L'apprentissage de la dualité en algèbre linéaire : Analyse d'une enquête

Martine De Vleeschouwer
Unité de support didactique, Université de Namur (FUNDP) – Belgique
mdv@math.fundp.ac.be

Résumé
Après avoir brièvement décrit la dualité en algèbre linéaire, nous décrivons une enquête que nous avons menée auprès d'étudiants inscrits en première année d'université en mathématiques ou en physique, concernant ce thème. Nous présentons ensuite les résultats de cette enquête en catégorisant les difficultés rencontrées par les étudiants. Nous montrons ensuite de quelle manière nous pouvons parler de transition à propos de dualité, et nous laissons apercevoir que les difficultés présentées peuvent être interrogées du point de vue du contrat didactique institutionnel.

1. INTRODUCTION ET CADRE THEORIQUE

Epistémologiquement, la dualité occupe une place centrale dans le domaine de l'algèbre linéaire. En effet, il semble que la genèse du concept de rang, notion primordiale en algèbre linéaire, est liée à l'étude des systèmes linéaires (Dorier 1993, p. 160). Euler, en explicitant la notion de dépendance d'équations linéaires numériques, a permis d'entrevoir ce que Dorier appelle l'*aspect dual* du rang (Dorier, 1993, p. 159).

Bien que depuis le milieu des années quatre-vingts, des travaux de didactique s'intéressent à l'algèbre linéaire, ces derniers ne concernent généralement que les notions élémentaires de ce domaine des mathématiques (Dorier, 1997 ; Trigueros, 2005, …). Nous pouvons trouver des travaux traitant de dualité en algèbre linéaire (Dubinsky, 1991 ; Rogalski, 1991 ; Alves-Dias, 1998). Mais aucun n'a véritablement considéré la dualité comme un sujet d'étude ; ce que notre recherche se propose de faire.

En effet, lorsque la dualité est étudiée en tant qu'objet (Douady, 1987) dans un cours d'algèbre linéaire en première année d'université, on constate que les étudiants sont confrontés à de nombreuses difficultés. Notre objectif principal est de comprendre l'origine de ces difficultés, afin de pouvoir, dans un travail ultérieur, proposer des dispositifs permettant d'y remédier.

Dans les travaux présentés ici, nous tentons dans un premier temps d'identifier différents types de difficultés, selon le contenu mathématique qui semble poser problème, puis d'interpréter ces difficultés avec un regard institutionnel. Nous apportons donc des éléments de réponses aux questions suivantes :

- Quelles sont les difficultés qui sont liées à la dualité elle-même, celles qui relèvent plus généralement de l'algèbre linéaire, ou encore d'autres contenus liés ?
- Quelles interprétations peut-on faire de ces difficultés, quelles hypothèses sur leurs causes ?

Notre travail, au-delà de la dualité, a également pour objectif d'éclairer les difficultés des étudiants spécifiques de l'entrée à l'université, qui ont déjà fait l'objet de nombreux travaux (Artigue, 2004 ; Gueudet, 2008). C'est pourquoi nous choisissons d'adopter un regard institutionnel (Chevallard, 1989). Les difficultés ne proviennent pas seulement du fait que de nouveaux savoirs sont rencontrés. Elles peuvent être causées par le fait qu'un même savoir sera abordé différemment dans l'institution enseignement secondaire et dans l'institution enseignement supérieur. Ainsi un même type de tâches pourra être effectué avec une nouvelle technique ; une même technique sera justifiée différemment… Nous nous centrerons plus précisément sur la transition « concret-abstrait » (Winsløw, 2008). Winsløw considère qu'à l'arrivée dans l'institution enseignement supérieur, l'étudiant est confronté à deux types de transition. Se basant sur les praxéologies (Chevallard, 2007), il considère que pratiquement seul le bloc « practico-technique[1] » est travaillé dans l'institution enseignement secondaire. La première transition que l'étudiant rencontre en changeant d'institution, est qu'à l'université, le bloc « technologico-théorique » y est également travaillé, complétant ainsi les praxéologies. Mais une deuxième transition apparaît lorsque les éléments du bloc « technologico-théorique » nouvellement introduits deviennent à leur tour des objets que les étudiants sont appelés à manipuler, constituant ainsi le bloc « practico-technique » de nouvelles praxéologies. Nous détaillerons pourquoi l'apprentissage de la dualité en algèbre linéaire à l'université relève bien de ce deuxième type de transition.

Le travail présenté ici s'inscrit donc naturellement dans la thématique du GT7 « Enseignement des mathématiques aux niveaux postsecondaire et supérieur » et peut en particulier apporter des éléments de réponse à la question « Quels sont les principaux défis posés à l'enseignement des mathématiques universitaires par la transition lycée-université ? »

Nous présentons dans cet article les résultats de l'analyse d'une enquête réalisée auprès d'étudiants inscrits en première année d'université en mathématique ou en physique à l'Université de Namur (Belgique) concernant la dualité. Dans un premier temps (partie 2), nous décrivons l'enquête qui a été menée. Nous présentons ensuite en partie 3 l'analyse des résultats de celle-ci.

