NOTIONS DE TOPOLOGIE : ÉLABORATION DE LEVIERS DIDACTIQUES À INTEGRER DANS UN ENSEIGNEMENT POUR FAVORISER LES APPRENTISSAGES DES ÉTUDIANTS

Stéphanie BRIDOUX*

Résumé – Dans cette communication, nous nous intéressons à la possibilité d'intégrer, dans un enseignement de topologie soumis à des contraintes institutionnelles fortes, quelques aménagements susceptibles de favoriser la réalisation autonome de certains exercices par les étudiants. Dans un premier temps, nous montrons comment des préoccupations historiques et épistémologiques, intégrées à nos analyses didactiques, ont permis un travail sur les formalisations des notions et leur progression dans l'enseignement. Ensuite, nous expliquons comment une réflexion sur la gestion par l'enseignant de la classe a contribué à mener un certain nombre d'étudiants à travailler en autonomie sur les exercices visés.

Mots-clefs : intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert ou fermé, symbolisme, formalisation, analyse de tâche

Abstract – In this contribution, we focus on the possibility of integrating, in a teaching of topology subjected to strong institutional constraints, some teaching set-up that may improve the achievement of students when they are let by themselves to solve exercises. At first, we show how an historical and epistemological concern combined with didactic analyses contributed to working on the formalization of the concepts and to managing their development through the teaching. Next, we explain how the teacher's reflection led to an organization of the teaching helping students' autonomous work on the exercises at stake.

Keywords: interior and closure of a set, open or closed set, symbolism, formalization, task analysis

I. INTRODUCTION

Cette communication s'inscrit dans la continuité des textes présentés aux colloques EMF 2006 (Bridoux 2008) et EMF 2009 (Bridoux 2011a), traitant tous les deux de l'enseignement des notions de topologie en première année d'université. Dans cette perspective, le lecteur pourra consulter ces deux références pour une description détaillée du contexte institutionnel dans lequel s'inscrivent nos recherches ou pour une présentation complète des expérimentations évoquées dans le texte.

Pour situer le contexte de ce travail, nous rappelons tout d'abord les principales caractéristiques d'un enseignement de topologie dans lequel nous intervenons, en mettant en évidence les contraintes institutionnelles qui délimitent cet enseignement et certaines difficultés repérées chez les étudiants. Nous nous intéressons précisément à une de ces contraintes qui consiste en la réalisation de certaines tâches qui sont pourtant sources de difficultés récurrentes chez les étudiants aux évaluations.

Après avoir décrit notre questionnement, nous présentons quelques pistes issues d'une étude historique et épistémologique, complétée par une analyse de quelques manuels. Nous montrons alors que ces pistes ont mené à travailler différemment sur les formalisations des notions visées en association avec une gestion spécifique de l'enseignement en classe, contribuant ainsi à faire progresser les étudiants sur les tâches en question.

* Université de Mons – Belgique – stephanie.bridoux@umons.ac.be

II. DIAGNOSTIC D'UN ENSEIGNEMENT DE TOPOLOGIE

Notre intérêt pour les notions de topologie est principalement lié à notre expérience d'enseignante. En effet, nous avons été frappée, pendant plusieurs années, de repérer dans les productions de nos étudiants des erreurs récurrentes dans la résolution d'exercices portant sur des applications immédiates des définitions du cours, et même simplement dans la restitution de ces définitions. D'où notre volonté de chercheur en didactique d'interroger ce constat d'échec, d'une part pour en comprendre les causes et d'autre part, pour réfléchir à des pistes de remédiation ou de modification.

L'enseignement de topologie dont il est question est intégré à un cours d'analyse mathématique donné en première année à l'Université de Mons (Belgique) dans une filière mathématique. Le chapitre concernant la topologie introduit les notions d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble, d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé dans l'espace $\mathbb{R}^N$. Ces notions sont caractérisées à la fois en termes de boules et en termes de suites à partir des écritures formelles ci-dessous. L'intérieur et l'adhérence d'un ensemble $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^N$, notés respectivement int A et adh A, sont définis par

$$\text{int A} = \{x \in \mathbb{R}^N : \exists r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{A}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^N : \forall (x_n) \subset \mathbb{R}^N,\ si\ x_n \longrightarrow x,\ alors\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x_n \in \mathrm{A}\}$$

$$\text{adh A} = \{x \in \mathbb{R}^N : \forall r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \cap \mathrm{A} \neq \emptyset\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^N : \exists (x_n) \subset \mathrm{A},\ x_n \longrightarrow x\}$$

Les notions d'ouvert et de fermé sont alors définies de la manière suivante :

A est ouvert ssi $\forall x \in \mathrm{A},\ \exists r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \subset \mathrm{A}$;

A est ouvert ssi $\forall x \in \mathrm{A},\ \forall (x_n) \subset \mathbb{R}^N,\ si\ x_n \longrightarrow x,\ alors\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ x_n \in \mathrm{A}$;

A est fermé ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N, (\forall r > 0,\ \mathrm{B}(x,r) \cap \mathrm{A} \neq \emptyset) \Longrightarrow x \in \mathrm{A}$;

A est fermé ssi $\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall (x_n) \subset \mathrm{A},\ (x_n \longrightarrow x) \Longrightarrow (x \in \mathrm{A})$.

