ANTIPHÉRÈSE DE √2 : INTRODUCTION D'UNE DIMENSION A-DIDACTIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE À L'UNIVERSITÉ

Imène GHEDAMSI[*] – Faiza CHELLOUGUI[**]

Résumé – Nous partons de la question des moyens que peut se donner l'enseignement de l'analyse à l'entrée à l'université, pour gérer des variations importantes et permettre aux étudiants d'accéder aux objets de l'analyse. Nous avons expérimenté une situation ciblant le travail des étudiants sur les méthodes d'approximation successive afin de favoriser des allers-retours entre preuves pragmatiques, géométriques ou numériques et preuves formelles, via l'usage des énoncés quantifiés de l'analyse. L'entrée dans un processus de preuves mixtes a été rendue obligatoire, dans le travail des étudiants, à travers l'émergence du problème général de l'existence et de l'accessibilité des nombres, limites et suites.

Mots-clefs : existence, analyse, pragmatique, formelle, milieu

Abstract – This paper focus on the means that could be undertaken in tertiary education in order to manage variations and to allow students building more relevant analysis knowledge. We experiment a situation which focus on approximation methods, in such a way that it allows either geometrical or numerical pragmatic proofs or the use of theorems. The access into a mixed proving process was unavoidable because of the emergence, in students' work, of issues related to the existence and accessibility of specific objects: irrational numbers, sequences, limits.

Keywords: existence, analysis, pragmatic, formal, milieu

I. INTRODUCTION

Nous partons de la question générale d'un enseignement de l'analyse réelle à l'entrée à l'université mené dans une perspective d'adaptation en amont et en aval (Bloch et Ghedamsi 2004 ; 2006). Dans le cadre de ce travail, nous retenons que les situations qui réintroduisent une phase expérimentale permettant un travail heuristique sur des objets spécifiques, avec des preuves pragmatiques, vont offrir aux étudiants des opportunités de conjectures, de calculs, etc. et permettre un retour efficace au formalisme.

De telles situations prévues pour conduire d'abord à un travail pragmatique appuyé sur l'intuition des étudiants sont celles où

> …le professeur fournit quant à lui, des éléments à la réflexion des élèves. C'est bien ce que nous appelons une dimension a-didactique. (Bloch 1999, p. 139 ; c'est nous qui soulignons)

Cette dimension a-didactique est recherchée pour amener les étudiants à progresser dans leur travail de façon autonome par confrontation à un milieu. La quête d'a-didacticité ne dispense pas, pour autant, d'étudier ce que le professeur doit faire en interaction avec les étudiants à tous les niveaux du milieu expérimental. Ces situations ne sont pas des situations fondamentales ; les notions en jeu sont déjà connues (définitions formelles ou théorèmes) et il s'agit de les instancier[1] par le biais d'un milieu qui permettra un retour satisfaisant sur les idées qui sous-tendent la généralisation, des situations qui les légitiment.

---

[*] Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de Tunis – Tunisie – ighedamsi@yahoo.fr
[**] Faculté des Sciences de Bizerte – Tunisie – chellouguifaiza@yahoo.fr

[1] Par instancier un énoncé formel (en l'occurrence une définition ou un théorème), nous entendons considérer sa valeur de vérité sur un cas particulier qui soit de plus, pertinent du point de vue de la généralisation.

© Ghedamsi I., Chellougui F. (2012) Antiphérèse de √2 : introduction d'une dimension a-didactique dans l'enseignement de l'analyse à l'université. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 987–1004). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Dans la perspective énoncée ci-dessus et au vu de certaines caractéristiques épistémologiques de l'analyse réelle[2], nous postulons que le recours aux méthodes numériques d'approximation de nombres permet d'organiser des situations à dimension a-didactique relatives aux concepts de limite, de suite et de fonction. Ces situations permettent ensuite de revenir sur les savoirs de l'analyse à l'entrée à l'université, en prenant en compte la construction des connaissances des étudiants. C'est dans cet ordre d'idées que nous exposons dans la suite l'étude de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ et son implantation, comme exemple de situation expérimentale construite et analysée — a priori et a posteriori — en suivant le schéma de la TSD (cf. Bloch 2002).

La situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ a pour objectif de permettre aux étudiants, à travers des questions de nombres et de limites :

- de prendre appui sur le contenu conceptuel de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$,
- de réintroduire un réseau de savoirs de l'analyse : la convergence d'une suite, le point fixe, les fonctions contractantes, les segments emboîtés et les accroissements finis.

L'institutionnalisation prévue concerne des procédures et une méthode de construction d'une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel de la forme $\sqrt{d}$, d un entier plus grand ou égal à 2, avec $d - 1$ un carré parfait[3].

II. ANALYSE A PRIORI

Le savoir essentiellement visé par cette situation est la caractérisation par les suites de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \exists\, (x_n)_n \subset \mathbb{Q} \text{ telle que } (x_n)_n \text{ converge vers } x.$$

L'organisation générale de la situation part de l'idée d'une instanciation de ce théorème d'existence via la recherche d'une suite rationnelle convergeant vers un irrationnel algébrique, de sorte que la construction d'une telle suite :

- problématise la nature des nombres (différence entre rationnels/irrationnels, représentations numériques des nombres et lien avec les approximations successives, les limites, etc.) ;
- soit une méthode généralisable à d'autres irrationnels algébriques de la forme $\sqrt{d}$, d un entier plus grand ou égal à 2, avec $d - 1$ un carré parfait.

Nous avons guidé l'introduction par un travail sur l'irrationalité inspiré du principe d'exhaustion, utilisé par Euclide pour montrer l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté.

