FORMALISME ET DÉMONSTRATION EN ALGÈBRE LINÉAIRE

Claudia CORRIVEAU
Université du Québec à Montréal (UQAM)
corriveauc@hotmail.com

Résumé
Le but de cette communication est de chercher à mieux comprendre les défis d'arrimage entre le secondaire et le postsecondaire et de cerner les difficultés posées à l'enseignement des mathématiques postsecondaires. Le passage aux mathématiques postsecondaires s'accompagne d'exigences accrues en termes de formalisme et de démonstration. Au Québec, au collégial, il semble que les difficultés reliées à la démonstration et au formalisme soient prépondérantes dans le cours d'Algèbre linéaire. Nous présenterons d'abord un aperçu des éléments théoriques sur la base desquels nous analyserons quelques productions d'étudiants d'un cours d'Algèbre linéaire. Nous chercherons à évaluer les capacités des étudiants, à mieux diagnostiquer leurs difficultés, leurs faiblesses, à mieux comprendre et préciser ce que les didacticiens désignent par « obstacle du formalisme » en algèbre linéaire.

INTRODUCTION

Plusieurs travaux de recherche ont mis en lumière que les transitions institutionnelles sont souvent vécues comme difficiles par les élèves. Elles apparaissent des moments clés à considérer, en lien avec la progression des apprentissages des élèves et leur réussite en mathématiques. Au Québec, le passage du niveau secondaire au niveau collégial[1] se caractérise non seulement par l'augmentation des responsabilités de l'étudiant sur le plan de l'organisation (travail personnel, autonomie, etc.), par une plus grande complexité des notions abordées, mais il s'accompagne aussi d'exigences accrues en ce qui a trait à la rigueur mathématique.

Dans le but de mieux comprendre les difficultés liées à la transition secondaire-collégial, nous avons cherché à évaluer la complexité de ce qui est sollicité concernant le formalisme et la démonstration au collégial[2]. Ce travail nous a permis de mieux comprendre « Quels sont les principaux défis posés à l'enseignement des mathématiques universitaires par la transition lycée-université ? » et « Dans quelle mesure les enseignants universitaires prennent-ils [ou pourraient-ils prendre] en compte ces ruptures ? » (Description du thème du Groupe de travail 7 d'EMF 2009). Cette communication vise à fournir des éléments de réponse à ces questions.

[1] Au Québec, les institutions de niveau collégial sont appelés Cégeps (Collèges d'enseignement général et professionnel). Ils offrent une formation pré-universitaire d'une durée de 2 ans ou une formation technique d'une durée de 3 ans. L'étudiant typique y est âgé de 17 à 20 ans.
[2] Il semble que les difficultés reliées à la démonstration et au formalisme soient plus fréquentes dans le cours d'*Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*. Il s'agit, en effet, du cours de mathématique du Cégep le plus susceptible de mettre en œuvre la démonstration. Au Québec, dans les programmes scientifiques pré-universitaires, trois cours de mathématiques sont obligatoires : *Calcul différentiel*, *Calcul intégral* et *Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*. Pour une évaluation sommaire des contenus de ces cours, sous l'angle de ce qui est susceptible d'y être mis en œuvre en démonstration, le lecteur pourra consulter Tanguay (2003), § 3.

1. QUELQUES ÉLÉMENTS THÉORIQUES

1.1. Nouvelles pratiques attendues des étudiants

Robert (1998) tente d'identifier les spécificité et complexité des mathématiques du lycée et des premières années d'université (15 à 19 ans), ce qui correspond environ aux mathématiques faites au Cégep et dans les premières années d'université au Québec. L'auteure qualifie « d'expertes » ces pratiques mathématiques, dont les exigences en matière de démonstration et de formalisation s'accroissent et se complexifient. Dans les nouvelles pratiques attendues de la part des étudiants, Robert repère entre autres les éléments de complexité que nous énumérons ci-dessous. Ses exemples sont le plus souvent puisés au domaine de l'analyse. Nous avons choisi les nôtres en algèbre linéaire.

- *Des types de problèmes jamais rencontrés jusqu'alors*.

Il s'agit de problèmes qui sont inhabituels pour les étudiants, par exemple, montrer que le produit de Lie (défini pour deux matrices carrées *A* et *B* de même format comme la matrice *AB*–*BA*) n'est pas associatif.

- *Pluralité d'arguments à faire intervenir concurremment pour un problème donné*.

Par exemple, pour déterminer le volume d'un tétraèdre dont les coordonnées des sommets sont connues, on doit faire le lien entre le tétraèdre et le parallélépipède (de même hauteur, dont l'aire de la base est double de celle du tétraèdre) engendré par trois vecteurs bien choisis, entre les sommets donnés et ces vecteurs, entre le volume de ce parallélépipède et le produit mixte des trois vecteurs ou encore, le déterminant de la matrice construite sur ces trois vecteurs.

- *Arguments à appliquer à répétition*...

... quand par exemple, pour calculer un déterminant, on applique plusieurs Opérations Élémentaires de Lignes (OEL) à la matrice en cause, en invoquant pour chaque type d'OEL la propriété de variation du déterminant qui s'y rapporte.

- *Sélection d'information. Théorème à appliquer « en partie » seulement*.

Par exemple, déduire de la valeur du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ que les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

- *Changements (à la charge de l'élève-étudiant) de cadre, de registre de représentations, de point de vue, d'angle d'attaque*.

Ce sera le cas par exemple quand on demande de déterminer la position relative de trois plans dans l'espace, ce qui nécessite le passage du cadre de la géométrie vectorielle au cadre des systèmes d'équations linéaires.

- *Quantifications implicites à repérer, à prendre en compte*...