L'équivalence entre ces diverses caractérisations est démontrée.

Un objectif fort de cet enseignement est que les étudiants parviennent à manipuler les définitions données dans le cours. En ce qui concerne le chapitre sur la topologie, ils doivent être capables de déterminer si des sous-ensembles classiques de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$ sont ouverts ou fermés et de justifier leur choix en manipulant le symbolisme approprié.

Dans notre mémoire de DEA (Bridoux 2005), nous nous sommes penchée sur les spécificités des notions de topologie à enseigner en étudiant la distance entre les connaissances anciennes des étudiants et les nouvelles connaissances, en relation avec différents éléments : le formalisme introduit, la portée généralisatrice des notions de topologie par rapport aux connaissances des étudiants dans ce domaine et l'éventuelle unification des notions anciennes apportées par les nouvelles notions. Nous en avons déduit que les notions de topologie avaient des caractéristiques communes avec les notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices, notées notions FUG par la suite, au sens de Robert (1998). En effet, elles généralisent des notions anciennes telles que les intervalles dans $\mathbb{R}$ et des sous-ensembles fréquemment rencontrés dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$, en les unifiant à partir d'un formalisme nouveau pour les étudiants à ce niveau d'enseignement. Les notions FUG sont souvent difficiles à introduire, notamment parce qu'il n'est pas simple de trouver un problème initial accessible au niveau d'enseignement visé dans lequel elles apparaissent comme l'outil de résolution optimal. De plus, le caractère formalisateur de ces notions est tel qu'il est difficile de leur donner du sens.

Nous nous sommes ensuite intéressée aux exercices proposés dans l'enseignement qui, comme nous l'avons expliqué, sont des applications des définitions du cours. À partir des outils d'analyse des contenus développés par Robert (1998), nous avons décrit le travail mathématique à réaliser, a priori, dans ce type d'exercices. Plus précisément, nous avons mis en évidence les connaissances (anciennes, en cours d'acquisition, ...) mises en jeu et les adaptations à réaliser sur ces connaissances telles que les changements de points de vue, l'introduction d'intermédiaires, les changements de cadres, les mélanges de registres d'écritures, etc. Nos analyses montrent que la manipulation des définitions en cause met en jeu un travail dans le registre symbolique qui requiert des adaptations complexes et variées ; ce travail sollicite principalement des connaissances en logique et en théorie des ensembles ainsi que sur la manipulation d'inégalités, mais somme toute peu de réelles connaissances en topologie (Bridoux 2008).

Ainsi, cet enseignement de topologie est exclusivement centré sur le caractère formalisateur des notions en proposant un travail syntaxique dans le registre symbolique. Les étudiants manipulent des symboles auxquels ils ne donnent aucun sens. Il n'y a donc aucune dynamique productive entre le sens et la technique. Un des points d'ancrage de notre travail de thèse (Bridoux 2011b) a été d'élaborer un dispositif didactique visant à introduire ces notions de topologie de façon à favoriser les apprentissages des étudiants, tout en prenant en compte les contraintes institutionnelles qui pèsent sur cet enseignement. Nous nous centrons ici sur la prise en charge, dans ce dispositif, des exercices de manipulation des définitions. Notre objectif consiste à décrire quelques aménagements intégrés à l'enseignement initial tant du point de vue des contenus mathématiques que du point de vue de la gestion du travail en classe pour tenter de surmonter les difficultés précédemment repérées sur ce type d'exercices. Après avoir présenté quelques résultats issus d'analyses didactiques menées en amont de l'enseignement, nous expliquons comment nous avons repensé la progression des contenus à enseigner et leurs formalisations, mais également les interventions de l'enseignant en relation avec le travail des étudiants en classe.

