RECHERCHE ET ÉTUDE EN MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

Carl WINSLØW*

Résumé – Nous examinons l'apport du travail du mathématicien chercheur au travail de l'enseignant universitaire de mathématiques, ce qui nous amène d'abord à revisiter deux notions clés de la didactique des mathématiques, *étude* et *recherche*, pour discuter ensuite comment ces éléments apparaissent dans le travail mathématique des étudiants, dans des contextes communs et surtout plus exceptionnels. Il s'avère que notamment du côté de l'étude, on trouve de vastes potentiels qui, pour des raisons institutionnelles, semblent en gros inexploités.

Mots-clefs : étude, recherche, médias, milieux, enseignement universitaire des mathématiques

Abstract – We examine the transfer from the work of the research mathematician to the work of the university teacher of mathematics. This leads us first to revisit two key notions of the didactics of mathematics, namely *study* and *research*, and then to discuss how these elements appear in the mathematical work of university students, in common and especially more exceptional contexts. It turns out that in particular, study carries great potentials so far largely unexploited, for a variety of institutional reasons.

Keywords: study, research, media, milieus, university teaching of mathematics

I. INTRODUCTION

Qu'est qui distingue l'enseignement universitaire de l'enseignement au primaire et au secondaire ? On peut, sans trop chercher, mentionner les différences suivantes : (1) Les *étudiants* suivent leur programme d'étude « de leur propre gré » et sont donc, en principe, « libre de partir » ; (2) Les *enseignants* sont souvent aussi des *chercheurs*, parfois même avec la recherche comme « métier principal » ; (3) Les étudiants eux-mêmes se dirigent vers une variété de *futures professions*, dont les besoins peuvent plus ou moins imprégner leur cursus et leur rapport à lui ; (4) l'institution (voir même l'enseignant) a une grande liberté de choix par rapport aux méthodes et aux contenus de l'enseignement.

À mon avis, une différence très significative — du point de vue didactique — est la proximité, dans l'université, de la *recherche*, c'est-à-dire *la production de savoirs dits « savants »*. Dans le cas d'un cours de mathématiques, l'enseignant peut bien sûr être physicien (notamment dans un programme de physique), et tous les enseignants de l'université ne sont pas des chercheurs. De leur côté, les étudiants ne sont pas tous des futurs mathématiciens chercheurs, même si c'est une option possible. Ce qu'il est donc important de noter est le contexte institutionnel — plutôt qu'individuel — d'une *cohabitation de diffusion et de production* de savoirs. On parle, dans la littérature anglophone sur « *higher education* », du « teaching-research nexus » pour désigner l'interaction (réelle ou possible) entre ces deux aspects de la vie universitaire, que ce soit du point de vue des enseignants-chercheurs ou de celui des étudiants (cf. Winsløw 2009, pour plus de détails). Une problématique émergeante, pour le didacticien qui s'intéresse au niveau universitaire, est donc, grosso modo : *quels sont les apports réels ou réalisables, dans l'enseignement universitaire des mathématiques, de la proximité de la recherche dans l'institution ? Qu'en est-il du cas où l'enseignant est lui-même chercheur en mathématiques – ou non ? Du cas où l'étudiant se dirige vers la recherche – ou non ? Parmi les « apports », quelles sont les possibilités, avantages et contraintes à envisager, pour les étudiants, au regard d'activités « proches de la recherche », voire même en les faisant participer à des recherches actuelles ?*

* Institut de didactique des sciences – Université de Copenhague – Danemark – winslow@ind.ku.dk

© Winsløw C. (2012) Recherche et étude en mathématiques supérieures. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 1044–1052). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Mon but ici se résume à regarder de plus proche ces questions, d'un côté pour examiner leur sens (la présence de guillemets signale une partie du flou qui subsiste sur les termes), et d'un autre pour rassembler des éléments de réponses, notamment de pratiques d'enseignement plus ou moins documentées. Vers la fin de l'article, j'en dirai un peu plus sur les directions et rationalités institutionnelles que pourront avoir ces questions dans nos recherches.

