LA RÉCURRENCE : CONCEPT MATHÉMATIQUE ET PRINCIPE DE PREUVE

Denise GRENIER*

Résumé – L'induction est reconnue comme un concept très fécond en Sciences. En mathématiques, le raisonnement par induction ou récurrence a la double spécificité de permettre la construction des objets et d'être un outil de preuve. Une étude didactique menée depuis de nombreuses années auprès d'étudiants scientifiques universitaires et d'enseignants de mathématiques révèle que cette double spécificité est mal comprise, voire absente de leurs conceptions, le concept étant réduit à une technique de preuve dont la légitimité est parfois questionnée. Nous donnerons des éléments d'analyse de ce phénomène et de ces effets. Puis nous proposerons des problèmes susceptibles d'améliorer la connaissance de ce concept.

Mots-clefs : récurrence, raisonnement, preuve, didactique, mathématiques

Abstract – Induction is acknowledged as a very fruitful concept in science. In mathematics, inductive reasoning can be used as a tool for constructing objects as well as a tool for proving statements. A didactic study, conducted over many years among university students and math teachers, has shown that this dual specificity is frequently misunderstood, or even absent from their representations : the related concept is reduced to a proof technique, the legitimacy of which is sometimes questioned. We will attempt to provide an analysis of this phenomenon and of these effects. We further suggest exercise sessions that might help to improve the understanding of the relevant concepts.

Keywords: induction, reasoning, proof, didactics, mathematics

I. L'INDUCTION EN MATHÉMATIQUES

En Sciences, le raisonnement inductif a pour objectif essentiel de généraliser à un ensemble d'objets une propriété constatée sur quelques objets particuliers. En mathématique, le raisonnement inductif ou « par récurrence » se différencie relativement aux autres sciences, en particulier aux sciences physiques, par sa validité intrinsèque permettant d'établir la preuve d'un résultat généralisateur. Citons H. Poincaré (1902) :

> L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est toujours en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.

L'induction mathématique s'applique à des ensembles particuliers relevant de l'axiome de Peano dit « axiome de récurrence » : « Tout ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément », équivalent à « Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ ».

II. LA RÉCURRENCE DANS L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE EN FRANCE

1. *Différents types de raisonnements dans les manuels et l'enseignement*

Une étude sur la transposition de la récurrence dans l'enseignement de fin de secondaire et de l'université montre que :

* Institut Fourier – Grenoble – France – denise.grenier@ujf-grenoble.fr

© Grenier D. (2012) La récurrence : concept mathématique et principe de preuve. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 1005–1015). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

− la récurrence n'est pas enseignée comme un concept, mais comme un « principe de raisonnement » ou un « type de preuve », raisonnement et preuve étant deux termes employés indifféremment ;

− la récurrence est répertoriée dans une typologie très répandue de preuves ou raisonnements, telle celle-ci :

> Raisonnement par implications (ou direct) / par équivalences / par l'absurde / par disjonction des cas / par contraposition / par contre-exemple / par récurrence.

Cette typologie pose de nombreuses questions. D'abord, elle risque d'inférer que chaque type de raisonnement est exclusif des autres. Or, dans un raisonnement « par récurrence », on procède souvent par implication « directe ». De même, dans un raisonnement « par l'absurde », on va tout aussi bien utiliser des raisonnements directs que des raisonnements par contraposition, ou encore un contre-exemple pour arriver à une contradiction. De plus, cette typologie cache la particularité du raisonnement par récurrence : un domaine d'application spécifique, les ensembles dénombrables ou nœthériens, le plus classique étant $\mathbb{N}$. Tout ceci provient nous semble-t-il d'une confusion entre ce qui relève de la syntaxe dans l'écriture d'une preuve et ce qui relève de la sémantique et de l'argumentation. Cette typologie très présente dans l'enseignement en France résiste aux changements de programme. Notre hypothèse est que c'est un outil didactique « efficace », au sens où elle permet d'enseigner la preuve et d'en évaluer la validité à sa conformité avec un schéma d'écriture désigné à l'avance. Ainsi, par exemple, démontrer que A implique B par un raisonnement « direct » consiste à partir des hypothèses A pour arriver à la conclusion B par des propriétés, théorèmes, données, etc.. Le raisonnement par « contraposée » est lui aussi un raisonnement direct sur des propositions reconstruites (Non B et Non A).