III. QUELQUES PISTES DIDACTIQUES

Dans l'enseignement précédemment décrit, l'introduction non motivée des notions de topologie, la variété de leurs caractérisations et la nature des exercices proposés sont autant d'éléments qui ne permettent pas de donner du sens aux notions ni d'utiliser de manière appropriée le formalisme associé. Néanmoins, les contenus à enseigner sont fixés par notre institution et les exercices de manipulation des définitions constituent également un objectif de l'enseignement. Prenant en compte ces contraintes institutionnelles qui, comme le montre notre travail de thèse (Bridoux 2011b), pèsent lourdement sur les moyens d'action du chercheur, nous avons toutefois tenté d'agir sur cet enseignement en nous focalisant sur deux aspects pour tenter de rétablir le sens des notions : leur introduction et la nature des exercices à proposer aux étudiants.

Pour ce faire, nous nous sommes tout d'abord intéressée aux spécificités des notions de topologie en nous dégageant des contraintes institutionnelles. Cette démarche nous rapproche du point de vue suivant développé par Dorier (2000) :

> Le chercheur en didactique ne peut se contenter d'un point de vue interne au système d'enseignement, il analyse le processus complexe qui conduit de la production du savoir dans la communauté mathématique jusqu'à son enseignement en replaçant l'enjeu de connaissance dans le contexte plus vaste de la constitution des savoirs. (Op. cité, p. 9)

Ce point de vue nous a amenée à étudier le phénomène de transposition didactique, au sens de Chevallard (1991). Nous sommes dans un premier temps retournée à la genèse et l'épistémologie des notions à enseigner. Dans notre communication à EMF 2009 (Bridoux 2011a), nous avons présenté quelques résultats issus d'une synthèse historique et épistémologique reconstituant l'émergence et le développement de quelques notions de topologie. Nous rappelons ci-dessous les faits marquants de cette étude qui sont en lien direct avec notre propos.

Du point de vue de l'histoire retracée, nous avons montré que les quatre notions visées dans l'enseignement (intérieur et adhérence d'un ensemble, ensemble ouvert et ensemble fermé) s'insèrent dans un réseau plus vaste dans lequel apparaissent notamment les notions de point isolé, de point d'accumulation, de connexité et de compacité, comme l'illustrent par exemple les travaux de Weierstrass (1894), puis ceux de Fréchet (1906). Nous évoquons également Cantor (1883) qui, en cherchant à caractériser rigoureusement l'ensemble des nombres réels, s'intéresse aux sous-ensembles de la droite réelle et catégorise les types de points (point isolé, point limite et point frontière) en fonction de leur position dans les sous-ensembles. L'ordre historique d'apparition de ces notions diffère également de celui suivi dans notre enseignement puisque les notions d'intérieur et d'adhérence émergent historiquement plus tardivement. Du point de vue de la formalisation des notions, les définitions sont écrites dans le registre de la langue naturelle, les symboles mathématiques rencontrés étant principalement des lettres pour désigner des ensembles ou des points, en plus des symboles d'inégalités. Cette étude historico-épistémologique, que nous ne faisons ici que survoler, nous a permis de préciser le sens des notions de topologie mais également leurs caractères formalisateur, unificateur et généralisateur.

Après nous être placée du côté du savoir savant, nous avons ensuite réalisé une analyse de manuels pour caractériser le savoir à enseigner (Bridoux 2011b). Celle-ci nous a permis de préciser la fonction des notions à enseigner. Nous en livrons ici quelques aspects.

Nous avons tout d'abord constaté la place très réduite occupée par la topologie de $\mathbb{R}^N$ puisque les manuels consultés traitent principalement des espaces métriques et topologiques. Nous avons aussi repéré des caractérisations différentes de celles choisies dans notre enseignement, mettant en évidence des liens possibles entre les notions, notamment en les définissant les unes par rapport aux autres. Par exemple, les notions de voisinage et d'ouvert peuvent être reliées de la manière suivante dans le cadre des espaces métriques. Un ensemble est un voisinage d'un point x s'il contient une boule de centre x. Un ouvert est alors défini comme un ensemble qui est voisinage de chacun de ses points. Un autre itinéraire consiste à définir un ouvert comme un ensemble dont tous les points sont centres d'une boule contenue dans cet ensemble. Un voisinage d'un point x est un ensemble contenant un ouvert qui contient x. L'intérieur d'un ensemble est caractérisé de différentes manières dans les manuels : il peut être l'ensemble des points intérieurs à l'ensemble, la réunion de tous les ouverts contenus dans l'ensemble ou encore, le plus grand ouvert contenu dans l'ensemble. Il en va de même pour l'adhérence qui apparaît comme l'ensemble des points adhérents, l'intersection de tous les fermés contenant l'ensemble ou encore, comme le plus petit fermé contenant l'ensemble.

