ANALYSE D'UNE DIDACTIQUE D'INTERVENTION AUTOUR DU DÉVELOPPEMENT D'UNE ACTIVITÉ DE CONTRÔLE : STRATÉGIES D'ENSEIGNEMENT ET INDICATEURS DE CONTRÔLE CHEZ LES ÉLÈVES DU SECONDAIRE

Mireille SABOYA*

Résumé – Devant une production mathématique, l'élève devrait être capable de vérifier son résultat, de juger de la cohérence, de la validité, de la rigueur de sa démarche et de s'engager de manière réfléchie dans une résolution, en faisant preuve de jugement. Ces actions traduisent ce que nous avons appelé un *contrôle* sur l'activité mathématique. Une expérimentation avec des élèves de 15-16 ans a été menée afin de développer chez eux une telle attitude. Nous rapportons dans ce texte les stratégies d'enseignement susceptibles de développer le contrôle et les indicateurs de contrôle chez les élèves, résultats issus d'une recherche collaborative menée avec une enseignante.

Mots-clefs : contrôle, stratégies d'enseignement, indicateurs de contrôle chez les élèves, algèbre, exposants

Abstract – In front of a mathematical solution, students need to be able to verify their results, judge of the coherence, validity and rigor of that solution and engage reflectively in a solving process using their judgment. These actions illustrate students' control over their mathematical activity. An experiment with students aged 15-16 was conducted to develop among them such an attitude. We report in this text teaching strategies that may develop control and monitoring indicators among students from a collaborative research conducted with a teacher.

Keywords: control, teaching strategies, control indicators among students, algebra, exponents

I. INTRODUCTION

Certaines composantes de l'activité mathématique de l'élève telles que la vérification du résultat obtenu, la justification d'un énoncé, d'une proposition ou de la démarche adoptée dans un problème, un engagement réfléchi dans la tâche, la validation reflètent l'acquisition de ce que nous avons nommé le *contrôle*. Plusieurs études montrent l'importance de ces composantes dans l'activité mathématique chez l'élève (Balacheff 1987 ; Artigue 1993 ; Butlen et al. 1989), et chez les mathématiciens (Hadamard 1945/1975 ; Nimier 1989 ; Smith et Hungwe 1998), cette activité apparaissant également centrale dans le contexte scolaire québécois (MELS 2003, 2006). Néanmoins différentes recherches (Delorme 1985 ; Richard 1998 ; Coppé 1993 ; Dib 2000-01 ; Polya 1945/1965 ; Vivier 1998 ; Chalancon et al. 2002 ; Artigue 2002 ; Cortés et Kavafian 1999 ; Bednarz et Janvier 1992 ; Schmidt 1994 ; Richard 1998 ; Butlen et Pezard 1990-91 ; Schoenfeld 1985) soulignent le peu de *contrôle* exercé par les élèves face à l'activité mathématique et ce, à tous les niveaux et dans différents domaines des mathématiques. Ce constat rejoint celui émis par les enseignants en exercice sous l'angle d'une vérification du résultat, de la démarche.

Cette double préoccupation sur le contrôle que les élèves exercent en mathématiques, provenant à la fois des travaux menés en recherche en didactique des mathématiques et de la pratique à travers ce qu'expriment les enseignants a mené à une recherche collaborative avec une enseignante de secondaire 3 (élèves de 15-16 ans) autour de l'algèbre et plus précisément sur les puissances d'un nombre (Saboya 2010). D'une part, nous avons cherché à cerner les situations qui ont été élaborées conjointement et les stratégies d'intervention mises en place en classe susceptibles de favoriser le développement d'une activité de contrôle chez les

* Université du Québec à Montréal – Canada – saboya.mireille@uqam.ca

élèves. D'autre part, nous avons cherché à mieux comprendre ce qu'il advient sur le plan du développement du contrôle chez les élèves du secondaire au cours de ces situations. L'analyse des rencontres avec l'enseignante et de l'expérimentation en classe a ainsi permis d'éclairer une didactique d'intervention autour du développement du contrôle.

Pour fonder l'élaboration des situations didactiques, nous avons mené une analyse théorique du concept de contrôle.

II. CADRE CONCEPTUEL SUR LE CONTROLE LES DIFFERENTES COMPOSANTES DU CONTROLE

L'analyse de différentes recherches confirme que, dans une certaine mesure, le concept de contrôle a été étudié sous plusieurs angles, même si tous les auteurs n'utilisent pas explicitement le mot « contrôle »[1].

1. *Le contrôle : définition et composantes*

L'activité de *contrôle* est associée pour nous à un processus qui se développe, se construit sur du *long terme* chez l'élève. Il se traduit par une *réflexion* de la part de l'élève, sur toute action, sur tout choix tout au long de la tâche : au début, en cours ou à la fin de la résolution ; par la capacité à *prendre des décisions* de façon réfléchie, rationnelle ; par une *prise de distance* par rapport à la résolution ; par le recours aux *fondements* sur lesquels on s'appuie pour valider.

