Questions de logique et de langage à la transition secondaire – supérieur L'exemple de la négation

Viviane DURAND-GUERRIER ; Université de Lyon, Université Lyon 1,
Laboratoire LEPS, EA 4148
vdurand@univ-lyon1.fr

Judith NJOMGANG NGANSOP ; Université Lyon 1, Université de Yaoundé
Laboratoire LEPS, EA 4148
judithnjomg@yahoo.fr

Résumé
Les questions de logique et de langage se posent tout au long de la scolarité, mais elles sont particulièrement cruciales en début d'université, en raison de la complexité grandissante des objets mathématiques étudiés qui rendent nécessaire un recours plus fréquent au formalisme aussi bien logique que mathématique, tant pour les définir que pour pouvoir mettre en œuvre les procédés opératoires et les raisonnements nécessaires à leur acquisition. Dans cette communication, nous argumenterons cette thèse en l'appuyant sur les aspects épistémologiques et langagiers d'une part, en présentant quelques résultats expérimentaux d'autre part.

1. INTRODUCTION

Les questions de logique et de langage se posent tout au long de la scolarité, mais elles sont particulièrement cruciales en début d'université, en raison de la complexité grandissante des objets mathématiques étudiés qui rendent nécessaire un recours plus fréquent au formalisme tant logique que mathématique, à la fois pour les définir et pour pouvoir mettre en œuvre les procédés opératoires et les raisonnements nécessaires à leur acquisition. Les difficultés apparaissent comme particulièrement résistantes lorsqu'il s'agit de manipuler des énoncés comportant plusieurs quantificateurs (Selden & Selden, 1995 ; Dubinski & Yparaki, 2000 ; Rogalski & Rogalski, 2004 ; Chellougui, 2004), ceci pouvant être mis en rapport avec des difficultés identifiées dans l'histoire récente des mathématiques, en particulier en Analyse (Durand-Guerrier et Arsac, 2003 ; Barrier, à paraître). D'autres difficultés, moins bien identifiées en général, concernent le concept de négation. Les travaux conduits par Imed Ben Kilani (Ben Kilani, 2005) dans le contexte de l'enseignement tunisien ont mis en évidence d'une part, le fait que le concept de négation est beaucoup plus complexe qu'il n'est généralement admis et d'autre part, que cette complexité rend l'usage de la négation difficile dans l'activité mathématique, *a fortiori* quand la langue d'enseignement change au cours de la scolarité. Pour un tel concept, une étude épistémologique pour se défaire de l'illusion de transparence de l'objet (Artigue, 1991) apparaît comme tout à fait nécessaire (Durand-Guerrier & Ben Kilani, 2004). Nous la complétons par une incursion vers les travaux des linguistes sur son usage dans la langue ordinaire, compte tenu du fait que le discours mathématique est porté par la langue vernaculaire, tant à l'oral que pour partie à l'écrit. Nous présenterons brièvement dans une première partie les résultats de ces études[1]. Dans une deuxième partie, nous exposerons les motifs pour s'intéresser à la question de la négation à l'université. On pourrait en effet considérer que, à ce

[1] Ces résultats sont détaillés dans Durand-Guerrier & Ben Kilani, 2004.

niveau, ce concept devrait s'être installé tant par son usage quotidien que par la pratique mathématique développée dans le secondaire. Nous dirons pourquoi il est légitime de faire l'hypothèse que tel n'est pas le cas pour un nombre non négligeable d'étudiants. Dans la troisième partie de cette communication, nous présenterons quelques résultats expérimentaux.

2. LA NEGATION, ENTRE SYNTAXE ET SEMANTIQUE

On rencontre la notion de négation dès l'Antiquité, en particulier dans le livre 2 de l'Organon, puis chez les logiciens de l'époque contemporaine, qui tentent d'en cerner les contours. Nous retraçons ci-dessous les principaux éléments susceptibles d'éclairer les études didactiques.

2.1. Deux types d'opposition chez Aristote

Dans le livre 2 de l'Organon, *De l'interprétation* [2], Aristote étudie à partir d'un exemple deux types d'opposition pour les énoncés quantifiés qui s'appliquent aux termes généraux, qui peuvent êtres prédiqués de plusieurs individus ou objets et servent à exprimer des propriétés. Aristote définit tout d'abord quatre types de phrases, qui serviront à la théorie du syllogisme formel, pour lesquelles il assume l'hypothèse implicite de l'existence d'au moins un homme.

(1) *Tout homme est blanc* (2) *Nul homme n'est blanc*
(3) *Quelque homme est blanc* (4) *Quelque homme n'est pas blanc*

Les phrases (1) et (4) (respectivement (2) et (3)) échangent leurs valeurs de vérité. Dans tout contexte où (1) est vrai *nécessairement,* (4) est fausse et vice-versa. Aristote appelle cette opposition une *contradiction,* ceci correspondant à ce que nous appelons aujourd'hui la *négation*.

Les phrases (1) et (2) peuvent être simultanément fausses ; elles ne peuvent en aucun cas être simultanément vraies. Aristote appelle cette opposition l'opposition de *contrariété*, ceci correspondant à une notion sémantique de *contraire* en accord avec la définition ci-dessus.

Les phrases (3) et (4) peuvent être simultanément vraies ; il n'y a pas d'opposition entre ces deux types de phrases. Dans la théorie du syllogisme, Aristote s'appuie exclusivement sur des phrases quantifiées exprimées sous la forme : « Tout *A* est *B* » ; « nul *A* n'est *B* » ; « quelque *A* est *B* », « quelque *A* n'est pas *B* » ; il reconnaît que « quelque *B* est *A* » peut se substituer, sans modifier la valeur de vérité à « quelque *A* est *B* » et que « nul *B* n'est *A* » peut se substituer à « nul *A* n'est *B* » ; la substitution par échange des positions n'est évidemment pas possible avec les phrases (1) et (4).

