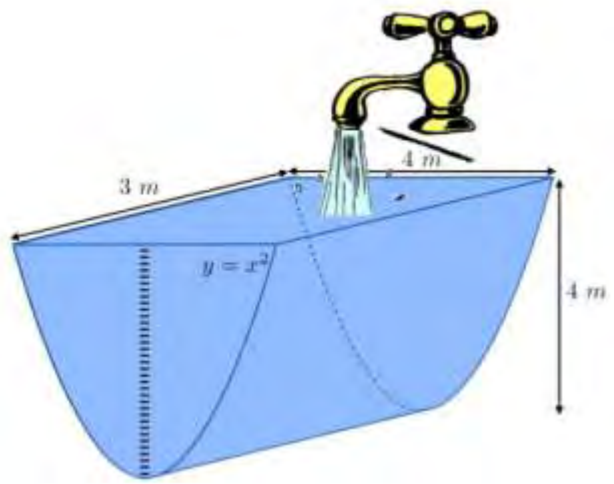

Figure 6 – *Cuve*

Ces quatre problèmes se résolvent au moyen d'un calcul de primitive mais il faut prendre conscience du théorème fondamental, soit en dérivant la fonction intégrale, soit en intégrant des différentielles. C'est là le but de ces quatre situations. Chacune d'entre elles étant destinée à jouer un rôle bien précis dans le cheminement vers celui-ci.

Le but du premier problème est d'interpréter, à l'instar de Galilée, l'espace total parcouru par le mobile pendant les quatre premières secondes comme étant l'aire sous la courbe représentative de la vitesse sur cet intervalle de temps.

Pour ce qui est de la seconde activité, souvenons nous que Torricelli, Fermat et Barrow n'entrevoient dans leurs découvertes respectives qu'un fait de nature tantôt cinématique, tantôt géométrique et non des exemples de ce qui pourrait devenir un nouvel algorithme de calcul. N'ayant à notre disposition que l'expression algébrique de la vitesse du mobile il faut, pour répondre à la question, imaginer un processus d'« anti-dérivation » qui est un passage obligé si l'on veut appréhender le théorème fondamental. Or, il est bien connu pour des élèves de dernière année qu'on obtient l'expression algébrique de la vitesse après avoir dérivé l'expression algébrique de l'espace parcouru.

Torricelli a eu beau associer espace parcouru à aire, il n'en a tiré aucune idée sur un moyen de calculer une aire en général. Ce qui montre bien que ce n'est pas parce qu'on interprète l'espace parcouru par un mobile comme étant l'aire sous la courbe que l'on peut en dégager nécessairement une méthode générale de calcul d'aire. Le but de la troisième situation est celui-là.

Enfin à travers le dernier problème qui se ramène à la dérivée d'une fonction-aire, nous souhaitions introduire une idée de variation dans le contexte des aires et faire percevoir aux élèves la réciprocité entre les problèmes de dérivation et d'intégration. Du point de vue historique, il a fallu attendre Newton pour que l'aire et le volume soient pensés comme des « quantités variables » (fonction d'une abscisse). En effet, une imagerie cinématique est sous-jacente à la conception des courbes et des surfaces chez Newton :

> Je vais considérer dans cet ouvrage les grandeurs mathématiques non pas comme étant formées de parties constantes même infiniment petites mais comme étant engendrées par un mouvement continu. Les lignes sont décrites et par là générées non par addition de parties mais par un mouvement de lignes, les solides par un mouvement de surfaces. Ces générations se réalisent vraiment dans la nature et on peut les observer tous les jours dans le mouvement des corps. De cette manière, nos ancêtres ont indiqué la génération du rectangle comme s'il était décrit par un segment mobile perpendiculaire à un segment fixe. (Newton cité par Schneider-Gillot 1988, pp. 363-364)