Le contrôle est présent tout au long de la résolution de la tâche. *En amont de la réalisation*, le contrôle permet une anticipation, les élèves posent a priori une condition de validité du résultat avant de le connaître. Il assure une mobilisation des connaissances en jeu, il se manifeste par une relation entre les données et le but à atteindre. *En aval de la réalisation*, le contrôle assure un travail rétrospectif, une vérification, une validation du résultat pour dépasser le doute et acquérir une certitude. Si nécessaire, il permet un retour sur la tâche et contribue à une évaluation des décisions d'action. Il passe également par la perception des erreurs. *En début ou en cours de processus*, le contrôle se manifeste par des prises de décision sur la direction à prendre, la stratégie la plus efficace, la moins coûteuse en temps, par des évaluations périodiques tout au long de la résolution.

Pour ne pas alourdir la lecture, nous faisons le choix de ne présenter que quatre composantes du contrôle issues de différentes lectures, elles permettront d'éclairer l'analyse exposée dans la partie III.

Vérification (Hadamard 1945/1975 ; Cipra 1985 ; Schoenfeld 1985 ; Margolinas 1989 ; Coppé 1993 ; Kargiotakis 1996 ; Richard 1998). On peut distinguer deux types de vérification :

- Une vérification provenant d'une anticipation, on anticipe le résultat et on exerce ensuite une vérification face au résultat obtenu pour le confronter à celui anticipé.
- Une vérification sans anticipation préalable, une fois le résultat obtenu on se pose les questions suivantes « a-t-il du sens dans le contexte? », « est-il conforme à ce qui est demandé? ». La vérification requiert un retour à la tâche, à la question posée. Elle peut porter sur la démarche, la méthode utilisée ; sur le choix de la méthode utilisée ; sur le résultat lui-même. Elle se manifeste à travers un questionnement sur le caractère pertinent de ce résultat, sur sa nature, sur sa forme globale. La vérification permet de dépasser le doute.

[1] Nous avons fait le choix de ne pas traiter des recherches menées autour de l'argumentation et de la preuve.

Engagement réfléchi (Margolinas 1989 ; Schmidt 1994 ; Kargiotakis 1996). L'engagement réfléchi s'exprime à travers une prise de distance, un arrêt devant la tâche avant de résoudre, une réflexion sur l'action. Dans le cas de la résolution de problème, il est relié à la représentation appropriée du problème et dans la construction d'un schéma mathématique pertinent et cohérent. Il s'exprime en termes de jugement réfléchi, d'esprit critique, avant de résoudre comme par exemple quand l'élève est face à des expressions qui ne peuvent se réduire ou un temps d'arrêt marqué devant la simplification d'expressions avec des additions au numérateur et/ou au dénominateur qui sont source de difficultés chez les élèves.

Validation (Perkins et Simmons 1988 ; Lee et Wheeler 1989 ; Saboya 2010). La validation s'appuie sur des fondements (qui vont être explicités) qui permettent de juger du caractère vrai, faux, partiellement vrai de ce qui est avancé. Dans le cas d'énoncés algébriques, elle se traduit par une coordination entre arithmétique et algèbre, par la capacité de passer d'un cadre à l'autre. Ce type de validation permet le développement d'une sensibilité aux erreurs, aux difficultés. La validation peut également s'exprimer à travers l'utilisation d'écritures équivalentes, une flexibilité dans le passage d'une écriture à l'autre; elle requiert un retour au sens des concepts en jeu.

Perception des erreurs/ Sensibilité à la contradiction / Capacité de dépasser la contradiction (Piaget 1974 ; Balacheff 1987 ; Kargiotakis 1996). La sensibilité à la contradiction peut provenir d'une anticipation déçue, d'un effet de surprise face à un résultat qui ne correspond pas à celui attendu. Il peut toutefois ne pas être relié à l'anticipation. Dans une classe, la sensibilité à la contradiction peut s'exprimer à travers une mise en commun des résultats obtenus dans le groupe qui ne sont pas équivalents les uns des autres. Le dépassement de la contradiction est issu d'un retour sur les concepts en jeu, sur leur signification.

Cette conceptualisation du concept de contrôle a guidé la chercheure dans les arguments amenés dans le choix des tâches susceptibles de développer une activité de contrôle chez les élèves lors des rencontres avec l'enseignante. Au-delà du choix des tâches, le rôle de l'enseignant est à prendre en considération pour favoriser le développement d'une telle activité. Les études de Margolinas (1992 ; 1993) s'intéressent à la place de l'enseignant en lien avec la validation.

