L'OBSTACLE DU FORMALISME AU DÉBUT DU SUPÉRIEUR

Ridha NAJAR*

Résumé – Les connaissances ensemblistes formelles jouent un rôle important dans les mathématiques du supérieur mais constituent en même temps un obstacle chez beaucoup d'étudiants entrant à l'université dans leur apprentissage des mathématiques. Un test passé à de bons étudiants tunisiens poursuivant un enseignement scientifique spécialisé montre à quel point les difficultés de gestion du langage ensembliste formel et des éléments de logique conduisent à des blocages dans la résolution de problèmes et rendent inopérantes les connaissances mathématiques apprises. Nous situant dans la perspective anthropologique du didactique, nous essayerons d'expliquer l'origine des difficultés constatées et chercherons des moyens pouvant remédier à cette situation.

Mots-clefs : notions ensemblistes, formalisme mathématique, praxéologie mathématique, rapport institutionnels, connaissances pratiques

Abstract – The knowledge linked to formal set theory plays an important role in higher mathematics. At the same time, they constitute an obstacle for many students entering university in their learning of mathematics. A test administered to highly performing Tunisian students pursuing specialized science studies shows how the difficulties in managing the formal language of set theory and logic elements lead to handicaps in problem solving and render ineffective the mathematical knowledge learned. Relying on the anthropological theory of didactics, we will try to explain the origin of the difficulties encountered and will seek ways to remedy this situation.

Keywords: set theory notions, mathematical formalism, mathematical praxeology, institutional relationships, practical knowledge

I. INTRODUCTION

Plusieurs travaux qui se sont intéressés à l'étude de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques au supérieur ont mis en évidence les difficultés des étudiants dues à l'usage du formalisme mathématique. C'est le cas notamment des recherches menées dans différentes universités françaises entre les années 1987 et 1994 au sujet de l'algèbre linéaire[1]. Ces recherches ont montré que les difficultés des étudiants dans ce domaine sont :

> […] révélatrices d'un même obstacle, massif, qui apparaît pour toutes les générations successives, et pratiquement pour tous les modes d'enseignement : c'est ce que [les auteurs appellent] naïvement : l'obstacle du formalisme. (Dorier 1997, p. 105)

De façon similaire, dans le système d'enseignement québécois, Corriveau (2007) étudie les difficultés liées à l'usage du symbolisme mathématique et des règles de logique dans l'élaboration de démonstrations par les étudiants lors du passage du secondaire au collégial. Elle remarque à ce propos qu'au collégial, les symboles, représentant les nouveaux objets mathématiques et leurs relations, sont introduits par l'enseignant sans insistance sur les choix effectués ni sur les règles qui régissent leur manipulation et dont dépendent les propriétés des objets enseignés. Cette situation conduit la majorité des étudiants à perdre le sens du langage symbolique qu'ils manipulent et le contrôle du travail qu'ils effectuent.

Dans ce travail nous rejoignons les préoccupations de ces chercheurs. À travers une analyse des réponses d'étudiants tunisiens entrant à l'université à un test d'algèbre linéaire, nous montrons à quel point le manque de maîtrise du langage ensembliste et des éléments de logique et les difficultés de gestion du symbolisme mathématique conduisent à des blocages dans la résolution de problèmes et rendent inopérantes leurs connaissances mathématiques. Nous situant dans la perspective anthropologique (Chevallard 1998 ; 1989), nous essayerons à

* Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue – Canada – ridha.najar@uqat.ca

[1] Voir Dorier (1997) pour une synthèse.

© Najar R. (2012) L'obstacle du formalisme au début du supérieur. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 1026–1043). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

la fin d'expliquer l'origine des difficultés constatées et chercherons des moyens pour remédier à cette situation.

II. PROBLÉMATIQUE

Dans l'enseignement secondaire (ES, dans la suite) tunisien, les notions et le langage ensemblistes ainsi que les règles de logique qui ont vu leur apparition avec la réforme des « mathématiques modernes », n'ont pas complètement disparu lors des réformes ultérieures comme ce fut le cas pour l'étude des structures algébriques et de l'algèbre linéaire. L'institution du secondaire a choisi de garder l'usage de ces notions et règles tout en modifiant leur écologie. Elle recommande ainsi de les introduire dans différents thèmes d'étude au fur et à mesure des besoins d'enseignement, mais de ne pas les considérer comme des objectifs d'apprentissage et d'éviter tout exposé général les concernant. À l'entrée de l'université, les enseignants du supérieur, considérant que les concepts de base de la théorie des ensembles et les règles de logique ont été suffisamment manipulés dans le secondaire pour être devenu familiers, passent souvent rapidement sur l'enseignement de ces notions et ne font pas du symbolisme associé un enjeu explicite d'enseignement. Ceci conduit les étudiants à développer des mécanismes de travail peu réfléchis dans ce domaine et est source d'obstacles souvent difficiles à surmonter. Ces obstacles et difficultés ne concernent pas une filière particulière du supérieur, elles intéressent quasiment tous les étudiants entrant à l'université, même ceux poursuivant leurs études dans des filières scientifiques spécialisées. Ceci nous incite à lier les dites difficultés à des choix institutionnels d'enseignement, plutôt qu'à des caractéristiques personnelles des étudiants. Pour justifier ce point de vue, nous avons choisi de réaliser l'expérimentation que nous présentons dans ce travail avec des étudiants de première année de la filière Mathématiques-Physique des classes préparatoires scientifiques (CPS1, dans la suite). Les étudiants de cette institution sont sélectionnés parmi les meilleurs bacheliers[2] de la section *Mathématiques* de l'enseignement secondaire. Les mathématiques constituent par ailleurs la matière de base dans les deux années d'enseignement en CPS1 et le classement des étudiants dans le concours terminal de cette institution[3] est fortement conditionné par leurs résultats à l'épreuve de mathématiques. Ces facteurs font que les sujets de CPS1 sont fortement investis dans le projet de formation mathématique de leur institution. Pour ces raisons, nous pouvons considérer que les étudiants choisis pour notre expérimentation sont de bons sujets institutionnels (Ibid.), ce qui nous a semblé intéressant pour différencier ce qui relève réellement des choix institutionnels d'enseignement de ce qui relèverait d'apprentissages normalement attendus de la part des étudiants mais non réalisés.

III. L'EXPÉRIMENTATION ET LA MÉTHODOLOGIE D'ANALYSE

L'expérimentation a pour objectif l'étude des difficultés éventuelles qu'éprouvent les étudiants dans l'activité de résolution de problèmes. Elle se propose également de voir à quel niveau se situent ces difficultés.

Pour ce faire, nous avons organisé un test avec les étudiants de deux classes de CPS1[4]. Le test porte sur les notions d'application linéaire, de sous-espace vectoriel et d'injection dans le

[2] Moyenne générale de réussite à l'examen de Baccalauréat (examen sanctionnant le cycle d'enseignement secondaire) supérieure ou égale à 15 sur 20. La plupart des étudiants (environ 70%) concernés par notre expérimentation ont eu une note supérieure ou égale à 17 sur 20 en mathématiques au Baccalauréat (pour les 30% autres, la note est située entre 15 et 17 sur 20)

[3] pour l'admission dans une école d'ingénieur.

[4] L'expérimentation a été réalisée à l'Institut Préparatoire aux Études d'Ingénieurs de Tunis, au cours de l'année universitaire 2006-2007.

contexte des espaces vectoriels de matrices. Dans la période où le test était proposé, les étudiants finissaient l'étude des chapitres sur les espaces vectoriels de dimensions finies et les matrices. Les étudiants avaient étudié antérieurement en Algèbre, entre autres, les chapitres sur « Ensembles et Applications », « Structures algébriques », « Espaces vectoriels et applications linéaires ».

Pour l'analyse des productions des étudiants, nous avons effectué le dépouillement des copies selon quatre catégories de réponses :

- réponse correcte, convenablement rédigée et bien justifiée (si une justification est requise). Désignée par « C+ » ;
- réponse correcte mais manque de précisions (dans la rédaction et/ou la justification) ou présence d'implicites. Désignée par « C- » ;
- réponse fausse. Désignée par « F » ;
- copie sans réponse. Désignée par « SR ».

Les réponses incomplètes seront considérées, soit dans la catégorie C-, soit dans F, selon ce que la partie fournie apporte à la réalisation de la tâche.