Parfois, l'utilisation du langage courant pour exprimer une quantification ne permet pas à l'étudiant de bien décoder cette quantification et l'amène à interpréter certains énoncés liés de façon erronée. On sait par exemple que le produit matriciel est non commutatif. Certains étudiants interpréteront cet énoncé en disant que pour toute paire de matrices *A* et *B*, le produit *AB* n'est *jamais* égal à *BA*.

À ces éléments, nous ajoutons les difficultés plus généralement liées aux structures déductives, de plus en plus complexes : arbre plutôt que chaîne d'inférences (cf. par ex. Tanguay, 2005), preuves par l'absurde, par contraposition, par cas, etc.

1.2. Obstacle du formalisme

La nature formalisatrice, généralisatrice et unificatrice (Robert, 1998) de plusieurs des concepts abordés en algèbre linéaire augmentent le niveau d'abstraction et causent par conséquent plusieurs difficultés aux étudiants. Ces concepts requièrent de la part des étudiants des processus d'abstraction et de généralisation de type « expansive » (Harel et Tall, 1991) mais sont traités par ceux-là selon des processus de type « disjunctive »[3]. Les étudiants sont amenés à traiter des expressions et symboles nouveaux, souvent introduits de manière implicite par l'enseignant. Les manipulations sur les nouveaux objets se constituent en de nouvelles algèbres (algèbre vectorielle et algèbre matricielle) plus complexes que l'algèbre du secondaire. On remarque cette complexité lorsque les étudiants produisent des résultats incohérents ou vides de sens. Dorier et al. (1997, p. 116) mentionnent que :

> *Pour la majorité des étudiants* [de 18 à 20 ans qui en sont à leur premier cours d'algèbre linéaire], *l'algèbre linéaire n'est qu'un catalogue de notions très abstraites qu'ils n'arrivent pas à se représenter ; de plus, ils sont submergés sous une avalanche de mots nouveaux, de symboles nouveaux, de définitions nouvelles et de théorèmes nouveaux.*

Les difficultés des étudiants en algèbre linéaire relèvent de ce que Dorier et al. appellent « l'obstacle du formalisme ». Sierpinska ajoute que :

> *L'obstacle du formalisme se manifeste chez les étudiants qui opèrent sur la forme des expressions, sans considérer ces expressions comme faisant référence à autre chose qu'à elles-mêmes. Un des symptômes en est la confusion entre différentes catégories d'objets mathématiques ; par exemple, les ensembles sont traités comme des éléments d'ensembles, les transformations comme des vecteurs, les relations comme des équations, les vecteurs comme des nombres, et ainsi de suite. L'obstacle du formalisme fait produire aux étudiants un discours qui a les apparences du discours utilisé par l'enseignant ou le manuel.* (Sierpinska et al., 1999, p. 12 ; trad. Tanguay, 2002, p. 37).

En contexte de démonstration, il importe d'utiliser adéquatement la syntaxe propre au langage mathématique formel mais il est également essentiel d'en contrôler simultanément le contenu sémantique, au-delà des symboles (Durand-Guerrier et Arsac, 2003 ; Weber et Alcock, 2004). Un tel contrôle est en effet nécessaire puisque l'écriture formelle ne porte pas en elle-même le sens des objets symbolisés et des règles énoncées (Bloch et al., 2006).

2. L'ANALYSE DIAGNOSTIQUE

Dans le cadre d'une maîtrise poursuivie à l'Université du Québec à Montréal, nous avons demandé à une enseignante du cours d'*Algèbre linéaire et géométrie vectorielle*, donné au *Collège de Maisonneuve* à Montréal à l'hiver 2006, de nous transmettre, tout au long de la session, les tâches (de démonstration ou non) soumises aux étudiants, que ce soit à titre d'exercice, de devoir ou d'examen. Nous en avons retenu toutes les tâches de démonstration. Nous présentons ici l'analyse diagnostique de deux tâches.

[3] Une généralisation de type « expansive » se manifeste lorsque l'élève peut appliquer un concept à toute une gamme de situations sans devoir le reconstruire chaque fois. Une généralisation de type « disjunctive » se manifeste lorsque l'élève doit reconstruire le concept pour chaque situation nouvelle.

Nous proposons à présent un moyen de prise en compte des difficultés des étudiants, ce que nous nommons l'*analyse diagnostique*. Cette analyse en deux temps permet de mieux mesurer la complexité de ce qui est demandé aux étudiants et de cibler leurs difficultés. Le premier temps est l'analyse *a priori* de la complexité de tâches suivant le cadre de Robert. Cette première analyse tient compte de la généralité du contexte. Elle est indépendante des compréhensions de chacun et du contexte d'enseignement. Elle permet d'anticiper un certain niveau de complexité d'une tâche soumise aux étudiants en regard d'une solution idéale, c'est-à-dire de ce qui est attendu idéalement des étudiants. Le deuxième temps est l'analyse de productions d'étudiants fournies en réponse à ces tâches. Cette analyse permet un regard plus précis sur les difficultés des étudiants (liées ou non à l'enseignement). Selon nous, les deux niveaux d'analyse sont nécessaires puisque l'analyse *a priori* permet une entrée dans l'étude de la tâche et l'analyse des productions permet de cibler plus finement les éléments de difficulté qui n'auraient pas été décelé par l'analyse *a priori*.

2.1. Analyse *a priori*

Les tâches que nous avons choisies pour l'analyse diagnostique ont été prises dans un premier devoir élaboré par l'enseignante. Dans la communication, nous nous intéresserons aux tâches 1a et 2.

Tâche 1

Soit $A_{n\times n}$ une matrice inversible. En utilisant la <u>définition</u>[4] d'une matrice inverse, montrer que

a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
b) $(kA)^{-1} = (1/k)\, A^{-1}$.