II. PRÉCISIONS TERMINOLOGIQUES

Il est remarquable que l'idée de « parcours d'étude et de recherches » (PER) soit née dans le contexte de l'enseignement secondaire (cf. Chevallard 2009, p. 3), et non dans un effort de renouveler l'enseignement supérieur. Certes il existe des efforts ambitieux pour utiliser ce dispositif à l'université, notamment le travail issu de la thèse de B. Barquero (2009). Or, dans ces efforts, le public visé est une classe d'étudiants débutants, et les questions étudiées (et surtout soumises à la « recherche ») relèvent de la modélisation mathématique relativement simple. Le but a été plutôt d'investiguer les conditions, dans l'institution universitaire, pour introduire un enseignement de la modélisation proche (de par ses composantes mathématiques) de ce qui est expérimenté également au secondaire. Mais il est certain que la notion de *recherche* impliquée dans ces travaux, et dans la notion de PER, n'est pas celle que nous venons d'évoquer dans l'introduction. Pour cette raison et pour d'autres, il va être utile de s'arrêter sur ce point terminologique.

La langue dans laquelle nous nous exprimons reste en effet parmi les conditions et contraintes les plus importantes et négligées pour l'avancée de la didactique des mathématiques. C'est peut-être un peu plus évident pour quelqu'un qui, comme l'auteur du présent écrit, se trouve souvent dans la nécessité institutionnelle de se servir d'une langue « étrangère » (qui n'est pas pour lui, comme on dit, « maternelle ») et dans laquelle rien ne va donc, pour ainsi dire, de soi. Plus concrètement, notre question sur l'apport de la recherche à l'enseignement est liée à un domaine sémantique qui semble lourd d'importance pour la didactique en général, et où il règne, néanmoins, une polysémie assez stupéfiante. Il s'agit de ce qui relève des mots *recherche*, *étude* et *enseignement.*

En parlant de l'activité mathématique, on dit en français que l'on « étudie », que l'on « résout un problème », ou que l'on « fait de la recherche », tout en laissant au lecteur selon le contexte le soin d'imaginer de quoi on parle réellement et pourquoi on se sert de l'une de ces expressions et non des autres. En anglais, le mot « scholarship » se propose pour nommer une activité un peu entre les trois ; la personne qui s'y livre peut être désignée par le nom de « scholar ». En même temps, une personne qui s'occupe à la fois de recherche et d'enseignement, dans une institution universitaire, est souvent appelé « enseignant-chercheur ». Cette locution est tellement liée à l'affectation institutionnelle de la personne que le sens est sans doute plus restreint que celui du mot anglais « scholar », mais en même temps, je suis incapable de rendre ce sens plus large de « scholar » par un mot français.

Il me semble que ces difficultés ne sont pas toutes à mettre sur le compte de mes capacités langagières personnelles. Face à des flous sémantiques, on a souvent à affronter explicitement l'équivoque d'une expression donnée pour y établir un sens précis, plus artificiel, mais cette fois expliqué soigneusement par des exemples ou par une définition plus ou moins formelle. Il faut alors — même en mathématiques, et d'autant plus en didactique — établir un nœud de termes essentiellement *indéfinis*, souvent des termes dont on peut dire quelque chose mais qu'en fin de compte, on pense être suffisamment clairs pour être « libres » de toute définition. En dehors de systèmes formels, cela revient à dire que ces expressions sont censées être comprises par les membres de la communauté à laquelle on s'adresse parce qu'il y aurait *consensus*.

Pour ce qui est des mots *recherche*, *étude* et *enseignement*, on a affaire à des rapports personnels ou partagés aux *savoirs* et aux *connaissances*. Ici, *savoirs* et *connaissances* ne sont certes pas plus simples que les trois termes précédents, et comme on le sait, ils ne trouvent pas d'équivalents directs dans d'autres langues comme l'anglais. Mais disons pour l'instant que ces mots sont compris par la communauté francophone, au moins pour ce qui est des savoirs et des connaissances mathématiques. Alors, la difficulté revient à définir aussi précisément que possible les *rapports* aux savoirs et aux connaissances qui sont désignés (ou que nous voulons, ici, désigner) par les expressions *recherche*, *étude* et *enseignement.*