Ceci étant, 43 étudiants ont passé le test. Les étudiants ont disposé d'environ une heure pour répondre aux questions de l'exercice.

IV. LE TEST

1. Énoncé de l'exercice

$\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

On définit l'application $f_A : \mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$; $M \mapsto AM - MA$.

1) a - Montrer que f_A est une application linéaire.

   b - En déduire que l'ensemble F des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $MA = AM$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

2) a - Calculer $f_A(I_n)$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

   b - Existe-t-il des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que f_A soit injective ?

2. Analyse globale

L'exercice vise l'étude de certaines propriétés, ensemblistes et linéaires, d'une application f_A. La distinction entre les statuts du paramètre A et de la variable M est essentielle pour pouvoir s'approprier les questions de l'exercice et savoir y répondre. La désignation des matrices peut se faire dans différents registres sémiotiques (lettre générique M, suite de coefficients (m_{ij}), tableau de coefficients à n lignes et n colonnes). Le traitement de chaque question et les difficultés qu'il pose sont étroitement liés à la représentation sémiotique choisie pour désigner les matrices ainsi qu'aux formulations adoptées pour les notions en jeu. Les questions 1-a, 1-b et 2-a sont fermées et ne posent a priori pas de difficultés. En revanche, la question 2-b est ouverte et susceptible de diverses formulations dont dépendent le choix de techniques de travail. Outre la connaissance des notions et propriétés intervenant dans l'exercice, la réponse aux questions demande une bonne gestion du langage ensembliste et du symbolisme mathématique à mettre en œuvre.

V. ANALYSE A PRIORI ET ANALYSE DES PRODUCTIONS DES ÉTUDIANTS

Nous procédons dans ce paragraphe à l'analyse a priori des questions de l'exercice et nous analysons pour chaque question les productions des étudiants correspondantes.

Question 1-a (Tâche T_1)

Montrer que f_A est une application linéaire.

Analyse a priori

Cette tâche T_1 se réalise via une application directe de la définition d'une application linéaire. Des difficultés peuvent toutefois apparaître à la suite d'une gestion non appropriée des matrices mises en jeu (du point de vue du statut et/ou des représentations sémiotiques).

Une technique possible pour répondre à la question consiste à montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, et pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, on a : $f_A(\lambda.M + N) = \lambda.f_A(M) + f_A(N)$.

Analyse des productions des étudiants

Cette question est bien réussie par les étudiants comme le montre le tableau suivant :

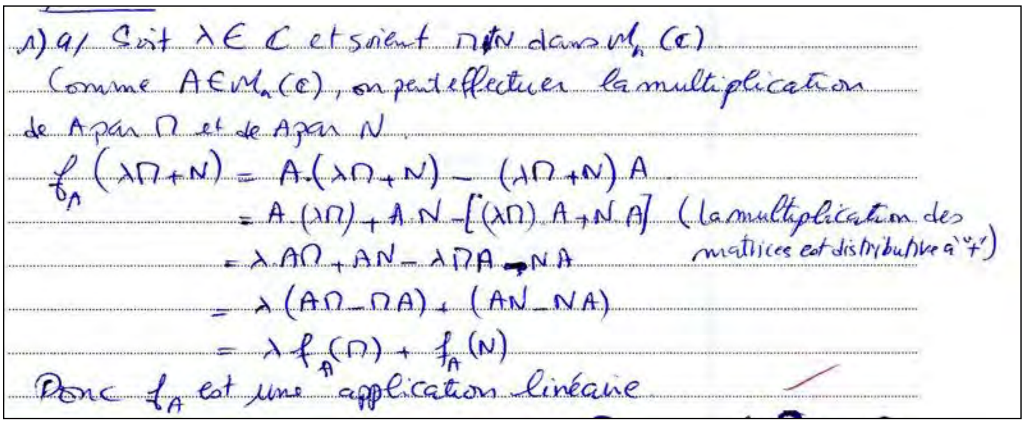
	Réponses C+	**Réponses C-**	**Réponses F**	**Copies SR**
Effectif	31	12	0	0
Pourcentage	72 %	28 %	0 %	0 %

***Tableau 1** – Réponses des étudiants à la question 1-a*

Les réponses des étudiants montrent que ceux-ci connaissent bien la définition d'une application linéaire et savent l'appliquer dans une situation particulière. Néanmoins, plus du quart des étudiants éprouve des difficultés pour justifier convenablement le calcul effectué. La formulation de propriétés liées aux structures algébriques et l'usage des écritures indicielles des matrices ne sont pas encore bien maîtrisés par certains étudiants. Nous donnons ci-dessous des exemples de réponses produites par les étudiants.

Réponses correctes de type C+

Dans ce type de réponses, tous les étudiants ont utilisé la définition d'une application linéaire. Diverses formulations ont été cependant employées : calcul de $f_A(\lambda.M + N)$, calcul de $f_A(\lambda.M + \mu.N)$, calculs séparés selon les deux lois. Les hypothèses concernant les matrices et les scalaires sont bien précisées et le calcul est plus ou moins justifié. Nous donnons ci-dessous un exemple de telles réponses.


1) a/ Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et soient M, N dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut effectuer la multiplication de A par M et de A par N.

$f_A(\lambda M + N) = A.(\lambda M + N) - (\lambda M + N).A$

$= A.(\lambda M) + A.N - [(\lambda M).A + N.A]$ (la multiplication des matrices est distributive à "+")

$= \lambda AM + AN - \lambda MA - NA$

$= \lambda(AM - MA) + (AN - NA)$

$= \lambda f_A(M) + f_A(N)$

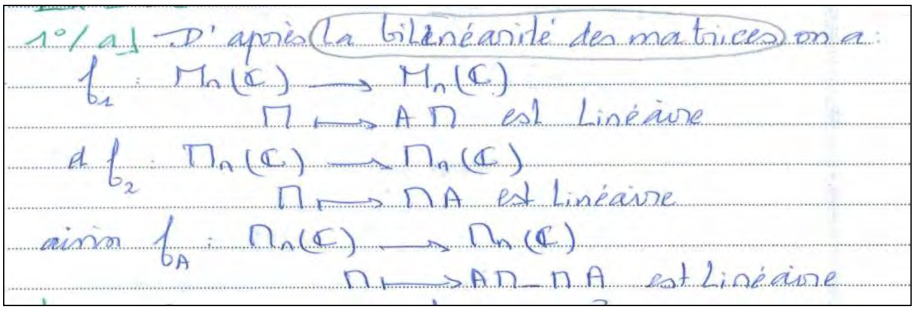
Donc f_A est une application linéaire

***Figure 1** – Production 1, Tâche T_1*

Réponses correctes de type C-

Dans les 12 réponses de ce type, les étudiants ont convenablement effectué le calcul permettant d'établir la linéarité de f_A (avec diverses formulations, comme dans C+). Nous rencontrons cependant un manque de précision au niveau de la justification des calculs, de l'écriture des hypothèses ou de la conformité des notations symboliques. Les productions ci-dessous montrent des exemples de telles réponses :

Exemple 1

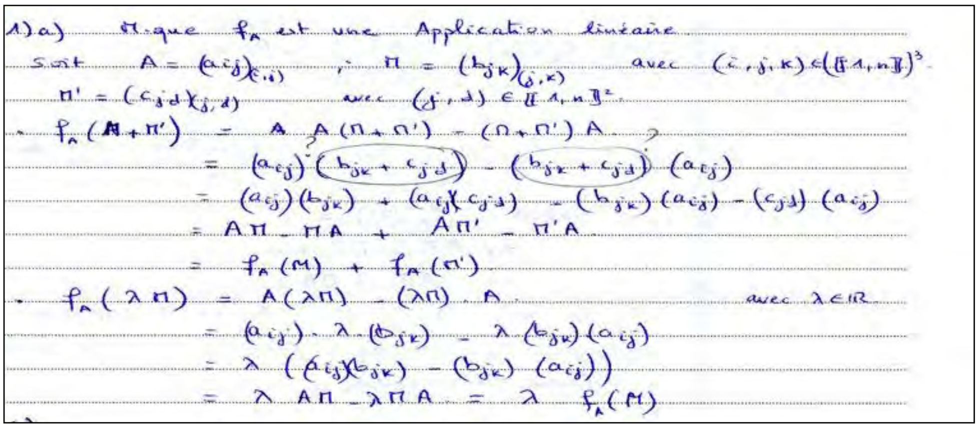


1°/ a) D'après la bilinéarité des matrices on a :
$f_1 : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$
$M \longmapsto AM$ est linéaire
et $f_2 : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$
$M \longmapsto MA$ est linéaire
ainsi $f_A : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$
$M \longmapsto AM - MA$ est linéaire

***Figure 2** – Production 2, Tâche T_1*

L'étudiant ici utilise le fait que f_A est la somme de deux applications linéaires mais n'arrive pas à justifier correctement son raisonnement.