2. *Des stratégies d'enseignement autour du développement du contrôle*

Margolinas (1993) présente ce qu'elle nomme la phase de conclusion qui prend place à la fin de la résolution d'un problème par l'élève. « Cette phase de conclusion est sous le contrôle du maître, et peut s'analyser selon le rôle qu'y joue le maître » (p. 29) Une phase de conclusion est une phase d'évaluation si l'enseignant émet un jugement sur la validité du travail de l'élève. Nous pensons que cette phase ne permet pas le développement d'une activité de contrôle chez l'élève, celui-ci n'est pas amené à réfléchir sur la validité de sa démarche. C'est quand la phase de conclusion est une phase de validation qu'une activité de contrôle s'exerce. Dans ce cas, la situation permet à l'élève de statuer sur la validité de sa démarche, il est alors responsable de la totalité de ses actions. La chercheure souligne toutefois que ces définitions ne rendent pas compte de toutes les possibilités. En effet, l'enseignant peut intervenir en donnant un contre-exemple, on ne se situe alors ni dans une phase d'évaluation ni de validation. Margolinas (1993) introduit la phase de bilan qui est une phase intermédiaire entre ces deux phases, dans laquelle l'enseignant peut intervenir activement quand c'est nécessaire.

> Un des rôles de la phase de bilan est de permettre la formulation publique des méthodes de résolution par les élèves qui sont envoyés au tableau, où ces élèves doivent formuler leurs stratégies (Margolinas 1992, p. 136).

La phase de bilan rendant publiques les stratégies devant la classe est intéressante du point de vue de l'enseignant qui peut alors reformuler, renvoyer des questions au reste de la classe à des fins de validation.

À travers l'exemple d'une tâche retenue par la chercheure et l'enseignante, nous allons rapporter sur quelle base s'est fait un tel choix et nous allons expliciter l'analyse de la tâche effective en classe sous l'angle des stratégies d'enseignement susceptibles de développer une activité de contrôle et autour des indicateurs de contrôle chez les élèves. L'exemple présenté ici a permis d'exemplifier certaines composantes du contrôle issues de l'analyse théorique.

III. STRATEGIES D'ENSEIGNEMENT FAVORISANT UNE ACTIVITE DE CONTROLE ET INDICATEURS DE CONTROLE CHEZ LES ELEVES : UN EXEMPLE AUTOUR DE LA RESOLUTION DE PROBLEMES

L'expérimentation a eu lieu en secondaire 3 (élèves de 15-16 ans) autour de l'algèbre, plus précisément sur les puissances. L'exemple choisi ici, *les abeilles*[2], relève de la résolution de problèmes et prend place au tout début de la séquence d'enseignement, c'est la deuxième situation traitée visant à donner du sens à l'écriture exponentielle. La situation est la suivante :

Abeilles

Un essaim d'abeilles compte environ 60 000 individus. Une pauvre petite abeille a attrapé une maladie contagieuse et mortelle, sans le savoir elle revient dans sa ruche. Cette maladie se propage au rythme suivant : tous les jours, chaque individu atteint transmet la maladie à 5 autres individus puis meurt. Dans combien de temps, l'essaim sera-t-il complètement décimé?

Figure 1 *– Mise en situation du problème des abeilles*

1. Les arguments invoqués de part et d'autre pour retenir la tâche

Cette situation a été retenue par la chercheure et l'enseignante pour des raisons différentes. Le cadre de référence sur le contrôle guide le choix de la tâche par la chercheure. Deux raisonnements différents peuvent être considérés. On peut raisonner en exposant, on cherche n (le nombre de jours) tel que $5^n > 60\,000$, 5^n représente le nombre d'abeilles mortes le jour n. Dans ce cas, on ne prend pas en considération les abeilles mortes les jours précédents. Pour cela, il faut plutôt raisonner en somme des exposants de 5, on cherche n tel que $1+5+5^2+\ldots+5^n > 60\,000$. Ces deux démarches n'ont pas de conséquence sur la réponse ($n = 8$ jours dans les deux cas) à cause de la donnée 60 000. Elle aurait eu une conséquence si l'effectif avait été autre comme par exemple de 80 000. Il y a ainsi deux démarches différentes qui amènent à une même réponse, ce qui ouvre un espace de discussion sur la validité des démarches : puisqu'on obtient le même résultat, les deux démarches sont-elles équivalentes ? De plus, nous pouvons remarquer que le contexte prête à plusieurs interprétations et débouche sur plusieurs réponses possibles. Par exemple, on peut supposer que les abeilles meurent la journée où elles sont infectées ou alors qu'elles meurent la journée d'après, la réponse donnée au problème n'étant plus la même. Ainsi, l'élève s'il s'approprie le problème en donnant du sens en contexte peut aller vers différentes interprétations, ce qui demande un certain engagement réfléchi qui est une des composantes du contrôle. L'élève est amené à valider le modèle choisi pour représenter le problème.

[2] Ce problème est tiré de Breton et Morand 1995, p. 227.

De plus, dans le cas où l'élève cherche quel est l'exposant de 5 donnant comme réponse 60 000 (le nombre total d'abeilles dans la ruche), le nombre qu'il va trouver est un irrationnel, ce qui suggère une interprétation, à un retour sur la réponse puisqu'on cherche un nombre de jours. Une autre composante du contrôle est mise ainsi à contribution, la vérification. En effet, le résultat obtenu requiert une vérification pour expliciter ce que signifie une réponse à écriture décimale dans ce contexte.

