IDENTIFICATION D'OBSTACLES INHÉRENTS À L'APPRENTISSAGE DE L'ALGÈBRE ABSTRAITE – PRÉSENTATION D'UN CADRE THÉORIQUE

Ismaïl Régis MILI*

Résumé – L'apprentissage de l'algèbre abstraite semble correspondre, pour les étudiants de niveau universitaire ou collégial, à l'introduction d'une multitude de nouveautés conceptuelles. Afin de mieux comprendre les raisons de l'important taux d'échecs mesuré dans cette discipline, nous avons tenté de regrouper les obstacles ou les difficultés rencontrés en quatre familles. Sur la base d'un exemple tiré d'une séquence d'introduction à l'algèbre abstraite, nous relèverons que, en plus de devoir franchir un cap dans le niveau d'abstraction requis, les étudiants sont, souvent pour la première fois de leur parcours, confrontés à une théorie axiomatique développée comme telle, à des définitions de type essentiel dont l'emploi va parfois à l'encontre du sens usuel, à l'absence de représentation graphique ainsi qu'à un processus de preuve formelle pour lequel ils n'ont été jusque-là que peu entraînés.

Mots-clefs : algèbre, abstraction, obstacle, définition, démonstration

Abstract et Learning abstract algebra seems to be related, for undergraduate and college students, to an introduction to a vast number of conceptual novelties. In order to better understand the reasons for the high failure rate in this field of study, we have classified the difficulties and obstacles encountered according to four categories. Based on an example from introductory exercises in abstract algebra, we found that, in addition to having to get past a step with regard to the level of abstraction required, students are, often for the first time, confronted with an axiomatic theory developed as such, to definitions of an 'essential' type that are used sometimes in contradiction with the usual meaning, with the absence of graphic representations, and also with formal proof processes for which they have not been sufficiently trained.

Keywords : algebra, abstraction, obstacle, definition, proof, formal proof

I. INTRODUCTION

Lors de leurs premières années de cursus universitaires, les étudiants des disciplines scientifiques dites fondamentales (mathématiques, physique, ...) seront amenés à suivre un cours d'algèbre qui aura pour objectif de les initier à une théorie centrale en mathématiques modernes : la théorie des groupes. L'importance de cette théorie relève certainement à la fois de ses applications pluridisciplinaires, de son caractère formel et, la démonstration y occupant une place de choix, de la rigueur structurante de sa manipulation.

C'est entre autres pour ces deux dernières raisons que les étudiants sont amenés à franchir un cap important dans le niveau d'abstraction et le degré de formalisme requis. Ces nouvelles sources de difficultés potentielles déroutent plus d'un étudiant, comme en témoignent l'importance du taux d'échec aux examens (Hazzan et Leron 1996 ; Dubinsky, Dautermann, Leron, et Zazkis 1994 ; Lajoie 2009) ainsi que l'insatisfaction ressentie et mesurée au sein de la communauté enseignante universitaire (Findell 2001).

Le caractère calculable, prédictif et explicatif de l'algèbre abstraite, ses critères stricts de cohérence interne et externe ainsi que la précision avec laquelle on peut circonscrire son domaine de validité permettent de considérer l'algèbre abstraite comme un modèle intra-mathématique, au sens de Dupin (1995). Elle consiste en effet en une théorie permettant de considérer plusieurs systèmes mathématiques comme des cas spéciaux de la même structure abstraite, plus générale. L'algèbre linéaire peut ainsi être vue comme un cas particulier de l'algèbre abstraite ; c'est la raison pour laquelle il est tout à fait possible de présenter d'abord

* Université de Montréal – Canada – ismail.mili@umontreal.ca

© Mili I. (2012) Identification d'obstacles inhérents à l'apprentissage de l'algèbre abstraite. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{e} siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 1016–1025). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

la seconde en citant la première comme exemple. Il s'agit par exemple de la voie traditionnellement choisie par les filières universitaires française et marocaine, alors que les cursus américains et brésiliens (entre autres) effectuent généralement un large tour d'horizon de l'algèbre linéaire et n'introduisent qu'ensuite la généralisation qui mènera à l'algèbre abstraite (Dorier 1997). C'est pourquoi, selon leur provenance, certains étudiants peuvent être directement confrontés à un formalisme assez radical sans avoir pu recourir au caractère « illustratif » de l'algèbre linéaire :

> la tradition [française voulant] qu'on introduise dès la première année d'université la théorie la plus générale (axiomatique) avec, en général, un fort ancrage dans les exemples géométriques ayant trait à l'algèbre linéaire. (Op. cité, p. 199)

