ÉTUDE DES CONDITIONS POUR FAVORISER LES CONNEXIONS ETENTRE LES CONNAISSANCES : UNE APPROCHE ÉCOLOGIQUE

Christine CHAMBRIS*

Résumé – Nous étudions les conditions curriculaires pour favoriser les connexions entre les connaissances. Nous nous centrons sur les connaissances impliquant la numération décimale au primaire. Nous adoptons un point de vue écologique, relevant de la théorie anthropologique du didactique. Nous caractérisons l'état du système actuel : les praxéologies apprises sont un reflet assez fidèle des praxéologies à enseigner qui sont ponctuelles et peu reliées. Nous mettons en évidence des leviers relevant des techniques à enseigner et des tâches à prescrire susceptibles d'agir sur ces connexions. Il s'agit de connecter les types de tâches – en introduisant notamment des tâches sensibles - et d'étendre la portée des techniques en utilisant un ostensif particulier.

Mots-clefs : numération décimale, système métrique, connexions entre les connaissances, écologie des savoirs, complétude des praxéologies, transposition didactique, numération en unités.

Abstract – In this paper, we study conditions in the curriculum to make connections between knowledge. We focus on knowledge involving decimal number system in primary school. We adopt an ecological approach, from the anthropological theory of didactics. We study current ecological conditions: learned praxeologies are quite similar as praxeologies to taught which are punctual and little linked. We highlight levers in order to improve connections: they belong to technique and problems. The levers rely on connecting type of tasks - introducing some new problems - and enlarging the scope of some techniques using a specific ostensive object.

Keywords: system of place value, metric system, connections between knowledge, knowledge ecology, completeness of praxeologies, didactic transposition, reference unit for numbers.

INTRODUCTION

Les pratiques des enseignants sont fortement conditionnées par de multiples contraintes, notamment institutionnelles. L'influence des programmes et des manuels scolaires est déterminante en particulier pour les types d'exercices et les techniques de résolution enseignés (Chevallard 1985 ; Bosch et Gascon 2005 ; Roditi 2005 ; Chesnais et Horoks 2009).

Les connexions entre les connaissances des élèves constituent un enjeu majeur de l'enseignement des mathématiques. « Connections » est une entrée des « Principles and Standards for school mathematics » (NTCM), au même titre que « Problem Solving » ou « Reasoning and Proof ». Tchoshanov (2011) montre que la réussite des élèves (classes de 6e à 8e) est corrélée aux connaissances du type « concepts et connections » chez les professeurs. Bosch, Fonseca et Gascon (2004) étudient les échecs massifs des étudiants en mathématiques. Ils établissent que leurs connaissances à la sortie du secondaire sont trop rigides pour réussir à l'université. Ils mettent en relation ces connaissances et les contenus de manuels scolaires du secondaire. Ils caractérisent cette rigidité en termes écologiques : par exemple les types d'exercices résolus par un type donné de méthode sont peu variés.

La numération décimale est centrale dans les mathématiques en primaire. Elle intervient, explicitement ou non, dans l'étude des thèmes suivants :

- les nombres entiers avec les « nombres à plusieurs chiffres » ;

* Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot & IUFM, Université de Cergy-Pontoise – France – cchambris@free.fr

- le système métrique : les systèmes d'unités simples multiples et sous-multiples des gramme, mètre et litre constituent chacun un système d'unités à base dix ;
- les techniques opératoires des quatre opérations reposent sur les propriétés de la numération décimale de position ;
- les décimaux : malgré des différences épistémologiques majeures, entiers et décimaux partagent le même système sémiotique – le système décimal positionnel – pour les désigner.

La numération décimale intervient dans chacun de ces thèmes mais qu'en advient-il dans l'enseignement – apprentissage actuel en France ? Ces différents thèmes apparaissent-ils comme juxtaposés les uns aux autres ou bien semblent-ils se nourrir les uns les autres ? Certaines méthodes de résolution se retrouvent-elles dans l'étude des différents thèmes ou au contraire toutes sont-elles spécifiques de chaque thème ?

En France, depuis les années 1970, numération et système métrique sont étudiés dans deux domaines différents des programmes : Nombres et calcul, Grandeurs et mesures. Des évaluations à l'entrée en 6e montrent des résultats médiocres aux conversions en système métrique. Parouty (2005) montre une relative faiblesse des élèves de 3e à 5e année dans la résolution des problèmes de numération en contexte, et des progrès des élèves *dans toute la numération* lorsque, dans le cadre d'une recherche, leurs enseignants les font travailler ces types de problèmes. Quelles sont les contraintes institutionnelles qui pèsent sur l'enseignement de ces deux thèmes, sur les relations entre eux ? Le rattachement institutionnel à deux domaines différents semble-t-il avoir une incidence sur ces relations, sur les connaissances des élèves ? Ces contraintes semblent-elles favorables aux connexions entre les connaissances ? A défaut, peut-on imaginer des modifications des contraintes institutionnelles qui y seraient plus favorables ?