Ces modes d'introduction des notions montrent une utilisation prépondérante du registre de la langue naturelle pour caractériser les notions, ce qui révèle un autre décalage par rapport à notre enseignement dans lequel le registre symbolique est principalement sollicité. Revuz (1964) propose de plus une vision intuitive et géométrique de certaines notions à partir du registre de la langue naturelle. Après avoir défini les notions de fermeture et d'intérieur dans le cadre des espaces topologiques, il ajoute :

> Dans le plan (muni de la topologie déduite de la distance ordinaire), l'ensemble défini par un contour fermé et comprenant les points intérieurs au contour et une partie du contour admet pour fermeture le même ensemble et ses frontières complétées et pour intérieur, l'intérieur (au sens vulgaire du mot), du contour.

Cette mise en relief des notions de topologie nous permet de développer ici deux pistes de travail pour agir sur l'enseignement décrit. Tout d'abord, nous faisons l'hypothèse qu'un moyen de contribuer à donner du sens aux notions est la possibilité d'établir des liens entre elles. Des liens possibles ont émergé des analyses précédentes. Une première piste consiste donc à intégrer dans l'enseignement d'autres notions que celles fixées par l'institution. Cette question s'associe à celle de l'ordre d'exposition des contenus et des choix à réaliser pour caractériser les notions. Nous retenons ensuite l'utilisation du registre de la langue naturelle pour définir les notions, permettant ainsi de s'appuyer sur un vocabulaire intuitif avec des mots tels que « frontière », « intérieur », etc. Une autre piste de travail concerne la possibilité d'utiliser plus souvent ce registre, notamment pour introduire les notions. Dans cette perspective, une réflexion sur la formalisation des notions doit être menée.

Bien entendu, ces pistes doivent prendre en compte les contraintes institutionnelles qui, d'une part, délimitent les contenus à enseigner et d'autre part, donnent comme objectif à l'enseignement d'amener les étudiants à manipuler le registre symbolique utilisé dans les définitions. Nous décrivons maintenant comment ces pistes ont davantage mené à des aménagements de l'enseignement plutôt qu'à de réelles modifications.

IV. FORMALISATIONS DES NOTIONS

Nous avons déjà évoqué les difficultés d'introduction d'une notion FUG. Dans l'enseignement décrit au début de ce texte, les notions sont introduites par des définitions écrites d'emblée dans le registre symbolique. Nous avons soulevé les difficultés des étudiants à donner du sens aux nouvelles notions en travaillant dans cet unique registre d'écriture. Dans notre travail de thèse, nous avons repensé l'introduction des notions visées. Nous avons ainsi élargi les contenus à enseigner en intégrant les notions de point intérieur et de point adhérent. Cet aménagement permet, selon nous, un travail en réseau de notions susceptible d'établir une progression cohérente des contenus et de donner davantage de sens aux notions. Nous avons de plus élaboré une tâche d'introduction visant à faire découvrir aux étudiants les notions de point intérieur et de point adhérent à partir d'un travail sur des dessins associés à la manipulation de la langue naturelle. Nous l'avons présentée au colloque EMF 2009 (Bridoux 2011a). Cette tâche sert également de point d'appui pour introduire les autres notions visées de manière justifiée et en sollicitant différents registres d'écritures pour utiliser, in fine, le registre symbolique. Nous décrivons ici le parcours suivi à partir de la notion de point intérieur, mais un itinéraire semblable est bien sûr développé à partir de la notion de point adhérent.

Après avoir travaillé sur la tâche d'introduction, les étudiants caractérisent un point intérieur de la manière suivante : p est un point intérieur à A si A contient une boule ouverte de centre p. Ils y associent de plus l'idée intuitive qu'un point p est intérieur à A si p a « un peu de place autour de lui dans l'ensemble A ». Avec l'aide de l'enseignant, cette caractérisation est traduite dans le registre symbolique sous la forme :

$$p \text{ est intérieur à A ssi } \exists r > 0,\ \mathrm{B}(p,r) \subset \mathrm{A}.$$

Du point de vue de la syntaxe formelle, démarrer l'enseignement par l'introduction de types de points permet de manipuler une écriture contenant un unique quantificateur. L'introduction de la notion d'intérieur (respectivement d'adhérence) d'un ensemble peut alors se justifier de manière naturelle en considérant l'ensemble des points intérieurs à l'ensemble (respectivement l'ensemble des points adhérents à l'ensemble). Une autre question qui devient tout aussi naturelle est de savoir si un ensemble peut coïncider avec son intérieur (respectivement avec son adhérence). Cela permet de définir les notions d'ouvert et de fermé.