De l'autre côté de l'Atlantique, dans le système d'éducation québécois, l'algèbre abstraite figure typiquement dans les premières années d'un programme universitaire de premier cycle en mathématiques pures comme l'illustrent les programmes d'étude de l'Université de Montréal (Université de Montréal 2011). Elle est parfois abordée en fin d'études collégiales, même s'il s'agit alors plus d'une initiative de certains enseignants qui choisissent d'aborder cette matière dans le cadre du cours d'algèbre linéaire — comme dans le cours NYC du programme en sciences de la nature (MELS 2003) — que d'une disposition du curriculum. Il semble en être de même pour d'autres parcours scolaires étrangers, notamment genevois (DIP 2006).

Et c'est en nous attardant de plus près à la place occupée par cette discipline au sein du curriculum que nous nous sommes aperçu, à l'instar de Harel (1989), que dans la plupart des curriculums, l'algèbre abstraite est probablement la première théorie axiomatique manipulée comme telle. Les principales sources de difficultés liées à l'apprentissage de l'algèbre abstraite résideraient ainsi, du moins en partie, dans le fait que les étudiants sont exposés pour la première fois à une telle vision des mathématiques (Findell 2001 ; Harel 1989 ; Dorier, 1997 ; Gallian 1990).

Ainsi, l'objectif général de notre recherche est d'effectuer une typologie des difficultés et des obstacles (au sens de Brousseau 1983) rencontrés par les étudiants lors de l'initiation à la théorie des groupes, avant d'étudier quelles seraient les éventuelles dispositions des étudiants les aidant à surmonter ces difficultés. Les objectifs particuliers de cette présentation seront de présenter les éléments de cette grille d'analyse sur la base d'une séquence d'introduction à l'algèbre abstraite d'une part et, d'autre part, d'expliquer à l'aide d'éléments théoriques les difficultés exprimées par des étudiants lors d'entrevues semi-dirigées.

II. PRÉSENTATION ET ILLUSTRATION DES ÉLÉMENTS THÉORIQUES

Afin d'introduire et de présenter les quatre principales familles de notre typologie, à l'origine développée à l'aide de recherches théoriques, nous nous baserons sur un exemple extrait d'une séquence didactique proposée à des étudiants de niveau collégial (Pfister 2008). Comme mentionné lors de l'énumération des objectifs de notre recherche, nous développerons ensuite plusieurs composantes pour chacune de ces quatre familles.

Tout au long de cette section, nous illustrerons cette grille à l'aide de commentaires d'étudiants de niveau collégial du CEGEP de Sherbrooke (Québec, Canada) à qui cette séquence d'introduction à la théorie des groupes avait été proposée en octobre 2006 et que nous avons rencontrés en entrevues semi-dirigées quelques jours après la remise des notes par l'enseignant (quatre équipes de deux étudiants chacune).

Le premier énoncé de cette séquence didactique va comme suit :

« Considérons l'ensemble $K_2 = \{0 ; 1\}$. Définir une opération d'addition et une opération de multiplication sur cet ensemble qui fassent de K_2 (muni de ces deux opérations) un corps ».

Un étudiant qui souhaite résoudre cet exercice devra dans un premier temps proposer un candidat et, dans un deuxième temps, vérifier que ce candidat satisfait les différentes propriétés nécessaires pour pouvoir être considéré comme un corps. Indépendamment de l'approche de résolution utilisée, cette activité nécessite par conséquent un recours aux définitions (qui constitueront le deuxième axe de notre cadre théorique) et à la validation (quatrième axe de notre cadre théorique). Enfin, le fait d'utiliser 0 et 1 en guise de symboles dont la signification diffère de celle à laquelle les étudiants sont jusque-là habitués — ils sont employés ici en tant qu'éléments neutres des deux opérations définies sur l'ensemble de référence et non comme les deux plus petits éléments de l'ensemble des nombres naturels — justifiera un détour par la sémiotique et l'étude des registres de représentations (troisième axe de notre cadre théorique).