On voit déjà apparaître ici la spécificité de la négation : *une forme syntaxique* (des règles de construction précises) contrôlée par *un critère sémantique,* à savoir l'échange des valeurs de vérité dans tout contexte où il existe au moins un A.

[2] Traduction française de Jean Tricot, édition Vrin.

2.2. La négation dans le calcul des prédicats

Dans le calcul des propositions, la négation est un opérateur qui échange le vrai et le faux. C'est la définition sémantique la plus naturelle de cet opérateur. Dans ce système, il y a une seule forme d'opposition pour les propositions, qu'elles soient élémentaires ou complexes. Pour les propositions complexes, la négation se construit récursivement à partir de la négation des différents connecteurs, obtenue en échangeant les valeurs de vérité dans les tables, de sorte que l'opérateur de négation ne porte plus que sur les propositions élémentaires. Ainsi la négation de « $p \wedge q$ » est « $\neg p \vee \neg q$), la négation de « $p \Rightarrow q$ » est « $p \wedge \neg q$ », la négation de « $p \Rightarrow (q \wedge r)$ » est « $p \wedge \neg (q \wedge r)$ », c'est-à-dire « $p \wedge (\neg q \vee \neg r)$ », etc.

Dans le calcul des prédicats, la négation est un opérateur s'appliquant soit à des propositions (des phrases closes), soit à des fonctions propositionnelles (des phrases ouvertes). Comme ces dernières n'ont pas de valeur de vérité, il faut donc considérer *une extension du concept de négation.* C'est ce que soutient par exemple Da Costa (1997) qui, après avoir rappelé la table de vérité de l'opérateur propositionnel de négation, écrit (p. 45) que ceci ne rend pas compte de la négation des propriétés, ce que permet la théorie sémantique de la vérité de Tarski. C'est, en effet, grâce à la notion de satisfaction que l'on peut définir simplement et rigoureusement la négation d'une fonction propositionnelle. *Étant donnée une fonction propositionnelle F, sa négation ¬F est la fonction propositionnelle qui dans toute structure interprétative adéquate est satisfaite exactement par les suites d'objets qui ne satisfont pas F.*

Ceci correspond tout à fait à la notion intuitive de négation pour les atomes. Par exemple, dans l'arithmétique des entiers naturels le couple d'opposé « *être divisible par 3 / ne pas être divisible par 3* » permet de répartir les entiers en deux classes exactement : l'une formée des entiers multiples de 3 et l'autre formée des entiers qui ne sont pas multiples de 3. Une conséquence immédiate de cette définition, c'est que les deux énoncés suivants « $Fx \vee \neg Fx$ » et « $\forall x\,(Fx \vee \neg Fx)$ » sont universellement valides. Une deuxième conséquence, c'est que cela permet de retrouver les deux types d'oppositions définis par Aristote. En effet « $\forall x\ F(x)$ » et « $\exists x\ \neg F(x)$ » échangent leurs valeurs de vérité : il en est de même de « $\exists x\ F(x)$ » et « $\forall x\ \neg F(x)$ » ; tandis que « $\forall x\ F(x)$ » et « $\forall x\ \neg F(x)$ » peuvent être simultanément fausses, alors que « $\exists x\ F(x)$ » et « $\exists x\ \neg F(x)$ » peuvent être simultanément vraies. On a donc bien deux formes d'opposition pour les propositions closes quantifiées de ce type : la négation, qui échange le vrai et le faux (ce qu'Aristote appelle la contradiction) et ce que suivant Aristote nous choisissons d'appeler un contraire, qui consiste à quantifier universellement la fonction propositionnelle et sa négation. La nécessité d'insister sur cette distinction est reconnue par Russell (1903) qui écrit : « *C'est une erreur, quoique facile à commettre, que de croire que* $[\forall x\ \neg F(x)]$ *est la négation de* $[\forall x\ F(x)]$. » Notons enfin que malgré la présence d'un marqueur de négation dans l'énoncé « $\exists x\ \neg F(x)$ », il n'y a pas d'opposition avec l'énoncé « $\exists x\ F(x)$ », puisqu'ils peuvent être vrais en même temps, sous les mêmes circonstances, dans les mêmes interprétations. Une troisième conséquence est que l'on retrouve les deux résultats assurant l'inter-définissabilité des deux quantificateurs : « $\forall x\ F(x) \equiv$[3] $\neg(\exists x \neg F(x))$ » et « $\exists x\ F(x) \equiv \neg(\forall x \neg F(x))$ ». Ceci permet de donner une définition syntaxique de la négation dans le calcul des prédicats en accord avec la

[3] Ce symbole marque le fait que l'équivalence entre deux expressions du calcul des prédicats est universellement valide.

définition sémantique. On peut alors, comme dans le calcul des propositions, construire de manière récursive la négation d'une fonction propositionnelle complexe de sorte que la négation ne porte que sur des formules atomiques, comme pour l'exemple suivant :

$$\neg(\forall x\ ((\forall z\ F(x, z)) \Rightarrow G(x)) \equiv \exists x\ \neg((\forall z\ F(x, z)) \Rightarrow G(x)) \equiv \exists x\ (\ (\forall z\ F(x, z) \wedge \neg(G(x)).$$

Ceci montre également que l'on n'a pas besoin, en logique, d'introduire des symboles barrés comme on le fait en mathématique ; c'est l'opérateur de négation qui joue ce rôle, et la construction récursive de la négation pour les énoncés complexes offre un moyen opératoire d'accéder à la signification de la négation d'un tel énoncé dans une interprétation donnée. Toutefois, pour pouvoir utiliser de manière efficace ces procédures récursives, il est nécessaire que la syntaxe utilisée pour formaliser les énoncés soit en adéquation avec les règles de formation du calcul des prédicats, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs, ce qui est loin d'être toujours le cas dans la pratique mathématique ordinaire.

