L'introduction du concept de somme infinie : une première approche à travers l'analyse de manuels

Alejandro S. GONZÁLEZ-MARTÍN
Département de Didactique, Université de Montréal
a.gonzalez-martin@umontreal.ca

Résumé
Le concept de somme infinie est complexe et contredit notre intuition. Il a néanmoins de nombreuses applications. En dépit de sa complexité épistémologique, il n'y a pas beaucoup de résultats de recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de ce concept. Cet article présente une brève recension des résultats de recherche se rapportant à l'enseignement et à l'apprentissage des séries, ce qui nous amène à analyser la façon dont les manuels introduisent ce concept. Nos résultats montrent qu'il n'y a pas d'unité dans les multiples approches utilisées par la recherche et que, même s'il y a une évolution dans la façon dont les manuels introduisent les séries, leur approche reste encore assez « traditionnelle ».

1. INTRODUCTION

Quand on travaille avec le concept de somme infinie (ou série), il y a un premier obstacle qui doit être dépassé : il s'agit de l'idée intuitive et naturelle que l'addition d'une infinité de termes sera forcément elle-même infinie.

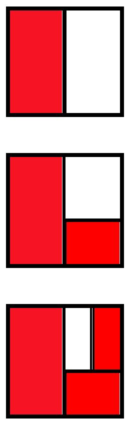
Figure 1

Cependant, il semble plus facile d'accepter que si l'on a un carré et qu'on en colore la moitié, puis qu'on colore la moitié de ce qui reste, puis la moitié de ce qui reste, etc. (figure 1), on ne dépassera jamais la surface initiale du carré donné (toutes les parties colorées remplissent une région bornée). Dans ce cas, c'est un autre obstacle qui apparaît, consistant à penser qu'il y aura toujours une partie du carré qui ne sera jamais remplie en poursuivant ce processus. Ici, il s'agit de la conception qu'un processus infini doit forcément passer par chaque étape, l'une après l'autre sans arrêt, donnant lieu à une conception de l'*infini potentiel*. Ce type de conception, présent quand des processus infinis sont mis en œuvre, a déjà été répertorié dans la littérature (voir par exemple Hitt, 2000 ; ou Tall, 1992). Nous y reviendrons à la section 3.

On voit ainsi que la simple idée de somme infinie contredit facilement l'intuition et que la complexité épistémologique impliquée est assez élevée. Le concept de somme infinie peut sembler de prime abord assez « artificiel », mais il a plusieurs applications. L'une des plus faciles à voir est celle d'approximation d'une aire à l'aide de rectangles, ce qui donne lieu aux concepts de somme de Riemann et d'intégrale définie, essentiels pour calculer l'aire sous une courbe (voir figure 2). En utilisant de plus en plus de rectangles, de plus en plus minces, nous pouvons mieux approximer la valeur de l'aire sous la courbe dans l'intervalle donné.

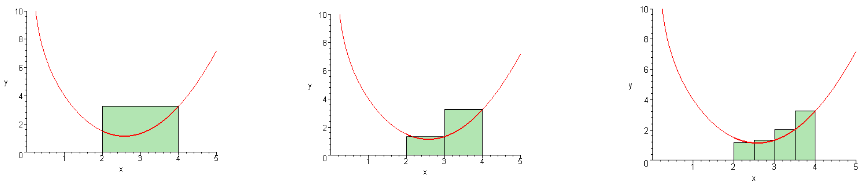

Figure 2

Si dans le graphe précédent, l'axe *OX* représente le temps en années et l'axe *OY* représente les profits d'une compagnie, l'aire approximée par ces rectangles sera le profit total accumulé par la compagnie pendant une période de temps donnée ; de là l'importance pour beaucoup d'entreprises de calculer « l'aire sous la courbe ». De la même façon, l'aire sous la courbe dans un graphe temps/vitesse représente la distance parcourue par un mobile.

L'écriture de nombres à virgule périodiques[1] constitue une autre application des séries :

$$0{,}333\ldots = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$$

ou la modélisation d'une situation telle que la distribution de médicaments ou de polluants :

> *Certaines personnes atteintes d'une maladie doivent prendre une dose quotidienne de 20 mg d'un certain médicament. Si, chaque jour, l'organisme élimine 25% du médicament présent :*
> *a) Déterminez la quantité de médicament présente dans l'organisme après 10 jours.*
> *b) Déterminez la quantité maximale de médicament présente dans l'organisme d'une personne qui doit prendre ce médicament le reste de ses jours[2].*

On voit donc que le concept de somme infinie a plusieurs applications dans différents domaines (Physique, Économie, Biologie, etc.) et en conséquence, une meilleure compréhension de ce concept pourrait améliorer la formation des futurs professionnels dans plusieurs domaines.