2. *Absurde, contre-exemple et récurrence*

Les raisonnements et preuves associées de types absurde, contre-exemple, récurrence ont en commun, nous semble-t-il, de nécessiter une plus grande vigilance sur ce que l'on construit. La question du vrai et du faux et *l'enjeu de vérité* y sont nécessairement présents à chaque étape. Dans une preuve par l'absurde, le schéma consistant à supposer à la fois A et non B pour arriver à une contradiction ou une phrase fausse induit de confronter à chaque étape les inférences faites. Un contre-exemple, quant à lui, devant vérifier les hypothèses et contredire la conclusion, celle-ci doit rester constamment présente. La preuve par récurrence sous sa forme la plus usuelle nécessite de comprendre la distinction entre la vérité d'une implication $A \Rightarrow B$ et la vérité de la proposition « A vraie $\Rightarrow$ B vraie », puisque la première peut permettre d'établir l'hérédité d'une propriété pour tout entier n alors même que cette propriété est toujours fausse.

Une conception très répandue chez les étudiants et certains enseignants est que le raisonnement par l'absurde est difficile, d'où son évitement dans le secondaire et même à l'université, attesté par une recommandation classique : « Dans tous les cas où un raisonnement direct est possible, on évitera le raisonnement par l'absurde ». Sauf que ce n'est pas toujours possible. En fait, le raisonnement par l'absurde n'est pas si difficile à faire comprendre si on s'appuie sur la logique « naturelle » :

> Prouver l'affirmation « si A est vraie, alors B est vraie » revient à prouver qu'on ne peut avoir à la fois A et non B. On suppose donc A et non B, et on en déduit une contradiction.

Une cause possible de cet évitement de l'absurde dans l'enseignement est que l'écriture d'une preuve sous forme « directe » est plus simple à schématiser. Une autre cause est peut-être que l'apprentissage de la preuve se fait d'abord en géométrie et en algèbre, domaines où les propriétés que l'on établit sont souvent des énoncés équivalents[1].

Dans une démarche de preuve, les points de vue déductif et inductif se situent à des moments différents et non linéaires. Le point de vue inductif est présent dans l'élaboration d'une conjecture ou l'étude d'hypothèses, lorsque la conclusion est à construire. Le point de vue déductif est prépondérant dans l'écriture de la preuve, quand il s'agit de rassembler des phrases vraies en passant de l'une à l'autre par des pas de déduction élémentaires jusqu'à la conclusion. Il en est de même pour les aspects syntaxique et sémantique : le passage d'une phrase à sa négation doit se faire parfois de manière purement syntaxique, parce que la sémantique de la phrase est complexe ; c'est le cas par exemple des emboîtements successifs de quantificateurs (quelque soit, il existe).

La récurrence met en jeu de manière imbriquée les points de vue déductif et inductif. Prenons un schéma classique de raisonnement par récurrence : il s'agit d'étudier si une propriété dépendant d'un entier n, notons-la $P(n)$, est vraie ou fausse, sans préjuger de sa véracité[2]. Souvent, l'étude pour quelques valeurs de n permet de faire une conjecture. Le cas qui nous intéresse ici est celui où la conjecture est « $P(n)$ est vraie pour tout n à partir d'un certain rang r », qui relève d'une généralisation à partir de l'étude de quelques cas particuliers. Pour tenter de la prouver, la technique de « preuve par récurrence » va consister à établir l'hérédité de la propriété, puis une valeur r à partir de laquelle on a à la fois l'hérédité et $P(r)$ vraie. L'hérédité s'écrit : $\exists\ r\ ;\ \forall n \geq r,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$, elle sera établie la plupart du temps par un raisonnement déductif « direct ». Il reste à trouver le « rang initial » r (à montrer $P(r)$) sans lequel rien n'est prouvé !

3. *Le principe de récurrence dans des manuels de fin de lycée*

Une unique écriture souvent mal formulée

Le principe de récurrence est donné sous une forme unique, les variantes de son écriture se situent sur le nombre d'étapes (2, 3 ou 4) de l'algorithme. Les deux étapes communes à toutes ces écritures sont l'initialisation et l'hérédité, toujours présentées **dans cet ordre**. Dans l'hérédité, l'implication n'est pas toujours visible et les quantificateurs parfois erronés. Exemples[3].

- (Maths spécialité Term ES Bordas, Fractale 1994).

> […] procédez en trois étapes :
>
> 1° Initialisation : démontrer que P_0 est vraie
>
> 2° Hérédité : démontrez que, **s'il existe** un nombre entier n pour lequel la propriété P_n est vraie, alors la propriété P_{n+1} est aussi vraie
>
> 3° Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété P_n est vraie.

---

[1] … même si ce n'est peut-être pas le plus pertinent pour apprendre à différencier une implication de sa réciproque !