Chevallard (2007) a introduit deux types d'objets qui servent à établir des rapports au savoir (celui-ci étant de toute façon un peu abstrait) ; la différentiation de ces objets servira ensuite à différencier les rapports. Ainsi, on évite le subjectivisme qui pèserait sur une description des rapports liée aux « connaissances » d'un individu, dont on voudrait décrire les « rapports » au savoir ; en même temps, on évacue la nécessité d'une séparation trop formelle entre connaissances et savoirs (car, finalement, que sont les savoirs, sinon que des connaissances partagées par une grande communauté). Les deux types d'objets sont en l'occurrence *médias* et *milieux*. Ils sont différenciés l'un de l'autre, selon Chevallard, par la présence d'une intention (d'informer, de représenter, etc.) dans le média, et donc par l'absence d'intentions du côté d'un milieu (qui est donc à l'étude comme la nature à l'oiseau). Cette définition est certes relative à une situation donnée et en particulier, à la fonction de l'objet pour une ou des personnes. Mais la distinction semble assez opérationnelle en pratique. Par exemple, un étudiant peut tomber sur la formule $\tan(x) = (1 - \cos 2x)/\sin 2x$ dans un forum sur Internet (celui-ci est un média, où en effet beaucoup d'intentions se mêlent). Si l'étudiant veut tester si cela tient, il peut par exemple regarder quelques cas avec sa calculatrice (milieu), essayer de vérifier avec papier et crayon (milieu), consulter d'autres sites ou des livres (médias), etc.

Revenons maintenant à notre triplet de *recherche*, *étude* et *enseignement*, comme rapports au savoir. Nous définissons la *recherche* comme « chercher un savoir dans un milieu ». Donc, on fait recherche quand on essaie de trouver un entier x tel que $x = 10 \cos x$, par n'importe quel moyen *en soi dénué d'intention*. De même, l'étude est définie comme « chercher un savoir dans un média ». Pour la question donnée, on peut en effet trouver des informations utiles simplement en cherchant sur Internet ; mais il me semble que l'on ne parvient pas, sans un moment de recherche, au fait que les 7 solutions ne sont pas entières. Finalement, l'enseignement peut être défini comme l'acte d'induire d'autres à la recherche et/ou à l'étude. Dans le cours magistral, l'enseignant se fait entièrement media, même s'il se place dans des milieux (avec des savoirs à chercher), avec l'intention de « montrer » comment faire la recherche. À l'autre extrémité, plus rare sans doute, l'enseignant peut établir un milieu pour les étudiants (comme le problème que l'on vient de citer), sans indications explicites du savoir à chercher ou à consulter. Dans d'autres types de situations, il propose et médias et milieux (comme en posant des « exercices de fin de chapitre », où l'étude est implicitement à faire dans le chapitre ou les chapitres précédents).

Comme le montrent ces cas, ce n'est pas tout ce qui est désormais reconnu comme « recherche » qui va être reconnu comme telle, selon le sens communément convenu chez les mathématiciens universitaires. Ce travail du mathématicien chercheur, que nous appellerons simplement le *travail du mathématicien* (cf. Brousseau 1986, §1.2), vise à établir un savoir qui n'a pas précédemment été établi et exposé par d'autres. C'est là une condition nécessaire mais non pas suffisante, bien sûr, car il y a aussi une question d'intérêt, relevant de la subjectivité collective des chercheurs, et qui exclura, au moins à défaut d'une méthode originale, l'impossibilité de trouver un entier x tel que $x = 10 \cos x$, même si ce serait nouveau. Mais, par rapport à l'enseignement — dont nous voulons établir des apports possibles du *travail du mathématicien* — il est plus important de constater que celui-ci ne se borne aucunement à la recherche (ou à une sous-espèce de recherche plus exclusive) :

> 80 percent of mathematics research consists in reorganizing, reformulating, and "problematizing" mathematics that has already been "done", by the researcher himself or by others. [80 pour cent de la recherche mathématique consiste à réorganiser, reformuler et problématiser les mathématiques déjà produites, par le chercheur lui-même ou par d'autres.] (Brousseau 1999)

Il faut ajouter à ce constat la condition évidente que le mathématicien, avant de procéder au travail de réorganisation, reformulation, etc., des savoirs en place, les *étudie*. Ce travail continu d'étude est certes indispensable et intégré au travail du mathématicien, qui donc, en somme, est constitué *et* de l'étude *et* de la recherche, dans le but ultime de produire des savoirs *qui ne sont pas déjà publiés et donc pas (encore) disponibles dans des médias*.

