DE LA CONCEPTION A L'USAGE D'UN DIAGNOSTIC DANS UNE BASE D'EXERCICES EN LIGNE

Françoise CHENEVOTOT-QUENTIN* – Brigitte GRUGEON-ALLYS** – Julia PILET*** – Élisabeth DELOZANNE****

Résumé – Cet article expose la stratégie de dissémination de résultats de recherche portant sur un diagnostic en algèbre élémentaire dans la plateforme *LaboMEP* de l'association Sésamath[1]. L'enjeu de l'intégration d'un diagnostic dans une base d'exercices en ligne est de mettre à la disposition des enseignants des outils pour organiser la gestion de l'hétérogénéité des apprentissages et leur permettre la différenciation des enseignements en fonction des besoins des élèves de la classe.

Mots-clefs : Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain (EIAH), Didactique des mathématiques, Différenciation des apprentissages, Diagnostic cognitif, Algèbre élémentaire

Abstract – This article deals with the dissemination of research results concerning assessment of algebra ability through the Sésamath association's *LaboMEP* platform. The aim of the integration of the assessment in an online database system is to provide teachers with the tools to manage students' heterogeneity and to allow differenciation in learning depending on the pupils in the class.

Keywords: E-learning environment, Mathematics education, Differentiated learning, Cognitive diagnosis, School algebra.

I. PROBLÉMATIQU

Notre contribution relève du groupe de travail n°6 consacré aux ressources et au développement professionnel des enseignants. Plus précisément, nous nous intéressons à la conception et aux usages de ressources de diagnostic et de différenciation (pôle 1 du GT6). Le succès auprès des enseignants de la plateforme *MathEnPoche* (MEP) de l'association Sésamath montre que la mise à disposition d'outils informatiques d'assistance à l'activité des enseignants correspond bien à un besoin grandissant (Artigue et Gueudet 2008).

Notre travail s'inscrit dans le contexte des projets Pépite et Lingot[2], projets de recherche pluridisciplinaire en EIAH (Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain), fruits d'une longue collaboration entre chercheurs en didactique des mathématiques et en informatique (Delozanne et al. 2010), sur l'apprentissage de l'algèbre à la fin de la scolarité obligatoire (16 ans en France).

Nous présentons ici la dissémination des résultats de nos recherches sur le diagnostic dans la base d'exercices en ligne *LaboMEP* de Sésamath afin de fournir aux enseignants des outils pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en algèbre et organiser la différenciation de l'enseignement en fonction des besoins des élèves. Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un

* Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) et Université d'Artois – France – francoise.chenevotot@univ-paris-diderot.fr
** Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) et Université de Picardie – France – brigitte.grugeon@univ-paris-diderot.fr
*** Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR) – France – julia.pilet@univ-paris-diderot.fr
**** L'UTES, Université Paris VI – France – elisabeth.delozanne@lip6.fr
[1] Site de l'association Sésamath : http://mathenpoche.sesamath.net/
[2] Le projet Pépite (de 1995 à 2002) a conduit à l'élaboration du logiciel *Pépite* qui construit un profil cognitif en algèbre d'un élève de niveau fin de scolarité obligatoire à partir de ses réponses à un test spécialement élaboré à cet effet. Le projet Lingot (de 2002 à 2008) a conçu, réalisé et évalué des environnements informatiques de diagnostic et d'apprentissage en algèbre (Delozanne et al. 2005a).

projet de recherche en réponse à un appel d'offres PICRI de la région Ile de France, débuté en 2009[3].

Voici nos questions de recherche. Quelles sont les conditions permettant d'assurer la viabilité du transfert d'un outil de diagnostic, développé dans des laboratoires de recherche, vers une plateforme d'exercices en ligne largement utilisée par les enseignants de mathématiques de collège (élèves âgés de 11 à 15 ans) ? Comment mesurer la robustesse de l'outil de diagnostic implémenté dans la plateforme ? Comment les professeurs de mathématiques intègrent-ils cet outil de diagnostic dans leurs pratiques de différenciation ?

Dans le paragraphe 2, nous présentons les éléments théoriques sous-jacents à notre approche articulant le cognitif et l'anthropologique. Au paragraphe 3, nous exposons les modalités du diagnostic individuel depuis le choix des tâches composant le test jusqu'à l'élaboration du profil de l'élève en algèbre. Le paragraphe 4 expose l'intérêt et les modalités du diagnostic collectif. Dans le paragraphe 5, nous présentons le transfert de notre diagnostic dans la base d'exercices en ligne de Sésamath. Nous évoquons l'instrumentation de l'activité de diagnostic de l'enseignant dans le paragraphe 6. Enfin, nous concluons.

II. ELEMENTS THEORIQUES

1. Approche cognitive

Grugeon (1997) a défini la compétence algébrique en fin de scolarité obligatoire, référence pour y organiser un diagnostic. Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions, dépendantes l'une de l'autre et partiellement hiérarchisées, les dimensions *outil* et *objet*, termes pris selon l'acception de Douady (1985).

Sur le plan *outil*, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à leur résolution. Cette dimension *outil* de l'algèbre s'exerce dans des contextes variés sur des problèmes de généralisation et de preuve, de modélisation et « d'arithmétique traditionnelle » visant la mise en équation. Parmi ces différents types de problèmes, l'utilisation de l'algèbre comme outil pour prouver des conjectures numériques revêt une importance toute particulière.

Sur le plan *objet*, nous prenons en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques afin que leur manipulation formelle redonne sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. Ainsi la compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions.

Au niveau scolaire considéré (enseignement secondaire), deux éléments supplémentaires interviennent également dans l'évaluation de la compétence algébrique :

- L'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique (Vergnaud et al. 1987, Kieran 2007).
- L'efficacité algébrique requiert, d'une part, une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et au niveau structural (Sfard 1991) et, d'autre part, une capacité à adapter l'interprétation des expressions à la variété des usages visés.

[3] Projet PépiMEP codirigé par Brigitte Grugeon (LDAR, Université Paris Diderot) et Elisabeth Delozanne (LIP6, UPMC).