[2] En fait, dans les pratiques de classe et les manuels, trop souvent, $P(n)$ est affirmée comme vraie et on demande seulement d'écrire la démonstration par récurrence de sa véracité. La conjecture est déjà donnée et s'appelle « hypothèse de récurrence ».

[3] Dans les récents manuels de Terminale, la récurrence a disparu du programme général et n'est traitée que dans la « spécialité maths ».

On notera en gras — c'est moi qui souligne — le quantificateur erroné dans l'étape 2. L'étape 3 est en fait une conséquence et non une étape du principe de récurrence.

• (Maths terminale D analyse géométrie Belin - cours - « principe de récurrence »)

> Quatre étapes sont nécessaires pour montrer qu'une propriété P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.
>
> 1^re^ étape : mise en évidence de la propriété P(n)
>
> 2^e^ étape : vérification que P(n_0) est vraie
>
> 3^e^ étape : on suppose que, pour un entier k quelconque supérieur à n_0, P(k) est vraie et on montre qu'alors P(k+1) est vraie
>
> 4^e^ étape : on applique le principe de récurrence et on conclut.

Les étapes 1 et 4 sont extérieures au principe de récurrence. La formulation de la 3^e^ étape ne met pas clairement en évidence l'implication, or c'est celle-ci dont on cherche à prouver la vérité ; de plus, elle suppose que l'on peut différencier « pour un k quelconque » avec « quelque soit k ».

La récurrence est explicitement déclarée comme « particulière » dans la plupart des manuels. Sa légitimité comme procédé de preuve est même discutée : il est dit parfois que la validité d'un tel raisonnement se ferait a posteriori, au vu des résultats obtenus ! De plus, la structure du chapitre sur la récurrence est souvent en rupture avec celle de tous les autres, et ce choix est justifié par des discours et des avertissements.

Exemple (Mathématiques, Hachette, Term. C et E, Analyse (1983), ch.0 II : entiers naturels et récurrence, p. 3). « Remarques » – qui reprennent des citations de Poincaré (1902) :

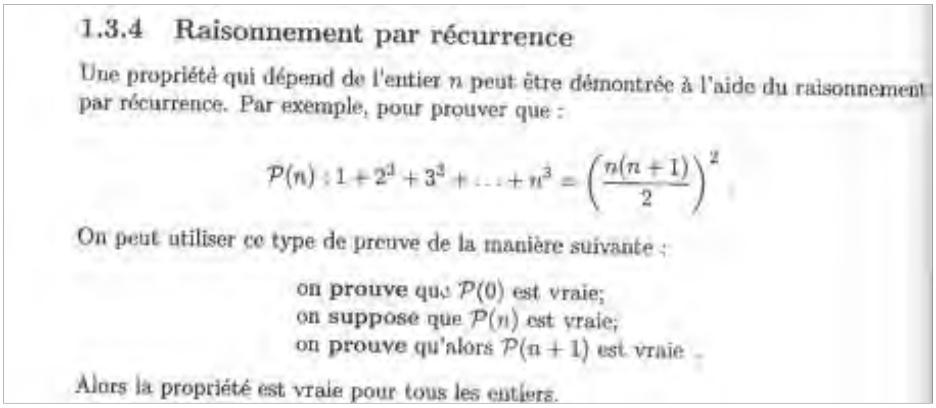
> 1° Le principe de récurrence pose de nombreux problèmes d'ordre logique et aussi philosophique. On peut en effet imaginer que, de proche en proche, on pourrait prouver la propriété pour tout entier naturel, mais on sait de façon certaine que l'on ne peut pas expliciter cette infinité de preuves successives. Comme dans de nombreux cas, la richesse et la cohérence des résultats obtenus apportent une justification a posteriori à ce principe de démonstration. Certains auteurs estiment que le principe de récurrence est le responsable principal de la fécondité des mathématiques qui, sans lui, ne seraient qu'une tautologie stérile.
>
> 2° Pour effectuer une démonstration par récurrence, il importe d'avoir, au préalable, une idée du résultat que l'on veut prouver. Il est donc nécessaire de commencer l'étude par une phase expérimentale. Mais cette phase expérimentale doit se poursuivre par une phase de démonstration.

Cet extrait met l'accent sur le doute logique et philosophique, la justification a posteriori que cela fonde bien des preuves (!!) et en même temps, la force de ce principe. Le deuxième paragraphe peut sembler étonnant : en général, quand on cherche à construire une preuve, il faut bien savoir ce que l'on cherche à démontrer !

4. La récurrence dans deux manuels récents d'université

Nous avons étudié deux collections volumineuses très récentes, éditées pour les étudiants de licence scientifique à l'occasion de la nouvelle organisation des études en LMD. La récurrence étant considérée comme déjà vue au lycée, il s'agit de rappels qui ne prennent que très peu de place dans ces ouvrages. Les deux présentations ci-après sont à l'opposé l'une de l'autre, de manière presque caricaturale.