2. DESCRIPTION DE L'ENQUETE

Dans (De Vleeschouwer, 2008), nous décrivons comment est structuré l'enseignement de la dualité en algèbre linéaire, en nous basant sur l'analyse de manuels étant donné que l'institution Université ne possède pas de programme officiel. Lors de l'analyse de divers manuels (livres et notes de cours), nous avons répertorié 5 thèmes, sélectionnés pour leur présence répétée en titre de section ou de sous-section de la partie traitant de la dualité. On voit ainsi apparaître les thèmes de *dual* (en tant qu'espace vectoriel), de *forme linéaire*, de *base duale*, d'*annulateur* et d'*application transposée*. Nous avons aussi analysé ainsi les organisations mathématiques, correspondant à différents niveaux de détermination (Chevallard, 2007), qui apparaissent lorsque la dualité est rencontrée comme objet de l'enseignement dans l'institution enseignement universitaire (Douady, 1987). Remarquons que dans (De Vleeschouwer, 2008, p. 3-5), nous nous sommes également penchées sur les différentes finalités de la fonction « outil » du secteur étudié.

[1] Notons que pour Chevallard, une technique est une manière d'accomplir un type de tâches particulier. Une technique n'est pas nécessairement un algorithme : cela peut en être un, mais cela peut aussi être quelque chose de plus complexe.

Ces analyses nous ont permis d'élaborer une enquête pour des étudiants de première année d'université, rencontrant l'enseignement de la dualité en algèbre linéaire. Cette enquête, qui porte essentiellement sur la dualité dans son aspect « objet » (Douady, 1987), s'appuie sur les éléments repérés dans l'analyse de manuels (et plus précisément dans le polycopié du cours d'algèbre linéaire suivi par les étudiants inscrits en 1re année en mathématique ou physique à Namur (Toint, 2007)), et va nous permettre de préciser les difficultés des étudiants. Cette enquête se déroule en deux parties :

- La première partie est constituée d'un ***questionnaire*** auquel ont répondu par écrit 37 étudiants inscrits en première année d'université en mathématique ou en physique (février 2008). Les étudiants disposaient de deux heures pour y répondre. Des interviews ont permis d'éclairer les réponses apportées au questionnaire pour 16 de ces étudiants (mai 2008).
- La seconde partie de l'enquête consiste en un ***travail de groupe*** auquel ont participé 23 étudiants inscrits en première année d'université en mathématique. Les étudiants, répartis en quatre groupes de 5 ou 6, disposaient de 5 semaines pour rendre un rapport écrit sur le travail demandé. Il leur était recommandé de consulter un assistant au cours des deux premières semaines de leur travail ; et une entrevue (variant de 30 à 90 minutes) était obligatoire lors de la remise du travail (mars 2008).

Au moment où l'enquête a été réalisée, les étudiants ont déjà eu 15 fois 1h30 de cours théorique et autant d'exercices sur les matières suivantes : les espaces vectoriels (structures algébriques, dépendance linéaire et dimension, sous-espaces vectoriels) ; les applications et transformations[2] linéaires, ainsi que les matrices associées ; les formes linéaires, ainsi que l'espace (et bases) dual(es) et la réflexivité ; les transformations linéaires et leur transposée[3]. Le cours théorique avait déjà abordé les déterminants, sans que les étudiants n'aient eu les exercices associés. De plus, les étudiants de première année inscrits en sciences à l'université de Namur peuvent, s'ils le souhaitent, avoir une heure supplémentaire d'aide spécifique par semaine et par matière (De Vleeschouwer, 2008b).

Précisons que dans l'enseignement secondaire, les élèves belges n'ont abordé la notion de vecteurs qu'au *niveau géométrique* (Hillel, 1997, p. 236). La notion de transposée n'a été présentée qu'aux élèves de section « math forte » de l'enseignement secondaire, principalement lors de la définition de la matrice inverse (qui fait intervenir la transposée de la matrice des cofacteurs).

2.1. Le questionnaire

Le questionnaire (donné en annexe) comporte deux parties, chacune d'elles étant composée de questions identiques mais contextualisées dans des cadres différents. Les deux cadres choisis sont ceux de l'espace vectoriel Υ^n particularisé à Υ^4, et le cadre des matrices à coefficients réels, particularisé aux matrices carrées de dimension 2 ($\mathcal{M}_{2x2}$).

Comme le souligne A. Robert (1998, p. 169) :

[2] Une *transformation* linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie *E* est une application linéaire de *E* vers *E*.

[3] Notons que la transposée n'a été présentée aux étudiants de Namur que pour une transformation linéaire, cas particulier d'une application linéaire.

Que ce soit pour une prise de sens initiale ou en cours d'apprentissage, réussir à organiser des passages entre un cadre connu et un cadre moins bien maîtrisé nous semble fondamental.

Le choix du cadre de Υ^4 se justifie par le fait que, tout en étant moins intuitif que l'espace Υ^3, ce cadre en utilise pourtant les règles d'addition et de multiplication par un scalaire, et est de ce fait bien connu des étudiants. Le cadre des matrices carrées de dimension 2 à coefficients réels joue alors le rôle du cadre moins bien maîtrisé. En effet, les étudiants n'avaient pas encore travaillé avec des espaces vectoriels de matrices.

Dans chacune des parties du questionnaire se trouvent différentes questions, avec un même objectif de parcours de la variété des types de tâches (Chevallard, 2007), repris dans le Tableau 1 de la section suivante et décrits plus en détail dans De Vleeschouwer (2008).

2.2. Le travail de groupe

Le travail de groupe comporte 7 parties (numérotées en questions).