Plus précisément, dans le cas où un entier naturel $d \geq 2$ est tel que $(d - 1)$ est un carré parfait :

[2] Caractéristiques parmi lesquelles nous relevons : nature des nombres réels et la structure de $\mathbb{R}$, existence des objets et leur accessibilité, rôle du formalisme, rôle et usage des approximations successives, etc.

[3] Voir les motivations de ce choix ci-dessous.

l'égalité $\left(\sqrt{d}-\alpha\right) = \dfrac{1}{\sqrt{d}+\alpha}$, ($\sqrt{d-1} = \alpha$) permet de donner le développement en fraction continue de $\sqrt{d}$, $\sqrt{d} = \alpha + \cfrac{1}{2\alpha + \cfrac{1}{2\alpha + \cfrac{1}{2\alpha + \text{etc.}}}}$;

et la suite des réduites[4] de $\sqrt{d}$ n'est autre que celle définie par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = \alpha + \dfrac{1}{u_n + \alpha}$.

Les étudiants vont donc pouvoir :

- s'appuyer sur la figure car $\sqrt{2}$ « s'obtient » à partir d'un triangle rectangle isocèle, figure simple et bien connue ;
- trouver sans difficulté majeure la formule de récurrence et ce, guider par les questions posées.

Ce sont ces conditions qui rendent la situation « viable » à ce niveau du cursus.

Nous prévoyons que la situation amène les étudiants à relier fortement la notion de nombre réel avec celle de limite et à leur permettre de revenir sur les théorèmes visés.

1. *Organisation de la situation et ses variables didactiques*

Le problème constituant la base de la situation est un problème non familier de l'enseignement actuel. On peut donc supposer que les étudiants ne le résoudront pas par contrat, sans avoir été au préalable confrontés aux enjeux. De plus, dans l'organisation de la situation

> […] certains choix se présentent comme des variables didactiques, dans la mesure où la détermination de ces paramètres change ce qui est à la charge des élèves, et le type de travail qu'ils seront amenés à faire […]. (Bloch 2000, p. 278)

A côté de l'étude des valeurs des variables micro-didactiques, nous essaierons ici de situer la situation construite par rapport à certaines des variables macro-didactiques[5] de la transition lycée/université, que nous avons finalement retenues comme pertinentes par rapport à notre problématique (parmi lesquelles nous citons : le registre de validation, le degré de formalisation, le degré de généralisation, le statut des notions (processus/objet), le type de conversion entre registres, le niveau de mise en fonctionnement des connaissances).

Les valeurs des variables micro-didactiques sont choisies pour organiser le travail effectif de calcul, recherche, etc. des étudiants dans la situation. De plus, les valeurs des variables macro-didactiques sont en évolution par rapport à l'enseignement secondaire car les étudiants sont plongés dans un milieu où la problématique et les moyens de résolution font appel à des connaissances générales de l'analyse réelle.

[4] À chaque fois qu'on arrête le processus itératif à un rang n donné, on obtient le nombre rationnel qu'on appelle la réduite de « racine de d » à l'ordre n.

[5] Par variables macro-didactiques, nous entendons des variables qui concernent une organisation relativement globale de l'enseignement.

- **Variables didactiques**

Huit variables micro-didactiques ont été retenues a priori. Le choix des valeurs est détaillé ici en incorporant l'introduction de quelques valeurs des variables macro-didactiques de la transition.

a) Nature du nombre

Le nombre choisi dans la situation expérimentale de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ est irrationnel, algébrique et connu des étudiants. En s'inspirant du procédé d'Euclide, il est possible de construire des approximations successives rationnelles de $\sqrt{2}$ par un procédé géométrique, procédé heuristique appuyé sur l'intuition géométrique.

Un raisonnement géométrique permet de se convaincre que le procédé de construction est infini.

b) Suite explicite ou récurrente

Dans ce cas, la suite est récurrente et participe de ce fait à la prise en compte d'au moins deux paramètres :

- le théorème du point fixe est l'un des savoirs ultérieurement visé par l'antiphérèse de $\sqrt{2}$;
- le procédé de récurrence permet de représenter graphiquement la suite, de l'étudier graphiquement ainsi que de faire des conjectures sur ses variations, sa nature et sa limite éventuelle.

c) Suite rationnelle/irrationnelle

Afin d'essayer de justifier la recherche d'approximations rationnelles successives, nous avons déjà mentionné le fait qu'on adopte une entrée par la question de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: la dévolution prendra appui sur la question de l'existence et la construction d'une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.

d) Suite croissante, décroissante, non monotone

Le choix d'une suite qui n'est ni croissante, ni décroissante devra amener les étudiants à utiliser un réseau de savoirs de l'analyse réelle : définition et théorèmes de convergence d'une suite, théorème du point fixe, théorème des segments emboîtés et théorème des accroissements finis[6].

e) Type d'équation obtenu

Dans le cas de cette situation, l'équation posée, dont la solution est $\sqrt{2}$, est algébrique et résoluble par les algorithmes algébriques à disposition depuis la fin du lycée. Il est de ce fait clair que le rôle de la résolution se résume à un moyen de vérification.

f) Types d'approximation et d'erreur sollicités

À côté de la condition selon laquelle la calculatrice ne doit pas donner directement accès à une valeur approchée permettant de visualiser l'erreur (l'erreur étant d'autant plus petite que la valeur cherchée devient inaccessible par la calculatrice), le choix du type d'approximation tient compte de deux considérations :

- La suite obtenue oscille autour de $\sqrt{2}$, l'appui sur le registre numérique permet de postuler pour un encadrement de $\sqrt{2}$ entre deux termes consécutifs de cette suite.

[6] Nous n'écartons pas l'usage possible par les étudiants du théorème des valeurs intermédiaires, usage routinier en fin du lycée.