Ainsi, du point de vue des finalités du groupe de travail, deux questions nous préoccupent : que nous disent les procédures des élèves des processus transpositifs de la numération de position et du système métrique actuels ? D'autres transpositions didactiques de ces objets ne seraient-elles pas mieux adaptées aux enjeux actuels de l'enseignement des mathématiques, ceux relatifs aux connexions entre les connaissances des élèves ?

I. CADRE THEORIQUE, HYPOTHESE ET METHODOLOGIE

1. Cadre théorique

Savoir “savant”	→	Savoir à enseigner	→	Savoir enseigné	→	Savoir appris
Communauté des mathématiciens - I1		Système éducatif - I2		Classe - I3		Élèves - I4

***Figure 1**. – Schéma de la transposition didactique*

Pour étudier ces questions, nous nous plaçons dans le cadre de la Théorie Anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard 1997).

> La TAD postule qu'il n'est pas possible d'expliquer les caractéristiques du « savoir appris » (…) sans prendre en considération toutes les étapes de la transposition. (Bosch et Gascon 2005, p. 116)

Un effet de la transposition peut être que des relations entre la numération et d'autres thèmes existent dans certaines institutions sans exister dans d'autres. La dimension écologique de la TAD permet notamment d'étudier la qualité des relations entre objets d'enseignement.

Certains outils visent à mieux modéliser des éléments relatifs à la flexibilité des connaissances des élèves en étudiant l'écologie (Bosch et al. 2004, Bosch et Gascon 2005).

Avant de présenter ces outils, nous décrivons brièvement la notion clé pour les analyses en TAD, il s'agit de la *praxéologie*. Une praxéologie est un système comportant quatre composantes complémentaires permettant de décrire une pratique. Le *type de tâches* est un ensemble de tâches qui se ressemblent en ce sens qu'elles peuvent être traitées par le même *type de techniques*. Ce dernier peut être justifié par une *technologie*, les technologies s'inscrivent dans un ensemble justificatif plus vaste – la *théorie* -. Ce découpage de la pratique est caractéristique de l'institution dans laquelle la pratique est étudiée. Celle que nous étudions est l'école primaire française du début du 21^{e} siècle.

La TAD désigne par *ostensif* (Bosch et Chevallard 1999) un objet qui a une certaine matérialité, une réalité perceptible. La *numération en unités* -la désignation des nombres avec les mots *unités*, *dizaines*, *centaines*, etc.- est un ostensif important dans notre étude. Les manipulations impliquant un ostensif, légitimes dans l'institution considérée, constituent la *valence instrumentale* de l'ostensif.

Les praxéologies s'amalgament (Chevallard 1999). Une praxéologie est dite *ponctuelle* lorsqu'elle est relative à un unique type de tâches. Elle est dite *locale* lorsque des praxéologies ponctuelles sont agglomérées par une technologie commune. Bosch et al. (2004) étudient les discontinuités didactiques à la transition secondaire université en Espagne. Ils donnent sept critères pour caractériser la *complétude* des praxéologies locales qui, quoi qu'il en soit, est relative. Plus les praxéologies apprises sont complètes plus les connaissances sont susceptibles d'être flexibles, moins elles seront rigides. Nous retenons les 3 premiers critères :

1. intégration des types de tâches : les types de tâches peuvent être plus ou moins reliés soit par des discours technologiques, soit par le développement successif des techniques ;
2. existence de différentes techniques pour traiter une tâche et de critères pour choisir entre elles : sans l'existence de plusieurs techniques (qui peuvent être des variations d'une même technique) pour traiter une tâche donnée, il y a une identification absolue entre le type de tâches et la technique associée ;
3. indépendance des ostensifs intégrés dans les techniques : il n'y a pas une identification rigide entre une technique et un ostensif. Une technique donnée accepte diverses représentations ostensives.

Notre projet revient alors :

1. à étudier la complétude des praxéologies mathématiques à enseigner et apprises dans lesquelles la numération décimale intervient,
2. dans la perspective d'une action sur les contraintes institutionnelles, à proposer des praxéologies alternatives qui seraient plus complètes.

2. *Hypothèses :*

Les praxéologies apprises en numération et en système métrique sont peu reliées. Ce fait est à rapprocher d'un autre : dans les contraintes institutionnelles, les praxéologies à enseigner ne sont pas reliées.

Dans la perspective d'une action sur les contraintes institutionnelles, des leviers permettent de concevoir des praxéologies plus complètes qui relient notamment numération et système métrique.

3. *Méthodologie générale*

Un questionnaire permet de recueillir des éléments sur les praxéologies apprises en numération et système métrique. Des éléments bibliographiques apportent d'autres informations sur les praxéologies enseignées ou apprises. Des éléments sur les praxéologies actuellement à enseigner sont recueillis dans des ressources institutionnelles. Praxéologies apprises et à enseigner sont mises en relation.

Une praxéologie – dite alternative – intégrant numération et système métrique est proposée. Elle permet de réorganiser les relations entre les tâches. Elle est notamment construite à partir d'une étude de manuels scolaires antérieurs à 1970 (Chambris 2009). Elle ne vit pas dans le système éducatif français actuel (Chambris 2008) mais a une place dans l'institution « recherche en didactique des mathématiques ».

