VERS LA CONSTRUCTION DE CONCEPTS AU TRAVERS DE L'ANALYSE DES PROCÉDURES DES ÉLÈVES ET DES OBSTACLES QU'ILS RENCONTRENT LORS DE LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

Lucia GRUGNETTI* – François JAQUET* – Daniela MEDICI**
Maria Gabriella RINALDI**

Résumé – L'analyse de protocoles où les élèves expliquent la manière dont ils résolvent un problème, donne une idée de leur niveau de connaissances. Lorsque ces protocoles sont très nombreux, qu'ils proviennent de plusieurs pays, qu'ils ont été rédigés par des élèves de degrés scolaires différents et qu'ils font apparaître des procédures typiques, on peut alors déterminer les obstacles caractéristiques à la construction de certains concepts. Cette identification va être utile à l'enseignant pour adapter son action en vue des apprentissages de ses élèves.

Cette présentation est illustrée par un exemple sur l'approche de la proportionnalité et un autre en algèbre.

Mots-clés : résolution de problèmes, obstacles, procédure, concept, justification des élèves

Abstract : Protocols' analyses where pupils explain the way they solve a problem, give us an idea of their knowing level. When there is a large number of protocols coming from several countries, drew up by different school degree pupils and which show typical procedures, we can determinate characteristic obstacles to the construction of certain concepts. This identification can be useful to teachers in order to adapt their action for their pupils' learning.

This paper is illustrated by two examples, on the approach to proportionality and on algebra.

Keywords: problem solving, obstacles, procedures, concepts, students' explanations

I. INTRODUCTION

Lorsque des élèves résolvent un problème en travaillant par groupes sans aucune intervention de l'enseignant et qu'ils doivent expliquer leur démarche, on peut espérer qu'ils vont faire un peu de mathématique, mais on ne peut en être certain.

Ils sont censés faire appel à des savoirs déjà partiellement construits, à des savoir-faire déjà enseignés ou encore à des connaissances encore mal définies ; ils vont élaborer une stratégie ; ils vont interagir au sein du groupe pour valider leurs réponses puis rédiger le compte-rendu de leurs recherches où les concepts qu'ils ont mobilisés doivent apparaître.

C'est au moment de l'analyse des copies qu'on pourra repérer des difficultés ou erreurs typiques et poursuivre les réflexions par des hypothèses sur le genre et la nature des obstacles rencontrés.

On se situe alors à l'interface entre les explications des élèves, la réflexion didactique et, pour l'enseignant, une exploitation des données recueillies en vue de sa pratique de classe.

Notre intervention rejoint ainsi deux des questions formulées dans les buts du groupe de travail : *Quelles mathématiques les élèves font-ils et avec quelle diversité et quels moyens se donne-t-on pour les comprendre ?* tout en s'inscrivant dans une autre de ses demandes : *Que nous disent les procédures des élèves, à propos de la transposition didactique de l'objet enseigné ?*

* Association Rallye Mathématique Transalpin (ARMT) – lucia.grugnetti@unipr.it, f_jaquet@orange.fr.
** Dipartimento di Matematica, Università di Parma – Italie – daniela.medici@unipr.it, mariagabriella.rinaldi@unipr.it

© Grugnetti L., Jaquet F., Medici D., Rinaldi M. G. (2012) Vers la construction de concepts au travers de l'analyse des procédures des élèves et des obstacles qu'ils rencontrent lors de la résolution de problèmes. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT9, pp. 1192–1203). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. LE CADRE GENERAL

Nous nous situons dans le cadre du Rallye mathématique transalpin (RMT) où sont engagées actuellement plus de 4000 classes, des degrés 3 à 10 de la scolarité (élèves de 8 à 16 ans) d'Italie, France, Suisse, Luxembourg, Belgique et Argentine. Dans cette confrontation il y a des problèmes, des élèves qui les résolvent dans les mêmes conditions, leurs maîtres et les animateurs de la confrontation : enseignants, formateurs ou chercheurs.

1. *Les problèmes*

Les épreuves du RMT proposent des problèmes dont une première caractéristique est la nouveauté pour celui qui les résout ; par opposition aux exercices, problèmes d'application, activités d'entraînement, questions d'évaluation.

Un deuxième critère se situe au niveau des capacités à aborder cette situation nouvelle et à élaborer un cheminement autonome : les élèves doivent pouvoir « entrer dans le problème » puis imaginer des procédures de recherche sans aucune aide extérieure. Ils sont devant un défi : percevoir ce qu'il faut chercher et trouver un chemin qui y mène.

Un troisième critère concerne la relation entre les connaissances mathématiques à disposition des élèves et les savoirs nécessaires pour la résolution du problème. L'élève doit pouvoir mobiliser des connaissances personnelles ou des savoir-faire encore insuffisants, mais pas trop éloignés, pour en élaborer d'autres, plus adaptés à la situation nouvelle.