Démonstration de la tâche 1a

Compte tenu de la consigne, de ce que nous connaissons des notes de cours et des résultats couverts au moment où la tâche a été soumise, nous avançons que la démonstration attendue pour la Question 1a aurait dû ressembler à ceci :

Selon les notations établies en cours, $(A^T)^{-1}$ désigne l'inverse de la matrice A^T. Si nous parvenons à montrer que $(A^{-1})^T$ est aussi l'inverse de A^T, c'est-à-dire que la multiplication de ces deux matrices donne bien l'identité, par unicité de l'inverse d'une matrice carrée donnée, nous aurons bien que

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Vérifions :

$(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T$ par la propriété de la transposition d'un produit,
$= (I)^T$ par définition de l'inverse d'une matrice donnée,
$= I$ car la matrice identité est symétrique.

On vérifie de la même façon[5] que $A^T (A^{-1})^T = I$.
Donc, $(A^{-1})^T$ est bien l'inverse de A^T, ce qui démontre que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Évaluons sommairement la difficulté de la tâche, à partir des éléments de complexité décrits à la section 1.1.

- Il s'agit d'un type de démonstration inhabituel pour les étudiants.

[4] Souligné dans le texte fourni par l'enseignante aux étudiants.
[5] Un des évaluateurs du mémoire a suggéré de faire une place dans notre analyse aux énoncés du type « on vérifie de la même façon que… ». De tels éléments « méta-logiques » seraient certainement à prendre en compte dans la grille d'analyse d'un éventuel travail de plus grande envergure, par exemple une thèse doctorale.

- La pluralité d'arguments à coordonner est relativement restreinte : définition et unicité de l'inverse, propriété de la transposition d'un produit, symétrie de l'identité.
- Il n'y a pas d'arguments à appliquer à répétition, il n'y a pas d'information à sélectionner dans les résultats invoqués.
- Il n'y a pas de changement de cadres ou de registres de représentation à effectuer dans la mesure où le cadre est celui de l'algèbre matricielle et où la consigne impose un registre précis, qui est celui de l'énoncé, avec les matrices désignées par des majuscules[6]. Cependant, il s'agit d'un registre de représentation des matrices très abstrait puisqu'on ne manipule pas un tableau de nombres (ou variables). Un changement de point de vue est nécessaire pour montrer l'égalité dans la mesure où pour faire intervenir la définition de l'inverse d'une matrice, on ne montre pas l'égalité $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ mais bien que $(A^{-1})^T A^T = I$.
- Il n'y a pas de quantification implicite à repérer (sinon que de comprendre que la démonstration doit être valable pour toute matrice carrée).
- La structure déductive n'est pas particulièrement complexe.

De prime abord, on aurait donc tendance à évaluer cette tâche comme relativement simple. On peut par ailleurs penser qu'à travers cette tâche, le professeur visait un travail de mise en fonctionnement des règles et définitions (liées aux produit, inverse, neutre, transposition dans le cadre de l'algèbre matricielle), comme le suggère d'ailleurs la consigne. Donc en ce sens, la tâche ne vise pas exclusivement un travail sur la démonstration.

Tâche 2

Il m'arrive régulièrement de rencontrer sur les copies d'examens d'étudiants des expressions de leur propre intuition pour $cof\left(A^T\right)$ ou $cof\left(A^{-1}\right)$. Mais que valent vraiment ces expressions ?

a) Montrer que $cof(A^T) = (cof\ A)^T$. Pour ce faire, développer une expression pour l'élément *ij* de la première matrice et comparer avec une expression pour l'élément *ij* de la deuxième matrice.

Démonstration

Selon les indications dans la question, la démonstration aurait dû ressembler à celle-ci :

Notons d'abord que les deux matrices sont de même format. Ensuite, on a que

$(cof(A^T))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\min_{ij}(A^T))$ définition de la matrice des cofacteurs, où $\min_{ij}(A^T)$ désigne la matrice obtenue de A^T en enlevant sa *i*-ième ligne et sa *j*-ième colonne.

$= (-1)^{i+j} \det(\min_{ij}(A^T))^T$ invariance du déterminant par transposition,

$= (-1)^{j+i} \det\left(\min_{ji}(A)\right)$ car $(A^T)^T = A$, et cacher la *i*-ième ligne et la *j*-ième colonne de A^T revient à cacher la *j*-ième ligne et la *i*-ième colonne de A,

$= (cof(A))_{ji}$ définition de la matrice des cofacteurs,

$= ((cof(A))^T)_{ij}$ définition de la transposition.

Comme c'est vrai pour tout *i* et tout *j*, on conclut que $cof(A^T) = (cof\ A)^T$.

---

[6] Utiliser un autre *registre de représentation sémiotique* (cf. Duval, 1993) consisterait par exemple à désigner les matrices par des tableaux avec coefficients doublement indicées (a_{11}, a_{12}, a_{1n}, a_{ij}, a_{nn}, etc.), dont les positions sont suggérées à l'aide de points de suspension. Mais la consigne « en utilisant la définition » rend hors sujet le travail dans un tel registre.

- Il s'agit d'un type de démonstration éloigné de ce à quoi les étudiants sont habitués.
- Il y a bien une pluralité d'arguments à coordonner : définition de la transposition et sa traduction en termes de coefficients doublement indicées, définition de la matrice des cofacteurs, invariance du déterminant par transposition, définition de l'égalité matricielle comme égalité des coefficients de même adresse pour des matrices de même format.
- On peut envisager la coordination de la définition de la transposition avec la propriété $(A^T)^T = A$, avec sa traduction en termes de coefficients indicés, avec la ligne et la colonne à cacher dans la matrice des cofacteurs de A et de A^T, comme des formes d'arguments à sélectionner et à appliquer à répétition ; en tous cas certainement comme des éléments de complexité.
- Il n'y a pas de changement de cadres à effectuer. On peut considérer le passage d'une égalité entre deux matrices à une égalité entre deux éléments de même adresse dans ces matrices comme un *changement de point de vue*, mais ce changement n'est pas laissé à la charge de l'étudiant puisqu'il est indiqué dans l'énoncé : « Pour ce faire, développer une expression pour l'élément *ij* de la première matrice et comparer avec une expression pour l'élément *ij* de la deuxième matrice. » Un tel changement de point de vue pourrait suggérer à certains élèves de changer de registre de représentations, et de passer des matrices désignées par des majuscules aux matrices explicitées comme tableaux avec coefficients doublement indicés. Or, il n'est pas du tout clair qu'un tel changement de registre facilite la résolution de la tâche.
- Il n'y a pas de quantification implicite à repérer, sinon que de comprendre que les égalités à justifier doivent l'être pour des coefficients d'adresse quelconque.