III. REFORMULATION DE NOTRE PROBLÉMATIQUE

Nous pouvons maintenant poser, en des termes moins vagues, les questions que nous avons évoquées dans l'introduction : *Quels sont les apports réels ou réalisables dans l'enseignement universitaire des mathématiques, de la proximité du travail de mathématiciens dans l'institution ? Qu'en est-il du cas où l'enseignant est lui-même chercheur ? Ou du cas où l'étudiant se dirige vers la recherche ? Parmi les apports, quelles sont les possibilités, avantages et contraintes à envisager, pour les étudiants, à participer au travail du mathématicien – voire à des activités analogues à celles de celui-ci, sauf peut-être pour la contrainte de viser un savoir inédit ?*

Ici, on a avancé en remplaçant « recherche » par « travail du mathématicien », et en ayant spécifié le sens de ce travail comme une combinaison distinctive d'étude et de recherche, visant en particulier la production de savoirs inédits. On distingue également avec plus de précision deux types d'apports, l'un lié à l'intégration directe de l'étudiant dans le travail du mathématicien, l'autre moins direct et où l'analogie reste bien sûr à éclaircir, mais où au moins une différence nette est explicite : la production de savoir qui n'est pas déjà accessible par des médias, n'y est pas requise. Pour faciliter la référence, on va appeler ces deux types d'apports, respectivement *apports directs* et *apports indirects*.

On remarquera alors que l'apport direct suppose en effet que l'enseignant en question soit chercheur impliqué dans un travail de mathématicien, et que l'étudiant ait un rapport proche de celui du chercheur avec le savoir que ce travail vise à développer. C'est là une contrainte évidente mais aussi écrasante pour une grande partie des mathématiciens : développer des apports directs destinés à des étudiants plus ou moins débutants. Il y en a d'autres (cf. Winsløw 2009), y compris le prestige et le secret parfois lié aux travaux du mathématicien en cours, et aussi l'écart possible entre la matière de ces travaux et les buts de formation pour l'étudiant. Nous pensons toutefois que l'apport direct peut être d'intérêt en dehors du contexte où il apparaît avec le plus d'évidence, c'est-à-dire dans la formation doctorale, avec le mathématicien en position de directeur de thèse. En effet, selon le domaine mathématique en question, on peut envisager l'étudiant placé dans l'étude et la recherche de problèmes ou de tâches plus ou moins auxiliaires ou particulières, avec au moins un apport dans le sens inverse (de l'activité de l'étudiant au travail du mathématicien).

Or, dans la suite, nous considérons quelques exemples relevant plutôt de l'apport indirect, y compris du sens que peut avoir « l'analogie » dans notre problématique.

IV. LA RECHERCHE « PURE »

Paul Halmos (1906-2006) fut un mathématicien américain, connu entre autres pour une série de traités didactiques dans une variété de domaines tels que l'algèbre linéaire, l'analyse fonctionnelle et la logique algébrique. Ces manuels ont connu une grande diffusion dans le monde anglophone. Dans son autobiographie (ou, comme il l'appelle, *automathography*), Halmos (1985) évoque, outre ses propres expériences de l'enseignement et de l'écriture mathématique, un topologue du Texas, le professeur Moore, dont la méthode d'enseignement l'a beaucoup inspiré. Ceci peut paraître paradoxal, puisque la « méthode de Moore » avait parmi ses principes de ne pas recourir aux manuels. On peut aussi s'étonner que Halmos en avait seulement pris connaissance indirectement, par les étudiants de Moore. Le cours de celui-ci consistait en une liste de définitions et de théorèmes laissée aux étudiants au premier cours ; ensuite, les étudiants devaient, d'eux-mêmes, suppléer à tout le reste (démonstrations, lemmes etc.), et les sessions se déroulaient essentiellement comme des séminaires, où les étudiants présentaient leur travail depuis le cours précédent. Voici un extrait de ce que Halmos (1985, p. 258) en dit :

> Moore encourageait la compétition. Ne pas lire, ne pas collaborer – pensez, travaillez individuellement, vainquez l'autre type. Souvent un étudiant qui n'avait pas lui-même trouvé une preuve du Théorème 11 quittait la salle quand un autre le démontrait – chaque étudiant voulait présenter à Moore sa propre solution, trouvée sans aucune aide. Une fois, on raconte qu'un étudiant ayant passé devant une salle vide et, à travers la porte ouverte, a entrevu une figure tracée sur le tableau noir. La figure lui a inspiré une preuve qui lui avait échappé jusque-là. Au lieu d'en être content, l'étudiant s'en trouvait confondu et fâché, et se disqualifiait lui-même de présenter cette preuve. Cela aurait été tricher : il avait eu de l'aide extérieur !