2. CONTEXTE

Plusieurs rapports (voir par exemple Wood, 2001) énoncent qu'il y a un grand écart entre les pratiques et les contenus de l'éducation secondaire et universitaire, ce qui peut avoir produit une baisse du nombre d'étudiants poursuivant des programmes universitaires avec une forte composante

[1] En fait, l'écriture de n'importe quel nombre à virgule avec une infinité de décimales peut être représentée par le biais des séries. Le fait d'avoir une période facilite simplement la recherche d'une règle.
[2] Tiré de Charron & Parent (2004, p. 279).

Alejandro S. González-Martín Département de Didactique, Université de Montréal
a.gonzalez-martin@umontreal.ca

mathématique. Il est donc urgent de développer des études visant à améliorer tant l'apprentissage conceptuel des étudiants postsecondaires que les pratiques des enseignants œuvrant à ces niveaux (en enrichissant ainsi l'enseignement des concepts mathématiques et en évitant de les réduire à leurs aspects algorithmiques).

L'un parmi les concepts nouveaux et complexes, que les étudiants rencontrent assez tôt quand ils suivent des cours de mathématiques postsecondaires, est celui de série numérique (ou simplement *série*), qu'on peut définir comme une addition d'une infinité de termes. Bien que ce concept puisse paraître assez « artificiel » et de peu d'applications réelles, nous venons juste de voir qu'il a plusieurs applications pratiques. Il est aussi essentiel pour comprendre le développement moderne des Mathématiques (et en conséquence, de beaucoup de ses applications les plus complexes).
Le concept de série, à cause de son « aura de mystère », est normalement réduit à ses aspects algorithmiques, ce qui produit ultérieurement plusieurs fausses conceptions pour comprendre le concept clé d'intégrale (Bezuidenhout & Olivier, 2000 ; González-Martín, 2006). D'ailleurs, l'enseignement traditionnel semble se concentrer sur l'étude des différentes techniques pour conclure à la convergence ou à la divergence des séries et aussi, sur l'étude des formules pour calculer la somme des termes d'une série convergente. Généralement, on met peu d'accent sur les applications du concept ou sur la construction du sens.

Bezuidenhout & Olivier (2000) ont identifié certaines difficultés liées à l'intégration définie ; entre autres : plusieurs étudiants croient que l'intégrale doit toujours avoir une valeur positive car elle représente une aire ; les étudiants ne reçoivent aucun entraînement explicite pour interpréter et utiliser les sommes de Riemann ; les étudiants manquent de conceptions appropriées pour comprendre l'expression des sommes de Riemann, ce qui est essentiel pour comprendre la relation entre séries et intégrales. Ces résultats ont été corroborés par notre propre recherche (González-Martín, 2006), développée avec des étudiants de première année en Sciences Mathématiques. Quand nous avons demandé à nos étudiants si l'énoncé

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \infty \;\Rightarrow\; \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$$

était vrai, certaines réponses obtenues allaient comme suit : « *c'est vrai* […] *car l'addition des termes d'une série est une partie de l'intégrale. Alors, si une partie converge, l'intégrale converge donc* », « *c'est vrai* […]*, car l'intégrale est la limite de la somme des partitions* », « *dans l'intégrale, la série est implicite* ».

Ces réponses, avec d'autres données, nous ont amené à conclure que les étudiants confondaient la série associée à une fonction $\left(\sum f(n)\right)$ avec la somme de Riemann de la fonction dans un intervalle. Cependant, ces deux concepts sont assez différents et l'utilisation de représentations visuelles permet de voir la différence. Nous avons aussi pu voir que les étudiants ne maîtrisaient pas adéquatement les résultats concernant les séries et qu'ils ne faisaient aucun lien entre les critères de convergence pour les séries et ceux pour les intégrales impropres. De plus, nous avons conclu que les étudiants ne possédaient pas d'image visuelle associée au concept de série.

Le concept d'intégrale nous a permis d'identifier certaines faiblesses chez nos étudiants avec le concept de série. Cette situation a agi comme déclencheur, nous amenant à nous demander quelle est l'origine de ces faiblesses et limitations chez les étudiants, ce qui nous a conduit à vouloir analyser comment le concept de série est enseigné aux niveaux postsecondaires. La section suivante résume quelques résultats de recherche sur l'apprentissage des séries, ce qui permettra, dans la section 4, d'énoncer les objectifs généraux de notre recherche et les objectifs de cet article.