On peut évaluer cette tâche comme difficile.

2.2. Les productions et leur analyse

Les participants

Les productions d'étudiants ont été recueillies dans le cadre du cours dont nous avons parlé. Le groupe comptait 26 étudiants. Nous avons pu obtenir les 21 copies remises pour le premier devoir, élaboré et soumis par le professeur en charge du cours. Nous avons utilisé 11 à 12 des 21 copies (selon les questions) pour faire l'analyse, rejetant celles que la reproduction avait rendues difficilement lisibles. Nous présentons 2 copies[7] d'étudiants pour les tâches 1a et 2.

[7] Pour préserver l'anonymat des étudiants, nous avons recopié leurs productions en prenant soin de reproduire les disposition et graphie telles quelles. Nous avons ajouté des lignes numérotées pour faciliter le repérage dans la production.

Tâche 1a
Analyse de la première production

Question 1 (Matrice inverse : définition)

Ligne 1	a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
Ligne 2	Soit A une matrice carrée regulière d'ordre n
Ligne 3	$AA^{-1} = I$ déf. matrice inverse
Ligne 4	$IAA^{-1} = I$ déf. matrice identité
Ligne 5	$[A^T(A^T)^{-1}]AA^{-1} = I$ déf. de la matrice inverse
Ligne 6	$(A^T(A^{-1})^T)AA^{-1} = I$ (foi exposant)
Ligne 7	$A^T(A^{-1})^T I = I$ déf. de la matrice inverse
Ligne 8	$(A^{-1})^T = \frac{1}{(A^T)}$
Ligne 9	d'où $\boxed{(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}}$

L'étudiant[8] fait montre d'une conception ritualiste de la preuve (Harel et Sowder, 1998) :

Question 1

Ligne 1	• matrice inverse : Soit $A \in M_{n \times n}$
Ligne 2	S'il existe $B \in M_{n \times n}$ telle que $AB = BA = I$
Ligne 3	alors B est matrice inverse de A, notée A^{-1}
Ligne 4	$AA^{-1} = I$
Ligne 5	a) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
Ligne 6	$(A^T)^{-1}$ est matrice inverse de A^T, donc
Ligne 7	$A^T(A^T)^{-1} = I$
Ligne 8	$I = I$
Ligne 9	Si $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, alors $(A^{-1})^T$ est aussi
Ligne 10	matrice inverse de A^T, tel que
Ligne 11	$(A^{-1})^T A^T = I$
Ligne 12	$A^T (A^{-1})^T = I$
Ligne 13	$(AA^{-1})^T = I$
Ligne 14	$(I)^T = I$
Ligne 15	$I = I$
Ligne 16	d'où, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

A partir de la définition (l'étudiant interprète la consigne « En utilisant la définition d'une matrice inverse, montrer que ... » comme une indication de ce avec quoi il doit partir), manipuler et arriver à l'égalité à démontrer.

À la **Ligne 5**, l'étudiant utilise un procédé de manipulation (relativement) standard : on « ajoute 0 » ou on « multiplie par 1 » pour introduire une des expressions à laquelle on veut arriver. Ici, cela devient multiplier par $I = A^T(A^T)^{-1}$.

[8] Nous utilisons systématiquement le masculin mais il peut s'agir en fait d'une étudiante.

Ligne 6. L'étudiant est dans un cadre purement calculatoire et applique des « règles de calcul » en perdant de vue que ces règles ne sont pas valables dans le présent contexte (que « T » n'est pas un exposant) et qu'elles n'y ont plus de sens. L'étudiant perd de vue la structure logique de la preuve : si cette règle (à savoir qu'on peut interchanger les « exposants » T et -1) était vraie, on aurait pu conclure la preuve en une ligne ; cela revient aussi à constater que l'étudiant utilise le résultat à prouver à l'intérieur de la démonstration.
À la **Ligne 7**, l'étudiant a remplacé AA^{-1} par I. Il y a ici un manque de contrôle de la structure logique : si l'expression AA^{-1} « revient » à I à la ligne 7, à quoi sert-elle aux lignes 3, 4 et 5 ?

Ligne 8. Au-delà de la grosse perte de sens qui fait traiter A^T comme un nombre qu'on envoie « en dessous », du côté droit de l'équation (en traitant par conséquent la matrice identité comme le nombre 1), il y a ici incapacité de l'étudiant à décoder ce qu'il y a à montrer du point de vue des définitions, et de voir que l'égalité $A^T(A^{-1})^T\ I = I$, traduit en fait exactement ce qu'on doit démontrer.

Analyse de la deuxième production

Ici, il semble que l'étudiant comprenne mieux comment faire intervenir la définition de la matrice inverse dans la démonstration. Il adopte un mode de fonctionnement fréquemment utilisé au secondaire : on part de l'égalité à montrer, qu'on transforme — soit un côté, soit les deux côtés à la fois — jusqu'à arriver à une égalité qu'on sait être vraie. Cette conduite dénote un manque de contrôle sur la structure logico-déductive de la preuve, puisqu'il n'y a visiblement pas vérification par l'étudiant que le passage de chaque égalité à la suivante résulte bien d'une équivalence, qui seule rendrait valide une telle démarche.

