CONSTRUCTION D'UNE RESSOURCE POUR L'ENSEIGNANT : UN ALGORITHME DE SOMME DE DEUX RATIONNELS EN ECRITURE DECIMALE

Laurent VIVIER*

Résumé – La recherche mathématique, en produisant de nouveaux savoirs, est une source d'inspiration pour la constitution de ressources pour l'enseignement. Ce point est illustré par la genèse mathématique d'un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale. Cette nouvelle ressource a fait l'objet d'une situation proposée en formation initiale de professeurs de mathématiques du second degré en France. L'objectif de cette situation, par son potentiel adidactique, est une construction par les étudiants d'un tel algorithme, sans apport mathématique. Les analyses de l'expérimentation menée en formation d'enseignants montrent que l'objectif est globalement atteint.

Mots-clefs : nombre rationnel, algorithme, professeur du second degré, formation initiale

Abstract – The mathematical research, producing new knowledge, is a source of inspiration for the constitution of teaching resources. This point is illustrated by the mathematical genesis of an algorithm for the sum of two rational written in decimal expansion. This new resource was the subject of a situation proposed for pre-service secondary math professors in France. The objective of this situation, by its adidactic potential, is a construction by the students of such an algorithm, without any mathematical addition. The experimentation analyses show that the objective is globally reached.

Keywords: rational number, algorithm, secondary teacher, pre-service training

I. INTRODUCTION

La somme de deux nombres rationnels est définie classiquement par les fractions – cette définition apparaît dès le début du collège en France (grade 6). Mais il est également bien connu que, grâce à l'interprétation d'une fraction comme une division, tout nombre rationnel peut s'écrire à l'aide d'un développement décimal illimité périodique dont le nombre 1/3 joue le rôle de paradigme. Se pose alors la question de savoir effectuer la somme de deux rationnels en écriture décimale. On peut évidemment convertir les nombres dans le registre fractionnaire pour faire la somme puis, éventuellement, reconvertir le résultat obtenu en décimal. Mais cela bloque le développement des praxis (Chevallard 1999) interne à un registre de représentation (Duval 1995) comme cela est développé dans (Nikolantonakis et Vivier 2010) au sujet des opérations sur les entiers naturels en base quelconque pour des étudiants-professeurs du premier degré.

Parallèlement à ce constat, une recherche sur le codage de nombres en base exotique (Rittaud et Vivier 2011a) a mis en lumière un algorithme simple pour faire les sommes de séries périodiques. La transposition de cet algorithme en base de numération usuelle[1] (Rittaud et Vivier 2011c) permet alors de combler le problème praxéologique relatif au registre décimal des nombres rationnels mentionné ci-dessus. Cet algorithme vu comme une ressource pour l'enseignant est le thème de ce texte (l'algorithme est détaillé en annexe).

L'expérimentation proposée vise à faire construire un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale par des étudiants, de futurs enseignants en formation initiale inscrits au Master[2] 2 *Métiers des Mathématiques et de l'Enseignement* de l'université de

* LDAR, université Paris Diderot – France – laurent.vivier@paris7.jussieu.fr

[1] L'article propose plus largement une construction de **Q** par les développements décimaux illimités périodiques avec des algorithmes pour les quatre opérations de base.

[2] Il s'agit d'un diplôme délivré après 5 ans d'études universitaires.

© VIVIER L. (2012) Construction d'une ressource pour l'enseignant : un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT6, pp. 919–932). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Tours. Le déroulement expérimental est classique et s'appuie sur la Théorie des Situations Didactiques (TSD) de Brousseau (1998) : un travail individuel (dévolution) suivi de travaux de groupes (action, formulation, validation) et des présentations de ces travaux en classe entière.

En section II, nous exposons rapidement la genèse de la ressource mathématique, de la recherche mathématique fondamentale à sa transposition dans le cadre des mathématiques scolaires (c'est-à-dire les mathématiques de l'enseignement secondaire). Puis, en section III, nous exposons l'expérimentation menée en formation initiale de professeurs du second degré. Enfin, en dernière section, nous menons une discussion sur la ressource construite, son intérêt et ses possibles utilisations.

II. CONSTITUTION MATHEMATIQUE DE LA RESSOURCE

1. Présentation générale de la recherche mathématique

La recherche mathématique sur laquelle cette communication s'appuie est le fruit d'un travail de recherche en collaboration avec Benoît Rittaud (Rittaud et Vivier 2011a). Nous y étudions un ensemble de nombres, appelés nombres F-adiques, dont la construction est principalement sémiotique. Il s'agit d'une extension du codage des nombres entiers dans le système de numération de Zeckendorf (1972) qui s'appuie sur la suite de Fibonacci. Le principe est à peu près le même que lorsque l'on considère des séquences infinies de chiffres dans le système décimal usuel. Plus précisément, les nombres F-adiques sont obtenus en considérant une série infinie de 0 et de 1 sans jamais avoir deux 1 consécutifs[3]. L'ensemble obtenu possède une structure de groupe topologique abélien totalement ordonné. Une étude complète a été menée sur les séries périodiques, i.e. périodiques à partir d'un certain rang (Rittaud et Vivier 2011a). Comme on peut s'y attendre, et comme en base usuelle, ces éléments périodiques s'identifient avec les fractions d'entiers[4]. Nous nous focalisons ici uniquement sur la somme. Dans nos recherches, un algorithme simple de somme de deux rationnels dans l'ensemble des nombres F-adiques a été trouvé ce qui a constitué une clé essentielle.

L'idée a alors été de voir si cet algorithme de somme pouvait être transposé pour les rationnels en écriture décimale (ou dans une autre base). La réponse est positive et est surprenante de simplicité. Par la suite, les analogies entre la base dix et la base de Fibonacci ont été très fructueuses (cf. Rittaud et Vivier 2011b). Nous référons en outre à (Rittaud et Vivier 2011c) pour les résultats en base de numération usuelle – en particulier, nous proposons une construction innovante de **Q** à partir des écritures décimales périodiques.