- La justification théorique de l'encadrement doit donc passer par l'identification des sous-suites paire et impaire comme étant des suites adjacentes.

g) Méthode d'approximation

La situation d'antiphérèse de √2 table sur la construction de la suite des réduites associée au développement en fraction continue de √2. La généralisation portera sur la construction de la suite des réduites associée au développement en fraction continue d'un irrationnel de la forme $\sqrt{d}$, d entier ≥ 2 avec $d - 1$ un carré parfait.

Ce choix vient à l'appui d'une évolution progressive du degré de généralisation : le but est d'entamer une première approche des conditions de construction d'une telle suite, nous nous appuyons pour cela sur une propriété algébrique de l'irrationnel sur lequel va porter la généralisation ($\sqrt{d} = \alpha + \frac{1}{\sqrt{d} + \alpha}$, où $\alpha = \sqrt{d-1}$).

- **Trois phases pour organiser la situation**

Nous organisons la situation en trois phases. De plus, nous prévoyons des questions préliminaires qui sont introduites dans chacune des phases.

a) Première phase

La première phase est une phase de dévolution du problème général et consiste à recourir au principe reposant sur l'antiphérèse de la diagonale d'un carré (inspiré du principe d'exhaustion utilisé par d'Euclide pour montrer l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré), à constater que $\sqrt{2}$ est irrationnel et à traduire numériquement le *principe* utilisé.

Un débat prendrait appui sur :

- Des questions en amont du déroulement telles que : Quelle est la différence entre les rationnels et les irrationnels ? Comment peut-on montrer qu'un réel est un rationnel ? Un irrationnel ?
- Des questions en aval du déroulement telles que : Pourquoi un développement fini en fractions continues donne-t-il un rationnel ? Pourquoi, et comment, un nombre rationnel est-il développable en fractions continues ? Est-il possible d'utiliser le développement en fraction continue d'un irrationnel pour l'approcher et estimer à chaque fois l'erreur commise ?

b) Deuxième phase

La deuxième phase devra permettre aux étudiants de :

- se convaincre de l'existence d'une suite convergeant vers $\sqrt{2}$;
- mettre en œuvre des procédures formelles sur les conditions de convergence (définition et théorèmes sur la convergence d'une suite, théorème du point fixe, théorème des accroissements finis).

Les questions d'introduction prévues sont : Existe-t-il une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$? Si oui, de quel(s) moyen(s) dispose-t-on pour la construire ?

c) Troisième phase

La troisième phase de cette situation vise à amener les étudiants à encadrer $\sqrt{2}$ entre deux termes consécutifs de la suite dont il est la limite, de sorte que la distance entre ces deux termes soit fixée a priori. Pour ce faire, il s'agit de

- mettre à la disposition des étudiants des relations de récurrence leur permettant de procéder à un calcul simple et rapide de ces termes ;
- les amener à se rendre compte de l'efficacité de la suite construite pour encadrer $\sqrt{2}$ entre deux rationnels consécutifs dont la distance est aussi petite que l'on veut.

La base théorique qui légitime l'existence de deux tels termes consécutifs de la suite consiste à identifier les sous-suites paire et impaire comme étant des suites adjacentes.

2. *Déroulement prévu*

Afin de procéder à l'analyse du déroulement prévu (consigne, scénario, anticipations, etc.), nous utilisons le schéma de structuration du milieu (Bloch 2000 ; 2002), dont la fonction est d'étudier en les articulant les caractéristiques aussi bien du milieu du professeur que celui des étudiants. Plus précisément :

- Le milieu matériel/objectif vise la dévolution du problème, il est censé permettre aux étudiants de procéder à des essais/erreurs, des validations pragmatiques par exemples et contre-exemples, de développer des intuitions géométriques et graphiques, ceci afin de donner un contenu d'expérience à des savoirs qu'ils n'ont reçu que comme une suite d'énoncés formels.
- Le milieu de référence est censé permettre aux étudiants de lier le travail fait dans le milieu objectif au formalisme mathématique, tout en mettant en défaut le recours à une application « automatique » des définitions et théorèmes du cours. Ceci sous-entend un aller-retour souhaitable entre les savoirs visés et les connaissances, connaissances qui dérivent de la situation, particulièrement à l'issue d'une décision de l'étudiant.

Dans tous les cas, l'activité des étudiants ne peut être dissociée de celle du professeur. Ce dernier aura de plus la charge d'identifier ce qu'il va pouvoir valablement institutionnaliser à partir du travail des étudiants.

L'intégralité du développement mathématique relatif à chacune des trois phases se trouve en annexe.

- **Première phase**

Nous exposons dans ce qui suit la consigne telle qu'elle a été communiquée aux étudiants à la suite du débat initié à l'occasion des questionnements préliminaires mentionnés ci-dessus.

On part d'un triangle T_0 rectangle isocèle dont le côté de l'angle droit mesure 1. On retranche de l'hypoténuse le côté de l'angle droit, on obtient un segment S_1 de longueur r_1. On construit un triangle rectangle T_1 dont l'un des côtés de l'angle droit est le segment S_1.

On procède pour T_1 comme pour T_0 en retranchant de l'hypoténuse le segment S_1, on obtient un triangle rectangle T_2 dont l'un des côtés de l'angle droit est le segment S_2 de longueur r_2 ; T_3 est le triangle obtenu en procédant de même pour T_2…

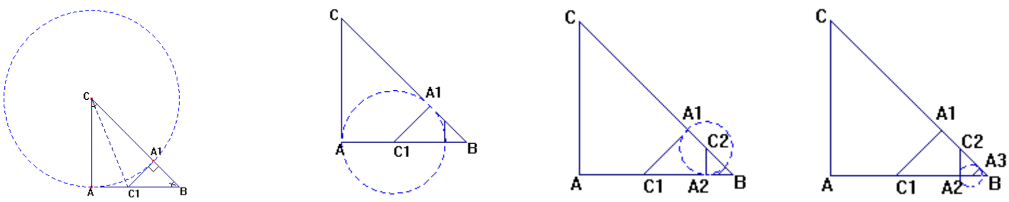


***Figure 1** – Phase 1*

On réitère cette construction et on obtient à chaque fois un triangle rectangle T_n dont l'un des côtés de l'angle droit est le segment S_n de longueur r_n.