• *Collection Vauthier 2006 réforme LMD L1 et L2. Volume de cours, 61.3.4, p. 20.*



1.3.4 Raisonnement par récurrence

Une propriété qui dépend de l'entier n peut être démontrée à l'aide du raisonnement par récurrence. Par exemple, pour prouver que :

$$\mathcal{P}(n) : 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

On peut utiliser ce type de preuve de la manière suivante :

on prouve que $\mathcal{P}(0)$ est vraie;
on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie;
on prouve qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie .

Alors la propriété est vraie pour tous les entiers.

Figure 1 *- Extrait de l'ouvrage Collection Vauthier 2006*

Cette présentation est indigne d'un ouvrage de ce niveau : aucun quantificateur, aucune implication, le rang initial est 0, l'hérédité a disparu, la définition est donnée sur un exemple. Dans le volume *exercices* de cette même collection, les mêmes erreurs sont reproduites :

> (ch. 0 Raisonnements mathématiques fondamentaux – raisonnement par récurrence)
>
> 1er type : on veut démontrer qu'une proposition qui dépend d'un entier n est vraie pour tout n. On constate qu'elle est vraie pour $n = n_0$, et on suppose qu'elle est vraie au rang p. On la démontre au rang p+1 : elle est alors vraie pour tout entier $n \geq n_0$.
>
> 2e type : on veut montrer la même chose mais ici après avoir consaté qu'elle est vraie au rang n_0 on la suppose vraie jusqu'au rang p. On la démontre au rang p+1 : elle est alors vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Notons en plus, ici l'absence totale de relation entre n_0 et p. L'ouvrage ne dit rien d'autre sur la récurrence, dans les 1174 + 840 pages des deux tomes !

• *Collection Ramis Warusfel, 2007, Dunod, p. 67-68*

La récurrence est abordée dans le cadre d'un paragraphe sur la relation d'ordre sur ℕ, après les axiomes de caractérisation de ℕ, dans un « théorème de récurrence » donné comme conséquence des ces axiomes. Voici un extrait.

> Voici maintenant un résultat essentiel, il fournit la base logique du mode de raisonnement par récurrence. Le raisonnement par récurrence et le raisonnement par l'absurde sont deux outils très importants en mathématiques.
>
> Théorème 1 (Théorème de récurrence). Soit n_0 un entier. Pour tout entier $n \geq n_0$, notons P(n) une certaine propriété de l'entier n. On fait les hypothèses suivantes :
>
> (R1) La propriété P(n_0) est vraie.
>
> (R2) Si la propriété P(n) est vraie pour un certain $n \geq n_0$, la propriété P(n+1) l'est aussi.
>
> Sous ces hypothèses, la propriété P(n) est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Ce théorème est démontré par l'absurde. L'écriture est correcte pour le n_0, l'implication « si, alors » est visible (même s'il n'y a pas le « alors »). Cependant, le quantificateur de l'hérédité est encore une fois évité, remplacé par « un certain n ».

En fait, l'hérédité qui s'écrit « Quelque soit n, $n \geq n_0$, P(n) $\Rightarrow$ P(n+1) » n'est presque **jamais** explicitée sous cette forme dans les manuels que nous avons consultés.

III. CONCEPTIONS D'ÉTUDIANTS ET D'ENSEIGNANTS FRANÇAIS

Les résultats didactiques ci-après proviennent d'analyses de réponses à des questionnaires et des résolutions de problèmes proposés pendant de nombreuses années à des étudiants de Licence et Master et à des enseignants en formation. Le lecteur fera facilement les liens — de cause à effet — avec ce que nous avons relevé dans les manuels. Nous noterons TA les « théorèmes-en-acte » relevés.

TA1. La récurrence est un principe, pas un concept !

Le concept de récurrence stricto sensu est absent des conceptions. Si l'on demande à des étudiants de définir la récurrence, les réponses vont décrire la « technique », le « principe » ou le « raisonnement » par récurrence.

TA2. La récurrence ne construit pas d'objets mathématiques !

« Une preuve par récurrence ne construit rien puisque la propriété P à prouver est donnée comme vraie au départ ». Ceci est mis en opposition avec le schéma $A \Rightarrow B$ décrivant un théorème où, pour progresser de A vers B, il faut introduire des propriétés, définitions, données, etc., alors qu'on passe de $P(n)$ à $P(n+1)$ essentiellement par des calculs et la fameuse « hypothèse de récurrence » qui de notre point de vue est porteuse de confusions. Ce théorème-en-acte est la conséquence d'un choix didactique résistant et répandu : l'utilisation quasi-exclusive du principe de récurrence pour établir des propriétés vraies, données ou évidentes, et où $P(n)$ est une fonction algébrique de n.