Un nombre considérable de mathématiciens illustres sont sortis de ces cours, mais selon Halmos (ibid.),

> La méthode de Moore est la bonne façon d'enseigner n'importe quoi. Elle produit des étudiants qui comprennent et peuvent utiliser ce qu'ils ont appris. Elle les équipe, certes, d'une attitude de recherche — l'attitude de tout remettre en question et de vouloir trouver les réponses de façon active — mais cela est une bonne chose dans toute entreprise humaine, pas seulement dans la recherche mathématique.

On peut sourire de ces déclarations venant d'un auteur illustre de manuels qui, par ailleurs, admet que ses propres expériences avec la méthode l'avaient contraint à des modifications. Or, son enthousiasme pour l'apprentissage par la « recherche pure » (excluant explicitement toute étude dans le sens que nous avons défini) est probablement partagé, en principe, par beaucoup de mathématiciens – qui, comme Halmos, admettraient aussi la difficulté de faire fonctionner ce purisme en pratique. Peut-être aussi par des didacticiens :

> En mathématique, l'activité d'un chercheur est constituée de ***tâches*** et de ***moments*** différents, tels que l'expérimentation, l'étude de cas particuliers, l'énoncé et l'étude de conjectures, la modélisation, l'élaboration et l'écriture de preuves, la définition d'objets, etc. (Grenier 2007, p. 2)

Or, on vient de constater, avec Brousseau, que les mathématiciens eux-mêmes sont peu susceptibles de se priver de médias dans leurs efforts de parvenir à tel ou tel résultat nouveau.

Toujours est-il que la méthode de Moore — que nous connaissons, d'ailleurs, aussi, par d'autres témoignages (par ex. Chalice 1995) — représente une option radicale d'enseignement au supérieur, mais présente certains attraits pour l'enseignant chercheur :

- Il détient le contrôle de ce qui est au programme, puisque tout le cours est structuré par la liste des résultats à obtenir par les étudiants.
- Il peut surveiller et diriger le parcours et intervenir pour corriger ou (au moins on le soupçonne) accélérer le processus.

- La méthode développe chez l'étudiant qui réussit une autonomie technique et théorique considérable, au moins dans le domaine du cours.

Ces points font de la méthode de Moore un dispositif plus évident pour un cours universitaire « ordinaire » que des dispositifs plus libres, comme on les connait en France, par exemple de par les ateliers de « situations de recherche » (Grenier 2007), « Math en Jeans » (Beddou et Mauduit 2005), etc. On note que dans ces activités, les « recherches » sont faites par des groupes avec la participation régulière de mathématiciens. De ce fait, les médias ne sont pas entièrement évacués ou évités, même si l'activité principale visée est la recherche pure.

On n'a guère besoin de signaler que maints obstacles pratiques sont au rendez-vous pour mettre la méthode de Moore en pratique de nos jours. Il est néanmoins clair qu'elle cultive, d'une manière originale, *certaines analogies* avec le travail du mathématicien, à savoir l'expérience d'établir formellement, et par *force brute*, un résultat dont on est assuré, pour une raison informelle, de la validité – une expérience que ne donne pas la résolution de problèmes routinières et par conséquent, un cours moyen d'université.