Dans ce texte, elle permet d'abord d'expliciter des relations possibles entre système métrique et numération. Ensuite, elle est discutée en termes d'alternative aux praxéologies actuellement enseignées en France. Ceci est notamment nécessaire dans la perspective d'une action sur les contraintes institutionnelles. Les caractéristiques des praxéologies actuellement dominante et alternative sont confrontées : complétude respective, caractérisation des ostensifs, liens potentiels avec les autres thèmes impliquant la numération décimale.

II. ELEMENTS SUR LE SAVOIR APPRIS

1. *Méthodologie spécifique*

Le but du questionnaire est de repérer – globalement – les effets de l'enseignement. Nous étudions les connaissances des élèves à la fin du processus d'enseignement (les 273 élèves de 12 classes en fin de 5^{e} année). Les temps de passation doivent permettre que les élèves traitent *tranquillement* les exercices proposés. Ils ne peuvent pas revenir sur un exercice passé.

Les élèves ont traité six tâches (tableau 1) de numération ou de système métrique. Certaines sont formelles, d'autres en contexte. La relation de millier à centaines intervient dans quatre tâches.

	en contexte / formel	numération / système métrique	conversion de millier en centaines	durée
Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?	en contexte	numération	oui	2 min
Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ?	en contexte	système métrique	oui	1 min 45 s
Le chiffre des dizaines de 6529 est …	formel	numération	non	1 min
Le nombre de centaines de 8734 est …	formel	numération	oui	1 min
5 kg = …….g	formel	système métrique	non	1 min 30 s
8 kg = …….hg	formel	système métrique	oui	1 min 30 s

Tableau 1 *– Questionnaire : variables et temps de passation*

Pour identifier les praxéologies apprises, nous étudions les taux de réussite (indices de l'enseignement d'au moins une technique pour traiter la tâche) et les techniques utilisées.

2. *Présentation des réponses et des techniques visibles dominantes*

Le tableau 2. indique la fréquence (par rapport au nombre total d'élèves) des réponses (correcte ou erronées fréquentes) et des techniques dominantes visibles.

Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?					
Réponses correcte puis erronée(s) fréquente(s) et (%)		Techniques visibles pour les réponses 86 ou 85			
86 (20%)	85 (20%)	Pas de technique visible (10%)	Division (18%)	Multiplication : 85x100 ou 86x100 (11%)	Indication de 80 (2%)

Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ?					
Réponses correcte puis erronée(s) fréquente(s) et (%)		Techniques visibles pour la réponse 40			
40 (32%)	25 ou 100 : 4 (11%)	Pas de technique visible (17%)	Division en ligne ou posée : 4000 : 100 (6%)	Multiplication : 40x100 (6%)	Indication de 10 (1%)

Le chiffre des dizaines de 6529 est …		
Réponses correcte puis erronée(s) fréquente(s) et (%)		Techniques visibles pour la réponse 2
2 (76%)	20 ou 29 (8%)	Pas de technique visible

Le nombre de centaines de 8734 est …			
Réponses correcte puis erronée(s) fréquente(s) et (%)			Techniques visibles pour la réponse 87
87 (21%)	7 (46%)	700 ou 734 (23%)	Pas de technique visible

5 kg = …….g		
Réponses correcte puis erronée(s) fréquente(s) et (%)		Techniques visibles pour la réponse 5000
5000 (66%)	500 (14%)	Pas de technique visible

8 kg = …….hg	
Réponse correcte et (%)	Techniques visibles pour la réponse 80
80 (71%)	Pas de technique visible

***Tableau 2** – Questionnaire : réponses et techniques*

3. *Éléments d'analyse des réponses*

Beaucoup de techniques ne sont pas visibles.

Massivement les enseignants des élèves français 3^{e} à 5^{e} année ne reconnaissent pas les problèmes de type « paquets de 100 feuilles » comme des problèmes de numération mais de division (Parouty 2005). Dans ces conditions, les tâches de ce type ne font pas partie de l'étude de la numération des entiers. Cela explique les techniques observées.

A priori, pour les « paquets de 100 g » deux grands types de raisonnements sont possibles : convertir 4 kg en 4000 g, puis diviser 4000 par 100 (ou voir 40x100=4000) ; exploiter le rapport dix entre kg (millier de g) et 100 g (centaine de g), puis 4 fois 10. Parmi les techniques visibles, le premier type (division – éventuellement erronée – ou multiplication) est très dominant. Le second est rare. La rare présence de 80 dans la résolution du problème « paquet de 100 feuilles » relève du même type de raisonnement : technique de numération qui sollicite la relation entre milliers et centaines.

Le « nombre de centaines » est peu réussi. Les réponses erronées indiquent que les élèves connaissent la position du chiffre des centaines. La difficulté vient probablement d'une méconnaissance de ce que représente le nombre de centaines, méconnaissance ayant une incidence sur la capacité à mémoriser (ou à reconstruire) la façon de le trouver.