TA3. La récurrence comme une tautologie !

On trouv de nombreuses écritures de l'hérédité telles que l'énoncé devient une tautologie. Exemple de ce qu'écrit un étudiant (Master 1 mathématiques) :

> 1. On montre tout d'abord que P_0 est vraie.
>
> 2. On suppose ensuite que P_{n-1} est vraie pour un n quelconque.
>
> 3. On montre grâce à cette supposition que P_n est vraie. » [...]
>
> Puisque à l'étape 2, on suppose que P_{n-1} est vraie pour un n quelconque, alors c'est « normal » de trouver que P_n est vraie pour tout n ; on n'a donc rien démontré.

TA4. L'initialisation comme étape première obligatoire !

Dans les réponses des étudiants, les écritures du principe de récurrence débutent **toutes** par l'initialisation n_0 et il est affirmé que c'est nécessaire de commencer par cette étape-là. Mais d'où vient donc le rang initial ? Il est de deux types : « c'est 0 ou 1 », ou « Il est donné dans l'énoncé ». Placer la recherche du rang initial avant l'étude de l'hérédité a une conséquence évidente : n_0 est souvent choisi en essayant « au hasard » les valeurs 0, 1, 2 (plusieurs, « pour être sûr » !), sauf s'il est donné dans l'énoncé du problème. Or, il existe bien sûr des cas où P peut être vraie pour les premières valeurs de n, puis fausse, puis de nouveau vraie.

TA5. Le rang initial est la valeur de n à partir de laquelle l'hérédité est vraie !

La recherche de l'hérédité aboutit à un nombre, notons-le p, à partir duquel l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie. C'est ce nombre p qui est candidat à être le rang initial cherché, mais ce n'est pas nécessairement le cas ($P(p)$ peut être faux). Or les problèmes rencontrés dans l'enseignement privilégient la question : « Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq n_0$ (donné), P(n) est vraie ». Ceci induit une règle-en-acte fausse répandue : si P est héréditaire à partir d'un n_0 et que P(n_0) est fausse, alors P est fausse à partie de n_0.

TA6. Comment reconnaît-on une preuve par récurrence ?

Notre questionnaire comporte le problème suivant.

> Soit le Théorème : √3 est irrationnel. Voici une preuve. Supposons que √3 soit rationnel. Soit a le plus petit entier positif tel qu'il existe b entier positif vérifiant $a\,/b = \sqrt{3}$. On a donc : $3b^2 = a^2$. Ceci implique que 3 divise a^2 ; a et b étant des entiers et 3 un nombre qui n'est pas un carré d'entiers, 3 divise a et donc, 3^2 divise $a^2 = 3b^2$. Il s'ensuit que 3 divise $3b^2$, donc 3 divise b. Ainsi, 3 divise à la fois a et b et a n'est pas le plus petit entier vérifiant $a/\,b = \sqrt{3}$. On a donc une contradiction. Donc √3 est irrationnel.
>
> Question : Cette preuve a-t-elle un rapport avec une « preuve par récurrence » ? Justifiez votre réponse.

Le fondement de cette preuve est l'axiome de récurrence caché par l'hypothèse que $a\,/\,b$ est irréductible, écrite ici volontairement sous la forme « soit a *le plus petit entier* tel que... ». On peut l'énoncer ainsi : « Si pour tout n tel que P(n) est vraie, il existe m dans tel que $m < n$ et P(m) est vraie, alors pour tout n, P(n) est fausse. »

La très grande majorité des étudiants répondent qu'il n'y a pas de rapport avec une preuve par récurrence, car il n'y a pas de propriété dépendant de n et parce que c'est une preuve par l'absurde. Voici quelques réponses-types.

> « Ce n'est pas un raisonnement par récurrence puisqu'on n'a pas $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ »
>
> « Non, car la récurrence dépend d'un paramètre » ou « ...dépend d'un rang »
>
> « Non, parce qu'il n'y a pas d'amorce », « non, il n'y pas le cas de base »
>
> « Non, on ne voit pas l'hypothèse de récurrence »
>
> « Non, parce que c'est un raisonnement par l'absurde ».

Nous proposerons à la section IV une autre formulation de cette preuve mettant en évidence l'axiome de récurrence qui la fonde.

Alors, qu'est ce qu'une preuve par récurrence ?

