DIFFICULTÉS D'ÉTUDIANTS UNIVERSITAIRES DÉBUTANT AVEC LA PREUVE

Nadia AZROU*

Résumé – Cette étude a pour but d'identifier et d'analyser les difficultés des étudiants algériens de deuxième année universitaire à travailler des preuves. En effet, les cours de mathématiques de première année deviennent très difficiles aussi bien pour les étudiants qui se spécialiseront en mathématiques par la suite que pour les étudiants de la plupart des filières d'ingénieurs, à cause du fait que presque tous les exercices proposés portent sur la preuve. Les enseignants ont aussi leur part de problèmes à faire passer ces cours, particulièrement depuis la dernière réforme algérienne par laquelle le cours d'algèbre a été totalement supprimé du programme[1] du lycée, ainsi que les chapitres de logique mathématique et de théorie des ensembles. Cette situation problématique n'est pas propre à l'Algérie : plusieurs recherches traitant de la preuve ont montré combien les tâches de démonstration, omniprésentes dans les cours d'algèbre abstraite à l'université, étaient épineuses pour les étudiants. Nous allons présenter les difficultés identifiées sur des copies d'examens d'étudiants de deuxième année de filière mathématique.

Mots-clefs : preuve, réforme, programme, difficultés, université

Abstract – The present study aims at clarifying and analyzing the difficulties encountered by students when they cope with proof in their first year of university. First year courses for both future mathematicians and engineers become very difficult because of the omnipresence of proof in the exercises. Teachers are also facing problems when dealing with proof in their teaching, in particular since the most recent reform cut the algebra course along with logic and set theory from high school programs. This problem is not unique to Algeria : a lot of researches on proof have shown how it constitutes a new and thorny challenge for students in advanced mathematics, especially in abstract algebra where writing proofs is a continual process. We'll present difficulties as we identify them from exams of second year mathematics students.

Keywords: proof, reform, syllabus, difficulties, university

I. INTRODUCTION

Dans les années passées, la désaffection pour la filière mathématique a beaucoup fait parler les chercheurs, les enseignants et les didacticiens. Le nombre d'étudiants qui veulent faire mathématiques diminue au point où certains établissements universitaires en Algérie ont fermé la spécialité mathématique, ou certaines disciplines mathématiques (algèbre, analyse, …). Dans les lycées, également, les classes de terminale option 'maths' ont vu leurs effectifs beaucoup diminuer. Plusieurs lycées ne comptent plus parmi leurs spécialités les mathématiques et ce, depuis plusieurs années. Cette désaffection contagieuse a touché le domaine des sciences de l'ingénieur à l'université, que les étudiants fuient de plus en plus en raison des échecs répétés aux examens de mathématiques. La première année universitaire enregistre, au début et au milieu de l'année, un nombre assez grand d'abandons et à la fin de l'année, un taux de réussite approchant à peine les 20%. Les deux cours de première année, algèbre et analyse, présentent aux étudiants d'énormes difficultés qui demeurent insurmontables tout au long de l'année. Les étudiants subissent un choc dans ces cours, résultant d'une incompréhension complète de la matière, de ce qui leur est demandé, et du handicap important hérité du lycée pour affronter ces cours. Comme plusieurs arrivent à l'université avec des mathématiques différentes, ce grand changement au niveau des mathématiques les déstabilise, les désole et les contrarie pendant des semaines, voire des mois. Désarmés devant les compétences que nécessitent continuellement leurs nouvelles

* Université Yahia Farès, Médéa – Algérie – nadiazrou@gmail.com

[1] « Programme » désignera ici le syllabus ou le contenu d'un cours annuel ou semestriel, tel qu'il est établi par les institutions (ministère ou université).

© Azrou N. (2012) Difficultés d'étudiants universitaires débutant avec la preuve. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT7, pp. 953–963). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

tâches, comme raisonner, argumenter et mettre à profit leur savoir pour faire des preuves, ils ne voient aucune issue pour poursuivre leurs études.

Les enseignants, de leur côté, conscients à la fois de la difficulté croissante à enseigner ces cours et des lacunes des étudiants, se retrouvent eux aussi devant une impasse. Car même s'ils sont soucieux d'aider leurs étudiants en renforçant leurs acquis, en donnant une initiation et un fondement solide pour les habiliter à faire des preuves, les volumes horaires ne le permettent pas. En effet, depuis six années, l'université algérienne est passée au système LMD (License-Master-Doctorat). Le principal changement impliqué a été d'écourter les volumes horaires, les coupant parfois de moitié pour les mêmes cours que ceux de l'ancien système. Ainsi, la contrainte du temps et le contrôle des administrateurs pour une couverture complète des programmes font que les enseignants se permettent rarement ou jamais un rappel, ou un exercice pour approfondir une notion donnée. Le constat principal est que les étudiants sont incapables d'aborder les problèmes, dont la plupart commencent par la question « montrer que », aussi bien ceux des séries d'exercices que ceux extraits des examens.