2.3. Négation et contraire dans la langue

Comme on l'a vu plus haut, la négation est une opération qui répond à un critère sémantique (elle échange le vrai et le faux) et doit respecter des règles syntaxiques (ce n'est pas n'importe quel énoncé faux qui est la négation d'un énoncé vrai donné). En effet, la forme syntaxique d'un énoncé complexe doit assurer l'échange des valeurs de vérité dans tout modèle de cet énoncé, ce que l'on obtient avec la construction récursive mentionnée plus haut. Ceci permet d'associer à chaque énoncé complexe bien formé du calcul des prédicats une négation de façon univoque et non ambiguë. Il n'en est évidemment pas de même dans les langages non formalisés. Comme l'essentiel du discours mathématique est porté par la langue vernaculaire, il est donc nécessaire de regarder ce qu'il en est des formes langagières de la négation et de leur usage dans l'activité mathématique. Cette question a fait l'objet de nombreuses observations naturalistes et est au cœur de la thèse de Ben Kilani (2005)[4].

Une première remarque, c'est que l'on rencontre parfois les termes de négation et de contraire utilisés comme synonymes. Par exemple, dans le manuel Transmath, programme 2000, Seconde, on peut lire : « Pourquoi le contraire de « *f* croissante » n'est pas « *f* décroissante » ? Parce que si c'était le cas, une fonction non croissante serait décroissante. Or certaines fonctions ne sont ni décroissantes, ni croissantes. » (p. 91)

Il est clair que la remarque ci-dessus signifie que *la négation* de la phrase ouverte « *f* est croissante » ne s'exprime pas, dans la langue française par la phrase ouverte « *f* est décroissante », ou encore que la phrase « *f* n'est pas une fonction croissante » n'est pas synonyme de la phrase « *f* est une fonction décroissante ». Tout enseignant de mathématiques à l'université sait que cette mise au point reste nécessaire en première année[5]. En fait, le couple « croissante / décroissante[6] » fonctionne, dans la langue française, comme un couple d'antonymes, ce qui

[4] Qui étudie en outre les effets du bilinguisme puisque ses observations se font dans l'enseignement tunisien (voir aussi Durand-Guerrier & Ben Kilani, 2004).
[5] Voir par exemple Haug, 2000.
[6] Les deux termes étant pris l'un au sens strict, l'autre au sens large.

correspond peu ou prou à la notion de contraire au sens d'Aristote, dans la mesure où l'opposition est précisément beaucoup plus radicale que la simple négation. D'autres couples de propriétés en mathématiques soulèvent des problèmes du même ordre. Par exemple, le couple « paire / impaire » qui, lorsqu'il est appliqué aux fonctions, correspond plus ou moins à *un contraire*, tandis que le couple « pair / impair » appliqué aux nombres correspond à *la négation*. On voit que c'est l'introduction d'une quantification universelle qui fait ici basculer de *négation* à *contraire*. D'autres couples d'opposés en mathématiques fonctionnent comme des négations ; c'est le cas, par exemple, de « rationnels / irrationnels » pour les nombres, considérés dans l'ensemble des nombres réels, ou « continue / discontinue » pour les fonctions ; mais il n'y a pas de construction systématique de tels couples d'opposés pour les propriétés mathématiques : ainsi on ne parle pas de *nombres irréels*.

2.4. Négation et ambiguïtés sémantiques

D'autres difficultés dans la langue sont liées aux ambiguïtés sémantiques (Fuchs, 1996). En ce qui nous concerne, nous avons recueilli à de très nombreuses reprises les réponses ci-dessous de la part de professeurs de mathématiques en formation initiale ou continue :

- La négation (le contraire) de la phrase « Toutes les boules sont rouges » c'est : Toutes les boules ne sont pas rouges – Aucune boule n'est rouge – Certaines boules ne sont pas rouges – Il existe au moins une boule qui n'est pas rouge.
- La négation (le contraire) de la phrase « Certaines boules sont rouges » c'est : Certaines boules ne sont pas rouges – Toutes les boules ne sont pas rouges – Toutes les boules sont rouges – Aucune boule n'est rouge.

À la suite de la mise en commun des réponses fournies individuellement, apparaissent régulièrement de très vifs débats d'une part sur le fait de savoir si *négation* et *contraire* sont synonymes ou non, d'autre part sur la signification de la phrase « *Toutes les boules ne sont pas rouges* » (1), qui pour certains s'interprètent par « *Aucune boule n'est rouge* » (2), et pour d'autres par « *Certaine(s) boule(s) n'est (ne sont) pas rouges* » (3).

Fuchs (1996) reconnaît que si la norme linguistique voudrait que (1) soit synonyme de (3), il arrive fréquemment que (1) soit utilisée en lieu et place de (2). Ceci est dû à une ambiguïté sur les priorités respectives de l'opérateur de négation et de l'opérateur de quantification. Dans le calcul des prédicats, la phrase (3) se traduit par « $\exists x \neg F(x)$ », qui est équivalent à « $\neg \forall x\ F(x)$ », tandis que la phrase (2) se traduit par « $\forall x \neg F(x)$ ». Considérons maintenant la phrase « *Tous les élèves sont présents* » qui a la même structure syntaxique que la phrase « *Toutes les boules sont rouges* », et la forme négative associée « *Tous les élèves ne sont pas présents* ». Par substitution de « *sont absents* » à « *ne sont pas présents* », ce qui est correct puisque « *être absent* » est la négation de « *être présent* », nous obtenons la phrase « *Tous les élèves sont absents* », qui est synonyme de « *Aucun élève n'est présent* », ce qui montre que l'ambiguïté de l'expression « *tous… ne pas* » en français peut difficilement être évitée.