Cet itinéraire permet donc d'introduire chaque notion, à partir d'un questionnement naturel et accessible aux étudiants, avec un formalisme moins complexe que celui initialement utilisé. En effet, l'intérieur s'écrit dans le langage symbolique comme $\mathrm{int}\,\mathrm{A} = \{x \in \mathrm{A} : \exists r > 0, \mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{A}\}$. Dès lors, un ensemble A est ouvert si et seulement si A = int A.

V. GESTION DES TÂCHES DE MANIPULATION DES DÉFINITIONS

Un autre aménagement de l'enseignement initial est l'incorporation de nombreux exemples, tant au niveau des types de points que des types d'ensembles. Nous pensons en effet que l'exemplification contribue à enrichir le stock de référence des étudiants et peut les aider à mieux se représenter la structure topologique des ensembles, notamment à partir des ressemblances et des différences avec les exemples traités dans le cours. Traiter des exemples permet également une prise en compte ciblée de la non disponibilité des connaissances en logique et en théorie des ensembles. Il ne s'agit donc pas de prévoir un cours avant l'enseignement pour faire travailler ces connaissances mais bien de les expliciter et les travailler au fur et à mesure.

Toutefois, nous faisons l'hypothèse que la multiplication des exemples peut favoriser les apprentissages des étudiants en topologie, tant du point de vue du sens que de la technique, moyennant une gestion adaptée du travail de l'enseignant en classe. En effet, les difficultés des étudiants rencontrées dans la manipulation d'une définition, ce qui devrait pourtant être une application immédiate du cours, nous amènent à admettre que la complexité du travail mathématique engendré par ce type de tâches ne peut être laissée à la charge des étudiants. En d'autres mots, nous pensons que de laisser chercher les étudiants de manière autonome sur ce type de tâches ne leur permet pas de surmonter les difficultés repérées, compte tenu de la distance entre ce qu'ils savent et ce dont ils ont besoin. Nous avons donc aménagé des phases durant lesquelles c'est l'enseignant qui montre aux étudiants le fonctionnement des connaissances mathématiques en jeu, par ostension assumée et par la multiplication des exemples. Nous empruntons ici à Vygotski des idées selon lesquelles il peut y avoir appropriation des connaissances par imitation, si les connaissances nouvelles sont proches des anciennes connaissances. Dans notre cas, nous savons que cette distance est grande mais nous faisons le pari que l'enseignant peut contribuer à la réduire en développant de nombreux exemples bien choisis. Des phases de travail autonome peuvent néanmoins être organisées, comme dans l'introduction des notions ou sur certains types de tâches à la fin de l'enseignement. L'exemplification que nous décrivons ici pose donc la question de la gestion à prévoir en classe par l'enseignant durant les tâches de manipulation des définitions.

D'un point de vue méthodologique, nous procédons de la manière suivante pour caractériser le travail des étudiants en classe. Dans un premier temps, nous réalisons une analyse a priori des exercices à proposer aux étudiants. Cependant, le travail qui est effectivement réalisé en classe est conditionné par la gestion de l'enseignant. Ses interventions peuvent en effet fortement influencer le travail prévu a priori. Robert et Rogalski (2004) ont montré que, dans certains cas, le déroulement en classe ne suit pas le même chemin que celui prévu par l'analyse a priori. Parfois, l'enseignant découpe la tâche, par le biais de ses interventions, en sous-tâches qui deviennent élémentaires. Le travail engendré est alors séquentialisé :

> Les élèves font fonctionner les outils les uns après les autres, ils n'ont besoin que de connaissances outils (empilées) correspondant au cours et soufflées par le découpage organisé par l'enseignant. (Robert et Rogalski, p. 83)

Pour illustrer notre propos, nous présentons deux exercices proposés à différents moments de l'enseignement. L'exercice 1 apparaît juste après l'introduction des notions de points intérieur et adhérent, l'exercice 2 est quant à lui proposé à la fin de l'enseignement.

1. Tâches proposées aux étudiants

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, on donne un point p et un ensemble A. Dites si le point p est intérieur à A ou non, adhérent à A ou non. Justifiez votre réponse.

1) $p = 1/3$, $\mathrm{A} = [0,1] \subset \mathbb{R}$
2) $p = -\sqrt{2}$, $\mathrm{A} = [-2,1] \subset \mathbb{R}$
3) $p = 1$, $\mathrm{A} = [0,1[\subset \mathbb{R}$
4) $p = 1/2$, $\mathrm{A} = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$
5) $p = 0$, $\mathrm{A} = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$
6) $p = (2,4)$, $\mathrm{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$
7) pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $r > 0$, $p = (x, y - r/3)$, $\mathrm{A} = \mathrm{B}\big((x,y), r\big) \subset \mathbb{R}^2$

Exercice 2

Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Justifiez votre réponse.