Comme si cette situation n'était pas suffisamment alarmante, il a fallu qu'une autre réforme des programmes du lycée soit mise en place, il y a deux ans, pour apporter plus de complications encore. Celle-ci a éliminé du programme mathématique du lycée les sujets suivants : *logique*, *théorie des ensembles*, *relations binaires dans un ensemble*, *applications injectives, surjectives, bijectives* et *structures algébriques*. Depuis cette réforme, les bacheliers, contrairement à ceux des années précédentes, arrivent à l'université sans les outils nécessaires pour les mathématiques universitaires.

II. LA PREUVE COMME ÉLÉMENT ESSENTIEL DES MATHÉMATIQUES

Les ouvrages et les programmes des cours universitaires présentent la preuve comme étant nécessaire et fondamentale aux mathématiques universitaires. À l'instar de plusieurs chercheurs, Selden et Selden (2003, p.1) définissent la preuve comme étant ce qui caractérise les mathématiques par rapport aux autres sciences, où l'observation et l'expérimentation ont préséance :

> Indeed, in mathematics it is the proof that provides the strong consensus on the validity of basic information that is characteristic of a science. From this point of view, the idea of proof in mathematics corresponds to those special techniques of observation and experimentation which are essential to the other sciences.

De nombreux chercheurs s'accordent sur le fait qu'on ne peut pas faire des mathématiques à l'université sans faire de preuve, et certains vont jusqu'à dire que la preuve est garante de ce que celui qui la pratique est vraiment un mathématicien (Wheeler 1990). Les cours de mathématiques sont constitués de théorèmes et de résultats ou propriétés à démontrer, et les exercices et problèmes qui y sont proposés consistent le plus souvent à faire des preuves (Selden et Selden 2007)). À part le fait qu'elle fasse partie des caractéristiques et des exigences des mathématiques universitaires, la preuve est aussi le moyen d'évaluer les connaissances des étudiants (Weber 2001). Au niveau de l'enseignement universitaire, les examens écrits constituent le seul moyen d'évaluation et dans les questions des examens, on demande souvent à faire des preuves. Un chercheur comme Lucast (2003) considère l'élaboration des preuves et la résolution de problèmes comme étant des activités du même ordre, ou mieux encore : faire une preuve est une activité impliquée dans le processus cognitif sollicité pour la résolution de problèmes.

Malgré cet accord sur le statut de la preuve en mathématique, les chercheurs sont partagés quant à la définition de la preuve et son rôle dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Deux principales faces de la preuve sont à distinguer, comme la différence même entre les mots « preuve » et « démonstration » (Duval 1991). Une preuve en mathématiques est une série d'expressions formelles, chacune déduite de celle qui la précède selon des règles d'inférence bien définies en rapport avec les objets en questions, c'est ce qu'on appelle une démonstration. Mais la preuve est aussi, selon un sens moins formel, le moyen irréfutable qu'a un mathématicien pour établir que le résultat démontré est bel et bien vrai, ce qui permettra par la suite à la communauté mathématique de l'utiliser sans qu'il ne soit besoin de le redémontrer. La littérature expose un grand nombre de travaux qui présentent la preuve selon différentes définitions, selon différents rôles. Ces aspects de la preuve se sont développés avec les années depuis la civilisation grecque, et continuent d'inspirer les chercheurs développant sans cesse de nouvelles significations. Les études mentionnent ainsi la preuve comme : justification, vérification, un moyen pour convaincre, un moyen pour expliquer et comprendre le pourquoi du résultat, un moyen pour s'exprimer en mathématiques, une exploration du sens d'un résultat, et bien d'autres. Ces différents aspects de la preuve sont discutés par plusieurs auteurs. Ils sont résumés, entre autres, dans Hanna (2000, p. 8).

III. DIFFICULTÉS DEVANT LA PREUVE

Rares sont les recherches qui ont étudié la preuve sans soulever les difficultés des étudiants à son égard, celle-ci mettant à l'épreuve leurs connaissances, leur compréhension et la pratique de leur savoir acquis. Citons entre autres Selden et Selden (2007), Tanguay (2005), Weber (2001), Dreyfus (1999), Harel et Sowder (1998), Moore (1994). Élaborer une preuve à l'université est pratiquement la difficulté majeure des étudiants inscrits dans les cours d'algèbre et d'analyse, où la preuve est au cœur de ces cours.