Du point de vue de l'enseignant qui souhaite l'exploiter, le problème doit encore répondre à un quatrième critère : celui de la pertinence et de l'identification des savoirs à mobiliser pour sa résolution. Il faut que les concepts en jeu soient reconnus, qu'on soit en mesure de les analyser et de décrire les phases de leur construction.

Finalement, après les analyses des résultats et expérimentations, le dernier critère sera d'ordre didactique. L'exploitation du problème permettra-t-elle à l'élève de construire des connaissances ?

2. *Le contrat*

Lors de chaque épreuve du RMT, la classe reçoit une série de cinq à sept problèmes à résoudre, en temps limité (50 minutes), rend une seule copie par problème avec la (les) solution(s) et les explications sur la démarche suivie. L'enseignant est remplacé par une personne extérieure à la classe qui n'intervient en aucune manière ; toutes les tâches sont donc dévolues aux élèves : formation des groupes, répartition des problèmes, lecture et appropriation des énoncés, détermination des stratégies, recherches, hypothèses et validations, au sein du groupe et entre groupes, rédaction des solutions et des explications correspondantes.

Les élèves savent que la copie rendue avec solution et explications déterminera le classement de leur classe dans le concours.

3. *Le « milieu » ou « écosystème »*

Le milieu créé par le RMT a des caractéristiques très particulières, différentes de la situation classique d'enseignement : le lieu est bien celui de la salle de classe, mais en l'absence de l'enseignant, de ses intentions didactiques et de son aide permanente.

Le travail de résolution s'organise selon la logique d'une confrontation entre classes. Les énoncés sont les mêmes pour tous, à affronter avec les seuls moyens à disposition : les savoirs et compétences individuelles disponibles, les interactions au sein de groupes qui vont entraîner une médiation des connaissances et leur mise en jeu afin de choisir la solution qui semble le mieux convenir.

Il n'y a pas de contraintes matérielles : l'usage de la calculatrice, des instruments de dessin géométrique, de matériel pour d'éventuelles manipulations est à l'initiative des élèves. Il n'y a qu'une limite de temps qui ne permet pas d'attendre que la solution vienne d'ailleurs.

Ainsi on est au-delà d'une situation a-didactique (Brousseau, 1990), avec des spécificités bien particulaires, dans un milieu « protégé » des interventions du maître, et des influences du « programme » de la classe.

La situation ne deviendra didactique que si le maître décide d'exploiter le problème pour sa classe entière, selon les intentions du RMT affichées en permanence des analyses a priori et a posteriori, des recherches expérimentations et propositions qui en découlent.

4. L'échantillon

Les élèves qui résolvent nos problèmes sont représentatifs de l'ensemble de la population scolaire puisqu'ils participent par classes entières. Il faut cependant relever que les copies examinées sont des productions de groupes et qu'elles proviennent de classes dont le maître a des conceptions proches de celles du RMT : il estime que la résolution de problèmes peut participer de la construction de connaissances ; il fait confiance aux élèves en acceptant de les laisser travailler de manière parfaitement autonome ; il considére que les erreurs ne sont pas des fautes mais des indicateurs d'un niveau d'élaboration d'un concept …

Les résultats obtenus n'ont donc pas de valeur statistique significative, mais l'intérêt didactique n'est pas là. Il réside dans l'identification des erreurs et obstacles caractéristiques, dans leur évolution en fonction de l'âge des élèves, dans l'observation de l'élaboration des concepts, au travers de centaines de copies provenant de systèmes scolaires différents.

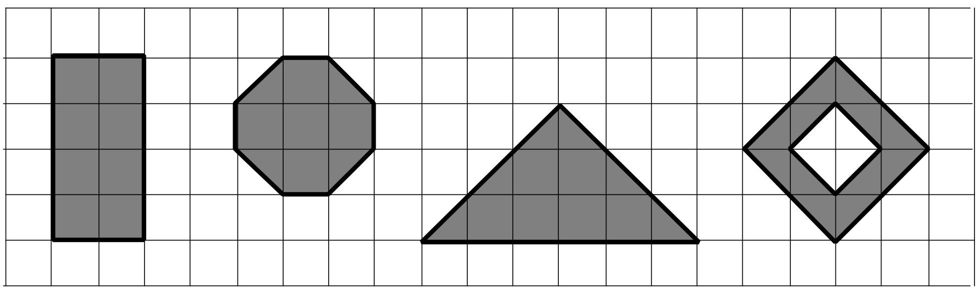
III. UN EXEMPLE POUR L'APPROCHE DE LA PROPORTIONNALITE

Cet exemple est typique d'une démarche où les analyses, expérimentations et réflexions ont évolué sur plusieurs années et font encore l'objet de recherches.

1. *L'énoncé et l'analyse de la tâche*

Décoration

Un peintre a peint ces quatre figures différentes sur un mur, chacune avec une couche de peinture de la même épaisseur.