Exemple 2



1) a) M.que f_A est une Application linéaire
Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)}$, $M = (b_{jk})_{(j,k)}$ avec $(i,j,k) \in ([\![1,n]\!])^3$
$M' = (c_{jd})_{(j,d)}$ avec $(j,d) \in [\![1,n]\!]^2$
· $f_A(M+M') = A(M+M') - (M+M')A$
$= (a_{ij})(b_{jk}+c_{jd}) - (b_{jk}+c_{jd})(a_{ij})$
$= (a_{ij})(b_{jk}) + (a_{ij})(c_{jd}) - (b_{jk})(a_{ij}) - (c_{jd})(a_{ij})$
$= AM - MA + AM' - M'A$
$= f_A(M) + f_A(M')$
· $f_A(\lambda M) = A(\lambda M) - (\lambda M)A$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
$= (a_{ij})\lambda(b_{jk}) - \lambda(b_{jk})(a_{ij})$
$= \lambda((a_{ij})(b_{jk}) - (b_{jk})(a_{ij}))$
$= \lambda AM - \lambda MA = \lambda f_A(M)$

***Figure 3** – Production 3, Tâche T_1*

Dans cette production, la gestion des coefficients désignant les matrices n'est pas opératoire dans le calcul effectué, elle a juste valeur de notation (par exemple, pour effectuer la somme *M+M'*, les coefficients de *M* et de *M'* doivent être indexés de façon identique : $b_{ij}+c_{ij}$).

Commentaire pour la question 1.a

Les réponses C- montrent que le langage mathématique formel n'est pas complètement maîtrisé par certains étudiants. Pour cette question d'ordre technique, ceci n'a pas empêché les étudiants de produire des solutions globalement correctes.

Question 1-b (Tâche T_2)

En déduire que l'ensemble *F* des matrices *M* de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ vérifiant $MA = AM$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Analyse a priori

Deux techniques sont possibles pour réaliser cette tâche :

Technique 1 : c'est celle qui est suggérée par la question. Elle consiste à reformuler l'ensemble F comme le noyau de l'application linéaire f_A, puis d'appliquer un théorème du cours.

Technique 2 : elle consiste à vérifier les propriétés d'un sous-espace vectoriel (sev) (F non vide et stable pour les lois de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$).

Dans les deux cas, la réalisation de la technique ne présente pas de difficultés particulières, on peut de plus la supposer facilitée par la première question et suffisamment routinisée en CPS1.

Analyse des productions des étudiants

Cette question est réussie par plus des trois quarts des étudiants. Le tableau ci-dessous donne la répartition des réponses selon les différentes catégories.

	Réponses C+	**Réponses C-**	**Réponses F**	**Copies SR**
Effectif	27	6	10	0
Pourcentage	63 %	14 %	23 %	0 %

Tableau 2 *– Réponses des étudiants à la question 1-b*

Réponses correctes de type C+

Parmi les 27 réponses de ce type, 21 étudiants ont donné une solution selon la technique 1 et les 6 autres ont utilisé la technique 2. À de légères variations près dans les rédactions, ces solutions sont soigneusement présentées comme l'illustrent les productions suivantes :

Exemple 1

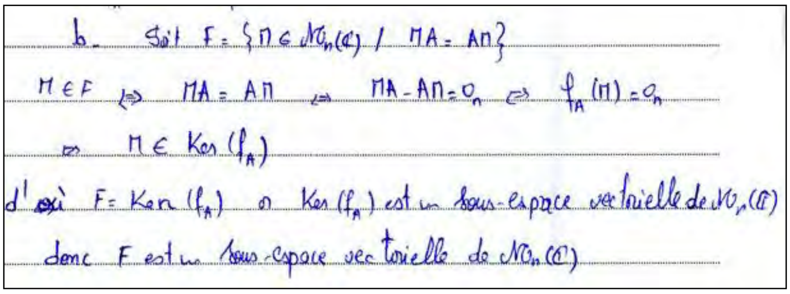

b. Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, MA = AM\}$
$M \in F \Leftrightarrow MA = AM \Leftrightarrow MA - AM = 0_n \Leftrightarrow f_A(M) = 0_n$
$\Leftrightarrow M \in \mathrm{Ker}(f_A)$
d'où $F = \mathrm{Ker}(f_A)$ or $\mathrm{Ker}(f_A)$ est un sous-espace vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
donc F est un sous-espace vectorielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Figure 4 *– Production 4, Tâche T_2*

Exemple 2

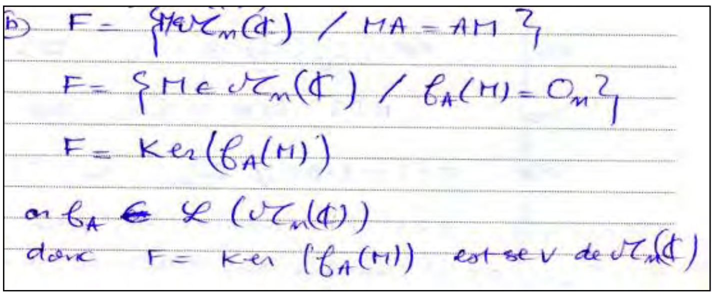

b) $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, MA = AM\}$
$F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,/\, f_A(M) = 0_n\}$
$F = \mathrm{Ker}(f_A(M))$
or $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$
donc $F = \mathrm{Ker}(f_A(M))$ est sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Figure 5 *– Production 5, Tâche T_2*

Dans ces deux productions, nous lisons les deux moyens utilisés par les étudiants pour établir l'égalité entre les ensembles F et $Ker\ f_A$.

- Démonstration par équivalence, traduisant la double inclusion.
- Différentes écritures de l'ensemble F.

Ceci reflète une certaine aisance dans la manipulation de l'égalité ensembliste.

D'un autre côté, nous remarquons dans la production 6 la confusion que fait l'étudiant entre f_A et $f_A(M)$ dans l'écriture du noyau.

Pour les réponses C+ données avec la technique 2, les étudiants ont généralement vérifié soigneusement les caractéristiques d'un sous-espace vectoriel, comme le montre la production suivante :

Exemple 3

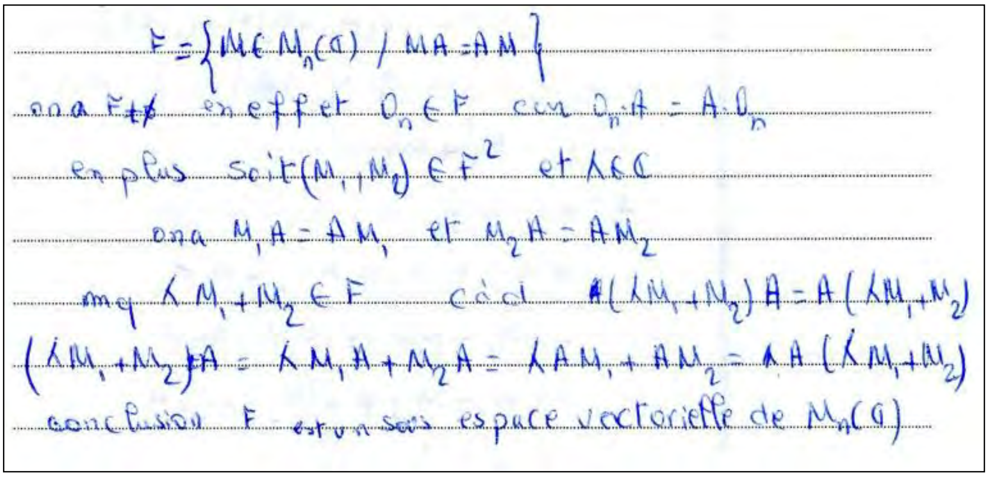


Figure 6 *– Production 6, Tâche T_2*

Réponses correctes de type C-

Dans ce type de réponses, nous rencontrons aussi chez les étudiants les deux techniques de travail. Ces réponses se caractérisent par des « glissements » entre diverses notions et des imprécisions de rédaction entraînant un changement dans le sens mathématique des propriétés démontrées. Nous donnons ci-dessous un exemple de production pour chacune des techniques employées :