Toutes les réponses correspondent à l'écriture du principe sous la forme « initialisation-hérédité ». Une synthèse des réponses peut se décrire ainsi : C'est une démonstration d'une propriété bien définie, dépendant d'un entier n et pour l'utiliser, on doit pouvoir passer de P(n) à P(n+1) – essentiellement des suites numériques ou des formules algébriques ou de dénombrement. On doit procéder par étapes (2, 3 ou 4 étapes) et l'initialisation est toujours située avant l'hérédité. Une étape « zéro » est parfois donnée : écriture de l'hypothèse de récurrence. La conclusion est aussi parfois rajoutée comme étape finale. Le plus remarquable est l'écriture de l'hérédité souvent en DEUX étapes, pas toujours bien reliées. En voici un exemple classique :

> C'est une preuve où l'on procède par 3 étapes :
>
> 1. On montre tout d'abord que P_0 est vraie
> 2. On suppose ensuite que P_{n-1} est vraie pour un n quelconque

3. On montre alors que P_n est vraie

Rmq : Ce raisonnement nécessite que P_{n-1} et P_n soient liées.

Outre le fait que le rang initial est 0 (et rien d'autre) et qu'il faut une relation entre P_{n-1} et P_n, cette écriture soulève des questions : Quel est ce « n quelconque » pour lequel on suppose que P_{n-1} est vraie ? Quelle différence entre « pour un n quelconque » et « quel que soit n » ? Que se passe-t-il si on démontre que $P(n-1)$ vraie $\Rightarrow$ $P(n)$ vraie alors que $P(n)$ est faux ? Quand on pose ces questions (je l'ai fait régulièrement), les étudiants ne savent pas répondre ou expriment des doutes sur ce type de preuve. Voici quelques affirmations fréquentes.

> « Ce qu'on montre avec une démonstration par récurrence, c'est seulement qu'on « sait comment faire pour », mais évidemment on ne le fait pas pour chaque cas. »
>
> « La récurrence est un moyen de trouver une relation qui est en rapport avec les termes d'avant. »
>
> « Comme on suppose que $P(n)$ est vraie pour un n quelconque, c'est normal qu'on trouve que c'est vrai pour tout n. »
>
> « On ne fait une preuve par récurrence que si on sait que $P(n)$ est vraie. »
>
> « La récurrence n'est pas une méthode de démonstration car on suppose la propriété au rang n quelconque et on calcule au rang n+1 en utilisant la supposition. »

Le doute émis sur la fiabilité d'une preuve par récurrence provient de la confusion entre « P est héréditaire » et « P est vraie », entretenue par une expression langagière incorrecte mais courante de l'hérédité : « On suppose vraie au rang n et on calcule au rang n+1 », où l'implication a disparu et le n non quantifié.

IV. PROBLÈMES SUSCEPTIBLES D'AMÉLIORER LES CONCEPTIONS SUR LA RÉCURRENCE

Irrationalité de √3 et descente infinie

Revenons sur la preuve de la non-rationalité de √3. Pour mieux « voir » que le fondement de cette preuve est l'axiome de récurrence, on peut l'écrire ainsi.

> Supposons que √3 soit rationnel. Soit a et b entiers strictement positifs vérifiant $a/b = \sqrt{3}$. On a donc : $3b^2 = a^2$. Ceci implique que 3 divise a^2 ; a et b étant des entiers et 3 un nombre qui n'est pas un carré d'entiers, 3 divise a et donc, 3^2 divise $a^2 = 3b^2$. Il s'ensuit que 3 divise $3b^2$, donc 3 divise b. Ainsi, 3 divise à la fois a et b. Il existe donc a' et b' entiers positifs tels que $a' < a$ et $b' < b$, vérifiant $a'/b' = \sqrt{3}$. On peut reproduire ce raisonnement et trouver des entiers positifs a'' et b'' tels que $a'' < a' < a$ et $b'' < b < b$, vérifiant $a''/b'' = \sqrt{3}$.

À la question « Comment terminer cette preuve ? », beaucoup d'étudiants répondent qu'on ne peut pas car l'hypothèse « irréductible » a été oubliée. De fait, ici, nous sommes en train de construire deux suites strictement décroissantes d'entiers positifs, ce qui est impossible dans $\mathbb{N}$ et prouve l'irrationalité de √3.

Un type de problème « classique » un peu modifié

Cet énoncé a été construit à partir d'un problème classique dans les manuels.