A partir d'une synthèse des travaux internationaux de didactique de l'algèbre, Kieran (Kieran 2007) a proposé le modèle GTG (Generational/Transformational/Global-meta level) de conceptualisation de l'activité algébrique qui différencie trois aspects complémentaires :

- L'activité générative concerne la génération des différents objets de l'algèbre : expressions algébriques (généralisant des règles numériques), formules (traduisant des relations entre des variables dans différents cadres) et équations (à une ou plusieurs inconnues modélisant un problème), identités.
- L'activité transformationnelle concerne l'utilisation de règles de transformation (règles relatives à la substitution de valeurs numériques dans des expressions, à la factorisation, au développement, à la résolution d'équations et d'inéquations).
- L'activité globale au niveau méta concerne la mobilisation et l'usage de l'outil algébrique pour résoudre différents types de problèmes (de modélisation, de généralisation, de preuve).

Cette approche permet de caractériser les types de problèmes du domaine algébrique (problèmes de généralisation, de production de formule dans différents cadres, de preuve, de reconnaissance d'expressions, de calcul algébrique) à prendre en compte pour définir un test diagnostic et les différents aspects de l'analyse multidimensionnelle nécessaire pour caractériser l'activité des élèves en algèbre élémentaire.

2. *Approche anthropologique*

L'approche cognitive mentionnée ci-dessus ne prend pas en compte l'institution dans laquelle l'élève apprend et les praxéologies mathématiques (Chevallard 2002) impliquées dans la résolution des problèmes proposés dans l'institution[4]. Au-delà de la recherche des conceptions sur les notions en jeu, les pratiques d'évaluation doivent permettre de situer la praxis des élèves dans la résolution des types de tâches travaillés à un niveau scolaire donné et les éléments technologiques investis dans leur résolution par rapport aux praxéologies mathématiques idoines.

Chaque tâche diagnostique du test peut être caractérisée par : un type de tâche, des techniques attendues relativement aux éléments technologiques et théoriques visés, les cadres et registres de représentation, la complexité des expressions en jeu, le niveau d'intervention des organisations mathématiques dans la tâche prescrite (Castela 2008). Ce point de vue nous a permis d'adapter le diagnostic à différents niveaux d'enseignement (Chenevotot-Quentin et al. 2011).

III. DIAGNOSTIC INDIVIDUEL

1. *Pratiques d'évaluation et diagnostic*

Bien que faisant partie intégrante de l'activité de l'enseignant, le diagnostic peut avoir différents sens. Ketterlin-Geller et Yovanoff (2009) ont proposé plusieurs définitions du diagnostic en mathématiques. Dans une perspective éducative, le diagnostic renseigne sur les connaissances aussi bien que sur les habiletés ou conceptions erronées des élèves. Il permet alors à l'enseignant de repérer ce que ses élèves savent ou ne savent pas faire par rapport aux attentes institutionnelles.

[4] Les praxéologies sont définies à partir de l'étude des programmes, des documents d'application et des principaux manuels utilisés dans les classes.

Par ailleurs, ces auteurs distinguent deux types de pratiques d'évaluation. La première, l'analyse des réponses des élèves à des tests dédiés, renseigne sur les connaissances et les habiletés en cours de construction par les élèves. Si elle permet d'avoir accès aux conceptions erronées, elle donne peu d'informations sur les erreurs mathématiques persistantes. La deuxième, l'évaluation diagnostique cognitive, donne des informations sur le processus cognitif de l'élève. Elle est basée sur la connaissance du savoir mathématique en jeu et sur une analyse statistique des réponses. Dans les deux cas, l'enjeu porte donc principalement sur une étude locale des conceptions erronées.

Nous nous intéressons à un diagnostic cognitif dont le rôle est de permettre la prise de décisions concernant les apprentissages. Au-delà de l'étude des conceptions erronées, notre enjeu consiste à étudier globalement les cohérences de fonctionnement des élèves dans un domaine mathématique donné, ce qui nécessite l'analyse des réponses des élèves dans un domaine organisé.

2. Modalités du diagnostic individuel

Le premier outil de diagnostic, d'abord un outil papier/crayon (Grugeon 1997), a donné lieu à une implémentation informatique partielle avec la conception du logiciel *Pépite* (Jean et al. 1998). *Pépite* construit en partie automatiquement le profil cognitif en algèbre d'un élève à la fin de la scolarité obligatoire à partir de ses réponses à un test systématique spécialement conçu à cet effet. Ce profil est une description de l'activité de l'élève en algèbre élémentaire repérant ses cohérences de fonctionnement.

Le test est composé de 22 tâches diagnostiques (51 items) choisies en croisant à la fois les différents aspects de la compétence algébrique, pris comme référence, et les types de tâches développés dans les programmes pour le niveau considéré. Ces tâches recouvrent les différents problèmes du domaine algébrique : problèmes de mathématisation pour généraliser, modéliser, prouver ou mettre en équation (12 items), exercices techniques de calcul (22 items) ou de reconnaissance (32 items).

Ces tâches diagnostiques impliquent différents types de tâche des programmes de collège et de seconde comme on peut le voir dans le tableau 1 :

- De calcul algébrique : développer ou factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations du (ou se ramenant au) premier degré.
- De production d'expression, de formule ou de mise en équation pour traduire des relations entre variables selon les conditions de l'énoncé.
- De traduction ou de reconnaissance de relations mathématiques d'un registre de représentation dans un autre.
- De résolution de problèmes dans différents cadres (numérique, algébrique, géométrique, fonctionnel) en mobilisant l'outil algébrique pour prouver des propriétés, pour mettre en équation.

Types de tâches	Nombre d'items du test	Items du test
de calcul algébrique	15 sur 51	1.1 / 1.2 / 1.3 / 1.4 / 6 / 8.1 / 8.2 / 9.1 / 9.2 / 9.3 / 9.4 / 17 / 18.1 / 19.1 / 21
de production d'expression	10 sur 51	3.1 / 10 / 11.1 / 12 / 15.1 / 15.2 / 15.3 / 16 / 19.2 / 20.2
de traduction ou de reconnaissance	19 sur 51	2.1 / 2.2 / 2.3 / 3.2 / 4.1 / 4.2 / 4.3 / 4.4 / 4.5 / 5.1 / 5.2 / 7 / 8.1 / 8.2 / 11.2 / 13 / 14 / 18.2 / 20.1
de résolution de problèmes dans différents cadres	3 sur 51	15.3 / 16 / 20.3

Tableau 1 *— Organisation praxéologique du test composé de 22 tâches*

Les tâches diagnostiques peuvent être des QCM ou de exercices à énoncés plus ou moins ouverts. En voici quelques exemples pour chaque type de tâche.