Les difficultés sont de nombreuses formes. Les étudiants sont incapables de faire des preuves pour plusieurs raisons, soit parce qu'ils sont bloqués au point de départ et n'arrivent pas à commencer ou ne comprennent pas ce qu'on attend exactement d'eux, soit parce qu'ils ne saisissent pas déjà pourquoi on doit prouver en mathématiques ou encore à quoi doit ressembler une preuve (Harel et Sowder 1998). D'autres encore n'arrivent pas à faire des preuves simplement parce qu'ils n'ont pas bien compris les définitions et les résultats présentés au cours formellement (Selden et Selden 2007). Et même quand ils les comprennent, ils ne voient pas comment utiliser et lier ces concepts et avec quelles règles et techniques pour que cela puisse former une preuve (Tanguay 2007). J'ai moi-même découvert, année après année, ce point crucial durant mes enseignements avec les étudiants de première année. Quoique les cours soient complets et illustrés d'exemples, ça n'a jamais été suffisant pour permettre aux étudiants de faire des preuves sans trop de difficulté. J'ai alors compris qu'autre chose manque pour initier les étudiants à faire des preuves. Cette hypothèse m'a été confirmée par plusieurs chercheurs (Selden et Selden 2003 ; Weber 2001 ; Dreyfus 1999 ; Tanguay 2007) et par d'autres qui recommandent de donner des algorithmes et des techniques pouvant constituer la structure de la preuve.

1. Les programmes et la transition à la preuve

C'est en cours de géométrie pendant l'école moyenne que les élèves (moyenne d'âge 14 ans) manipulent pour la première fois les preuves dans les programmes de l'enseignement algérien. Cependant, cette pratique ne dure pas longtemps (une à deux années selon les programmes) et ne semble pas beaucoup servir les étudiants plus tard, quand ils abordent les preuves en algèbre ou en analyse à l'université. Il faut remarquer qu'en géométrie, l'aspect visuel prime dans beaucoup d'exercices alors qu'en mathématiques universitaires, la preuve doit s'écrire formellement selon des règles en relation avec le type du raisonnement choisi et les définitions en cause. Arrivant au lycée, la pratique de la preuve est rare ou inexistante. Avec la dernière réforme du programme des mathématiques du lycée qui a été mise en place il y a deux ans, les bacheliers arrivent à l'université non seulement avec un souvenir lointain ou perdu de la preuve, mais aussi sans aucune connaissance des notions qui peuvent leur servir d'outils d'initiation à la preuve, à savoir les éléments de cours : logique, théorie des ensembles. Cette difficulté de l'accès à la preuve au niveau universitaire a été mentionnée par plusieurs chercheurs : Moore (1994), Selden et Selden (2007) et d'autres. Aux États-Unis, par exemple, pour rendre cet accès moins pénible, on a mis au point des cours transitoires en début de la première année universitaire, cours appelés 'transition-to-proof courses' ou « bridge courses ». Plusieurs ouvrages universitaires sont également parus pour servir de support aux étudiants pour bien faire cette transition vers la preuve. Dans Epp (2003, p. 886), on en mentionne plusieurs.

2. La partie logique

Le formalisme est le premier obstacle auquel l'étudiant est confronté à la rencontre des mathématiques universitaires. Celles-ci s'écrivent dans un langage assez développé et différent de ce que l'étudiant connaît ; mais aussi, difficile à comprendre quand on n'a été ni initié, ni entraîné à s'en servir. Les preuves doivent être écrites dans un langage formel, mais aussi longtemps que l'étudiant ne connaît pas les règles de ce langage, il ne pourra jamais écrire une preuve même s'il arrive à entrevoir l'idée et les étapes de cette preuve. De plus, il doit être aussi capable de passer du formel à l'informel et vice versa. La partie logique est mise en évidence par plusieurs travaux (Epp 2003 ; Durand-Guerrier 2008, 2009 ; Selden et Selden 1995, 1999 ; Hanna 2000) comme étant une partie nécessaire pour l'apprentissage des règles du formalisme. Plusieurs chercheurs recommandent alors son enseignement, après avoir conclu à son importance dans la construction et la validation des preuves.

IV. ANALYSE DES ERREURS DES ÉTUDIANTS

1. Analyse a priori

L'exercice proposé a été soumis par moi-même aux étudiants de deuxième année de filière mathématique et fait partie d'un examen du semestre 1 du cours d'algèbre II (structures algébriques). Ce cours se fait à raison d'un cours et d'un TD d'une heure et demi chacun par semaine. Les étudiants testés sont supposés avoir eu les notions nécessaires en première année, dans le cours Algèbre I (logique, théorie des ensembles, applications injectives, surjectives, bijectives, image directe et réciproque, groupe, sous-groupe, morphisme de groupe) qui sert de prérequis. Ces étudiants sont les premiers issus de la dernière réforme du lycée, ils n'ont fait aucun des chapitres mentionnés ci-dessus au lycée. Selon leurs dires, à chaque fois qu'était manipulé un concept supposé connu (comme les quantificateurs, les sous-groupes, l'image directe, l'application surjective, …), ces concepts n'avaient pas été assimilés en Algèbre I et faire des preuves n'avait pas été introduit parmi les tâches proposées dans les exercices. À travers la tâche proposée, j'ai voulu révéler et identifier leurs difficultés devant la preuve. J'ai aussi voulu savoir à quel niveau les difficultés se présentent : applications des définitions, manques de définitions, logique, type de preuves, etc.

Soit G un groupe multiplicatif non commutatif, H un sous-groupe de G.