Exemple 1

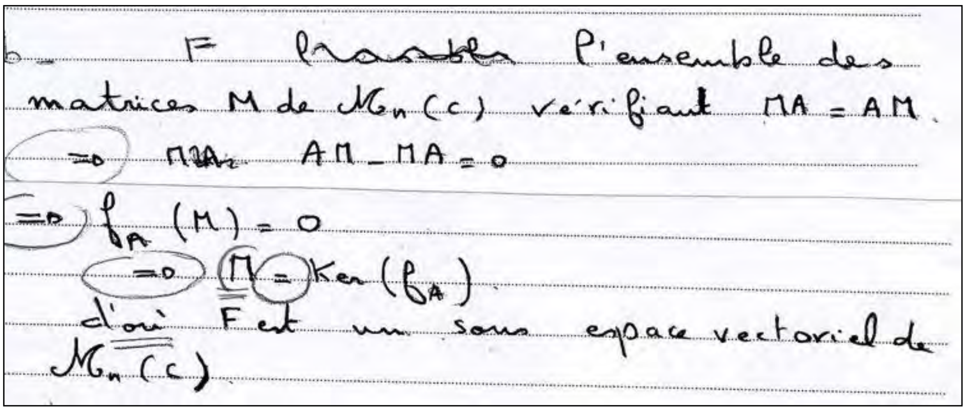


Figure 7 *– Production 7, Tâche T_2*

Le travail de l'étudiant montre que $M \in Kerf_A$. À ce niveau, il y a un glissement de notation $\in / =$. De plus ce travail permet seulement de conclure que $F \subset Kerf_A$, l'inclusion réciproque n'est pas traitée. Cette erreur pourrait être due à une confusion entre les statuts des symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$. Nous rencontrons ce type d'erreurs dans 4 autres copies.

Exemple 2

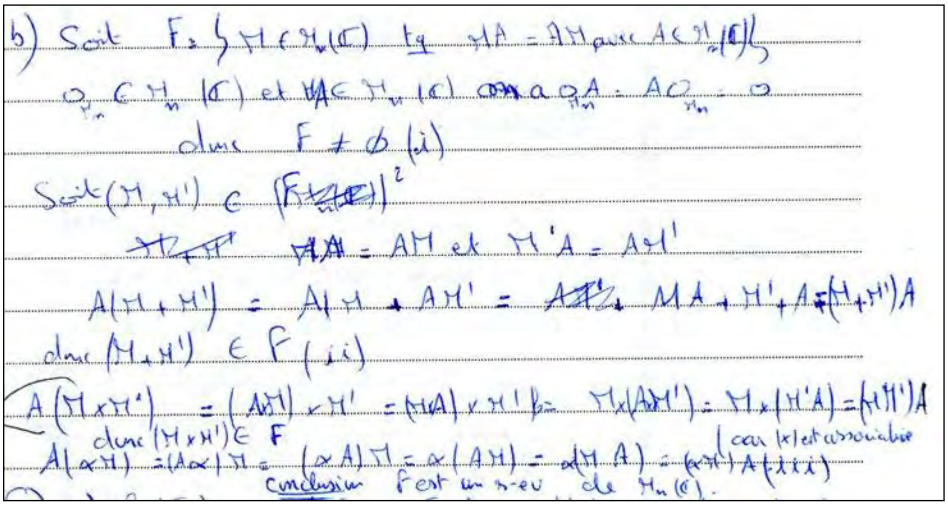


***Figure 8** – Production 8, Tâche T_2*

Pour montrer que *F* est un sous-espace vectoriel, l'étudiant ajoute une propriété concernant la multiplication interne des matrices. Il y a là une confusion entre les caractéristiques des structures algébriques. Nous rencontrons ce genre d'erreurs dans d'autres copies.

Réponses fausses

Dans la plupart des réponses fausses, les étudiants, voulant utiliser l'application f_A pour effectuer une déduction, se sont heurtés à des difficultés de calcul et/ou d'interprétation. Les productions suivantes illustrent les difficultés les plus fréquentes :

Exemple 1

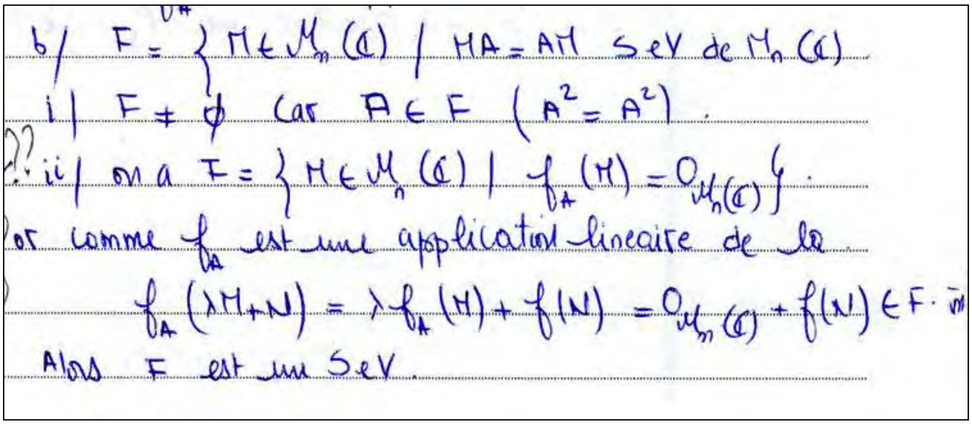


***Figure 9** – Production 9, Tâche T_2*

Dans cette production, l'étudiant, après avoir utilisé la linéarité de f_A pour calculer $f_A(\lambda.M + N)$ et remplacé $f_A(M)$ par $O_{\mathcal{M}n(\mathbf{C})}$ (ce qui indique implicitement que *M* est choisi dans *F*), l'étudiant semble ignorer quoi faire de $f_A(N)$. Cette difficulté pourrait résulter de la non caractérisation de N, comme élément de F, et/ou d'un problème de compréhension concernant le statut muet de M dans l'écriture de l'ensemble F. Pour terminer, l'étudiant conclut que « $f_A(\lambda M+N) \in F$ », au lieu de ($\lambda M+N \in F$).

Exemple 2

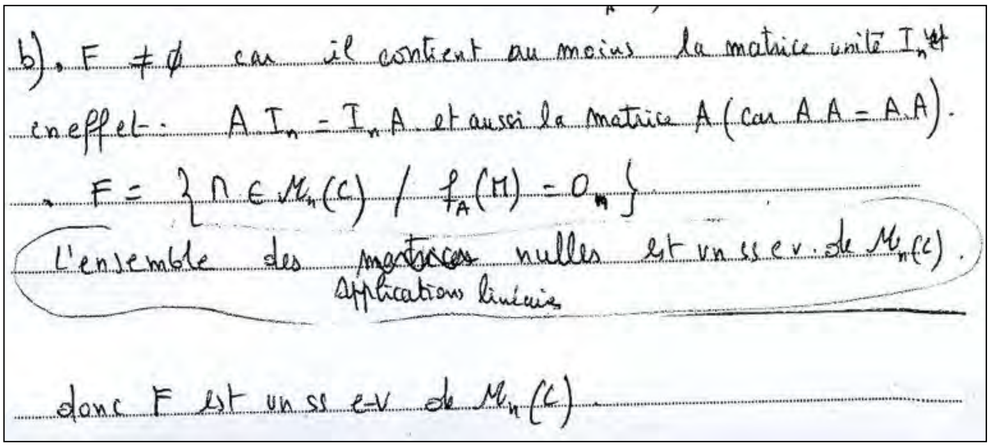

b). F ≠ ∅ car il contient au moins la matrice unité I_n et
en effet : $A I_n = I_n A$ et aussi la matrice A (car $A A = A A$).
. $F = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ f_A(M) = O_n \}$
L'ensemble des ~~matrices~~ applications linéaires nulles est un ss e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
donc F est un ss e-v de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Figure 10 *– Production 10, Tâche T_2*