Dans certaines classes où le questionnaire a été proposé, un tableau de conversion était affiché. La détermination du nombre d'hectogrammes dans 8 kg est plutôt bien réussie. Ceci est surtout étonnant en comparaison des résultats à l'item : 5 kg = … g. Compte tenu du faible usage social de l'hectogramme, il est probable que les élèves mobilisent le tableau (de mémoire ou pas) pour trouver convertir les kg en hg et qu'ils mobilisent leur mémoire (éventuellement défaillante) pour convertir les kg en g.

III. ÉLEMENTS SUR LE SAVOIR A ENSEIGNER

Quelles sont les contraintes institutionnelles ? Comment caractériser des liens entre numération et système métrique ?

En TAD, des liens entre numération et système métrique se traduisent par des praxéologies connectées. Ceci se manifeste par des types de tâches reliés par le développement successif de techniques ou des discours justificatifs. (critère 1)

Qu'en est-il dans les manuels scolaires actuels ? Dans cette section, nous référons explicitement à un manuel de 3^{e} année (Le Nouveau Math Elem paru en 2002, NME), représentatif d'autres manuels.

1. Premiers éléments sur les ostensifs

Entre ces deux extraits de manuels (fig. 2 et 3) relatifs l'un au système métrique, l'autre à la numération, les transformations d'écriture diffèrent : pour l'un un nombre à plusieurs chiffres et des unités métriques ; pour l'autre un nombre à plusieurs chiffres et deux types de sommes.

La deuxième de ces sommes mobilise des écritures chiffrées des puissances de dix (1 ; 10 ; 100 ; 1000…) ; dans la première, les « petits » multiples (de 1 à 9) de ces puissances de dix interviennent (80 ; 400 ; 7000…). Nous appelons ECPD cet ostensif (qui inclut donc les Écritures Chiffrées des Puissances de Dix et leurs petits multiples).

Les unités de longueur du système métrique

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
4	5	7	2			
			3	1	8	

1 000 mètres = **1 kilomètre** 1 000 m = 1 km

100 mètres = **1 hectomètre** 100 m = 1 hm

10 mètres = **1 décamètre** 10 m = 1 dam

Exemples : • 4 km 5 hm 7 dam 2 m = 4 572 mètres • 318 cm = 3 m 1 dm 8 cm

Figure 2 *– NME (p. 60)*

Tableau de décomposition des nombres

mille (milliers)			unités				
c	d	u	c	d	u		
3	5	7	4	8	9	→	357 489

3	0	0	0	0	0	→	300 000
	5	0	0	0	0	→	50 000
		7	0	0	0	→	7 000
			4	0	0	→	400
				8	0	→	80
					9	→	9

357 489 =

300 000 + 50 000 + 7 000 + 400 + 80 + 9

(3 x 100 000) + (5 x 10 000) + (7 x 1 000) + (4 x 100) + (8 x 10) + (9 x 1)

Figure 3 *–NME (p. 133)*

2. Les relations entre les unités

Dans NME, si la relation 1 millier = 10 centaines est formulée celle de centaine à dizaines ne l'est dans aucune des leçons de rappel sur les nombres de 3 chiffres. Cette absence n'est pas un phénomène exceptionnel dans les manuels actuels.

Dans les deux domaines, interviennent donc des types de décompositions (tâches) et ostensifs différents. Les relations entre unités de numération (voire de système métrique) ne sont pas indiquées systématiquement. Cela a-t-il une incidence sur la complétude des praxéologies à enseigner ? Examinons les techniques actuellement à enseigner.

3. « Chiffre des » et « Nombre de »

En France, le « nombre de » est souvent opposé au « chiffre des ». La technique pour déterminer le « chiffre des » consiste à repérer la « bonne » colonne, celle pour déterminer le « nombre de » à repérer la bonne colonne puis à « couper » le nombre en ne gardant que les chiffres de gauche souvent sans justification (nous appelons cette technique : la troncature).

Le « nombre de » est un exemple de système tâche / technique pour lequel une technique unique a été associée à une tâche (critère 2 de « non » complétude).

4. Numération : technique dominante pour le dénombrement

Considérons la tâche : Combien y a-t-il de petits cubes (figure 4) ? Deux techniques dominent pour traiter cette tâche. Elles mobilisent les ECPD.

1ère technique	2ème technique
Étape 1 :	Étape 1 :
Un, deux, trois petits cubes (3),	Un, deux, trois petits cubes (3),
Dix, vingt petits cubes (20)	ou un, deux (2x10),

Cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents (500)	ou un, deux, trois, quatre, cinq (5x100),
Mille, deux mille, trois mille, quatre mille (4000)	ou un, deux, trois, quatre (4x1000),
Étape 2 :	Étape 2 :
Production d'une ligne de calcul utilisant des écritures chiffrées des puissances de dix (1, 10, 100…) : 4000+500+20+3.	Production d'une ligne de calcul utilisant des écritures chiffrées des puissances de dix (1, 10, 100…) : (4x1000)+(5x100)+(2x10)+3.

Puis calcul des sommes en 4523. Le tableau de la figure 3, avec ses zéros, indique comment calculer ces sommes.