À l'issue de ce rapide tour d'horizon de quelques aspects épistémologiques et langagiers, nous pouvons déjà apercevoir que la complexité de ce connecteur logique, en apparence si banal, est bien réelle et l'on peut supposer que ceci est susceptible d'engendrer des obstacles pour les apprentissages mathématiques. Ben Kilani (2005) montre que tel est bien le cas pour les élèves tunisiens à la transition entre l'école de base, où les mathématiques sont enseignées en Arabe, et l'école secondaire, où elles sont enseignées en Français[7]. Dans les travaux que nous conduisons actuellement sur cette question, nous faisons l'hypothèse que ceci vaut aussi, et peut-être même encore plus pour l'enseignement supérieur.

3. LA NEGATION, UN CONCEPT A TRAVAILLER A L'UNIVERSITE

Dans cette troisième partie de notre communication, nous allons présenter quelques-unes des motivations qui nous conduisent à engager un travail de recherche sur l'enseignement de la négation en début d'université, puis nous présenterons deux exemples, issus de deux cours polycopiés de licence, en appui à nos propos.

3.1. Nos motivations

Notre première motivation est liée à nos activités d'enseignantes et de formatrices d'enseignants, qui nous font rencontrer très régulièrement des étudiants, des jeunes enseignants de mathématiques, voire même des enseignants chevronnés, qui se trouvent désarmés devant la nécessité ou la requête d'avoir à nier un énoncé quantifié. Le fait que ces difficultés résistent aux apprentissages mathématiques nous amènent naturellement, dans une perspective didactique, à considérer que cela pourrait ne pas être dû seulement à des difficultés relevant du registre psychologique ou psychanalytique, ni seulement à la complexité du concept, mais aussi au fait que cette complexité est le plus souvent largement sous-estimée par les enseignants de mathématiques, ce qui conduit à ne pas considérer la nécessité de faire un travail spécifique permettant son acquisition. De fait, la négation, comme les autres concepts logico-mathématiques, est l'un des éléments qui cristallise les difficultés de la transition secondaire- supérieur. En effet, ces concepts ne sont pratiquement pas étudiés dans le secondaire et pourtant, ils semblent être considérés comme pratiquement acquis dans le supérieur, où l'on se contente le plus souvent de quelques rappels en début de première année, mettant en outre l'accent presque exclusivement sur les aspects syntaxiques et sur les règles opératoires. Ceci peut d'ailleurs facilement s'expliquer par le fait que la négation étant mobilisée dans la vie quotidienne depuis la plus tendre enfance, on pourrait en effet supposer qu'elle est maîtrisée par les étudiants arrivant à l'université. Néanmoins, la non prise en compte des difficultés intrinsèques aux notions logiques à l'université conduit à renvoyer les causes de l'échec aux incapacités supposées des étudiants, voire à des déficits cognitifs, ou à une absence de rationalité[8]. Lors d'un module expérimental que nous avons proposé à des étudiants volontaires de première année de licence à l'université Lyon 1 en janvier 2007[9] pour travailler sur ces questions, nous avons recueilli au moment de l'évaluation finale le témoignage suivant :

> *Merci pour cette initiative. Souvent je perds espoir de réussir dans les maths (alors que c'est mon rêve de petite fille). La fac décourage les élèves en insinuant qu'ils n'ont aucune capacité. Vous avez prouvé (eh oui) que les*

[7] Et ceci sans que ne soit pris en charge par l'institution le nécessaire travail d'articulation des deux langues.
[8] Dans Durand-Guerrier (2008a, 2008b) nous avons montré que le choix d'une perspective sémantique dans la suite de la théorie des modèles de Tarski, telle que développée par exemple par Quine (1950), permet de reconsidérer sérieusement l'hypothèse selon laquelle la plupart des sujets, même éduqués, seraient 'illogiques'.
[9] Nous le présenterons brièvement à la section 4.

difficultés ne viennent pas seulement de l'élève mais de la matière en elle-même.

Une deuxième motivation tient au fait que la négation joue un rôle crucial dans les apprentissages et les raisonnements mathématiques à l'université, tant du point de vue des aspects prédicatifs que des aspects opératoires de la connaissance (Vergnaud, 2001). Ceci d'une part, parce que comprendre un concept, c'est savoir quels sont les éléments qui tombent sous ce concept, mais aussi quels sont ceux qui ne tombent pas sous le concept, ce qui renvoie à la notion de satisfaction ou de non satisfaction d'une propriété par un élément, ou d'une relation par autant d'éléments qu'elle a de place (Tarski, 1944) ; et d'autre part, parce que le raisonnement joue un rôle de premier plan dans le développement des connaissances et des compétences mathématiques avancées.

Enfin, comme nous l'avons dit, selon la langue dans laquelle on s'exprime, l'articulation entre la syntaxe et la sémantique peut varier (Ben Kilani, 2005), ce qui augmente les difficultés lorsque l'on étudie les mathématiques dans une langue autre que sa langue maternelle. C'est donc une question cruciale au sein de l'espace mathématique francophone, qui regroupe précisément des pays où dans la plupart des cas une partie de l'enseignement des mathématiques dans le supérieur se fait au moins pour partie en Français, le plus souvent devant des publics représentant une grande diversité de langues maternelles.

3.2. Deux exemples issus de deux cours polycopiés d'analyse

Nous allons présenter ici deux exemples illustrant les considérations qui précèdent. Le premier est issu du polycopié d'un cours d'Analyse en ligne sur le site de l'Université de Montpellier 2 ; le second du polycopié d'un cours d'Analyse en ligne sur le site de l'Université Lyon 1[10].