D'autres arguments guident l'enseignante dans le choix de la tâche. Celle-ci cherche à avoir des problèmes présentant des variantes sur le plan du contenu, et qui préparent les élèves aux années suivantes, au contenu à venir. Elle retient ainsi le problème des abeilles parce qu'il s'agit dans ce cas de trouver l'exposant (la base étant connue, ainsi que le résultat), ce qui est différent du premier problème présenté aux élèves (dans lequel la base et l'exposant sont connus et il faut trouver le résultat). Elle évoque de plus la possibilité de préparer ainsi les élèves au secondaire 4 et 5, niveaux dans lesquels on traite explicitement des logarithmes.

L'analyse de la séance en classe permet de relever différentes stratégies d'enseignement susceptibles de développer une activité de contrôle, d'avoir accès à ce que contrôlent les élèves sous l'influence de certaines questions de l'enseignant.

2. *Analyse d'une tâche effective en classe*

Les élèves ont résolu ce problème en équipes. Deux stratégies différentes sont ressorties :

i. la recherche du nombre d'abeilles décimées le jour *n*. Les élèves ont utilisé deux techniques différentes : la recherche de l'exposant 5 *(quatre démarches différentes ont été dans ce cas relevées)* et la recherche de la racine cinquième de 6 000.

<table>
<tr><th colspan="2">Recherche de l'exposant 5</th></tr>
<tr><td>Démarche 1
L'élève calcule jour après jour le nombre d'abeilles mortes :
Jour 1 : 1
Jour 2 : 5
Jour 3 : 25
Jour 4 :125
Jour 5 : 625
Jour 6 : 3125
Jour 7 : 15 625
Jour 8 : 78 125

<u>Réponse</u> : 7 jours (2 élèves)
<u>Réponse</u> : 8 jours (2 élèves)</td><td>Démarche 2
Ressemble à la stratégie 1 mais pour le jour 1, l'élève comptabilise 5 abeilles mortes.
Jour 1 : 5
Jour 2 : 25
Jour 3 : 125
Jour 4 :625
Jour 5 : 3125
Jour 6 : 15 625
Jour 7 : 78 125

<u>Réponse</u> : 7 jours (5 élèves)</td></tr>
<tr><td>Démarche 3
Les élèves utilisent directement l'écriture exponentielle $5^{\text{nbre de jours}} = 60\ 000$ (on obtient le même résultat qu'en utilisant la stratégie 2).
$5^6 = 15625$
$5^7 = 78\ 125$
<u>Réponse</u> : 7 jours (8 élèves)
<u>Réponse</u> : 6 jours (2 élèves)</td><td>Démarche 4
Les élèves procèdent comme ceux qui ont utilisé la stratégie 3 mais ils cherchent à avoir un nombre décimal en exposant.

<u>Réponse</u> : 6,68 jours (2 élèves)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recherche de la racine cinquième de 60000
Les élèves calculent la racine cinquième de 60 000 : $\sqrt[5]{60000} = 9{,}03$.
<u>Réponse</u> : 10 jours (4 élèves)</td></tr>
</table>

Figure 2 – *Analyse des productions des élèves autour du problème des abeilles pour la stratégie « Recherche de l'exposant 5 »*

ii. La recherche de la somme du nombre d'abeilles décimées au jour *n*.

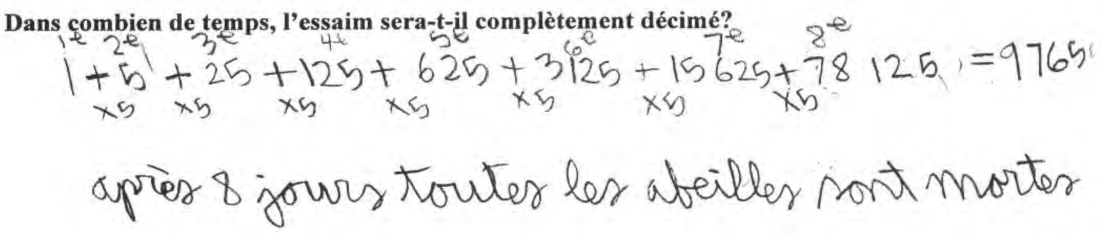


Figure 3 *– Production de la seule équipe qui illustre la stratégie « Recherche de la somme »*

Nous pouvons remarquer que les élèves qui ont utilisé la première stratégie (démarches 1 et 2) ont perçu la structure multiplicative du problème, faisant toutefois les calculs un à un. Ces élèves ont interprété le problème de deux façons différentes (dans la démarche 1, seule la première abeille meurt le premier jour alors que dans la démarche 2, les cinq abeilles meurent le premier jour). On peut remarquer que les réponses 7 jours dans la démarche 1 et 6 jours dans la démarche 3 soulignent une non vérification de la réponse, un non retour à la tâche puisque le nombre de jours trouvé n'excède pas l'effectif total de la ruche. C'est le cas également de la démarche 4 dans laquelle les élèves trouvent une réponse rationnelle, comment interpréter 6,68 jours ? La démarche 3 dénote un contrôle des élèves quant au recours à une écriture efficace, il n'y a pas de calculs un à un. Les élèves ayant produit la deuxième stratégie possèdent une représentation du problème différente, ils ajoutent le nombre d'abeilles décimées jour après jour, faisant preuve d'un contrôle sur la tâche proposée en termes d'engagement réfléchi, une bonne interprétation de l'écriture exponentielle.