3. QUELQUES RÉSULTATS SUR L'APPRENTISSAGE DES SÉRIES

Jusqu'à présent, nous avons trouvé très peu de travaux centrés sur le concept de série. Il y a plusieurs travaux qui étudient le concept de convergence ou celui de limite d'une suite numérique. Bien que le concept de série puisse aussi être vu sous ces angles, peu de travaux ont abordé le concept de somme infinie pour lui-même. Nous verrons aussi que les approches utilisées ont été variées ; dans la section suivante nous les regrouperons sous trois catégories.

L'un des travaux pionniers sur le concept de convergence (Robert, 1982) a déjà soulevé le fait que l'acquisition du concept de convergence n'est pas faite sans problèmes et que ce concept reste incomplet chez les étudiants pendant leurs études postsecondaires. Robert a aussi signalé que les exercices utilisés dans l'enseignement ne guidaient pas les étudiants à construire une notion correcte pour la convergence des séries numériques. Boschet (1983) a également remarqué que l'enseignement traditionnel montre très peu d'exemples de la représentation graphique de la convergence (et que les représentations existantes favoriseraient des représentations statiques). Elle relève aussi que les suites ne sont pas vues comme un cas particulier de fonction. Nos résultats (González-Martín, 2006) semblent s'aligner sur ces observations, car nous avons conclu que les étudiants universitaires n'ont pas d'image visuelle associée au concept de série. En fait, le rôle du raisonnement visuel pour la compréhension de la convergence des séries a aussi été abordé par Alcock & Simpson (2004), et ceux-ci concluent que l'utilisation de ce raisonnement peut être avantageuse pour les étudiants qui établissent des liens entre les représentations formelles et visuelles des concepts de l'Analyse réelle.

Fay & Webster (1985) affirment aussi que la majorité des manuels d'Analyse montrent peu ou pas de relations entre les intégrales impropres et les séries infinies, à part le test intégral pour la convergence des séries. Les résultats de nos recherches précédentes (González-Martín, 2006) soutiennent cette affirmation et montrent en outre que les étudiants apprennent normalement le concept d'intégrale impropre sans faire aucun lien avec le concept de série. Fay & Webster (1985) affirment que « *l'on peut difficilement s'attendre à ce qu'un étudiant réalise qu'il y a des tests de convergence pour les intégrales impropres qui sont les compagnons des tests pour les séries infinies* », et mettent en évidence les parallélismes entre les critères pour les séries et pour les intégrales impropres. Cependant, ils ne donnent pas d'indication sur la façon d'implanter cela dans la salle de classe.

Bagni (2000, 2005) suggère d'utiliser des exemples historiques pour améliorer l'enseignement des séries infinies et dépasser la fausse conception que « termes en nombre infini implique infiniment grande somme ». Il signale que les processus de *transposition didactique* pour l'enseignement des séries doivent considérer les réactions possibles des étudiants, similaires souvent à celles des grands mathématiciens dans l'histoire, et que cette correspondance peut devenir un outil très important pour le professeur quand celui-ci cherche à développer l'efficacité de l'histoire comme ressource de base. Pour arriver à cette conclusion, Bagni distingue[3] deux niveaux pour la formation des concepts mathématiques : une phase *opérationnelle* et une phase *structurale*, et il ajoute que le problème principal du passage du fini à l'infini est de type culturel et que les questions historiques sont importantes pour approcher ce problème. Il encourage également l'utilisation de représentations visuelles, en prévenant que l'utilisation éducative de registres visuels peut produire des problèmes, spécialement si les étudiants manquent d'habiletés pour coordonner différents registres de représentation[4], ce qui vient appuyer les commentaires d'Alcock & Simpson (2004).

Dans un travail sur la compréhension des sommes infinies de fonctions, Kidron (2002) énumère certaines difficultés de compréhension du concept de somme infinie :

- La dualité *processus – objet* pour se référer à ce concept.
- L'intuition du processus infini comme un processus *potentiellement infini* ou comme une somme *infinie achevée*[5].
- La lecture de l'égalité $S = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ de gauche à droite ou de droite à gauche, ce qui est cognitivement différent.