2. Le point de vue des approximations

Pour effectuer une somme, que ce soit en base de numération usuelle ou en base de Fibonacci, on peut toujours s'en sortir en considérant des sommes successives et en utilisant un argument de type valeur approchée. Prenons un exemple en base usuelle. Pour effectuer la somme $0,\overline{72}+0,\overline{33}$ on trouve en prenant de plus en plus de périodes :

Nombre de périodes	1	2	3	4
Résultats partiels	1,05	1,0605	1,060605	1,06060605

Tableau 1 *– Sommes par approximations successives*

[3] Cette condition provient directement de la relation de récurrence $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ de la suite de Fibonacci.

[4] Toutefois, certaines propriétés sont surprenantes, comme le fait qu'une équation $D\times x=N$ possède dans l'ensemble des F-adiques exactement D solutions distinctes – N et D sont deux entiers avec $D\neq 0$.

ce qui permet d'inférer la solution qui est $1,\overline{06}$.

Le problème est que cette procédure de nature topologique repose sur une perception visuelle des valeurs approchées successives trouvées, donc peu algorithmisable à moins de connaître a priori la taille des périodes et le début des périodes – mais cela n'est pas simple à démontrer à partir de cette procédure de somme. En outre, cette procédure s'appuie sur le fait que la somme de deux nombres ayant une période est un nombre ayant une période ainsi que sur la continuité de la somme.

Nous avons débuté nos recherches sur les nombres *F*-adiques avec ce point de vue par approximation pour effectuer les sommes. Mais la gestion des retenues est bien plus délicate dans l'ensemble des *F*-adiques qu'en base de numération usuelle. En fait, pour faire le lien entre les périodiques et les fractions dans le cadre des nombres *F*-adiques, la situation est inextricable si l'on se contente de cette procédure topologique par approximations pour effectuer les sommes. Une idée neuve est nécessaire et l'algorithme que nous présentons ici provient de ce problème plus difficile : au lieu de considérer le nombre dans sa totalité, il suffit de considérer une unique période et de compter les éventuelles retenues provenant de cette période sur elle-même. L'explication est simple puisque les retenues sont les mêmes pour toutes les périodes, on simule ainsi l'action des autres périodes sur celle que l'on considère plus particulièrement.

3. L'algorithme de somme en base dix

L'algorithme se transpose sans aucun problème à la base dix et à l'identique. Voyons quelques exemples qui permettent de faire ressortir les trois éléments essentiels de l'algorithme : faire débuter la période au même rang, avoir des périodes de même taille, gérer l'éventuelle retenue à gauche (l'usage du singulier est notable, la gestion des retenues est bien plus facile qu'en *F*-adique (Rittaud et Vivier 2011b).

1. Le premier exemple (figure 1a) est celui où il n'y a aucune adaptation par rapport à l'algorithme de somme de deux décimaux en écriture décimale : $34{,}0\overline{45} + 2{,}5\overline{27} = 36{,}5\overline{72}$
2. L'exemple (figure 1b) de la somme $5{,}7\overline{248} + 8,\overline{307} = 5{,}7\overline{248} + 8{,}3\overline{073} = 14{,}0\overline{321}$ montre comment procéder lorsque les périodes ne commencent pas au même rang (il faut *décaler* la période tout en permutant ses chiffres).
3. L'exemple (figure 1c) de la somme $0,\overline{34} + 7,\overline{202} = 0,\overline{343434} + 7,\overline{202202} = 7,\overline{545636}$ montre comment procéder lorsque les périodes n'ont pas la même taille (il suffit d'utiliser le PPCM des tailles).
4. Le dernier exemple (figure 1d) concerne le problème de la gestion de la retenue qui *sort de la période*. Nous marquons en gras les retenues qu'il faut compter deux fois : au premier chiffre de la période et au premier chiffre à gauche de la période (le 0 trouvé en premier est donc barré et remplacé par un 1). On trouve : $3,\overline{24} + 4,\overline{96} = 8,\overline{21}$.

				1	
	3	4,	0	4	5
+		2,	5	2	7
	3	6,	5	7	2

Figure 1a

				1	1	
		5,	7	2	4	8
+		8,	3	0	7	3
	1	4,	0	3	2	1

Figure 1b

	0,	3	4	3	4	3	4
+	7,	2	0	2	2	0	2
	7,	5	4	5	6	3	6

Figure 1c

	1	1	
	3,	2	4
+	4,	9	6
	8,	2	~~0~~1

Figure 1d

Bien que les trois cas puissent se présenter simultanément dans un même calcul, la simplicité de cet algorithme est notable. Une majorité d'élèves de seconde (grade 10), sur les 113 de l'étude expérimentale, utilise sans difficulté l'algorithme bien que sa compréhension soit moins évidente[5]. On peut se demander pourquoi un algorithme aussi simple n'a pas été découvert avant nos très récentes recherches – ou, s'il l'a été, pourquoi n'est-il ni utilisé ni diffusé. Nous pensons qu'une des raisons tient dans les possibilités techniques : en base de numération usuelle, il est toujours possible d'écrire les nombres rationnels dans le registre fractionnaire pour faire les opérations voulues. Or, cela n'est pas possible avec les nombres *F*-adiques puisqu'il y a plusieurs solutions aux équations $D\times x=N$. En outre, l'identification des périodiques avec les rationnels est bien plus délicate et a demandé une idée nouvelle qui s'est révélée très fructueuse.

III. CONSTRUCTION DE L'ALGORITHME PAR DES ELEVES PROFESSEURS

1. Présentation de la situation

La situation initialement prévue se décompose en trois phases :

1. une première activité individuelle d'une dizaine de minutes où les élèves professeurs doivent déterminer trois sommes de rationnels en écriture décimale (la convention d'écriture des périodes est rappelée) :

$$0,\overline{5}+0,\overline{7} \qquad\qquad 0,\overline{34}+0,\overline{51} \qquad\qquad 0,\overline{72}+0,\overline{3}$$

2. un travail de groupe de une à deux heures avec la consigne suivante : « trouver une manière générale pour faire ce type de somme et rédiger votre stratégie » ;
3. une présentation des résultats des groupes en classe entière suivie de débat pour une quinzaine de minutes environ par groupe.