Soit R une relation définie sur G par : $x \, R \, y \Leftrightarrow \exists \; g \in G$ tel que $y = gx$. Montrer que :

1. R est une relation d'équivalence.

2. Soit $x \in G$. On définit G_x par : $G_x = \{g$ tel que $gx=x\}$ est un sous-groupe de G.
3. L'application $f_g(x)=gxg^{-1}$ transforme un sous-groupe en un sous-groupe (c'est-à-dire que $f_g(H) \leq G$ si $H \leq G$).

Démonstration

Selon les prérequis des étudiants et les notes de cours ainsi que les exercices proposés, la démonstration de l'exercice proposé pourrait aller comme suit :

1. Montrons que R est une relation réflexive, symétrique et transitive.
   a) Soit $x \in G$, montrons que xRx. Cherchons un g de G qui vérifie $gx=x$, on a pour $g=1$, $x=1x$. Donc $\forall x \in G, xRx$. Donc R est une relation réflexive.
   b) Soient $x, y \in G$ tel que xRy. Montrons que yRx. On a xRy i.e. $\exists\ g \in$ G tel $y=gx$. Comme G est un groupe, alors $x=g^{-1}y$ i.e. yRx. Donc R est une relation symétrique.
   c) Soient $x, y, z \in G$ tels que xRy et yRz. Montrons que xRz. On a xRy et yRz i.e. $\exists\ g \in G$, $y=gx$ et $\exists\ g' \in$ G, z=$g'y$. En remplaçant y par gx dans cette égalité, on trouve $z=g'gx=g''x$, avec $g''= g'g \in G$, donc xRz. Ainsi, R est une relation transitive.
2. Montrons que G_x est un sous-groupe de G.
   a) Montrons que $e \in G_x$, en effet on a $x=1x$, donc $e=1 \in G_x$.
   b) Montrons que si $g \in G_x$ alors $g^{-1} \in G_x$. Soit $g \in G_x$ i.e. $gx=x$. En multipliant par g^{-1} de part et d'autre de cette égalité, on aura $x=g^{-1}x$, donc $g^{-1} \in G_x$.
   c) Montrons que G_x est stable par la multiplication de G. Soient $g_1, g_2 \in G_x$. Montrons que $g_1 g_2 \in G_x$. On a $g_1 x=x$ et $g_2 x=x$. En remplaçant x par $g_2 x$ dans le membre de gauche de la première égalité, on aura $g_1g_2x = x$, i.e. $g_1 g_2 \in G_x$. Donc G_x est bien un sous-groupe de G.

L'évaluation de la tâche proposée, selon les exercices et les notions des cours Algèbre I et Algèbre II, nous permet les conclusions suivantes.

- Il s'agit d'une tâche assez simple, vu le style simple et classique des questions. La plupart des exercices, portant sur les relations d'équivalence ou les groupes, proposés aux étudiants, contiennent les mêmes questions.
- Les éléments déployés dans la preuve font partie des chapitres logique, théorie des ensembles, image directe d'un ensemble par une application et de la théorie des groupes qui ont été travaillés dans le cours Algèbre I.
- La preuve des trois questions est une application directe des définitions ; en effet, il n'y a aucune astuce ou technique inhabituelle qui pourrait bloquer l'étudiant.
- L'étudiant doit démontrer dans ses preuves qu'il sait bien utiliser les quantificateurs, faire la différence entre un élément fixé et un paramètre, et adapter les propriétés qu'il retient bien (souvent avec x) aux notations de l'exercice.

2. *Analyse des productions des étudiants*

Production 1

2°/ soient $x, y \in G_x$ Mq $xy \in G_x$

$xy = (gx)(gy) = gxy \in G_x$

3°/ On a $x = 1 \in G_x$ alors G_x est un sous groupe de G

Cette production est une réponse à la question 2 de l'exercice proposé.

L'étudiant commence par donner deux réponses en commençant par le 2 et 3, mais ne fait pas le 1.

Il ne démontre pas que le sous-groupe G_x contient les inverses de ses éléments. À la première ligne, il commence par démontrer que le sous-groupe G_x est stable, en écrivant la définition telle qu'elle est donnée dans le cours et les manuels (avec les notations x et y) mais sans l'adapter aux notations de l'exercice où les éléments de G_x sont notés par g. Car dans ce cas, prendre x comme élément de G_x ne convient pas du tout. L'étudiant ne voit pas que cet élément (x) n'est pas quelconque dans ce cas, mais il a été fixé préalablement pour définir G_x. À la ligne 2, en voulant montrer que le produit des deux éléments pris reste dans G_x, l'étudiant remplace x par gx et y par gy, ceci démontre que les éléments de G_x ne sont pas clairs pour l'étudiant qui ne voit pas le rôle de g dans la définition (qui n'est pas unique) et donc ne voit pas comment l'appliquer dans la preuve. Il poursuit en transformant le produit en gxy sans le justifier, il ne le fait pas par la commutativité qui n'est pas une hypothèse sinon il l'aurait dit, mais en écrivant seulement la forme, selon lui, des éléments de G_x. Ceci démontre encore que l'étudiant n'a pas pu lire dans la définition formelle dès le début le sens de l'ensemble G_x. À la ligne 3, où l'étudiant démontre que G_x contient l'élément neutre, il le note encore par x et lui donne la valeur 1, sans justification. Encore une fois, ce qui est donné dans les définitions ($e = 1$), est retenu en le mémorisant sans pouvoir l'appliquer dans les exercices (x ne peut pas être 1, c'est g qu'il faudrait prendre pour 1). L'étudiant fini tout de même sa démonstration incomplète en concluant avec le résultat demandé, sans faire le 1 (montrer que les inverses des éléments restent dans le sous-groupe) de la preuve.