Lors du retour en classe, le choix des élèves désignés par l'enseignante n'est pas anodin. Ayant circulé dans les rangées, elle dirige la discussion après avoir repéré les productions des élèves. Elle demande en premier à un élève, Marc, d'aller en avant pour expliquer sa démarche au reste de la classe (stratégie 1, démarche 4). L'élève s'appuie sur une représentation en arbre pour justifier l'utilisation de l'écriture exponentielle. Pour illustrer les échanges dans le groupe, nous reprenons sous forme de vignette les extraits significatifs de cette intervention en mettant en évidence des éléments (dans les commentaires) qui seront repris dans l'analyse.

Extraits	**Commentaires**
Marc : d'accord, au début moi j'ai faite. **Nadia** : c'est quoi ça? **Marc** : ça c'est la petite abeille *(il montre le premier grand trait qu'il a tracé)*, là elle donne sa maladie à 5 personnes puis je n'ai pas fait plus parce que ça prenait de la place. L'élève fait le dessin suivant au tableau : 	Solution explicitée par l'élève caractérisée par une schématisation du problème à l'aide de l'arbre qui lui a permis d'anticiper la structure multiplicative du problème. L'élève rajoute des traits sur sa représentation en arbre.
Marc : puis là elle *(la première abeille)* elle fait fois 5, 5 fois plus que elle, ça fait 5 fois 1 = 5, 5 fois plus qu'elle *(il montre l'une des abeilles qu'il vient de dessiner)*, puis là ça fait 5 fois 5, ce qui fait 25 et tu fais ça tant que tu remplisses le tableau.	L'élève met en évidence la régularité, la structure multiplicative ($\times 5, \times 5, \times 5$, etc.)
Nadia : ok et qu'est-ce que tu as écrit sur ta feuille? Parce que là tu nous dis ça en mots mais je ne sais pas si…	Un renvoi de l'enseignante à ce que l'élève a fait / à aller plus loin
Marc : non mais là j'ai fait ça puis *(l'élève regarde sur sa feuille),* après je me suis dit « je vais faire 5 à la 30 » pour faire comme avec l'autre numéro, ça faisait 6 millions de trillions donc là je me suis dit « ce n'est pas ça là », donc là j'ai faite… 5 à la 6 et ça m'a donné 50 000 là.	L'élève repère que ce problème a la même structure que le problème précédent, passe à l'écriture exponentielle.
Les autres élèves : mais non c'est 15 625.	Invalidation du calcul par le groupe.
Marc : ça m'a donné 50 000 *(rires)*. Et là je me suis dit ce n'est pas ça, donc j'ai fait 5 à la 7 et là ça m'a donné, on va dire 72 000. Et après j'ai faite entre les deux, fait j'ai faite 5 à la 6 point 5. **Nadia** : 5 à la 6 point 5.	L'élève cherche un nombre décimal de jours. Il est guidé par l'idée de trouver l'exposant qui permettra de trouver 60 000. Marc décrit une technique de recherche de l'exposant, il quitte ainsi le contexte.

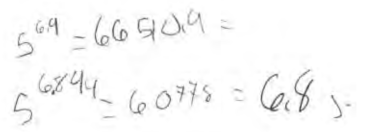
Marc : ouais.	
François : mais il n'y a pas de demi journée (appuyé par Nicolas, qui souligne que l'exposant doit être un nombre entier).	Invalidation de la technique utilisée par Marc, la trouvaille d'un résultat, en ramenant le résultat au contexte.
Nadia : laissez-le faire, c'est beau.	Importance pour l'enseignante que l'élève explicite sa stratégie jusqu'au bout avant que la classe se prononce.
Marc : Là ça donnait entre les deux, on va dire entre les deux 60 000, non pas 60 000 on va plutôt dire 66 000, ok? Puis là j'ai fait 5 à la 6 point 9 puis ça, ça me donnait 69 000 puis là c'est pas ça, ça donnait 60 000, fait que les 9 000 abeilles de trop que ça me donnait. Donc j'ai essayé 5 à la 6 point 8 et j'ai rajouté des chiffres, je me suis rendu jusqu'à 5 à la 6 point 8544 puis là ça me donnait 66 778, ça veut dire que ça fait entre 6 point 8 jours, ça veut dire 6 jours et un bon bout de l'autre jour. (8 mars, 90-121)	Marc décrit sa technique. Il trouve une solution mathématique et pas une solution au problème. Son raisonnement, la recherche de *n* tel que 5 exposant *n* fasse ou dépasse juste 60000 est adéquat.
	L'élève ramène son résultat dans le contexte / interprétation dans le contexte.