La situation est fortement inspirée par la TSD (Brousseau 1998) : la première activité joue le rôle de dévolution et le travail de groupe en autonomie totale (pas d'échange entre groupe, aucun indice mathématique donné par l'enseignant) donne une dimension adidactique dans les trois phases d'action, de validation et de formalisation. L'objectif principal de cette séance était de donner une alternative à l'enseignement traditionnellement plus frontal au secondaire en s'appuyant sur une situation ayant un potentiel adidactique. Pour cela, les étudiants-professeurs étaient en situation d'homologie (Kuzniak 2003).

Des feuilles de format A3 sont distribuées aux groupes pour la rédaction, la calculatrice est autorisée (elle sera très peu utilisée) et une durée totale de trois heures est prévue.

2. Analyse a priori

La phase 1 n'a d'importance que pour la dévolution. Toutefois, on s'attend aux procédures suivantes :

- conversion dans le registre fractionnaire pour effectuer la somme (les étudiants ont vraisemblablement déjà rencontré cette conversion) avec éventuellement une reconversion dans le registre décimal à l'aide d'une division ;

[5] Voir (Vivier 2011). En outre, les problèmes de compréhension semblent disparaître en première année de mathématiques à l'université (14 étudiants interrogés). Il est également à noter que l'algorithme pratique présenté aux figures 1a à 1d est une adaptation de la présentation pratique initiale en fonction de ce que les élèves et les étudiants ont produit (ibid.).

- calcul correct à l'aide de valeurs approchées successives (cf. tableau 1) en utilisant implicitement la continuité de la somme et le fait que la somme de deux périodiques est périodique ;
- calculs à l'aide de valeurs approchées successives, sans aboutir à un résultat ou en donnant ce que Margolinas (1988) nomme une réponse *infinitésimale* (comme par exemple la somme $0,\overline{5}+0,\overline{7}=1,\overline{3}2$ effectuée par une étudiante, nommée H ; voir aussi la figure 2).

Les dernières procédures sont vraisemblables, même à ce niveau (M2 enseignement des mathématiques) puisque les étudiants n'ont pas, ou très peu, travaillé avec ce type d'objets mathématiques et que le problème des retenues apparaît aux sommes 1 et 3. Les autres procédures qui consistent à ajouter séparément les parties entières et les périodes ne sont pas retenues pour la population étudiée vu le niveau d'étude mathématique – ce type de réponses est donné par des élèves de seconde en France (Vivier 2011).

Les échanges à l'intérieur d'un groupe lors de la phase 2 doit permettre d'éliminer les réponses erronées. La consigne, en demandant une manière générale pour effectuer une somme en écriture décimale, demande de fait de formuler un algorithme et incite à donner le résultat final dans le registre décimal. Plusieurs choix sont alors possibles parmi les procédures exposées ci-dessus. En outre, la nécessité de rédiger un algorithme en vue d'une communication incite à formuler clairement et à valider les procédures envisagées. Les fractions peuvent constituer un élément de validation important et nous serons attentifs, dans les analyses a posteriori, au statut des fractions.

Dans cette phase 2, il est prévu que les trois éléments essentiels d'un algorithme de somme (cf. section II.3) apparaissent, mais globalement pour l'ensemble des groupes (bien qu'espéré, il n'est pas attendu qu'un groupe trouve un algorithme). L'identification des trois problèmes provient de la phase d'action pourvu que les sommes testées soient suffisamment variées (les sommes proposées en phase 1 ne permettent pas de voir tous les problèmes). Or, les travaux d'un groupe peuvent reposer sur des implicites comme par exemple des périodes qui débutent juste après la virgule (sous une éventuelle influence des sommes proposées en phase 1). Vu le niveau mathématique des étudiants, il est attendu que les problèmes identifiés soient résolus sauf éventuellement la gestion de la retenue qui est plus délicate.

L'algorithme général de somme de deux rationnels en écriture décimale est l'objectif majeur de la phase 3 où il est prévu que, chaque groupe présente son travail. Ainsi, il est attendu que les éléments incontournables de l'algorithme apparus en phase 2 dans les groupes soient mutualisés pour ensuite construire, ensemble et guidé éventuellement par l'enseignant, un algorithme général.

3. *Constitution des groupes : analyse de la phase de dévolution*

À l'issue de la phase individuelle, quatre groupes de trois étudiants sont formés. Les douze étudiants sont nommés à l'aide d'une lettre (A à L) et les groupes par les trois lettres désignant les étudiants (ABC, DEF, GHI et JKL). Les groupes ont été constitués dans un souci de mixité spatiale : lors de la phase individuelle, deux étudiants voisins ont pu s'influencer, aussi chaque groupe est constitué par 3 élèves-professeurs dont aucun n'était voisin des deux autres. De ce fait, les groupes ne sont pas équivalents dans leur constitution comme on peut le constater avec le tableau 2.

	Conversion et traitement dans le registre des fractions AVEC ou SANS reconversion dans le registre décimal	Calcul(s) avec un nombre FINI ou INDÉFINI de périodes	OK : a) et b) corrects et c) correct ou sans réponse NR : aucune réponse (a et b) INF : réponse infinitésimale
A		INDÉFINI	INF
B			autres problèmes
C	AVEC		OK
D		FINI	OK
E	AVEC		OK
F		INDÉFINI	OK
G	AVEC		OK
H			INF
I			OK
J		FINIS	NR
K	SANS		OK
L		FINIS	NR

Tableau 2 *– Constitution des groupes*

Dans chaque groupe se trouve un étudiant qui a utilisé une conversion dans le registre fractionnaire pour effectuer la somme (SANS reconversion pour le groupe JKL et AVEC reconversion pour les trois autres groupes) et dans chaque groupe se trouve au moins un étudiant qui a trouvé les bonnes sommes (codage OK). Toutefois, les groupes ABC et JKL semblent plus faibles que les deux autres puisqu'un seul étudiant donne les bonnes sommes (codage OK). Pour le groupe JKL, les étudiants J et L ne donnent pas de réponse (codage NR) et pour le groupe ABC, A donne une réponse infinitésimale (cf. figure 2) et B montre des problèmes de gestion de la retenue qui n'est pas comptabilisée à la partie entière et avec une inversion des chiffres de la période (cf. figures 3a et 3b).