1) $[\pi, +\infty[\subset \mathbb{R}$
2) $]-\infty, -2[\subset \mathbb{R}$
3) $\{3\} \subset \mathbb{R}$
4) $\{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$
5) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 6\} \subset \mathbb{R}^2$

L'exercice 1 a pour objectif d'habituer les étudiants à manipuler le registre symbolique pour rédiger les raisonnements attendus. La progression des exemples est telle que la nature des nombres et celle des ensembles se complexifient au fur et à mesure de l'exercice. Les exemples 6 et 7 provoquent un changement de cadre nécessitant d'adapter les raisonnements développés dans $\mathbb{R}$ à des couples de nombres réels.

L'exercice 2 porte sur la structure topologique des intervalles non bornés de $\mathbb{R}$, d'un singleton et de deux sous-ensembles classiques de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^2$.

Nous choisissons de présenter l'analyse a priori des exemples 4 dans chaque exercice, en nous focalisant sur les notions d'intérieur et d'ouvert, ainsi que la gestion prévue. Nous rendons compte par après du déroulement en classe.

2. *Analyses a priori*

Nous donnons en annexe une solution possible pour chaque exemple à traiter en rédigeant celle-ci avec la rigueur attendue dans notre enseignement.

Dans l'exercice 1, l'exemple 4 requiert en premier lieu de savoir si le point p est intérieur à l'ensemble ou non. Il faut ensuite prouver la négation de la définition, c'est-à-dire ici $\forall r > 0$, $\mathrm{B}(1/2\,, r) \not\subset$ A. Une connaissance du cours est alors mise en jeu : dans $\mathbb{R}$, la boule ouverte de centre x et de rayon r est l'intervalle $]x - r, x + r[$. L'organisation du raisonnement est alors de trouver un réel y tel que $y \in \mathrm{B}(1/2\,, r)$ et $y \notin$ A. Justifier que y convient mobilise la manipulation d'inégalités et l'ordre sur $\mathbb{R}$ (connaissances anciennes).

Dans l'exercice 2, l'exemple 4 nécessite en premier lieu de savoir si l'ensemble est ouvert ou non. L'ensemble, que nous notons A, n'est pas ouvert, ce qui amène à prouver qu'on a A $\not\subset$ int A. Il faut donc trouver un réel y tel que $y \in$ A et $y \notin$ int A. Ensuite, montrer que le choix fait pour y convient engendre un travail semblable à celui réalisé dans l'exercice 1.

3. *Gestion de l'enseignant en classe*

Compte tenu des difficultés répertoriées chez les étudiants dans la réalisation des tâches de manipulation des définitions, nous choisissons, pour l'exercice 1, d'organiser un moment de recherche individuelle pour que les étudiants prennent connaissance des différents exemples à traiter. Mais la correction prend la forme d'une discussion collective durant laquelle c'est l'enseignant qui montre le type de justification et la rigueur attendus pour manipuler les définitions à partir du registre symbolique. Dans cette perspective, il insiste sur les adaptations de connaissances à réaliser et sur la manière d'utiliser les connaissances en logique et en théorie des ensembles mises en jeu, dont on sait qu'elles ne sont pas disponibles chez un grand nombre d'étudiants à ce stade de l'enseignement.

Durant l'exercice 2, la gestion en classe prend la forme d'une phase de recherche individuelle assez longue, pour que les étudiants aient le temps de traiter chaque exemple. Ils doivent ici réaliser de manière autonome les adaptations nécessaires pour étudier chaque ensemble. Compte tenu des analyses a priori, nous faisons donc l'hypothèse que la gestion prévue pour l'exercice 1 permettra aux étudiants « d'imiter » le travail réalisé par l'enseignant pour résoudre l'exercice 2. Du point de vue du déroulement en classe, la mise au travail des étudiants s'est faite sans difficulté. Toutefois un temps de recherche de 40 minutes a été organisé alors que la gestion prévue a priori comptait 25 minutes. Aucune difficulté particulière ni de blocage n'a été repéré chez les étudiants pendant la réalisation de la tâche. Les étudiants ont travaillé individuellement tout en discutant entre eux. En circulant parmi eux pour maintenir les conditions de travail, nous avons constaté que la majorité des étudiants parvenait à conjecturer si les ensembles étaient ouverts, fermés ou non. Nous avons également noté dans certaines productions quelques manques de justification (par exemple une inclusion d'ensembles non prouvée) qui ont pu être complétés à notre demande. Le travail réalisé semble donc conforme à celui prévu dans l'analyse a priori mais il est bien sûr impossible d'avoir accès à la production de chaque étudiant en classe. La correction de cet exercice a pris une forme identique à celle de l'exercice 1, c'est-à-dire celle d'une discussion collective entre les étudiants et l'enseignant, ce dernier présentant au tableau les réponses dictées par les étudiants, en les ajustant au besoin.