Il a utilisé des pots de peinture de même grandeur :

- 18 pots de rouge pour une des figures
- 21 pots de bleu pour une autre figure ;
- 27 pots de jaune pour une autre figure
- des pots de noir pour la figure qui reste.

À la fin de son travail, tous les pots étaient vides.

Indiquez la couleur de chaque figure.

Combien de pots de peinture noire a-t-il utilisés<'

Expliquez comment vous avez trouvé.

Il s'agit d'un problème proposé aux classes de degrés 5, 6, 7 (10 à 13 ans) lors du 9e RMT, en 2001, dont l'analyse a priori[1] de la tâche se réduisait à cinq séquences : choisir une unité d'aire, déterminer les aires de chaque figure, ordonner ces mesures, établir la correspondance entre les aires des figures et le nombre de pots de peinture et trouver le nombre de pots de peinture noire.

Cette analyse ne mentionnait pas les conversions d'unités d'aire, de triangles en carrés, elle supposait que le conflit aire / périmètre était dépassé par des élèves de cet âge vu que le contexte de peinture favorisait d'ailleurs le choix de l'aire. Elle ne mentionnait pas non plus les procédures que les élèves utiliseraient pour établir la correspondance entre les aires et les nombres de pots. Et c'est précisément de là que sont issues toutes les réflexions et interrogations suivantes.

2. *Les premières analyses de résultats*

Un premier examen de 130 copies a montré que tous les groupes ont choisi le carré comme unité d'aire, qu'environ 90% ont calculé les aires correctement et 80% en moyenne (de 72% au degré 5 à 92% au degré 7) ont trouvé le nombre de pots de peinture noire. Le problème a donc été jugé « facile » pour ces degrés (Vernex 2001) et proposé aussi à des élèves plus jeunes, soit par groupes, soit individuellement, dont encore une majorité ont su calculer les aires et la moitié sont arrivés au nombre exact de pots noirs.

Les quatre aires trouvées : 8, 7, 9 et 6, (en carrés du quadrillage) il faut les faire correspondre, terme à terme, aux trois nombres donnés de pots 18 (rouges), 21 (bleus), 27 (jaunes) et au nombre inconnu de pots noirs.

C'est la tâche essentielle de résolution, qui n'avait pas été relevée lors de l'analyse a priori pour des raisons que nous expliquons ainsi, a posteriori : nos problèmes sont élaborés, par des enseignants, pour un concours où l'originalité est un critère prioritaire, sans encore de perspectives de recherche ou d'exploitations didactique.

Les explications des élèves permettent d'identifier clairement deux procédures de résolution :

A Un report de régularités. 20 % des groupes reportent les régularités de la suite 6 ; 7 ; 8 ; 9 des mesures d'aires, sur la suite incomplète des nombres de pots 18 : 21 ; 27 ; parfois correctement, mais aussi de manière erronée (dans la moitié des cas) ou douteuse. Trois exemples :

- 24 pots noirs, il y a toujours 3 de différence : 18 – 21 – 24 – 27.
- Il y en a 30 (18 – 21 – 27 – 30).
- Explication : 18 + 3 = 21 21 + 6 = 27 27 + 12 = 39 on a vu que c'était toujours le double de 3.

B Une référence au nombre 3. Les autres groupes, le 80%, mentionnent explicitement le facteur 3 ou la reconnaissance des multiples de 3 dans la suite des nombres de pots ; ce qui les conduit à la réponse exacte. Trois exemples :

[1] Une analyse a priori, dans le sens étymologique de « antérieur » est nécessaire à une élaboration réfléchie des problèmes du RMT et à la définition des critères d'attribution des points.

- Pour trouver la réponse, on doit toujours faire 3 fois. Il a utilisé 24 pots noirs.
- On a compté le nombre de carrés dans chaque figure et on a multiplié par 3 chaque nombre de carrés dans les figures et on a fait la même façon pour savoir combien il y a de noirs (24).
- Il a utilisé 24 pots de peinture (noire). Explication : Si on fait $3 \times 6 = 18$, après on fait $3 \times 9 = 27$ ensuite $3 \times 7 = 21$ ensuite il restait 24 car ce qu'on a fait $3 \times 8 = 24$ on l'a mis en noir.

3. Le passage au concept-clé du problème, la proportionnalité

Le problème *Décoration* semble, d'après ces premiers résultats, à la portée d'élèves dès 9 à 10 ans, mais on peut y répondre juste avec un raisonnement erroné ! Même la procédure qui se réfère au nombre 3 est suspecte et exige qu'on s'intéresse de plus près au concept qu'elle mobilise : la proportionnalité.

Ces doutes ont conduit à l'élaboration d'un nouveau problème, isomorphe, *Truffes au chocolat*, où les figures deviennent des alignements de truffes dans quatre boîtes (16, 24, 28, 36) et où les nombres de pots sont remplacés par des étiquettes indiquant les masses de chocolats de trois des quatre boîtes, (540 g, 630 g, 810 g, la quatrième étant l'objet de la recherche). Dans cette version, les élèves ne peuvent plus évoquer la multiplication par 3 en observant les multiples familiers 18, 21 et 27. Le nouveau facteur n'est plus un nombre entier (22,5). Pour le découvrir, il faut de nombreux essais (multiplications ou divisions) ou des observations sur les écarts dans la suite 16, 24, 28, 36 (moins « régulière » que 6, 7, 8, 9) pour tenter de les reproduire sur la suite incomplète 540, 630, 810.