$$0,\bar{5} + 0,\bar{7} = 0,555\ \ldots 5 + 0,77 \ldots 7$$
$$= 1,3\ldots\ldots 332$$

Figure 2 *– Réponse infinitésimale à la somme a) (reproduction de la production de A)*

$$0,\bar{5} + 0,7 = 0,\bar{3} \qquad\qquad 0,\overline{72} + 0,\bar{3} = 0,\overline{60}$$

Figures 3a et 3b *– Problèmes de retenue et d'inversion de chiffres (reproductions des productions de B)*

En outre, le groupe DEF semble d'un meilleur niveau mathématique sur le sujet que les autres. En particulier, c'est dans ce groupe que se trouvent les deux étudiants D et F qui effectuent les sommes correctement par des approximations (cf. figures 4a et 4b). Ces deux étudiants possèdent des technologies (au sens de (Chevallard 1999)) sur la somme de deux nombres périodiques. Si on peut penser que la continuité de la somme est implicite, il semble clair (surtout pour F qui met entre parenthèse le chiffre résiduel 2) que ces étudiants savent que la somme de deux périodiques est un nombre périodique.

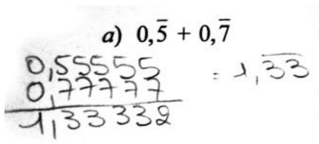


Figure 4a *– Somme a) par approximation (production de D)*

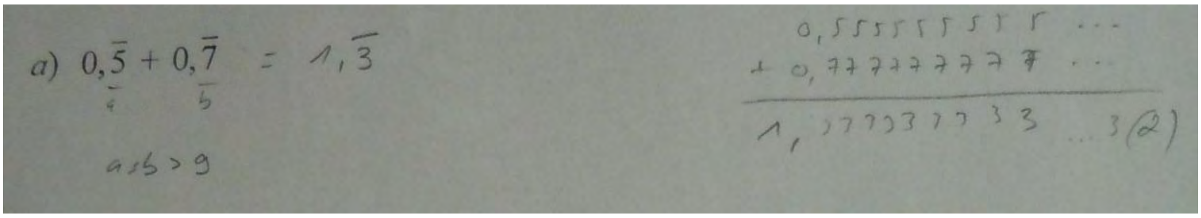


***Figure 4b** – Somme a) par approximation (production de F)*

Les étudiants se sont mis au travail sans aucun problème dans cette phase individuelle qui a parfaitement joué son rôle de dévolution puisque l'investissement et l'intérêt n'ont pas faibli dans la phase 2.

4. *Analyse des productions collectives*

Comme prévu, le travail de groupes a permis d'éliminer rapidement toutes les erreurs apparues individuellement et les productions sont, globalement, toutes correctes. Il a fallu insister pour que les groupes se mettent à écrire. Il semble que les étudiants avaient beaucoup de mal à commencer une rédaction sur un sujet qui était en cours de constitution : sans doute voulaient-ils écrire uniquement un texte sûr du point de vue du savoir mathématique en jeu. La rédaction s'est donc fortement accompagnée de justifications mathématiques : les phases de formulation et de validation ont largement été menées en parallèle.

	début période	taille période	retenue	fractions	décomposition des nombres
ABC		PPCM	report sur un exemple	conversion	
DEF	totalement traité	PPCM	problème identifié	conversion (validation)	entier + partie décimale + partie *périodique*
GHI	partiel : rangs égaux	PPCM		conversion	décimal + partie *périodique*
JKL				conversion	décimal + partie *périodique*

***Tableau 3** – Productions des groupes*

Le groupe JKL décompose chacun des deux nombres à sommer en somme d'un décimal et d'un nombre de la forme $0{,}0\ldots0\overline{\pi}$ où π est une période. Puis les étudiants de ce groupe identifient le problème qui consiste en la somme des deux parties *périodiques*. Pour effectuer cette somme, ils proposent de les convertir en fraction (par une technique proche de la mise en équation) puis de reconvertir en écriture décimale la somme déterminée sous forme de fraction.

Le groupe ABC a une production proche du groupe JKL à deux différences près : la conversion écriture décimale → écriture fractionnaire est effectuée sur la *totalité* du nombre et non pas seulement sur la partie *périodique* $0{,}0\ldots0\overline{\pi}$; le groupe ABC identifie la taille de la période de la somme comme étant le PPCM des tailles des périodes des deux nombres à sommer (on ne voit pas comment ils ont trouvé ce résultat, peut-être de manière empirique). L'étudiante B, en fin de phase 2, a fait une remarque essentielle que le groupe n'a malheureusement pas pu exploiter faute de temps. La remarque concerne le report de la retenue (cf. figure 5) : lorsque l'on prend deux nombres de la forme $0{,}\overline{\pi}$ et que leur somme dépasse 1 (ce qui correspond à un cas particulier de la somme de deux périodes de taille l lorsque celle-ci est supérieure ou égale à 10^l ; cf. aussi la première somme de la phase 1) alors la somme s'obtient comme si on sommait deux décimaux (avec une éventuelle mise au format de la taille des périodes en prenant le PPCM des tailles) et ensuite en ajoutant 1 à la période obtenue. Cette remarque fait que ce groupe est très proche d'un algorithme général car ils ont de fait un algorithme pour faire une somme du type $0,\overline{\pi} + 0,\overline{\pi'}$: 1) écrire les nombres avec des périodes de même taille en utilisant le PPCM ; 2) faire la somme comme s'il s'agissait de deux nombres décimaux ; 3) ajouter 1 à la période si la somme dépasse 1. Cet algorithme s'étend rapidement et simplement à la somme de deux rationnels pourvu que les périodes débutent au même rang (le groupe n'a pas identifié ce problème). Ils n'ont pas trouvé de justification à cette remarque.