V. RECHERCHE *ET* ÉTUDE

Aux Etats-Unis de nos jours, le dispositif de « recherche en licence » (*undergraduate research*) est sans doute plus répandu que la méthode de Moore, même si la nature exacte de l'activité peut être plus difficile à cerner, de loin. Il est pourtant très visible que des options multiples existent pour le financement de ces activités (notamment de la *National Science Foundation*, cf. Adams et Narayan 2008). Comme on peut s'y attendre, les programmes des universités différentes diffèrent, mais en général il s'agit d'une activité dans laquelle les professeurs (directeur de « recherche ») et les étudiants s'engagent de leur plein gré, sur quelques mois ou toute une année. Pour les étudiants, travaillant en petites équipes ou individuellement, il s'agit de choisir un sujet ou « problème » mathématique, plus ou moins ouvert, et de produire un article (*paper*) qui rend compte du travail accompli. La forme de ces articles est normalement celle d'un article de chercheur, complet, avec une bibliographie qui témoigne d'une activité non pas seulement de recherche pure mais aussi, et parfois sans doute surtout, d'étude, motivée par le problème choisi. On trouve de nombreuses *revues en ligne* qui ne publie que ce type d'articles, soit provenant d'une seule université, soit des publications nationales telles le *Pi Mu Epsilon Journal* ; celui-ci publie aussi régulièrement des *sujets de recherche* (voir par ex. Ahlin et Reiter 2010). Des conférences où les étudiants présentent et discutent leur travaux s'ajoutent à l'expérience qui est donc, dans le sens de la diffusion des résultats, analogue au travail du mathématicien. Pour cette analogie, le fait de rédiger un texte référencé également important, par l'implication d'un travail d'*étude* où l'on consulte les travaux des autres, en fonction de leur pertinence pour le sujet de recherche. On retrouve d'ailleurs plus ou moins ces mêmes éléments dans l'expérience avec *Maths en Jeans* à l'Université de la Méditerranée (Beddou et Mauduit 2005).

À la différence des cours du style de celui de Moore, les dispositifs que l'on vient de relever ne s'insèrent pas dans le curriculum ordinaire de tous les étudiants, mais apparaissent comme une option pour des étudiants particulièrement motivés ou doués.

Il existe, au niveau licence, plusieurs propositions pour développer, dans le contexte de « cours ordinaires », des types plus ambitieux de recherche et d'étude que la simple résolution d'exercices ou de problèmes, mais en même temps plus encadrés que les projets dirigés sur un sujet choisi librement (étant donné qu'un cours ordinaire a normalement une matière assez précise à traiter). Nous nous bornerons ici à citer le dispositif de *projets thématiques,* où les étudiants ont à traiter des problèmes liés à la théorie du cours (mais non directement résolu avec les éléments de celle-ci), tel qu'exposé et exemplifié par Grønbæk et Winsløw (2007). Une activité de recherche y est certes attendue, notamment pour les parties plus ouvertes du projet. Par ailleurs, en fonction des contraintes relevant de l'institution, une activité d'étude au-delà des médias proposés par le cours, ou des cours précédents, n'est pas demandée, mais à la différence des exercices « de fin de chapitre », des parties plus importantes des textes « officiels » sont susceptibles d'être mobilisées. Parmi les avantages de ce dispositif, il y a la possibilité de baser un examen oral (et individuel – comme le demande l'institution) sur le travail accompli en collaboration par les étudiants. De cette manière, la recherche et l'étude peut être organisée dans un cadre relativement restreint, mais de ce fait est à la fois à la portée des étudiants en première ou deuxième année de licence, et porte sur un secteur précis visé par le cours. Ces deux demandes ne réduisent pas les défis pour les enseignants en ce qui concerne la conception et la direction des projets, même si l'analogie avec le travail du mathématicien est plus indirecte, aussi bien dans ce travail des enseignants que dans celui des étudiants qui font leur projet thématique.

À un niveau plus avancé, le travail de mémoire de master en mathématiques, au moins au Danemark, implique normalement pour l'étudiant d'exposer un travail d'étude de textes provenant de revues ou de monographies de recherche (c'est-à-dire de produits directs du travail des mathématiciens). Il semble donc moins orienté vers la recherche autonome et se présente, a priori, comme une tâche d'étude pure (et d'exposition). En réalité, il n'en est pas ainsi. Je me permets de partager mon expérience personnelle. Pour mon mémoire, j'ai eu pour tâche de faire un exposé des principaux résultats d'un article de Connes (1973). A priori, une tâche d'étude pure… Or, les démonstrations de ce texte étant très courtes, au moins pour l'étudiant que j'étais (avec pas mal de « on voit aisément que », etc.), je me trouvais souvent dans une situation semblable aux étudiants de Moore. Et quand j'ai dû recourir après tout à mon directeur de mémoire, il a souvent fini par faire pour moi ce que je n'avais pas réussi à faire : construire une preuve directement sans se soucier de ce qu'en disait le texte, sauf que le résultat était vrai. Ceci pour dire que la recherche est souvent nécessitée par l'étude, tout comme la recherche nécessite de l'étude. Bien évidemment, cette expérience n'aurait pas été complète sans un directeur de thèse très compétent ; mais c'est plutôt une règle générale que l'étude d'articles mathématiques fait intervenir la recherche, qui peut en effet amener des savoirs nouveaux (sous formes de preuves alternatives, par exemple). Aussi, nous pensons qu'il n'y a pas d'apport indirect sous forme d'étude pure, bien que celle-ci apparaisse trop souvent dans les parcours universitaires.