L'analyse des résultats de *Truffes au chocolat*, expérimenté en classe par M. Vernex (2004) fait apparaître les deux types de procédures précédentes : celle où l'on recherche un « facteur » qui peut être soit un nombre abstrait permettant de passer des nombres d'une suite aux nombres correspondants de l'autre par une multiplication, soit une grandeur concrète, la masse d'une truffe en grammes ou celle consistant à reporter des régularités d'une suite sur l'autre par l'observation des écarts.

C'est à partir de ces observations que quelques animateurs du RMT ont engagé une recherche sur ce type de problèmes « inédits », qui ne s'inscrivent pas dans la tradition des études sur la « proportionnalité » mais qui se situent en amont, bien avant d'aborder les aspects opératoires et la manière de conduire la tâche classique de « recherche de la 4^e proportionnelle ».

Trois variantes du problème *Décoration* (Jaquet 2007) ont permis deux constatations révélatrices des obstacles que rencontrent les élèves :

- Lorsque, avec les mêmes figures que dans le problème d'origine (aires 6 ; 7 ; 8 ; 9) mais avec des multiples de 12 successifs : 72 ; 84 ; 96 comme nombres de pots (au lieu des 18 ; 21 ; 27 du problème d'origine), la fréquence des erreurs augmente très sensiblement. Une majorité des élèves, jusqu'à 13 ans, procèdent par reproduction des écarts de 12 et aboutissent soit à la réponse 60, soit à la réponse 108 (50 % et 50%).
- Dans un autre développement de *Décoration*, beaucoup d'élèves qui résolvent le problème en percevant la multiplication par 3 ne réinvestissent pas cette relation-clé pour trouver le nombre de pots nécessaires pour une cinquième figure - un rectangle de 5×4, d'aire 20 - introduit après la résolution du problème d'origine. Ils ne multiplient pas 20 par 3, mais préfèrent partager le nouveau rectangle en deux rectangles de 2×4 (identiques à la première figure pour laquelle ils avaient trouvé 24 pots) et demi-rectangle pour aboutir à $24 + 24 + 12 = 60$. Le nombre 3 n'avait donc pas, pour eux, le statut de facteur de proportionnalité, avec sa dimension de « pots par carré » qui lui donne du sens.

4. *De la découverte des obstacles à leur exploitation pour la classe*

Cinq variantes de *Décoration* ont été proposées dans les épreuves successives du RMT, à des centaines de classes et ont confirmé nos premières constatations (Jaquet 2009). Les élèves y sont confrontés à un obstacle typique : l'identification d'une situation de proportionnalité, avant d'en aborder les phases d'opération. Face à deux grandeurs en relation, ils sont capables de reconnaître les mesures prises sur l'une et sur l'autre, d'ordonner les deux suites de nombres, mais ils ne peuvent pas encore trouver à quel nombre d'une des suites correspond un nombre de l'autre suite parce qu'ils ne perçoivent pas la nature de leur relation. Jusqu'à l'âge de 12 à 13 ans, ils envisagent des différences ou écarts et n'imaginent pas les quotients ou rapports.

Cet obstacle était sos-estimé jusqu'ici dans la construction du concept de proportionnalité. Nous savons le repérer, mais nous sommes encore au stade des hypothèses sur sa nature.

S'il est d'ordre didactique, comment le faire connaître aux enseignants chargés d'organiser le milieu d'apprentissage et de choisir les activités pour que leurs élèves le rencontrent, en prennent conscience et soient en mesure de le surmonter ?

S'il est d'ordre ontologique, comment faire évoluer les programmes pour adapter les objectifs sur la proportionnalité aux niveaux de développement des élèves ?

S'il est d'ordre épistémologique, que faire pour la formation des maîtres, la sensibilisation des auteurs de manuels et des responsables des programmes ?

Ce type de questions est caractéristique d'une démarche qui, au travers de problèmes et d'observations de copies d'élèves, conduit à une réflexion didactique et à des exploitations possibles pour une pratique d'enseignement/apprentissage.

IV. UN EXEMPLE EN ALGEBRE

Nous partons ici d'un des nombreux problèmes du RMT qui peut être résolu par voie arithmétique ou algébrique, proposé aux classes de degrés 6 à 10 (de 12 à 16 ans) lors de la deuxième épreuve du 14e RMT (2006) :

1. *L'énoncé et l'analyse de la tâche*

Au fitness

Angéla et Rosanna fréquentent la même salle de culture physique mais avec des modalités de paiement différentes.