- Les deux premières parties du travail de groupe correspondent au questionnaire.
- En partie 3, on demande le lien existant entre les deux premières parties.
- La partie 4 du travail de groupe a été construite sur le même schéma que les deux premières parties mais le cadre considéré est le cadre théorique algébrique, ce qui implique une adaptation des types de tâches travaillés. De plus, dans ce cadre, de nouveaux types de tâches ont pu être ajoutés par rapport au schéma commun aux deux premières parties (voir description ci-après).
- En partie 5, on pose la question de l'utilité du dual et des circonstances dans lesquelles il intervient.
- La partie 6 fait travailler les étudiants sur le *premier* type de tâches présent dans les deux premières parties du travail de groupe, mais pour des espaces vectoriels que les étudiants doivent choisir (différents de ceux déjà manipulés dans le travail de groupe).
- La dernière partie du travail de groupe demande aux étudiants de construire (et ensuite de résoudre) un énoncé semblable à ceux présentés dans les deux premières parties du travail (comportant donc *plusieurs* types de tâches).

Toujours selon l'idée qu' « il s'agit de proposer des apprentissages qui portent sur divers cadres à propos d'une même connaissance » (Robert, 1998, p. 155), le travail de groupe propose en quatrième partie de reprendre le schéma commun des deux premières parties du travail mais de le présenter dans le cadre théorique algébrique. Tout en sachant que « ce n'est pas toujours le travail dans un cadre général, formel, qui est le plus difficile » (Robert, 1998, p. 151), nous adaptons le schéma commun aux deux parties du questionnaire, notamment avec l'apport de nouveaux types de tâches pour le cadre algébrique théorique. Ces derniers sont repris dans le Tableau 1 ci-dessous. Nous ne décrivons ci-après que les nouveaux types de tâches concernant les thèmes de la transposée :

- Type de tâches « Représentation de la transposée » : on demande aux étudiants s'ils pourraient expliquer, dans un registre de représentation sémiotique qui leur convient, ce que représente la transformation transposée. Par cette question, nous cherchons à savoir si les étudiants perçoivent que la transformation transposée est définie sur l'espace dual[4], ou encore s'ils perçoivent que la transformation transposée appliquée à une forme linéaire est en fait la composée de la forme linéaire et de la transformation initiale (ce qui a été présenté graphiquement au tableau lors du cours présenté aux étudiants).

- Type de tâches « Établir ou démontrer des propriétés de la transposée » : on demande aux étudiants si on peut affirmer que $(f^t)^t = f$. Ceux-ci doivent ensuite justifier leur réponse. Cette question permet d'évaluer la perception qu'ont les étudiants de la relation existant entre le bidual et le primal et plus particulièrement, de l'isomorphisme naturel existant entre ces deux espaces en dimension finie. Il est à noter que l'on peut faire l'hypothèse que les étudiants seront tentés de comparer la situation présentée dans cette question avec une propriété de l'inverse : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Intitulés et notations abrégées des types de tâches	Description des types de tâches	Thèmes concernés	Présents dans : - Questionnaire - Travail de Groupe
« Définition du dual » **Def_Dual**	Définir le dual d'un espace vectoriel.	Le dual	TG
« Exemple de forme linéaire » **Exemp_FL**	Étant donné un (sous-)espace vectoriel, donner un exemple ou contre-exemple de forme linéaire sur cet espace.	Les formes linéaires	Q TG
« Définition d'une forme linéaire » **Def_FL**	Étant donné un (sous-)espace vectoriel, définir une forme linéaire.	Les formes linéaires	TG
« Expression générale d'une forme linéaire » **ExpGen_FL**	Étant donné un (sous-)espace vectoriel, donner l'expression générale d'une forme linéaire définie sur cet espace.	Les formes linéaires	Q TG
« Base primale et duale » **Base_P&D**	Étant donné un (sous-)espace vectoriel de dimension *n* et un ensemble de *n* vecteurs de celui-ci, déterminer s'il s'agit d'une base de celui-ci, et dans l'affirmative, en déterminer la base duale.	Les bases duales	Q TG
« Unicité de la base duale » **Uni_BD**	Étant donné une base, déterminer si elle peut avoir plusieurs bases duales.	Les bases duales	TG
« Fonctions coordonnées » **FctCoor**	Étant donné une base et sa base duale, déterminer les coordonnées d'un vecteur du primal.	Les bases duales	Q TG
« Définition de la transformation transposée » **Def_TTransp**	Étant donné une transformation définie sur un (sous-)espace vectoriel, en définir la transformation transposée.	La transposée	Q TG
« Représentation	Expliquer, dans un registre de	La	TG

[4] Ce qui n'est pas écrit explicitement dans le polycopié du cours (Toint, 2007).

de la transposée » **Repr_TTransp**	représentation sémiotique au choix, ce que représente la transformation transposée.	transposée	
« Propriétés de la transposée » **Prop_TTrans**	Établir ou démontrer des propriétés de la transposée.	La transposée	TG
« Annulateur » **Annul**	Étant donné un espace vectoriel, établir la filiation entre un annulateur d'un ensemble de vecteurs et l'espace dual.	Le dual/ les formes linéaires/ les annulateurs	TG

Tableau 1 : Types de tâches dont relèvent les questions 1, 2, 4 et 7 du travail de groupe

Remarquons que lors de la résolution des exercices correspondant au type de tâches Base_P&D, aucun étudiant n'a appliqué la technique consistant à résoudre l'exercice globalement en utilisant la propriété selon laquelle étant donné une famille de n vecteurs (e_i) d'un espace vectoriel E de dimension n, s'il existe une famille de n éléments (e_i') de l'espace dual E' telle que pour tout i, j, $e_i'(e_j) = \delta_{ij}$, alors (e_i) est une base de E et (e_i') est sa base duale. Par conséquent, lors de la présentation des résultats, nous serons parfois amenés à subdiviser le type de tâches Base_P&D en sous-types de tâches :

Intitulés et notations abrégées des sous-types de tâches	Description des sous-types de tâches
« Base primale » **Base_P**	Étant donné un (sous-)espace vectoriel de dimension n et un ensemble de n vecteurs de celui-ci, déterminer s'il s'agit d'une base de celui-ci.
« Base duale » **Base_D**	Étant donné un (sous-)espace vectoriel de dimension n et une base de celui-ci, en déterminer la base duale.