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, l'utilisation de l'*infini potentiel* mène à considérer plusieurs processus infinis comme étant sans fin. L'*infini potentiel* fait voir ces processus (dont une somme infinie) comme une séquence infinie d'étapes, donc comme un processus qui ne finit jamais. Cette conception apparaît déjà chez les Grecs et elle se trouve à l'origine de plusieurs paradoxes. Kidron (2002) mentionne alors que le même concept d'infini (ou la notion d'*infini potentiel*) rend difficile l'apprentissage de la notion de somme infinie. Ceci s'ajoute au fait que le *concept definition* (Tall & Vinner, 1981) de somme infinie peut ne pas être nécessairement lié à son *concept image* (ibidem) chez les apprenants. La notation symbolique pourrait ajouter des malentendus aux conceptions des étudiants. D'autres difficultés, relevées par Mamona (1990), sont la confusion que les étudiants montrent entre suite et série et la résistance à voir les suites comme un type de fonction.

Enfin, Codes & Sierra (2007) ont créé une activité pour introduire les notions de base sur les suites numériques avant d'introduire les sommes infinies comme limite d'un type de suites. Ils ont basé leur travail sur le travail d'Oresme et ont aussi utilisé des représentations graphiques à l'aide d'un ordinateur. Codes &

[3] En prenant comme modèle le développement historique des concepts mathématiques.
[4] Ce qui semble être le cas dans l'enseignement universitaire (Eisenberg & Dreyfus, 1991 ; González-Martín, 2006 ; González-Martín & Camacho, 2004a).
[5] C'est le terme que nous avons choisi pour traduire « *actual infinite sum* » (Kidron, 2002, p. 209).

Sierra affirment que l'utilisation de l'ordinateur et de représentations graphiques a aidé certains étudiants et qu'ultérieurement, ceux-ci ont utilisé les représentations de l'ordinateur pour justifier le processus de résolution de quelques questions papier-crayon. En conséquence, il semble que les représentations de l'ordinateur aient amélioré les propres représentations des étudiants (ou se sont ajoutées à celles déjà existantes) sur les sommes infinies.

4. OBJECTIFS DE NOTRE RECHERCHE

Notre recension de la littérature sur le sujet nous a amené à constater que plusieurs chercheurs relèvent l'importance de la visualisation. Cependant, nous avons aussi constaté une absence d'uniformité dans les différentes approches utilisées par les auteurs pour étudier le concept de série. Si nous prenons en compte les trois dimensions classiquement considérées des objets mathématiques (Artigue, 1992) :

- « La dimension *épistémologique*, associée aux caractéristiques du savoir en jeu.
- La dimension *cognitive*, associée aux caractéristiques cognitives des apprenants.
- La dimension *didactique*, associée aux caractéristiques de fonctionnement du système éducatif. » (p. 47)

nous pourrons regrouper d'une certaine façon les différents angles utilisés dans les recherches recensées. Nous considérons que certains travaux se situent dans une dimension plutôt épistémologique pour ce concept (Bagni, Codes), parce qu'ils tiennent compte du développement historique des séries. D'autres se placent dans une dimension plutôt cognitive (Bezuidenhout & Olivier, Robert, Boschet, Alcock & Simpson, Bagni, Kidron, Mamona), en analysant des difficultés d'apprentissage. Enfin, d'autres étudient l'enseignement ou émettent des idées visant à l'améliorer (Fay & Webster, Bagni, Codes), entrant ainsi dans la dimension didactique.

Nous voulons intégrer ces trois dimensions dans une étude sur l'apprentissage du concept de série, en donnant en même temps une grande importance au registre graphique dans l'apprentissage. Nous prendrons donc en compte la théorie des registres de représentation sémiotique de Duval (1995) et son idée fondamentale selon laquelle il est nécessaire, pour la compréhension d'un concept mathématique, de coordonner au moins deux représentations différentes de ce concept.

Compte tenu de ces approches, notre question générale de recherche est : « En prenant en compte les trois dimensions (épistémologique, didactique et cognitive) du concept de série, quels sont les difficultés et obstacles qui apparaissent pendant son apprentissage au niveau postsecondaire ? »

Actuellement, nous travaillons sur la dimension didactique de notre étude. Cette dimension vise à analyser trois sources principales : les programmes officiels, les manuels et les pratiques des enseignants. À présent, nous sommes en train de développer notre analyse des manuels et les questions auxquelles nous voudrions répondre dans cette première étape sont :

- Les manuels tiennent-ils compte des résultats de la recherche ?
- Y a-t-il une évolution dans la façon dont les manuels introduisent les séries ?
- Quelles représentations et applications sont favorisées ?

Le présent article montrera donc seulement l'état de nos analyses des manuels et nos premiers résultats par rapport aux trois questions énoncées ci-dessus. Il s'agit ici d'un travail en cours et les futurs résultats feront l'objet d'autres publications.