Angéla paie une somme fixe de 12 euros par mois puis 2,50 euros pour chaque séance où elle est présente.

Rosanna préfère payer 3 euros par présence effective.

Les deux amies qui fréquentent la salle de culture physique avec assiduité ont déterminé le nombre de présences pour lequel le mode de paiement est tout à fait indifférent.

Combien de fois par mois les deux amies doivent-elles aller en salle de culture physique pour être certaines de payer la même somme ?

Expliquez votre réponse.

Les stratégies suivantes étaient prévues par l'analyse a priori de ce problème :

- Procéder par essais, par exemple en supposant, pour commencer, que Rosanna et Angéla fréquentent la salle seulement deux fois par semaine, c'est-à-dire 8 fois par mois. Les frais mensuels de Rosanna sont alors de 24 euros (8 × 3), et ceux d'Angéla de 32 euros (12 + 2,50 × 8), avec une différence de 8 euros. En trois fois par semaine ou 12 fois par mois Angéla dépense 42 euros (12 + 2,50 × 12) et Rosanna 36 euros (3 × 12) avec une différence de 42 - 36 = 6 euros. Émettre ainsi l'hypothèse que la différence diminue avec l'augmentation de la fréquentation et essayer alors avec 4 fois par semaine puis 6 fois par semaine ou 24 fois par mois les deux amies payent la même somme (72 euro).

Ou : établir un tableau donnant les coûts en fonction du nombre d'entrées, du genre :

N (entrées)	1	2	3	4	…	20	21	22	23	**24**	25	26
dépense de A(en €)	14,5	17	19,5	22	…	62	64,5	67	69,5	**72**	74,5	77
dépense de R(en €)	3	6	9	12	…	60	63	66	69	**72**	75	78

Ou : construire une représentation graphique et constater que les données précédentes se trouvent sur deux droites qui se coupent en (24 ; 72)

Ou : se rendre compte que pour chaque présence, Rosanna paye 0,50 euro de plus qu'Angéla, mais que celle-ci a déjà payé 12 euros initialement. Donc les deux amies paieront la même somme quand le nombre de séances fois 0,50 euro de différence fera 12 euros, c'est-à-dire après 24 présences (12 : 0,50).

Ou : désigner par x le nombre de présences selon lequel la dépense est la même et poser une équation du premier degré : $12 + 2{,}5x = 3x$. Déterminer ainsi la valeur $x = 24$, correspondant à 24 présences.

Cette analyse a priori prévoit évidemment les procédures arithmétiques des essais, organisés ou non, mais elle est aussi révélatrice des « attentes » du maître ou de l'adulte : recours à l'algèbre, ou procédures fonctionnelles (croissances ou représentations graphiques) pour les élèves les plus âgés.

2. Analyse des résultats

L'analyse globale des résultats du problème *Au Fitness* fait apparaître une forte progression des réponses exactes selon les degrés scolaires : de 25% en 6^{e} (12-13 ans) à 60% au degré 8 (14-15 ans) voire 80% aux degrés 9 et 10, sur près de 900 classes de 11 sections du RMT sans variations significatives d'un pays à l'autre (France, Italie, Suisse, Luxembourg).

Une analyse plus approfondie des 390 copies des sections de Parma et Siena montre que peu de classes (24 sur 390 ou 6%) ont choisi une procédure algébrique (*Tableau 1*).

Classes des degrés :	6	7	8	9	10	N
Nombre de copies examinées :	121	96	71	76	26	390
Procédures algébriques relevées :	0	0	6	12	6	24

Tableau 1 *– Problème Fitness, réussite globale et procédures algébriques relevées*

Les classes des degrés 6 et 7 n'ont évidemment pas résolu le problème à l'aide de l'algèbre, mais on pensait que les élèves plus âgés auraient choisi majoritairement des stratégies algébriques vu que l'introduction du calcul littéral et la résolution d'équations du premier degré figurent dans les programmes scolaires de l'école secondaire italienne (dès le degré 8)[2].

On trouve quelques rares procédures algébriques (*Exemple 1*) mais la majorité des classes des degrés 8 à 10 ont trouvé la réponse 24, par voie arithmétique (*Exemple 2*) ou par essais successifs, organisés ou non, suivis d'une vérification (*Exemple 3*).

[2] Pour ce problème, les copies de deux sections seulement ont été analysées, mais, pour d'autres problèmes analogues, l'examen des copies ne permet pas de déceler de différences significatives. Un examen des programmes nationaux montre que l'algèbre et les équations sont introduits aux mêmes degrés, avec quelques variations mineures.