Mais au-delà de ces éléments mathématiques et didactiques, ce qui déroutera au moment de la première lecture les étudiants rencontrés en entrevue, c'est le côté abstrait de cet énoncé : quelle est donc cette réalité à laquelle un tel énoncé correspond ? S'il ne consiste pas en un pur jeu de l'esprit, quelle situation concrète et réelle cet énoncé peut-il refléter ? Chaque équipe rencontrée en entrevue a en effet insisté sur le malaise ressenti, sur le manque de lien apparent entre cet exercice et une quelconque réalité. Comme le relevait une équipe :

> « Souvent, on peut rattacher, on peut voir des liens, mais ça… » (Equipe 7)

Pour pouvoir comprendre et expliquer ce désarroi, le premier axe de notre cadre théorique s'attardera donc sur la notion d'abstraction et sur les quelques éléments à notre disposition pour pouvoir mesurer celle-ci.

1. L'abstraction

Une première esquisse de la notion d'abstraction nous a été fournie par Aristote pour qui l'intelligence est l'activité de formation d'idées. L'intelligence découvre dans les choses sensibles leur nature même, c'est-à-dire la nature intelligible de la chose. Et c'est par un processus d'abstraction que l'on parvient à extraire l'intelligible des données de l'expérience sensible. Le rapprochement entre diverses observations et événements sera ainsi à la charge de la connaissance intellectuelle que l'on souhaite, afin de tenter d'expliquer fidèlement la « Réalité », la plus certaine et fidèle possible (Cleary 1985).

Aristote considère que cette abstraction, qui permet de « transformer » la détermination sensible en nature intelligible, est en fait le procédé fondamental de l'intelligence humaine. Toutes nos connaissances intellectuelles et nos idées sont abstraites et l'abstraction, vue comme procédé fondamental de l'intelligence humaine, permettra de classer les connaissances intellectuelles d'après leur degré de profondeur, c'est-à-dire d'après la distance qui sépare la réalité de l'objet de sa nature intelligible. Nous pouvons résumer en énonçant que l'abstraction est un procédé qui crée une distance avec la réalité et que l'abstrait est une mesure de cette distance.

Il semble donc naturel que ces étudiants, ne percevant aucune réalité en lien avec cet énoncé, le conçoivent comme parfaitement abstrait.

Cette analyse de systèmes a priori différents que permet l'algèbre abstraite renvoie également au travaux de Dreyfus (2002), qui voit en la généralisation un des trois processus servant à l'abstraction, les deux autres étant la synthèse et la représentation. Alors que la généralisation consiste à dégager ou induire à partir de cas particuliers, d'identifier des situations communes ou d'étendre des domaines de validités (Dreyfus 2002, p. 35) la synthèse tend à combiner ou composer des parties de telle manière qu'elles forment un tout, une entité.

La recherche de régularité entre différents systèmes mathématiques que l’on retrouve au sein de l’algèbre abstraite reviendrait ainsi à pousser l’abstraction au sens d’Aristote et de Dreyfus à son paroxysme. La notion de groupe y est d'ailleurs soulignée par Dreyfus comme étant un bon exemple d'abstraction car elle permet de « montrer à l'étudiant qu'il est possible de décrire de manière unifiée une vaste quantité de situations préalablement considérées de manière séparée et indépendante les unes des autres » (traduction libre, ibid., p. 37).

Nous pouvons ainsi mieux comprendre les réactions de surprise de certains étudiants à qui cet énoncé avait été proposé.

> « C'est très abstrait […] il n'y a pas de réponses claires. » « C'est vrai, on s'dit. T'es-tu malade, je serai jamais capable de faire ça, y a-tu vraiment quelque chose à comprendre ? » « Pour créer de l'intérêt [à l'exercice], il aurait fallu un contexte bien concret. Il aurait pu mettre un contexte comme faire une situation. Susciter un intérêt dans la question tout court. « (Equipe 1)

> « J'ai lu ça et je n'ai rien compris. Il a vraiment fallu que je fasse un travail de recherche pour pouvoir le comprendre. Mais, a priori, il n'y avait rien dans ma tête, je ne savais pas par où commencer ou quoi que ce soit. […] On rencontre beaucoup de problèmes sur toute l'abstraction qu'on doit faire. » (Equipe 3)

Toutefois, la définition qu’Aristote nous fournit de l’abstrait, correspondant à une évaluation de la distance entre l’objet et la réalité, demeure intrinsèque à l’objet et indépendante de celui qui le manipule, ce qui relève d’un intérêt limité pour une étude didactique. Dubinsky (1991) y remédie à l'aide du cadre APOS en proposant une mesure qui prend en considération l’élève, ses conceptions et ses productions. Partant de l'hypothèse théorique selon laquelle toute conception mathématique d'un étudiant peut être comprise en tant qu'action, processus, objet ou schéma (d'où l'acronyme APOS), le cadre proposé permet ainsi d'inclure l'individu au sein de cette mesure de l'abstrait en catégorisant les conceptions des étudiants et non plus strictement les objets mathématiques eux-mêmes.