À la **Ligne 7**, l'étudiant utilise adéquatement la définition de matrice inverse. Cependant, on ne sait trop quel statut donner à l'égalité de la ligne 8.

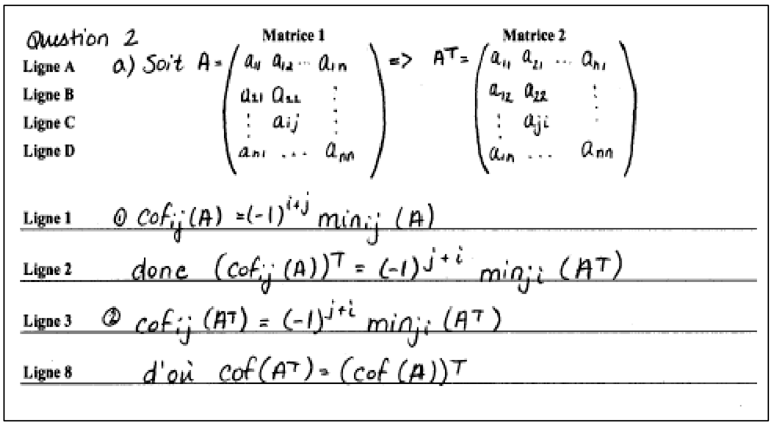
Aux **Lignes 9 et 10**, l'étudiant énonce une implication sans se rendre compte que du point de vue de la structure logique, c'est en fait la réciproque qui est implicitement utilisée dans sa démonstration : pour l'étudiant, les lignes 11 à 15 montrent que $(A^{-1})^T$ est « aussi » l'inverse de A^T. C'est donc bien l'implication

$$(A^{-1})^T \text{ est l'inverse de } A^T \ \Rightarrow\ (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

qui permet de conclure à l'égalité de la ligne 16. Or, c'est la réciproque qu'écrit l'étudiant à la ligne 9. Par ailleurs, il est vrai que la proposition sous-jacente est en fait une équivalence et que les deux implications sont valables.

Lignes 11, 12 et 13. Le passage de la ligne 11 à la ligne 12 à la ligne 13 est difficile à décoder cognitivement. Nous émettons l'hypothèse que ce passage résulterait d'une « réinterprétation » abusive de la règle $(AB)^T = B^T A^T$, réinterprétation qui ferait de la règle quelque chose comme l'énoncé « pour faire de deux transpositions une seule dans un produit, il faut [d'abord] commuter les matrices » ; énoncé qui expliquerait alors la ligne 12.

Tâche 2
Analyse de la troisième production

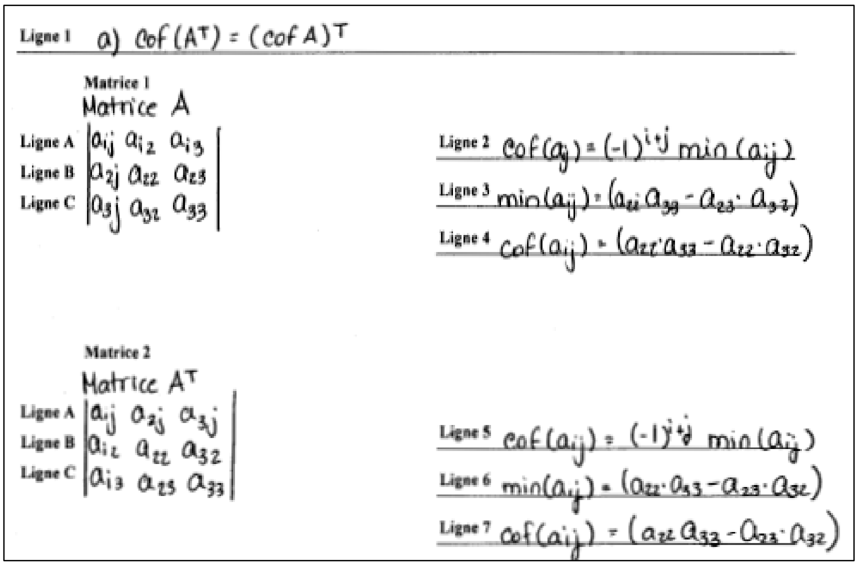

Question 2
Matrice 1 Matrice 2
Ligne A a) Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & a_{ij} & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & a_{ji} & & \\ a_{1n} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$
Ligne B
Ligne C
Ligne D
Ligne 1 ① $cof_{ij}(A) = (-1)^{i+j}\, min_{ij}(A)$
Ligne 2 donc $(cof_{ij}(A))^T = (-1)^{j+i}\, min_{ji}(A^T)$
Ligne 3 ② $cof_{ij}(A^T) = (-1)^{j+i}\, min_{ji}(A^T)$
Ligne 8 d'où $cof(A^T) = (cof(A))^T$

Comme la matrice de droite est la transposée de la matrice *A* (à gauche), l'étudiant inverse les colonnes et les lignes. Les indices doubles sont donc garants de la valeur et ne représentent plus la position, sauf pour l'élément a_{ij} qui devient a_{ji} (à moins que pour l'étudiant, l'élément a_{ji} soit à la position *ij* dans la matrice transposée).