Per trovare il risultato del problema abbiamo tradotto sotto forma di equazione i dati necessari, in questo modo : *(pour trouver le résultat du problème, nous avons traduit les données ainsi sous forme d'équation)*	$3x = 12x + 2{,}50x$ $3x – 2{,}50x = 12$ $0{,}5x = 12$ $x = 24$

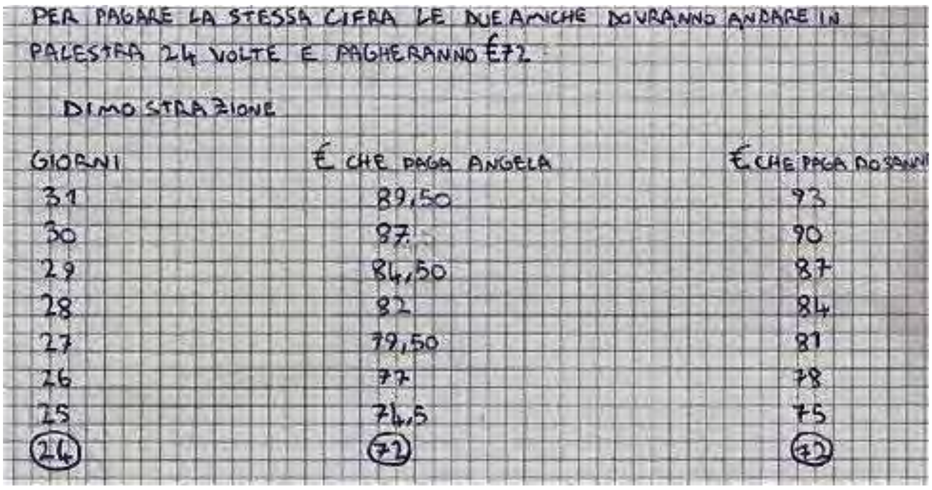
Exemple 1 – *(degré 8) d'une procédure algébrique, prévue par l'analyse de la tâche*

Noi abbiamo cosi : (Nous avons fait ainsi)
3 - 2,50 = 0,50 €
12 : 50 = 24 volte
R = 3 x 24 = 72 €
A = 2,50 x 24 + 12 = 72 €

Exemple 2 – *d'une des procédures arithmétique prévue*

Les essais, aux dires des élèves, suivis d'une vérification sont fréquents.

Très peu de classes ont organisé leurs essais sous forme de « tableau », méthode pourtant considérée par les maîtres comme un bon instrument didactique d'introduction à la notion d'inconnue.


PER PAGARE LA STESSA CIFRA LE DUE AMICHE DOVRANNO ANDARE IN PALESTRA 24 VOLTE E PAGHERANNO €72

DIMOSTRAZIONE

GIORNI	€ CHE PAGA ANGELA	€ CHE PAGA ROSANN
31	89,50	93
30	87	90
29	84,50	87
28	82	84
27	79,50	81
26	77	78
25	74,5	75
24	72	72

Exemple 3 – *où le tableau fait office de « démonstration »*

3. *Pour en savoir plus*

Les résultats précédents nous ont incités à approfondir nos recherches sur l'acquisition de la capacité à résoudre des problèmes par mise en équation. Dans le cas de *Au Fitness*, la simplicité de la relation permettait de choisir des stratégies « élémentaires » masquant d'éventuelles résistances et difficultés dans l'usage du langage algébrique.

D'autres problèmes du RMT ont alors été élaborés précisément pour favoriser une résolution par voie algébrique (Doretti et all. 2009). L'un deux, *Composition de roses* a été proposé aussi aux classes de degrés 6 à 8, lors de la finale du 16e RMT (2008) :

Compositions de roses

Madame Flora, propriétaire d'un célèbre magasin de fleurs, a préparé pour un client deux très belles compositions de roses.

Dans la première composition, faite de roses blanches, rouges et jaunes, elle a utilisé 235 roses.

Dans la seconde composition, faite seulement de roses rouges et blanches, elle a utilisé 263 roses.

Madame Flora observe que :

- le nombre des roses blanches est le même dans les deux compositions,
- dans la première composition le nombre des roses jaunes est le tiers du nombre des roses rouges,
- dans la seconde composition le nombre des roses rouges est le double du nombre des roses rouges de la première composition.

D'après vous combien y a-t-il de roses de chaque couleur dans chacune des compositions ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver vos réponses.

Ce problème peut être résolu algébriquement à l'aide d'une équation ou d'un système d'équations linéaires, mais aussi par arithmétique.

L'analyse, a posteriori, des copies de six sections a témoigné d'un usage très limité de la stratégie algébrique, aux degrés 9 et 10. Pour en savoir plus sur le recours spontané des élèves à « l'outil » équations, sans le conditionnement d'un usage en pratique de classe au chapitre « équation », le problème a été soumis à 993 élèves, de 47 classes de degrés 9 et 10 (14 en lycée scientifique ou classique, 14 en lycée technico-industriel ou commercial, 19 en école professionnelle).