Le défi le plus intéressant, au moins dans le panorama que nous venons d'établir, semble d'ailleurs être surtout du côté de l'étude. Avec les projets thématiques tels qu'expérimentés à Copenhague, par exemple, les étudiants motivés peuvent en effet parvenir à une pratique de recherche relativement satisfaisante, tandis que pour la quasi-totalité des étudiants, l'étude reste limitée à la consultation du manuel prescrit par le cours. Sauf pour des dispositifs optionnels tels que *undergraduate research*, il semble donc que l'autonomie des étudiants reste très faible du côté de l'accès et du choix des médias, et donc que en ce sens, le travail des étudiants est rarement analogue au travail du mathématicien, peut-être pas même du même genre.

VI. CONTRAINTES INSTITUTIONNELLES À L'APPORT INDIRECT

L'apport *indirect* suppose que l'étudiant rencontre, dans l'institution universitaire, des milieux et des médias qui sont *analogues* ou même *identiques* à ceux que l'on trouve dans le contexte du travail du mathématicien, sauf pour demander la possibilité de produire des savoirs nouveaux (pour la communauté savante). À travers les cas d'apports indirects que nous avons présentés, nous nous sommes aperçus que le défi majeur se trouve en effet du côté des médias et surtout, de l'absence d'autonomie des étudiants vis-à-vis ceux-ci. Ce n'est pas, de nos jours, la difficulté d'accès qui pose obstacle, au moins pour les étudiants d'universités, celles-ci assurant l'accès à Internet et aux ressources scientifiques pertinentes (par exemple, les revues scientifiques à accès payant). L'obstacle est plutôt dans les programmes et plus précisément, dans le contrat institutionnel, qui veut que les contenus d'un enseignement universitaire soient déclarés sous forme de morceaux de texte (typiquement, des extraits d'un ou plusieurs manuels). Il est impossible de concevoir la force de ce contrat sans parler des enjeux institutionnels qui sont liés, dans les universités, aux évaluations des étudiants. Contrairement au mathématicien chercheur, la réussite de l'étudiant est mesurée fréquemment et le plus souvent, par des examens individuels (à l'écrit ou à l'oral), où le recours aux médias extérieurs (notamment d'autres personnes) revient à un acte de fraude.

On ne peut pas nier la différence fondamentale entre les critères de succès liés, d'un côté, à la production de savoirs inédits et intéressants, et à la performance individuelle en quelques heures de l'autre. L'institution universitaire a devant la société une obligation de pouvoir affirmer la compétence de chaque diplômé, et l'organisation modulaire implique que cette affirmation repose finalement sur l'évaluation de l'étudiant liée à chaque module. Les étudiants de leur côté ont un intérêt personnel à veiller à ce que ces évaluations reposent sur des demandes transparentes et abordables. Le modèle commun pour une telle évaluation est bien connu : un contrôle à l'écrit où la recherche (à quel type de tâche correspond cet exercice ?) est aussi limitée que l'étude (sur quelle page dans le manuel on trouve la technique requise ?). Mais pour le maintien du contrat institutionnel *interne*, entre étudiants et institution, l'absence d'analogie forte avec le travail du mathématicien ne pose pas vraiment problème.