3. *Exemples de tâches composant le test diagnostic*

L'exercice 9 (items 9.1 et 9.2) présenté en figure 1 est un exemple de tâche en calcul algébrique. Il permet de repérer si un élève reconnaît la structure d'une expression et utilise les identités mises en jeu en fonction du but visé. Dans le cas négatif, l'analyse didactique caractérise les règles erronées utilisées.

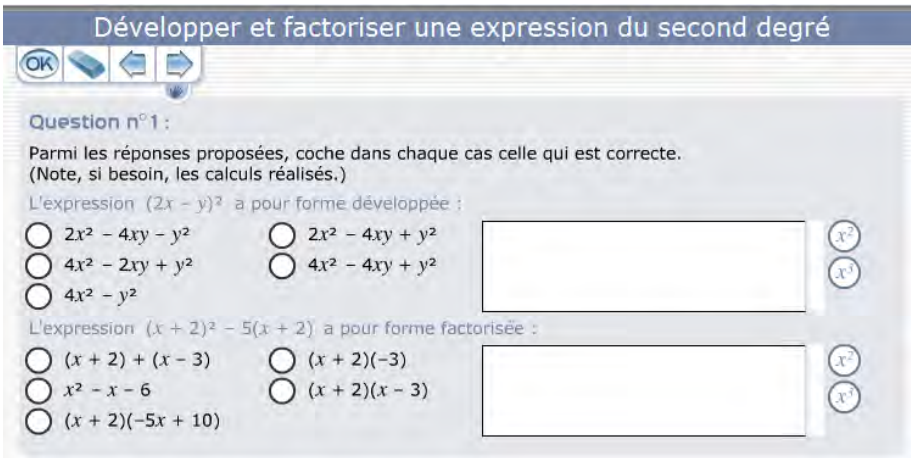

Figure 1 *— Exemple de tâche en calcul algébrique*

L'exercice 3 (item 3.1) présenté en figure 2 est une tâche de production d'expression. Il permet d'étudier si un élève sait exprimer l'aire d'un domaine plan par une expression algébrique. L'analyse des réponses donne accès aux règles de traduction et/ou de transformation utilisées par les élèves pour passer d'une représentation géométrique à une écriture algébrique.

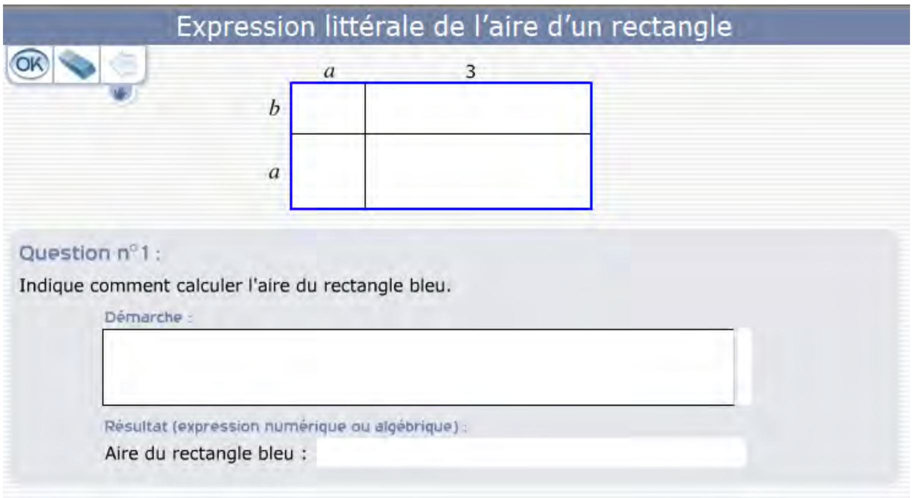

***Figure 2** — Exemple de tâche en production d'expression*

L'exercice 2 (items 2.1, 2.2 et 2.3) présenté en figure 3 est un exemple de tâche en reconnaissance d'expression. Il permet de repérer si un élève reconnaît la structure des expressions et les règles de formation des écritures algébriques qu'il a mobilisées. Le choix d'une justification (figure 4 ou 5) donne accès au niveau de rationalité mis en jeu par les élèves (Grugeon 1997) : preuve pragmatique par l'exemple numérique, preuve algébrique ou preuve par injonction (il faut que...).