En référence à la notion d’abstraction réflexive de Piaget qui distinguait les conceptions figuratives (qui se réfèrent à un état momentané et statique) des conceptions opératives (qui prennent en considération les transformations), les conceptions en action et en processus sont d’ordre dynamique ; celles en objet et en schéma sont quant à elles plus d’ordre statique. Plus précisément, Dubinsky qualifie de conception en processus celle d’un étudiant qui considère un concept mathématique comme une entité n’étant que potentielle, dont l’existence nécessite une séquence d’actions.

Un saut ontologique important et souvent délicat appelé *encapsulation* permet ensuite de distinguer une conception en processus d’une conception en objet. Comme nous l’avons déjà souligné, le passage de l’une à l’autre peut être assimilé à la conversion d’un mécanisme dynamique en une entité stable (qui pourra elle-même s'enrichir et être combinée avec d'autres afin de former de nouveaux objets).

Un étudiant qui a une conception en objet d’un concept mathématique peut l’imaginer dans sa globalité et agir dessus avec un haut degré d’habileté, notamment à l’aide d’actions ou de processus. La notion mathématique est alors considérée comme une entité « solide » ; ceci permet entre autres de l’examiner sous différents angles, d’analyser ses relations avec d’autres notions mathématiques et de lui appliquer des opérations. Pour reprendre les mots de Sfard (1991),

> concevoir une entité mathématique en objet signifie être capable de s’y référer comme s’il s’agissait d’une chose réelle, une structure statique, existant quelque part dans l’espace et le temps. Cela signifie aussi : être capable de reconnaître l’idée d’un simple coup d’oeil et de la manipuler dans son entier, sans entrer dans les détails. (Op. cité, p. 4, traduction libre)

Sur le plan chronologique, même s'il existe quelques contre-exemples comme les notions géométriques « pour lesquelles les représentations graphiques statiques apparaissent très naturelles et qui peuvent probablement être considérées de manière structurelle avant même qu'une conscience complète de descriptions sous forme de procédure (conceptions opérationnelles) ne soit achevée, […] la majorité des idées émergent en tant que processus plutôt qu'en tant qu'objets » (Ibid, pp. 10-11).

De façon quelque peu paradoxale, ce passage du processus à l'objet peut être considéré, une fois complété, comme une réduction du degré d'abstraction : en se familiarisant avec le concept mathématique au travers de la réification, l'élève diminue la « distance » qui le sépare de celui-ci. Un sujet est donc d'autant moins abstrait que la conception de l'étudiant peut, au besoin, être évoquée en tant qu'objet ou schéma.

Sans surprise, la quasi totalité des étudiants rencontrés en entrevue avaient appréhendé les concepts mathématiques mis en jeu dans la séquence didactique comme des processus. En effet, la plupart ne savaient comment partir, quelle était la première étape de la démarche de résolution, du processus... Seul un étudiant parmi les huit a tenté de percevoir le concept de corps dans sa globalité, d'en identifier les caractéristiques et a donc cherché, sans le verbaliser explicitement, à en modifier sa conception au travers d'une encapsulation :

> En réfléchissant, je me dis : je suis face à telle situation avec tel ensemble. Est-ce que c'est un corps, comment je dois faire pour déterminer que c'est un corps, etc. (Equipe 3)

Nos entrevues ont également mis en avant l'immense difficulté des étudiants à se détacher des symboles et de leur signification usuelle. La présence de 0 et de 1 laissait présager un exercice mettant en jeu les nombres naturels, avec tout ce que cela peut inclure comme habitudes chez ces étudiants. Mais le fait que 1+1 puisse égaler 0 dans l'ensemble a semblé complètement aberrant, loin de toute réalité. Attribuer à ces symboles une signification autre que « les deux plus petits éléments des nombres naturels » relevait de la pure fiction.

> Là où le cours, je crois, nous a servi beaucoup plus, ça a été pour le … disons, les symétriques pour les neutres, des trucs pour l'ensemble {0 ; 1} où 1+1 doit donner 0. C'est quelque chose de tout à fait aberrant. (Equipe 3)

Cette similitude apparente semble donc plutôt avoir handicapé les étudiants. Ainsi, l'introduction de l'algèbre abstraite par les nombres et les ensembles numériques usuels, si elle permet une certaine facilité dans la mise en contexte des activités didactiques, risque néanmoins de renforcer l'idée que seul les ensembles numériques permettent de construire des structures algébriques. À ce sujet, Lajoie (2009) observe en effet que « les étudiants ont non seulement un nombre restreint d'exemples de groupes en tête mais qu'ils réfèrent surtout à des exemples de groupes de nombres » (Op. cité, p. 241).