VI. APPRENTISSAGES DES ÉTUDIANTS

Après avoir expérimenté notre dispositif didactique intégrant notamment les aménagements décrits dans ce texte, nous nous sommes appuyée sur le dépouillement des copies aux évaluations pour caractériser les apprentissages des étudiants. Dans notre institution, une première évaluation est organisée au mois de juin et les étudiants qui échouent se prêtent à une autre évaluation au mois d'août. Nous rendons compte ici de la question portant sur la manipulation des définitions proposée à la seconde évaluation, une question similaire ayant été posée en juin. En voici l'énoncé :

Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^N$.

1) Définissez « A est un ensemble ouvert ».
2) Définissez « A est un ensemble fermé ».
3) À partir des définitions précédentes, dites, pour chacun des ensembles suivants, s'il est ouvert ou fermé :
   - $\mathrm{E}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y\} \subset \mathbb{R}^2$
   - $\mathrm{E}_2 = \{(n+1)/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$
   - $\mathrm{E}_3 = \{x \in \mathbb{R} : x^3 + x^2 + x + 1 < 1\} \subset \mathbb{R}$

Nous avons montré que l'analyse a priori de cet exercice met en jeu un travail identique à celui réalisé dans des exercices proposés durant l'expérimentation, tant du point de vue des connaissances à utiliser que des adaptations à réaliser sur celles-ci (Bridoux 2011b). Ainsi, un aspect important du travail attendu de l'étudiant est de particulariser des variables communes à cet exercice et à ceux réalisés en cours, telles que la nature des nombres, le choix du rayon d'une boule, etc. Notre démarche globale pour caractériser les apprentissages des étudiants sur ce type de tâches a donc consisté à analyser comment ils étudient la nature topologique de quelques ensembles ayant des traits communs avec ceux étudiés dans le cours et les difficultés rencontrées dans la manipulation du registre symbolique.

Les 23 étudiants auprès de qui nous avons expérimenté le dispositif ont présenté au final les deux évaluations. Elles montrent que les étudiants ont progressé tant dans la restitution des définitions que dans les tâches de manipulation de ces dernières puisque nous avons un taux de réussite de 80% sur ce types de questions. Concernant les définitions, nous observons des erreurs ponctuelles. Par exemple, un étudiant définit l'intérieur d'un ensemble A par $\forall x \in \mathrm{A}$, $\exists r > 0,\ \mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{A}$. Un autre étudiant définit un ensemble fermé par $\forall x \in \mathrm{A},\ \forall (x_n) \subset \mathrm{A}$, si $x_n \longrightarrow x$, alors $x \in \mathrm{A}$. Concernant la manipulation du registre symbolique utilisé dans les définitions, nous relevons ce que nous appelons le « principe du tout ou rien » : soit l'étudiant répond correctement à la question, soit il est bloqué au démarrage de l'exercice et n'écrit pratiquement rien sur sa copie. Voici quelques exemples d'erreurs observées dans les copies. Pour montrer que l'ensemble E_2 n'est pas ouvert, deux étudiants ne parviennent pas à trouver un réel y tel que $y \in \mathrm{B}(2, r)$, pour un certain r, et $y \notin \mathrm{E}_2$. Pour l'ensemble E_3, deux étudiants ne s'intéressent pas à la résolution de l'inéquation pour remarquer que E_3 est un intervalle et ne parviennent pas à conjecturer si l'ensemble est ouvert ou non, fermé ou non. Enfin, deux étudiants traduisent la non-inclusion $\mathrm{E}_1 \not\subset \operatorname{int} \mathrm{E}_1$ de la manière suivante : « soit $z \in \mathrm{E}_1$. Montrons que $z \notin \operatorname{int} \mathrm{E}_1$ ».

VII. CONCLUSION

Le point de départ de nos recherches sur les notions de topologie réside dans notre volonté d'intervenir, en tant qu'enseignante, dans un enseignement soumis à des contraintes institutionnelles fortes et qui mène à un constat d'échec. Nous nous sommes centrée ici sur la possibilité de réduire certaines difficultés repérées chez les étudiants dans les tâches de manipulation des définitions des notions présentées dans le cours.

En nous appuyant sur des analyses didactiques menées en amont de l'enseignement, nous avons élargi le réseau de notions à enseigner et nous avons agi sur les formalisations des notions de manière à leur donner davantage de sens. Ce premier aménagement nous a permis de développer un itinéraire présentant, selon nous, une meilleure cohérence dans l'introduction des notions par rapport à l'enseignement initial. Concernant les exercices visés, l'itinéraire développé associé à une gestion spécifique de l'enseignant durant les phases d'exercices a permis de montrer aux étudiants pas à pas le travail de manipulation des définitions attendu, pour les amener à réaliser seuls, à la fin de l'enseignement, les tâches visées par l'institution.