Tableau 2 : Codification des sous-types de tâches

3. RESULTATS DE L'ENQUETE

Nous présentons tout d'abord quelques résultats chiffrés concernant le questionnaire, pour ensuite poursuivre par des résultats de l'enquête sur la dualité présentés selon une classification des difficultés rencontrées par les étudiants.

3.1. Quelques résultats globaux concernant le questionnaire

Le tableau ci-dessous nous présente, pour les différents cadres et types de tâches présents dans le questionnaire, le nombre d'étudiants (sur un total de 37) et le pourcentage d'étudiants ayant ***essayé*** de résoudre les problèmes correspondants.

	Types de tâches					
Cadres	Exemp_FL	ExpGen_FL	Base_P	Base_D	FctCoor	Def_TTransp
Υ^4	36	33	37	19	29	17
	97,3%	89,2%	100,0%	51,4%	78,4%	45,9%
$\mathcal{M}_{2x2}$	24	21	23	10	15	9
	64,9%	56,8%	62,2%	27,0%	40,5%	24,3%

Tableau 3 : Nombre et pourcentage d'étudiants *essayant de résoudre* les exercices correspondant aux différents types de tâches proposés dans le questionnaire.

Le tableau ci-dessous nous présente, pour les différents cadres et types de tâches présents dans le questionnaire, le nombre d'étudiants (sur un total de 37) et le pourcentage d'étudiants ayant ***correctement répondu*** aux questions correspondant aux types de tâches indiqués.

	Types de tâches					
Cadres	Exemp_FL	ExpGen_FL	Base_P	Base_D	FctCoor	Def_TTransp
Υ^4	23	17	32	2	13	1
	62,2%	45,9%	86,5%	5,4%	35,1%	2,7%
$\mathcal{M}_{2x2}$	10	6	13	1	6	0
	27,0%	16,2%	35,1%	2,7%	16,2%	0,0%

Tableau 4 : Nombre et pourcentage d'étudiants *résolvant correctement* les exercices correspondant aux différents types de tâches proposés dans le questionnaire

Nous présentons maintenant les principaux enseignements de ces résultats chiffrés :

- On remarque que, d'une manière générale, les étudiants préfèrent travailler dans le cadre de Υ^4 plutôt que dans le cadre des matrices. Les exercices correspondant aux différents types de tâches y sont également mieux résolus. Rien d'étonnant puisque le cadre des *n*-uplets est familier aux étudiants, alors que certains étudiants ne connaissent pas la dimension de l'espace des matrices 2×2 à coefficients réels, ou ne conçoivent pas qu'une matrice puisse être considérée comme un élément d'un espace vectoriel.
- On peut également constater que les étudiants réussissent davantage des exercices relevant de types de tâches davantage algorithmiques et précédemment travaillés, tel que le sous-type de tâches Base_P.
- Notons que l'on peut aussi qualifier d'algorithmique la recherche des coordonnées d'un vecteur dans une base (non canonique) donnée. Cet exercice peut relever d'un sous-type de tâches de FctCoor si l'on ne tient pas compte de la donnée de la base duale. C'est au moyen de cette technique que 75,9% des étudiants (soit 22 étudiants sur 29) ayant essayé de résoudre l'exercice relevant de ce type de tâches ont travaillé le problème du questionnaire. Le faible taux de réussite (35,1%, soit 13 étudiants) à la question relevant de ce type de (sous-)tâches dans le cadre de Υ^4 s'explique par le fait que les étudiants (29,7%, soit 11 étudiants) commettent des fautes de calcul en résolvant le système d'équations linéaires permettant de calculer les coordonnées dans la base du primal.

  Seuls 3 étudiants ont utilisé la base duale pour résoudre l'exercice correspondant au type de tâches FctCoord dans le cadre de Υ^4, et 1 étudiant dans le cadre matriciel. Sur les 3 étudiants, seuls deux le font de façon correcte mais ne parviennent pas à la réponse exacte à la suite d'une faute de calcul.
- Enfin, dans la question relevant du type de tâches ExpGen_FL, nous pouvons remarquer que peu d'étudiants utilisent des quantificateurs (13 étudiants, soit 35,1%, dans le cadre de Υ^4 ; 4 étudiants, soit 10,8%, dans le cadre matriciel).

- Des tableaux ci-dessus, on peut constater que seuls deux exercices sont abordés par moins des trois quarts des étudiants ayant répondu au questionnaire (cadre de Υ^4). Il s'agit de l'exercice demandant de calculer la base duale, et celui demandant de déterminer la transposée d'une transformation donnée. Ces exercices relèvent des types de tâches concernant des thèmes directement reliés à la dualité, contrairement aux autres types de tâches qui sont également reliés à d'autres thèmes ou secteurs d'algèbre linéaire déjà abordés par les étudiants, tels les applications linéaires, les bases, ou les coordonnées.