3.2.1. Une structure logique complexe

Dans le premier polycopié, le premier chapitre s'intitule « Logique et langage des ensembles ». Au début du chapitre, l'auteur présente un certain nombre de notions sous leurs aspects formels[11]. Cependant, ces éléments formels sont peu réinvestis par la suite. En particulier, dans l'exemple qui suit les règles de construction de la négation des énoncés quantifiés, les énoncés sont donnés en langue naturelle, et aucun lien n'est fait entre ces formulations et les constructions formelles faites auparavant. Par ailleurs, l'utilisation du couple (mortel, immortel) pour illustrer la négation ne semble pas adaptée. Nous avons en effet relevé que des contraires pouvaient être utilisés dans certains cas en lieu et place de la négation, mais dans la majorité des cas, ce n'est pas possible et comme nous l'avons vu plus haut, il n'y a pas de construction systématique, en Français, qui permettrait de reconnaître sur la forme lexicale si l'on a affaire à une négation ou à un contraire. L'utilisation du couple (mortel, immortel), sans précision, pourrait par conséquent amener les étudiants à faire des généralisations, et à utiliser de façon erronée d'autres couples du même genre dans la construction des négations comme, par exemple, le couple

---

[10] Ces deux polycopiés ont été analysés par J. Njomgang Ngansop dans le cadre de son mémoire de Master 2 Recherche *Histoire Philosophie et Didactique des Sciences*, préparé au sein du laboratoire LEPS, EA 4148 et soutenu en septembre 2008.

[11] L'auteur introduit en particulier la notion d'assemblage à la manière de Godement dans son cours d'algèbre (Godement, 1973).

(croissant, décroissant) en ce qui concerne les fonctions. À ce moment du cours, la négation est définie essentiellement pour des énonces de la forme « Pour tout x, $F(x)$ », donnés en langage formel ou en langage naturel, ce qui n'est plus le cas d'un certain nombre d'énoncé rencontrés par la suite.

Les différentes notions qui ont été données dans les deux premiers paragraphes sont utilisées dans les techniques de démonstration, dont les démonstrations par contraposée et par l'absurde qui nous intéressent dans ce travail compte tenu de ce qu'elles mettent nécessairement en jeu la négation d'énoncés plus ou moins complexes. On note cependant que la notion de contre-exemple n'est pas évoquée, alors que la règle du contre-exemple est la méthode la plus générale pour montrer qu'un énoncé universel est faux.

On rencontre dans le cours cinq utilisations de la contraposition, dont une seule est annoncée : il s'agit de montrer que « si (i) (« pour toute suite $(u_n)_n$ à valeurs dans A telle que $\lim (u_n) = a$ », on a « $\lim (f(u_n)) = f(a)$ »), alors (ii) (f est continue en a) ». Ici, f désigne une fonction de A vers $\mathbb{R}$ et a est un élément de A. Il est difficile de lier la forme de cette proposition, qui est une implication, à celle qui est énoncée au début du chapitre, à savoir « $\forall x, R(x)$ », où la quantification s'applique à une formule atomique comportant une seule variable. La formalisation logique montre la complexité de la structure ; elle est du type :

$$\forall f\, \forall a[(\forall u\ (F(u, a) \Rightarrow G(f, u, a)) \Rightarrow H(f, a)].$$

où f, a et u prennent leurs valeurs respectivement dans l'ensemble des fonctions numériques, des réels et des suites numériques. Il faut noter que selon la pratique mathématique ordinaire, les deux quantificateurs universels en tête de l'énoncé formel sont sous entendus dans l'énoncé mathématique ; tandis que le quantificateur universel portant sur l'antécédent de l'implication « externe » est explicité. La structure logique de la contraposée est donc :

$$\forall f\, \forall a[(\neg H(f, a)) \Rightarrow (\exists u\ (F(u, a) \wedge \neg G(f, u, a))\ ]$$

Ainsi, écrire la contraposée de cet énoncé suppose que l'on sache 1. reconnaître la portée des différents quantificateurs ; 2. repérer la hiérarchie des deux implications ; 3. que la contraposée d'une implication universellement quantifiée est une implication universellement quantifiée ; 4. construire la négation d'un énoncé conditionnel universellement quantifié.

La brève analyse logique de cet énoncé illustre bien le niveau de complexité de la tâche associée, complexité qui n'est absolument pas prise en compte dans les éléments de logique introduits auparavant.

En outre, on voit bien ici que l'omission de la quantification universelle en début d'énoncé ne gênera pas l'établissement de la contraposée, alors que l'explicitation de la quantification universelle portant sur la variable u dans l'antécédent est indispensable, puisque le quantificateur doit être changé lorsque l'on prend la négation. Ceci est à mettre en rapport avec ce que Durand-Guerrier et Arsac (2003) ont mis en évidence, à savoir le fait que l'expert contrôle le niveau de rigueur qu'il s'impose par sa connaissance des cas où relâcher la rigueur pourrait être dangereux.