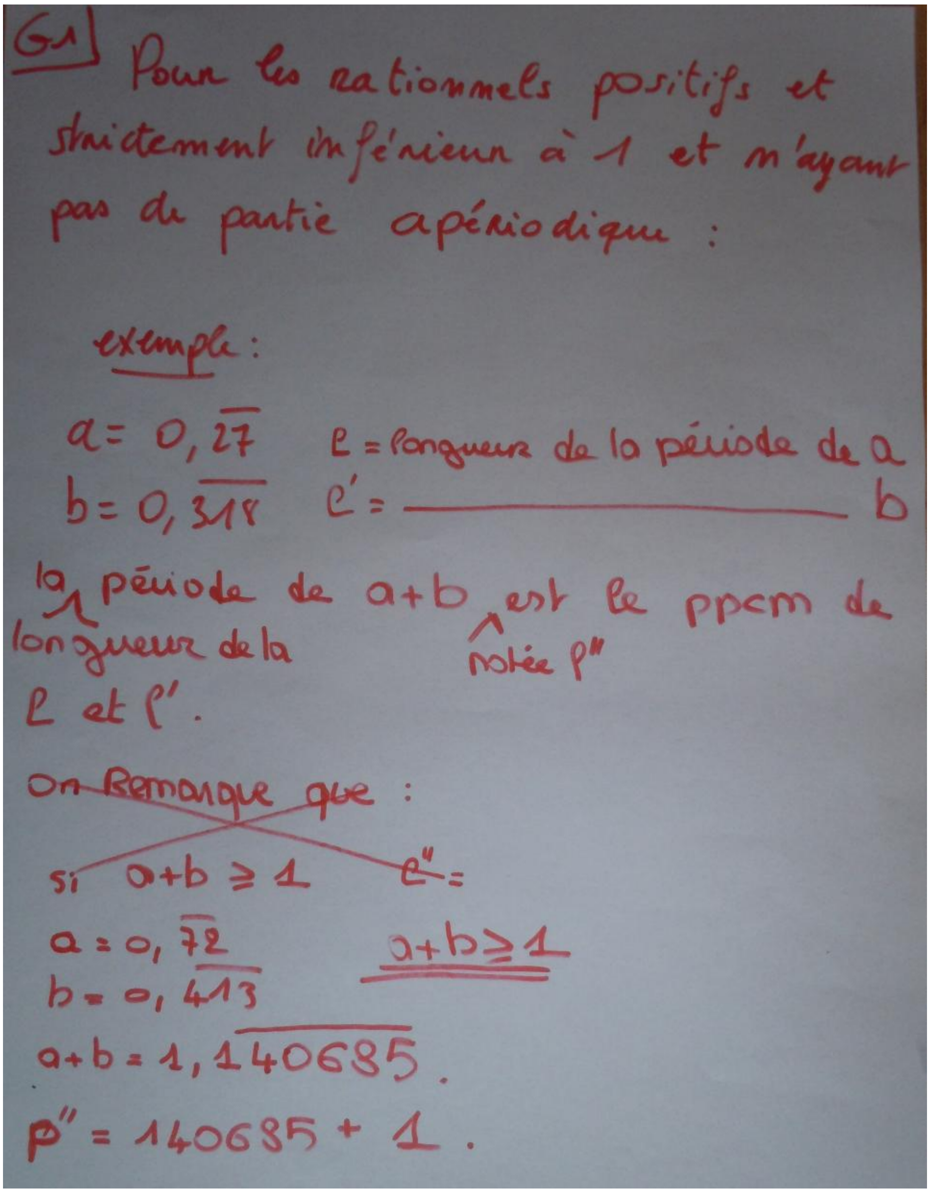


Figure 5 *– La remarque du groupe ABC sur les retenues*

Le groupe GHI, comme le groupe JKL, décompose un nombre en somme d'un décimal et d'une partie *périodique* (il y a un problème de notation car on ne sait pas combien de 0 il faut écrire, cf. figure 6). Les étudiants de ce groupe identifient le rôle joué par le PPCM des tailles des périodes et écrivent les parties *périodiques* pour qu'elles aient la même taille puis convertissent ces parties *périodiques* sous forme de fraction pour effectuer la somme. L'algorithme n'est présenté que pour deux nombres dont les périodes commencent juste après la virgule. L'exemple traité montre qu'ils envisagent de reconvertir les nombres dans le système décimal. Le problème du début des périodes est partiellement identifié car, implicitement, ils considèrent que le rang de début de période est le même pour les deux nombres. Ils résolvent alors le problème en se ramenant au cas précédent en multipliant les deux nombres par une même puissance de 10.