  Plus particulièrement, on peut constater à la vue des chiffres des tableaux ci-dessus que la question sur la transposée (type de tâches Def_TTransp) n'est même pas abordée par la moitié des étudiants dans le cadre des 4-uplets, et que les trois quarts des étudiants ayant répondu au questionnaire n'essaient même pas de résoudre la question relevant de ce type de tâches dans le cadre matriciel. De plus, le pourcentage de réponses correctes est nul dans le cadre matriciel, et ne concerne qu'une seule réponse correcte dans le cadre des 4-uplets (il s'agit d'un étudiant qui recommençait sa première année).

Ces constats numériques nous fournissent de premières observations sur les difficultés des étudiants en dualité. On perçoit déjà des difficultés de différentes natures : difficultés à mener à bien des calculs, difficultés à utiliser le langage mathématique (quantificateurs), à maîtriser les espaces de matrices… Nous allons prolonger et affiner ces constats en proposant une classification raisonnée de ces difficultés.

3.2. Une classification des difficultés observées

Nous avons choisi de classifier les difficultés apparues lors de l'analyse des réponses des étudiants à l'enquête en trois catégories principales. Il s'agit des difficultés liées à une maîtrise insuffisante de concepts élémentaires d'algèbre linéaire, des difficultés communes à l'algèbre linéaire élémentaire et à la dualité, et enfin des difficultés propres à la dualité. Ces catégories ont été établies en fonction de l'échelle des niveaux de co-détermination didactique (Chevallard, 2007).

En effet, la première catégorie de difficultés établie fait référence au *domaine* de l'algèbre linéaire, en dehors de ce qui relève spécifiquement de la dualité. La deuxième catégorie de difficultés répertoriées fait référence aussi bien au *domaine* de l'algèbre linéaire qu'au *secteur* de la dualité. Enfin, la troisième catégorie que nous avons définie se rapporte principalement au *secteur* dualité. Bien entendu, la frontière entre ces trois catégories n'est pas nette, et des recouvrements sont possibles.

Certaines difficultés, évidemment, sont encore plus générales : par exemple, nous avons pu observer une confusion de la part des étudiants entre une fonction f et la valeur de la fonction en un élément de l'espace de départ : $f\,(x, y, z, t)$. Ou encore, le fait que l'écriture mathématique ne soit pas encore maîtrisée par les étudiants : seuls 37% des étudiants ont utilisé des quantificateurs lors de la résolution de la question correspondant au type de tâches ExpGen_FL (obstacle du formalisme (Dorier, 1997)). Nous ne détaillons pas ici ce type de difficultés, préférant nous centrer sur l'algèbre linéaire elle-même.

3.2.1. Maîtrise insuffisante de concepts élémentaires d'algèbre linéaire

Par concepts élémentaires d'algèbre linéaire, nous entendons des concepts relatifs au *domaine* de l'algèbre linéaire dont la maîtrise est nécessaire pour l'apprentissage de la dualité. Les concepts sont qualifiés d'élémentaires *par rapport* à la notion de dualité que nous étudions. Citons par exemple la notion d'application ou de forme linéaire. En effet, seuls 62% des étudiants ayant répondu au questionnaire donnent un exemple correct de forme linéaire dans le cadre de Υ^4. Ce pourcentage tombe à 27 dans le cadre matriciel.

Les étudiants éprouvent également des difficultés à fournir des exemples d'espaces vectoriels. Ils citent par exemple l'ensemble des polynômes de degré 3 ; ou encore l'ensemble des polynômes de degré supérieur ou égal à 3. La demande de construction d'exemples, typique à l'université, est rarement présente dans le secondaire ; elle pose problème aux étudiants (Praslon, 2000).

Au vu des résultats présentés dans les tableaux 3 et 4, on peut aussi constater que l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 2×2 ne leur est pas familier. Dans le questionnaire, une analogie entre les deux cadres est mise en évidence par la plupart des étudiants tant au niveau des types de tâches proposés, qu'au niveau des calculs à effectuer. Mais malgré cette constatation, les étudiants ne parviennent généralement pas à formuler correctement les réponses dans le cadre matriciel. Ainsi, par exemple, un étudiant écrit : « Question 2 : idem que la Question 1 ». Lors de l'interview, cet étudiant dira qu'il avait constaté que l'on retrouvait dans la deuxième partie « les mêmes composantes » que dans la première partie. Il dira aussi qu'il ne savait « pas toujours bien manipuler les matrices ». Et que s'il l'avait fait, il aurait remis les réponses trouvées sous forme de matrices.

Dans l'institution université, il faut considérer les objets récemment définis en algèbre linéaire comme des objets familiers sur lesquels et à partir desquels on va travailler ; par exemple, le fait que l'objet *matrice* puisse être considéré comme un élément d'un espace vectoriel, c'est-à-dire un vecteur. On peut donc considérer les coordonnées d'une matrice, ou encore définir des applications linéaires agissant sur les matrices. Or, s'il est important de jouer sur les changements de cadre pour l'apprentissage d'une notion (la dualité en l'occurrence), ceci nécessite en particulier que les étudiants connaissent plusieurs espaces vectoriels.

3.2.2. Difficultés communes à l'algèbre linéaire et à la dualité

On répertorie aussi des difficultés communes à l'algèbre linéaire élémentaire et à la dualité. Par exemple, la difficulté de différencier un vecteur de ses coordonnées. Cette confusion, bien connue en algèbre linéaire (Dorier, 1997), devient cruciale lorsqu'on aborde la dualité.