***Figure 4** – Exploitation du problème des abeilles : le retour collectif sur les solutions. Autour de la solution explicitée par Marc*

Dans ces extraits, nous avons accès au point de vue de l'élève (Marc), à sa compréhension à travers ce qu'il explicite. Nous pouvons également relever le contrôle exercé par les autres élèves sur la solution présentée ainsi que des stratégies d'intervention de l'enseignante.

Contrôle exercé par Marc sur la tâche

L'élève modélise la donnée « chaque jour, une abeille contamine cinq abeilles » par un arbre. Il passe ensuite directement à la recherche de n tel que 5 exposant n soit proche de 60 000. Or, le passage à 5 exposant n, nécessite d'avoir considéré le nombre de cas possibles, le nombre d'abeilles atteintes, contaminées. Marc perçoit ainsi la structure multiplicative du problème et il passe à l'exponentielle. Le contrôle qu'exerce Marc se traduit également par un encadrement pour trouver 5 exposant quoi qui donne 60 000, faisant dans l'interprétation un retour au contexte.

Contrôle exercé par les autres élèves sur la solution de Marc : les autres élèves valident ou invalident ce qui est avancé par Marc, son calcul. Un élève de la classe, François, se penche sur le sens de la réponse en lien avec le contexte à travers la question « a-t-elle de l'allure ? ».

Dans ces extraits de verbatim, des stratégies d'intervention susceptibles de développer une activité de contrôle sont mises en évidence. Le choix par l'enseignante de l'élève pour le retour n'est pas anodin, ce choix est guidé par le repérage d'une production où le sens de la réponse amène une discussion autour de la réponse rationnelle. Par exemple, est-il plus précis de dire 6 jours et une demie journée que 7 jours ? Ce serait le cas si on considère que les décès ont lieu le matin. De plus, Nadia renvoie à ce que l'élève a fait, à aller plus loin, elle fait en sorte que l'élève explicite jusqu'au bout avant que les autres interviennent.

Après avoir désigné une stratégie qui amène un questionnement autour du sens de la réponse, Nadia choisit une stratégie basée sur des essais erreurs contrôlés avec comme réponse un encadrement (stratégie 1, démarche 1) et finalement une stratégie pour aller plus loin : une introduction aux logarithmes (la recherche de la racine cinquième). Dans ce retour, plusieurs élèves se prononcent sur différentes interprétations possibles de l'énoncé et de l'écriture exponentielle. Lors de cette discussion autour des différentes interprétations, l'enseignante laisse place à l'argumentation, à différents points de vue. Le choix de la présentation des différentes démarches repérées est judicieux. La discussion autour d'une réponse décimale n'aurait pas eu le même impact si elle était arrivée après les autres démarches, les élèves auraient pu statuer sur la validité de la démarche en se basant sur ce qui avait été décidé précédemment. Le passage aux logarithmes se fait alors naturellement à travers l'écriture $5^n = 60\,000$ et la recherche de la racine cinquième.

Une discussion a lieu autour de l'interprétation de la situation. Sam souligne qu'il faut ajouter une autre journée à celles trouvées puisque la première abeille prend une journée pour mourir. Ce commentaire amène un contre argument de la part de François qui avance que dans 5^6 on a compté plus d'abeilles que celles qui sont réellement mortes, il faut donc les retrancher, intervention qui soulève de grosses protestations dans la classe. Il est intéressant de noter que l'enseignante ne se prononce pas sur la discussion autour de l'interprétation de l'écriture 5^6 par François. Cette distinction entre le nombre d'abeilles mortes et le nombre d'abeilles contaminées n'est pas réinvestie par l'enseignante mais le raisonnement de Sam résonne chez Sandra. Ces deux élèves n'étaient pas dans la même équipe (d'après sa production écrite, Sandra n'avait pas su résoudre ce problème). Cette idée fait chemin dans la classe, Carmen reprenant cette résolution comme on le voit dans la vignette suivante :