Après avoir écrit que F est un ensemble de matrices, l'étudiant remplace ici « matrices » par « applications linéaires ». Il considère ensuite que ces applications linéaires sont nulles, ce qui indique qu'il a compris l'égalité $f_A(M) = O_n$ comme une égalité fonctionnelle et non matricielle. Il n'est pas clair comment l'étudiant a fait le lien entre la propriété de stabilité de F et le résultat formulé. Nous retrouvons ce type d'erreurs dans d'autres productions et sous d'autres aspects, comme dans la production suivante :

Exemple 3

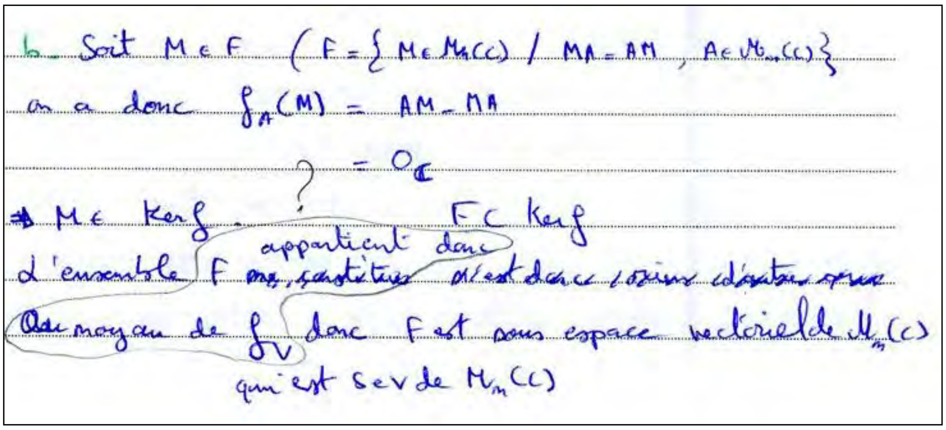

b. Soit $M \in F$ ($F = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ MA = AM, \ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \}$
on a donc $f_A(M) = AM - MA$
? $= O_{\mathbb{C}}$
⇒ $M \in \mathrm{Ker} f$. $F \subset \mathrm{Ker} f$
l'ensemble F ~~n'est donc rien d'autre que~~ appartient donc au noyau de f donc F est sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
qui est sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Figure 11 *– Production 11, Tâche T_2*

L'étudiant montre ici convenablement que $F \subset Ker f_A$. La formulation de la conclusion laisse croire qu'une partie du noyau $Ker\, f_A$ est un sous-espace vectoriel, ce qui est erroné. Remarquons par ailleurs le « glissement » dans la conclusion entre les notions d'appartenance et d'inclusion.

Commentaire pour la question 1-b

Pour cette question, les réponses correctes C- et les réponses fausses reflètent une certaine fragilité chez les étudiants dans l'usage du langage ensembliste et des éléments de logique :

glissements entre $\in/\subset$ et $\in/=$, usage non conforme des connecteurs logiques $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$, absence de quantification pour les éléments en jeu. Cette situation a entraîné des difficultés de raisonnement et/ou des formulations et interprétations erronées dans les réponses.

Question 2-a. (Tâche T_3)

Calculer f_A (I_n), où I_n désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$

Analyse a priori

Il s'agit d'un calcul immédiat, on trouve $f_A(I_n) = O_n$. Toutefois, si l'on désigne les matrices par leurs coefficients, le calcul demandera plus d'attention au niveau de la gestion des écritures indicielles, ce qui pourrait poser des difficultés de calcul.

Analyse des productions des étudiants

Cette question est très bien réussie par les étudiants comme l'indique le tableau suivant :

	Réponses C+	**Réponses C-**	**Réponses F**	**Copies SR**
Effectif	42	0	1	0
Pourcentage	98 %	0 %	2 %	0 %

Tableau 3 *– Réponses des étudiants à la question 2-a*

Commentaire

Parmi les 42 réponses C+, 40 étudiants ont répondu par : $f_A(I_n) = AI_n - I_nA = A - A = O_n$. Certains ont précisé que I_n est neutre pour la multiplication matricielle et d'autres l'ont utilisé implicitement. Dans les deux autres productions, un des étudiants a commencé par montrer que $I_n \in F$, puis, utilisant que $F = Ker\ f_A$, il a conclu que f_A (I_n) = O_n. Le dernier étudiant a fait le calcul de $AI_n - I_nA$ en utilisant les coefficients des matrices A et I_n. Il semble qu'il n'utilise pas le fait que I_n est neutre pour la multiplication matricielle, comme le laisse penser sa production donnée ci-dessous.

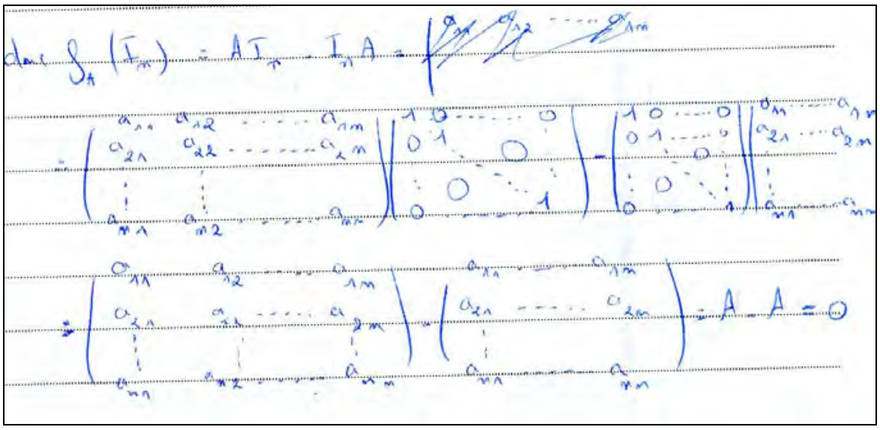


Figure 12 *– Production 12, Tâche T_3*

Concernant la réponse fausse, l'étudiant a inversé les rôles de A et I_n dans le calcul de $f_A(I_n)$. Ainsi, nous lisons sur sa copie :

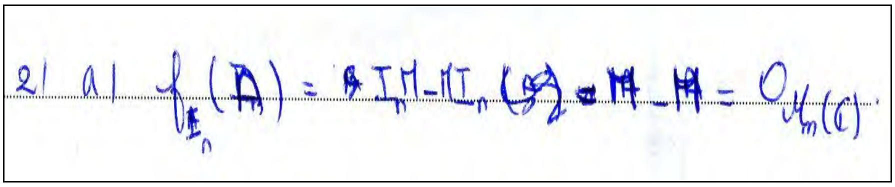


***Figure 13** – Production 13, Tâche T_3*

Nous notons aussi la confusion faite concernant les matrices M et A. Cet état d'hésitation témoigne d'une certaine fragilité dans la maîtrise de la situation de la tâche.

Question 2-b (Tâche T_4)

Existe-t-il des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que f_A soit injective ?

Analyse a priori

Il s'agit d'une question ouverte. Deux stratégies sont possibles pour réaliser la tâche :

Stratégie 1 : Elle consiste à reformuler la question en terme de noyau : f_A est injective $\Leftrightarrow$ $Ker f_A = \{O_n\}$. Puis, utilisant 2-a, on déduit que pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $Ker f_A \neq \{O_n\}$. f_A est donc non injective, quelle que soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Stratégie 2 : Elle utilise la définition générale d'une injection. Plusieurs techniques sont possibles pour cette stratégie suivant la caractérisation de l'injectivité qui sera retenue. On peut par exemple procéder comme suit :

f_A est injective $\Leftrightarrow$ (Pour tous M et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $f_A(M) = f_A(N) \Rightarrow M = N$) *(i)*

Or, $f_A(M) = f_A(N) \Leftrightarrow AM - MA = AN - NA \Leftrightarrow AM - AN = MA - NA$

$$\Leftrightarrow A(M-N) = (M-N)A \qquad (ii)$$

On remarque ensuite que *(ii)* peut se réaliser sans que l'on ait nécessairement $M = N$ (Il suffit par exemple de considérer deux matrices distinctes M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $N = M - I_n$)
On conclut alors que f_A n'est pas injective, quelle que soit la matrice A.

Cette technique demande d'abord de bien distinguer entre le statut de A d'une part et celui de M et N d'autre part. Ensuite, il faut bien gérer les connecteurs et les quantificateurs logiques en jeu et il faut savoir comment résoudre le problème d'existence de M et N vérifiant l'égalité *(ii)*. Ces points pourraient poser problèmes pour les étudiants qui adoptent cette technique de travail.