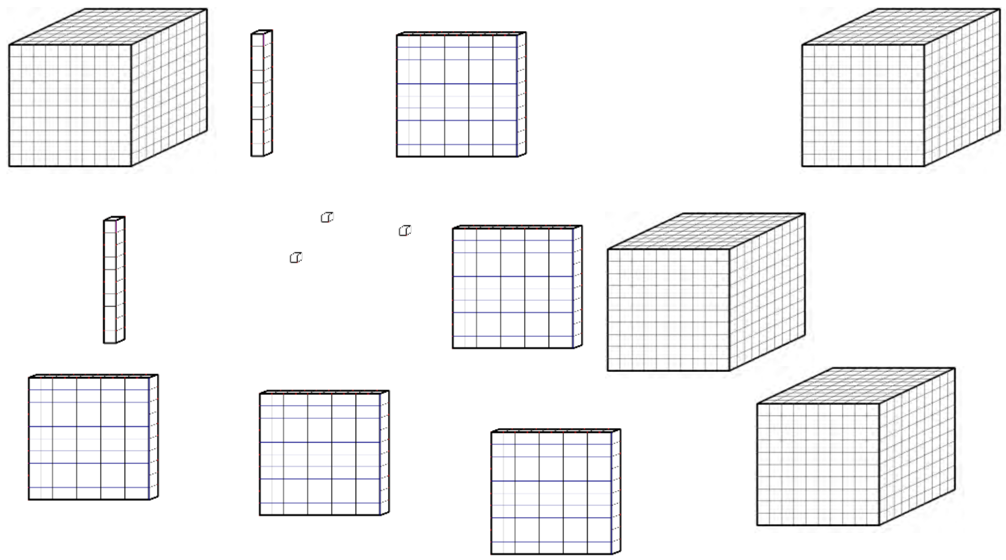

Figure 4 *– Représentation de matériel de numération – base dix*

5. *Système métrique : technique dominante pour les conversions*

La technique préconisée pour réduire 3 m 1 dm 8 cm en 318 cm (figure 2) consiste à mettre chaque chiffre dans sa colonne puis à repérer la succession des chiffres, puis à se référer à la dernière unité (à droite). Cette technique est dominante pour les manipulations dans le système métrique. Elle permet aussi de convertir 5 kg en g et 8 kg en hg (cf. questionnaire), à condition de « gérer » les cases non occupées en les comblant par des zéros.

6. *Mise en relation des praxéologies apprises et à enseigner*

L'étude des techniques apprises montre peu d'utilisations visibles de la relation entre centaine et millier dans les problèmes paquets de 100 feuilles et de 100 g. L'étude des manuels montre que ces relations ne sont pas travaillées voire pas énoncées.

Pour ces problèmes, si la présence d'une division indique clairement que les élèves reconnaissent un problème de division, celle d'une multiplication est plus ambiguë. En effet, les ECPD sont les « outils » de la numération et la présence des multiplications 40x100=4000 ou de 85x100=8500 est le signe d'une interprétation des écritures chiffrées : s'agit-il de calcul ou de numération ? Quelle que soit la réponse à cette question, ce n'est pas la relation entre millier et centaine qui est reconnue.

La tâche « nombre de » est peu réussie, un certain nombre d'élèves semblent « couper » le nombre dans le mauvais sens : ils gardent uniquement les chiffres de droite ! Cette procédure erronée est le signe d'un apprentissage échoué de la technique de la troncature.

Les problèmes du type paquets de 100 g sont peu répandus dans les manuels actuels. En revanche, des problèmes relevant des quatre opérations impliquant des changements d'unités sont prescrits. Ceci peut expliquer que les élèves voient dans les premiers des problèmes de division.

Pour les conversions d'unités métriques, la seule technique des manuels de 3^{e} année est celle que nous avons décrite. Le kg et le g sont enseignés en 2^{e} année, alors que les unités intermédiaires ne le sont qu'à partir de la 4^{e}. Par ailleurs, en 2^{e} année, le programme indique la relation entre kg et g et l'étude des nombres jusqu'à 1000. Certains manuels (pas tous !) n'étudient les nombres que jusqu'à 999 et font une leçon sur la relation entre kg et g dans laquelle ils indiquent sans la moindre référence aux centaines 1 kg = 1000 g. Les différences institutionnelles entre les approches des différentes unités sont peut-être des éléments d'explication aux différences de réussite aux exercices entre 5 kg = … g et 8 kg = … hg.

IV. PRAXEOLOGIE ALTERNATIVE : DISCOURS DE POSITION

Voici maintenant deux types de discours explicatifs récurrents sur lesquels vont reposer des techniques alternatives présentées ensuite.

1. Technologies alternatives

- position : dans l'écriture chiffrée d'un nombre, on compte les positions à partir de la droite : les unités sont en 1ère, les dizaines en 2^{e}, les centaines en 3^{e}, les milliers en 4^{e}. Une version plus générale de ce discours est : dans l'écriture chiffrée d'un nombre chaque position désigne une unité dix fois plus grande que celle qui est à sa droite.
- traduction des préfixes métriques en unités de numération : kilo - mille, hecto - cent, déca - dix, déci – dix, centi – cent, milli – mille.