***Figure 3** — Exemple de tâche en reconnaissance de la structure d'une expression*

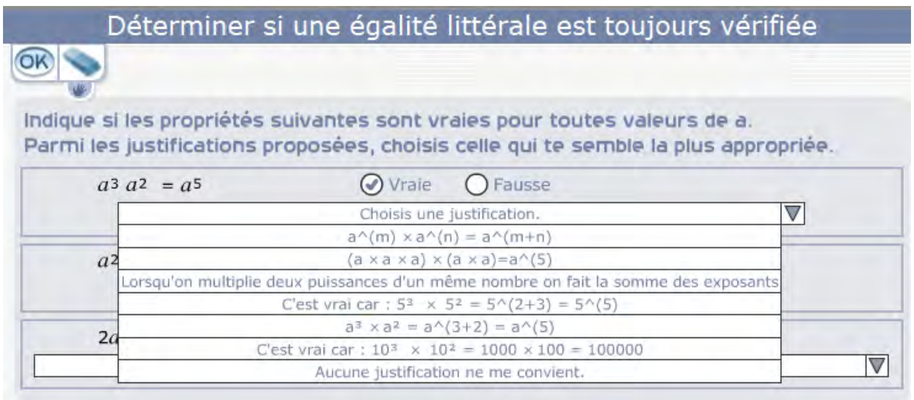

***Figure 4** — Justifications proposées dans le cas où l'élève a choisi « Vraie »*

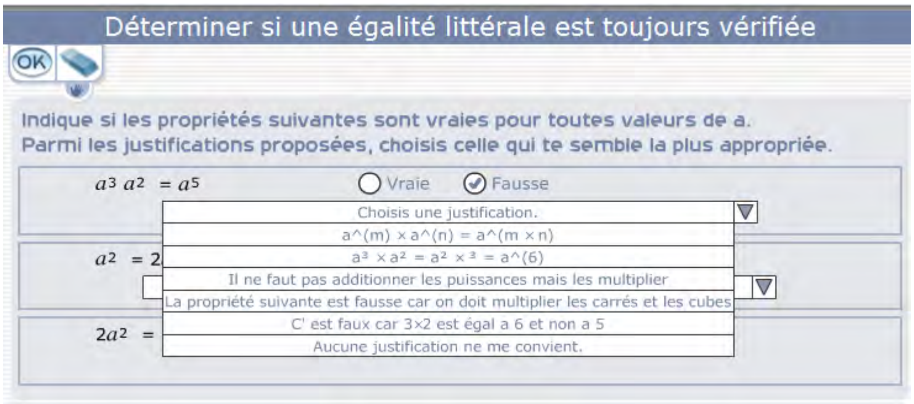

Figure 5 – *Justifications proposées dans le cas où l'élève a choisi « Fausse »*

L'exercice 16 (item 16) présenté en figure 6 concerne la preuve d'une propriété numérique. Il permet de tester la capacité des élèves à mobiliser l'outil algébrique pour produire une expression algébrique résultant d'un algorithme de calcul, puis prouver que l'expression obtenue est toujours égale à 7. La génération de l'expression donne accès au niveau de preuve mis en jeu (exemple numérique ou preuve algébrique), aux règles de traduction et de transformation utilisées pour développer et réduire l'expression.

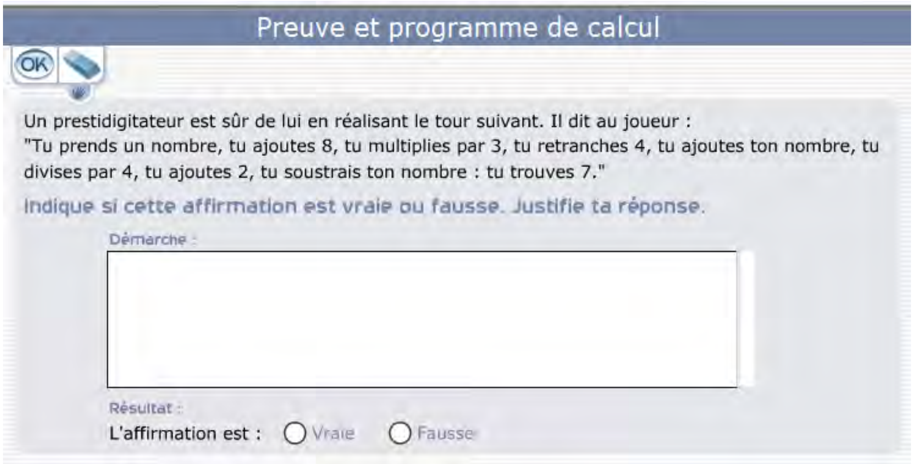

Figure 6 - *Exemple de tâche de résolution de problème*

4. *Profil d'un élève en algèbre*

Dans notre approche, les réponses des élèves ne sont pas seulement analysées en termes de réussite/échec mais aussi codées en termes de cohérences définies par une analyse *a priori*, correspondant soit à des technologies institutionnellement reconnues (i-technologie), soit à des technologies qui justifient et légitiment pour les élèves des techniques erronées récurrentes dans cette institution (e-technologie)[5].

Le codage des réponses des élèves aux différentes questions du test diagnostique s'effectue grâce à une grille d'analyse multidimensionnelle (Grugeon 1997), selon cinq dimensions : V,

[5] Ce point de vue est proche de celui introduit par Croset (2009, pp.264) :
« Ces comportements stables dans l'erreur doivent, selon nous, pouvoir s'expliquer, se justifier par la présence d'une technologie-en-acte chez ces élèves. C'est parce qu'ils ont en tête des éléments technologiques (erronés) qu'ils sont capables d'avoir un comportement stable (dans l'erreur) ».

L, EA, T et J[6]. Une analyse transversale du codage obtenu permet de construire un profil de l'élève en algèbre.

Nous définissons le profil d'un élève en algèbre élémentaire comme une description des principaux traits de son activité algébrique, situés par rapport aux praxéologies mathématiques attendues à ce niveau scolaire. Il est à la fois quantitatif, en termes de taux de réussite selon les types de tâches diagnostiques et, qualitatif, en termes de e-technologies dominantes qui décrivent les praxéologies développées globalement par les élèves sur l'ensemble des tâches. Les éléments technologiques convoqués éclairent des conceptions inadaptées sous-tendant les connaissances et techniques mises en jeu par les élèves.

IV. DIAGNOSTIC COLLECTIF

Le modèle précédent fournit une description du profil cognitif de chaque élève. Pour les enseignants, dont l'objectif est d'exploiter le diagnostic pour réguler les apprentissages des élèves, une photographie de groupes d'élèves ayant des praxis voisines en algèbre a semblé plus opérationnelle.

Un stéréotype (Delozanne et al. 2010) est défini comme une classe de profils équivalents, c'est à dire un ensemble de profils pour lesquels les e-technologies des élèves en algèbre peuvent être jugées suffisamment proches pour travailler sur des situations ayant les mêmes objectifs prioritaires d'apprentissage.

Pour spécifier le modèle de stéréotype en algèbre élémentaire, nous avons privilégié trois composantes :

- UA : l'usage de l'algèbre pour résoudre des problèmes (dimension outil de résolution et de preuve de l'algèbre). Cette composante permet d'étudier la capacité de l'élève à mobiliser algébriquement les différents types de problèmes via les équations ou via des relations fonctionnelles, les problèmes pour généraliser, prouver ou démontrer.
- TA : la traduction d'une représentation à une autre. Il s'agit ici d'étudier la capacité de l'élève à interpréter des écritures algébriques en articulation avec les autres registres de représentation (langage naturel, graphique, figure géométrique).
- CA : le calcul algébrique (dimension objet de l'algèbre). Cette composante sert à évaluer le degré de maîtrise du calcul algébrique et la nature des techniques de calcul mises en jeu par l'élève.

Pour chaque composante, différents niveaux e-technologiques ont été identifiés (tableau 2) ; ils permettent de définir des seuils d'idonéité relativement à une composante donnée. Des expérimentations réalisées en 2005 (Delozanne et al. 2005b) ont permis de faire émerger une terminologie acceptée par tous pour la restitution des résultats du test aux enseignants et aux élèves. Plus particulièrement, les niveaux technologiques des stéréotypes ont été traduits.

---

[6] Les cinq dimensions sont : la validité de la réponse (V), le statut des lettres (L), le niveau technologique en jeu dans les écritures algébriques utilisées lors des transformations symboliques (EA), le niveau technologique en jeu dans les représentations utilisées lors d'une traduction (T), le niveau technologique de justification (J).