D'autres techniques sont aussi possibles, comme : utiliser la contraposée de *(i)*, ou chercher pour quelle matrice A, il existe une matrice Y de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que l'équation en M : $f_A(M) = Y$ admette plus d'une solution.

Analyse des productions des étudiants

Cette question a été ratée par environ la moitié des étudiants (47%). Le tableau ci-dessous donne la répartition des réponses selon les différentes catégories.

	Réponses C+	Réponses C-	Réponses F	Copies SR
Effectif	16	7	17	3
Pourcentage	37 %	16 %	40 %	7 %

***Tableau 4** – Réponses des étudiants à la question 2-b*

Réponses correctes de type C+

Dans les 16 réponses de ce type, les étudiants ont utilisé la première stratégie avec des formes de rédaction variées. Les solutions correspondantes sont précises et soignées comme l'illustrent les exemples suivants :

Exemple 1

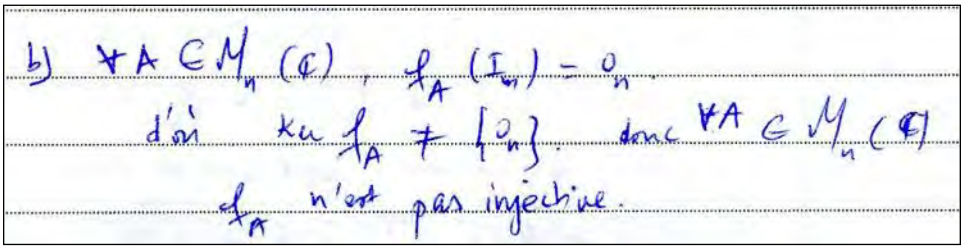

b) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f_A(I_n) = 0_n$
d'où $\ker f_A \neq \{0_n\}$ donc $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
f_A n'est pas injective.

***Figure 14** – Production 14, Tâche T_4*

Exemple 2

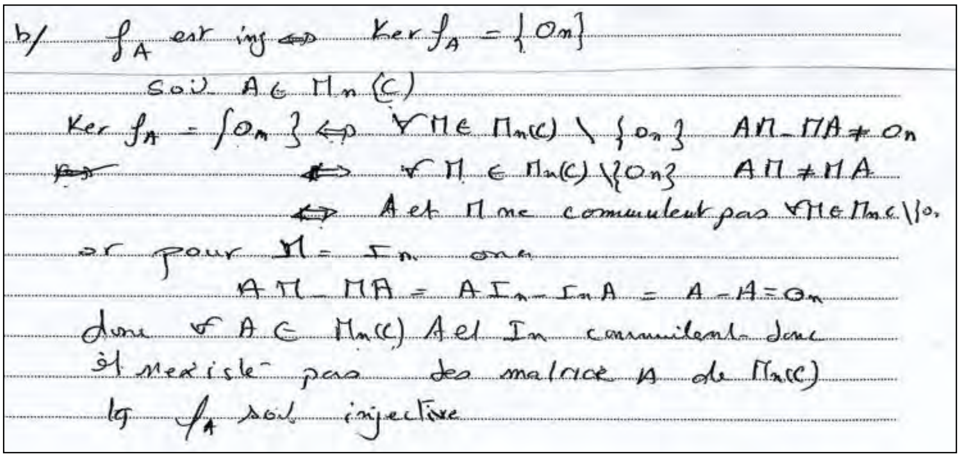
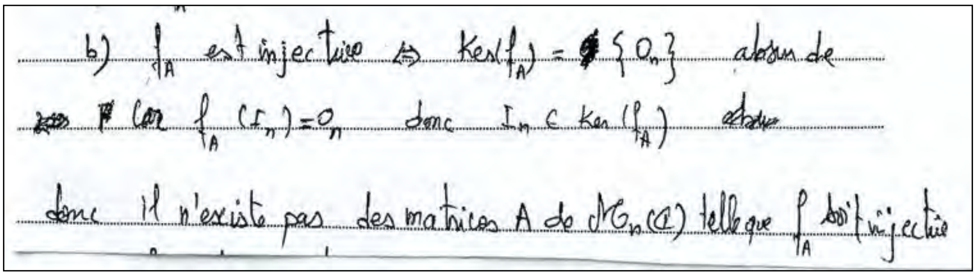

b/ f_A est inj $\Leftrightarrow$ $\ker f_A = \{0_n\}$
soit $A \in M_n(\mathbb{C})$
$\ker f_A = \{0_n\} \Leftrightarrow \forall M \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{0_n\}$ $AM - MA \neq 0_n$
$\Leftrightarrow \forall M \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{0_n\}$ $AM \neq MA$
$\Leftrightarrow$ A et M ne commutent pas $\forall M \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{0_n\}$
or pour $M = I_n$ on a
$AM - MA = AI_n - I_nA = A - A = 0_n$
donc $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$ A et I_n commutent donc
il n'existe pas des matrice A de $M_n(\mathbb{C})$
tq f_A soit injective

***Figure 15** – Production 15, Tâche T_4*

L'étudiant, ici, n'a pas exploité le résultat de la question 2-a. Il a effectué une nouvelle recherche qui l'a ramené finalement à utiliser $f_A(I_n)$.

Réponses correctes de type C-

Dans ce type de réponses les productions manquent de précision au niveau de la rédaction, comme dans l'exemple suivant :


b) f_A est injective $\Leftrightarrow$ $Ker(f_A) = \{O_n\}$ absurde

car $f_A(I_n) = O_n$ donc $I_n \in Ker(f_A)$ absurde

donc il n'existe pas des matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ telle que f_A soit injective

Figure 16 *– Production 16, Tâche T_4*

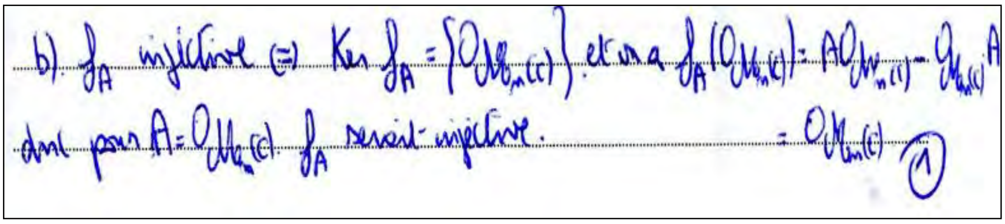
Ici, la quantification, qui constitue un élément clé du raisonnement par l'absurde, est implicite.

Réponses fausses

Sur 17 réponses fausses, 13 étudiants sont arrivés à reformuler convenablement la question en terme de noyau ou en utilisant la définition générale de l'injectivité. C'est dans la gestion et/ou l'interprétation de la situation entraînée par la formulation donnée que les étudiants ont échoué. La plupart d'entre eux se sont heurtés à des difficultés pour distinguer les statuts des matrices en jeu. Pour les 4 autres réponses fausses, les étudiants ne sont pas arrivés à traduire correctement l'injectivité de f_A .

Nous donnons ci-après des exemples de chacun de ces deux types de réponses :

Exemple 1

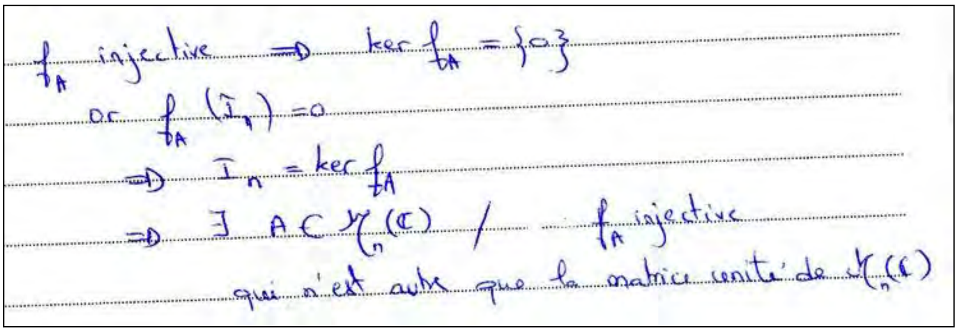

b). f_A injective $\Leftrightarrow$ $Ker\, f_A = \{O_{M_n(\mathbb{C})}\}$ et on a $f_A(O_{M_n(\mathbb{C})}) = AO_{M_n(\mathbb{C})} - O_{M_n(\mathbb{C})}A$

donc pour $A = O_{M_n(\mathbb{C})}$ f_A serait injective. $= O_{M_n(\mathbb{C})}$ 1

Figure 17 *– Production 17, Tâche T_4*

Ici, l'étudiant s'est contenté de vérifier que O_n est un élément du noyau. Dans sa conclusion, il a traité A et O_n sous le même statut.