2. Technique alternative pour dénombrer (figure 4)

Voici une technique alternative.

Étape 1 : compter les *différentes unités* :
- les cubes : un, deux, trois,
- les dizaines de cubes, un, deux,
- les centaines de cubes : un, deux, trois, quatre, cinq,
- les milliers de cubes : un, deux, trois, quatre.

J'ai donc : 3 cubes, 2 dizaines de cubes, 5 centaines de cubes et 4 milliers de cubes.
Étape 2 : écrire en chiffres le nombre de cubes (utiliser un discours de position).
On compte les positions à partir de la droite : Les unités sont en première, les dizaines en 2e, les centaines en 3e, les milliers en 4e : il y a 4523 cubes.

Cette technique, sans ECPD, était dominante avant la réforme des mathématiques modernes. Elle a progressivement disparu après.

Dans certains manuels actuels, une technique ressemble à « l'étape 1 » mais elle mène à l'écriture directe des « chiffres » 3, 2, 5 et 4 dans les cases du tableau de numération. Les unités ne sortent pas du tableau !

3. Système métrique : technique alternative pour les décompositions - recompositions

Pour présenter les techniques alternatives en système métrique, nous distinguons plusieurs types de conversions : certains mobilisent principalement la position (décomposition – recomposition) et d'autres les relations entre unités.

Considérons : 3 m 1 dm 8 cm = 318 m. Il s'agit d'une décomposition - recomposition. La signification des préfixes permet d'obtenir : si l'unité est le cm, la dizaine est le dm, la centaine est le m car un m. Ensuite, le discours de position donne : si l'unité est le cm, 3 représente des centaines (3^e position), 1 des dizaines (2^e position), 8 des unités ($1^{ère}$ position), il y a donc 318 cm.

4. Extension de la technique

Supposons que chaque cube de la figure 4 pèse 1 g. Combien l'ensemble pèse-t-il ? 3 cubes pèsent 3 g, 1 dizaine de cubes pèse une dizaine de gramme soit un dag, etc. Donc l'ensemble des cubes pèse 4 kg 5 hg 2 dag 3 g qui s'écrivent aussi 4523 g (cf. §3).

La technique alternative de dénombrement fonctionne qu'il s'agisse de compter des cubes ou des grammes.

Les techniques pour les trois tâches, dénombrement de cubes et de grammes, décomposition – recomposition sont ainsi articulées, reliées par des éléments technologiques. Dans les manuels actuels les techniques dominantes pour les deux premières tâches ne sont pas articulées : ECPD et tableau de conversion. Par ailleurs, la troisième tâche n'existe pas.

5. L'organisation du savoir : « chiffre des » et « 5 kg= …g »

Le discours de position relie déjà trois tâches. Il permet aussi de traiter « Le chiffre des dizaines de 6529 est … » (questionnaire). On enchaîne préfixe (kilo – mille) et position (millier en 4^e) pour traiter la décomposition – recomposition « complète : 5 kg = ….g ».

Les deux tâches apparaissent alors comme deux tâches du même type relevant du discours positionnel précédé d'une adaptation consistant en la traduction du préfixe kilo pour la deuxième. Ce type inclus plus généralement les décompositions – recompositions en système métrique et en numération. Leurs techniques ont en commun une utilisation du discours de position auquel peuvent être adjoint d'autres éléments, notamment la signification des préfixes métriques. Les tâches de ce type sont utilisées dans les techniques des tâches plus complexes, telles celles de dénombrement.

V. PRAXEOLOGIE ALTERNATIVE : DISCOURS DE RELATION ENTRE UNITES

1. Technologie alternative

Au IV, nous avons introduit deux types de technologies. En voici un troisième qui va aussi soutenir les nouvelles techniques. Il s'agit des discours du type « relation entre unités », par exemple 1 millier, c'est dix centaines.

2. Une nouvelle technique pour une nouvelle tâche

Pour la *conversion élémentaire*, convertir 3 milliers en centaines, ce discours fournit une technique : 1 millier, c'est 10 centaines. 3 milliers, c'est 3 fois plus. Donc, 3 milliers, c'est 30 centaines.

3. L'organisation du savoir : la relation entre centaines et millier

Cette technique de *conversion élémentaire* permet, moyennant certaines adaptations, de traiter les 4 tâches du questionnaire impliquant la relation entre millier et centaines. Par exemple, pour convertir 8 kg en hg, après avoir transformé kg et hg en milliers et centaines à l'aide des préfixes, il reste à convertir 8 milliers en centaines. Pour le nombre de centaines dans 8734 : on repère 8 milliers (position), qu'on convertit en 80 centaines (§2) ; auxquelles s'ajoutent 7 centaines (position).

Les quatre tâches se trouvent reliées par un même type de technique : on constitue ainsi un type de tâches qui les amalgame.

VI. DISCUSSION : MISE EN EVIDENCE DE CONDITIONS ECOLOGIQUES FAVORABLES AUX CONNEXIONS

1. Complétudes respectives des praxéologies alternative et dominante

La praxéologie alternative n'existe pas dans l'institution école primaire actuelle, les éléments qui suivent constituent donc des hypothèses à mettre à l'épreuve.