Nous présentons dans ce qui suit la méthodologie mise en place pour l'analyse de manuels.

5. ANALYSE DE MANUELS

Pour l'analyse des manuels, gardant en tête les trois questions auxquelles nous cherchons à répondre, nous avons construit une grille d'analyse prenant en compte les éléments suivants :

- Nombre de pages, nombre de pages pour les séries numériques, ratio.
- Nombre de graphes[6] et de dessins, type, ratio.
- Fonction de ces graphes et dessins.
- Activités sémiotiques demandées (formation, traitement, conversion).
- Motivations données pour introduire le nouveau concept.
- Nombre et type de références historiques.
- Applications dans la vie réelle.
- Type d'exercices et problèmes proposés.

Pour analyser la fonction des graphes et des dessins trouvés dans les manuels, nous avons choisi et adapté la catégorisation produite par Elia & Philippou (2004)[7], qui distingue quatre fonctions pour l'utilisation de dessins dans la résolution de problèmes :

- *Décorative* : le dessin ne donne aucune information réelle sur la solution du problème.
- *Représentative* : le dessin représente le tout ou une partie du contenu de l'énoncé du problème.
- *Organisatrice* : le dessin offre des indices pour le travail écrit de l'étudiant, favorisant le processus de résolution.
- *Informative* : le dessin donne une information essentielle pour la résolution du problème; le problème est basé sur le dessin.

Nous avons utilisé cette catégorisation pour analyser la fonction tant des graphes que des dessins, sans nous limiter à la résolution de problèmes, pour analyser dans un premier temps l'utilisation que les manuels font des représentations graphiques et s'ils encouragent les activités de conversion. Les catégories que

[6] Nous avons considéré comme graphe toute représentation fonctionnelle selon des axes de coordonnées. Toute autre représentation visuelle a été considérée comme un dessin.
[7] Voir aussi González-Martín (2006).

nous avons définies pour analyser le rôle des représentations graphiques dans les contenus théoriques des manuels sont les suivantes :

- *Hors concept* : l'image ne représente pas un concept mathématique.
- *Conceptualisée* : l'image représente un concept mathématique et elle est nécessaire pour la compréhension des explications théoriques qu'elle accompagne.
- *Conceptualisée anodine* : l'image représente un concept mathématique, mais elle n'est pas nécessaire pour la compréhension des explications théoriques qu'elle accompagne.

Nous envisageons de produire une recension exhaustive des manuels utilisés pendant les quinze dernières années au Québec. Jusqu'en août 2008, nous avions analysé les six manuels suivants, présents dans les programmes de plusieurs établissements postsecondaires de la région de Montréal et qui couvrent plusieurs années :

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Charron & Parent (1993)	Ayres & Mendelson (1993)	Anton (1996)	Ouellet (2000)	Bradley *et al* (2002)	Charron & Parent (2004)

Les données quantitatives concernant l'espace donné aux séries sont les suivantes :

Manuel	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Total pages	384 p.	480 p.	420 p.	413 p.	295 p.	427 p.
Pages pour les séries	38,5 p.	20,5 p.	64 p.	37 p.	53,5 p.	54,5 p.
Ratio	10%	4,3%	15,2%	9%	18,1%	12,8%

Ce premier tableau nous permet de conjecturer qu'en général, les manuels de ce niveau consacrent 10% ou plus de place aux séries numériques. Dans certains cas, l'espace consacré est plus grand (jusqu'à 18% pour le manuel *E)*. On pourrait donc dire que les séries ne constituent pas un contenu négligé par les auteurs des manuels.

En ce qui concerne le nombre de graphes (graphes fonctionnels) et les autres types de dessin qui apparaissent dans les manuels, la table est la suivante :

Manuel	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Pages séries	38,5 p.	20,5 p.	64 p.	37 p.	53,5 p.	54,5 p.
Nombre graphes	2	1	2	1	7	2
Nombre dessins	2	2	5	2	10	9
Ratio images/page	0,104	0,146	0,109	0,081	0,318	0,202

En général, on pourrait penser qu'il y a une tendance à augmenter le nombre d'images utilisées (sauf pour le manuel *B*, qui est plutôt un manuel pour résoudre des exercices et des problèmes qu'un manuel avec théorie-problèmes), bien que le ratio 'nombre d'images/nombre de pages pour les séries' ne soit pas grand. Le tableau précédent montre le nombre total d'images tant dans les explications théoriques que dans les exercices et problèmes. Si nous regardons la fonction des images (graphes, *g*, et dessins, *d*) utilisées dans les explications théoriques et dans les problèmes, nous obtenons le tableau suivant :