Ligne 2. L'étudiant confond le cofacteur associé à une position, donc un nombre, avec la matrice des cofacteurs. Il prend soin d'indiquer les indices, ce qui confirme habituellement que le travail se fait sur un des éléments de la matrice, mais il accepte d'en faire la transposition, ce qui indique que pour lui, il ne travaille pas sur un nombre mais sur une matrice. Il arrive alors à une perte de sens lorsqu'il essaie d'écrire cette expression selon la définition de cofacteur. Puisqu'il y a le symbole de transposition, l'étudiant permute *ij* pour *ji*, comme le veut la définition de la matrice transposée. L'étudiant est incapable d'adapter la définition de transposition au nouveau contexte, qui demande une fine compréhension de ce qui est manipulé. De plus, l'étudiant applique le mineur à la transposée de *A*. Le membre de droite de l'égalité est en fait égal à $cof_{ji}(A^T)$.

Ligne 3. Encore une fois, il y a confusion entre les définitions de cofacteur et de matrice transposée. Pour l'étudiant, lorsqu'il est question de matrice transposée, il faut permuter *ij* et ainsi, il n'arrive pas à écrire correctement le cofacteur selon sa définition.

Analyse de la quatrième production



Matrice 1. D'abord, l'étudiant mène sa preuve en utilisant une matrice d'un format particulier, à savoir une matrice 3×3. Comme l'enseignante demande de travailler avec un élément *ij* de la matrice, l'étudiant remplace par *ij* l'indice double « 11 ». De ce fait, il remplace par *i* tous les « 1 » de la première ligne et par *j* tous les « 1 » de la première colonne. Il ne peut décoder ce que *ij* sous-entend, soit un cas générique, représentant de tous les cas possibles.

Ligne 2, 3 et 4. De la manière dont il écrit le cofacteur, il semble que pour lui, le cofacteur dépend non pas d'une position, mais d'un élément. Comme il manipule l'élément a_{11}, même s'il le nomme a_{ij}, ses calculs sont faits selon l'élément a_{11} (lignes 3 et 4). Il arrive à exprimer simplement le mineur et le cofacteur puisqu'il n'a plus besoin de mettre $(-1)^{i+j}$: de fait, il manipule l'élément a_{11} et alors, $(-1)^{i+j} = (-1)^{1+1} = 1$. Il arrive donc à représenter le cofacteur associé à la position « 11 » dans une matrice carrée *A*, d'ordre 3.

Matrice 2. L'étudiant présente la matrice transposée de *A* en remplaçant les lignes par les colonnes et les colonnes par les lignes. Les indices des éléments donne l'information concernant la valeur mais l'information concernant la position est perdue puisqu'il faut comprendre que l'élément *ij* est en position *ji* dans cette matrice.

Ligne 5, 6 et 7. Comme aux lignes 2, 3 et 4, l'étudiant arrive à représenter le cofacteur associé à l'élément a_{11} de la matrice A^T.

Sa démonstration est terminée mais en fait, l'étudiant n'a pas pu montrer ce qu'on lui demandait. Il a représenté le cofacteur associé à l'élément de position « 11 » de la matrice A mais il n'a pas pu se représenter l'élément de la matrice des cofacteurs transposée. Tout ce qu'il démontre est que le cofacteur de l'élément « 11 » d'une matrice *A* est égal au cofacteur de l'élément « 11 » de la matrice A^T. On peut penser que cette « faille » lui échappe complètement.

2.3. Bilan de l'analyse des productions

L'analyse des productions nous a permis de pointer plusieurs difficultés et erreurs des étudiants qui relèvent à la fois de la manipulation des objets en algèbre linéaire et de la démonstration en général. Il semble par ailleurs que les difficultés provoquées par l'introduction de nouveaux objets et de nouvelles règles de manipulation et les difficultés liées au contrôle du raisonnement déductif et de sa structure logique s'amplifient mutuellement : on peut penser que la pression psychologique apportée par la nécessité de bien gérer ces nouveaux objets et leurs règles embrouille le jugement logico-déductif et n'en facilite en tous cas certainement pas la gestion.

Mentionnons qu'en cours, la propriété $(AB)^T = B^T A^T$ avait été énoncée et illustrée par un exemple (avec matrice 2×2). Un exercice des notes de cours demandait de montrer que $(ABC)^T = C^T B^T A^T$. Dans la Question 1a du devoir, neuf copies sur douze n'ont pas utilisé la propriété, ou l'ont utilisée incorrectement. Toujours pour la Question 1a, on n'arrive pas à décoder l'égalité à montrer à l'aide de la définition de la matrice inverse dans sept copies sur douze. Six copies sur douze traitent « −1 » comme un exposant dans la Question 1b, et passent directement de $(kA)^{-1}$ à $k^{-1}A^{-1}$ ou encore à $(1/k)\ A^{-1}$. À la Question 2 du devoir, où il fallait montrer que $cof(A^T) = (cof(A))^T$, une seule copie sur onze a fait intervenir l'invariance du déterminant par transposition — l'argument central de la démonstration — et encore était-ce de façon totalement inadéquate.

Fréquemment, les étudiants perdent de vue la structure logique de la démonstration et utilisent le résultat à prouver. Ils introduisent des objets qui ne servent pas dans la démonstration (par exemple, dans la première copie, le terme $A\ A^{-1}$ n'a jamais servi). Ils ne sont pas conscients de la différence entre équivalences et implications simples (deuxième copie). Ils confondent une implication et sa réciproque.

Les étudiants semblent avoir de la difficulté à lire une égalité de droite à gauche. Par exemple, la règle $(AB)^T = B^T A^T$ doit en fait être appliquée de droite à gauche dans la démonstration de la question 1a. Nous avons vu dans la *production 2* que l'étudiant a une vague idée que les matrices doivent être permutées mais dans la plupart des autres copies, on utilise une règle invalide soit, $A^T B^T = (AB)^T$. Une autre raison possible est que les étudiants ont du mal à reconnaître ou appliquer une définition ou une propriété quand il faut y remplacer une variable par une expression complexe (par exemple, appliquer correctement une règle énoncée avec A, quand A y est remplacé par BC ou A^{-1} ou A^T). Dans le cas de la tâche 1, les étudiants devaient comprendre que A^{-1} doit remplacer le symbole (ou la matrice) B dans la règle. Les étudiants ont aussi beaucoup d'ennui à interpréter, décoder une règle, une définition. Par exemple, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ est à décoder comme « l'inverse de A^T s'obtient en transposant l'inverse de A ». Ce qu'il faut comprendre ici, dans une égalité qui concentre à peine une douzaine de symboles, parenthèses comprises, c'est que A est une matrice inversible dont on connaît (ou dont on pourra éventuellement calculer) l'inverse A^{-1} et qu'alors, l'inverse de A^T s'obtiendra simplement en transposant A^{-1}.