> Pour quelles valeurs de n entier naturel la propriété $P(n)$ suivante est-elle vraie ?
>
> $$P(n) : 2^n \geq (n+1)^2 .$$

La « méthode » prônée dans les manuels scolaires ne fonctionne pas ici. En effet, on vérifie aisément que P(0) est vraie. Et alors ? Passons à l'hérédité de P. Après une cuisine mathématique et un raisonnement **par conditions suffisantes** (souvent écrit de manière erronée par les étudiants), on peut obtenir que P est héréditaire dès que $n \geq 2$. Mais P(2) est fausse. Que conclure ? Aucune des écritures données dans les manuels ne permet de répondre à cette question, que les étudiants déclarent d'ailleurs « mal posée » !! De fait, P est vraie pour $n = 0$, fausse pour $n = 1, 2, 3, 4$ et 5 et vraie pour $n = 6$. On peut maintenant répondre à la question : P étant héréditaire à partir de $n = 2$ et P(6) étant vraie, le théorème de récurrence permet d'affirmer que P est vraie pour tout $n \geq 6$ (et par ailleurs pour $n = 0$).

Il peut être intéressant de transformer l'énoncé en posant trois questions qui admettent trois réponses distinctes :

a) Pour quelles valeurs de n l'implication $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est-elle vraie ? (réponse : $n \geq 1$)

b) Quel est le n_0 du principe de récurrence ? (réponse : $n_0 = 6$, et non 0 ou 1)

c) Pour quelles valeurs de n la propriété $P(n)$ est-elle vraie ? (réponse : $n = 0$ ou $n \geq 6$).

La récurrence comme technique ou comme fondement épistémologique d'une preuve ?

Considérons les problèmes suivants, classiques dans l'enseignement.

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

P1. Pour tout n, on a $(x^n)' = n\, x^{n-1}$

P2. Pour tout x positif et tout n entier naturel, $(1+x)^n \geq 1 + nx$

P3. Pour tout n entier, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7

P4. Pour tout n entier positif,

$$1+2+\ldots+n=\frac{(n(n+1))}{2}$$

Les propositions P1 et P2 concernent des propriétés locales de fonctions : continuité, dérivabilité, limites, études locales, infiniment petits. Or, d'un point de vue épistémologique, la récurrence est étrangère au domaine de l'analyse. Ceci pose une vraie question didactique si la majorité des problèmes utilisant la récurrence ne relève pas des ensembles dénombrables. Les propositions P3 et P4 concernent les nombres entiers, on est donc bien dans un domaine mathématique idoine pour une preuve par récurrence ; même si P3 est en fait une propriété de divisibilité valable pour tout n de manière indépendante des rangs suivants.

Des problèmes où P est une propriété d'un ensemble d'objets de taille n

Pavages de polyminos

Dans Grenier (2008, 2010), nous décrivons des problèmes de pavages de polyminos par des dominos et triminos, dans lesquels la propriété $P(n)$ n'est pas une fonction algébrique de n mais détermine un ensemble fini d'objets de taille n. On y montre l'hérédité d'une propriété de type géométrique-combinatoire et dans l'un d'eux, la structure de l'hérédité peut se décrire ainsi : *$P(n)$ et $P(n)$ et $P(n)$ et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$,* car $P(n)$ est utilisée pour des objets de même taille mais différents.

Une propriété des polygones à sommets entiers

« Pour quelles valeurs de n peut-on construire des n-polygones réguliers dont tous les sommets sont sur une grille carrée régulière ? »

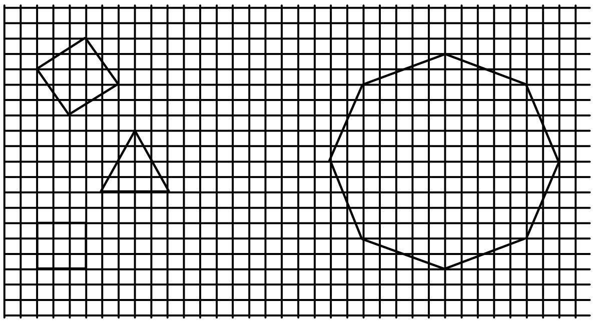


Figure 2 *– Polygones à sommets entiers*

Il est facile de prouver qu'il n'existe aucun triangle équilatéral de sommets à coordonnées entières. Pour $n = 4$, la réponse est évidente, de nombreux carrés sont possibles.

Pour $n = 8$, on démontre qu'il n'existe pas d'octogone régulier dont tous les sommets sont à coordonnées entières. La preuve est basée sur l'axiome de récurrence « Il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante dans $\mathbb{N}$ ». On démontre qu'à partir de tout octogone régulier O à sommets de coordonnées entières et d'aire (entière) n, on pourrait construire un octogone régulier O' à sommets entiers d'aire $m < n$, donc strictement plus petite, ce qui est impossible. Il n'en existe donc aucun.