3.2.2. Une contraposée non immédiate

Dans le second cours polycopié, il n'y a pas de chapitre consacré à la logique. L'utilisation de la négation y est faite de façon implicite dans les démonstrations, où la démonstration par l'absurde est la plus utilisée : 12 fois sur les 15 démonstrations mobilisant le concept de négation. Il n'y a qu'une seule démonstration par contraposition et deux utilisations du contre-exemple. La seule utilisation de la contraposition dans ce cours sert pour obtenir une autre formulation de la proposition « *toute suite extraite d'une suite ayant une limite* $l \in \mathbb{R}$ *a une limite et c'est* l » (1), soit la proposition « *si une suite admet des suites extraites ayant des limites différentes, alors, elle n'a pas de limite* » (2), obtenue en prenant la contraposée de la première. Notons qu'exprimer la contraposée sous la forme (2) suppose auparavant une reformulation de l'énoncé (1) sous la forme : *Si une suite admet une limite, alors toutes les suites extraites convergent vers cette même limite*, ce qui correspond à un choix de formalisation consistant à quantifier sur les suites extraites dans le conséquent de l'implication. On pourrait tout à fait envisager une reformulation du type : « *Pour toute suite* u *et pour toute suite* v*, si* u *converge et si* v *est une suite extraite de* u*, alors* v *converge vers la même limite que* u », où l'on a une quantification double en tête de formule*.* Le premier choix est plutôt adapté si l'on veut montrer qu'une suite donnée n'a pas de limite, par le recours à la contraposée. La seconde formulation peut-être utile si l'on veut utiliser ce résultat pour prouver la convergence d'une suite en montrant qu'une suite donnée est extraite d'une suite convergente. C'est donc le type de preuve mathématique qu'il veut mettre en œuvre qui oriente le choix de l'enseignant pour reformuler son énoncé, ce qui nous ramène encore une fois à la complexité des questions touchant à la négation.

En conclusion, le langage mixte (langage courant et symbolisme) est très utilisé dans la formulation des définitions, propositions et théorèmes, et nous avons observé que les auteurs utilisent les expressions langagières « *il existe* » et « *pour tout* » de préférence aux symboles $\forall$ et $\exists$. De même dans les démonstrations, les interactions entre le langage formel et la langue naturelle sont très fréquentes. L'usage de la négation est bien présent tout au long des deux cours, mais il n'est pas problématisé. On peut faire l'hypothèse que les professeurs ne voient pas que les choix de reformulation ou de formalisation permettant un usage opératoire de la négation peuvent rester très opaques pour les étudiants, ceci pouvant les empêcher d'acquérir l'aisance nécessaire pour avancer dans le cursus mathématique. En effet, chacun des deux cours contient beaucoup d'implicites, qui peuvent être assez difficiles à décrypter pour les étudiants. Les notions convoquées sont des outils très utiles dans l'enseignement et la compréhension des mathématiques, mais leur usage semble aller de soi pour l'enseignant qui ne perçoit pas la nécessité de les expliciter. Le cours ne laisse pas transparaître le doute éventuel des auteurs quant à la maîtrise de ces outils par leurs interlocuteurs. Pourtant, comme nous allons le voir maintenant, les difficultés sont bien réelles.

4. DES DIFFICULTES BIEN REELLES POUR LES ETUDIANTS

4.1. Une enquête de la Commission Inter Irem Université (CI2U)[12]

À la rentrée 2006, les membres de la CI2U[13] ont proposés dans plusieurs universités réparties sur l'ensemble du territoire métropolitain un questionnaire, dont une partie était spécifiquement dédié à la logique. Nous avons recueilli 800 réponses ; 340 ont été traitées jusqu'à présent. Nous nous intéressons ici aux réponses concernant l'exercice spécifiquement dédié à la négation. L'énoncé de cet exercice était le suivant :

Donner la négation mathématique de chacune des phrases suivantes 1 – Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges. 2 – Certains nombres entiers sont pairs. 3 – Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

Comme nous nous y attendions, nous avons obtenu pour chaque question une grande variété de réponses.

Pour la phrase n°1, « Toutes les boules sont rouges », nous les avons réparties dans quatre catégories principales

- C0 : une phrase synonyme de la phrase initiale.
- C1 : une phrase synonyme de la phrase « Il existe au moins une boule qui n'est pas rouge ».
- C2 : la phrase ambiguë: « Toutes les boules ne sont pas rouges ».
- C3 : une phrase synonyme de la phrase : « Aucune boule n'est rouge ».

Parmi les 340 réponses analysées, 11% sont de type C0, 38% du type C1 qui correspond à la réponse correcte ; 6% correspondent à C2 (phrase ambiguë) et 21% dans la catégorie C3 qui correspond au contraire. 12% des étudiants ne répondent pas. Ainsi, moins d'un quart des étudiants donnent une réponse clairement correcte, tandis qu'un cinquième donnent une réponse exprimant le contraire.

La phrase numéro 2, « Certains nombres entiers sont pairs » est une phrase très simple, dont le contenu mathématique est a priori maîtrisé par les étudiants de notre population. La phrase est vraie, donc sa négation est fausse ; ceci pourrait favoriser le rejet des réponses incorrectes du type « certains nombres entiers ne sont pas pairs. Toutefois, les résultats antérieurs laissent présager que cette réponse devrait apparaître. Les catégories de réponses retenues sont les suivantes :

- C0 : une phrase synonyme de la phrase initiale.
- C2 : la phrase ambiguë « Tous les entiers ne sont pas pairs ».
- C4 : la phrase « Tous les entiers sont impairs », qui est une réponse correcte.
- C5 : la phrase « Aucun entier n'est pair », qui est également une réponse correcte.
- C6 : la phrase « Certains entiers ne sont pas pairs (sont impairs) », qui n'exprime pas une opposition, et n'est donc pas correcte.

[12] Ces résultats ont fait l'objet d'une communication en anglais au colloque ICME 11 en juillet 2008.
[13] P. Frétigné ; G. Madec ; F. Vandebrouk ; David Théret ; G. Bretenoux ; D. Grenier ; M. Rogalski ; V.Durand-Guerrier ; F. Plantevin.

Parmi la même population de 340 étudiants, 5,5% sont dans la catégorie C0 ; 5,5% dans la catégorie C2 ; 15,5% dans la catégorie C4 ; 13% dans la catégorie C5 ; 34% sont dans la catégorie C6 ; 11, 5% donnent une réponse n'entrant pas dans une de ces catégories et 15% ne répondent pas. Ainsi, moins d'un tiers des étudiants donnent une réponse correcte et un tiers d'entre eux donnent comme réponse une phrase négative qui n'est pas la négation de la phrase initiale.