Composante	Notation	Objectif	Niveaux de compétence
Usage de l'algèbre	UA	Etudier la disponibilité de l'outil algébrique et la capacité à le mobiliser dans des situations de modélisation (production de formules ou mise en équation) et de preuve.	*Niveau 1* : Disponibilité de l'outil algébrique et mobilisation adaptée.
			Niveau 2 : Mobilisation de l'outil algébrique et traduction algébrique adaptée pour au moins un type de problème.
			Niveau 3 : Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.
			Niveau 4 : Non disponibilité de l'outil algébrique pour généraliser, prouver ou modéliser et démarches arithmétiques persistantes.
Traduction d'une représentation à une autre	TA	Etudier la capacité à traduire une expression d'un registre à un autre et la flexibilité à interpréter une représentation d'un registre à un autre.	*Niveau 1* : Traduction correcte.
			Niveau 2 : Traduction ne prenant pas en compte la reformulation des relations.
			Niveau 3 : Au moins une traduction sans cohérence (abréviative) entre le modèle et la situation.
Calcul algébrique	CA	Etudier la capacité à calculer algébriquement.	*Niveau 1* : Traitement algébrique prenant en compte les aspects syntaxique et sémantique des expressions s'appuyant sur une adaptabilité dans l'interprétation des expressions selon les usages visés (conception structurale).
			Niveau 2 : Traitement essentiellement syntaxique avec des erreurs récurrentes de transformation privilégiant une conception procédurale des expressions.
			Niveau 3 : Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.

***Tableau 2** – Echelles par seuils pour chaque composante des stéréotypes*

Usage de l'Algèbre UA Niveau 3	UA3 Mobilisation de l'outil algébrique sans cohérence entre le modèle et la situation.	Exercices de mathématisation Taux de réussite : **18 %** **Fragilités** Encore des démarches arithmétiques
Traduction d'une représentation à une autre TA Niveau 2	TA2 Traduction ne prenant pas en compte la reformulation des relations.	Exercices de reconnaissance et de traduction Taux de réussite : **50 %** **Leviers** Traduction algébrique correcte pour modéliser (e=6P ; x-2=y+2)
Calcul Algébrique CA Niveau 3	CA3 Traitement s'appuyant sur une conception pseudo-structurale, mettant en jeu des règles de formation et de transformation incorrectes du type concaténation.	Exercices techniques Taux de réussite : **14 %** **Fragilités** Rôle des opérateurs non maîtrisé ($4a^3+3a^2=7a^5$) Utilisation de règles de transformation fausses ($(a+2)^2=a^2+4$; $a^m a^n=a^{m.n}$; $ax=b \rightarrow x=-b/a$)

***Tableau 3** – Stéréotype en algèbre élémentaire de Jules, élève de seconde*

Voici, par exemple, le stéréotype en algèbre élémentaire de Jules tel qu'il est présenté aux enseignants (tableau 3). Jules est en difficulté en calcul algébrique (CA3) et dans son usage dans la résolution de problèmes (UA3). Par contre, Jules traduit algébriquement, sans reformulation, des relations mathématiques entre variables dans un cadre donné (TA2). Il reste à confirmer la robustesse du diagnostic par une expérimentation portant sur un nombre d'élèves et de classes beaucoup plus grand. C'est l'enjeu du transfert du diagnostic dans la base d'exercices *LaboMEP* de Sésamath débuté en 2008.

V. TRANSFERT DU DIAGNOSTIC DANS UNE BASE D'EXERCICES EN LIGNE

1. *La base d'exercices de Sésamath*

L'association Sésamath occupe aujourd'hui une place centrale dans la création de ressources en ligne libres avec près de 1,5 millions de visites en mars 2011 sur son site *MathEnPoche* (MEP). Depuis sa création en 2001, l'association Sésamath a développé des ressources diversifiées (bases d'exercices en ligne, manuels scolaires) couvrant les programmes de mathématiques du collège. Elle fonde son succès sur sa très grande sensibilité aux besoins des enseignants utilisateurs ainsi qu'à leurs contraintes. Par ailleurs, elle a su mettre en place des mécanismes de conception collaborative pour produire, réviser et faire évoluer ses ressources. Enfin, ces dernières années, Sésamath a établi des collaborations avec des chercheurs afin d'analyser les aspects mathématiques, épistémologiques, didactiques et ergonomiques des ressources, gage d'une production de contenus mathématiques de qualité.

Les enseignants peuvent utiliser cette ressource pour proposer des exercices adaptés aux besoins des élèves sous la forme de parcours d'enseignement portant sur des thèmes mathématiques enseignés en classe. Le plus souvent, ces exercices sont choisis en fonction des scores obtenus par les élèves dans *LaboMeP* et sont proches des exercices déjà rencontrés. Aujourd'hui, aussi bien les concepteurs, que les enseignants utilisateurs de ces ressources, ressentent le besoin d'appuyer davantage le suivi des élèves et la proposition de parcours d'enseignement sur un diagnostic plus élaboré que les scores actuellement produits.

2. *Transfert du diagnostic Pépite dans la base d'exercices de Sésamath*

Tout d'abord, les enseignants demandent des outils d'évaluation adaptables à leur stratégie de régulation de leur enseignement mais aussi économes en temps. Or, *Pépite* est un test systématique qui élabore son évaluation à partir de l'ensemble des 22 tâches diagnostiques du domaine algébrique. Peut-on réduire le nombre de tâches diagnostiques composant le test tout en ayant l'assurance d'établir un diagnostic rapide, valide et fiable ? Quelles tâches diagnostiques faut-il retenir pour leur rôle prédictif ?

Le prototype du diagnostic implémenté dans *LaboMEP* est constitué de 10 tâches diagnostiques, issues des exercices originels de *Pépite*, qui se décomposent en 27 items. Le tableau 4 présente l'organisation praxéologique du test implémenté dans *LaboMEP*. Nous reprenons la répartition par types de tâches du tableau 1.