Production 2

1) $e \in G$

2) $\forall x, y \in G \; xy \in G$

3) $\forall x \in G, x^{-1} \in G$

1) $e \in G$

$g1 = 1$

2) soit $x, y \in G \; xy \in G$

On a

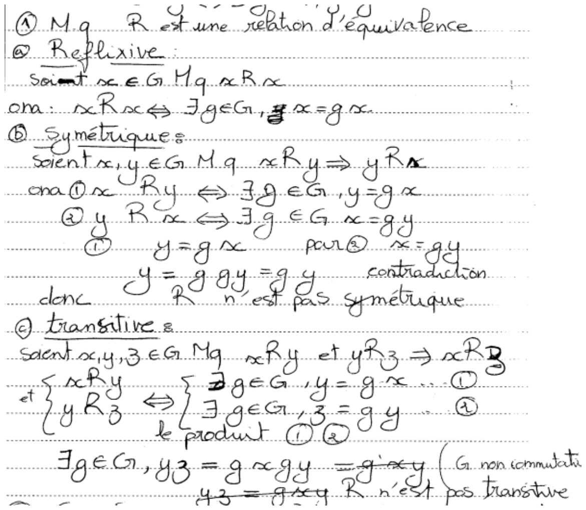
$gxy = xy$

$\Rightarrow gx = x \in G$.

Cette production est une réponse à la question 2 de l'exercice. L'étudiant ne note pas le sous-groupe par G_x comme dans l'exercice, mais par G, ceci peut indiquer que l'indice « x » dans G_x n'est pas clair pour lui. Il commence par écrire les trois propriétés à démontrer sans préciser que c'est ce qu'il doit démontrer, il n'en démontre plus tard que deux. Pour montrer que l'élément neutre appartient à G_x, l'étudiant remplace, dans la relation $gx=x$, x par l'élément neutre (1), alors qu'il doit remplacer le g, car encore, les éléments de G_x sont définis par g et non pas par x, puisque ce dernier a déjà été fixé.

Ceci démontre que l'étudiant est incapable d'appliquer et d'adapter la définition de « sous-groupe » (qui est souvent donnée avec x et y) aux nouvelles notations de l'exercice (données avec g), un fait renforcé par la non compréhension du rôle de g dans la définition de G_x en tant qu'ensemble. Au niveau du dernier point (2), après avoir pris deux éléments x et y, l'étudiant écrit ce qu'il doit montrer sans le préciser ($xy \in G_x$), puis l'utilise pour le remplacer par ce qui lui est équivalent ($gxy=xy$), ce qui indique que tous les éléments de G_x vérifient, selon l'étudiant, cette propriété pour un g fixé. Encore une fois, le fait qu'un autre élément à part x intervient dans un ensemble reste ambigu. On se demande si en ayant placé dans la définition un x à la place de g, les choses auraient mieux été. Finalement, l'étudiant arrive, en simplifiant par y, à $gx=x$ ce qui ne convient pas à ce qu'il voulait ($xy \in G_x$) et met tout de même $\in G_x$ mais ceci est vrai par hypothèse puisque l'élément x est pris dans G_x. L'étudiant s'arrête, soit en comprenant ce dernier fait, soit parce qu'il ne sait pas comment continuer.