L'analyse des stratégies a donné les résultats suivants pour ce problème :

Degré:	9 (508 élèves)	10 (485 élèves)
Stratégie algébrique :	8%	19%
Procédure algébrique correcte :	1%	13%
Stratégie arithmétique :	18%	23%
Non-réponse :	74%	58%

Tableau 2 *– Les procédures relevées pour « Composition de rose »*

Le problème s'est avéré très difficile. Il avait été bien réussi dans le « milieu » du RMT : par groupes, des classes finalistes, donc sélectionnées, mais c'est aussi la stratégie arithmétique qui a été choisie le plus souvent, bien qu'elle paraisse plus complexe que la résolution d'un système linéaire de deux équations.

L'usage des lettres et du langage algébrique n'est donc pas envisagé comme un outil apte à représenter et résoudre des problèmes.

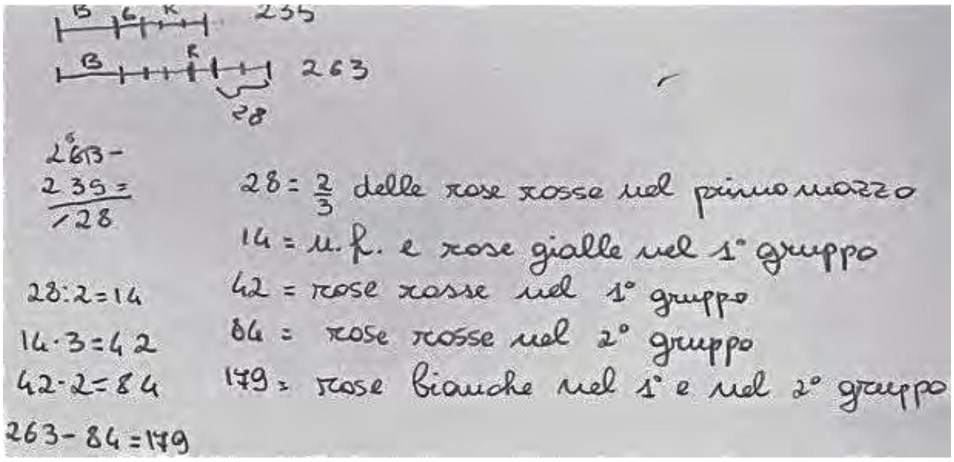
Même dans la catégorie 10 l'étude, pendant toute l'année, des équations et de leurs propriétés ne semble pas avoir une influence déterminante sur la capacité de résolution des problèmes à l'aide de la stratégie algébrique.

C'est dans la phase de formalisation que les erreurs sont les plus fréquentes, notamment sur la récolte ou la représentation des informations, le choix de l'inconnue et la mise en équation.

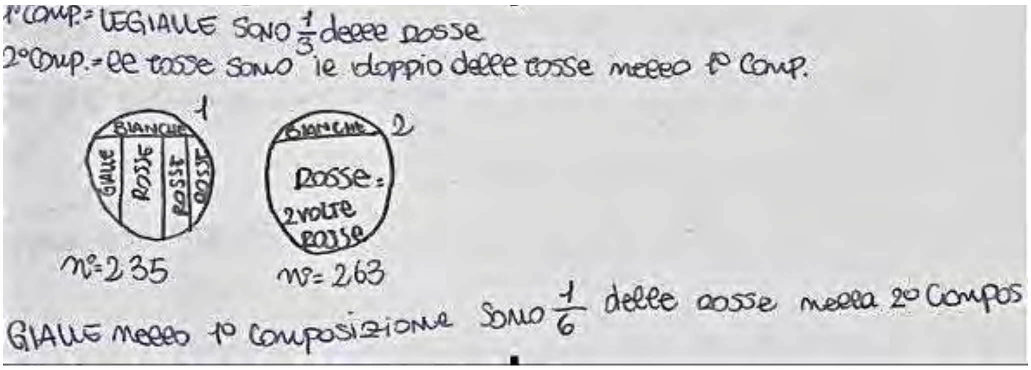
Données
1^e composition 235 roses (r.blanches & r. jaunes & r. rouges)
2^e composition 263 roses (r.blanches & r. rouges)
r.blanches 1^e composition = r.blanches 2^e composition
r. rouges = x
$263 - 2x + x + \frac{1}{3}x$

Exemple 4 *– où l'échec se situe à la mise en équation*

L'algèbre n'est pas perçu comme un moyen de résolution de problème et, là où il est mis en œuvre, il est mal utilisé. En d'autres termes, il semble que les élèves font tout pour ne pas utiliser l'algèbre.



Exemple 5 *– où l'équation est remplacée par un schéma très efficace*



Exemple 6 *– où le diagramme (ensembliste) est inefficace*

4. Nos hypothèses sur la nature des obstacles à la mise en œuvre de connaissances algébriques

Une première hypothèse sur le dysfonctionnement des connaissances algébriques, relevé précédemment, est de nature didactique. Elle nous est suggérée par les analyses de nombreux autres problèmes où intervient le calcul littéral et les constatations de nombreux enseignants, en Italie, qui relèvent systématiquement les difficultés que rencontrent leurs élèves des premières années de lycée dans l'acquisition des concepts d'inconnue et d'équation ou, de manière générale, dans l'utilisation du langage algébrique. Ces notions, déjà introduites au collège (vers 13 à 14 ans), ne semblent acquises que superficiellement et une majorité des étudiants appliquent de manière mécanique des procédures dont ils n'ont pas compris le sens.