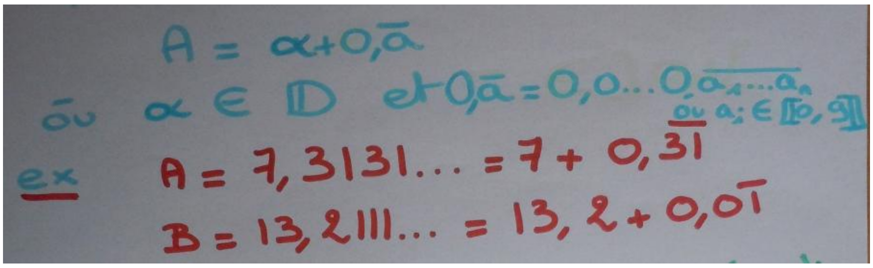
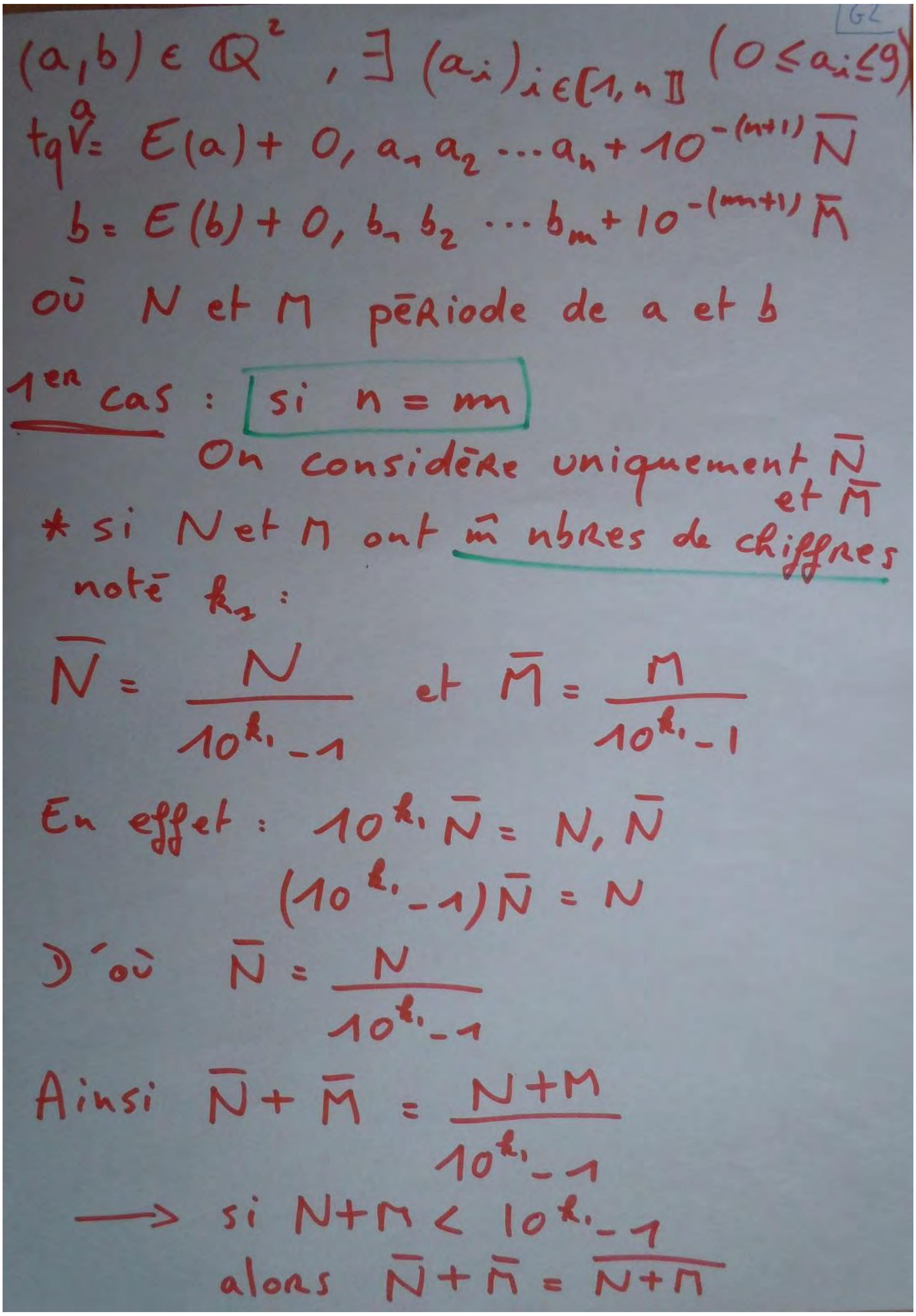


***Figure 6** – Imprécision dans la décomposition (production de GHI)*

Le groupe DEF décompose également les nombres mais en trois parties : la partie entière, une partie décimale non périodique et une partie *périodique*. Les étudiants de ce groupe ont identifié le problème de la taille des périodes et, même s'ils ne le disent pas explicitement, ils résolvent le problème à l'aide du PPCM (sur un exemple avec les tailles 3 et 2). Le cas de deux nombres dont les périodes ne débutent pas au même rang est parfaitement traité et ils écrivent : « on complète avec les chiffres de la période (en respectant la périodicité restante) ». Ces deux traitements, pour la taille et le rang de début des périodes, sont envisagés successivement pour compléter leur première approche relative au cas où les deux nombres ont des périodes de taille identique et qui débutent au même rang. Cela leur permet d'identifier, sans le résoudre, le problème de la retenue. Ce groupe a une position plus avancée que les autres dans le sens où il n'y a pas de focalisation sur un calcul dans le registre des fractions. S'il y a bien une conversion dans le registre fractionnaire, l'objectif est principalement d'identifier la nouvelle période. Plus précisément, ces trois étudiants considèrent les périodes comme des objets que l'on peut sommer (figure 7). Les fractions servent à définir cette somme, mais l'idée est bien d'obtenir une somme de deux périodes de même taille (cf. le groupe des périodes, Rittaud et Vivier 2011c). Ils identifient le problème de la retenue mais, bien que la solution soit proche, il n'est pas résolu. Notons toutefois que la notation $\overline{N}$ est sans doute le signe d'une confusion entre la période qui est une suite finie de chiffres que l'on peut coder[6] par un entier N et le nombre $0,\overline{N}$.

[6] Il faut toutefois faire attention, car les périodes 032 et 32 ne sont pas identiques (à ce sujet, cf. Rittaud et Vivier 2011c).



G2

$(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, $\exists\, (a_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ $(0 \leq a_i \leq 9)$

tq $a = E(a) + 0{,}a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-(n+1)}\,\overline{N}$

$b = E(b) + 0{,}b_1 b_2 \dots b_m + 10^{-(m+1)}\,\overline{M}$

où N et M période de a et b

1er cas : $\boxed{\text{si } n = m}$

On considère uniquement $\overline{N}$ et $\overline{M}$

* si N et M ont m̄ nbres de chiffres noté k_1 :

$$\overline{N} = \frac{N}{10^{k_1}-1} \quad \text{et} \quad \overline{M} = \frac{M}{10^{k_1}-1}$$