		A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Problèmes	*Décorative*	-	-	-	-	-	-
	Représentative	-	-	-	-	2 d	-
	Organisatrice	-	-	-	-	-	-
	Informative	1 d	-	4 d	-	4 d	1 d
Théorie	*Hors concept*	-	-	-	2 d	1 d	6 d
	Conceptualisée	2 g 1 d	1 g 2 d	2 g 1 d	1 g	2 g 3 d	2 g 1 d
	Conc. Anodine	-	-	-	-	5 g	1 d

Le tableau précédent permet de voir que, dans l'ensemble des images visuelles utilisées dans les manuels, peu d'images sont intégrées dans les explications théoriques des contenus relatifs aux séries. Presque tous les graphes trouvés dans ces six manuels servent à illustrer des éléments expliqués algébriquement. Et tous les manuels utilisent des graphes pour illustrer le Test Intégral. Peu (ou pas) de place est laissée pour travailler la visualisation d'une série et il semble que les auteurs tiennent pour acquis que les étudiants interpréteront automatiquement que certains rectangles sous une courbe représentent la somme d'une série, ce qui n'est pas vrai (González-Martín, 2006 ; González-Martín & Camacho, 2002, 2004b). Aucune activité sémiotique n'est explicitement demandée aux étudiants par rapport au registre graphique : on ne demande jamais à l'étudiant de faire un dessin ou un graphe, ni d'interpréter un graphe, ni de convertir une image visuelle à un autre registre. En lien avec les réflexions d'Alcock & Simpson (2004), nous pensons que les manuels ne favorisent pas l'établissement de liens entre les représentations visuelles et les représentations algébriques. Presque toute l'exposition de contenus se produit dans le registre algébrique et le peu de graphes utilisés ne favorise aucune activité de conversion entre registres.

Si l'on regarde les exemples utilisés dans les explications théoriques et les registres utilisés pour les présenter, nous obtenons :

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Algébriques	50	3	39	31	34	54
Visuels	0	0	0	0	0	0
Mixtes	1	0	0	0	1	1

À nouveau, nous remarquons que les exemples donnés privilégient le registre algébrique. Si nous regardons maintenant les exercices et problèmes proposés, nous pouvons constater que le souci de donner un sens ou une application aux séries n'est pas très présent dans les six manuels :

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
Activités (exercices – problèmes)	56	83	285	84	302	40
Avec contexte	6	0	2	0	13	3
Ratio	10,7%	0%	0,7%	0%	4,3%	7,5%

De plus, nous pouvons ajouter que la plupart des activités sans contexte sont des exercices d'application, ou des exercices pour déterminer le type de certaines séries et/ou leur somme. À nouveau, on dirait que le type de conception qui peut être généré chez les étudiants du concept de série risque d'être réduit aux aspects opérationnels.

Les données qualitatives sont les suivantes :

	Introduction	**Références historiques**	**Applications**
A	Les séries sont des fonctions Une somme infinie peut être utile pour calculer des aires (les intégrales sont étudiées avant)	Le paradoxe de Zénon (sans aucun contexte) Brève référence à d'Alembert	4 problèmes (balle qui rebondit, médecine, économie, intérêt)
B	Aucune	Aucune	Aucune
C	Les séries ont plusieurs applications. Montre seulement l'écriture des nombres à virgule	Quelques notes historiques Problèmes d'Oresme et d'Euler Problèmes de concours historiques	2 problèmes (balle qui rebondit, fourmi qui marche sur un segment)
D	Relations entre les séries et les fonctions Certaines applications dans la vie courante	Courtes références à certains mathématiciens.	Aucune
E	Additionner une infinité de termes est un paradoxe Plusieurs applications : contamination, écriture de nombres à virgule, médicaments dans le sang	Paradoxe de Zénon	Plus de 10 problèmes (balle qui rebondit, médecine, prix qui baissent, taxes, etc.)
F	Purement mathématique Pas d'applications	Paradoxe de Zénon Brèves références à certains mathématiciens	2 problèmes (balle qui rebondit, médecine)

Tel que nous l'avons déjà mentionné, le manuel *B* est un cas spécial. Ainsi, il n'y a pas de présentation des séries et le chapitre commence directement avec quelques définitions de base et continue avec des exercices et des problèmes.