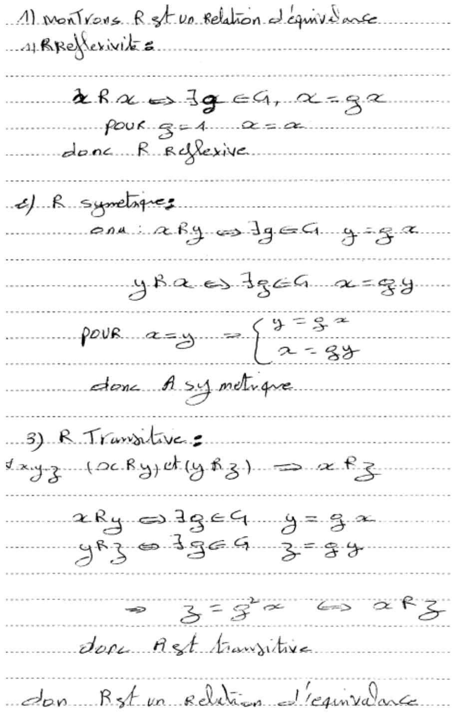
Production 3


① M.q R est une relation d'équivalence
ⓐ Reflixive
Soit $x \in G$ Mq xRx
on a : $xRx \Leftrightarrow \exists g \in G, x = gx$
ⓑ Symétrique :
Soient $x, y \in G$ M.q $xRy \Rightarrow yRx$
on a ① $xRy \Leftrightarrow \exists g \in G, y = gx$
② $yRx \Leftrightarrow \exists g \in G$ $x = gy$
① $y = gx$ pour ② $x = gy$
$y = g\,gy = gy$ contradiction
donc R n'est pas symétrique
ⓒ transitive :
Soient $x, y, z \in G$ Mq xRy et $yRz \Rightarrow xRz$
et $\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists g \in G, y = gx \;..\; ① \\ \exists g \in G, z = gy \;..\; ② \end{cases}$
le produit ① ②
$\exists g \in G, yz = gxgy = \cancel{g^2xy}$ (G non commutati
~~$yz = g^2xy$~~ R n'est pas transitive

Cette production est une réponse à la question 1 de l’exercice.

Ce qui est marquant dans cette production est que l’étudiant remet carrément en question le résultat en concluant que ce que lui est demandé est faux. Au niveau de la réflexivité, l’étudiant écrit ce qu’il doit démontrer et commence par écrire la définition correcte, mais sans pouvoir l’adapter à la définition de l’exercice. Au niveau de la symétrie, il écrit encore ses définitions et ce qu’il doit démontrer correctement, mais il utilise par la suite ce qu’il doit démontrer ($x\ R\ y$). Il utilise le même g pour x et pour y, ce qui démontre qu’il qu’il n’a pas compris le rôle du quantificateur existentiel dans la définition de la relation d’équivalence. Ce premier fait mène l’étudiant vers une fausse route dans sa preuve, un deuxième fait qui a le même effet, est que l’étudiant utilise ce qu’il doit démontrer dans la preuve en remplaçant le (2) dans (1) (en remplaçant la valeur de x dans $y=gx$). Par la suite, l’étudiant passe de ggy à gy sans le justifier, en tenant peut être pour acquis que tous les éléments sont égaux à leur produit par g comme il l’a mentionné dans la réflexivité. Paradoxalement, ceci mène l’étudiant à la valeur de y et non celle de x, qui l’amène à constater une contradiction et donc, à rejeter la symétrie de la relation. Au niveau de la transitivité, la même erreur est refaite (le même g est pris pour x et pour y), par contre l’étudiant ne développe pas ce qu’il doit démontrer (xRz) et donc le perd de vue, ceci le mène à une fausse piste, qui est de faire le produit des deux égalités au lieu de remplacer y par sa valeur. La dernière égalité, qui paraît étrange à l’étudiant puisqu’il ne peut pas commuter les éléments de G, n’aurait pas mené au résultat voulu (xRz) même si la commutativité était une hypothèse. Mais l’étudiant n’a pas remarqué ce fait (car il y a un y en plus) et s’est précipité à dire que la transitivité n’est pas vérifiée.

Production 4



1) montrons R est un relation d'équivalence
1) R reflexivite:
$xRx \Leftrightarrow \exists g \in G,\ x = gx$
pour $g = 1$ $x = x$
donc R reflexive
2) R symetrique:
on a : $xRy \Leftrightarrow \exists g \in G$ $y = gx$
$yRx \Leftrightarrow \exists g \in G$ $x = gy$
pour $x = y \Rightarrow \begin{cases} y = gx \\ x = gy \end{cases}$
donc R symetrique
3) R transitive:
$\forall x, y, z$ (xRy) et $(yRz) \Rightarrow xRz$
$xRy \Leftrightarrow \exists g \in G$ $y = gx$
$yRz \Leftrightarrow \exists g \in G$ $z = gy$
$\Rightarrow z = g^2 x \Leftrightarrow xRz$
donc R est transitive
don R est un relation d'equivalence

Cette production est une réponse à la question 1 de l'exercice.

L'étudiant sépare les trois propriétés d'une relation d'équivalence et tente de les démontrer toutes. Au niveau de la réflexivité, il réussit en remplaçant le *g* par l'élément neutre 1, ce qui nous laisse dire que, peut-être pour cet étudiant, le rôle de *g*, introduit par le quantificateur existentiel, est enfin clair. Mais ceci n'est pas le cas, comme le montrent les deux points suivants. Au niveau de la symétrie, l'étudiant n'écrit pas ce qu'il doit démontrer, mais il le sait puisqu'il l'écrit en développant l'hypothèse de la symétrie (*xRy*) et ce à quoi il doit arriver (*yRx*). Mais le fait de prendre le même *g* pour les deux égalités indique que l'étudiant considère que *g* est fixé et une fois encore, le rôle du quantificateur existentiel n'est pas du tout saisi.