Le but de l'exercice est de déterminer si le procédé de construction s'arrête et d'interpréter numériquement la réponse.

Le milieu matériel/objectif

Les étudiants vont pouvoir procéder à leurs premiers calculs d'au moins deux façons :

1. Connaissant le côté de l'angle droit et celui de l'hypoténuse des triangles T_1, T_2, T_3, on effectue des calculs (en se basant sur le théorème de Pythagore) pour essayer de montrer que les deux côtés de l'angle droit sont égaux dans chaque triangle.
2. On utilise l'égalité des angles pour montrer l'égalité des côtés de l'angle droit dans chaque triangle.

Le milieu de référence

Les éléments de preuve de la conjecture sont géométriques et permettent de dire que le processus de construction ne s'arrête pas. Plus précisément, les étudiants déduisent que si le procédé s'arrête, alors on obtient à un niveau *n* un triangle rectangle équilatéral, ce qui est absurde.

Ce milieu est de plus finalisé par la question : « Interpréter numériquement le résultat. » C'est là que l'enseignant devra vraisemblablement apporter un constituant complémentaire au milieu (envisagé a priori) par un support graphique.

- **Deuxième phase**

À la fin de la première phase, la question qui se pose est relative à l'existence d'une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$. Avant de distribuer la consigne relative à cette phase, l'idée est d'amener d'abord les étudiants à faire le lien avec le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$, notamment en calculant ce développement à des ordres successifs 0, 1, 2, 3, 4, etc. Nous prévoyons toutes les fins possibles, notamment celle due à une incompréhension par les étudiants du rôle de la représentation numérique de $\sqrt{2}$ en fraction continue dans la construction d'une suite de rationnels dont il est la limite. Dans ces conditions, le débat est ouvert pour proposer une construction possible d'une suite convergeant vers $\sqrt{2}$ devant *aboutir à la construction de la suite de ses réduites.* La consigne part ensuite de la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$ ainsi que de la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$). On construit, sur l'axe des abscisses, $u_0 = 1$, $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, $u_3 = f(u_2)$ et $u_4 = f(u_3)$.

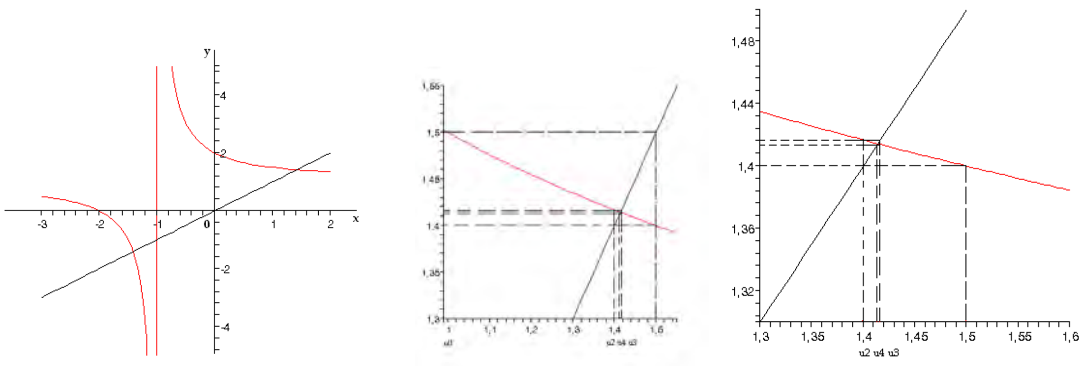


Figure 2 *– Phase 2*

On réitère la construction des u_k de sorte que $u_k = f(u_{k-1})$, k entier naturel non nul.

Le but de l'exercice est de construire une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.

<u>Le milieu matériel/objectif</u>

Le milieu matériel/objectif doit permettre aux étudiants de formuler la conjecture que la suite (u_k) ainsi construite converge vers $\sqrt{2}$.

<u>Le milieu de référence</u>

Les connaissances des étudiants leur permettent de constater que le recours à la technique qui part de l'étude de la monotonie de la suite et la recherche d'un minorant (ou majorant selon le résultat de la monotonie) n'est pas possible, la suite (u_k) n'étant ni croissante, ni décroissante : $u_2 < u_4 < \sqrt{2} < u_3 < u_1$.

Partant du résultat de la monotonie de f (f est strictement décroissante) établi par un simple calcul algébrique, il est envisageable que l'étudiant tente de procéder à l'étude des suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) pour conclure à la convergence de (u_k). De plus, ses connaissances devraient théoriquement contenir le théorème des accroissements finis et la capacité à manipuler des règles de majoration ou de minoration. Nous prévoyons l'intervention du professeur afin d'amener les étudiants à relier l'usage du théorème des accroissements finis avec les conditions d'application du théorème du point fixe.

- **Troisième phase**

On dispose de la suite (x_n) de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$. On pose $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, où p_n et q_n sont deux entiers naturels (q_n est non nul) premiers entre eux, puis on part du tableau ci-dessous.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**
p_n	1	3	7	17	41
q_n	1	2	5	12	29

***Tableau 1** –Phase 3*

Le but de l'exercice est de déterminer si possible un entier n_0, de sorte que $\sqrt{2}$ soit encadré entre $\frac{p_{n_0}}{q_{n_0}}$ et $\frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}}$ et tel que $\left|\frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}} - \frac{p_{n_0}}{q_{n_0}}\right| \leq 10^{-9}$.