Il n'en est peut-être pas de même pour ce qui est du contrat *externe*, entre l'institution et la société. Surtout s'agissant de la discipline mathématique, on peut maintenir que, même si le plus souvent, une minorité seulement d'étudiants des cours de mathématiques seront eux-mêmes mathématiciens-chercheurs, la raison pour laquelle ces derniers sont maintenus comme enseignants repose sur l'apport du travail des mathématiciens à l'enseignement. On trouve, en effet, d'autre profils d'enseignants universitaires de mathématiques, y compris les didacticiens et les chercheurs de disciplines voisines (physique, économie, etc.), et la question de l'apport de ces types de recherche se pose bien évidemment de façon semblable. Mais pour ce qui est de l'apport du travail du mathématicien, il faut surtout maintenir un œil sur le rôle des médias, dont la facilité matérielle d'accès est loin de s'allier à une facilité d'usage pour les étudiants. D'autre part, sous la direction du mathématicien-chercheur, les étudiants seront en principe capables de s'aventurer bien au-delà des notes ou des manuels de cours – ces manuels qui fournissent, dans l'état présent, le seul objet d'étude pour les étudiants, dans la vaste majorité de cours universitaires de mathématiques.

Il est temps de mobiliser de nouveaux efforts et de nouvelles idées pour faire découvrir aux étudiants, dès la licence, que les mathématiques ne se communiquent pas que par des manuels, et que la recherche n'est pas réduite à des actes de prouesse individuelle devant un morceau de papier blanc. Pour y parvenir, il faut également établir de nouveaux contrats institutionnels facilitant l'intégration de dispositifs comme « undergraduate research » dans le curriculum ordinaire, et cela même pour les futurs enseignants (même si, pour ceux-ci, il faut voir si le travail du didacticien ne serait pas aussi, voire plus, pertinent que celui du mathématicien). L'enjeu est d'assurer l'apport à l'enseignement de la production des savoirs, sans lequel l'université n'est plus qu'une école prétentieuse.

RÉFÉRENCES

Adams S., Narayan D. (2008) Ressources for undergraduate research in mathematics. Localisé le 25 juin 2011. http://www.maa.org/columns/resources/resources_2_08.html.

Ahlin A., Reiter H. (2010) Problem Department. *Pi Mu Epsilon Journal* 13 (2), 559-560.

Barquero B. (2009) *Ecología de la Modelización Matemática en la enseñanza universitaria de las Matemáticas.* Thèse de doctorat. U. Autonomica de Barcelone. Localisé le 15 juin http://www.tesisenred.net/handle/10803/3110.

Beddou L., Mauduit C. (2005) L'expérience Math en Jeans : bilan de 11 ans de pratique à l'Université de la Méditerranée. In Ducourtioux C., Hennequin P. (Eds) *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire*. Paris : APMEP.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 7 (2), 33-115.

Brousseau G. (1999) Research in mathematics education: observation and mathematics. In Schwank I. (Ed.) (vol. 1, pp. 35-49) European research in mathematics education. Osnabrück : Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Chalice D. (1995) How to teach a class by the Modified Moore Method. *American Mathematical Monthly* 102 (4), 317-321.

Chevallard Y. (2007) Communication au Séminaire national de didactique des mathématiques le 23 mars 2007. In Gueudet G., Matheron Y. (Eds) (pp. 344-366) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2007*, ARDM et IREM de Paris 7, Paris.

Chevallard Y. (2009) La notion de PER: problèmes et avancées. Manuscrit pour une conférence à l'IUFM de Toulouse, 28 avril 2009. Localisé le 15 juin http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf.

Connes A. (1973) Une classification des facteurs de type III. *Annales scientifiques de l'école normale supérieure,* tome 6, 133-252.

Grenier D. (2007) Des situations de recherche en mathématiques pour une formation à la démarche scientifique. In *Actes de l'université du DGESCO à St-Flour du 20 au 24 août 2007*. Paris : Ministère de l'Éducation Nationale. Localisé le 15 juin sur http://media.education.gouv.fr/file/Formation_continue_enseignants/16/0/StFlour2007_Grenier_110160.pdf.

Grønbæk N., Winsløw C. (2007) Thematic projects: a format to further and assess advanced student work in undergraduate mathematics. *Recherches en didactiques des mathématiques* 27 (2), 187-220.

Halmos P. (1985) *I Want to be a Mathematician. An automathography.* New York : Springer Verlag.

Winsløw C. (2009) Recherche et enseignement universitaire en mathématiques, interactions actuelles et possibles. In Ouvrier-Buffet C., Perrin-Glorian M.-J (Eds.) (pp. 59-67) *Approches plurielles en didactique des mathématiques*. Paris : Laboratoire de didactique André Revuz.