Types de tâches	**Nombre d'items du test**	**Items du test**
de calcul algébrique	8 sur 27	1.1 / 1.2 / 1.3 / 1.4 / 9.1 / 9.2 / 9.3 / 9.4
de production d'expression	7 sur 27	3.1 / 10 /15.1 / 15.2 / 15.3 / 16 / 20.2
de traduction ou de reconnaissance	11 sur 27	2.1 / 2.2 / 2.3 / 3.2 / 4.1 / 4.2 / 4.3 / 4.4 / 4.5 / 13 / 20.1
de résolution de problèmes dans différents cadres	3 sur 27	15.3 / 16 / 20.3

Tableau 4 *– Organisation praxéologique du test composé de 10 tâches*

Pour permettre d'étudier l'évolution des différents aspects de l'activité algébrique des élèves, des clones des tâches diagnostiques du test ont été conçus et développés (énoncé et analyse *a priori* automatique de chaque tâche) (Prévit 2008). La conception des clones s'appuie sur les variables didactiques caractéristiques des types de tâches et des énoncés en jeu. Les élèves peuvent donc passer le test à plusieurs reprises au cours de la même année scolaire.

Notre méthodologie consiste à développer des prototypes qui sont immédiatement testés par un cercle restreint d'utilisateurs experts, puis modifiés, avant d'être mis à la disposition de tous. Pour le développement informatique, nous nous sommes appuyés sur les développeurs de Sésamath et sur des membres de l'équipe de recherche[7]. L'organisation de Sésamath a déjà montré son efficacité (Artigue et al. 2006) pour développer des logiciels de façon collaborative et très réactive aux besoins et aux contraintes des utilisateurs. Cette méthodologie s'appuie sur une démarche itérative de conception dans l'usage des ressources (Rabardel 1995). Nous procédons par cycles de développement et par intégrations successives. Nous rejoignons l'idée de développement expérimental et d'approche de recherche adaptative (Richard et al. 2011).

3. Validité du transfert

La validité du transfert du diagnostic, depuis le laboratoire de recherche, vers la base d'exercices de Sésamath, a été attestée par une analyse combinatoire complétée par une analyse didactique.

L'analyse combinatoire a été effectuée par Darwesh (2010), dans sa thèse de doctorat. Il a comparé les stéréotypes obtenus, d'une part, avec le test complet composé de 22 tâches et, d'autre part, par des combinaisons de 15 tâches, sur un corpus de 361 élèves. Il a ensuite déterminé les 13 tâches (1/2/3/4/9/10/11/12/13/14/15/16/20) qui interviennent le plus souvent dans les meilleures combinaisons composées de 15 tâches. L'analyse didactique a validé la pertinence du choix de ces 13 tâches et a estimé que leur nombre pouvait être réduit à 10 tâches (1/2/3/4/9/10/13/15/16/20). La comparaison des stéréotypes obtenus, d'une part, avec le test complet composé de 22 tâches et, d'autre part, avec le test réduit composé de 10 tâches, donne un pourcentage d'égalité de 74%.

L'analyse didactique repose sur plusieurs arguments. Le test initial composé de 22 tâches a volontairement été conçu avec des redondances. L'exercice 10 (item 10) présenté en figure 7 relève du même type de tâche (la production d'expression) que l'exercice 3 (item 3.1) déjà présenté en figure 2. Il permet d'étudier si un élève sait traduire algébriquement un énoncé donné en langage naturel. L'analyse des réponses correctes ou erronées permet d'identifier le mode de traduction utilisée (reformulation ou non, schématisation) pour passer d'une relation mathématique exprimée en français vers une relation algébrique.

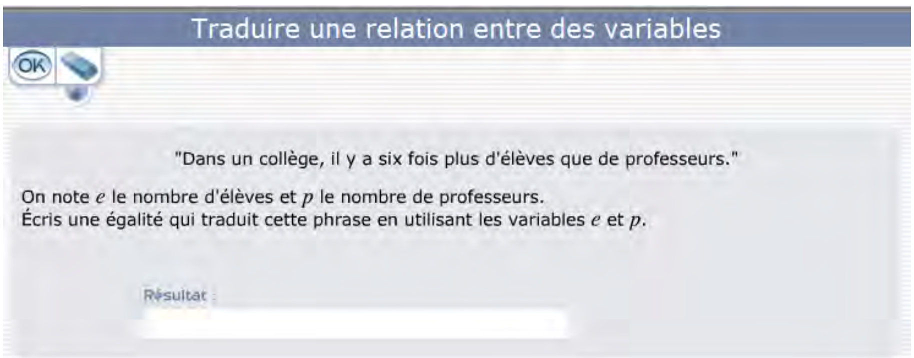

Figure 7 *– Exemple de tâche en production d'expression*

[7] Nous remercions Arnaud Rommens, Christian Vincent, Aso Darwesh, Josselin Allys pour leur contribution à l'implémentation du test diagnostic sur *LaboMEP*.

Ainsi, la détermination de chaque élément du profil repose volontairement sur les réponses de l'élève à plusieurs tâches. Cette stratégie présente des avantages évidents pour la fiabilité du diagnostic. Malheureusement, en raison de sa longueur excessive, le test initial peut ne pas être complètement renseigné par les élèves. Grâce à l'analyse *a priori* des tâches composant le test initial de 22 tâches, nous avons quantifié la richesse de chaque tâche sur le plan du diagnostic et retenu celles qui ont une valeur prédictive importante.

Des expérimentations portant sur la viabilité du transfert du diagnostic ont débuté en 2011. Par exemple, avant l'utilisation de l'outil de diagnostic, un enseignant a constitué quatre groupes d'apprentissage en algèbre dans sa classe de seconde composée de 34 élèves. Ces groupes sont les suivants : les élèves en réussite (groupe 1), les élèves en réussite avec quelques difficultés (groupe 2), les élèves moyens (groupe 3), les élèves en difficulté (groupe 4). L'enseignant souhaite surtout une aide pour clarifier le groupe des élèves moyens (groupe 3). Le diagnostic a conforté les choix faits par l'enseignant en exhibant toutefois quelques différences (tableau 5).