<u>Le milieu matériel/objectif</u>

L'entrée par un tableau numérique devrait permettre aux étudiants de calculer un certain nombre de termes p_n et q_n. L'usage de la calculatrice est autorisé mais pas disponible (sa capacité ne permet d'atteindre l'erreur sollicitée, soit à 10^{-9} près) et peut être contesté du fait même que le résultat sera donné sous forme d'une écriture décimale de $\frac{p_n}{q_n}$. L'idée est d'amener les étudiants à effectuer le calcul des termes p_n et q_n en établissant d'abord des relations de récurrence, s'appuyant sur le fait que $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$ et que $\frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$ est irréductible.

Le milieu de référence

Le professeur va devoir institutionnaliser une procédure de l'analyse réelle : Comment construire une suite de rationnels convergeant vers un irrationnel de la forme $\sqrt{d}$, d un entier plus grand ou égal à 2, avec $d - 1$ un carré parfait.

III. ANALYSE A POSTERIORI

Nous avons choisi de procéder à l'analyse a posteriori suivant deux axes :

1. Un premier axe comporte une description des calculs, expérimentations et conjectures des étudiants, une analyse aussi bien des preuves des étudiants et des interventions du professeur que des difficultés rencontrées par les étudiants.

2. Un deuxième axe comporte une discussion théorique à travers un retour aussi bien sur les savoirs visés que sur les questions posées par les situations.

1. Déroulement effectif

La situation de l'antiphérèse de √2 a été expérimentée, dans sa totalité, dans une classe de première année d'université, mathématiques-informatique, de la Faculté des sciences de Tunis. La séance expérimentale a duré deux heures et s'est déroulée avec 30 étudiants, invités à travailler par groupes de 3. En plus de la transcription de la séance, nous avons pu recueillir les traces écrites du travail des étudiants.

a) Conjectures sur la nature du processus

À la question « *Quelle différence y a-t-il entre un irrationnel et un rationnel ?* », les réponses des étudiants étaient diverses et laissent entendre une difficulté à faire fonctionner leurs connaissances concernant les réels. Les réponses telles que « […] *un rationnel est un quotient, un irrationnel n'est pas un quotient* », ou « […] *un irrationnel est un quotient… mais le résultat ne peut pas être un entier* », ou encore « […] *un irrationnel est la somme d'un rationnel et d'un irrationnel* », viennent à l'appui des résultats de recherche concernant les conceptions des étudiants sur les nombres réels (cf. notamment Tall et Pinto, 1996) et leur incapacité à donner du sens aux nombres rationnels et irrationnels à partir de la définition.

b) Conjectures sur l'existence et la construction d'une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$

La question préliminaire posée était : existe-t-il une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$? Les étudiants ont tout de suite cherché à en donner des exemples. Nous retenons, en particulier « […] $\frac{E\left[10^n\sqrt{2}\right]}{10^n}$ », la suite proposée n'est autre que la suite des approximations décimales par défaut de $\sqrt{2}$ (liée à l'écriture de $\sqrt{2}$ dans le système décimal de numération). Nous n'avons pas pu exploiter cet exemple à cause de l'intervention du professeur de la classe « […] *répondez-nous d'abord* »[7]. Le souci de faire déboucher efficacement l'activité des étudiants amène le professeur de la classe à aller à l'encontre d'une prise en charge souhaitée, par les étudiants de certaines questions relatives aux savoirs en jeu. Le professeur de la classe

[7] Ce qui sous-entend de répondre à la question d'existence d'une telle suite.

cherchait à faire émerger le contrôle théorique qui légitime l'existence d'une telle suite (soit le théorème de densité, supposé être enseigné a priori). Les étudiants ont, quant à eux, « choisi d'oublier » ce théorème pour adopter une démarche sémantique (via la recherche d'exemples) afin de répondre.

c) Processus infini et preuve formelle

Lorsque les étudiants se sont engagés dans la validation relative au processus infini, ils l'ont tous fait dans le registre de l'analyse réelle. Cette façon de procéder n'était pas du tout envisagée dans l'analyse a priori.

Aussi bien lors du débat collectif que dans la majorité des traces écrites, la validation n'a pas porté sur le support géométrique mais sur la preuve de la convergence de la suite des restes (qui se traduit ici par la suite de l'un des côtés de l'angle droit des triangles T_n).

d) Procédures formelles sur les conditions de convergence vers √2 de la suite construite

Il apparaît que les étudiants « mémorisent » un ensemble de procédures permettant d'étudier une suite récurrente, notamment celle partant de l'étude de la monotonie de la fonction qui lui est associée. Ces procédures sont, dans leur majorité, fréquemment utilisées en terminale. Par contre, ce qui nous a semblé un peu difficile à interpréter est lié à l'acharnement des étudiants à utiliser la procédure de la terminale (théorème des accroissements finis et récurrence descendante) alors même que le professeur de la classe intervenait pour leur rappeler « […] *le théorème que nous avons vu quand on a corrigé l'exercice de la série … f est contractante… donc la suite est convergente... et sa limite...* » Il est peu probable que le comportement des étudiants est dû au fait qu'étant introduit à partir d'un exercice d'une des séries de travaux dirigés, le théorème du point fixe a été considéré par eux seulement comme un entraînement à une démonstration portant sur des objets généraux et l'ont retenu en tant que tel.

e) Encadrement de √2 et usage 'intuitif' du théorème des segments emboîtés

La validation, portant sur les relations de récurrence $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$, s'engage une fois l'égalité $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$ établie. Au terme de la dernière phase, la validation n'a porté que sur les relations de récurrence $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$. Les étudiants ont tablé sur l'encadrement de $\sqrt{2}$ avec comme argument l'application « intuitive » du théorème des segments emboîtés.

f) Autres difficultés

Nous notons :

- Des difficultés à utiliser des savoirs supposés « appris » à l'entrée à l'université.
- En cas de situations problématiques, les étudiants se rabattent sur des connaissances souvent basées sur l'approche du lycée.
- L'entrée des étudiants dans une problématique d'essais, de recherche d'exemples et de contre-exemples, de conjectures, etc. a pris la forme d'une négociation continue depuis le début de l'expérimentation jusqu'à sa fin.