Les évaluations montrent les progrès des étudiants sur ce type de tâches. Toutefois, même si les aménagements décrits ici permettent à l'enseignement de tenir ses promesses vis-à-vis des contraintes institutionnelles qui le délimitent, nous avons été amenée à questionner ces contraintes tout au long de notre travail de thèse et à mener une réflexion plus globale sur l'enseignement supérieur en général. En effet, au fil du temps, certaines habitudes de l'enseignant et de l'institution peuvent devenir transparentes, notamment en termes de rigueur attendue dans les productions des étudiants ou concernant les contenus à enseigner et leur progression, par exemple. L'importance de ces habitudes et des contraintes institutionnelles nous a été révélée dans nos recherches. Avec le temps, les contraintes ne sont plus questionnées alors que les connaissances des étudiants se modifient au fil des années. Les analyses didactiques que nous avons menées nous ont permis de mieux interroger nos choix en tant qu'enseignante et d'envisager d'autres possibilités d'enseignement~~s~~, menant probablement à d'autres apprentissages chez les étudiants.

RÉFÉRENCES

Bridoux S. (2005) Analyse d'un enseignement de topologie en première année d'université. *Cahier de Didactique des Mathématiques* 51. Université Paris 7.

Bridoux S. (2008) Utiliser une définition, une tâche simple a priori ; le cas de la topologie de $\mathbb{R}^N$. *Actes du colloque EMF 2006.* Université de Sherbrooke, Canada.

Bridoux S. (2011a) Une séquence d'introduction des notions de topologie dans $\mathbb{R}^N$: de la conception à l'expérimentation. *Actes du colloque EMF 2009,* Université de Dakar, Sénégal.

Bridoux S. (2011b) *Enseignement des premières notions de topologie à l'université – Une étude de cas*. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot.

Cantor G. (1883) Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Math. Ann.* 5, 123-132. 1872, *Gesamm. Abh.* 92-101, Springer, Berlin, 1932, trad. Française *Acta Mathematica,* 2, 336-348, 1883.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique.* Grenoble : La Pensée Sauvage. Rééd. augmentée (1991).

Dorier J.-L. (2000) Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre Linéaire – Perspectives théoriques sur leurs interactions. *Les cahiers du Laboratoire Leibniz,* Numéro 12, Laboratoire Leibniz – IMAG.

Fréchet M. (1906) Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 22, 1-74.

Revuz A. et G. (1964) *Cours de l'APM.* Paris, APMEP.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2), 138-190.

Robert A., Rogalski M. (2004) Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée. *Repères* 54, 77-103.

Schwartz L. (1967) *Cours d'analyse.* Hermann.

Weierstrass K. (1894) *Mathematische Werke.* Band I. Berlin : Layer und Müller.

ANNEXE

$1/2$ n'est pas un point intérieur à l'ensemble $\mathrm{A} = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$. En effet, $\forall r > 0,\ \mathrm{B}(1/2, r) \not\subset \mathrm{A}$. Soit $r > 0$. Cherchons un réel y tel que $y \in \mathrm{B}(1/2, r)$ et $y \notin \mathrm{A}$. Si $r = 1$, alors $\mathrm{B}(1/2, r) =]-1/2, 3/2[$ par définition d'une boule dans $\mathbb{R}$. Prenons alors $y = 3/4$. On a $y \in \mathrm{B}(1/2, 1)$ et $y \notin \mathrm{A}$ car y n'est pas de la forme $1/n$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si $r \neq 1$, alors prenons $y = 1/2 + r/2$. On a $y \in \mathrm{B}(1/2, r)$ car, comme $r > 0$, $1/2 - r < 1/2 + r/2 < 1/2 + r$. Mais $1/2 + r/2 \notin \mathrm{A}$ car $1/2 + r/2 = (1 + r)/2$ n'est pas de la forme $1/n$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$\mathrm{A} = \{1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ n'est pas un ensemble ouvert car A n'est pas égal à son intérieur. En effet, 1 n'est pas un point intérieur à A. Montrons que $\forall r > 0,\ \mathrm{B}(1, r) \not\subset \mathrm{A}$. Soit $r > 0$. Prenons $y = 1 + r/2$. On a $y \in \mathrm{B}(1, r)$. Mais $y \notin \mathrm{A}$ puisque $y > 1$ car $r > 0$ et pour tout $n \geq 1,\ 1/n \leq 1$.