On peut voir qu'il n'y a pas de consensus sur la façon d'introduire les séries. Ce ne sont pas tous les manuels qui choisissent de les introduire comme un concept

Alejandro S. González-Martín Département de Didactique, Université de Montréal
a.gonzalez-martin@umontreal.ca

pratique et utile. Et même pour les manuels qui le font, le nombre de problèmes montrant des applications dans la vie quotidienne est très petit. Nous avons inclus comme « problème de la vie quotidienne » le problème de la balle qui rebondit infiniment et aussi, le problème de la fourmi qui marche sur un segment, même s'ils ne sont pas très réalistes.

Les manuels restent également assez pauvres par rapport au nombre de références historiques incluses dans leur texte, ce qui ne prend pas en compte les recommandations faites par Bagni (2000, 2005). À part le paradoxe de Zénon (usuellement hors contexte), il n'y a pas d'autres références pour donner aux séries un certain contexte historique, ni pour montrer les difficultés que les mathématiciens ont rencontrées pour accepter et pour maîtriser ce concept.
Nos analyses montrent aussi que les manuels ne considèrent pas, du moins de manière explicite, les difficultés relevées par la littérature, en particulier celles énumérées par Kidron (2002) et Mamona (1990). Nous n'avons trouvé aucune mention de la dualité *processus – objet* et seul le manuel *E* met explicitement les étudiants en garde par rapport au paradoxe qui suppose le travail avec les séries. Aucun commentaire ne paraît rendre les étudiants conscients de la différence entre l'infini *potentiel* et l'infini *achevé*.

6. CONCLUSIONS

Par rapport aux résultats de notre recension de la littérature, nous pouvons dire qu'il semble y avoir très peu de recherches développées autour du concept de série. En plus, les différents résultats trouvés ne montrent aucune convergence dans leur approche.

Ce manque d'uniformité peut être l'une des raisons pour laquelle il n'y a pas d'impact sur la production de manuels. Nous avons vu que même si les manuels prennent un espace relativement grand pour expliquer les contenus sur les séries (généralement, plus de 10%), l'approche qu'ils utilisent semble être « traditionnelle » et le registre utilisé est presque exclusivement algébrique, avec très peu de représentations graphiques. De plus, aucune activité sémiotique n'est demandée aux étudiants dans le registre graphique, de même qu'aucune activité de coordination n'est présente, et l'étudiant n'est jamais tenu de faire lui-même un changement de registre.

Les manuels présentent également très peu d'applications du concept ou de références historiques. En plus, les séries sont usuellement introduites justement comme un objet mathématique qui répond à des besoins mathématiques, de sorte que les étudiants ne développent pas nécessairement une vision des séries en dehors des mathématiques et de leurs applications strictement mathématiques. Les exemples proposés aux étudiants sont presque toujours algébriques et les tâches demeurent normalement dans l'application de critères et de théorèmes. De plus, les difficultés identifiées par la recherche dans l'apprentissage du concept de série ne semblent pas être prises en compte dans les manuels.

Par rapport à nos questions, nous pouvons donc dire que les manuels ne semblent pas tenir compte des résultats et des recommandations de la recherche. Dans les manuels, on peut dire qu'il y a plus d'images dans les plus récents, mais le ratio images/pages reste très bas ; par ailleurs, dans la plupart des manuels, le premier graphe qui apparaît est utilisé pour illustrer le Test Intégral. Ceci nous amène à nous questionner sur la façon dont les étudiants pourront interpréter ce graphe, si jamais ils n'ont pas vu la représentation d'une série auparavant. Aussi, les activités liées à la sémiosis (formation, traitement, conversion) sont absentes dans les manuels. Enfin, peu d'applications sont montrées et les manuels exposent les contenus presque exclusivement dans le registre algébrique. On peut craindre que les étudiants développent des conceptions très opérationnelles des séries, sans les voir comme un objet mathématique en soi.

Nous sommes conscient que l'ensemble des manuels choisis est encore très petit pour en tirer des conclusions générales. Cependant, cet ensemble nous a permis de voir certaines tendances qui guideront mieux nos futures analyses. Une fois terminée l'analyse d'un ensemble représentatif des dernières 15 années, nous envisageons analyser comment les pratiques enseignantes sont développées, à partir de l'hypothèse que les professeurs ont tendance à suivre les approches des manuels.

Notre recherche vient juste de commencer, mais nos premiers résultats et les régularités trouvées sont encourageants. Pour compléter l'analyse de la dimension didactique, tel que nous l'avons spécifié avant, nous voulons finir l'analyse exhaustive des manuels, analyser les programmes officiels des dernières 15 années et leurs recommandations et, enfin, les pratiques enseignantes. Nous sommes convaincu que ces résultats seront utiles pour établir des relations avec les dimensions épistémologique et cognitive, ce qui nous permettra de dresser un portrait des difficultés et obstacles pour l'apprentissage du concept de série.