Exemple 2


f_A injective $\Rightarrow$ $\ker f_A = \{0\}$

or $f_A(I_n) = 0$

$\Rightarrow I_n = \ker f_A$

$\Rightarrow \exists\, A \subset M_n(\mathbb{C})$ / f_A injective

qui n'est autre que la matrice unité de $M_n(\mathbb{C})$

Figure 18 *– Production 18, Tâche T_4*

Dans cette production, la stratégie 1 est correctement implémentée. À la fin de son travail, l'étudiant a pris I_n pour la matrice A, ce qui indique des confusions entre le statut de A et celui de I_n. Remarquons par ailleurs le glissement dans la notation : $\in / =$.

Exemple 3

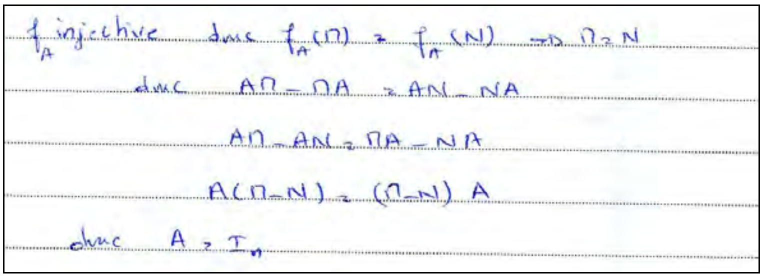


Figure 19 *– Production 19, Tâche T_4*

Dans cette réponse l'étudiant a utilisé une caractéristique ensembliste de l'injection. Dans ce cas, le problème se ramène à chercher la (ou les) matrice(s) A pour lesquelles l'égalité *(i)* $A(M-N)=(M-N)A$ n'est vérifiée que pour $M=N$; ceci quelles que soient les matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Or dans sa conclusion, l'étudiant s'est contenté de donner un cas pour lequel l'égalité *(i)* est vérifiée indépendamment de la propriété d'injectivité qu'il étudie, ce qui indique une confusion dans les rôles que jouent les matrices A, M et N dans l'égalité *(i)*. Il semble aussi que l'absence de quantification n'a pas permis à l'étudiant de s'approprier la tâche qu'il devait réaliser.

Exemple 4

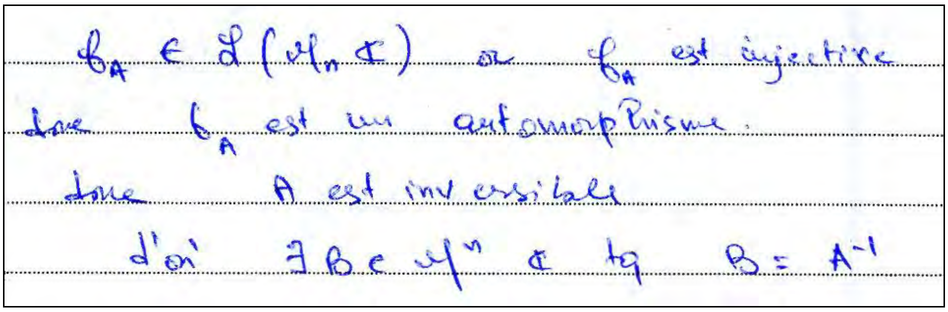


Figure 20 *– Production 20, Tâche T_4*

Dans cette réponse, il y a un glissement d'objets A/f_A. L'étudiant considère que A est la matrice de l'application linéaire f_A.

Commentaire pour la question 2-b

Pour cette question, bien que la plupart des étudiants (84%, toutes catégories de réponses confondues) aient donné des formulations correctes à la notion d'injection et que la résolution soit supposée facilitée par la réponse à la question 2-a, des difficultés au niveau de la gestion des ostensifs mis en jeu dans les formulations symboliques données ont empêché un bon nombre d'étudiants de terminer leur travail. L'insuffisance dans l'appropriation des formulations exprimées, la confusion des statuts des matrices mises en jeu et la négligence de la quantification ont entraîné un flou chez les étudiants à propos de ce qu'ils doivent chercher et de la manière avec laquelle ils doivent gérer la situation. D'un autre côté, nous dénombrons 22 étudiants sur 43 (soit plus de 51%, y compris ceux qui ont donné des réponses correctes) qui ne sont pas arrivés à tirer profit de la question 2-a et à effectuer une déduction. Ceci montre des difficultés dans la mise en relation des données de l'exercice. Par ailleurs, comme dans les questions précédentes, nous remarquons une fragilité dans l'usage du langage ensembliste et symbolique (glissements de notations : $\in/=$, $\Rightarrow$/donc, $\Rightarrow/=$,...), ce qui, dans certains cas, a influé sur les réponses des étudiants.

VI. ANALYSE GLOBALE ET CONCLUSION

L'analyse des réponses des étudiants aux différentes questions du test montre tout d'abord que les savoirs en jeu dans l'exercice (sous-espace vectoriel, application linéaire, injection) sont, dans leur ensemble, convenablement appris. Les étudiants montrent des capacités à mobiliser ces savoirs dans leurs réponses. En atteste les manières avec lesquelles les questions ont été abordées par les étudiants, les reformulations données aux différentes notions et les techniques choisies pour la réalisation des tâches données. Néanmoins, cette disponibilité des connaissances s'est avérée insuffisante chez bon nombre d'étudiants pour permettre de produire des réponses correctes. Un obstacle majeur rencontré réside dans les difficultés de gestion du formalisme en jeu dans l'exercice. Ceci nous amène à nous interroger sur les raisons pour lesquelles de bons étudiants, suivant un enseignement spécialisé de mathématiques, se trouvent perturbés par un formalisme et des écritures symboliques a priori banales et éprouvent des difficultés à mettre en œuvre les connaissances apprises. L'une des raisons qui semble être à l'origine de cette situation concerne les choix institutionnels relatifs à l'enseignement des notions et du langage ensemblistes et plus généralement, du formalisme mathématique dans les institutions ES et CPS1. En effet, l'étude des rapports institutionnels au formalisme mathématique, et plus particulièrement celui lié aux notions ensemblistes fonctionnelles dans les institutions ES et CPS1, effectuée dans le cadre de notre thèse[5], a mis en évidence une rupture et un dysfonctionnement dans les environnements praxéologiques relatifs à l'enseignement des dites notions dans la transition ES/CPS1.

Ainsi, dans l'institution du secondaire, malgré la présence des notions ensemblistes dans le curriculum et la nécessité de leur usage pour le développement de divers thèmes d'étude, notamment ceux liés à l'étude des transformations géométriques, l'institution ES recommande de ne pas considérer ces notions comme un objectif d'apprentissage, de les introduire au gré des besoins et de ne pas s'attarder sur leur aspect théorique. L'analyse des documents d'enseignement officiels (programmes, manuels officiels[6] et sujets de baccalauréat) des différentes classes de lycée[7] a montré que les praxéologies mathématiques (PM) consacrées à l'étude des notions ensemblistes fonctionnelles sont caractérisées par une dominance de PM ponctuelles et rigides (Bosch et al. 2004), dont la mise en œuvre par les élèves est essentiellement axée sur le bloc pratico-technique. En ce sens que la plupart des techniques associées à ces PM sont routinières et stéréotypées et leur réalisation ne nécessite pas de se référer aux blocs technologico-théoriques, de comprendre le sens porté par le symbolisme manipulé ou de connaître les règles de son usage. Ceci amène souvent les élèves à développer des mécanismes de travail peu réfléchi à propos de l'usage de ces techniques ainsi que de la manipulation du symbolisme qui y est mis en jeu. Dans l'institution CPS1, en revanche, les notions ensemblistes et le vocabulaire et symbolisme associés sont considérés comme des outils fondamentaux pour les mathématiques du supérieur, et il est attendu que les étudiants apprennent à les maîtriser et à les utiliser à bon escient. Dans cette perspective, les PM utilisées dans CPS1[8] pour l'étude et la mise en œuvre des dites connaissances sont généralement locales et interviennent dans les exercices et problèmes essentiellement au niveau technologico-théorique. Le choix et la réalisation des techniques associées sont considérés par l'institution comme des activités secondaires jouant un rôle auxiliaire dans l'apprentissage des théories et sont de ce fait laissés le plus souvent à la charge des étudiants.