La construction de O' est donnée ci-dessous : A' est l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\pi/2$, B' est l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\pi/2$, etc. Il est facile de prouver que si l'octogone initial est régulier, l'octogone ainsi construit est lui aussi régulier, et que si les coordonnées de A et de B sont entières, alors celles de A' le seront aussi.

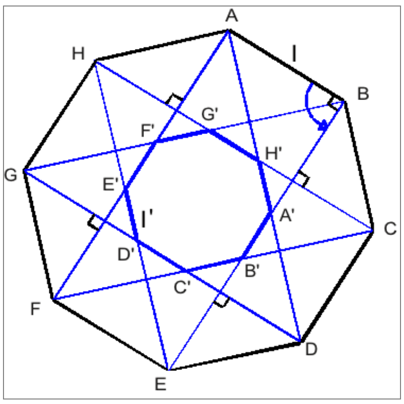


Figure 3 *– Octogones réguliers*

Une propriété des lignes polygonales convexes

« Toute ligne polygonale située à l'intérieur de l'enveloppe convexe d'une ligne polygonale convexe donnée et de mêmes extrémités est de longueur plus petite. »

En nommant $A_0, A_1, \ldots A_n,$ les sommets de la ligne polygonale convexe donnée, et $B_0, B_1, \ldots, B_m,$ ceux d'une ligne polygonale convexe quelconque à l'intérieur de l'enveloppe convexe de la première, et telles que $A_0 = B_0$ et $A_n = B_m$, la propriété se traduit par :

$l\ (B_0\, B_1 \ldots B_m) \leq l\ (A_0\, A_1 \ldots A_n)$ *(illustré ci-après pour* $n = 5$ *et* $m = 6$*).*

La preuve s'établit par récurrence sur le nombre de segments de la ligne polygonale convexe (LPC) B. On prolonge B_0B_1 jusqu'à l'intersection de la ligne A en A'_i, situé entre deux sommets successifs A_i et A_{i+1}. $B_0\, B_1\, A'_i$ est un segment de droite intérieur à la LPC $A_0\, A_1 \ldots A'_i$. Et $B_1\, B_2 \ldots B_m$ est une LPC de m segments, intérieure à la LPC $B_1\, A'_i\, A_{i+1} \ldots A_n$.

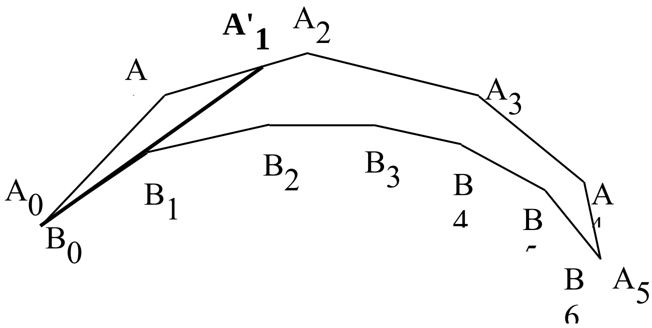


Figure 4 *– Lignes polygonales convexes*

Hérédité : « si $l\ (B_0\, B_1\, A'_i) \leq l\ (A_0\, A_1 \ldots A'_i)$ et si $l\ (B_1\, B_2 \ldots B_m) \leq l\ (B_1\, A'_i\, A_{i+1} \ldots A_n)$, alors $l\ (B_0\, B_1 \ldots B_m) \leq l\ (A_0\, A_1 \ldots A_n)$. Ici, la structure de l'hérédité peut se décrire ainsi :

« $\forall\, m < n$, $\forall\, p < n$, si P(m) et P(p), alors P(n) ». Le rang initial est obtenu par l'inégalité triangulaire.

V. CONCLUSION

Nous avons tenté ici un état des lieux de l'enseignement et des connaissances d'étudiants de mathématiques sur le concept de récurrence. Nous avons montré que les conceptions construites par les choix didactiques usuels sont très partielles, comportent de nombreux « théorèmes-en-acte » erronés et sont assez éloignées du concept mathématique, même chez les étudiants de haut niveau. Nous avons suggéré quelques pistes pour modifier ces conceptions. Nous souhaitons que les résultats de cette étude et les problèmes proposés dans ce texte soient repris et permettent de développer une connaissance plus idoine du concept de récurrence.

RÉFÉRENCES

Grenier D. (2010) Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*. Paris, 2009.

Grenier D. (2008) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. *Actes du colloque AMQ*. Sherbrooke, Québec, juin 2006.

Grenier D., Payan C. (1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques* 18(1), 59-100.

Poincaré H. (1902) *La science et l'hypothèse*. Paris : Flammarion.