Ceci met l'étudiant devant une situation absurde (il a $y=gx$ et il doit arriver à $x=gy$), de laquelle il se sort en posant $x=y$, sans se rendre compte que ceci contredit la définition de la symétrie qui doit être vérifiée pour tous les éléments. Une autre raison qui a fait que l'étudiant utilise une technique (prendre $x=y$) qui contredit la définition est le fait qu'il n'a pas commencé sa preuve par 'soient $x, y \in G_x$'. En effet en prenant dès le début deux éléments quelconques, l'étudiant avancera en considérant ce fait, et aura toujours en tête que sa démonstration est valable pour tous les éléments ce qui lui évitera de considérer des cas exceptionnels (comme $x=y$). Ceci indique que soit l'étudiant ne sait pas que la symétrie est une propriété qui doit être vérifiée par tous les éléments, soit il ne sait pas qu'il faut commencer par 'soit' pour démontrer une propriété commençant par '$\forall$'. Au niveau du dernier point qui est la transitivité, l'étudiant écrit la définition correcte de la transitivité, puis commence par développer ses deux hypothèses (*xRy* et *yRz*) mais en utilisant toujours, comme auparavant pour la symétrie, le même élément *g.* Cette fois, sachant qu'il doit arriver à (*xRz, i.e.* $z=gx$) et se trouvant avec $z=g^2x$, il ne sait pas comment s'en sortir, il écrit alors le résultat final. La dernière étape ($z=g^2x \Leftrightarrow xRz$), qui est correcte, laisse croire que l'étudiant a bien fait (en considérant g^2 comme un élément de *G* qu'on note *g*), mais le fait qu'il ne la justifie pas et qu'il a considéré auparavant l'élément *g* comme unique, révèle que l'étudiant termine sa preuve (en écrivant « donc *R* est transitive ») parce qu'il ne sait pas comment s'en sortir, étant réellement coincé.

3. Analyse globale des productions et des tâches

Les tâches proposées, a priori considérées comme simples (car relevant d'un programme déjà acquis), avec une preuve évaluée comme directe, s'avèrent en fait être compliquées pour les étudiants et certaines même impossibles à faire. Sur vingt copies, aucun étudiant n'a pu faire entièrement la première question (relation d'équivalence), deux ont pu faire correctement quelques propriétés de la question 2 (le sous-groupe) et aucun n'a fait la question 3 (l'image directe d'un sous-groupe). Le premier obstacle pour la question 1 est l'élément *g* qui a été introduit par un quantificateur existentiel, ceci a fait que les étudiants ne comprennent pas son rôle, qui est présenté par l'existence et non par l'unicité, et donc ne pas savoir l'utiliser. Les ensembles ne semblent pas, non plus, être clairs, puisque la définition de G_x qui fait intervenir deux éléments (g et x) cause beaucoup de problèmes, le fait de noter les éléments par g et non par x a dérangé énormément. Les définitions, même si elles paraissent simples (comme celle de la réflexivité) exige une bonne compréhension pour pouvoir être bien adaptées aux notations. Or, comme nous l'avons vu, les définitions sont bien retenues mais ne sont pas bien appliquées aux nouvelles notations. L'étudiant qui paraît savoir, au début, ce qu'il a et ce à quoi il veut arriver, se laisse perdre au cours de la preuve en se permettant des manipulations qui n'ont pas de sens et vont parfois jusqu'à contredire les hypothèses, la définition ou même le résultat énoncé (production 3). La question 3, qui est reliée à la fois à la logique, à la théorie des ensembles et à l'image directe par une application, semble être très difficile pour les étudiants qui ont des difficultés dans chacune de ces parties du cours d'algèbre.

V. CONCLUSION

En deuxième année universitaire, faire des preuves reste encore difficile et fait encore apparaître beaucoup d'erreurs chez les étudiants. En plus de l'obstacle du formalisme qui reste très prononcé après une année de manipulation, la compréhension du rôle et du sens des symboles demeure totalement absente chez les étudiants. Aussi, les faiblesses en théorie des ensembles sont à l'origine de plusieurs difficultés. En sollicitant à la fois les notions ensemblistes et celles de la partie logique, les choses deviennent plus compliquées pour les étudiants. Si de plus on sollicite, pour une preuve, d'autres registres supplémentaires, comme l'image directe d'un ensemble par une application, les obstacles deviennent importants au point où les étudiants sont incapables d'aborder la question. Devant une preuve, nous avons remarqué les différentes situations suivantes :

- Les étudiants, retenant bien leurs définitions, n'arrivent pas à les adapter aux nouvelles notations et donc, ne savent pas ce qu'ils doivent démontrer. Cette difficulté relève du formalisme qui reste le principal obstacle pour faire des preuves.
- Ne contrôlant pas toujours les étapes de leur preuve, les étudiants se perdent souvent, arrivent à des impasses et se permettent des manipulations qui n'ont pas de sens ou qui contredisent même ce qu'ils doivent démontrer. Ceci indique que ces étapes ne semblent pas être importantes, leur enchaînement, leur lien et leur relation à la fois avec les hypothèses et le résultat demandé ne semblent pas caractériser la preuve, ni même garantir sa validité.
- Les étudiants valident leurs preuves même si elles sont incomplètes ou mènent vers une situation sans issue.