C'est pourquoi nous avons imaginé le remplissage d'une cuve particulière de forme parabolique sur toute sa profondeur. Notre objectif dans le choix des variables du problème est de faire émerger l'idée de variation puisque, dans ce contexte, l'idée de balayage de solide par une surface est « naturelle » et pour passer à l'idée de balayage sous une courbe il faut ramener le calcul du volume d'eau dans la cuve à un calcul d'aire sous la courbe racine carrée. L'aire sous cette courbe est alors pensée comme une aire dépendant de l'abscisse h qui représente le niveau d'eau atteint par l'eau dans la cuve. Pour injecter cette idée de balayage sous la courbe, nous avons assimilé le niveau h au temps en faisant évoluer ces deux mesures de la même manière. Nous nous sommes pour cela, référés à l'initiative d'ultima ratio prise par Newton.

> Avant d'être pensée comme quantité dépendant de l'abscisse x, l'aire sous une courbe est pensée par Newton en terme de quantité variant en fonction du temps. Toute autre quantité « variable » est également considérée de la sorte, du moins au début de son oeuvre. Effectivement, le concept de base choisi par Newton au début de son oeuvre n'est pas celui d'ultima ration: il construit d'abord sa théorie à partir des concepts de fluente et de fluxion. Une fluente x est précisément une quantité qui évolue en fonction du temps, tandis que sa fluxion x' représente sa vitesse ou, comme le dit Newton lui-même, son « taux d'écoulement dans le temps ». C'est par le biais des fluentes et des fluxions que Newton définit, dans un premier temps, l'objet du calcul infinitésimal: étant donné une relation entre deux fluxions, trouver la relation entre leurs fluxions et inversement. Le balayage de l'aire sous une courbe par le segment de hauteur $f(x)$ est donc à l'origine un balayage temporel. Newton imagine un point qui se meut dans le temps sur l'axe des x ; à hauteur de ce point, il se représente un segment qui balaye l'aire dans le même temps. Il envisage d'abord les variations temporelles concomitantes de l'abscisse et de l'aire et exclut ensuite le facteur temps pour ne plus tenir compte que de la seule dépendance entre l'aire et l'abscisse. Pour éliminer le paramètre temps dans la suite de son oeuvre, Newton choisit une variable: soit x dont il suppose la vitesse uniforme: par exemple, $x' = 1$; il accorde alors la priorité non plus au concept de fluxion lui-même mais au rapport de deux fluxions. C'est-à-dire l'ultima ratio :
>
> $$\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx}$$
>
> (Schneider-Gillot 1988, p. 366)

Dans le problème qui nous occupe l'ultima ratio en jeu est :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}.\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dh}$$

Bien que l'on puisse remettre en cause l'existence d'une pompe réglée de la sorte (dont le débit croît continuellement), nous avons choisi de donner une vitesse uniforme de montée au niveau d'eau dans la cuve. Ce choix permet de ne plus tenir compte que de la dépendance entre l'aire sous la courbe racine carrée et l'abscisse considérée, à savoir le niveau h d'eau dans la cuve.

REFERENCES

Boyer C. (1949) *The History of the calculus and its Conceptual Developpement.* New-York : Dover Publications.

Castelnuovo E. (1965) *L'objet et l'action dans l'enseignement de la géométrie intuitive,* dans *L'enseignement des mathématiques, TOME II, Etude du matériel.* Paris : Delachaux et Niestlé.

Kline M. (1972) *Mathematical thought from ancient to modern times,* Oxford : Univ. Press.

Raymond P. (1976) *La philosophie dans tous ses états : De Platon à Hegel, dans Philosophie et calcul de l'infini.* Paris. F. Maspero.

Schneider M. (2008) *Traité de didactique des mathématiques.* Liège : Les Editions de l'Université de Liège.

Schneider-Gillot M. (1988) *Des objets mentaux « aire » et « volume » au calcul des primitives.* Louvain-la-Neuve : Université Catholique de Louvain.