Extrait	Commentaires
Sandra *: mais on n'ajoute pas les deux en même temps pour avoir le nombre d'abeilles? Là c'est juste le nombre d'abeilles infectées et non pas le nombre d'abeilles mortes.*	Une discussion a lieu autour de l'interprétation amenée par Sam.
Nadia *: mais si elles sont infectées c'est sûr qu'elles meurent.*	L'enseignante intervient dans la discussion mais ne fait pas avancer le débat.
Sandra *: oui mais les chiffres qui sont là indiquent le nombre d'abeilles infectées….* ***Sam*** *: à la fin des 7 jours, il va y en avoir ben plus qui sont mortes.* ***Sandra*** *: oui c'est ça.*	On peut remarquer que ces élèves contrôlent la situation, donnent du sens à l'écriture dans le contexte. Ils exercent un engagement réfléchi.
Nadia : Carmen? **Carmen** : ben, il faudrait prendre en considération que le jour 1, il y en a 6 qui meurent puisque la première petite abeille elle part puis quand elle revient la même journée elle en contagie est-ce que ça se dit comme ça? Elle contagie 5, donc ça fait 6 abeilles le jour 1 qui meurent.	Réaction d'une autre élève (Carmen) qui appuie les propos de Sam et de Sandra en explicitant le cas de la première abeille.
Nadia : elle contamine 5 abeilles.	Reprise des propos des élèves par l'enseignante.
Carmen : moi je n'ai pas faite de même mais je viens de penser à ça. **Nadia** : ok, donc là il y en a qui meurent et il y en a d'autres qui se rajoutent. **Carmen** : la première elle, elle pogne la maladie et elle va la donner à 5 autres, là ça fait 6 puis là les 5 autres la donnent à 5 autres et là ça fait 5 fois 5, 25. La première il ne faut pas l'oublier. **Nadia** : ok, la première, la Carmen.	Les discussions en classe amènent les élèves à voir d'autres chemins possibles, à valider les possibilités émises.
Edith : mais elle va infecter les 5 autres dans la même journée. **Nadia** : ouais. **Sam** : donc ça prend une journée. (8 mars, 151-181)	L'enseignante fait signe qu'elle comprend. Édith amène une interprétation différente de la situation *(la première abeille et les cinq autres qui sont infectées par cette abeille mourant la première journée)* alors que pour Sandra, Carmen et Sam la première abeille meurt le premier jour et les cinq abeilles infectées ne mourront que le lendemain.

Figure 5 *– Exploitation du problème des abeilles : une multitude de points de vue*

À travers l'analyse de la situation des abeilles, on peut relever différentes stratégies d'enseignement susceptibles de favoriser une activité de contrôle chez les élèves. *Pendant l'explicitation des élèves :* l'enseignante renvoie à ce que l'élève a fait, à aller plus loin ; elle fait en sorte que l'élève explicite jusqu'au bout avant de se prononcer ; elle force une explication pour mieux comprendre ; elle laisse place à l'argumentation, à différents points de vue. L'analyse de cette situation nous renseigne également sur les indicateurs de contrôle chez certains élèves. On note un retour au contexte pour plusieurs élèves (Sam, Carmen, François, Édith). Différentes interprétations possibles sont mises en évidence, discutées, validées en classe.

IV. CONCLUSION

La situation des abeilles est un bon support pour travailler les processus de contrôle. Cette situation permet d'éclairer, d'exemplifier les composantes du contrôle décrites dans la partie II. L'engagement réfléchi est une des composantes travaillées dans cette situation, il s'exprime ici par une appropriation du problème en donnant du sens en contexte, et se manifeste dans le choix d'une interprétation du problème parmi d'autres interprétations possibles. La question de la validation est centrale dans cette situation et est favorisée par la place que l'enseignante l'y accorde. L'enseignante part des productions des élèves, favorise un débat en classe, un espace d'échanges des différents points de vue, une validation de la part des élèves. Elle organise la classe de telle façon à prendre en compte l'articulation et la clarification de points de vue multiples, elle laisse ainsi la place à l'argumentation, à différents points de vue en encourageant la discussion. La validation des stratégies se fait par les élèves, l'enseignante présentant en premier les stratégies qui amènent à un questionnement pour aboutir, graduellement, à l'introduction d'un nouveau contenu qui s'appuie sur la production d'un élève. Elle cherche ainsi à amener une réflexion en classe sur le sens de la réponse, sur l'efficacité de la stratégie. On est ici proches de la phase de bilan présentée par Margolinas (1992) qui permet la formulation publique des méthodes de résolution par les élèves qui doivent formuler leurs stratégies. Les relances de l'enseignante participent à la gestion de cette phase. La chercheure précise qu'il est important que l'enseignant arrive à anticiper les différentes réactions des élèves face au milieu pour qu'il puisse intervenir en conséquence. Dans le cas de la situation des abeilles, on sent que l'enseignante est désarçonnée par la distinction autour des abeilles contaminées et des abeilles mortes et ne sait comment intervenir aux différents points amenés par les élèves. La discussion n'aboutit alors concrètement à aucun résultat.

Nous avons vu dans cet exemple d'une phase de bilan. Lors de l'expérimentation plus large (Saboya 2010), nous avons pu remarquer à quelques reprises des phases d'évaluation telles que définies par Margolinas (1992 ; 1993). Dans une analyse autour de l'exploitation d'exercices en classe portant sur les puissances d'un nombre, l'enseignante est dans une phase d'évaluation, certaines explications sur ce qui a été fait par les élèves ou des réponses à certaines tâches viennent de l'enseignante et ne sont pas renvoyées aux élèves. De plus, certaines explications prennent appui sur des stratégies développées dans les exercices précédents (idée du réinvestissement) mais sont menées par l'enseignante du début à la fin.

Cette recherche éclaire ainsi une didactique d'intervention autour d'une activité de contrôle. L'expérimentation a pris place en algèbre autour plus précisément des puissances, toutefois les stratégies d'enseignement développées susceptibles de développer une activité de contrôle peuvent être réinvesties, exemplifiées dans l'étude d'autres contenus mathématiques.