		Groupes constitués par l'enseignant				
		Groupe 1	**Groupe 2**	**Groupe 3**	**Groupe 4**	**Total**
Groupes constitués par Pépite	**Groupe A**	**4**	*4*	*3*	*0*	11
	Groupe B	1	**2**	*4*	*2*	9
	Groupe C	0	1	**5**	*2*	8
	Groupe D	1	0	0	**1**	2
	Total	6	7	12	5	30

Tableau 5 *– Comparaison des groupes constitués par l'enseignant et par Pépite pour une classe de seconde*

Ainsi, pour les 30 élèves de la classe présents lors du passage du test diagnostic, les quatre groupes d'apprentissage en algèbre construits à partir de *Pépite* sont les suivants :

- Les élèves donnant du sens au calcul algébrique et commençant à développer une pratique intelligente et contrôlée–CA1 (groupe A).
  - Les élèves pratiquant un calcul algébrique peu contrôlé mobilisant de façon plus ou moins fréquente des règles fausses–CA2 : avec utilisation d'une démarche algébrique adaptée pour résoudre au moins un type de problème (groupe B) ; avec utilisation de démarches numériques ou algébriques inadaptées (groupe C).
- Les élèves donnant peu de sens aux notions et à l'usage de l'algèbre – CA3 (groupe D).

Pour 12 élèves sur 30 (diagonale du tableau 5, en gras), les groupes constitués par l'enseignant et par *Pépite* sont les mêmes. De plus, pour 15 élèves sur 30, les groupes proposés par *Pépite* sont plus favorables que ceux proposés par l'enseignant (partie supérieure droite du tableau 5, en italique). Notre interprétation de ce résultat repose sur trois arguments. Tout d'abord, le test *Pépite* est conçu pour des élèves de fin de 3ème/début de 2nd (15 ans) or la classe dans laquelle nous avons effectué nos expérimentations est une classe de 2nd au 2ème trimestre. Ensuite, les élèves disposaient de tout le temps nécessaire pour effectuer le test et n'étaient pas jugés sur leur rapidité à répondre aux exercices. Enfin, l'environnement informatique propose quelques interactions à l'élève, facilitant sa remise en question. Par ailleurs, le diagnostic a aussi aidé l'enseignant en pointant des difficultés qui nécessitent des apprentissages différenciés spécifiques (partie inférieure gauche du tableau 5) pour 3 élèves sur 30 pour lesquels les groupes basés sur les stéréotypes sont plus défavorables que ceux initialement constitués par l'enseignant.

Le diagnostic basé sur le test à 10 tâches implémenté sur *LaboMEP* est donc conforté par l'étude de cette classe. Il reste à le valider à une plus grande échelle.

VI. INSTRUMENTATION DE L'ACTIVITÉ DE DIAGNOSTIC DES ENSEIGNANTS

1. *Scénarii d'usage*

Comment les enseignants utilisateurs de *LaboMEP* s'approprient-ils l'outil de diagnostic *Pépite* mis à leur disposition ? Comment cet outil peut-il s'insérer dans l'activité de diagnostic des enseignants ? Nous proposons trois scénarii d'usage, exposés sur l'écran de présentation accompagnant l'outil de diagnostic sur *LaboMEP* :

- En 3ème ou en 2nd, avant de commencer le chapitre sur le calcul algébrique, pour faire des séances différenciées de rappels en fonction des besoins des élèves de la classe,
- En 3ème ou en 2nd, pendant le chapitre sur le calcul algébrique, pour préparer un contrôle au moyen d'une séance d'entraînement différenciée selon les besoins,
- En fin de 3ème, pour organiser une révision pour le Brevet.

L'approche instrumentale de l'activité développée par Rabardel (1995) a été mise en œuvre dans l'analyse de l'intégration des logiciels dans l'enseignement du point de vue des élèves.

Rogalski (Delozanne et al. 2005a) souligne la faible part des publications s'intéressant au point de vue de l'enseignant. Pour analyser l'instrumentation de l'activité de diagnostic de l'enseignant de mathématiques et la possibilité que *Pépite* soit placé en situation d'instrument, Rogalski propose de s'interroger sur :

- Quel est l'objet de l'action ? La classe ? Des groupes d'élèves ? Des élèves individuels ?
- Quel est le but du diagnostic ? Permettre la catégorisation de sous-groupes ? Aider à prendre des décisions relatives à l'adaptation de l'enseignement, à la remédiation ou encore en matière d'orientation scolaire ?

Selon l'objet et le but visé, un outil peut être plus ou moins aisément situé en position d'instrument. A sa conception, *Pépite* est destiné à des élèves individuels (diagnostic individuel) puis à la classe (diagnostic collectif) dans le but de constituer des groupes d'élèves ayant des praxis voisines en algèbre élémentaire. Le but du diagnostic est de favoriser la régulation de l'enseignement en fonction des besoins des élèves.

2. *Parcours différenciés d'enseignement*

Nous souhaitons fournir aux enseignants des outils pour gérer l'hétérogénéité des apprentissages en algèbre et organiser la différenciation de l'enseignement en fonction des besoins des élèves. A partir des différents stéréotypes des élèves, nous constituons des groupes (3 ou 4) d'élèves de profils voisins à qui nous proposons de travailler sur un même parcours d'enseignement.

Nous présentons un parcours d'enseignement (succession de tâches) destiné à des élèves dont le profil est semblable à celui de Jules (tableau 3). Ces élèves donnent peu de sens aux lettres et mobilisent peu l'outil algébrique, ou de façon non adaptée, pour résoudre des problèmes du domaine algébrique. Ils donnent peu de sens au calcul algébrique, souvent sans lien avec le numérique, et utilisent des règles de transformation sans contrôle, par exemple des règles de concaténation ($4a^3+3a^2 \rightarrow 7a^5$) ou de fausse linéarité ($a^2 \rightarrow 2a$). Mais ces élèves réussissent à traduire algébriquement, lorsqu'il n'y a pas besoin de reformulation, des relations mathématiques entre variables dans un cadre donné : c'est un levier à exploiter.

Les objectifs d'apprentissage retenus pour ces élèves sont les suivants :

- Motiver et donner du sens aux lettres comme nombres généralisés via des exercices mettant en jeu des situations de généralisation et de preuve, par exemple à travers l'étude de l'équivalence de programmes de calcul.
- Déstabiliser les conceptions erronées sur les lettres, les règles de transformation ou de traduction via des contre-exemples numériques ou en changeant de cadre.
- Développer des techniques contrôlées de calcul algébrique.

Les tâches constituant le parcours d'enseignement sont caractérisées par : un type de tâche, une technique relativement à la technologie, une théorie attendue à ce niveau scolaire, et différents niveaux d'intervention (Castela 2008). En voici quelques exemples :

- Des tâches pour montrer les limites du numérique et travailler la nécessité d'introduire les lettres dans des problèmes de généralisation et de modélisation.
- Des tâches pour déstabiliser les identités fausses en amenant les élèves à articuler les cadres algébrique et numérique à travers l'usage de contre-exemples pour prouver qu'une identité est fausse telle que celle de la figure 8.
- Des tâches pour travailler les liens entre différentes représentations à partir des exercices du site http://www.fi.uu.nl/wisweb/.
- Des tâches pour développer l'habileté en calcul algébrique (développer, factoriser,…) en contrôlant l'équivalence des expressions après transformation, par exemple avec un logiciel de calcul formel.