[5] Voir Najar (2010 & 2011).

[6] Dans l'institution ES tunisienne, un seul manuel scolaire est autorisé par le ministère de tutelle pour l'utilisation en classe. Ce manuel (dit « officiel ») traduit, dans une certaine mesure, le point de vue de l'institution quant à l'application et la mise en œuvre des programmes officiels dans l'enseignement.

[7] L'enseignement au lycée comprend 4 classes. Elles concernent des élèves âgés de 15 à 19 ans.

[8] Étudiées à travers l'analyse des fiches de travaux dirigés des deux classes concernées par notre recherche.

Néanmoins, l'importance accordée à l'enseignement des connaissances ensemblistes dans CPS1 ne semble pas avoir permis aux étudiants de répondre à l'attente de l'institution dans ce domaine et de surmonter les difficultés d'apprentissage concernant ces connaissances. Ceci apparaît clairement à travers les difficultés et obstacles rencontrés par les étudiants dans leur résolution de l'exercice analysé ci-dessus. Une première raison qui pourrait être à l'origine de cette situation provient, semble-t-il, de la sous-estimation par l'institution CPS1 du travail d'ordre technique concernant l'usage des connaissances ensemblistes et l'insuffisance dans le travail d'intégration des PM ponctuelles étudiées dans ES dans les PM locales étudiées dans CPS1. Ceci rend difficile la mise en évidence du lien entre les niveaux technique et technologique dans le fonctionnement des connaissances en jeu et accroît la soudaineté des changements auxquels les étudiants sont confrontés au début du supérieur et auxquels ils semblent avoir du mal à s'adapter. Une deuxième raison provient du fait que le langage ensembliste, et plus généralement le symbolisme mathématique, ne sont généralement pas considérés comme un enjeu explicite d'enseignement (dans ES comme dans CPS1), on suppose souvent que leur usage par les élèves et étudiants va de soi s'ils ont compris les notions qui y sont engagées et qu'il n'est pas nécessaire de leur attacher une attention particulière. Dans le même contexte, l'enseignement des connaissances en logique dans CPS1 se limite généralement à la présentation du vocabulaire logico-mathématique et de certaines propriétés et lois logiques (lois de De Morgan, interversion des quantificateurs…), ce qui ne semble pas suffire pour permettre aux étudiants de comprendre le mode de fonctionnement des connaissances en logique et de maîtriser le contrôle de la structure logique des énoncés mathématiques. Pour surmonter ces difficultés, Durand-Guerrier et Arsac (2003) estiment qu'il est impératif de mettre sur pied un enseignement plus systématique des règles de raisonnement prenant en compte

> …de manière explicite l'articulation entre les aspects syntaxique et sémantique qui est au cœur de l'activité mathématique… (op. cit., p. 334)

Les points que nous venons de soulever montrent qu'à l'entrée à l'université, l'institution du supérieur laisse à la charge des étudiants l'acquisition d'un complément de connaissances permettant l'articulation entre les volets techniques et théoriques des praxéologies mathématiques étudiées et l'intégration des PM disponibles (ou préalablement étudiées dans ES) dans des PM locales introduites dans le supérieur. Et ceci, soit par des efforts personnels, soit par des aides à l'étude, soit encore en s'appuyant sur le facteur temps. Or, pour Bosch et al. (2004), on ne peut attendre des étudiants qu'ils construisent spontanément par eux-mêmes des praxéologies mathématiques relativement complètes permettant la mise en œuvre et l'articulation des blocs pratiques et technologiques et leur accordant plus d'autonomie dans le choix des techniques et des représentations sémiotiques. Cette construction, selon les auteurs, doit être prise en charge par une institution d'enseignement. Ceci soulève le problème des nécessités d'apprentissage que les apprenants ne semblent pas pouvoir acquérir par des efforts personnels et que des actions didactiques au niveau de l'enseignement s'avèrent nécessaires pour favoriser leur apprentissage. Castela (2007 p. 180) a relevé l'existence de telles nécessités d'apprentissage chez de bons élèves de Première S[9] qui, malgré leur performance, se trouvent désarmés devant des tâches de résolution de problèmes exigeant initiative, adaptabilité et inventivité. Dans l'objectif de décrire les besoins d'apprentissage qui font défaut et prouver leur nécessité pour la réussite des élèves, Castela (2008), adoptant le modèle des organisations praxéologiques de Chevallard (1998), distingue au niveau de la technologie de toute praxéologie mathématique intervenant dans un problème deux composantes, respectivement théorique et pratique. La composante théorique d'une technologie assure la validité de la technique utilisée. Quant à la composante pratique, elle correspond à ce que

[9] deuxième année de lycée, option scientifique, 16-17 ans. (Il s'agit du système d'enseignement français).

certains mathématiciens considèrent comme *a mathematical folklore*, c'est-à-dire certains savoirs très ancrés dans l'expérience, permettant de choisir, de mettre en œuvre, de piloter la technique (Ibid.). Pour Castela, ces connaissances d'ordre pratique sont dotées d'une légitimité mathématique (par référence à l'activité du mathématicien) et se trouvent implicitement reconnues par l'institution éducative[10], mais celle-ci reste muette à leur propos et n'organise aucun dispositif visant explicitement à permettre leur apprentissage. Une mini-ingénierie expérimentée dans le cadre de notre thèse et se fondant sur l'hypothèse que :

> une action appropriée au niveau de l'enseignement pourrait favoriser l'acquisition de connaissances d'ordre pratique qui, bien qu'elles débordent le savoir théorique, s'avèrent nécessaires pour le fonctionnement du savoir enseigné

a permis d'obtenir des progrès chez les étudiants dans l'activité de résolution de problèmes, particulièrement en ce qui concerne l'exploitation des ressources sémiotiques mises en jeu dans les problèmes et la rédaction des solutions.

En guise de conclusion, notre recherche met en évidence, nous semble-t-il, le rôle crucial que jouent le monde ensembliste et le langage symbolique formel dans l'activité mathématique. Elle montre aussi la nécessité de prendre en charge de façon plus explicite l'enseignement des moyens de gestion des ressources sémiotiques et des connaissances d'ordre pratique en jeu dans l'activité mathématique, afin d'atténuer les difficultés auxquelles se heurtent les étudiants dans leur apprentissage des mathématiques, notamment lors du passage du secondaire au supérieur. Dans cette perspective, un grand travail, nous semble-t-il, reste à faire pour identifier de façon plus précise les connaissances pratiques nécessaires au fonctionnement du savoir mathématique, étudier les modes de leur intervention dans l'activité mathématique et déterminer les moyens et les modalités pouvant aider les apprenants à les acquérir.

[10] Vu que, selon Castela (2008), leur nécessité se manifeste dans les tâches d'évaluation et c'est leur absence qui est institutionnellement invoquée comme facteur d'échec.

RÉFÉRENCES

Bosch M., Fonseca C., Gascon, J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactiques des mathématiques* 24(2/3), 205-250.

Castela C. (2007) Les ressources autodidactes en mathématiques de très bons élèves de classes scientifiques. In Penloup M-C. (Ed.) (pp. 173-202) *Les connaissances ignorées, Approche pluridisciplinaire de ce que savent les élèves*. Paris : INRP.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2), 135-182.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'université d'été de la Rochelle, Juillet 1998* (pp. 91-118).

Chevallard Y. (1989) Le concept de rapport au savoir, rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, année 1988-1989*. Grenoble : Institut Fourrier. IMAG. 211-235.

Corriveau C. (2007) *Arrimage Secondaire-Collégial. Démonstration et formalisme*. Mémoire de Maîtrise en didactique des mathématiques. Université du Québec à Montréal.
http://ldm.math.uqam.ca/catalogue/memoires/pdf/M10123.pdf/view

Dorier J.-L. (Eds.) (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Durand-Guerrier V., Arsac, G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(3), 295-342.

Najar R. (2010) *Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire/Supérieur*. Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot-Paris 7. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00564191/en/

Najar R. (2011) Notions ensemblistes et besoins d'apprentissage dans la transition Secondaire/Supérieur. *Canadian Journal for Science, Mathematics, and Technology Education*. 11(2). Routledge, University of Toronto.