Nous restons convaincus que beaucoup doit se faire au niveau de la partie logique, qui a été éliminée au lycée et négligée ou très vite faite en première année universitaire. Elle reste le fondement du formalisme. Je rejoins les chercheurs cités préalablement, qui avancent qu'on ne peut pas faire des mathématiques ni des preuves sans passer par l'enseignement de la logique. C'est avec cette partie que les étudiants doivent être initiés à lire les phrases formelles, pour maîtriser le sens des définitions ou d'idées et ne plus se laisser embrouillés par les différentes notations. Plusieurs niveaux suivront plus tard, comme la théorie des ensembles et les applications d'ensembles, où ce travail se poursuivra, toujours, sur les définitions et les notations accompagnées à chaque fois de justifications qui constitueront par la suite les étapes des preuves. Ces chapitres présentent un milieu adéquat pour l'initiation au raisonnement déductif, ce raisonnement qui constitue une condition nécessaire pour l'activité de démonstration (Duval 1991) car on ne peut pas demander aux étudiants de faire des preuves sans définir en quoi cela consiste. Nous avons remarqué que la preuve n'est pas bien comprise chez les étudiants, ces derniers valident souvent des preuves incomplètes ou qui ne mènent à rien ou qui même contredisent le résultat voulu. Selon les étudiants, faire une preuve ne consiste pas toujours à donner un discours qui a un sens. Il est important d'enseigner aux étudiants, avant de demander de faire des preuves, les composantes primordiales de la preuve qui sont ces différentes étapes enchaînées mais surtout bien justifiées, et qui prennent en considération les hypothèses et le résultat voulu, ce que présente (Duval 1991) par inférences et enchaînements, et qu'illustre bien Tanguay (2007). Nous souhaitons que ce point soit pris en considération par les enseignants qui ne mesurent pas toujours la difficulté de faire une preuve en l'absence de ces éléments.

Notre analyse des erreurs nous permet aussi de conclure qu'après une année de travail mathématique (en algèbre et en analyse), les étudiants de deuxième année restent des débutants devant la preuve. Cette tâche permet de révéler des faiblesses et des difficultés qui, nous le croyons, ne seront jamais dévoilées ni aux étudiants ni aux enseignants sans ce passage qui consiste à faire des preuves. Le temps trop restreint consacré aux mathématiques en première année et les parties éliminées par la réforme ont fait s'accumuler beaucoup trop de lacunes, qui sont clairement illustrées par les erreurs des étudiants.

RÉFÉRENCES

Dreyfus T. (1999) Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics* 38, 85-109.

Durand-Guerrier V. (2008) Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM Mathematics Education,* 40, 373-384.

Durand-Guerrier V., Njomgang Ngansop J. (2009) Questions de logique et de langage à la transition secondaire-supérieur. L'exemple de la négation.. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds) *Actes du Colloque EMF 2009* (GT 7). Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal.

Duval R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics* 22, 233-261.

Hanna G. (2000) Proof and Exploration: An Overview**.** *Educational Studies in Mathematics* Vol. 44, n°1 (2), 5-23.

Harel G., Sowder L. (1998) Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies. In Dubinsky E., Soenfeld A. H. and Kaput J.J. (Eds) *Issues in mathematics education*. Vol. 7. *Research in collegiate mathematics education*, III, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, 234-283.

Lucast E. K. (2003) *Proof as Method: A New Case for Proof in Mathematics Curricula*. Unpublished masters thesis. Pittsburgh, PA, USA: Carnegie Mellon University.

Moore R.C. (1994) Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics,* Vol. 27, n°3 (Oct., 1994), 249-266.

Selden J., Selden A. (2003) Errors and Misconceptions in College Level Theorem Proving. *Technical Report,* n°3, août 2003.http://math.tntech.edu/techreports/techreports.html

Selden J., Selden A. (2007) Overcoming Students' Difficulties in Learning to Understand and Construct Proofs. *Technical Report,* n°1, août 2007.
http://math.tntech.edu/techreports/techreports.html.

Semri A. (2010) Réforme du système éducatif algérien : À propos de l'articulation entre l'enseignement secondaire et le système LMD de l'enseignement supérieur en mathématiques. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds) *Actes du Colloque EMF 2009.* Université Cheikh Anta Diop, Dakar, Sénégal. Sur CD-Rom.
http://fastef.ucad.sn/EMF2009/Groupes%20de%20travail/GT7/Semri.pdf

Tanguay D. (2007) Learning Proof : from Truth towards Validity. Proceedings of the Xth *Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (RUME), San Diego State University, San Diego, California. http://www.rume.org/crume2007/eproc.html

Tanguay D. (2005) Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol. 10, 55–-93.

Weber K. (2001) Student difficulty in constructing proofs : The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 48, 101-119.