Nous pensons qu'une des causes de cet échec est à rechercher dans un déroulement « traditionnel » du programme : introduction du calcul littéral suivi d'exercices de difficulté croissante, puis passage aux équations et à la mise en œuvre immédiate des principes d'équivalence, souvent sans tenir compte des concepts d'inconnue, de variable, de paramètre et des difficultés qui leur sont liées. On se limite ainsi aux procédures de résolution des équations, en tant que suites de transformations successives de type essentiellement syntaxique.

On induit ainsi chez les élèves une vision du langage algébrique comme un ensemble de mécanismes et procédures de calcul, et non pas comme un outil pour généraliser une situation, ce qui constitue une perte progressive de sens souvent combinée avec une perte d'intérêt.

Une seconde hypothèse est d'envisager une composante de nature ontologique ou épistémologique de l'obstacle lié à l'âge – tardif – où les élèves semblent capables de passer d'un inventaire systématique à une généralisation. Le groupe « algèbre » du RMT va poursuivre ses recherches dans cette direction.

V. SYNTHESE

Une idée de problème original, analysé a priori puis proposé à des centaines de classes peut aboutir, lors de l'examen des copies, a posteriori, à l'identification de procédures caractéristiques ou d'erreurs récurrentes ou encore d'obstacles spécifiques. Dans ce cas, le problème est inséré dans un des thèmes étudiés par un groupe de travail du RMT, autour d'un concept donné. Les deux exemples présentés montrent que les résultats observés à la lecture des comptes rendus de groupes d'élèves ont fait émerger les difficultés et spécificités des tâches de résolution Il faut alors approfondir les réflexions à leur sujet : travailler sur les variables didactiques du problème, comme dans le premier exemple, pour distinguer les procédures additives et multiplicatives puis pour faire apparaître le facteur de proportionnalité dans son intégralité, avec du sens, sa grandeur physique et sa nature numérique ; élaborer des expérimentations complémentaires, comme dans le deuxième exemple, pour voir apparaître avec évidence la difficulté, voire l'incapacité, de mettre en œuvre des procédures algébriques.

Le travail ne s'arrête cependant pas là si l'on veut aller au-delà des observations, des identifications ou des descriptions d'obstacles, vers des indications qui puissent être utiles aux enseignants : poursuite des recherches, conduite de nouvelles expérimentations avec la participation de praticiens …

Des approches didactiques nouvelles sont à imaginer ; non plus sur la manière d'expliquer les concepts difficiles ou d'éviter les obstacles, mais sur la résolution de problèmes où les élèves les rencontreront, les affronteront et les surmonteront ensuite en situation didactique, mise en scène par l'enseignant.

Pour le cas de la proportionnalité comme pour celui de l'algèbre, il faudra vraisemblablement renverser les priorités : chercher le sens et la nécessité avant d'enseigner les algorithmes autour de la « quatrième proportionnelle » ou les techniques de calcul littéral et de résolution d'équations.

REFERENCES

Brousseau G. (1982) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-115.

Brousseau G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(2/3), 309-336.

Charnay R., Jaquet F. (2011) Points de départ. (Triangle magique et Décoration, première réflexions). *Grand N* 87, 4-9.

Doretti L., Medici D., Rinaldi M. G., Salomone L. (2009) Dare significato ai concetti di equazione e di sistema : attività in classe con problemi del RMT. In Grugnetti L., Jaquet F. (Eds.) *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin* Vol. 8 (pp. 121-142). ARMT.

Grugnetti L., Jaquet F., Tièche Christinat C. (2005) Enjeux didactiques des concours mathématiques. In Salin M-H, Clanché P., Sarrazy B. (Eds) (pp. 243-248)*Sur la de la théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Jaquet F. (2007) Quelques aspects de la proportionnalité dans les problèmes du RMT. Groupe de travail n° 2. In Grugnetti L., Jaquet F., Medici D., Rinaldi M-G. (Eds.) *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin* Vol 6 (pp. 101-116). ARMT.

Jaquet F. (2009) La proportionnalité, des écarts aux rapports. Groupe de travail n° 2. In Grugnetti L., Jaquet F. (Eds.) *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin* Vol 8 (pp. 73-86). ARMT.

Rouche N. (2002) *Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM). Nivelles, Belgique Collection : Mathématiques de la prime enfance à l'âge adulte.

Rouche N. (2006) *Du quotidien aux mathématiques : Nombres, grandeurs, proportions.* Paris : Ellipses.

Vernex M. (2001) Analyse et utilisation en classe du problème Décoration du 9e RMT. *Math-Ecole* 198, 4-18.

Vernex M. (2004) Une évaluation des procédures pour une remédiation ciblée. *Math-Ecole* 211, 37-46.