Cette familiarité aurait une incidence sur la compréhension du sujet lui-même. En effet, les groupes de nombres « ne sont manifestement pas les meilleurs pour extraire la définition d'un groupe, en particulier parce qu'ils possèdent plusieurs propriétés additionnelles, comme la commutativité, mais aussi parce que les lois d'addition et de multiplication sur les nombres sont toujours associatives, quelques soient les ensembles sur lesquels elles sont définies » (Lajoie 2009, p. 241). En ce sens, comme le remarque Hazzan (1999), les groupes de permutations et les groupes de transformations géométriques d'un polygone régulier seraient plus typique d'un groupe général. Il semble alors pertinent de recommander le développement et l'élaboration de séquences didactiques destinées à l'introduction de l'algèbre abstraite recourant également à des structures algébriques non numériques.

2. *Les définitions*

Dans notre exemple, l'étudiant doit donc, lors de la résolution, proposer un candidat avant de vérifier que ce dernier satisfait les différentes propriétés nécessaires pour pouvoir être considéré comme un corps. Comme lors de la plupart des activités algébriques, se référer à la définition (de corps en l'occurrence) devient indispensable.

La raison de notre intérêt pour les définitions réside toutefois dans la différence d'usage qui en est fait entre le langage courant et le langage mathématique. Dans le premier, les définitions apparaissent comme limitatives et abréviatives alors que dans le second, elles cherchent plutôt à ôter des barrières, notamment à l'aide d'une identification et d'une manipulation des caractéristiques universelles des objets et système (Findell 2001). Comme le souligne Ouvrier-Buffet (2003),

> le langage courant préfère les définitions exclusives : un carré n'est pas un rectangle et un parallélogramme n'est pas un trapèze. En mathématiques, au contraire, on adopte toujours des définitions inclusives et ainsi, on considère un parallélogramme comme un cas particulier de trapèze, un rectangle est un parallélogramme particulier, et par suite, un trapèze particulier. (Fletcher, in Ouvrier-Buffet 2003, p. 21)

Cette différenciation nous montre que toutes les définitions ne sont pas identiques, qu'elles ne remplissent pas toutes la même fonction et qu'il y a donc une distinction à faire entre les différents types de définitions pouvant être rencontrées au sein des manuels et des pratiques d'enseignement.

Les philosophes grecques de l'Antiquité distinguaient déjà deux grandes classes de définitions, issues de deux courants encore présents dans les enseignements et dans certains manuels scolaires (Ouvrier-Buffet 2003) :

- les définitions nominales qui consistent en une énumération de caractères connus suffisants pour distinguer une chose parmi d'autres ; elles pourraient donc posséder un caractère exclusif ;
- les définitions réelles ou essentielles qui expliquent la genèse de la chose notamment par la recherche des caractéristiques essentielles des objets. Elles laissent au terme défini son idée générale ordinaire et pourraient relever d'un caractère plus inclusif.

Les premières sont « le lieu où l'esprit rapproche des idées séparées jusqu'alors et en fixe le résultat par un mot ; ainsi, la définition se résume à une abréviation » (Ouvrier-Buffet 2003, p. 24). Les secondes participent à l'élaboration d'une théorie et sont ainsi soit évidentes soit à démontrer ; elles peuvent par conséquent être fausses et mises en discussion (ibid). De plus, un même concept peut se voir attribuer plusieurs définitions, chacune d'un type différent.

A titre d'exemple, le produit scalaire de deux vecteurs est souvent défini dans les manuels d'études collégiales par le produit de leur norme et du cosinus de l'angle formé à leur origine. Il est pourtant connu par certains mathématiciens comme une « forme bilinéaire symétrique définie positive ». Alors que la première définition est d'ordre plutôt exclusif, la seconde présente un caractère inclusif (car n'importe quelle forme bilinéaire symétrique définie positive est un produit scalaire) et peut donc être qualifiée d'essentielle. Il en est de même pour celles de corps et d'espace vectoriel généralement employées dans les manuels d'introduction à l'algèbre abstraite.