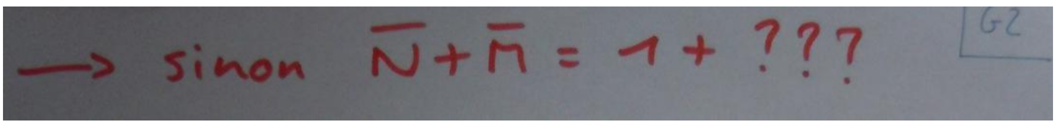
En effet : $10^{k_1}\,\overline{N} = N{,}\overline{N}$

$$(10^{k_1}-1)\,\overline{N} = N$$

D'où $\overline{N} = \dfrac{N}{10^{k_1}-1}$

Ainsi $\overline{N} + \overline{M} = \dfrac{N+M}{10^{k_1}-1}$

→ si $N+M < 10^{k_1}-1$
alors $\overline{N} + \overline{M} = \overline{N+M}$



G2

→ sinon $\overline{N} + \overline{M} = 1 + ???$

Figure 7 *– Somme des périodes (production du groupe DEF)*

5. *Production de la ressource visée*

Les présentations en classe entière n'ont pas produit l'effet escompté. Les interactions entre groupes ont été peu nombreuses. On peut penser que les étudiants étaient un peu fatigués après presque deux heures de travail intense pour procéder à une synthèse qui s'avère être plus difficile que prévue (plusieurs éléments à prendre en compte, homogénéiser les points de vue etc.). De plus, le temps manquait car la situation proposée s'insérait dans un dispositif de formation de 3h et il fallait conserver au moins 15 minutes à la fin pour procéder à un bilan[7] de la séance (en outre, une durée non négligeable avait été consacrée en début de séance à régler des problèmes d'emploi du temps).

Les productions des quatre groupes ont finalement été numérisées puis envoyées aux étudiants avec pour consigne de s'en inspirer pour produire un algorithme de somme pour la semaine suivante. C'est l'étudiante[8] H qui présente son travail de synthèse à l'ensemble de la classe. Voici son algorithme :

1. Multiplier les deux nombres par 10^N pour faire débuter les périodes directement après la virgule (N est le maximum des rangs de début de période des deux nombres). Les chiffres des périodes des deux nombres subissent éventuellement une permutation, mais les tailles sont inchangées.

2. On utilise le PPCM des tailles des périodes pour avoir deux nombres avec des périodes de même taille.

3. La somme est écrite sous forme fractionnaire avec notamment la somme des deux périodes au numérateur et $10^{ppcm}-1$ au dénominateur.

Le formateur procède alors à quelques précisions, ajustements et simplifications notamment pour, à partir de cette formule :

- montrer que la multiplication par 10^N pour ensuite faire une multiplication par 10^{-N} peut être directement effectuée sur l'écriture décimale ;
- montrer comment gérer la retenue pour aboutir à un algorithme de somme en écriture décimale.

Cela suscite deux réflexions : d'une part, et comme on pouvait s'y attendre, la gestion de la retenue n'est pas triviale et d'autre part les fractions constituent un registre qui a tendance à supplanter le registre de l'écriture décimale dès que l'on traite des nombres rationnels.

IV. DISCUSSION

Au vu des analyses précédentes, et malgré le léger problème de temps, l'objectif est atteint : il est possible de faire construire un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale par des étudiants-professeurs. La recherche mathématique a donc permis l'élaboration d'une ressource, ici un algorithme, qui peut être reconstruite par l'activité proposée. Cette reconstruction se distingue cependant de la situation vécue par le chercheur en mathématiques puisque les étudiants savent que le savoir existe – il est détenu en particulier par le formateur. Tournons-nous maintenant vers une question qui émerge naturellement : cette ressource est-elle intéressante pour des enseignants du second degré ? Nous avançons plusieurs arguments.

[7] Il s'agissait de montrer la productivité et la dialectique des situations adidactiques d'action, de formulation et de validation.
[8] Il s'agit d'une étudiante sérieuse et d'un bon niveau mathématique.

Cet algorithme pourrait évidemment constituer une ressource pour la partie « algorithmique » des nouveaux programmes du lycée en France. D'ailleurs, l'écriture d'un programme informatique pour cet algorithme est intéressante en soi. Par exemple, la question du stockage informatique d'un nombre rationnel en écriture décimale n'est pas aussi simple que ce que l'on pourrait penser. Les productions des groupes, notamment leurs décompositions, montrent souvent des implicites qui seraient problématiques au cours d'une implémentation informatique. Dans la perspective des nouveaux programmes du lycée, il est envisagé de proposer en formation continue d'enseignants du second degré l'écriture d'un programme informatique pour l'algorithme de somme présenté dans ce texte. Il est par ailleurs prévu de proposer le téléchargement en ligne des algorithmes et programmes pour les opérations sur les rationnels en écriture décimale.

Une fois l'algorithme programmé, l'utilisation de cette nouvelle ressource informatique peut alors être envisagée. On peut penser par exemple à l'expérimentation en formation d'enseignants du premier degré de Weller, Arnon et Dubinsky (2009) où faute de connaître un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale, ils utilisent un programme informatique qui procède par une double conversion en utilisant le registre des fractions pour effectuer la somme. Même si cette double conversion est totalement masquée aux enseignants en formation, elle constitue une entorse à l'éthique des mathématiques. On disposerait alors d'une ressource pour la formation d'enseignants conforme à l'éthique.

Mais, l'intérêt est, à notre avis, ailleurs. D'une part l'algorithme de somme permet de définir par des sommes réitérées la multiplication d'un rationnel en écriture décimale et de justifier les opérations qui sont utilisées dans la conversion du registre décimal dans le registre fractionnaire. Souvent, les enseignants sont mal à l'aise avec la technique qui consiste à poser, par exemple, $a=0,999\ldots$ pour ensuite, par une multiplication par 10 et une soustraction, aboutir à $a=1$. Ils sont mal à l'aise car ils ont conscience du fait qu'il y a un vide mathématique et que les opérations utilisées, si simples soient-elles, manquent d'appui. Un algorithme tel celui présenté ici permet de constituer une ressource pour l'enseignant dans le but de soutenir mathématiquement son activité d'enseignant – sans forcément que cela soit visible pour l'élève.