Les technologies alternatives relient d'une part les quatre tâches qui mettent en relation millier et centaines, d'autre part avec la « position » les deux tâches « kg en g » et « chiffre des ». Le premier critère de complétude est en jeu dans cette réorganisation. Les trois technologies alternatives permettent de produire des techniques susceptibles de réorganiser les relations entre les différentes tâches à enseigner en système métrique et en numération.

Disposer des technologies permet des petites variations dans les techniques possibles : on peut automatiser certains enchaînement d'étapes de façon à produire des techniques plus rapides pour certaines tâches, par exemple produire la technique de la troncature pour trouver le « nombre de » à partir de l'utilisation des relations entre unités. Ceci contribue au deuxième critère de complétude.

Disposer de l'ostensif « numération en unités » enrichit *a priori* le répertoire des techniques possibles puisque toutes les techniques en ECPD continuent à exister et de nouvelles techniques apparaissent. (3e critère)

Le questionnaire ne permet pas d'identifier toutes les techniques apprises par les élèves. Néanmoins, les divisions (et multiplications), très présentes pour l'étude des deux problèmes de centaines en contexte, et absentes pour les questions formelles (nombre de centaines et conversion de kg en hg) montrent que ce ne sont pas les mêmes techniques qui sont utilisées. De plus, les techniques qui sollicitent le rapport dix sont très minoritaires parmi les techniques visibles. Ce point est largement compatible avec l'étude des contraintes institutionnelles : les relations entre unités ne sont pas énoncées de façon systématique dans les leçons. Le discours de relation entre unités qui constitue un ciment dans la praxéologie alternative est anecdotique dans la praxéologie dominante et ces tâches pas davantage que leurs techniques ne peuvent être reliées.

Dans les praxéologies à enseigner, les 4 tâches de relations entre unités sont des représentants de 3 types probablement non articulés. Les éléments dont nous disposons amènent à envisager une organisation praxéologique dominante des savoirs qui regrouperait :

- les problèmes à opération (paquets de 100 feuilles, paquets de 100 g),
- les exercices de numération (nombre de, chiffre des),
- les conversions (qui se font à l'aide d'un tableau ou de mémoire).

Notamment, le couple (nombre des, chiffre de) constitue une praxéologie locale dans laquelle les deux techniques ne sont pas reliées par une technologie. Les techniques de conversion sont indépendantes de la signification et des relations entre les unités en jeu.

Revenons sur la praxéologie alternative pour mettre en évidence des leviers utilisés dans son élaboration et pour discuter certains choix.

2. Intégration des tâches du type « relation entre unités »

Pour construire la praxéologie alternative, nous avons introduit des technologies, techniques et tâches.

L'intégration des tâches du type « relation entre unités » dans un nouveau type utilise plusieurs leviers. L'un est l'introduction d'une technique intégratrice, la technique de conversion élémentaire. Des adaptations permettent de traiter toutes les tâches du type. Elle repose sur le discours de relation entre unités qui existe mais est peu sollicité dans la praxéologie dominante.

L'autre levier est l'introduction de la tâche élémentaire qui n'existe pas dans l'enseignement primaire actuel : convertir 30 centaines en milliers (et convertir 3 milliers en centaines). La technique alternative ne peut se formuler sans elle. Une autre technique alternative aurait-elle pu remplir la même fonction, associée à une tâche différente ?

Depuis la réforme, le type « convertir 30 centaines en milliers » n'existe plus en numération des entiers en primaire en France mais son équivalent existe en système métrique. Est-ce parce qu'il n'existe pas en numération que nos quatre tâches apparaissent actuellement isolées ?

Discussion : la tâche élémentaire de conversion favorise les connexions. Est-ce la seule tâche possible ? Un document institutionnel récent se préoccupe des connexions entre système métrique et numération. Les conversions y relèvent seulement de l'étude du système métrique. Le document préconise d'introduire la tâche « nombre de » en système métrique. Il postule implicitement que des tâches communes sont nécessaires aux liens. Le document semble cependant manquer d'une analyse des besoins dans les autres domaines. Par exemple, pour justifier les retenues dans les opérations, les conversions du type 23 dizaines = 2 centaines et 3 dizaines sont souvent nécessaires : les tâches de conversion élémentaire sont plus adaptée que le « nombre de ».

3. Choix d'un ostensif

L'ostensif numération en unités a permis de formuler les praxéologies alternatives.

Très présentes avant la réforme des mathématiques modernes, les unités de numération ont vu leur influence diminuer fortement pendant et après. Dans l'enseignement actuel, cet ostensif a une valence instrumentale souvent réduite : il ne sort pas (ou peu) du tableau de numération. Le travail avec des décompositions en ECPD (figure 3) est apparu vers la fin de la réforme. Ce double mouvement a des raisons multiples. Les ECPD sont le signe de la transposition de la théorie savante de la numération : 10^3 devenant 1000. Et en 1980, il s'agissait probablement d'« éliminer » les « vieilles » unités de numération. Si le registre des écritures chiffrées dont relèvent les ECPD existe indépendamment de l'époque, il n'en va pas de même de celui des unités de numération. Ces dernières sont moins que les ECPD une pratique sociale de référence. Par suite elles n'émergent pas naturellement de situations empruntées à la « vie courante ». Une étude de manuels des années 80 desquels elles sont absentes le montre. (Chambris 2008).