La phrase n°3, « Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4 », est un énoncé conditionnel. En accord avec la pratique ordinaire en mathématique, nous n'avons pas explicité la quantification, et fait l'hypothèse que l'énoncé serait compris par les étudiants comme un énoncé général. Par conséquent, une négation correcte de cette phrase devrait exprimer l'existence d'un contre-exemple. Le domaine mathématique est bien connu des étudiants et les contre-exemples sont a priori disponibles. Cependant, compte tenu des résultats antérieurs, nous nous attendons à obtenir une grande variété de réponses, majoritairement sous la forme d'une implication contenant une ou deux négations sur l'antécédent et/ou le conséquent.

Pour cette question, nous avons eu 29% de non réponses, et nous avons obtenu 45,5% de réponses sous forme implicative : « si *p*, alors non *q* » ; « si non *p*, alors non *q* » ; « si *p*, alors pas forcément *q* » ; « si *p*, il est possible que non *q* ».

Finalement, 10% seulement des étudiants donnent une réponse correcte. Ceci est en accord avec les observations naturalistes que nous faisons dans les formations d'enseignants ou auprès d'étudiants avancés en mathématiques. Le plus souvent, même avec des professeurs chevronnés, le lien entre la règle du contre-exemple et la négation de l'implication n'est pas fait spontanément.

Les premiers résultats du questionnaire de la CI2U montrent clairement que les étudiants arrivant à l'université éprouvent des difficultés pour donner la négation de phrases quantifiées, particulièrement dans le cas des énoncés conditionnels. Ceci indique qu'ils ne sont pas préparés à proposer une forme correcte pour la contraposée d'un énoncé comme celui que nous avons présenté en § 3.2.1. Du fait que les étudiants viennent de différentes universités, on peut faire l'hypothèse que ces difficultés sont générales en France, mais aussi dans l'espace mathématique francophone.

Une première exploration a été faite au Cameroun en Janvier 2008. Le questionnaire a été proposé à 28 étudiants de l'université de Yaoundé. Les résultats obtenus sont assez comparables à ceux de la CI2U, avec une grande variété de formes langagières. Notons cependant que pour la phrase numéro 3, un peu plus de 40 % des étudiants camerounais donnent une réponse explicitant l'existence d'un contre-exemple, ce qui est un score bien meilleur que celui de la CI2U (mais sur une population quinze fois moins nombreuse). Ceci nous invite à poursuivre nos explorations sur la manière dont sont abordées les questions concernant la négation dans les cours suivis par ces étudiants.

Une autre piste de recherche consiste à travailler au plus près avec des étudiants en leur proposant des situations mobilisant la négation. C'est ce que nous avons commencé à faire, modestement, à l'Université Lyon 1 en janvier 2008.

4.2. Un module expérimental à Lyon

4.2.1. Présentation du module

Ce module intitulé « Logique et raisonnement en mathématiques » a été proposé à des étudiants volontaires de première année de licence à l'Université Lyon 1, à l'issue du premier semestre de cours. Il s'agissait pour nous de créer, à partir de quelques exercices, des situations d'échanges entre les étudiants, visant à clarifier la question de la négation en mathématiques ; à faire une distinction entre la négation dans la langue courante qui contient souvent beaucoup d'ambiguïtés, et la négation en mathématiques ; à faire sentir l'importance de la maîtrise du concept du fait de sa présence dans plusieurs formes de raisonnement en soulignant l'articulation qu'il y a entre le raisonnement mathématique et la logique ; de détecter, à travers les différentes catégories logiques mises en jeu (proposition, énoncés quantifiés, phrase ouvertes) les différentes conceptions qu'ont les étudiants sur la construction de la négation des énoncés ; de permettre aux étudiants suivant le module de clarifier pour eux-mêmes le concept de négation, ceci afin d'en améliorer l'usage dans leur pratique mathématique.

L'objectif premier était donc un objectif d'enseignement ; il était doublé d'un objectif de recherche dans le cadre du mémoire de Master 2 de J. Njomgang Ngansop.

Dix étudiants ont participé au module qui s'est déroulé sur trois journées de six heures. Six d'entre eux ont assisté à toutes les séances et deux à cinq séances sur six. Toutes les séances ont été enregistrées. Nous avons travaillé sur la négation des phrases quantifiées simples, la négation et l'implication et enfin, sur les définitions et leur négation dans la langue naturelle et dans le langage formel. Nous nous intéressons ici à la première activité concernant la négation. Il s'agit de la reprise de l'exercice de la CI2U que nous avons présenté à la section précédente. Les étudiants ont répondu individuellement au questionnaire, puis nous avons relevé oralement leurs réponses, que nous avons écrites au tableau, et nous avons organisé un débat autour des réponses. Avant de traiter la phrase n°3, nous avons cependant introduit une activité permettant de travailler sur la contraposée.[14]

4.2.2. Quelques éléments qui se dégagent des débats

Les débats ont porté principalement sur les points suivants.

- *Sur la ou les partie(s) de la phrase sur laquelle (lesquelles) doit porter la négation*.
  Pour les étudiants présents, la négation peut s'appliquer à n'importe quel élément de la phrase : par exemple dans « toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges », elle peut s'appliquer à la couleur (propriété des boules), au contenant (l'urne), à la quantité (toute). Il n'y a à ce moment-là (c'est le premier temps d'échanges) aucune considération sur l'aspect sémantique d'échange des valeurs de vérité.

[14] Il s'agit de l'activité « Circuit » présentée dans la Brochure de la CI2U « Enseigner les mathématiques autrement en DEUG » (IREM de paris 7, 1984).