D'autre part, définir une somme sur les rationnels en écriture décimale permet de rentrer pleinement dans des questions sur les développements décimaux, et donc les nombres réels, avec notamment la question cruciale de l'égalité entre 0,999… et 1. De fait, et contrairement à l'opinion commune, cette égalité relève uniquement du cadre des nombres rationnels. En effet, pour tout nombre rationnel a qui a une période non nulle – i.e. a n'est pas un décimal – l'algorithme donne $0,999\ldots+a=1+a$ (Richman 1999, Rittaud et Vivier 2011c) ce qui montre la nécessité d'identifier les deux représentations, propre et impropre, des décimaux. Car sans cette identification, les développements décimaux illimités ne seraient pas des nombres puisque l'on ne pourrait effectuer les opérations avec les propriétés de bases (cf. les systèmes de nombres de Chevallard (1989)). On pourrait alors reprendre l'expérimentation de Weller et al. (2009) sans faire appel à un programme informatique puisque les calculs peuvent finalement être effectués *à la main*. Une expérimentation de ce type est actuellement en cours en première année d'université.

REFERENCES

Brousseau G. (1998) *Théorie des Situations Didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège deuxième partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43-72.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 222-265.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

Kuzniak A. (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 7.

Margolinas C. (1988) Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x* 16, 51-66.

Nikolantonakis K., Vivier L. (2010) Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce. In Régnier J.-C., Spagnolo F., Di Paola B., Gras R. (Eds.) *Analyse statistique implicative - objet de recherche et de formation en analyse de données, outil pour la recherche multidisciplinaire*. *Actes du 5e colloque A.S.I.*, Palermo 2010.

Richman F. (1999) Is .999. . .= 1? *Mathematics Magazine* 72(5), 396-400.

Rittaud B., Vivier L. (2011a) Circular words, F-adic numbers and the sequence 1, 5, 16, 45, 121, 320,…. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici* (à paraître).

Rittaud B., Vivier L. (2011b) Un point de rencontre entre recherche mathématique et recherche didactique. In Trouche L.et al. (Eds.) (pp. 85-92) *Faire ensemble des mathématiques : une approche dynamique de la qualité des ressources pour l'enseignement. Actes des Journées mathématiques IFÉ-ENS de Lyon* 15 et 16 juin 2011, Lyon : ENSL.

Rittaud B., Vivier L. (2011c) The fields **Q** from the standpoint of circular words – en préparation, une version simplifiée en français est disponible sur Internet : http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/59/34/13/PDF/Rittaud-Vivier-DDIP.pdf

Vivier L. (2011) El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados. *El cálculo y su enseñanza* (à paraître).

Weller K., Arnon I., Dubinsky E. (2009) Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 9(1), 5-28.

Zeckendorf E. (1972) Représentation des nombres naturels par une somme des nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège* 41, 179-182.

ANNEXE : L'ALGORITHME

Nous proposons dans cette annexe un algorithme prêt à être implémenté dans un langage de programmation. Nous avons opté pour un stockage des nombres rationnels utilisant des chaînes de caractères (en lettres grecques) car cela permet de prendre en compte tous les zéros de manière relativement élémentaire. La somme des chaînes de caractères est la concaténation, $\pi[k]$ désigne le k-ième caractère de la chaîne de caractères π (les caractères sont comptés de gauche à droite) et taille(π) désigne le nombre de caractères que contient la chaîne π. D'autres options sont possibles comme par exemple à l'aide d'un décimal d et d'un entier p avec le rang de début de période et la taille de la période ou bien encore à l'aide de pointeurs[9].

1. Entrées[10] des chaînes de caractères ε, ε', δ, δ', π et π'.

[9] Les pointeurs ont l'avantage d'être seulement limité par les capacités de mémoire alors que les entiers et chaînes de caractères sont, eux, limités en nombre de chiffres et de caractères.

[10] Les chaînes ε et ε' codent les parties entières, δ et δ' les parties décimales non périodiques, π et π' les périodes. On se propose ainsi d'effectuer la somme $\varepsilon,\delta\overline{\pi} + \varepsilon',\delta'\overline{\square'}$. Les chaînes δ et δ' peuvent être vides contrairement

2. *Faire débuter les périodes au même rang (r' après le 2-b)) :*

a) r=taille(δ) ; r'=taille (δ').

b) Si $r>r'$, échanger les chaînes ε et ε', δ et δ', π et π' ainsi que r et r'.

c) t=taille(π).

d) Pour i allant de 1 à $r'–r$ faire :

i) s=π[1] ; δ=δ+s ; *(concaténation du premier chiffre de la période à la partie non périodique)*

ii) Pour k allant de 1 à t–1 faire π[k]=π[k+1] ; π[t]=s *(permutation des chiffres de la période).*

3. *Mettre les deux périodes à la même taille (m dans la suite) :*

a) t'=taille(π') ; m=PPCM(t,t').

b) θ=π ; Pour i allant de 2 à m/t faire π=π+θ.

c) θ=π' ; Pour i allant de 2 à m/t' faire π'=π'+θ.

(Concaténation de m/t périodes π et de m/t' périodes π' pour obtenir la taille commune m.)

4. *Calcul de la somme (avec prise en compte des retenues) :*

Si δ=∅ alors faire :

a) convertir les chaînes ε, ε', π et π' en nombre entier e, e', p et p'.

b) $e''=e+e'$; $p''=p+p'$;

c) si $p'' \geq 10^m$ alors faire : $p''=p''-10^m+1$; $e''=e''+1$;

d) convertir les nombres e'' et p'' en chaînes de caractères ε" et π" ; δ"=∅.

Sinon faire :

a) convertir les chaînes ε, ε', δ, δ', π et π' en nombre entier e, e', d, d', p et p'.

b) $e''=e+e'$; $d''=d+d'$; $p''=p+p'$;

c) si $p'' \geq 10^m$ alors faire : $p''=p''-10^m+1$; $d''=d''+1$;

d) si $d'' \geq 10^{r'}$ alors faire : $d''=d''-10^{r'}$; $e''=e''+1$;

e) convertir les nombres e'', d'' et p'' en chaînes de caractères ε", δ" et π".

5. *Sortie* : afficher la somme : $\varepsilon,\delta\overline{\pi} + \varepsilon',\delta'\overline{\pi'} = \varepsilon'',\delta''\overline{\pi''}$.

aux autres (un décimal est codé avec une période de zéro, ou de neuf). En outre, dans l'algorithme, il peut être intéressant de placer des tests d'admissibilité lors des entrées.