REFERENCES

Artigue M. (1993) Connaissances et métaconnaissances – une perspective didactique. In Baron M., Robert A. (Eds.) (pp. 29-54) *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques.* Cahier de DIDIREM, IREM, Paris.

Artigue M. (2002) Le calcul. In Kahane J.-P. (Ed.) (pp. 171-262) *L'enseignement des sciences mathématiques*. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Paris : Éditions Odile Jacob.

Balacheff N. (1987) Processus de preuve et de validation. *Educational Studies in Matematics* 18, 147-176.

Bednarz N., Dufour-Janvier B. (1992) L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. In *Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : Didactique des mathématiques, formation normale des enseignants.* École normale supérieure Marrakech.

Bednarz N., Saboya M. (2007) Questions didactiques soulevées par l'enseignement de l'algèbre auprès d'une élève en difficulté au secondaire : une étude de cas. In *Actes de l'ACFAS 2005*. Montréal (Québec).

Breton G., Morand J.-C. (1995) *Carrousel mathématique*, troisième secondaire, tome1.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Butlen D., Lagrange M., Perrin M.-J. (1989) *Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6eme en difficulté.* Cahier de DIDIREM nº5. IREM de Paris7.

Butlen D., Pezard, M. (1990-91). Calcul mental, calcul rapide. *Grand N* 47, 35-59.

Chalancon F., Coppé S., Pascal N. (2002). Les vérifications dans les équations, inéquations et en calcul littéral. *Petit x* 58, 23-41.

Cipra B. (1985) *Erreurs… et comment les trouver avant le prof... ».* Paris : InterEditions.

Coppé S. (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé.* Thèse de l'université de Lyon 2.

Cortés A., Kavafian N. (1998-1999).Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations. *Petit x* 51, 47-73.

Delorme J. (1985) *Étude de la compréhension de problèmes additifs chez des enfants de difficulté en mathématiques.* Mémoire de DEA- Université de Paris VIII.

Dib M. (2000-01) Validation dans l'environnement papier crayon. *Grand N* 68, 41-60.

Hadamard J. (1945/1975) *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique.* Paris : Gauthier-Villars.

Kargiotakis G. (1996) *Contribution à l'étude de processus de contrôle en environnement informatique : le cas des associations droites-équations*. Thèse de l'université Paris VII - Denis Diderot.

Kouki R. (2007) L'articulation syntaxes/sémantique au Coeur des analyses didactiques au niveau de l'algèbre élémentaire ? In *Actes du colloque international EMF 2006*. Sherbrooke (Québec).

Krutetskii V. A. (1976) The psychology of mathematical abilities in school children. In Kilpatrick J., Wirszup I. (Eds.) *Chicago and London.* The University of Chicago Press.

Lee L., Wheeler D. (1989) The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematic* 20, 41-54.

Lenfant A. (2002) *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires.* Thèse de l'université Paris 7.

Margolinas C. (19899 *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques.* Thèse de l'université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Margolinas C. (1992) Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 113-158.

Margolinas C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Grenoble : la Pensée Sauvage.

M.E.L.S (Ministère de l'Éducation des loisirs et des sports) Gouvernement du Québec (2003) *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, premier cycle.* Québec : Ministère de l'Éducation.

M.E.L.S (Ministère de l'Éducation des loisirs et des sports) Gouvernement du Québec (2006) *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement secondaire, deuxième cycle..* Québec : Ministère de l'Éducation.

Nimier J. (1989) *Entretiens avec des mathématiciens (L'heuristique mathématique)*. IREM de Lyon.

Perkins D.N., et Simmons R. (1988) Patterns of Misunderstanding : An Integrative Model for Science, Math, and Programming. *Review of Educational Research* 58 (3), 303-326.

Piaget J. (1974) Recherches sur la contradiction. Avec la collaboration de A. Blanchet, G. Cellerier, C. Dami. M. Gainotti-Amann, Ch. Giliéron, A. Henriques-Christophides, M. Labarthe, J. De Lannoy, R. Maier, D. Maurice, J. Montangero, O. Mosimann, C. Othenin-Girard, D. Uzan, Th. Vergopoulo. *Les différentes formes de la contradiction. Volume 2*. Paris : Presses Universitaires de France.

Polya G. (1945/1965) *Comment poser et résoudre un problème.* Paris : Éditions Jacques Gabay.

Richard J.-F. (1998) *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions.* Université de Paris VII.

Saboya M. (2010) *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. Thèse de doctorat inédite. Université du Québec à Montréal.

Schmidt S. (1994) *Passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un contexte de résolution de problèmes.* Thèse de l'université du Québec à Montréal.

Schoenfeld A. (1985) *Mathematical problem solving*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Smith J. P, Hungwe K. (1998) Conjecture and verification in research and teaching: conversations with young mathematicians. *For the learning of mathematics* 19(3), 40-46.

Vivier J. (1988) La tâche de l'élève et l'auto-contrôle. *Revue française de pédagogie* 82, 61-64.