Remerciements
L'auteur voudrait remercier Rachid Seffah et Guillaume Payette, assistants de recherche, pour leur aide dans la quête d'articles de recherche et l'analyse des manuels.

BIBLIOGRAPHIE

Alcock, L. & Simpson, A. (2004) Convergence of sequences and series: interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics,* 57, pp. 1-32.
Anton, H. (1996) *Calcul intégral*. Reynald Goulet Inc., Québec (Canada).
Artigue, M. (1992) Didactic Engineering. Dans Douady, R. & Mercier, A. (eds.), *Research in Didactics of Mathematics* (pp. 41-65), Grenoble: La Pensée Sauvage.
Ayres, F. & Mendelson, E. (1993) *Calcul différentiel et intégral*. Chenelière / McGraw-Hill, Québec (Canada).
Bagni, G. (2000) Difficulties with series in history and in the classroom. Dans Fauvel, J. & Maanen, J. (eds.), *History in mathematics education: the ICMI study* (pp. 82-86), Dordrecht: Kluwer.
Bagni, G. (2005) Infinite series from history to mathematics education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.*

Bezuidenhout, J. & Olivier, A. (2000) Students' conceptions of the integral. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME24), Hiroshima (Japan), vol. 2, pp. 73-80.

Boschet, F. (1983) Les suites numériques comme objet d'enseignement (premier cycle de l'enseignement supérieur français). *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4 (2), pp. 141-163.

Bradley, G., Smith, K., Franco, A. & Marcheterre, B. (2002) *Calcul intégral*. Erpi / Prentice-Hall, Québec (Canada).

Charron, G. & Parent, P. (1993) *Calcul différentiel et intégral II*. Éd. Études Vivantes, Québec (Canada).

Charron, G. & Parent, P. (2004) *Calcul intégral (3e édition)*. Beauchemin : Chenelière Éducation, Québec (Canada).

Codes, M. & Sierra, M. (2007) Actividad rectángulos: Un ejemplo de aplicación de metodologías activas en el aula universitaria de matemáticas. *Actas de las IV Jornadas internacionales de Innovación Universitaria*, Éd. Universidad Europea de Madrid.

Duval, R. (1995) *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Neuchatel: Peter Lang.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991) On the Reluctance to Visualize in Mathematics. Dans Zimmermann & Cunnigham (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 25-37). Washington.

Elia, I. & Philippou, G. (2004) The functions of pictures in problem solving, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME 28), Bergen (Norvège), vol. 2, pp. 351-358.

Fay, T. & Webster, P. (1985) Infinite series and improper integrals: a dual approach. *Mathematics and computer education*, 19 (3), pp. 185-191.

González-Martín, A. S. (2006) *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje.* Thèse de Doctorat, Université de La Laguna (Espagne), ISBN: 84-7756-679-8.

González-Martín, A. S. & Camacho, M. (2002) The improper integral. An exploratory study with First-Year University Students. *Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics* (ICTM2), Hersonisos (Greece), CD Proceedings – (ISBN 0-471-463332-9)- J. Wiley (ed).

González-Martín, A. S. & Camacho, M. (2004a) Legitimisation of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME 28), Bergen (Norvège), vol. 2, pp. 479-486.

González-Martín, A. S. & Camacho, M. (2004b) What is students' actual understanding about improper integration? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* (ISSN 0020-739X), 35 (1), pp. 73-89.

Hitt, F. (2000) El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones, Dans *Matemática Educativa: Aspectos de la Investigación Actual* (XXV Anniversaire du Département de Mathématique Éducative du CINVESTAV-IPN), Mexique.

Kidron, I. (2002) Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME26), Norwich (UK), vol. 3, pp. 209-216.

Mamona, J. (1990) Sequences and series – Sequences and functions: Students' confusions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 21, pp. 333-337.

Ouellet, G. (2000) *Calcul 2 : introduction au calcul intégral*. Le Griffon d'Argile, Québec (Canada).

Robert, A. (1982) L'Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'Enseignement Supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 3 (3), pp. 307-341.

Tall, D. (1992) The transition to Advanced Mathematical Thinking : Functions, Limits, Infinity, and Proof. Dans Grouws, D. (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-514), MacMillan Publishing Company, New York.

Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in Mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, pp. 151-169.

Wood, L. (2001) The Secondary-Tertiary interface. Dans D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 87-98). Kluwer Academic Publishers, Pays-Bas.