À la question 2a, il semble que le symbolisme soit trop difficile à gérer pour les étudiants. Manipuler les indices dans la définition de la matrice des cofacteurs est très difficile pour eux, d'autant plus que la matrice impliquée est en fait une matrice transposée. Il faut comprendre que les symboles contiennent beaucoup d'information implicite. Les indices doubles ont deux fonctions ce qui rend leur manipulation difficile. D'un côté, ils représentent l'adresse du nombre : a_{11} est placé à la première ligne et à la première colonne, a_{ij} est à l'intersection de la *i*-ième ligne et de la *j*-ième colonne. D'autre part, les indices doubles servent aussi à différencier les variables de sorte que les nombres a_{11} et a_{12} peuvent être distincts. On ne peut évidemment pas se référer uniquement à la lettre a comme représentant la valeur de la variable. En transposant la matrice, il y a une perte d'information dépendamment de la manière d'écrire cette matrice. Voici ce qu'on retrouve souvent dans les copies d'étudiants :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & .. \\ \dots & \dots & a_{ij} & .. \\ \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{1n} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ici, l'information en terme de valeur est gardée mais celle en terme d'adresse est perturbée, puisque dans la matrice transposée, le symbole a_{ij} est maintenant affecté à l'élément d'adresse *ji*. L'information concernant la dimension de la matrice est aussi brouillée. Autrement dit, si l'élève décide de préserver l'information quant à la valeur des variables, il perd alors l'information concernant l'adresse des éléments. S'il choisit de garder l'information relative à l'adresse des éléments, les indications concernant la valeur des éléments (en lien avec la matrice initiale) sont perdues. Mentionnons également les difficultés reliées à la compréhension de ce qu'est un élément générique a_{ij}. Finalement, nous avons vu que dans la production 1, et dans plusieurs autres productions recueillies, l'étudiant confond le cofacteur associé à un élément d'une matrice et la matrice des cofacteurs. Cet étudiant confond donc un nombre et une matrice, ce qui illustre bien les propos repris de Sierpinska à propos de l'obstacle du formalisme (cf. section 1.2).

2.4. Bilan de l'analyse diagnostique

Nous avons remarqué que les deux tâches, que nous avions évaluées *a priori*, respectivement, comme relativement simple et complexe sont, à la lumière des analyses de productions, respectivement complexe et très complexe. Nous croyons qu'une analyse *a priori* des tâches est nécessaire pour mesurer une certaine complexité. Nous croyons également que l'étude des productions d'étudiants complète l'analyse *a priori* et précise le niveau de complexité. Nous proposons maintenant un réaménagement des deux questions, en cherchant à prendre en compte les difficultés identifiées pour guider le choix des questions intermédiaires et pour fixer les valeurs des *variables didactiques* (cf. Artigue, 1988).

Tâche 1

Des coefficients fractionnaires et une matrice W de format 4×4 incite à *ne pas* utiliser l'algorithme de Gauss-Jordan pour déterminer W^{-1}. La reformulation proposée vise à donner de meilleurs moyens pour aménager une transition moins abrupte vers le formalisme. On suppose que la propriété $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ aura été vue en cours, et illustrée à travers quelques exemples et exercices.

Question 1. La propriété $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

a) Considérez la matrice L donnée par

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrez que la matrice M, donnée ci-dessous, est l'inverse de L ;

$$M = \begin{bmatrix} \frac{-4}{23} & \frac{-25}{92} & \frac{11}{46} & \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{23} & \frac{-9}{23} & \frac{7}{23} & 0 \\ \frac{6}{23} & \frac{49}{92} & \frac{-5}{46} & \frac{-1}{4} \\ \frac{19}{23} & \frac{45}{46} & \frac{-6}{23} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

b) Déterminez l'inverse de la matrice W, donnée par :

$$W = \begin{bmatrix} \frac{-4}{23} & \frac{-3}{23} & \frac{6}{23} & \frac{19}{23} \\ \frac{-25}{92} & \frac{-9}{23} & \frac{49}{92} & \frac{45}{46} \\ \frac{11}{46} & \frac{7}{23} & \frac{-5}{46} & \frac{-6}{23} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) Démontrez la propriété $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ quand A est une quelconque 3×3.

d) Démontrez la propriété $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ quand A est une quelconque $n \times n$.
Indice : utilisez la définition et l'unicité de l'inverse d'une matrice carrée donnée.

On notera que le fait qu'une réponse correcte à d) constitue également une réponse correcte à c) pourra être utilisé en classe par l'enseignant comme base de discussion, d'ordre méta-mathématique, sur ce qu'est une démonstration *générale* et sur les avantages que cette généralité confère au résultat démontré.

Tâche 2
La question a) vise à ce que les étudiants décodent ce qu'il faut démontrer. En b), les étudiants pourrons manipuler les indices doubles et comprendrons que le cofacteur d'un élément dépend de plusieurs autres éléments de la matrice. Finalement, en c), nous suggérons aux étudiants d'utiliser la propriété d'invariance du déterminant.