Sur le plan cognitif, au début du primaire, l'utilisation des ECPD est délicate puisqu'il faut montrer coefficients et unités dans des multiplications. Les mots des unités de la numération sont probablement plus adaptés au développement de jeunes élèves.

Thanheiser (2009) identifie deux conceptions correctes de la numération décimale de position chez les futurs enseignants. L'une d'elle « group of ones » n'est pas suffisante pour appréhender la justification des techniques opératoires car elle ne permet pas d'interpréter les chiffres des algorithmes comme des nombres d'unités – en relation les unes avec les autres –. Un 4 en troisième position est vu comme une écriture courte de 400 et non comme 4 centaines qui seraient aussi 40 dizaines (conception « reference unit »). L'absence d'unités de numération semble ainsi peu favorable au développement d'une conception de type « reference unit ».

Les écritures en unités de la numération sont plus congruentes avec les unités métriques que les ECPD, cette congruence est susceptible de favoriser l'adaptation des techniques d'un domaine à l'autre.

Les unités de numération sont un ostensif *naturel* dans l'étude des décimaux puisqu'elles interviennent à l'oral : on dit 27 centièmes pour 0,27 et non 27 centaines pour 2700. En calcul mental, même pour les entiers, les unités de numération interviennent pour formuler certaines techniques : par exemple pour calculer mentalement 251+40, on calcule 251+4 dizaines, on ajoute donc 4 dizaines à 5 dizaines.

Malgré toutes ces raisons, l'ostensif numération en unités est actuellement peu répandu pour l'étude des entiers dans les manuels scolaires français de primaire.

VII. CONCLUSION

Les éléments sur les praxéologies apprises semblent indiquer que les praxéologies à enseigner déterminent assez fortement les praxéologies apprises. Ces praxéologies font intervenir les ostensifs ECPD et unités de numération mais elles semblent peu connectées en particulier car la valence instrumentale du second ostensif est réduite. Ces praxéologies restent donc ponctuelles et ne peuvent s'amalgamer.

Grâce aux praxéologies alternatives introduites, les conditions repérées par Bosch et al. (2004) permettent de caractériser la situation actuelle et aussi des conditions favorables pour recréer des amalgames praxéologiques en agissant à la fois au niveau des tâches : pour introduire certaines tâches clés, et au niveau des techniques et des technologies : pour amalgamer les différents types de tâches. L'ostensif « numération en unités » semble favoriser les connexions impliquant la numération de position.

Nous avons mis en évidence des organisations mathématiques à l'œuvre et des alternatives. Plusieurs questions viennent alors : quelles organisations didactiques mettre en place pour produire des organisations mathématiques plus complètes que celles qui sont actuellement enseignées ? Quels effets pourrait-on alors effectivement observer sur les connexions entre les connaissances des élèves ? Quelles ressources et quelles formations sont-elles nécessaires pour diffuser ces praxéologies ?

REFERENCES

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques* 19/1, 77-123.

Bosch M., Fonseca C., Gascon J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 24(2/3), 205-250.

Bosch M., Gascon J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse. In Mercier A. et Margolinas C. (Eds) *Balises en didactique des mathématiques. Cours de la XIIe école d'été de didactique des mathématiques.* Grenoble : La pensée sauvage.

Chambris C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Thèse de l'université Paris–Diderot.

Chambris C. (2009) Contribution de l'étude des grandeurs à l'étude de la numération de position avant la réforme des mathématiques modernes, en France, au cours élémentaire (2ème et 3ème années de primaire). In Ouvrier-Buffet C.et. Perrin-Glorian M.-J (Eds.) (pp. 211-222) (2009) *Actes du colloque DIDIREM: Approches plurielles en didactique des mathématiques.* Paris: Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot.

Chesnais A., Horoks J. (2009) Analyse et comparaison de pratiques effectives d'enseignants et conséquences en termes d'apprentissages. *EMF2009* - Dakar.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique- Du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La pensée sauvage.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12(1), 73-112

Chevallard Y. (1997) Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 17(3), 17-54.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.

Parouty V. (2005) Compter sur les erreurs pour compter sans erreurs : état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3. In Commission Inter-IREM COPIRELEM (Ed., *Actes du XXXIème colloque sur la formation des maîtres (Cédérom). Toulouse : IREM de Toulouse.*

Roditi E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan.

Tchoshanov M. A. (2011) Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 76(2), 141-164.

Thanheiser E. (2009) Preservice elementary school teachers' conceptions of multidigit whole numbers. *Journal for Research in Mathematics Education* 40(3), 251-281.

MANUELS SCOLAIRES

Champeyrache G., Fatta J.-C. (2002) *Le Nouveau Math Elem CE2* Paris : Belin (NME)

Peltier M.L., Briand J., Ngono B., Vergnes D. (2009) *Euro Maths CM1*. Paris : Hatier