Dans le cadre des 4-uplets, on pourrait dire que la confusion entre vecteurs et coordonnées est naturelle ou passe inaperçue. On peut penser que c'est une des raisons pour laquelle les étudiants privilégient ce cadre dans le questionnaire. On constate que les étudiants ont tendance à travailler avec les coordonnées des objets (vecteurs, matrices, formes linéaires) et non avec les objets eux-mêmes. Ainsi, il n'est pas rare de voir apparaître dans les réponses l'égalité entre la $i^{\text{ème}}$ forme linéaire de la base duale (souvent notée y_i par les étudiants) et le quadruplet reprenant ses composantes dans la base canonique (que les étudiants ont pourtant appris à noter $[y_i]^{e'}$).

Un autre problème que nous avons pu identifier est le fait que les étudiants ont tendance à présenter la solution d'un exercice sous la forme d'un élément de l'espace vectoriel servant de cadre à la tâche (Υ^4 ou $\mathcal{M}_{2x2}$). Ainsi, lors de la résolution d'exercices correspondant au type de tâches FctCoor (portant sur le calcul des coordonnées d'un élément, quadruplet ou matrice, de l'espace vectoriel considéré), il n'est pas rare de voir des étudiants présenter les coordonnées calculées ou déduites (dans la deuxième partie par analogie par rapport à la première partie) sous la forme d'un vecteur de l'espace vectoriel servant de cadre à la tâche, c'est-à-dire sous forme de 4-uplet dans Υ^4 et sous forme de matrice dans l'espace des matrices carrées de dimension 2. Ainsi, lorsqu'on demande aux étudiants de donner les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$ dans une base définie (non canonique) de $\mathcal{M}_{2x2}$, certains étudiants répondent que les coordonnées sont $\begin{pmatrix} 8 & 30 \\ -20 & 16 \end{pmatrix}$, et non $\begin{pmatrix} 8 \\ -20 \\ 30 \\ 16 \end{pmatrix}$.

Et lorsqu'on demande de donner les coordonnées du vecteur $(15, 8, 10, 5)$ dans une base définie (non canonique) de Υ^4, certains étudiants disent que le vecteur $(15, 8, 10, 5)$ « devient » le vecteur $(4, -10, 15, 8)$. De même, le seul étudiant ayant correctement résolu l'exercice correspondant au type de tâches TTransp dans le cadre des 4-uplets termine ensuite sa réponse en identifiant $f^t(y)$ à un 4-uplet contenant ses coordonnées dans la base canonique duale, sans mentionner cependant qu'il s'agit de coordonnées et de coordonnées dans *cette* base. Dans le cadre matriciel, cet étudiant présente la transposée sous forme de matrice.

3.2.3. Difficultés propres à la dualité

On peut aussi dégager des difficultés propres à la dualité, souvent liées au caractère très abstrait des objets utilisés. Ce qui nous mènera naturellement à la section suivante traitant de la transition « concret-abstrait » (Winsløw, 2008).

La définition de la transformation transposée peut illustrer nos propos puisqu'il s'agit d'une transformation[5] définie sur un espace vectoriel dont les éléments sont des formes linéaires. Ainsi, lors de la résolution d'un exercice correspondant au type de tâches Def_TTransp, dans le cadre des 4-uplets, trois étudiants confondent la transformation transposée avec la transformation inverse. Il est clair que pour eux, « transformation » prime sur « transposée ». Remarquons au passage qu'aucun étudiant ne fait mention de la transformation adjointe, qui est pourtant introduite dans le cours à partir de la fonction « outil-analogie » de la transposée (De Vleeschouwer 2008).

On constate également que parmi les 17 étudiants essayant de résoudre la question posée dans le cadre de Υ^4, 11 étudiants (64,7%) essayent de travailler avec la transformation donnée, alors que les autres se contentent de donner la

[5] Rappelons qu'une *transformation* linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie E est une application linéaire de E vers E.

définition théorique de la transposée ou encore, une explication sur ce qu'ils pensent que devrait être la transposée, sans cependant essayer de résoudre effectivement la tâche proposée. Pour ces étudiants, la transposée ne fait partie que du monde abstrait, et ils n'arrivent pas à la mobiliser dans un cadre contextualisé.

Dans le cadre des matrices carrées de taille 2×2, on retrouve pratiquement cette même proportion (66,6%) d'étudiants travaillant avec la transformation donnée parmi les 9 étudiants essayant de solutionner la question correspondant au type de tâches Def_TTransp. Mais dans ce cadre, les réponses sont plus variées car les étudiants associent le type de tâches proposé à une notion abordée dans l'institution enseignement secondaire en Belgique : la matrice transposée. Par exemple, pour résoudre un exercice relevant du type de tâches Def_TTransp *dans le cadre matriciel*, certains étudiants reprennent tout simplement la matrice qui leur est donnée dans l'énoncé et la transposent. La notion de matrice prime sur la notion d'application lorsque la transposée est invoquée. Ou encore, on trouve aussi des réponses où l'étudiant calcule tout d'abord la matrice associée à la transformation donnée dans l'énoncé (par rapport à la base canonique) ; puis transpose cette matrice et considère ensuite la matrice ainsi obtenue comme étant la matrice de la transformation transposée (toujours par rapport à la base canonique) ; il convertit ensuite du registre matriciel au registre analytique.