Les égalités suivantes sont-elles vraies pour toutes valeurs de a ? Justifier votre réponse.

$(a+b)^2 = a^2 + b^2$ → → $3a+5 = 8a$ → → $a+a^2 = 2a^3$ → → $(a+b)^2 = 2(a+b)$

Figure 8 *— Tâche pour déstabiliser les identités fausses*

Des parcours globaux seraient difficilement exploitables par les enseignants en raison de leur longueur excessive. Il est nécessaire de travailler sur des thèmes spécifiques et de définir des objectifs d'apprentissage ciblés, par exemple en lien avec la préparation d'un contrôle ou la stabilisation des acquis.

VII. CONCLUSION

Ce projet de recherche a permis d'apporter quelques éléments de réponse aux questions initialement posées.

La viabilité du transfert d'un outil de diagnostic, développé dans des laboratoires de recherche, vers une plateforme d'exercices en ligne largement utilisée par les enseignants de mathématiques de collège, repose à la fois sur une analyse combinatoire et sur une analyse didactique que nous avons présentées. Actuellement, la plateforme *LaboMEP* propose aux enseignants plusieurs clones des tâches diagnostiques du test : un clone pour le niveau 3ème et deux clones pour le niveau 2nd.

La robustesse de l'outil de diagnostic implémenté dans la plateforme a fait l'objet d'une première expérimentation positive mais restreinte à une classe qu'il restera à conforter à plus large échelle. De nouvelles expérimentations sur la plateforme *LaboMEP* sont en cours avec quatre classes de 3ème et une classe de 2nd.

L'étude montre que le diagnostic a un rôle prédictif pour le choix de parcours d'enseignement adaptés aux besoins des élèves ; nous l'avons illustré succinctement. Plus précisément, deux thèses sont en cours[8]. La première thèse, par Julia Pilet, vise à modéliser des parcours différenciés d'enseignement que les enseignants pourront utiliser sur *LaboMeP* pour gérer l'hétérogénéité des élèves. La deuxième thèse, par Soraya Bedja, concerne l'étude de l'instrumentation de ces ressources par les enseignants.

REFERENCES

Artigue M., Abboud-Blanchard M., Cazes C., Vandebrouck F. (2006) Suivi de l'expérimentation de la région Ile de France : ressources en ligne pour l'enseignement des mathématiques en classe de seconde. Rapport interne IREM de Paris 7.

Artigue M., Gueudet G. (2008) Ressources en ligne et enseignement des mathématiques, *Actes de l'Université d'été de mathématiques*, *Saint-Flour*. http://www3.ac-clermont.fr/pedago/maths/pages/UE2008/prog_UE_2008.htm

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2), 135-182.

Chenevotot-Quentin F., Grugeon B., Delozanne E. (2011) Vers un diagnostic cognitif dynamique en algèbre élémentaire. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) (pp. 827-842) *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Enseignement des mathématiques et développement : enjeux de société et de formation*. Dakar. http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/actes-en-ligne/emfgt6/

[8] Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), Université Paris Diderot.

Chevallard Y. (2002) Structures et fonctions. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp. 3-32) Actes de la XIème école de didactique des mathématiques. Corps (Isère) : La Pensée Sauvage.

Croset M.-C. (2009) *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier.

Darwesh A. (2010) *Diagnostic cognitif en EIAH : le système PépiMEP*. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie.

Delozanne E., Chenevotot-Quentin F. (coordonnateurs) (2005a) Projet de recherche « Modélisation et mise en œuvre d'environnements informatiques pour la régulation de l'apprentissage, le cas de l'algèbre avec le projet LINGOT ». *Rapport de recherche, Projet Cognitique 2002, Programme « Ecole et sciences cognitives : les apprentissages et leurs dysfonctionnements » du MRT, Rapport de fin de projet, mars 2005*. http://lutes.upmc.fr/delozanne/Publi2000-.htm.

Delozanne E., Vincent C., Grugeon B., Gélis J.-M., Rogalski J., Coulange L. (2005b) From errors to stereotypes: Different levels of cognitive models in school algebra. In Richards G. (Ed.) (pp. 262-269) *Proceedings of World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare and Higher Education.* Chesapeake, VA: AACE.

Delozanne E., Prévit D., Grugeon-Allys B., Chenevotot-Quentin F. (2010) Vers un modèle de diagnostic de compétence. *Revue Techniques et Sciences Informatiques* 29(8-9), 899-938.

Douady R. (1985) The interplay between different settings. Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability: Examples from elementary school teaching. In Streefland L. (Ed.) (Vol. 2, pp. 33-52) *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education*. Utrecht : State University of Utrecht.

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 17(2), 167-210.

Jean S., Delozanne E., Jacoboni P., Grugeon B. (1998) Cognitive profile in elementary algebra : the PEpite test interface. *IFIP-TC-3 Official Journal Education and Information Technology* 3, 1-15.

Ketterlin-Geller L.R., Yovanoff P. (2009) Diagnostic assessment in mathematics to support instructional decision making. Practical Assessment. *Research&Evaluation* 14(16). http://pareonline.net/getvn.asp?v=14&n=16

Kieran C. (2007) Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In Lester F. K. (Eds.) (pp. 707-762). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Charlotte, NC: Information Age Publishing Inc.

Prévit D. (2008) *Génération d'exercices et analyse multicritère automatique de réponses ouvertes*. Thèse de doctorat. Université Pierre et Marie Curie.

Rabardel P. (1995) *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Colin.

Richard P.-R., Fortuny J.-M., Gagnon M., Leduc N., Puertas E., Tessier-Baillargeon M. (2011) Didactic and theoretical-based perspectives in the experimental development of an intelligent tutorial system for the learning of geometr. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 43(3), 425-439.

Sfard A (1991) On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.

Vergnaud G., Cortes A., Favre-Artigue P. (1987) Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles, Problèmes épistémologiques et didactiques. *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques* (pp. 259-288). Grenoble : Editions La Pensée Sauvage.