Il m'arrive régulièrement de rencontrer sur les copies d'examens d'étudiants des expressions de leur propre intuition pour $cof\left(A^T\right)$ ou $cof\left(A^{-1}\right)$. Mais que valent vraiment ces expressions ?

a) Montrer que $cof(A^T) = (cof\ A)^T$ quand A est une quelconque 2×2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

b) Montrer que $cof(A^T) = (cof\ A)^T$ quand A est une quelconque 3×3,

c) $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

d) Montrer que $cof(A^T) = (cof\ A)^T$ quand A est une quelconque $n \times n$. Pour ce faire, développer une expression pour un élément d'adresse *ij* quelconque (mais fixée) de la première matrice, et comparer avec l'expression pour l'élément de même adresse *ij* dans la deuxième matrice.
Indice : utilisez la propriété d'invariance du déterminant par transposition.

CONCLUSION

À la lumière de l'analyse diagnostique, nous remarquons que l'obstacle du formalisme se manifeste effectivement lorsque les élèves opèrent sur des expressions en perdant de vue à quels objets mathématiques se réfèrent les symboles. Nous croyons qu'un des défis posés à l'enseignement des mathématiques par la transition secondaire-postsecondaire est ce que nous appelons le « paradoxe de l'apprentissage d'une nouvelle algèbre ». Dorier (1997, p. 106) écrit : « Il faut pouvoir travailler sur des équations en oubliant momentanément ce qu'elles représentent mais en sachant y revenir quand besoin est […] ». Nous poussons cette réflexion plus loin en relevant un véritable paradoxe : on introduit une nouvelle algèbre (algèbre élémentaire, algèbre vectorielle, algèbre matricielle, etc.) comme outil de calcul, « d'automatisation », « d'algorithmisation » des démarches, de prise en charge du raisonnement par le calcul et ses règles. Cela suppose qu'on accepte de déléguer à cette algèbre une partie du contrôle de la validité et du sens. Mais ce détachement entraîne à son tour des pertes de contrôle et de sens.

Nous avons également pu remarquer, à travers les productions d'étudiants, d'autres manifestations de l'obstacle du formalisme en lien avec des habiletés ou compétences à développer chez les élèves, qui relèvent souvent de l'implicite : savoir lire une égalité aussi bien de gauche à droite que de droite à gauche, comprendre l'universalité d'une règle énoncée avec des variables qu'on peut changer par des expressions plus complexes (par exemple A devient AB, A^{-1}, A^T, ABC, etc.), savoir décoder une règle complexe (comme $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$), en posant sur cette règle un regard qui relève au moins en partie du « méta », etc.

Drouhard (2006) parle alors de règles du « jeu mathématique » et émet l'hypothèse qu'en ce qui concerne les transitions, les changements de ces règles du jeu mathématique constituent des obstacles bien plus importants que les simples extensions et approfondissements du domaine d'étude des objets mathématiques en cause. Dans le cadre d'un projet doctoral, c'est à ce changement fondamental des règles du jeu et des manières de faire les mathématiques aux niveaux secondaire et postsecondaire que nous allons nous intéresser.

Remerciements
Sincères remerciements à M. Denis Tanguay pour sa disponibilité et ses conseils judicieux et à Mme Diane Demers, pour sa précieuse collaboration au projet.

BIBLIOGRAPHIE

Artigue, M. (1988) Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 9 (3), pp. 281-308.

Bloch, I., Kientega, G. et Tanguay, D. (2006) Synthèse du Thème 6. Transition secondaire, post-secondaire en mathématiques. Dans N. Bednarz (Dir.), *Actes du 3e colloque international Espace Mathématique Francophone : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés* (CD-ROM). Université de Sherbrooke, Canada.

Corriveau, C. (2007) *Arrimage secondaire-collégial: démonstration et formalisme.* Mémoire de maîtrise inédit, Université du Québec à Montréal.

Corriveau, C., et Tanguay, D. (2007) Formalisme accru du secondaire au collégial : les cours d'Algèbre linéaire comme indicateurs. *Bulletin AMQ,* XLVII (1), pp. 6-25.

Dorier, J.-L., Harel, G., Hillel, J., Rogalski, M., Robinet, J., Robert, A., Sierpinska, A. (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.* Coord. par J.-L. Dorier. La Pensée Sauvage. Grenoble, France.

Drouhard, J.-P. (2006) Prolégomènes « épistémographiques » à l'étude des transitions dans l'enseignement des mathématiques. Dans N. Bednarz (Dir.), *Actes du 3e colloque international Espace Mathématique Francophone : L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés* (CD-ROM). Université de Sherbrooke, Canada.

Durand-Guerrier, V. et Arsac, G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherchen en didactique des mathématiques,* 23 (3), pp. 295-342.

Harel, G. et Sowder, L. (1998) *Students' proof schemes : Result from Exploratory Studies*. Dans E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld et J. J. Kaput (Dir.), Research on Collegiate Mathematics Education, Vol. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, USA, pp. 234-283.

Harel, G. et Tall, D. (1991) The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics. *For the learning of mathematics,* Vol. 11 (1), pp. 38-42.

Robert, A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 18 (2), pp. 139-190.

Sierpinska, A., Dreyfus, T. et Hillel, J. (1999) Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra : the Case of Linear Transformations. *Recherches en didactiques des mathématiques*, Vol. 19 (1), pp. 7-40.

Tanguay, D. (2005) Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, n°10, pp. 55-93. IREM de Strasbourg.

Tanguay, D. (2003) L'enseignement de la preuve au collégial. Dans A. Ross (Dir.), Actes du 45^{e} Congrès de l'Association Mathématique du Québec (AMQ), pp. 82-103.

Tanguay, D. (2002) L'enseignement des vecteurs. *Bulletin AMQ*, Vol. XLII (4), pp. 36-47.

Weber, K., et Alcock, L. (2004) Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56, pp. 209-234.