3.3. Transition « concret-abstrait »

Les difficultés propres à la dualité présentées dans la section précédente nous permettent d'illustrer ce que Winsløw appelle la transition « concret-abstrait », qui correspond au second type de transition décrit dans la section 1 (Introduction et cadre théorique).

D'après Winsløw, dans l'institution secondaire, c'est essentiellement le bloc « practico-technique » des praxéologies qui est travaillé. Ceci coïncide avec ce qu'on peut constater lorsqu'on analyse les réponses des étudiants auxquels on demande, dans le travail de groupe, s'il y a, selon eux, un lien entre les deux premières parties (cadre de Υ^4 et cadre matriciel). Les étudiants se concentrent sur la partie practico-technique des praxéologies décrites par Chevallard (2007), et délaissent généralement le bloc technologico-théorique. En effet, des étudiants répondent que « les deux exercices représentent les mêmes transformations dans deux espaces vectoriels fort semblables » et que « la question 2 est exactement la même que la question 1, il n'y a que leur représentation qui diffère ». En utilisant le terme « semblables », les étudiants n'identifient pas les espaces vectoriels, mais bien les éléments constituant les vecteurs de chacun de ces deux espaces. Quoique pour eux, le terme vecteur est réservé aux éléments de Υ^4, et le terme matrice est utilisé pour les éléments de $\mathcal{M}_{2x2}$. Les étudiants constatent que seule la « représentation diffère ». On peut supposer qu'en écrivant cela, les étudiants pensent à appliquer identiquement des techniques de calculs (calcul de base duale,…) aux différents énoncés proposés.

Certains étudiants sont plus nuancés et parlent d' « énoncés très semblables » mais d' « espaces vectoriels différents ». Après avoir remarqué qu'ils avaient même dimension, ils font appel à la théorie pour citer un isomorphisme entre ces deux espaces. Ils concluent en disant qu' « on trouve les mêmes solutions ». Ils retombent alors dans le bloc practico-technique : ce sont, selon eux, les valeurs numériques apparaissant dans la solution qui sont importantes. Ils ne citent pas l'isomorphisme utilisé pour justifier cette pratique.

Dans l'institution université, le bloc technologico-théorique prend plus d'importance. Il s'agit d'une première transition. Certains étudiants ont déjà opéré des changements de lien avec cette évolution. Ainsi par exemple, alors que les exercices correspondant aux types de tâches Exemp_FL et ExpGen_FL ne demandaient a priori pas de justifications, une étudiante justifie explicitement à la fois le fait que l'exemple fourni est une forme et que la linéarité est vérifiée. Lors de la réponse à un exercice relevant du sous-type de tâche Base_D, alors qu'il s'agit de calculer la base duale d'une base donnée, cette même étudiante reste dans le cadre algébrique théorique et démontre le fait que le $i^{ème}$ vecteur de la base duale d'une base B appliqué à un vecteur quelconque de l'espace de départ donne la $i^{ème}$ coordonnée de ce vecteur dans la base B. L'étudiante ne se rend malheureusement pas compte du résultat qu'elle a découvert et croit tout simplement avoir trouvé la base duale.

Une deuxième transition apparaît lorsque les éléments constituant le bloc technologico-théorique d'une praxéologie deviennent des éléments sur lesquels vont se faire des calculs et auxquels des techniques vont être appliquées. Ces éléments constituent alors le bloc practico-technique de nouvelles praxéologies. C'est ce qui se passe lorsque l'on travaille avec la dualité en tant qu'objet : des formes linéaires sont considérées comme des vecteurs car le dual qui en constitue l'ensemble est un espace vectoriel. Les théories développées sur le dual justifient les techniques appliquées sur les formes linéaires. Mais lorsque l'on considère la transformation transposée, le dual glisse du bloc technologico-théorique d'une praxéologie précédente pour occuper le bloc practico-technique d'une nouvelle praxéologie, le dual étant alors considéré comme l'espace de départ de la transformation transposée. D'après Winsløw (2008), cette deuxième transition est encore plus difficile que la première. Nous pouvons en effet constater, au vu des réponses apportées par les étudiants aux exercices se rapportant aux types de tâches Def_TTransp, que les étudiants éprouvent des difficultés lorsqu'on aborde cette deuxième transition : ils éprouvent par exemple des difficultés à définir correctement l'espace de départ de la transformation transposée.

Cependant, lorsqu'on demande aux étudiants, dans le travail de groupe, si l'on peut affirmer que $(f^t)^t = f$, on remarque que la question est très bien réussie par les quatre groupes. Pour résoudre une tâche du type Prop_TTrans présenté dans un cadre théorique algébrique, les étudiants optent, à juste titre, pour le bloc technologico-théorique. Pour la transposée de la transposée, les étudiants acceptent spontanément de chercher la solution dans la théorie. Parfois, faire le lien entre la théorie et les exemples est plus difficile que de rester à l'intérieur de la théorie.

4. CONCLUSIONS, DISCUSSION ET PERSPECTIVES

Nous avons classifié les difficultés apparues lors de l'analyse des réponses des étudiants à l'enquête en trois catégories principales : les difficultés liées à une maîtrise insuffisante de concepts élémentaires d'algèbre linéaire, celles communes à l'algèbre linéaire élémentaire et à la dualité, et enfin celles propres à la dualité. Certaines erreurs bien connues en algèbre linéaire, telles la confusion entre un vecteur et ses coordonnées, sont particulièrement sensibles lorsqu'on aborde la dualité.