2. *La situation de l'antiphérèse et les connaissances des étudiants*

Les connaissances relatives à la construction d'une suite convergeant vers un réel de la forme $\sqrt{d}$, d entier ≥ 2 non carré parfait et $(d-1)$ un carré parfait, ont été abordées d'une manière assez ambiguë et portent uniquement sur le choix de la fonction associée à une suite récurrente convergeant vers le réel en question, en tenant compte, pour $\sqrt{2}$, des conditions de parité mentionnées ci-dessous. Les connaissances relatives à la précision de l'approximation ont été construites par les étudiants (en particulier, la reconnaissance de l'erreur commise prévue comme devant être une connaissance préalable), hormis celle relative à la rapidité de la convergence.

Certaines connaissances relatives au contrôle de la validité des résultats empiriques ont été construites en reliant ceux-ci aux définitions et théorèmes et réciproquement.

En dépit des carences relatives à un travail sur les nombres, la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ a organisé la confrontation des étudiants aux questions de l'existence et de la construction des objets de l'analyse réelle (les nombres, mais aussi la convergence des suites, la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, le point fixe, etc.), du rôle de la dimension expérimentale et des preuves pragmatiques dans l'acquisition des savoirs institutionnalisés.

IV. CONCLUSION

La situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$ met en jeu des questions qui ne seraient même pas l'objet de situations didactiques à ce niveau : irrationalité, approximations, construction, etc. Cette situation oblige les étudiants à confronter le fonctionnement du formalisme sur des objets et avec des questions spécifiques.

Le premier objectif que l'on a fixé pour la situation table sur un élargissement du champ d'expérience des étudiants relativement à la nature des nombres réels et à leurs manifestations en partant du développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

Comme nous l'avons précisé plus haut, la situation n'a permis qu'un travail exploratoire sur la nature des nombres et l'approximation des réels non rationnels : certaines connaissances liées aux nombres, supposées préalables, n'ont pas été exploitées, d'autres à construire n'ont pas abouti.

Nous pensons que cette situation est essentiellement due à deux facteurs :

- Les connaissances sur les réels font partie du milieu, mais dans cette situation le but désigné aux étudiants n'est pas la construction de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Donc, tout naturellement, les étudiants se sont focalisés sur l'objectif visible de la situation, et les connaissances sur les réels ont été construites de façon annexe.
- Une grande quantité de connaissances sur les nombres est gérée par une seule situation : représentation numérique en utilisant les fractions continues, lien avec la rationalité et/ou l'irrationalité, convergence d'une suite et interprétation en termes d'approximations successives d'un nombre, la notion de rapidité de convergence, etc.

La situation a mis à la disposition des étudiants un milieu objectif et des fondations expérimentales qui leur ont permis de procéder dans la majorité des cas à un travail heuristique, de formuler des preuves pragmatiques en exploitant des connaissances graphiques, des connaissances liées au calcul algébriques, certaines des connaissances relatives à l'approximation d'un nombre et des connaissances sur le raisonnement relatives au rôle des exemples et des contre-exemples dans les phases de recherche et de conjectures.

L'entrée dans un processus de preuves mixtes comportant des allers/retours entre preuves pragmatiques et preuves formelles, table essentiellement sur la possibilité de rendre accessible les objets de l'analyse réelle, à travers le recours à des approximations successives, ainsi que sur la consistance du milieu objectif. Dans le cadre de la situation de l'antiphérèse de $\sqrt{2}$, nous pouvons affirmer qu'un retour efficace sur le théorème de densité (existence et construction d'une suite rationnelle d'approximations d'un réel) s'est opéré. Le retour sur le théorème du point fixe, du point de vue de l'existence et de la construction d'une suite rationnelle d'approximations du point fixe, n'est pas concluant. Du reste, les étudiants ont pu le mettre en œuvre ainsi que le théorème des accroissements finis et la définition de convergence d'une suite non sans une intervention (même partielle mais souhaitée) du professeur qui les a amenés en particulier, à se rendre compte que cette mise en œuvre tient dans l'efficacité du lien que l'on peut établir entre les interprétations empiriques et ces savoirs.

L'un des enjeux relatif à la construction de la situation, et visant l'institutionnalisation, est de trouver le moyen pour que la situation traite d'exemples génériques, dans le sens où le mode de traitement spécifique répond à la question générale traitée. Il apparaît que le temps didactique de mise en œuvre d'une telle situation en classe ne peut se réduire à une seule séance, et ce si l'on veut

- exploiter efficacement l'exemple traité dans un but de généralisation ;
- contrôler véritablement certaines des connaissances acquises par les étudiants.

Enfin, insistons sur le changement épistémologique que produit la situation dans la façon des étudiants de concevoir les nombres comme $\sqrt{2}$. Pour certains étudiants, $\sqrt{2}$ avait le statut d'*icône* [8] : un signe que l'on met pour désigner une chose inconnue. Le travail dans la situation a permis aux étudiants d'envisager $\sqrt{2}$ avec son statut d'objet mathématique, relié à d'autres objets et incorporant des règles, ce que Pierce nomme un symbole/argument. C'est ce passage crucial de $\sqrt{2}$ (et des irrationnels, en tous cas ceux du même type) au statut d'argument qu'a produit la situation d'antiphérèse.