Alors que l'algèbre abstraite invite les étudiants à traiter avec des définitions essentielles, cet exemple illustre que, d'une certaine manière, ceux-ci semblent jusque-là avoir plutôt manipulé des définitions nominales. En effet, notre recension des définitions dans différents manuels du secondaire et du collégial de l'école québécoise a mis en avant que la très grande majorité des définitions employées en mathématiques dans les études pré-universitaires étaient de nature nominale.

Ce glissement entre les définitions essentielles et nominales permettrait, du moins en partie, d'expliquer quelques-unes des difficultés reliées aux concepts de groupes et d'axiomes de groupes recensées par Lajoie (2009). Parmi elles, le manque de discernement par les étudiants des propriétés essentielles des groupes, l'incapacité à délimiter un ensemble de conditions permettant de définir un groupe (i. e. à tenir compte des quatre axiomes de groupe, retrouver la définition, etc.), à considérer des transformations géométriques comme des éléments d'un groupe (et ce à cause d'un trop grand attachement aux ensembles de nombres). Ou encore, de manière plus générale, les difficultés à concevoir le groupe présenté abstraitement, autrement qu'en termes numériques.

De plus, l'usage et le recours aux définitions formelles ne semble pas être la norme. À ce sujet, Tall et Vinner (1981) observent que les étudiants privilégient plutôt des « représentations » sans forcément faire usage des définitions « formelles ». Petit à petit, les étudiants semblent même ne plus avoir recours à la définition. En d'autres termes, malgré leur possible coexistence, l'image d'un concept mathématique (ou la représentation que l'on s'en fait) tend à devenir dominante : elle l'emportera au fur et à mesure de l'apprentissage sur la définition du dit concept. En outre, une définition formelle n'est pas toujours antérieure à l'étude d'un concept : beaucoup de notions abordées en mathématiques sont rencontrées sous une forme ou une autre avant d'être formellement définies. C'est une des raisons pour lesquelles une structure cognitive complexe semble exister dans l'esprit de chacun, produisant une large variété d'images mentales personnelles lorsque le concept est évoqué. À vrai dire, « une grande partie des concepts régulièrement utilisés ne sont en fait pas définis de manière formelle ; on apprend à les reconnaître par expérience et par leur utilisation dans des contextes appropriés » (Tall et Vinner 1981, p. 151, traduction libre).

Ainsi, parce qu'ils n'en ont jamais vraiment pris l'habitude ou parce qu'ils n'ont que rarement été confrontés à des situations dans lesquelles leur image du concept ne fonctionnait pas correctement, l'emploi et le recours systématique aux définitions, nécessaires à l'étude de l'algèbre formelle, n'en deviendraient que plus compliqués pour nos étudiants.

3. Les langages et les registres de représentations

Ce recours à la définition n'est pas exclusif aux objets mathématiques. Comme c'est le cas dans notre énoncé de référence, les opérations sur ces objets demandent aussi fréquemment à être définies. Habituellement, ces opérations seront représentées à l'aide des symboles usuels. Le risque d'assister à ce que Lajoie (2009) appelle une contamination sémantique sur les symboles est donc important.

En effet, lorsque l'énoncé demande de construire deux opérations permettant de faire de l'ensemble K_2 un corps, le solutionnaire mentionne que 1+1 devra être égal à 0. À l'évidence, le symbole + n'est ici pas à prendre dans son acception usuelle, mais bien dans celle relative à l'étude de sa structure de corps. Pourtant, parce que le symbole + ne possédait jusque-là qu'une seule et unique signification pour les étudiants, ceux-ci lui avaient attribué un sens erroné, allant jusqu'à insister en entrevue pour que 1+1 vaille 2.

> « Mais t'sais, t'aurais pensé à faire 1+1, et ben tiens je vais mettre 0 ? […] Comment tu penses d'égaler 1+1 avec 0 » (Equipe 3)

Cet exemple illustre que s'il est possible d'utiliser des symboles identiques pour désigner deux entités pourtant différentes, de recourir à un ancien système de symboles pour représenter un concept pourtant neuf dans les connaissances des étudiants, on court néanmoins le risque d'en entremêler toutes les significations possibles.

Dans son étude sur les registres de représentations sémiotiques, Duval (1995) avait déjà conclut qu'il est capital pour la compréhension en mathématiques qu'on soit apte à effectuer la distinction entre un objet et sa représentation et qu'on ne peut s'approprier l'objet sans en maîtriser quelques-unes de ses représentations (ou, pour reprendre sa formulation originale, qu'« il n'y a pas de noésis sans sémiosis »).