Les difficultés relevant de la dernière des trois catégories invoquées ci-dessus nous ont permis d'illustrer un cadre théorique proposé par Winslow (2008) : bien que la dualité ne soit pas abordée en tant qu'objet (Douady, 1987) dans l'institution enseignement secondaire, nous pouvons quand même parler de transition à son sujet. En effet, nous avons montré que l'application du cadre théorique proposé par Winsløw (2008) au cas de la dualité montre bien que des transitions existent au-delà du simple moment d'entrée à l'université.

Nous allons poursuivre notre étude de ces phénomènes, en élargissant notre questionnement à la notion de contrat didactique institutionnel (Brousseau, 1998) : un nouveau contrat est en vigueur à l'université, ceci cause des difficultés aux étudiants — comme la difficulté à construire un exemple — que nous avons évoquées dans l'article.

Par ailleurs, l'analyse présentée ici va nous permettre de construire un dispositif visant l'introduction de certaines notions de dualité en tant qu'objet lors d'un cours d'algèbre linéaire en première année d'université.

BIBLIOGRAPHIE

Alves-Dias, M. (1998). *Les problèmes d'articulation entre points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre linéaire*. Thèse de doctorat, Université de Paris VII Denis Diderot.

Artigue M. (2004). *Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques ?* Actes du premier congrès franco-canadien de sciences mathématiques, Toulouse.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1989), *Le concept du rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel*. Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, pp. 211-235. LSD-IMAG Grenoble.

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Actes du premier congrès de la théorie anthropologique du didactique (Baeza), Universidad de Jaén, pp. 705-746.

DeVleeschouwer, M. (2008). *Contribution to the study of the duality in linear algebra. First approach.* Actes de ICME 11, Monterrey (Mexico), juillet 2008 (à paraître).

DeVleeschouwer, M. (2008b). *Aider les étudiants à entrer dans un nouveau contrat didactique institutionnel en mathématiques? L'exemple de l'opération Tremplin à l'université de Namur.* Actes du V^e colloque de Questions de Pédagogie dans l'enseignement supérieur, pp. 7-13. Brest (France), juin 2008.

Dorier, J.-L. (1993). L'émergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires*. Cahier du séminaire d'histoire des mathématiques* (2^e série) 3, pp. 159-190.

Dorier, J.-L. & al. (1997). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7/2, pp. 5-32.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking,* Dordrecht : Kluwer (pp.95-123).

Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition, *Educational Studies in Mathematics,* 67/3, pp. 237-254.

Hillel, J. (1997). Des niveaux de description et du problème de la représentation en algèbre linéaire. In Dorier, J.-L. & al. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* (pp. 231-247). Grenoble, La Pensée Sauvage.

Praslon, F. (2000). *Continuités et ruptures dans la transition terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat, Université de Paris VII Denis Diderot.

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactiques des mathématiques,* 18/2, pp. 139-190.

Rogalski, M. (1991). *Un enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG A première année*. Cahiers de Didirem, n°11, IREM de Paris VII.

Toint, Ph. (2007). *Algèbre*, notes de cours destinées aux étudiants de première baccalauréat en mathématique et physique. Librairie des Sciences, Université de Namur.

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* Vol. X, pp. 157-176.

Winsløw, C. (2008). Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle. In Rouchier A. et Bloch, I. (ed.) *Perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIII^e école d'été de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ANNEXE : Le questionnaire

Pour répondre aux questions ci-dessous, vous pouvez utiliser, à votre meilleure convenance, le langage mathématique formel, la langue française, des graphiques ou dessins, …

1. Considérons l'espace vectoriel Υ^4, construit sur le champ des réels.
   a. Donner un exemple de forme linéaire définie sur Υ^4.
   b. Donner l'expression générale d'une forme linéaire définie sur Υ^4.
   c. Soient $x_1 = (1,2,0,4)$, $x_2 = (2,0,-1,2)$, $x_3 = (1,0,0,-1)$, $x_4 = (2,0,0,3)$; soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. L'ensemble X constitue-t-il une base de Υ^4 ? Si oui, déterminez-en la base duale.
   d. Si l'ensemble $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ défini ci-dessus est une base et que vous avez pu en calculer la base duale, quelles seraient les coordonnées du vecteur $(15,8,10,5)$ dans la base X ? Explicitez votre démarche.
   e. Soit la transformation linéaire $f : \Upsilon^4 \to \Upsilon^4$ telle que $f(x,y,z,t) = (2x-t, 2y-z, x-y-t, -3z)$.
   Comment en définiriez-vous la transformation transposée ?

2. Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{2x2}$, l'espace vectoriel des matrices 2 lignes, 2 colonnes, à coefficients réels, construit sur le champ des réels.
   a. Donner un exemple de forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_{2x2}$.
   b. Donner l'expression générale d'une forme linéaire définie sur $\mathcal{M}_{2x2}$.
   c. Soient $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; soit $X = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.
   L'ensemble X constitue-t-il une base de $\mathcal{M}_{2x2}$? Si oui, déterminez-en la base duale.
   d. Si l'ensemble $X = \{M_1, \ M_2, \ M_3, \ M_4\}$ défini ci-dessus est une base et que vous avez pu en calculer la base duale, quelles seraient les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$ dans la base X ? Explicitez votre démarche.
   e. Soit la transformation linéaire $f : \mathcal{M}_{2x2} \to \mathcal{M}_{2x2}$ telle que
   $f\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-d & a-b-d \\ 2b-c & -3c \end{pmatrix}$.
   Comment en définiriez-vous la transformation transposée ?