[8] Au sens de Peirce, cf. Bloch (2008).

RÉFÉRENCES

Bloch I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 135-194.

Bloch I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université*. Thèse de l'Université Bordeaux I.

Bloch I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. *Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 125-139).

Bloch I., Ghedamsi I. (2004) The teaching of calculus at the transition between upper secondary school and university. *ICME 10, communication au Topic Study Group 12*, Copenhague.

Bloch I. (2005) Dimension a-didactique et connaissance nécessaire : un exemple de 'retournement' de situation. In M.-H. Salin et al. (Eds) (pp. 143-152) *Sur la théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bloch I., Ghedamsi I. (2006) L'enseignement du début de l'Analyse. *Petit x* 69, 7-30.

Bloch I. (2008) How mathematical signs work in a class of students with special needs: Can the interpretation process become operative? *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 5)* (pp. 1140-1150). Larnaca, university of Cyprus.

Mamona-Downs J. (2001) Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics* 48, 259-288.

Nardi E., Iannone P. (2005) To appear and to be: Acquiring the 'genre speech' of university mathematics. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, San Feliu de Guixols, Spain.

Robert A. (1982) L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3(3).

Robert A. (2003) Tâches mathématiques et activités des élèves : une discussion sur le jeu des adaptations introduites au démarrage des exercices en classe de collège. *Petit x* 62, 61-71.

Robert A. (2004) Une analyse de séance de mathématique du collège, à partir d'une vidéo filmée en classe : la question des alternatives dans les pratiques des enseignants. *Petit x* 65, 52-79.

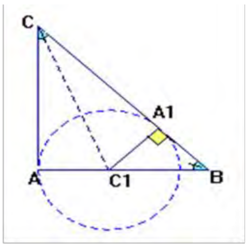
Sackur C., Assude T., Maurel M., Drouhard J.-P., Paquelier Y. (2005) L'expérience de la nécessité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 25(1), 57-90.

ANNEXE (Calcul Mathématiques)

Nous nous limitons dans ce qui suit à exposer les calculs mathématiques, qui peuvent être entrepris dans les trois phases de la situation. Nous tentons pour cela d'adopter une chronologie d'introduction des calculs, suffisamment conforme au déroulement prévu dans l'analyse a priori.

Première partie : antiphérèse de $\sqrt{2}$

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que AB=AC=1. On considère le point A_1 du segment [BC] tel que $A_1C=1$. La perpendiculaire à la droite (BC) en A_1 coupe le segment [AB] au point C_1.



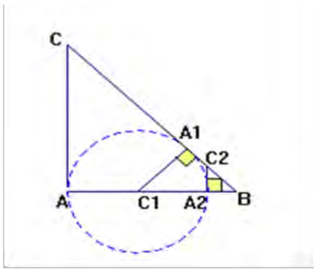
1. $AC_1=A_1C_1=A_1B$.

Comme les triangles AC_1C et A_1C_1C sont isométriques, il vient que $AC_1=A_1C_1$.

D'autre part, A_1BC_1 est rectangle en A_1 et $C_1\widehat{B}A_1=45°$, il suit que $C_1\widehat{B}A_1=A_1\widehat{C_1}B$.

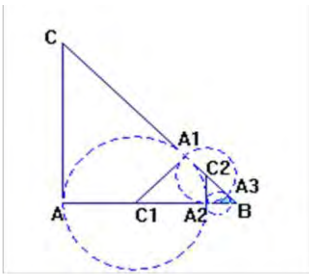
On en déduit que $AC_1= A_1C_1=A_1B$.

2. On désigne par A_2 le point du segment $[BC_1]$ tel que $A_2C_1=A_1C_1$. La perpendiculaire à la droite (BC_1) en A_2 coupe le segment $[A_1B]$ au point C_2. $A_1C_2=A_2C_2=A_2B$.



On procède comme dans 1. en remplaçant A par A_1, A_1 par A_2 et C_1 par C_2.

3. On réitère les mêmes configurations à l'ordre n ($n \geq 2$) et on obtient à chaque fois un triangle A_nC_nB rectangle et isocèle en A_n. Le processus d'itération ne s'arrête jamais.



Si le processus d'itération s'arrête alors on obtient un triangle A_nC_nB rectangle équilatéral. Ce qui est absurde.

4. Interprétation numérique des résultats.

$\sqrt{2} = 1 + r_1$, $R_1 = A_1B$.

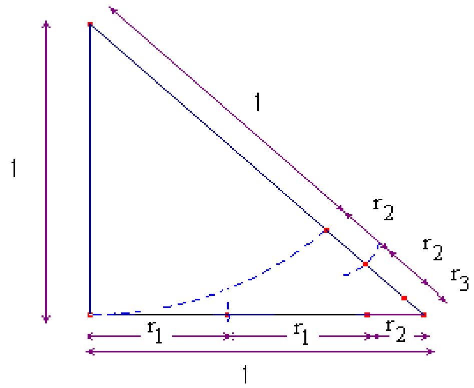
$1 = 2R_1 + R_2$, $R_2 = A_2B$

$r_1 = 2r_2 + r_3$, $R_3 = A_3B$.

$r_2 = 2r_3 + r_4$, $R_4 = A_4B$.

………………………..

$r_{n-1} = 2r_n + r_{n+1}$, $R_{N+1} = A_{N+1}B$ et $n \geq 2$.



Il en résulte que $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{r_1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_2}{r_1}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_3}{r_2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}}$.