Or, dans le cas de l'algèbre abstraite en général et de notre énoncé de référence en particulier, les représentations originales semblent manquer. Comme le souligne une étudiante rencontrée en entrevue qui ne savait pas trop comment aborder l'exercice :

> « Parce que moi, à chaque fois que je comprends pas un problème, je prends une feuille, je dessine des quelque chose, t'sais… Pis même avec les vecteurs, quand je comprends rien, je fais des axes, je dessine les vecteurs et puis là, à un moment donné, je me dis : « OK ! » Mais là, je savais vraiment pas quoi dessiner ; si il y avait quelque chose qui se dessinait ». (Equipe 6)

Ainsi, alors que les représentations graphiques ont fortement été mises à contribution auparavant dans le curriculum, notamment lors de l'étude des fonctions, le langage graphique (au sens de De Serres et Groleau 1997) semble presque absent de la plupart des séquences didactiques d'algèbre abstraite que nous avons pu consulter. Les transitions entre les différents modes de représentation ne peuvent donc s'effectuer qu'entre les langages naturel et symbolique. Les importantes difficultés observées chez les élèves dans la maîtrise de ce dernier risquent ainsi de ne prendre que plus d'ampleur.

4. *La démonstration*

Comme nous l'avons déjà soulevé, la dernière phase de résolution de l'exercice consiste en une validation. Après avoir proposé un candidat, l'étudiant devra s'assurer que celui-ci satisfait les propriétés requises d'un corps. Là encore, les entrevues nous ont appris que cette étape n'allait pas de soi pour les étudiants :

> « Une fois qu'on avait compris le corps, il fallait appliquer au problème et le démontrer et c'est ça qui a été super dur. » « Il [le prof] veut tout qu'on prouve. Prouver quelque chose d'évident, c'est pas utile. 0 = 1 ? » « Quand c'est évident, tu sais pas comment le démontrer parce que c'est évident... » « En fait, il faut justifier les étapes de notre démarche. Mais il n'y a rien qui vient de même pour la justification ». (Equipe 1)

Remarquons déjà que, pour ce qui est de l'algèbre abstraite, les preuves principalement admises et présentées dans les manuels sont de type inférentiel et s'appuie sur des définitions ou des propriétés souvent explicites. Elles ont pour but de prouver et non de convaincre. En référence aux niveaux de preuve de Balacheff (1988), elles sont de nature intellectuelle et se situent plus au niveau du calcul sur les énoncés.

Pourtant, au Québec du moins, l'étudiant, au sortir du secondaire, n'a pas encore été vraiment confronté aux principaux obstacles et difficultés inhérents à l'apprentissage de la preuve. C'est du moins une des conclusions de l'analyse de l'emploi de la preuve en géométrie dans les manuels effectuée par Tanguay (2002). Cette étude nous révèle que le recours à la déduction ou à la preuve se cantonne d'abord à la géométrie avant de gagner petit à petit l'algèbre (mais toujours par l'entremise de la géométrie). De plus, Tanguay y relève que l'étape de la pensée déductive formelle n'est que rarement présentée au sein des manuels (7%) et que « les concepteurs [de manuels] semblent réfractaires aux longues chaînes déductives complexes et suggèrent plutôt des problèmes dont la solution ne combine qu'un nombre restreint de résultats apparentés » (ibid, p. 373).

La notion de démonstration n'apparaissant officiellement que pour le dernier des trois cours de mathématiques obligatoires du programme d'étude collégiale en science de la nature (MELS 2003), il semble légitime de croire que les étudiants, au moment de l'introduction de l'algèbre abstraite, ne possèdent qu'une maîtrise partielle de ses procédés et de ses objectifs. Pourquoi prouve-t-on ? Et quelles sont les techniques à notre disposition pour prouver quelque chose ? De plus, à y voir quelque chose de technique, de procédural, on risque de perdre de vue certaines intentions de la démarche de preuve, notamment celle d'assurer une cohérence interne à la théorie étudiée (Cyr 2001). On peut donc supposer que, privés de cette motivation, les étudiants s'exposent à une incompréhension des consignes et des attentes de l'enseignant.

III. CONCLUSION

L'apprentissage de l'algèbre abstraite semble correspondre à l'introduction d'une multitude de nouveautés pour les étudiants, que nous avons regroupées en quatre familles d'obstacles ou de difficultés : en plus de devoir franchir un cap dans le niveau d'abstraction requis, les étudiants sont, souvent pour la première fois de leur parcours, confronté à une théorie axiomatique développée comme telle, à des définitions essentielles dont l'emploi va parfois à l'encontre du sens usuel, à l'absence de représentation graphique ainsi qu'à un processus d'élaboration de preuves formelles pour lequel ils n'ont été jusque-là que peu entraînés.