- *Sur la signification de « il existe une » dans la phrase « Il existe une boule dans l'urne qui n'est pas rouge ».* (1)
  Pour certains étudiants, cette phrase réfute seulement l'affirmation « Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges » (2), c'est-à-dire que « si on dit que (1) est vrai, alors on est sûr que (2) est faux », mais ce n'est pas sa négation à partir du moment où, « parce qu'on a toutes (au pluriel), l'affirmation de l'existence d'une seule ne peut nier la proposition (2) », voire même, « si on dit que ce n'est pas vrai pour *toutes*, ce n'est vrai pour *aucune* ».

- *Sur la manière de montrer qu'un énoncé général est faux.*
  Pour certains étudiants, un seul contre-exemple à un énoncé ne permet pas de prouver qu'il est faux[15].

- *Sur la manière de déterminer la négation d'un énoncé sur la base de l'évaluation des valeurs de vérité.*
  Cela présente une réelle difficulté lorsque la valeur de vérité de la phrase à nier n'est pas connue. Les questions qui ressortent sont : peut-on donner la négation d'un énoncé faux ? (lien entre négation et valeur de vérité fausse) ; que signifie la phrase « la négation échange du vrai et du faux » ?

- *Sur l'utilisation des couples de contraires (pair, impair).*
  Dans la négation de la phrase « certains nombres entiers sont pairs », il y a une certaine prudence à utiliser « impair » à la place de « ne sont pas pairs ». L'idée de la négation est liée à l'utilisation de « ne… pas, ne ...plus… ». D'autre part, par substitution, l'énoncé « tous les nombres entiers sont impairs », qui ne porte pas d'ambiguïté, se trouve transformé en un énoncé ambigu, ce qui perturbent les étudiants présents.

Les analyses plus fines des transcriptions sont en cours, ce qui devrait permettre de préciser les phénomènes mis en évidence.

CONCLUSION

Compte tenu de l'importance des notions logiques de négation, implication et quantification dans le processus de conceptualisation en mathématiques, les résultats sur la négation présentés ici, ainsi que les résultats sur l'implication présentés dans Durand-Guerrier (1999, 2003), indiquent clairement qu'il est nécessaire de prendre sérieusement en compte ces questions à la transition secondaire / supérieur. Une perspective internationale pour l'Espace Mathématique Francophone serait de conduire des études dans les différents pays concernés par l'enseignement des mathématiques en français dans le supérieur, et de développer des modalités de travail des concepts logiques qui les rendent opératoires pour l'activité mathématique, en prenant en compte la diversité des contextes linguistiques.

BIBLIOGRAPHIE

[15] Nous avons montré (Durand-Guerrier, 2008a) que cette résistance à rejeter un énoncé n'ayant qu'un seul contre-exemple ne signifiait pas pour autant que les sujets sont illogiques.

Aristote. Organon, *I. Catégories – II. De l'interprétation*. Traduction nouvelle et notes par Jean Tricot, Librairie philosophique J. Vrin (1989).
Artigue, M. (1991) Épistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 10/2.3, pp. 241-285.
Barrier, T. (À paraître). Quantification et Variation en Mathématiques : perspectives didactiques issues de la lecture d'un texte de Bolzano. Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics, Rethymnon, Crète, avril 2008.
Ben Kilani, I. (2005) *Effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique.*
Chellougui, F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universels et existentiels en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.* Thèse des universités Lyon 1 et Tunis.
Da Costa, N. C. A. (1997) *Logiques classiques et non classiques : essai sur les fondements de la logique*. Paris : Masson.
Dubinsky, E. & Yiparaki, O. (2000) On students understanding of AE and EA quantification. *Research in Collegiate Mathematics Education IV, CBMS Issues in Mathematics Education,* 8, 2000, pp. 239-289. American Mathematical Society : Providence.
Durand-Guerrier, V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x,* n°50, pp. 57-79. IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier, Grenoble.
Durand-Guerrier, V. (2003) Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics* 53, pp. 5-34.
Durand-Guerrier, V. (2008a) Logique mathématique et logique de sens commun. Rupture ou continuité ? *Actes électronique du colloque Espace mathématique Francophone*, mai 2006, Université de Sherbrooke, Sherbrooke (Canada).
Durand-Guerrier, V. (2008b) Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 40/3, pp. 373-384.
Durand-Guerrier, V. & ARSAC, G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/3, pp. 295-342.
Durand-Guerrier, V. & Ben Kilani, I. (2004) Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire Tunisien. *Les Cahiers du Français Contemporain*, 9, pp. 29-55.
Fuchs, C. (1996) *Les ambiguïtés du français*. Collection l'essentiel français Ophrys.
Godement, R. (1973) *Cours d'Algèbre*. Paris : Hermann.
Haug, P. J. (2000) *Mathématiques pour l'étudiant scientifique.* Grenoble : EDP Sciences.
Quine, W. V. O. (1950) *Methods of logic.* Holt, Rinehart & Winston. Traduction française Armand Colin, 1972.
Rogalski, J. & Rogalski, M. (2004) Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives Vol. 9,* Actes du colloque Argentoratum de juillet 2002, pp. 175-203.
Russell, B. (1903) *Les principes de la mathématique*. Traduction française in *RUSSEL, Écrits de logique philosophique*. PUF : Paris 1989.
Selden, J. & Selden, A. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29, pp. 123-151.
Tarski, A. (1944) La conception sémantique de la vérité et les fondements de la

sémantique. In *Logique, sémantique et métamathématique, volume 2* : pp. 265-305. Armand Colin, 1974.

Vergnaud, G. (2001) Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In J. Portugais (éd.), *Actes du colloque GDM 2001*, pp. 6-27, Université de Montréal.