On obtient la développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

On montre, en utilisant l'algorithme d'Euclide de recherche du PGCD de p et q (p et q deux entiers naturels non nuls et p>q), que le développement en fraction continue de $\frac{p}{q}$ est fini.

5. Il est possible de calculer u_1, u_2, u_3, u_4, les valeurs approchées de $\sqrt{2}$, obtenues en arrêtant successivement le processus itératif à l'ordre n = 0, n = 1, n = 2, n = 3 et n = 4.

$u_0 = 1$, $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{7}{5}$, $u_3 = \frac{17}{12}$, $u_4 = \frac{41}{29}$.

Plus précisément :

A l'ordre 0, $\sqrt{2} = 1 + r_1$, $0 \leq r_1 < 1$, il suit que $u_0 = 1$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ *à* l'unité près.

A l'ordre 1, $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{r_2}{r_1}}$, $0 \leq \frac{r_2}{r_1} < 1$, il suit que $u_1 = \frac{3}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 5×10^{-1} près.

A l'ordre 2, $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{r_3}{r_2}}}$, $0 \le \frac{r_3}{r_2} < 1$, il suit que $u_2 = \frac{7}{5}$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 1/10 près.

Il est possible de remarquer que $u_{i+1} = 1 + \frac{1}{1+u_i}$, i = 0, 1, 2, 3.

6. On désigne par u_n la valeur approchée de $\sqrt{2}$, obtenu en arrêtant le processus itératif à l'ordre n. Posons-nous la question de la convergence de la suite $(u_n)_n$ vers $\sqrt{2}$.

Pour étudier cette question, il est souhaitable de formuler d'abord une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.

L'étude de la convergence de cette suite fera l'objet de la deuxième partie, l'égalité $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ et la positivité de la suite $(u_n)_n$ permettent d'affirmer que si la suite $(u_n)_n$ converge, alors elle convergera vers $\sqrt{2}$.

Deuxième partie : étude de la suite $(u_n)_n$

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}$, $n \ge 0$.

1. La représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{1+x}$ ainsi que de la première bissectrice permet de construire successivement les termes de la suite $(u_n)_n$ sur l'axe des abscisses, et d'étudier graphiquement le comportement de la suite et sa limite éventuelle. Le choix est donné pour un usage de la calculatrice afin d'estimer les erreurs commises en approchant $\sqrt{2}$ par des termes successifs de la suite (dans le cas où ceci n'a pas été fait dans la première partie).

L'appui sur la résolution de l'équation f(x) = x sur $[1, +\infty[$ permet de conjecturer raisonnablement que la suite converge vers $\sqrt{2}$.

2. La suite $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{2}$.

On se restreint dans l'étude de f à un intervalle contenant tous les termes de la suite $(u_n)_n$ et sur lequel f est dérivable et f' est majorée par un réel strictement inférieur à 1.

Un raisonnement par récurrence prouve que $u_n \ge 1$, $n \in \mathbb{N}$.

D'autre part f est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$, $x \in [1,+\infty[$. On en déduit en utilisant le théorème des accroissements finis que f est contractante sur $[1,+\infty[$. Ce qui prouve que la suite $(u_n)_n$ converge vers $\sqrt{2}$.

De plus, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{4^{n+1}}\left|u_0 - \sqrt{2}\right|, n \in N$, ce qui permet d'approcher $\sqrt{2}$ par un des termes de la suite, avec une erreur fixée a priori.

Troisième partie : un encadrement de $\sqrt{2}$

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, avec $(p_n, q_n) \in N \times N^*$ et $p_n \wedge q_n = 1$

1. $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ *et* $q_{n+1} = p_n + q_n$, $n \geq 1$.

L'égalité $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{p_n}{q_n}}$ implique que $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$.

De plus si un entier naturel d divise $p_n + q_n$ et $p_n + 2q_n$ alors il divise q_n et par suite divise p_n. On en déduit que $p_n + q_n$ et $p_n + 2q_n$ sont premiers entre eux.

L'appui sur les formules de récurrence permet de remplir le tableau ci-dessous.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	…
$\mathbf{p_n}$	1	3	7	17	41	99	239	577	1393	3363	
$\mathbf{q_n}$	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2370	

2. La suite $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_n$ *est croissante et la suite* $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_n$ *est décroissante.*

Il suffit de remarquer que f est strictement décroissante.

3. $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leq \sqrt{2} \leq \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$, $n \geq 0$.

Il suffit de remarquer que $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_n$ et $\left(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}\right)_n$ sont deux suites adjacentes et appliquer le théorème des segments emboîtés.

4. Encadrement de $\sqrt{2}$ *entre deux rationnels dont la différence est inférieure à* 10^{-9}.

En utilisant le résultat établit dans 3, il suffit de choisir n_0 de sorte que $\frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}} - \frac{p_{n_0}}{q_{n_0}} \leq 10^{-9}$ et les deux rationnels en question sont alors $\frac{p_{n_0}}{q_{n_0}}$ et $\frac{p_{n_0+1}}{q_{n_0+1}}$.

Le calcul peut être fait via les relations de récurrence et le tableau établi dans 1.

Quatrième partie : généralisation

Encadrement de $\sqrt{37}$ *entre deux rationnels dont la différence est inférieure à* 10^{-13}.

En utilisant l'égalité $(\sqrt{37}$ - $6)(\sqrt{37}$ + $6)=1$, il suffit de considérer la suite $(u_n)_n$ définie par u_0 = 6 et $u_{n+1} = 6 + \frac{1}{6 + u_n}$, $n \geq 0$, puis de procéder comme pour $\sqrt{2}$, notamment pour établir les relations de récurrence utilisées pour mener le calcul.