En effet, une brève recension parmi deux manuels agréés de l'école secondaire québécoise et trois manuels d'algèbre et de calcul utilisés par les collèges québécois n'a relevé qu'une très faible présence de preuves : une très petite proportion des résultats énoncés y sont prouvés et la plupart des preuves présentes dans les manuels d'algèbre concernent les résultats relatifs aux espaces vectoriels ou au calcul matriciel. Nous y avons également noté une quasi absence de définitions essentielles (ou de définitions basée sur le respect de plusieurs propriétés) à la fois au secondaire et au collégial. En algèbre, lorsque celles-ci sont présentes, elles se retrouvent principalement au sein des chapitres consacrés aux espaces vectoriels.

Lors des entrevues avec les étudiants, chaque équipe a fait part d'un certain malaise, d'une incompréhension des termes de l'énoncé, d'une incertitude quant aux attentes de l'enseignant et aux objectifs du problème. Quant aux différentes étapes de la démarche de résolution, elles leurs échappaient au point parfois de leur sembler hors de portée.

On assiste alors à un certain paradoxe : alors que l'enseignant pense proposer un problème bien défini (le but y est précis, les données initiales, contraintes et buts y sont énoncés de façon explicite et opérationnelle) qui pourra être traité en cherchant une décomposition en sous problèmes ou à l'aide d'une manipulation immédiate des variables ou des contraintes déjà clairement explicitées, l'étudiant en a une perception différente : il le conçoit souvent comme un problème mal défini. Or, un étudiant qui voit, dans un problème bien défini, un énoncé mal défini, risque de ne pas savoir « comment partir », comment agencer sa résolution, se mettant ainsi dans une situation qui peut être rapprochée de celle d'un novice, telle que décrite par Schoenfeld (1985). C'est donc à un comportement de novice, qui ne se soucie pas de vérifier sa solution et dont le processus de contrôle n'est que peu opérationnel, que nous nous attendons de la part d'un étudiant dans le cadre d'une initiation à l'algèbre abstraite.

RÉFÉRENCES

Balacheff N. (1988) *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*. Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Cleary J. J. (1985) On the Terminology of "Abstraction" in Aristotle. *Phronesis*, 30(1), 13-45.

Cyr S. (2001) Vers un enseignement signifiant de la preuve au secondaire. *Bulletin AMQ* 41, 19-27.

De Serres M., Groleau J.-D. (1997) *Mathématiques et langages* (Collège Jean-de- Brébeuf.). Montréal.

DIP (2006) *Plan d'étude cantonal*. Département de l'Instruction Publique du Canton de Genève.

Dreyfus T. (2002) *Advanced Mathematical Thinking Process*. Advanced Mathematical Thinking, Mathematics Education Library (Vol. 11, p. 25-41). Springer.

Dubinsky E. (1991) The Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematics. *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences*. New York : Springer-Verlag.

Dubinsky E., Dautermann J., Leron U., Zazkis, R. (1994) On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics* 27(3), 267-305.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Findell B. (2001) *Learning and Understanding in Abstract Algebra*. University of New Hampshire.

Harel G. (1989) Learning and teaching linear algebra: Difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics* 11, 139-148.

Hazzan O., Leron U. (1996) Students' Use and Misuse of Mathematical Theorems: The Case of Lagrange's Theorem. *For the Learning of Mathematics* 16(1), 23-26.

Lajoie C. (2009) *Un groupe en quête de théorie : un problème pour les étudiants en maths !* Montréal : Éditions Bande didactique.

Ouvrier-Buffet C. (2003) *Construction de définitions / construction de concepts : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Pfister N. (2008) Les différents auteurs d'une situation d'apprentissage par problème : un exemple. *Bulletin AMQ* 47(2), 25-43.

Schoenfeld A. (1985) *Mathematical Problem Solving*. New York : Academic Press.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.

Tall D., Vinner S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.

Tanguay D. (2002) Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie* 2(3), 371-396.

Université de Montréal (2011) *Programme des études de premier cycle* (UdM). Université de Montréal, Département de mathématiques et de statistique. Consulté le 15 mai 2011, http://dms.umontreal.ca/EtudesBacc/indexPremierCycle.html